

Matheus Bartolo Guerrero

Modelos em Provisão de Sinistros

Uberlândia

Janeiro, 2015

Matheus Bartolo Guerrero

Modelos em Provisão de Sinistros

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel em Estatística.

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Faculdade de Matemática

Bacharelado em Estatística

Orientador: Dr. Quintiliano Siqueira Schroden Nomelini

Uberlândia

Janeiro, 2015

Matheus Bartolo Guerrero

Modelos em Provisão de Sinistros

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel em Estatística.

Trabalho aprovado. Uberlândia, 29 de Janeiro de 2015:

Dr. Quintiliano Siqueira Schroden
Nomelini
Orientador

Dr. Janser Moura Pereira
Convidado

Dr. José Waldemar da Silva
Convidado

Uberlândia
Janeiro, 2015

*Este trabalho é dedicado ao ensino público brasileiro,
que mesmo em meio a incontáveis adversidades,
continua transformando jovens pobres e sonhadores
em homens dignos e realizados.*

Agradecimentos

Os agradecimentos principais são dedicados aos nobres professores doutores Edmilson Rodrigues Pinto, Ednaldo Carvalho Guimarães, José Waldemar da Silva, Lúcio Borges de Araújo, Marcelo Tavares, Quintiliano Siqueira Schroden Nomelini e Rogério De Melo Costa Pinto. Em suas aulas muito mais do que Estatística fora ensinado. E, durante todo o curso, a porta de suas salas estiveram sempre abertas para conversas diversas, descompromissadas e amigáveis.

Agradecimentos especiais são dedicados à minha família - Domingos, Leila, Lucas e Victória, pois são os alicerces de minha vida.

Um agradecimento fraterno é dedicado à Maria Luiza Maes. Parceira nesses anos de graduação. Nossa segunda graduação, diga-se de passagem! Durante esse período conseguimos conciliar trabalho, graduação, pós-graduação e vida pessoal. Fomos verdadeiros sobreviventes e os dois primeiros formandos do Bacharelado em Estatística da UFU.

Um agradecimento singelo é dedicado à Hetielle Veiga, a Pequena. Com ela, o futuro torna-se uma miríade de possibilidades encantadoras e irresistíveis.

*“If money is your hope for independence you will never have it.
The only real security that a man will have in this world is a
reserve
of knowledge, experience, and ability.”*

— HENRY FORD

Resumo

Parte do trabalho de uma companhia seguradora é guardar provisões para sinistros, as chamadas reservas técnicas, a fim de mitigar o risco inerente à sua atividade e cumprir exigências legais.

Existem vários métodos para estimar as provisões para sinistros, tanto métodos determinísticos quanto métodos estocásticos. Um dos métodos mais utilizados é método determinístico *Chain Ladder*, de simples aplicação. Todavia, os métodos determinísticos produzem apenas estimativas pontuais, motivo pelo qual os métodos estocásticos têm-se tornado cada vez mais populares, pois são capazes de produzir estimativas intervalares, medindo a variabilidade inerente às reservas técnicas.

Neste trabalho serão aplicados os métodos determinísticos (*Grossing Up*, *Link Ratio* e *Chain Ladder*) e os estocásticos (Thomas Mack e *Bootstrap* associado ao modelo de sobredispersão de Poisson) ao cálculo das provisões para sinistros do ramo automóvel danos materiais ocorridos até dezembro de 2012. Os dados utilizados no presente estudo são referentes a uma base de dados reais fornecida pela AXA Portugal. A comparação dos resultados obtidos pelos diferentes métodos é apresentada.

Palavras-chaves: Sinistros. Reservas técnicas. *Chain Ladder*. Thomas Mack.

Abstract

Part of the work of an insurance company is to keep claims reserves, which is known as the technical reserves, in order to mitigate the risk inherent in their activities and comply with the legal obligations.

There are several methods for estimate the claims reserves, deterministic and stochastic methods. One of the most used method is the deterministic method Chain Ladder, of simple application. However, the deterministic methods produce only point estimates, for which the stochastic methods have become increasingly popular because they are capable of producing interval estimates, measuring the variability inherent in the technical reserves.

In this study the deterministic methods (Grossing Up, Link Ratio and Chain Ladder) and stochastic (Thomas Mack and Bootstrap associated with Overdispersed Poisson model) will be applied to estimate the claims reserves derived from automobile material damage occurred until December 2012. The data used in this research is based on a real database provided by AXA Portugal. The comparison of results obtained by different methods is hereby presented.

Keywords: Claims. Technical reserves. Chain Ladder. Thomas Mack.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Evolução do processo de sinistro ao longo do tempo.	24
Figura 2 – Evolução dos pagamentos e custos para dois anos de acidente específicos.	44
Figura 3 – Evolução dos coeficientes de desenvolvimento $\hat{f}_i$, $0 \leq i \leq 14$, para os métodos determinísticos.	46
Figura 4 – Evolução das reservas $\hat{R}_i$, $0 \leq i \leq 14$, para os métodos determinísticos.	47
Figura 5 – Ajuste de uma distribuição log-normal à reserva total.	50

Lista de tabelas

Tabela 1 – Triângulo <i>Run-off</i> Incremental.	28
Tabela 2 – Triângulo <i>Run-off</i> dos Pagamentos Acumulados - Ramo Automóvel Danos Materiais.	42
Tabela 3 – Triângulo <i>Run-off</i> dos Custos Acumulados - Ramo Automóvel Danos Materiais.	43
Tabela 4 – Coeficientes de desenvolvimento $\hat{f}_i$, $0 \leq i \leq 14$, dos métodos determinísticos.	45
Tabela 5 – Valores <i>Ultimate</i> ajustados para os Triângulos <i>Run-off</i> de Pagamentos e Custos Acumulados.	47
Tabela 6 – Reservas totais estimadas, $\hat{R}$, para os Triângulos <i>Run-off</i> de Pagamentos e Custos Acumulados.	48
Tabela 7 – Intervalos de confiança para as estimativas das reservas calculadas pelo método Thomas Mack para o Triângulo <i>Run-off</i> dos Pagamentos Acumulados.	49
Tabela 8 – Medidas de variabilidade das estimativas das reservas via método <i>Bootstrap</i>	50
Tabela 9 – Coeficientes individuais e de desenvolvimento para o $\Delta Run-off$ dos Pagamentos Acumulados - método <i>Grossing Up</i>	62
Tabela 10 – $\Delta Run-off$ Inferior dos Pagamentos Acumulados - método <i>Grossing Up</i>	63
Tabela 11 – Coeficientes individuais e de desenvolvimento para o $\Delta Run-off$ dos Pagamentos Acumulados - método <i>Link Ratio</i>	64
Tabela 12 – $\Delta Run-off$ Inferior dos Pagamentos Acumulados - método <i>Link Ratio</i>	65
Tabela 13 – $\Delta Run-off$ Inferior dos Pagamentos Acumulados - método <i>Chain Ladder</i>	66
Tabela 14 – Coeficientes individuais e de desenvolvimento para o $\Delta Run-off$ dos Custos Acumulados - método <i>Grossing Up</i>	67
Tabela 15 – $\Delta Run-off$ Inferior dos Custos Acumulados - método <i>Grossing Up</i>	68
Tabela 16 – Coeficientes individuais e de desenvolvimento para o $\Delta Run-off$ dos Custos Acumulados - método <i>Link Ratio</i>	69
Tabela 17 – $\Delta Run-off$ Inferior dos Custos Acumulados - método <i>Link Ratio</i>	70

Lista de abreviaturas e siglas

CL	<i>Chain Ladder</i>
EQM	Erro Quadrático Médio
IBNR	<i>Incurred But Not Reported</i>
IC	Intervalo de Confiança
LI	Limite Inferior
LS	Limite Superior
MLG	Modelos Lineares Generalizados
RBNS	<i>Reported But Not Settled</i>
VBA	<i>Visual Basic for Applications</i>

Sumário

	Sumário	21
1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Reservas Técnicas para Sinistros	23
1.2	<i>Softwares</i>	25
2	METODOLOGIAS	27
2.1	Métodos Determinísticos	29
2.1.1	<i>Grossing Up</i>	29
2.1.2	<i>Link Ratio</i>	30
2.1.3	<i>Chain Ladder</i>	31
2.2	Métodos Estocásticos	32
2.2.1	Thomas Mack	33
2.2.2	Modelo de Sobredispersão de Poisson	35
2.2.3	<i>Bootstrap</i>	37
3	RESULTADOS	41
4	CONCLUSÃO	53
	Referências	55
	APÊNDICES	57
	APÊNDICE A – CÓDIGO R	59
	APÊNDICE B – <i>OUTPUTS</i>	61

1 Introdução

Este trabalho é o produto final das disciplinas Trabalho de Conclusão de Curso 1 e 2 do Bacharelado em Estatística da Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia.

O objetivo deste trabalho é estudar alguns métodos determinísticos e estocásticos aplicados na estimação das reservas técnicas para sinistros pendentes dos tipos *Incurred But Not Reported* (IBNR) e *Reported But Not Settled* (RBNS), comparando os seus resultados e escolhendo qual o método mais adequado aos dados reais, referentes aos sinistros do ramo automóvel danos materiais - ocorridos até dezembro de 2012 - e fornecidos pela AXA Portugal Companhia de Seguros S.A., situada na cidade do Porto em Portugal, empresa em que o autor deste trabalho estagiou no primeiro semestre de 2013.

Neste capítulo será feita a exposição de alguns fundamentos teóricos que norteiam este trabalho. No Capítulo 2 será fornecida uma sucinta revisão dos métodos determinísticos e estocásticos utilizados. No Capítulo 3, uma aplicação dos métodos aos dados será apresentada. Para finalizar, o Capítulo 4 apresentará as principais conclusões deste estudo.

1.1 Reservas Técnicas para Sinistros

Parte vital das atividades de uma companhia seguradora é estimar reservas técnicas, ou provisões, para pagamentos futuros decorridos de sinistros pendentes ou a serem declarados. O cálculo dessas reservas recebe atenção especial de gestores, acionistas, auditores, autoridades fiscais e reguladores. O leitor que desejar conhecer melhor o mundo dos seguros, seus diferentes tipos, particularidades das apólices e legislação específica poderá consultar [1] e [2].

Os sinistros pendentes são aqueles ocorridos no exercício corrente ou em anos anteriores mas que ainda estão em aberto e gerarão necessidades de novos pagamentos por parte da seguradora. Diz-se que esses sinistros ainda não foram regularizados ou finalizados.

Em geral, quando um sinistro ocorre, existe um hiato (em dias ou até mesmo anos) entre o momento do acidente e a notificação à seguradora. Existe ainda outro hiato, chamado período de tratamento, entre essa notificação e a regularização do sinistro, pois poderão se realizar análises e perícias das situações em que o sinistro ocorreu, bem como poderá

surgir a necessidade de reabertura do processo de sinistro. Durante todo esse período a seguradora poderá ter despesas financeiras. A Figura 1 ilustra esse processo. Assim, a fim de obter um cenário realista da sua situação financeira e do montante total a ser despendido com os sinistros, as seguradoras devem calcular e avaliar as reservas técnicas.

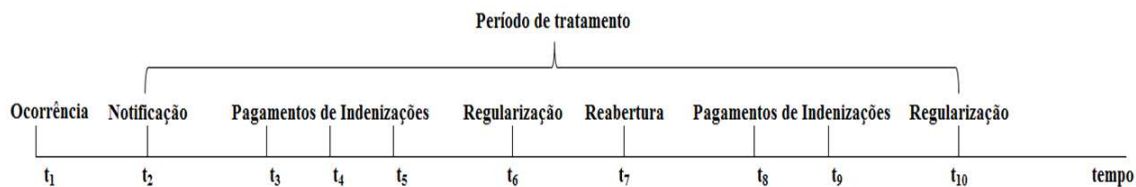


Figura 1 – Evolução do processo de sinistro ao longo do tempo.

Dentre os tipos de sinistros pendentes pode-se citar os RBNS, que são aqueles sinistros que foram notificados à seguradora mas ainda não foram regularizados. Os pagamentos futuros decorridos desses sinistros podem ser estimados com base em informações passadas e numa análise criteriosa do desenvolvimento futuro. Em geral, essas estimativas são feitas por um especialista do departamento de sinistros.

Em contrapartida, existem, os IBNR, que são os sinistros que ocorreram mas ainda não foram notificados à seguradora. As reservas técnicas estimadas para esses sinistros podem ser calculadas com base em métodos estatísticos, usando o conhecido desenvolvimento dos montantes já pagos e as estimativas dos RBNS.

Existem diferentes métodos (determinísticos e estocásticos) para calcular as reservas técnicas dos sinistros IBNR e RBNS, conduzindo a diferentes resultados, cada um baseado em certos pressupostos. Todavia, os métodos determinísticos produzem apenas estimativas pontuais das reservas técnicas e os métodos estocásticos permitem ainda determinar estimativas intervalares das reservas técnicas, medindo a variabilidade inerente. Alguns dos métodos possuem limitações e/ou vantagens quando comparados a outros em uma dada situação. O analista, sendo ele atuário ou não, deverá identificar o método mais adequado para cada situação, baseado nas circunstâncias, na natureza dos dados ou na sua experiência profissional.

Recomenda-se aplicar vários métodos e comparar os seus resultados, selecionando o mais factível com a realidade dos dados. Para isso, as reuniões com o departamento de sinistros são importantes para compreender não só o comportamento dos dados em análise, mas também o comportamento dos *outputs* dos métodos aplicados.

Neste trabalho será apresentado uma breve revisão de três métodos determinísticos - *Grossing Up*, *Link Ratio* e *Chain Ladder* - e de três métodos estocásticos - Thomas Mack, modelo de sobredispersão de Poisson e *Bootstrap* ([3], [4], [5] e [6]). Uma aplicação desses métodos, com exceção do modelo de sobredispersão de Poisson, apresentado apenas como método de associação para o método *Bootstrap*, será realizada a uma base de dados reais provenientes de sinistros do ramo automóvel danos materiais fornecida pela AXA Portugal.

1.2 Softwares

Na execução deste trabalho os seguintes *softwares* foram utilizados:

- *Microsoft Excel* 2010

O *Excel* é um *software* para cálculo em planilhas eletrônicas. Rotinas programadas podem ser criadas através da linguagem *Visual Basic for Applications* (VBA). O *Excel* pode ser adquirido em [7]. Neste trabalho, foi utilizado para formatação da base de dados e aplicação dos métodos determinísticos.

- R

O R é um *software* estatístico *open source* disponível em [8]. Neste trabalho, foi utilizado para aplicação dos métodos estocásticos. Os códigos implementados encontram-se disponíveis no Apêndice A.

2 Metodologias

Neste capítulo os métodos determinísticos e estocásticos utilizados neste estudo para o cálculo das reservas técnicas em sinistros dos tipos IBNR e RBNS são apresentados.

Todos os métodos são baseados no Triângulo de Desenvolvimento ou Triângulo *Run-off*, que é uma matriz (incompleta) em que os dados referentes ao histórico dos sinistros ocorridos e notificados (até a presente data) à seguradora são organizados. Em geral, os dados são apresentados ano a ano, mas os modelos expostos podem ser aplicados a outros períodos.

Neste trabalho serão considerados dados anuais durante um período de $I + 1$ anos. Define-se data inicial como a data de início das informações, ou seja, $I + 1$ anos antes do ano final. O ano de acidente (ou de origem) de um certo sinistro será denotado por i , se ele ocorreu i anos após a data inicial, e o ano de desenvolvimento de um certo sinistro será chamado de j , se ele gerou pagamentos j anos após a data de ocorrência. A fim de diminuir a dimensão do Triângulo *Run-off* pode-se acumular ao primeiro ano de acidente ($i = 0$) as informações de anos anteriores.

Por exemplo, suponha que a data inicial das informações seja o ano de 1998 ($i = 0$) e o ano final seja 2012 ($I = 14$), assim um sinistro que ocorreu em 2000 e foi notificado gerando pagamentos apenas em 2008, terá como ano de acidente $i = 2$ e como ano de desenvolvimento $j = 8$. Pode-se observar que o ano de acidente varia entre 0 e I , enquanto o ano de desenvolvimento varia entre 0 e $I - i$, onde i representa o ano de acidente. Se um sinistro ocorreu no ano i e só há informações até I , então o ano de notificação máximo para esse sinistro será $I - i$.

Seja $X_{i,j}$, $0 \leq i \leq I$ e $0 \leq j \leq J$, o montante pago ou incorrido referente ao ano de acidente i e ano de desenvolvimento j , em que I é o último ano de acidente e J o último ano de desenvolvimento. Seja $C_{i,j}$, $0 \leq i \leq I$ e $0 \leq j \leq J$, o montante acumulado pago ou incorrido referente ao ano de acidente i até o ano de desenvolvimento j . Observe que

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^j X_{i,k}, \quad 0 \leq i \leq I \text{ e } 0 \leq j \leq J.$$

Sem perda de generalidade, suponha $I = J$.

Na Tabela 1 apresenta-se o Triângulo *Run-off* Incremental. Assim, por exemplo, a posição $X_{1,2}$ fornece o montante pago referente ao ano acidente 1 e ao ano de desenvolvi-

mento 2. Caso se substitua, na Tabela 1, as quantidades $X_{\cdot, \cdot}$ por $C_{\cdot, \cdot}$ tem-se o Triângulo *Run-off* Acumulado. Consequentemente, a posição $C_{1,2}$ fornece, para os sinistros ocorridos no ano de acidente 1, os montantes pagos acumulados até o ano de desenvolvimento 2, isto é, $C_{1,2} = X_{1,0} + X_{1,1} + X_{1,2}$.

Como seria de esperar, só são conhecidos os valores de $X_{i,j}$ (ou $C_{i,j}$) para $0 \leq i \leq I$ e $0 \leq j \leq I - i$.

As quantidades $X_{i,j}$ ($C_{i,j}$), $0 \leq i \leq I$ e $0 \leq j \leq \infty$, além de representar os montantes totais pagos (acumulados), podem representar a média das indenizações pagas (acumuladas), o número de sinistros declarados (acumulados), o número de sinistros pagos (acumulados), o montante dos prêmios (acumulados) ou, ainda, o número de apólices (acumuladas).

Cada linha da Tabela 1 representa um “ano de acidente” ou origem de sinistros, e as colunas correspondem aos “anos de pagamento” das indenizações de sinistros. Enquanto as diagonais da tabela são os “anos calendários”, ou seja, períodos em que são realizados os pagamentos, por exemplo, se $i = 0$ representar o ano de 1998, então a soma da terceira diagonal do Triângulo *Run-off*, isto é, $X_{2,0} + X_{1,1} + X_{0,2}$, indica todos os sinistros pagos no ano calendário de 2000.

A coluna *Ultimate* contém a informação relativa a todos os sinistros ocorridos mas não regularizados após I anos de desenvolvimento. Diz-se que o Triângulo *Run-off* (Incremental ou Acumulado) está completo quando não há mais despesas referentes ao primeiro ano de acidente ($i = 0$). Quando tal não acontece, o analista deve estimar o valor *Ultimate* relativo ao primeiro ano, $X_{0,\infty}$ (ou $C_{0,\infty}$), seja via algum método empírico ou estatístico.

No âmbito do Triângulo *Run-off* Incremental, as estimativas das reservas técnicas,

Tabela 1 – Triângulo *Run-off* Incremental.

Ano de Acidente	Ano de Desenvolvimento								<i>Ultimate</i>
	0	1	2	...	i	...	$I - 1$	I	∞
0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$	$X_{0,2}$	...	$X_{0,i}$	...	$X_{0,I-1}$	$X_{0,I}$	$X_{0,\infty}$
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	...	$X_{1,i}$	...	$X_{1,I-1}$		
2	$X_{2,0}$	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$	...	$X_{2,i}$	...			
...	...	...	...	...	...				
i	$X_{i,0}$	$X_{i,1}$	$X_{i,2}$	...					
...	...	...	...						
$I - 1$	$X_{I-1,0}$	$X_{I-1,1}$							
I	$X_{I,0}$								

para cada ano de acidente i , são dadas por

$$\hat{R}_i = \sum_{j=I-i+1}^{\infty} \hat{X}_{i,j}, \quad 0 \leq i \leq I,$$

em que $\hat{X}_{i,j}$ são as estimativas dos montantes pagos referentes ao ano de acidente i e de desenvolvimento j , designadas por quantidades incrementais. No que se refere ao Triângulo *Run-off* Acumulado, basta fazer

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,\infty} - C_{i,I-i}, \quad 0 \leq i \leq I, \quad (2.1)$$

em que $\hat{C}_{i,\infty}$ representa as estimativas dos montantes acumulados (valor *Ultimate*) no final do ano de estudo em relação ao ano de acidente i .

O valor da reserva técnica total (ou provisão total) é dado por

$$\hat{R} = \sum_{i=0}^I \hat{R}_i. \quad (2.2)$$

A fim de estimar as reservas técnicas, os métodos a serem apresentados nas próximas subseções, seguindo os diferentes pressupostos, permitem estimar as quantidades $X_{i,j}$ (e/ou $C_{i,j}$) quando $i + j \geq I$, preenchendo o triângulo inferior (em cinza) na Tabela 1.

2.1 Métodos Determinísticos

Nesta seção apresentam-se três métodos determinísticos para estimar as reservas técnicas em sinistros dos tipos IBNR e RBNS. Tais métodos figuram entre os mais simples, uma vez que estimam as reservas técnicas, baseando-se em padrões que os anos de desenvolvimento apresentam, em termos de proporções do valor *Ultimate*. Em algumas situações, os métodos determinísticos, em especial o método *Chain Ladder*, são satisfatórios e as sofisticações estocásticas são usadas para determinar os desvios padrão ou erros de previsão das estimativas das reservas técnicas.

2.1.1 *Grossing Up*

O método *Grossing Up*, apresentado em [4], também conhecido como técnica do *Iceberg*, uma vez que o valor *Ultimate* (a massa total do *Iceberg*) é uma proporção das despesas já pagas dos sinistros (a parte visível do *Iceberg*). Os montantes a serem pagos (a parte não vista do *Iceberg*) são obtidos por subtração, segundo a expressão (2.1).

As estimativas para $\hat{C}_{i,\infty}$, a coluna *Ultimate* da Tabela 1, são dadas por

$$\hat{C}_{i,\infty} = \frac{C_{i,I-i}}{\hat{f}_i}, \quad 0 \leq i \leq I, \quad (2.3)$$

em que $\hat{f}_i$ são os coeficientes de desenvolvimento dados por

$$\hat{f}_i = \begin{cases} \frac{1}{i} \sum_{k=0}^{i-1} f_{k,I-i}, & i = 2, \dots, I \\ \frac{C_{i,I-i}}{\hat{C}_{0,\infty}}, & \text{para } i = 0, 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

em que $f_{k,I-i}$ é um coeficiente individual. A fórmula geral dos coeficientes individuais é dada por

$$f_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{\hat{C}_{i,\infty}}, \quad i + j < I.$$

Para realizar o procedimento acima percorre-se o Triângulo *Run-off* Acumulado da direita para a esquerda.

Calculando as estimativas $\hat{C}_{i,\infty}$, obtém-se as estimativas $\hat{R}_i$ segundo (2.1) e, posteriormente, o valor de $\hat{R}$ dado em (2.2).

Com o objetivo de preencher o triângulo inferior da Tabela 1 basta fazer, para $i + j \geq I$,

$$\hat{C}_{i,j} = \hat{C}_{i,\infty} \cdot \hat{f}_j. \quad (2.5)$$

O método *Grossing Up* possui algumas variações, alterando a direção em que se trabalha no triângulo e/ou substituindo a função média pela função mínimo no cálculo dos coeficientes de desenvolvimento. Essas variações não são objeto de estudo deste trabalho.

2.1.2 *Link Ratio*

O método *Link Ratio*, apresentado em [4], nada mais é do que um processo recíproco do método *Grossing Up*, a diferença reside na direção em que se trabalha ao longo do Triângulo *Run-off* Acumulado. Enquanto no método *Grossing Up* trabalha-se da direita para a esquerda, projetando o valor *Ultimate* nos anos de desenvolvimento via cálculo dos coeficientes individuais, no método *Link Ratio* trabalha-se da esquerda para a direita, calculando os sucessivos coeficientes a partir dos anos de desenvolvimento até o valor *Ultimate*.

O método *Link Ratio* é a base do método *Chain Ladder* a ser apresentado na próxima subseção.

Os valores *Ultimate* são estimados através do estimador

$$\hat{C}_{i,\infty} = C_{i,I-i} \cdot \prod_{j=I-i}^I \hat{f}_j, \quad (2.6)$$

em que os coeficientes de desenvolvimento $\hat{f}_j$ são dados por

$$\hat{f}_j = \begin{cases} \frac{1}{(I-j)} \sum_{k=0}^{I-j-1} f_{k,j}, & j = 0, 1, \dots, I-1 \\ \frac{C_{0,I}}{\hat{C}_{0,\infty}}, & \text{para } j = I, \end{cases} \quad (2.7)$$

em que $f_{k,j}$ é um coeficiente individual. Os coeficientes individuais são obtidos através de

$$f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}, \quad i + j < I.$$

Nas condições apresentadas, as estimativas para as reservas técnicas associadas a cada ano de acidente i , são dadas pela expressão (2.1) para $1 \leq i \leq I$. Logo, para estimar a provisão total procede-se à soma dos valores de $\hat{R}_i$, segundo a equação (2.2).

A fim de completar a parte inferior do Triângulo *Run-off* Acumulado dado na Tabela 1, basta fazer, para $i + j \geq I$,

$$\hat{C}_{i,j} = \hat{C}_{i,\infty} / \hat{f}_{j-1}. \quad (2.8)$$

Existem algumas variações do método *Link Ratio*, em que se substitui a função média no cálculo dos coeficientes de desenvolvimento pela função máximo ou por diferentes médias ponderadas.

2.1.3 Chain Ladder

O mais popular dos métodos determinísticos para estimar as provisões de sinistros é o método *Chain Ladder* ([3] e [4]). Como dito, esse método é uma das variações do método *Link Ratio*, no sentido em que calcula uma média ponderada dos valores dos sinistros. Essa média ponderada utiliza o peso “original” dos dados provenientes do Triângulo *Run-off* Acumulado, isto é, cada coeficiente de desenvolvimento é ponderado pelo valor dos montantes pagos dos sinistros de qual é originado. O coeficiente de desenvolvimento

$\hat{f}_j$ é assim definido pela fórmula

$$\hat{f}_j = \begin{cases} \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}}, & j = 0, 1, \dots, I-1 \\ \frac{\hat{C}_{0,\infty}}{C_{0,I}}, & \text{para } j = I. \end{cases} \quad (2.9)$$

Assim, as estimativas do triângulo inferior da Tabela 1 são dadas por

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,j-1} \cdot \hat{f}_{j-1}, \quad i + j > I.$$

As estimativas para os valores *Ultimate* são obtidos recursivamente pela expressão

$$\hat{C}_{i,\infty} = C_{i,I-i} \prod_{k=I-i}^I \hat{f}_k, \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (2.10)$$

Portanto, as reservas técnicas para o ano de acidente i são estimadas pela equação (2.1) e a reserva total é dada pela expressão (2.2).

É necessário notar que o método *Chain Ladder* parte do pressuposto de que existe proporcionalidade entre os acontecimentos passados e os que ocorrerão no futuro. Assim, assume que os sinistros acumulados, $C_{i,j}$, de diferentes anos de acidente i , são independentes e os coeficientes de desenvolvimento $\hat{f}_j$, $0 \leq j \leq I$, são constantes ao longo dos anos de ocorrência dos sinistros. Adicionalmente é permitido à frequência de sinistralidade oscilar ao longo do tempo.

2.2 Métodos Estocásticos

Os métodos determinísticos têm sido os mais utilizados graças a sua simplicidade. Todavia, produzem apenas estimativas pontuais das reservas técnicas, sensíveis à variabilidade dos dados. Assim, existem incertezas em torno das estimativas obtidas por esses métodos. Os métodos estocásticos apresentam-se como a solução para medir essa incerteza ou variabilidade, calculando os desvios padrão e os erros de previsão das estimativas das reservas técnicas, bem com da construção de intervalos de confiança.

Os métodos estocásticos podem ser paramétricos (como no caso do modelo de sobredispersão de Poisson) ou não paramétricos (por exemplo, o método Thomas Mack) conforme a distribuição de probabilidade que é atribuído aos dados. O método *Bootstrap* pode ser

tanto paramétrico como não paramétrico, pois utiliza as estimativas das reservas de outros métodos estocásticos para realizar um processo de simulação via reamostragem e obter as medidas da variabilidade das reservas estimadas.

2.2.1 Thomas Mack

O método Thomas Mack ([9] e [10]) é um modelo estocástico que permite calcular a variabilidade das estimativas das reservas técnicas obtidas com o método *Chain Ladder*, sem a necessidade de assumir qualquer distribuição de probabilidade específica para os dados, ou seja, é um método não paramétrico. Conhecendo essas medidas de variabilidade é possível aproximar a distribuição de probabilidade das perdas da seguradora à distribuição de probabilidade normal ou log-normal, por exemplo.

Como o método Thomas Mack usa os resultados obtidos pelo método *Chain Ladder*, ele será baseado nos mesmos pressupostos. Naturalmente, pressupostos adicionais são necessários para obter a esperança e a variância das estimativas das reservas.

Portanto, considere $C_{i,j}$ uma variável aleatória (v.a.) em que se tem uma observação se $i + j \leq I$, isto é, as observações dessa v.a. provêm do Triângulo *Run-off* Acumulado. Assim, enumera-se os seguintes pressupostos:

I. Proporcionalidade entre os anos de desenvolvimento.

Existem coeficientes de desenvolvimento, $f_j > 0$, $j = 0, 1, \dots, I - 1$, tais que

$$E(C_{i,j+1}|C_{i,0}, \dots, C_{i,j}) = C_{i,j} \cdot f_j, \quad 0 \leq i \leq I.$$

As estimativas desses coeficientes são dadas pela expressão (2.9).

II. Centralidade dos fatores de desenvolvimento.

As variáveis aleatórias $C_{i,j}$ de diferentes anos de acidente são independentes, ou seja,

$$\{C_{i,0}, \dots, C_{i,\infty}\} \text{ e } \{C_{k,0}, \dots, C_{k,\infty}\}, \quad i \neq k, \quad 0 \leq i, k \leq I - 1, \text{ são independentes,}$$

logo, os estimadores dos coeficientes de desenvolvimento, $\hat{f}_j$, são centrados, isto é, são não viesados.

III. Existência de uma constante de proporcionalidade, σ_j^2 .

Existe uma constante de proporcionalidade, $\sigma_j^2 \geq 0$, tal que

$$\text{Var}(C_{i,j+1}|C_{i,0}, \dots, C_{i,j}) = C_{i,j} \cdot \sigma_j^2, \quad 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq I - 1,$$

logo, para cada ano de desenvolvimento j , existe uma única constante de proporcionalidade σ_j^2 . Assim, garante-se que os estimadores dos coeficientes de desenvolvimento são os de menor variância.

Conhecendo as estimativas de f_j calcula-se

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2, \quad 0 \leq j \leq I-2,$$

e

$$\hat{\sigma}_{I-1}^2 = \begin{cases} 0, & \text{caso } \hat{f}_{I-1} = 1 \text{ e se a regularização dos sinistros terminar até } I \text{ anos;} \\ \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{I-2}^4}{\hat{\sigma}_{I-3}^2}, \min \left(\hat{\sigma}_{I-3}^2, \hat{\sigma}_{I-2}^2 \right) \right), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os valores *Ultimate*, as estimativas das reservas para cada ano de acidente i , $\hat{R}_i$, bem como a reserva total $\hat{R}$, são obtidos como no método *Chain Ladder*.

Assim, uma vez obtidas as estimativas das reservas técnicas procede-se ao cálculo do erro quadrático médio (EQM), a fim de determinar a variabilidade dessas estimativas. Logo,

$$EQM(\hat{R}_i) = E \left((R_i - \hat{R}_i)^2 | T_C \right) = E \left((C_{i,\infty} - \hat{C}_{i,\infty})^2 | T_C \right),$$

em que $T_C = \{C_{i,j} | i+j \leq I\}$ é o conjunto de todos os montantes acumulados pagos conhecidos, isto é, é o Triângulo *Run-off* Acumulado.

Sob os pressupostos I, II e III, o erro quadrático médio de $\hat{R}_i$ para $i = 1, 2, \dots, I$ é estimado por

$$\widehat{EQM}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,\infty}^2 \cdot \sum_{k=I-i-1}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{r=0}^{I-k-1} C_{r,k}} \right), \quad (2.11)$$

e portanto, é possível estimar o erro quadrático médio de $\hat{R}$

$$\widehat{EQM}(\hat{R}) = \sum_{i=1}^I \left\{ \left(\widehat{EQM}(\hat{R}_i) \right)^2 + \hat{C}_{i,\infty} \cdot \left(\sum_{j=i}^I \hat{C}_{j,\infty} \right) \cdot \left(\sum_{k=I-i-1}^{I-1} \frac{2\hat{\sigma}_k^2/\hat{f}_k^2}{\sum_{r=0}^{I-k-1} C_{r,k}} \right) \right\}. \quad (2.12)$$

Finalmente, assumindo que as estimativas das reservas, $\hat{R}_i$ e $\hat{R}$, possuem distribuição normal, pode-se calcular os intervalos de $(1-\alpha) \times 100\%$ de confiança, respectivamente por

$$\left(\hat{R}_i \pm \Phi^{-1} \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) \sqrt{\widehat{EQM}(\hat{R}_i)} \right), \quad (2.13)$$

e

$$\left(\hat{R} \pm \Phi^{-1} \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) \sqrt{\widehat{EQM}(\hat{R})} \right), \quad (2.14)$$

em que $\Phi^{-1} \left(\frac{1-\alpha}{2} \right)$ representa o quantil de probabilidade $(1-\alpha)/2$ da distribuição Normal Padrão.

2.2.2 Modelo de Sobredispersão de Poisson

Uma outra forma de construir modelos para as reservas é ter por base a estrutura dos Modelos Lineares Generalizados (MLG). O modelo de sobredispersão de Poisson é um MLG utilizado para estimar a variabilidade das reservas técnicas. É um método paramétrico, uma vez que assume que os dados do Triângulo *Run-off* Incremental seguem uma distribuição de probabilidade de sobredispersão de Poisson, ou seja, nessa distribuição a variância não é igual à média, mas proporcional a ela. Não é o objetivo deste trabalho descrever os MLG, por isso serão unicamente apresentados os resultados pertinentes para a aplicação do método. Uma revisão geral sobre os MLG pode ser feita em [11], já uma revisão especificamente aplicada no contexto deste trabalho é apresentada em [3].

Seja $T_I = \{X_{i,j} | i + j \leq I\}$ o Triângulo *Run-off* Incremental. No âmbito do método de sobredispersão de Poisson, as variáveis aleatórias $X_{i,j}$ são independentes e seguem uma distribuição de probabilidade de sobredispersão de Poisson tais que

$$E(X_{i,j}) = \mu_{ij} \quad \text{e} \quad \text{Var}(X_{i,j}) = \phi \mu_{ij},$$

em que ϕ é um parâmetro de dispersão.

Esse método tem algumas limitações em relação aos anteriores, uma vez que a soma dos montantes pagos dos sinistros em cada coluna no Triângulo *Run-off* Incremental deve ser positiva, isto é, $\sum_{i=0}^I X_{i,j} \geq 0$, $0 \leq j \leq I$. Assim, esse método tem sua aplicação limitada no caso de dados referentes aos custos dos sinistros, uma vez que esse tipo de dados pode apresentar uma soma negativa para os últimos anos de desenvolvimento do triângulo.

Para fins de estimação e seguindo a lógica dos MLG, usa-se uma estrutura aditiva para a média através de uma função de ligação logarítmica. Logo, o preditor linear é dado por

$$\eta_{i,j} = \log(\mu_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j, \quad 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq I - i, \quad (2.15)$$

em que, α_i e β_j representam a contribuição das covariáveis anos de acidente i e ano de desenvolvimento j . A fim de garantir a identificabilidade do modelo, assume-se que

$\alpha_0 = \beta_0 = 0$, o que implica que as reservas para o ano de acidente $i = 0$ são nulas. O parâmetro μ é a média do triângulo completo.

Os parâmetros μ , α_i e β_j são estimados pelo método de máxima verossimilhança via método de *scores* de Fisher. Conhecendo as suas estimativas, tem-se

$$\hat{\mu}_{ij} = \exp(\hat{\eta}_{i,j}) = \exp(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j), \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq j \leq I - i + 1. \quad (2.16)$$

Observe-se que para completar o Triângulo *Run-off* Incremental dos dados basta fazer $\hat{X}_{i,j} = \hat{\mu}_{ij}$ para $i + j > I$.

Portanto, para cada ano de acidente i , as estimativas das reservas técnicas são dadas por

$$\hat{R}_i = \sum_{j=I-i+1}^I \hat{\mu}_{ij}, \quad 1 \leq i \leq I. \quad (2.17)$$

Para obter uma estimativa da reserva total basta fazer $\hat{R} = \sum_{i=0}^I \hat{R}_i$.

Para estimar o EQM de $\hat{R}_i$ e $\hat{R}$, primeiro deve-se estimar o parâmetro de dispersão ϕ . Para isso, considere os desvios $d_{i,j}$ referentes às células (i, j) do Triângulo *Run-off* Incremental, dados por

$$d_{i,j} = X_{i,j} \log \left(\left| \frac{X_{i,j}}{\hat{X}_{i,j}} \right| \right) - (X_{i,j} - \hat{X}_{i,j}), \quad 0 \leq i, j \leq I.$$

Seja D o desvio relativo ao modelo, logo

$$D = 2 \sum_{i=0}^I d_{i,i},$$

e pode-se estimar ϕ por

$$\hat{\phi} = \frac{D}{I^2 + I + 1}.$$

Finalmente,

$$\widehat{EQM}(\hat{R}_i) = \sum_{j=I-i-1}^I \hat{\phi} \hat{\mu}_{ij} + \sum_{j=I-i-1}^I \hat{\mu}_{ij}^2 Var(\hat{\eta}_{ij}) + 2 \sum_{\substack{j_1, j_2=I-i-2 \\ j_2 > j_1}}^I \hat{\mu}_{ij_1} \hat{\mu}_{ij_2} Cov(\hat{\eta}_{ij_1}, \hat{\eta}_{ij_2}), \quad (2.18)$$

em que $Cov(\cdot, \cdot)$ é a covariância dos preditores lineares dados pela expressão (2.15).

Para a reserva total, basta variar os índices dos somatórios da expressão (2.18) em ambas as direções do triângulo, isto é,

$$\widehat{EQM}(\hat{R}) = \sum_{i,j=I-i-1}^I \hat{\phi} \hat{\mu}_{ij} + \sum_{i,j=I-i-1}^I \hat{\mu}_{ij}^2 Var(\hat{\eta}_{ij}) + 2 \sum_{\substack{i_1, j_1=I-i-2 \\ i_2, j_2=I-i-2 \\ i_1, j_1 \neq i_2, j_2}}^I \hat{\mu}_{i_1 j_1} \hat{\mu}_{i_2 j_2} Cov(\hat{\eta}_{i_1 j_1}, \hat{\eta}_{i_2 j_2}).$$

2.2.3 Bootstrap

Bootstrap é uma técnica de simulação e reamostragem, tendo uso nos mais diversos campos da ciência [12]. No contexto deste trabalho o método *Bootstrap* realiza reamostragens no Triângulo *Run-off* Incremental a fim de calcular as medidas de variabilidade das estimativas das reservas técnicas.

A ideia geral de *bootstrapping* é apresentada em [6], bem como sua utilização na estimação das reservas técnicas dos sinistros dos tipos IBNR e RBNS. O método *Bootstrap* pode ser usado em associação com um método determinístico ou estocástico, paramétrico ou não, sendo as estimativas das provisões obtidas de forma analítica pelo método associado escolhido, e as medidas de variabilidade determinadas através de simulação *Bootstrap*.

Neste trabalho o método associado escolhido será o modelo de sobredispersão de Poisson. Após estimar as reservas técnicas, a simulação *Bootstrap* baseia-se nos resíduos de Pearson, gerando um número suficientemente grande de amostras, com reposição, dos montantes incrementais, isto é, os resíduos incrementais. É importante ressaltar que:

- o processo de reamostragem supõe que os resíduos dos montantes incrementais são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, desprezando a estrutura dos dados iniciais;
- é possível reamostrar os resíduos ou os resíduos multiplicados por uma constante, desde que se considere a constante da geração dos pseudo-dados.

Procedimento *Bootstrap*

1. Aplicação do método associado

Aplica-se o modelo de sobredispersão de Poisson ao Triângulo *Run-off* Incremental para obter as estimativas das reservas técnicas e procede-se ao cálculo de $\hat{\mu}_{ij}$, a média das observações X_{ij} , $0 \leq i \leq I$, $0 \leq j \leq I - i$, de acordo com a expressão dada em (2.16).

2. Obtenção dos resíduos de Pearson

Calcula-se os resíduos de Pearson e_{ij} , dados por

$$e_{ij} = \frac{x_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{\hat{\mu}_{ij}}}, \quad 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq I - i, \quad (2.19)$$

em que x_{ij} são as observações de $X_{i,j}$.

3. Geração dos pseudo-dados

Após calculados, os resíduos e_{ij} são dispostos em um triângulo *Run-off* de resíduos. Um processo de reamostragem com reposição é realizado N vezes nesse triângulo, alterando a disposição inicial dos resíduos e_{ij} e gerando N triângulos *Run-off* de resíduos $e_{ij}^{*(N)}$.

Para cada um dos N triângulos *Run-off* de resíduos cria-se um novo Triângulo *Run-off* Incremental de dados, $T_I^{*(N)} = \{X_{i,j}^{*(N)} | i + j \leq I\}$, em que

$$x_{ij}^{*(n)} = e_{ij}^{*(n)} \sqrt{\hat{\mu}_{ij}} + \hat{\mu}_{ij}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq I - i. \quad (2.20)$$

4. Estimação das pseudo-reservas

Para cada triângulo $T_I^{*(n)}$, $1 \leq n \leq N$, aplica-se o modelo de sobredispersão de Poisson e calcula-se, para cada ano de acidente i , as pseudo-reservas $\hat{R}_i^{*(n)}$ dadas pela equação (2.17) e, via soma, as pseudo-reservas totais $\hat{R}^{*(n)}$. Logo, para cada um desses estimadores têm-se uma amostra aleatória de dimensão N . Para essas amostras, pode-se determinar as estatísticas de interesse como a média e o desvio padrão, realizar um teste de aderência a uma distribuição de probabilidades conhecida e, ainda, estimar os intervalos de confiança.

A média dos estimadores $\hat{R}_i^{*(n)}$ e $\hat{R}^{*(n)}$ são designadas, respectivamente, por $\bar{\hat{R}}_i^{*(n)}$ e $\bar{\hat{R}}^{*(n)}$ e dadas por

$$\bar{\hat{R}}_i^{*(n)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{R}_i^{*(n)}, \quad 0 \leq i \leq I. \quad (2.21)$$

$$\bar{\hat{R}}^{*(n)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{R}^{*(n)}. \quad (2.22)$$

5. Cálculo das medidas de variabilidades

Os desvios padrão para as estimativas *Bootstrap* das reservas técnicas são dados por

$$\hat{\sigma}_{boot}^{(n)}(\hat{R}_i^{*(n)}) = \frac{1}{N-1} \sqrt{\sum_{n=1}^N \left(\hat{R}_i^{*(n)} - \bar{\hat{R}}_i^{*(n)} \right)^2}, \quad 0 \leq i \leq I, \quad 1 \leq n \leq N.$$

$$\hat{\sigma}_{boot}(\hat{R}^{*(n)}) = \frac{1}{N-1} \sqrt{\sum_{n=1}^N \left(\hat{R}^{*(n)} - \bar{\hat{R}}^{*(n)} \right)^2}. \quad (2.23)$$

Pode-se observar em (2.23) que a construção das medidas de variabilidade dos estimadores simulados dependem de sua média, logo não é possível comparar essas medidas com as obtidas de forma analítica. Assim, [13] propõe uma correção ao desvio padrão dado em (2.23), onde são consideradas a variabilidade criada pela utilização do método *Bootstrap* e a variabilidade do processo estocástico inerente ao modelo de sobredispersão de Poisson.

Essa correção consiste em multiplicar o fator $\frac{I}{I-p}$, com p igual ao número de parâmetros estimados, ao desvio padrão de *Bootstrap* dado em (2.23). Essa correção pode ser desprezada quando I for suficientemente grande.

Para obter o erro quadrático médio, é necessário adicionar a medida de variabilidade do processo, obtida através do produto das estimativas analíticas pelo parâmetro de dispersão, ϕ , definido pela seguinte expressão:

$$\hat{\phi} = \frac{1}{I-1} \sum_{i=0}^I \sum_{j=I-i}^I e_{ij}^2. \quad (2.24)$$

Assim, os erros quadráticos médio associados aos estimadores de *Bootstrap* são definidos por

$$EQM(\widehat{\hat{R}_i^{*(n)}}) = \sqrt{\hat{\phi} \hat{R}_i + \frac{I}{I-p} \hat{\sigma}_{boot}^{(n)}(\hat{R}_i^{*(n)})}, \quad 0 \leq i \leq I, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (2.25)$$

$$EQM(\widehat{\hat{R}^{*(n)}}) = \sqrt{\hat{\phi} \hat{R} + \frac{I}{I-p} \hat{\sigma}_{boot}^{(n)}(\hat{R}^{*(n)})}. \quad (2.26)$$

Finalmente, assumindo que as estimativas *Bootstrap* das reservas técnicas, $\hat{R}_i^{*(n)}$ e $\hat{R}^{*(n)}$, possuem distribuição normal, pode-se calcular os intervalos de $(1-\alpha) \times 100\%$ de confiança, respectivamente por

$$\left(\hat{R}_i \pm \Phi^{-1} \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) \sqrt{EQM(\widehat{\hat{R}_i^{*(n)}})} \right), \quad (2.27)$$

e

$$\left(\hat{R} \pm \Phi^{-1} \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) \sqrt{EQM(\widehat{\hat{R}^{*(n)}})} \right), \quad (2.28)$$

em que $\Phi^{-1} \left(\frac{1-\alpha}{2} \right)$ representa o quantil de probabilidade $(1-\alpha)/2$ da distribuição Normal Padrão.

3 Resultados

Neste capítulo os métodos apresentados anteriormente serão aplicados a uma base de dados reais fornecida pela AXA Portugal. O conjunto de dados é composto por todos os sinistros do ramo automóvel danos materiais (particulares e empresas) ocorridos até dezembro de 2012. Nesta base de dados analisa-se apenas a componente danos materiais, portanto todos os sinistros que apresentam lesões corporais estão excluídos. Todos os dados foram multiplicados por um fator comum, a fim de manter a confidencialidade dos dados.

Os dados são organizados em dois triângulos *Run-off*. Um é o Triângulo *Run-off* de Pagamentos Acumulados apresentado na Tabela 2, o outro é o Triângulo *Run-off* de Custos Acumulados exibido na Tabela 3. No Triângulo *Run-off* dos Pagamentos figuram apenas os valores pagos pela seguradora, enquanto que no Triângulo *Run-off* dos Custos são apresentados os valores pagos mais a estimativa do que ainda falta ser pago.

Cada triângulo *Run-off* possui 120 observações. A data inicial é o ano de 1998 e a data final é o ano de 2012, logo tem-se $I = 14$, $i \in \{0, 1, \dots, 14\}$ e $j \in \{0, 1, \dots, 14 - i\}$, cada célula (i, j) dos triângulos *Run-off* representa a visão dos pagamentos ou custos em 31 de dezembro de cada ano de exercício. Para o ano de acidente $i = 0$ tem-se todo o histórico de pagamentos e custos registrados pela AXA Portugal até ao ano de 1998, acumulados a cada ano de desenvolvimento até dezembro de 2012. A unidade monetária utilizada é o milhares de euros.

Pode-se observar na Tabela 2 que as oscilações de um ano de desenvolvimento, j , para o ano de desenvolvimento seguinte, $j + 1$, são sempre positivas, contudo o mesmo não acontece com os dados da Tabela 3, pois nesses dados existe uma componente de estimativas de custos, a qual é constantemente atualizada à medida que se tenha mais informações sobre os sinistros.

Tabela 2 – Triângulo *Run-off* dos Pagamentos Acumulados - Ramo Automóvel Danos Materiais.

[illegible]

Tabela 3 – Triângulo *Run-off* dos Custos Acumulados - Ramo Automóvel Danos Materiais.

[illegible]

É importante salientar que os triângulos *Run-off* refletem as estratégias de gestão das companhias seguradoras. Por exemplo, na AXA Portugal as recomendações dos gestores por prudência no cálculo das estimativas das reservas técnicas, levaram os analistas a manterem maiores reservas para o pagamentos dos sinistros. Esse fato pode ser observado nas linhas do Triângulo *Run-off* dos Custos Acumulados, em que, a partir do ano de acidente $i = 7$, os custos máximos passaram a se concentrar no ano de desenvolvimento $j = 1$, o que força a evolução futura dos custos a ser decrescente, o que por sua vez proporciona ganhos futuros para a empresa.

A Figura 2 apresenta a evolução dos pagamentos e dos custos para os anos de acidente $i = 6$ (Figura 2.a) e $i = 12$ (Figura 2.b). O objetivo do analista ao aplicar os métodos discutidos neste trabalho é identificar, no limite, o ponto em que as curvas de pagamentos e custos se encontram. Esse “ponto de encontro” é, para cada ano de acidente i , a estimativa do valor *Ultimate*.

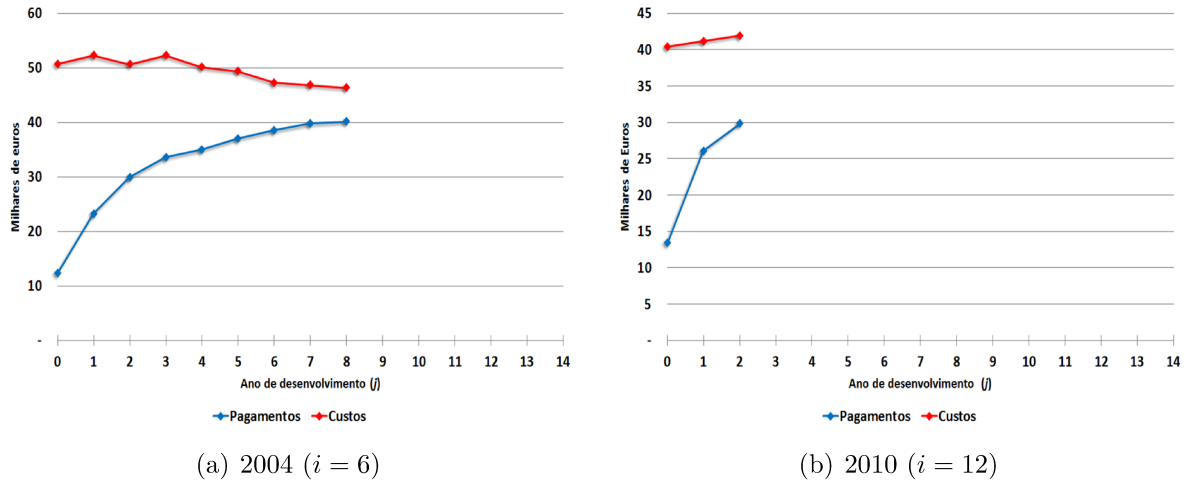


Figura 2 – Evolução dos pagamentos e custos para dois anos de acidente específicos.

No caso prático em análise, considera-se que o Triângulo *Run-off* dos Custos está completo, isto é, não existem mais despesas referentes ao primeiro ano de acidente ($i = 0$). Logo, não há necessidade de estimar o valor *Ultimate* para esse triângulo, bastando fazer $\hat{C}_{0,\infty}^C = C_{0,14}^C = 342.159,51$, em que o expoente C indica o Triângulo *Run-off* dos Custos. Em contrapartida, o Triângulo *Run-off* dos Pagamentos não está completo, existem ainda sinistros ocorridos no ano de 1998 (ou anteriormente) pendentes de regularização, e o valor *Ultimate* em relação a $i = 0$ deverá ser estimado. É usual as companhias seguradoras fazerem $\hat{C}_{0,\infty}^P = \hat{C}_{0,\infty}^C$, em que o expoente P indica o Triângulo *Run-off* dos Pagamentos,

a fim de evitar subestimação das estimativas das reservas técnicas dos pagamentos.

Os métodos determinísticos foram aplicados ao Triângulo *Run-off* dos Pagamentos Acumulados e ao Triângulo *Run-off* dos Custos Acumulados, utilizando folhas de cálculo do *software Microsoft Excel*, uma vez que esses métodos são de fácil aplicação.

A Tabela 4 apresenta os coeficientes de desenvolvimento estimados para os Triângulos *Run-off* dos Pagamentos e Custos Acumulados para os métodos *Grossing Up*, *Link Ratio* e *Chain Ladder*, dados pelas expressões (2.4), (2.7) e (2.9), respectivamente. A Figura 3 mostra a evolução desses coeficiente ao longo dos anos de desenvolvimento.

Tabela 4 – Coeficientes de desenvolvimento $\hat{f}_i$, $0 \leq i \leq 14$, dos métodos determinísticos.

i	$\Delta Run-off$ Pagamentos Acumulados			$\Delta Run-off$ Custos Acumulados		
	<i>Grossing Up</i>	<i>Link Ratio</i>	<i>Chain Ladder</i>	<i>Grossing Up</i>	<i>Link Ratio</i>	<i>Chain Ladder</i>
0	0,9953	1,8533	1,4377	1,0000	1,0851	1,0564
1	0,9938	1,2345	1,1622	1,0004	0,9940	0,9996
2	0,9931	1,1251	1,0989	1,0012	1,0045	1,0028
3	0,9876	1,0740	1,0598	1,0009	0,9869	0,9904
4	0,9791	1,0508	1,0444	0,9998	0,9900	0,9895
5	0,9702	1,0347	1,0205	1,0047	0,9816	0,9831
6	0,9568	1,0338	1,0255	1,0082	0,9881	0,9925
7	0,9385	1,0197	1,0150	1,0164	0,9920	0,9952
8	0,9079	1,0140	1,0096	1,0288	0,9966	0,9975
9	0,8778	1,0093	1,0065	1,0483	0,9951	0,9974
10	0,8356	1,0087	1,0049	1,0590	1,0011	0,9998
11	0,7785	1,0055	1,0044	1,0738	1,0003	1,0001
12	0,6930	1,0007	1,0005	1,0715	0,9992	0,9997
13	0,5650	1,0015	1,0015	1,0806	0,9996	0,9996
14	0,3175	1,0047	1,0047	0,9977	1,0000	1,0000

É importante notar na Tabela 4, em relação ao Triângulo *Run-off* dos Pagamentos Acumulados, a existência de uma diferença significativa entre os coeficientes de desenvolvimento dos métodos *Link Ratio* e *Chain Ladder* para $i = 0$. Essa diferença deve-se à elevada quantidade de informações contidas no primeiro ano de acidente, o que influencia diretamente o cálculo do coeficiente de desenvolvimento do método *Chain Ladder*. Caso o ano de acidente $i = 0$ fosse retirado na análise, todos os coeficientes teriam valores próximos.

Observe na Figura 3 que a evolução dos coeficientes de desenvolvimento dos métodos *Link Ratio* e *Chain Ladder* se dá de forma inversa à evolução dos coeficientes de desenvolvimento do método *Grossing Up*. Esse fato deve-se à reciprocidade desses métodos, conforme mencionado no Capítulo 2. Repare ainda que a curva de evolução dos coeficientes

de desenvolvimento do método *Chain Ladder* é suavizada em relação a do método *Link Ratio*, uma vez que o método *Chain Ladder* é mais sensível aos dados, pois utiliza o peso “original” no cálculo dos coeficientes de desenvolvimento.

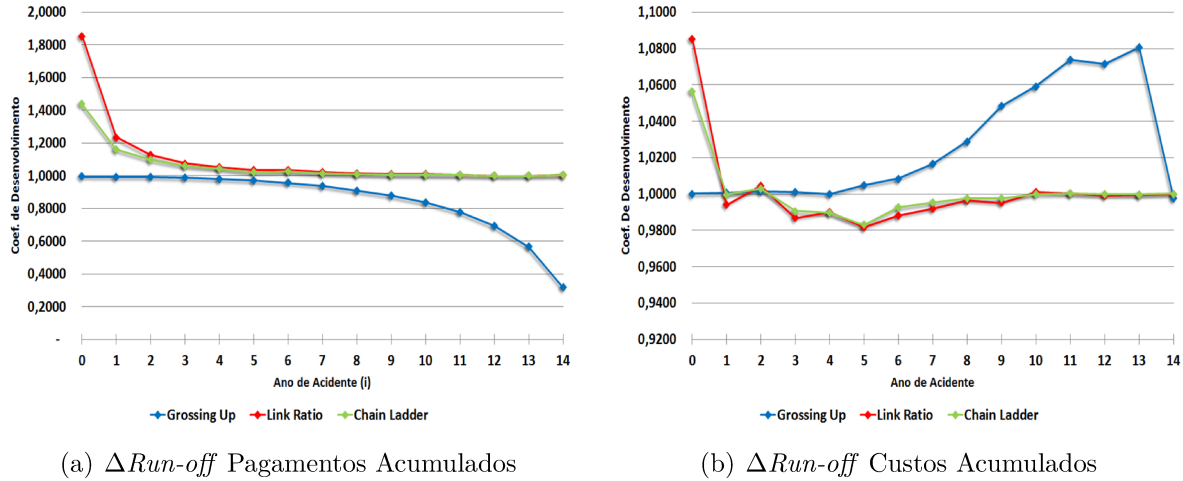


Figura 3 – Evolução dos coeficientes de desenvolvimento $\hat{f}_i$, $0 \leq i \leq 14$, para os métodos determinísticos.

Os valores *Ultimate* foram estimados para os métodos *Grossing Up*, *Link Ratio* e *Chain Ladder* através das equações (2.3), (2.6) e (2.10), respectivamente. As estimativas das reservas técnicas, para cada um dos três métodos, foram calculadas conforme as fórmulas (2.1) e (2.2). Todavia, existe uma precaução ao utilizar a fórmula (2.1) para o triângulo dos custos, pois, uma vez que “custo = reserva - pagamentos”, obtém-se

$$\hat{R}_i^C = \hat{C}_{i,\infty}^C - C_{i,I-i}^P, \quad 0 \leq i \leq I = 14,$$

ou seja, aplicam-se os métodos normalmente ao Triângulo *Run-off* dos Custos Acumulados, mas ao se calcular as reservas técnicas para cada ano de acidente, faz-se a subtração em relação ao Triângulo *Run-off* dos Pagamentos.

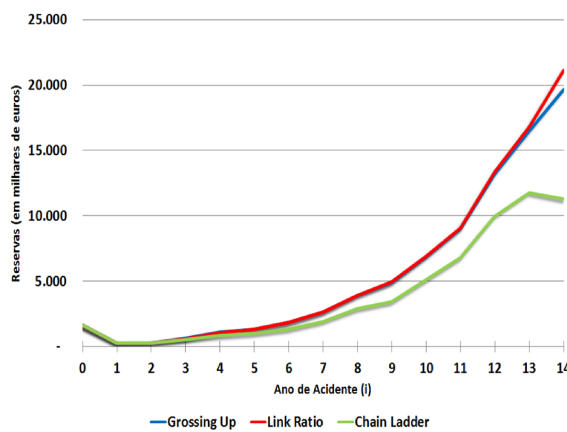
A Tabela 5 apresenta os valores *Ultimate* estimados pelos três métodos determinísticos, dados pelas expressões (2.3), (2.6) e (2.10), para os Triângulos *Run-off* dos Pagamentos e dos Custos Acumulados para cada ano de acidente i . A Figura 4 mostra a evolução das reservas técnicas estimadas ao longo dos anos de acidente.

Na Figura 4 nota-se a proximidade com que os três métodos determinísticos produzem as estimativas das reservas técnicas para cada ano de acidente i . Em relação ao Triângulo *Run-off* dos Custos Acumulados praticamente não há diferença, mas em relação ao

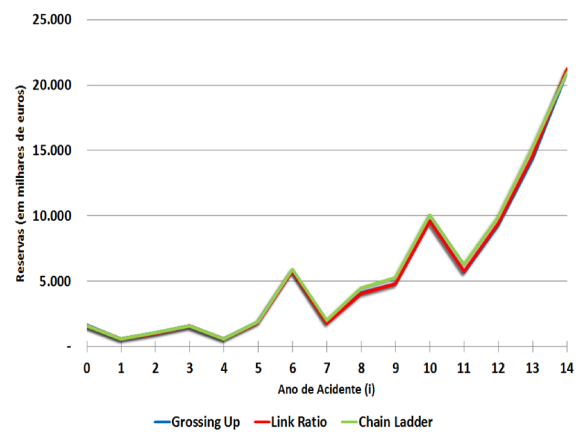
Tabela 5 – Valores *Ultimate* ajustados para os Triângulos *Run-off* de Pagamentos e Custos Acumulados.

i	$C_{i,I-i}^P$	<i>Ultimate</i>					
		$\Delta Run-off$ Pagamentos Acumulados			$\Delta Run-off$ Custos Acumulados		
		<i>Grossing Up</i>	<i>Link Ratio</i>	<i>C. Ladder</i>	<i>Grossing Up</i>	<i>Link Ratio</i>	<i>C. Ladder</i>
0	342.160	342.160	342.160	342.160	342.160	342.160	342.160
1	47.792	47.458	47.458	47.458	47.771	47.771	47.771
2	47.321	46.548	46.548	46.542	47.264	47.264	47.284
3	49.437	48.412	48.412	48.351	49.392	49.392	49.405
4	51.062	51.515	51.516	51.259	51.071	51.072	51.020
5	45.525	44.763	44.766	44.422	45.311	45.313	45.370
6	46.374	41.977	41.982	41.480	45.997	46.000	46.100
7	42.320	42.430	42.442	41.740	41.638	41.642	41.867
8	43.739	42.330	42.348	41.311	42.515	42.525	42.948
9	41.918	40.077	40.110	38.592	39.989	40.007	40.465
10	47.097	41.776	41.824	39.996	44.471	44.499	44.986
11	40.139	40.693	40.764	38.465	37.381	37.426	37.972
12	41.950	43.080	43.218	39.830	39.151	39.290	39.796
13	38.662	37.868	38.234	33.176	35.778	35.993	36.662
14	30.139	28.842	30.323	20.411	30.208	30.446	30.191

Triângulo *Run-off* dos Pagamentos Acumulados, as estimativas das reservas técnicas obtidas pelo método *Chain Ladder* são menores do que as estimativas obtidas pelos outros métodos. Essa diferença é explicada pela discrepância existente entre os coeficientes de desenvolvimento para o ano de acidente $i = 0$, conforme dito anteriormente.



(a) $\Delta Run-off$ Pagamentos Acumulados



(b) $\Delta Run-off$ Custos Acumulados

Figura 4 – Evolução das reservas $\hat{R}_i$, $0 \leq i \leq 14$, para os métodos determinísticos.

A Tabela 6 apresenta as estimativas das reservas totais para os Triângulos *Run-off* dos Pagamentos e dos Custos Acumulados.

Tabela 6 – Reservas totais estimadas, $\hat{R}$, para os Triângulos *Run-off* de Pagamentos e Custos Acumulados.

Método	Reserva total	
	$\Delta Run-off$ Pagamentos Acumulados	$\Delta Run-off$ Custos Acumulados
<i>Grossing Up</i>	83.718	83.885
<i>Link Ratio</i>	85.892	84.587
<i>Chain Ladder</i>	58.978	87.785

Os valores apresentados, calculados usando os três métodos determinísticos aplicados são estimativas pontuais. Os métodos determinísticos não avançam desse ponto. Todavia, os métodos estocásticos fornecem estimativas intervalares para as reservas. O método Thomas Mack utiliza as estimativas das reservas fornecidas pelo método *Chain Ladder* e constrói intervalos de confiança para as reservas. O método *Bootstrap* assume o modelo de sobredispersão de Poisson como método associado, partindo do pressuposto de que os dados têm uma distribuição de probabilidade de sobredispersão de Poisson e estima os valores das reservas via reamostragem construindo os intervalos de confiança.

Para ajustar o modelo de sobredispersão de Poisson é preciso o Triângulo *Run-off* Incremental, que é obtido por subtração no Triângulo *Run-off* Acumulado.

Os métodos estocásticos foram aplicados apenas ao Triângulo *Run-off* dos Pagamentos, pois o Triângulo *Run-off* dos Custos apresenta problemas para um ajuste do modelo de sobredispersão de Poisson. Isso acontece porque o Triângulo *Run-off* dos Custos Incrementais possui, para alguns anos de desenvolvimento, valores negativos.

A Tabela 7 apresenta as medidas de variabilidade das reservas calculadas pelo método Thomas Mack para o Triângulo *Run-off* dos Pagamentos Acumulados. O erro quadrático médio das estimativas das reservas para cada ano de acidente i foi estimado usando a equação (2.11), enquanto que para a reserva total foi estimado pela equação (2.12). Os intervalos de confiança, ao nível de 5% de significância, foram calculados com base nas expressões (2.13) e (2.14).

É importante lembrar que as estimativas das reservas técnicas, apresentadas na Tabela 7, para cada ano de acidente i e para a reserva total obtidas pelo método Thomas Mack são aquelas obtidas pelo método *Chain Ladder*. Para se construir os intervalos de confiança para as estimativas das reservas técnicas, na aplicação do método Thomas Mack assumiu-se que as estimativas das reservas possuíam uma distribuição de probabilidade normal.

Tabela 7 – Intervalos de confiança para as estimativas das reservas calculadas pelo método Thomas Mack para o Triângulo *Run-off* dos Pagamentos Acumulados.

Ano de Acidente i	Reserva $\hat{R}_i$	$\widehat{EQM}(\hat{R}_i)$	$IC_{95\%}(R_i)$	
			L.I.	L.S.
1998 & ant - 0	1.610,82	-	-	-
1999 - 1	295,79	2,62	290,65	300,93
2000 - 2	314,69	17,74	279,92	349,46
2001 - 3	536,90	121,87	298,04	775,77
2002 - 4	818,69	393,04	48,33	1.589,05
2003 - 5	993,24	480,99	50,49	1.935,98
2004 - 6	1.314,85	627,09	85,76	2.543,94
2005 - 7	1.919,95	913,47	129,54	3.710,35
2006 - 8	2.878,55	1.145,57	633,24	5.123,86
2007 - 9	3.410,95	1.559,40	354,51	6.467,38
2008 - 10	5.086,05	1.774,73	1.607,57	8.564,53
2009 - 11	6.784,76	2.096,85	2.674,93	10.894,58
2010 - 12	9.976,81	2.941,52	4.211,43	15.742,19
2011 - 13	11.781,03	4.910,45	2.156,54	21.405,52
2012 - 14	11.255,39	11.065,98	-10.433,94	32.944,72
Total	58.978,47	13.282,02	32.945,71	85.011,23

O método *Bootstrap*, além de utilizar do Triângulo *Run-off* Incremental, também utiliza um outro valor *Ultimate* para o ano de acidente $i = 0$, uma vez que no método *Bootstrap* esse valor é estimado com base no histórico dos dados a fim de obter uma melhor performance dos resultados das simulações.

Para implementação do método *Bootstrap* o *software* R foi utilizado. As rotinas fazem uso do *package* “*ChainLadder*” e estão disponíveis no Apêndice A.

Como visto no Capítulo 2, o método *Bootstrap*, após o ajuste do modelo associado, nesse caso o modelo de sobredispersão de Poisson, baseia-se nos resíduos de Pearson, dados pela expressão (2.19), para realizar um processo de reamostragem e, então, gerar pseudo-dados conforme a equação (2.20). Assim, na etapa de simulação foram realizadas 5.000 amostras de resíduos de Pearson com reposição e, conseqüentemente, obteve-se a mesma quantidade de triângulos de pseudo-dados.

Na Tabela 8 os principais resultados fornecidos pelo método *Bootstrap* são apresentados. As estimativas das reservas para cada ano de acidente i e a estimativa da reserva total foram calculadas pelas equações (2.21) e (2.22), respectivamente. O erro de previsão dessas estimativas das reservas é medido pelo erro quadrático médio, dado pela expressão (2.25), para cada ano de acidente i , e pela expressão (2.26), para a reserva total.

Diferentemente do que o apresentado nas expressões (2.27) e (2.28) para a construção

Tabela 8 – Medidas de variabilidade das estimativas das reservas via método *Bootstrap*.

Ano de Acidente i	Reserva $\hat{R}_i$	$\widehat{EQM}(\hat{R}_i)$	$IC(R_i)$	
			L.S. 75%	L.S. 95%
1998 & ant - 0	-	-	-	-
1999 - 1	81,70	479,77	6,00	672,05
2000 - 2	141,72	654,77	40,00	1.091,15
2001 - 3	390,67	1.036,23	419,00	2.217,45
2002 - 4	701,35	1.268,65	940,50	3.350,10
2003 - 5	986,35	1.513,16	1.362,25	3.946,25
2004 - 6	1.392,86	1.691,35	2.006,50	4.896,15
2005 - 7	2.093,72	2.122,21	3.005,00	6.209,25
2006 - 8	3.180,72	2.621,93	4.443,75	8.300,15
2007 - 9	3.810,70	2.862,07	5.277,25	9.303,10
2008 - 10	5.691,87	3.509,50	7.586,25	12.246,60
2009 - 11	7.498,14	4.233,89	9.806,00	15.476,40
2010 - 12	11.028,67	5.347,34	14.111,25	20.978,55
2011 - 13	13.033,01	6.156,27	16.599,00	24.106,15
2012 - 14	12.309,68	6.869,85	16.149,25	23.625,85
Total	62.341,16	14.457,18	71.351,50	87.438,75

dos intervalos de confiança, o *software* R usa, por *default*, uma distribuição log-normal para as estimativas das reservas técnicas. O *output* do *software* R para o método *Bootstrap* mostra, por *default*, apenas os limites superiores dos intervalos de 75% e 95% de confiança. Os intervalos de confiança são apresentados na Tabela 8. A Figura 5 mostra o gráfico da distribuição log-normal teórica e empírica ajustada para as reservas totais estimadas pelo método *Bootstrap*.

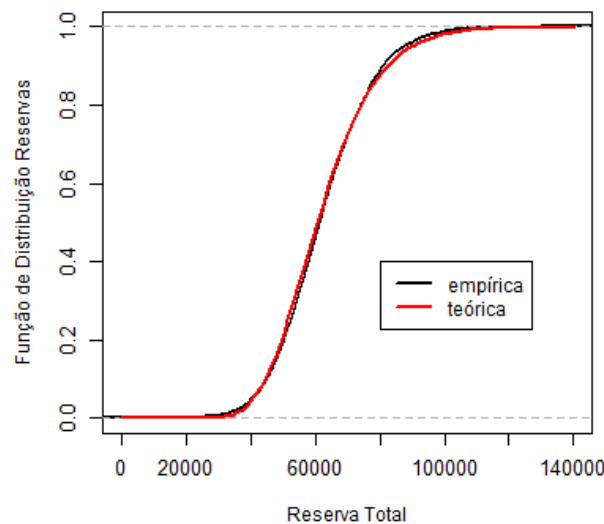


Figura 5 – Ajuste de uma distribuição log-normal à reserva total.

Observa-se pela Tabela 8 que a estimativa da reserva total dada pelo método *Bootstrap* é mais próxima daquela fornecida pelo método *Chain Ladder* do que daquelas obtidas pelos métodos *Grossing Up* e *Link Ratio*. O que era de se esperar, uma vez que a ponderação pelos pesos “originais” dos coeficientes de desenvolvimento do método *Chain Ladder* tem relação com a estrutura de dispersão dos dados acoplada pelo modelo de sobredispersão de Poisson.

A curva apresentada na Figura 5 pode ser usada para controlar o nível de reservas mantidas pela companhia seguradora. Na AXA Portugal é imposto como mínimo de reserva o valor correspondente ao percentil 50% da distribuição log-normal ajustada, uma vez que reservas baixas podem indicar riscos de insolvência à seguradora. Enquanto que é recomendado que as reservas se encontrem em torno do percentil 75% e não ultrapasse muito esse ponto, pois reservas muito altas podem representar recursos mal investidos.

4 Conclusão

Nesse capítulo, são apresentadas as conclusões deste trabalho e ainda possíveis orientações para trabalhos futuros.

Na aplicação dos métodos estudados, era de se esperar que todas as estimativas - para a reserva total dos sinistros do ramo automóvel danos materiais - tivessem valores muito próximos, contudo, as estimativas obtidas pelos métodos *Chain Ladder* e *Bootstrap* ao Triângulo *Run-off* dos Pagamentos apresenta valores muito menores do que as demais, indicando problemas com a estrutura dos dados do triângulo *Run-off*.

Como discutido no Capítulo 3, o problema reside no primeiro ano de acidente ($i = 0$), o fato de incluir as informações anteriores ao ano de 1998 fez com que os métodos em questão subestimassem as reservas, pois os coeficientes de desenvolvimento do método *Chain Ladder* tem relação com a estrutura de dispersão dos dados acoplada pelo modelo de sobredispersão de Poisson utilizado como método associado ao método *Bootstrap*.

A análise das estimativas produzidas pelos métodos de provisão em sinistros requer sensibilidade aos números e demanda reuniões com o departamento de sinistros a fim de compreender as alterações processuais na estrutura dos dados. Essas discussões ajudam a calibrar os fatores de desenvolvimento, seja fazendo frente às mudanças das estratégias de gestão, às alterações sistêmicas ou à própria estrutura temporal dos dados. Sendo assim, no caso prático em análise, decidiu-se por adotar como estimativa da reserva total o valor fornecido pelo método *Chain Ladder* aplicado ao Triângulo *Run-off* dos Custos, a saber 87.785 milhares de euros.

Com o intuito de obter a convergibilidade dos diferentes métodos para valores próximos das estimativas das reservas técnicas e como sugestão de expansão do presente trabalho, poderia-se excluir a primeira linha dos Triângulos *Run-off* dos Pagamentos e dos Custos Acumulados e repetir todo o processo de aplicação dos métodos apresentados. Para possibilitar a aplicação dos métodos estocásticos ao Triângulo *Run-off* dos Custos Incrementais poderia-se adotar como solução colocar a zero todas as células de valor negativo desse triângulo.

Este trabalho permitiu compreender melhor a atividade de uma companhia seguradora relativamente as provisões em sinistros, bem como se familiarizar com a estrutura dos

dados organizadas nos Triângulos *Run-off* e compreender alguns dos métodos de grande utilização no cálculo das reservas técnicas.

Referências

- 1 GILBERTO, F. *Manual Prático dos Seguros*. Segunda Edição. Lisboa, Portugal: Lidel, 2012. Citado na página 23.
- 2 MARTINS, J. *A Prática dos Seguros: como as seguradoras regularizam os sinistros*. Lisboa, Portugal: Quid Juris, 2008. Citado na página 23.
- 3 ACTUARIS INTERNATIONAL. *IBNRS 2.5 Technical Documentation*. Paris, França, 2012. Manual Técnico. Citado 3 vezes nas páginas 25, 31 e 35.
- 4 FACULTY AND INSTITUTE OF ACTUARIES. *Claims Reserving Manual Vol. 1*. Londres, Reino Unido, 1989/1997. Citado 4 vezes nas páginas 25, 29, 30 e 31.
- 5 FACULTY AND INSTITUTE OF ACTUARIES. *Claims Reserving Manual Vol. 2*. Londres, Reino Unido, 1989/1997. Citado na página 25.
- 6 WÜTHRICH, M.; MERZ, M. *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*. West Sussex, Inglaterra: Wiley, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 37.
- 7 Microsoft Office Professional Plus 2010. *Microsoft Excel*. Redmond, Estados Unidos, 2010. Disponível em: <<http://www.microsoft.com/>>. Citado na página 25.
- 8 R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Áustria, 2013. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>. Citado na página 25.
- 9 MACK, T. Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. *Astin Bulletin*, v. 32, n. 2, p. 213–225, 1993. Citado na página 33.
- 10 MACK, T. The standard error of chain ladder reserve estimates: recursive calculation and inclusion of tail factor. *Astin Bulletin*, v. 29, n. 2, p. 361–366, 1999. Citado na página 33.
- 11 MCCULLAGH, P.; NELDER, J. A. *Generalized Linear Models*. 2nd. ed. Londres, Reino Unido: Chapman & Hall, 1989. Citado na página 35.
- 12 EFRON, B. The bootstrap and modern statistics. *Journal of the American Statistical Association*, v. 95, n. 452, p. 1293–1296, 2000. Citado na página 37.
- 13 ENGLAND, P.; VERRALL, R. Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1999. Citado na página 39.

Apêndices

APÊNDICE A – Código R

Os códigos em R utilizados para a aplicação do método *Bootstrap* são aqui apresentados. O principal pacote utilizado é o “*ChainLadder Package*”. Nesse pacote é possível aplicar vários modelos estocásticos ao Triângulo *Run-off* para os dados de sinistros.

```
# Carregando pacotes

library(ChainLadder)

library(plyr)

library(MASS)

# Input dos dados

dados<-read.table("triangulos.csv", header = TRUE, sep = ";")

# Variáveis:

# -> AnoAcidente

# -> AnoDesenvolvimento

# -> DesenvolvimentoLag

# -> Pagamentos

# -> Custos

PgtoTri <- as.triangle(dados, origin="AnoAcidente",
dev="DesenvolvimentoLag", value="Pagamentos")

# Ajustando o método Bootstrap

set.seed(123456789)

# Triângulo dos Pagamentos

bs.pgto<-BootChainLadder(PgtoTri, R=5000, process.distr = "od.pois")

resumo.bspgto<-summary(bs.pgto)

# plot(bs.pgto, log=TRUE)

# Ajustando uma distribuição às reservas
```

```
png("bslogn.png", width = 400, height = 400)

plot(ecdf(bs.pgto$IBNR.Totals), main=" ",
xlab="Reserva Total", ylab="Função de Distribuição Reservas",
cex.axis=1.1, lwd=2)

fit <- fitdistr(bs.pgto$IBNR.Totals[bs.pgto$IBNR.Totals>0], "lognormal")

fit

curve(plnorm(x,fit$estimate["meanlog"],
fit$estimate["sdlog"]), col="red", add=TRUE, lwd=2)

legend(x=80000, y=0.4, legend=c("empírica", "teórica"),
col=c(1,2), lty=1:1, lwd=2:2)

dev.off()
```

APÊNDICE B – *Outputs*

Tabela 9 – Coeficientes individuais e de desenvolvimento para o $\Delta Run-off$ dos Pagamentos Acumulados - método *Grossing Up*.

Ano de Acidente - i	Ano de Desenvolvimento - i														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0,6953	0,7763	0,8315	0,8819	0,9169	0,9502	0,9529	0,9678	0,9771	0,9827	0,9870	0,9895	0,9933	0,9938	0,9953
1	0,2435	0,4858	0,6546	0,7347	0,8016	0,8533	0,8868	0,9141	0,9480	0,9657	0,9723	0,9857	0,9929		
2	0,2581	0,4968	0,6537	0,7630	0,8222	0,8778	0,9068	0,9368	0,9490	0,9692	0,9788	0,9878			
3	0,2766	0,5184	0,6538	0,7709	0,8145	0,8425	0,8820	0,9207	0,9524	0,9612	0,9785				
4	0,2888	0,5504	0,6655	0,7684	0,8314	0,8755	0,9055	0,9385	0,9637	0,9721					
5	0,2896	0,5389	0,6812	0,7563	0,8299	0,8564	0,9016	0,9431	0,9508						
6	0,2960	0,5546	0,7127	0,8009	0,8344	0,8832	0,9185	0,9485							
7	0,2924	0,5683	0,7147	0,7952	0,8631	0,8876	0,9091								
8	0,2549	0,5682	0,6808	0,7693	0,8279	0,8741									
9	0,2896	0,5401	0,6814	0,7572	0,8144										
10	0,3302	0,5946	0,6977	0,7658											
11	0,2870	0,5459	0,6882												
12	0,3121	0,6065													
13	0,3302														
14															
i	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\hat{f}_i$	0,3175	0,5650	0,6930	0,7785	0,8356	0,8778	0,9079	0,9385	0,9568	0,9702	0,9791	0,9876	0,9931	0,9938	0,9953

Tabela 10 – $\Delta Run-off$ Inferior dos Pagamentos Acumulados - método *Grossing Up*.

Ano de	Ano de Desenvolvimento - i														
Acidente - i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1998 & ant - 0															
1999 - 1															47.234,33
2000 - 2														46.258,02	46.329,00
2001 - 3													48.077,73	48.110,18	48.184,00
2002 - 4												50.878,67	51.159,3	51.193,83	51.272,38
2003 - 5											43.829,26	44.210,59	44.454,43	44.484,44	44.552,7
2004 - 6										40.725,64	41.101,31	41.458,91	41.687,58	41.715,71	41.779,72
2005 - 7									40.598,26	41.165,00	41.544,73	41.906,18	42.137,32	42.165,76	42.230,46
2006 - 8								39.726,39	40.502,84	41.068,25	41.447,08	41.807,69	42.038,28	42.066,66	42.131,20
2007 - 9							36.386,48	37.611,64	38.346,76	38.882,07	39.240,73	39.582,14	39.800,46	39.827,32	39.888,44
2008 - 10						36.672,79	37.929,16	39.206,27	39.972,55	40.530,56	40.904,43	41.260,31	41.487,89	41.515,89	41.579,59
2009 - 11					34.004,9	35.722,19	36.946,00	38.190,00	38.936,42	39.479,96	39.844,14	40.190,80	40.412,48	40.439,75	40.501,81
2010 - 12				33.538,14	35.999,34	37.817,35	39.112,94	40.429,9	41.220,1	41.795,52	42.181,06	42.548,05	42.782,73	42.811,61	42.877,30
2011 - 13			26.241,5	29.480,19	31.643,60	33.241,64	34.380,47	35.538,09	36.232,67	36.738,48	37.077,37	37.399,95	37.606,24	37.631,62	37.689,36
2012 - 14	16.294,9	19.986,57	22.453,29	24.101,03	25.318,16	26.185,54	27.067,22	27.596,25	27.981,49	28.239,6	28.485,3	28.642,41	28.661,74	28.705,72	

Tabela 11 – Coeficientes individuais e de desenvolvimento para o $\Delta Run-off$ dos Pagamentos Acumulados - método *Link Ratio*.

Ano de Acidente - i	Ano de Desenvolvimento - i														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1,1164	1,0711	1,0606	1,0398	1,0363	1,0029	1,0156	1,0096	1,0057	1,0044	1,0025	1,0039	1,0005	1,0015	1,0047
1	1,9953	1,3475	1,1224	1,0910	1,0645	1,0393	1,0307	1,0371	1,0187	1,0069	1,0138	1,0073	1,0009		
2	1,9247	1,3160	1,1671	1,0776	1,0676	1,0330	1,0331	1,0130	1,0213	1,0099	1,0092	1,0054			
3	1,8739	1,2612	1,1791	1,0565	1,0344	1,0469	1,0438	1,0344	1,0093	1,0179	1,0094				
4	1,9060	1,2092	1,1545	1,0820	1,0530	1,0343	1,0364	1,0268	1,0088	1,0072					
5	1,8610	1,2640	1,1102	1,0973	1,0319	1,0528	1,0459	1,0082	1,0204						
6	1,8738	1,2851	1,1238	1,0418	1,0585	1,0400	1,0326	1,0088							
7	1,9434	1,2576	1,1125	1,0854	1,0284	1,0242	1,0324								
8	2,2295	1,1980	1,1301	1,0761	1,0558	1,0387									
9	1,8648	1,2616	1,1112	1,0756	1,0779										
10	1,8008	1,1734	1,0977	1,0912											
11	1,9017	1,2607	1,1313												
12	1,9433	1,1425													
13	1,7109														
14															
$\hat{f}_i$	1,8533	1,2345	1,1251	1,0740	1,0508	1,0347	1,0338	1,0197	1,0140	1,0093	1,0087	1,0055	1,0007	1,0015	1,0047

Tabela 12 – $\Delta Run-off$ Inferior dos Pagamentos Acumulados - método *Link Ratio*.

Ano de	Ano de Desenvolvimento - i														
Acidente - i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1998 & ant - 0															
1999 - 1															47.385,04
2000 - 2														46.516,74	46.476,82
2001 - 3													48.146,36	48.379,37	48.337,85
2002 - 4												51.070,68	51.233,41	51.481,35	51.437,18
2003 - 5											44.355,33	44.378,64	44.520,04	44.735,5	44.697,11
2004 - 6										41.401,50	41.596,92	41.618,78	41.751,39	41.953,45	41.917,45
2005 - 7									41.621,2	41.855,24	42.052,8	42.074,90	42.208,96	42.413,24	42.376,84
2006 - 8								40.962,86	41.529,52	41.763,04	41.960,16	41.982,22	42.115,98	42.319,81	42.283,49
2007 - 9							38.765,96	38.798,07	39.334,79	39.555,97	39.742,67	39.763,56	39.890,26	40.083,31	40.048,91
2008 - 10						39.800,94	40.421,77	40.455,26	41.014,9	41.245,52	41.440,20	41.461,98	41.594,09	41.795,39	41.759,52
2009 - 11					37.954,21	38.792,92	39.398,03	39.430,67	39.976,13	40.200,92	40.390,67	40.411,9	40.540,66	40.736,86	40.701,9
2010 - 12				38.414,21	40.238,70	41.127,89	41.769,42	41.804,03	42.382,32	42.620,64	42.821,81	42.844,32	42.980,83	43.188,84	43.151,78
2011 - 13			30.972,00	33.983,9	35.597,98	36.384,62	36.952,16	36.982,77	37.494,37	37.705,21	37.883,18	37.903,09	38.023,86	38.207,87	38.175,09
2012 - 14	16.362,09	24.564,07	26.952,82	28.232,96	28.856,84	29.306,97	29.331,25	29.737,00	29.904,21	30.045,36	30.061,15	30.156,94	30.302,88	30.276,88	

Tabela 13 – $\Delta Run-off$ Inferior dos Pagamentos Acumulados - método *Chain Ladder*.

Ano de	Ano de Desenvolvimento - <i>i</i>														
Acidente - <i>i</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1998 & ant - 0															
1999 - 1															47.234,33
2000 - 2														46.251,43	46.322,40
2001 - 3													48.023,98	48.049,55	48.123,28
2002 - 4												50.689,33	50.911,93	50.939,04	51.017,20
2003 - 5											43.712,39	43.928,61	44.121,53	44.145,02	44.212,76
2004 - 6										40.552,34	40.817,29	41.019,19	41.199,33	41.221,27	41.284,52
2005 - 7									40.416,83	40.806,66	41.073,27	41.276,44	41.457,71	41.479,78	41.543,43
2006 - 8								39.410,69	40.001,40	40.387,22	40.651,09	40.852,17	41.031,57	41.053,42	41.116,41
2007 - 9							35.903,04	36.816,99	37.368,83	37.729,26	37.975,76	38.163,61	38.331,21	38.351,62	38.410,47
2008 - 10						36.460,84	37.208,93	38.156,13	38.728,04	39.101,58	39.357,05	39.551,73	39.725,42	39.746,57	39.807,56
2009 - 11					33.573,45	35.065,12	35.784,57	36.695,51	37.245,53	37.604,77	37.850,46	38.037,69	38.204,73	38.225,07	38.283,73
2010 - 12				32.804,81	34.765,43	36.310,06	37.055,06	37.998,33	38.567,88	38.939,87	39.194,28	39.388,16	39.561,14	39.582,20	39.642,94
2011 - 13			24.865,65	27.323,74	28.956,78	30.243,32	30.863,85	31.649,52	32.123,91	32.433,75	32.645,65	32.807,13	32.951,21	32.968,75	33.019,34
2012 - 14	13.162,91	15.298,53	16.810,86	17.815,58	18.607,13	18.988,90	19.472,29	19.764,15	19.954,78	20.085,15	20.184,51	20.273,15	20.283,94	20.315,07	

Tabela 14 – Coeficientes individuais e de desenvolvimento para o $\Delta Run-off$ dos Custos Acumulados - método *Grossing Up*.

Ano de Acidente - i	Ano de Desenvolvimento - i														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1,0232	1,0242	1,0380	1,0375	1,0334	1,0212	1,0063	1,0049	1,0038	1,0024	1,0016	1,0006	1,0006	1,0004	1,0000
1	0,8434	0,9434	0,9811	1,0104	1,0143	1,0146	1,0079	1,0165	1,0131	1,0088	0,9963	1,0011	1,0018		
2	0,8554	0,9366	0,9788	1,0317	1,0549	1,0494	1,0348	1,0206	1,0128	1,0085	1,0032	1,0010			
3	0,8934	0,9701	0,9711	1,0413	1,0411	1,0460	1,0398	1,0351	1,0198	1,0068	0,9981				
4	0,9131	1,0419	1,0532	1,0708	1,0628	1,0636	1,0455	1,0115	0,9995	0,9971					
5	1,0075	1,0646	1,0826	1,1178	1,1067	1,0823	1,0372	1,0065	1,0002						
6	1,1032	1,1374	1,1022	1,1382	1,0914	1,0746	1,0296	1,0196							
7	1,0731	1,2108	1,1930	1,1191	1,0811	1,0470	1,0291								
8	1,0758	1,1773	1,1565	1,0802	1,0471	1,0354									
9	1,1328	1,1603	1,1470	1,0967	1,0576										
10	0,9861	1,1887	1,0754	1,0677											
11	1,0560	1,1410	1,0788												
12	1,0327	1,0515													
13	0,9723														
14															
i	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\hat{f}_i$	0,9977	1,0806	1,0715	1,0738	1,0590	1,0483	1,0288	1,0164	1,0082	1,0047	0,9998	1,0009	1,0012	1,0004	1,0000

Tabela 15 – $\Delta Run-off$ Inferior dos Custos Acumulados - método *Grossing Up*.

Ano de Acidente - i	Ano de Desenvolvimento - i														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1998 & ant - 0															
1999 - 1															47.770,84
2000 - 2													47.285,11	47.263,90	
2001 - 3												49.451,48	49.414,12	49.391,96	
2002 - 4											51.118,00	51.133,00	51.094,37	51.071,45	
2003 - 5									45.303,25	45.352,62	45.365,93	45.331,66	45.311,33		
2004 - 6								46.214,30	45.989,09	46.039,20	46.052,71	46.017,92	45.997,28		
2005 - 7								41.978,95	41.834,19	41.630,32	41.675,69	41.687,91	41.656,42	41.637,74	
2006 - 8							43.211,91	42.863,88	42.716,06	42.507,90	42.554,22	42.566,70	42.534,55	42.515,47	
2007 - 9						41.139,92	40.643,73	40.316,38	40.177,35	39.981,56	40.025,13	40.036,87	40.006,63	39.988,68	
2008 - 10					46.616,89	45.751,13	45.199,33	44.835,29	44.680,68	44.462,94	44.511,39	44.524,45	44.490,81	44.470,86	
2009 - 11				39.588,38	39.185,18	38.457,44	37.993,61	37.687,61	37.557,64	37.374,61	37.415,34	37.426,32	37.398,05	37.381,27	
2010 - 12			42.038,72	41.462,55	41.040,26	40.278,07	39.792,28	39.471,79	39.335,67	39.143,98	39.186,64	39.198,13	39.168,52	39.150,95	
2011 - 13		38.336,14	38.417,47	37.890,94	37.505,03	36.808,49	36.364,54	36.071,66	35.947,27	35.772,09	35.811,07	35.821,58	35.794,52	35.778,46	
2012 - 14	32.642,60	32.367,26	32.435,93	31.991,37	31.665,55	31.077,46	30.702,64	30.455,36	30.350,33	30.202,43	30.235,34	30.244,21	30.221,36	30.207,81	

Tabela 16 – Coeficientes individuais e de desenvolvimento para o $\Delta Run-off$ dos Custos Acumulados - método *Link Ratio*.

Ano de Acidente - i	Ano de Desenvolvimento - i														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1,0009	1,0135	0,9995	0,9961	0,9882	0,9854	0,9985	0,9990	0,9985	0,9992	0,9990	1,0000	0,9998	0,9996	1,0000
1	1,1186	1,0400	1,0298	1,0039	1,0003	0,9934	1,0085	0,9967	0,9958	0,9876	1,0048	1,0007	0,9987		
2	1,0950	1,0451	1,0540	1,0225	0,9948	0,9860	0,9863	0,9923	0,9957	0,9948	0,9978	1,0002			
3	1,0859	1,0010	1,0723	0,9998	1,0047	0,9941	0,9954	0,9853	0,9872	0,9914	1,0028				
4	1,1410	1,0109	1,0166	0,9926	1,0007	0,9830	0,9675	0,9881	0,9977	1,0027					
5	1,0567	1,0169	1,0325	0,9901	0,9780	0,9583	0,9704	0,9937	1,0046						
6	1,0310	0,9690	1,0327	0,9589	0,9847	0,9581	0,9902	0,9888							
7	1,1283	0,9853	0,9381	0,9660	0,9685	0,9829	0,9876								
8	1,0944	0,9824	0,9340	0,9694	0,9888	0,9936									
9	1,0242	0,9885	0,9561	0,9643	0,9912										
10	1,2055	0,9046	0,9929	0,9919											
11	1,0805	0,9455	0,9953												
12	1,0182	1,0190													
13	1,1114														
14															
$\hat{f}_i$	1,0851	0,9940	1,0045	0,9869	0,9900	0,9816	0,9881	0,9920	0,9966	0,9951	1,0011	1,0003	0,9992	0,9996	1,0000

Tabela 17 – $\Delta Run-off$ Inferior dos Custos Acumulados - método *Link Ratio*.

Ano de	Ano de Desenvolvimento - <i>i</i>														
Acidente - <i>i</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1998 & ant - 0															
1999 - 1															47.792,27
2000 - 2														47.299,63	47.285,12
2001 - 3													49.377,49	49.429,30	49.414,13
2002 - 4												51.015,87	51.056,89	51.110,46	51.094,78
2003 - 5											45.533,59	45.262,98	45.299,37	45.346,90	45.332,99
2004 - 6										46.157,80	46.224,43	45.949,71	45.986,66	46.034,91	46.020,78
2005 - 7									41.978,43	41.784,30	41.844,62	41.595,93	41.629,37	41.673,05	41.660,27
2006 - 8								43.038,49	42.869,06	42.670,81	42.732,41	42.478,45	42.512,60	42.557,20	42.544,15
2007 - 9							40.754,60	40.489,66	40.330,27	40.143,76	40.201,71	39.962,79	39.994,92	40.036,88	40.024,60
2008 - 10						44.948,63	45.330,69	45.036,01	44.858,71	44.651,27	44.715,72	44.449,97	44.485,71	44.532,39	44.518,72
2009 - 11					37.924,51	37.804,33	38.125,66	37.877,82	37.728,71	37.554,23	37.608,45	37.384,94	37.414,99	37.454,25	37.442,76
2010 - 12				39.114,77	39.813,59	39.687,43	40.024,77	39.764,58	39.608,04	39.424,88	39.481,79	39.247,14	39.278,70	39.319,91	39.307,85
2011 - 13			36.211,18	35.832,64	36.472,82	36.357,24	36.666,28	36.427,92	36.284,52	36.116,72	36.168,86	35.953,90	35.982,81	36.020,56	36.009,51
2012 - 14	28.058,21	30.630,65	30.310,44	30.851,96	30.754,20	31.015,61	30.813,98	30.692,68	30.550,74	30.594,84	30.413,02	30.437,47	30.469,40	30.460,06	

Tabela 18 – $\Delta Run-off$ Inferior dos Custos Acumulados - método *Chain Ladder*.

Ano de	Ano de Desenvolvimento - i														
Acidente - i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1998 & ant - 0															
1999 - 1															47.770,84
2000 - 2														47.305,46	47.284,24
2001 - 3													49.443,29	49.427,20	49.405,03
2002 - 4												51.053,13	51.059,65	51.043,04	51.020,15
2003 - 5											45.407,41	45.399,20	45.405,00	45.390,23	45.369,87
2004 - 6											46.258,16	46.138,56	46.130,23	46.136,12	46.121,11
2005 - 7											42.116,12	42.010,72	41.902,10	41.894,53	41.899,88
2006 - 8											43.411,95	43.203,02	43.094,90	42.983,48	42.975,71
2007 - 9											41.210,69	40.902,12	40.705,27	40.603,40	40.498,42
2008 - 10											46.601,89	45.815,08	45.472,04	45.253,19	45.139,94
2009 - 11											39.753,35	39.335,80	38.671,67	38.382,12	38.197,39
2010 - 12											42.066,34	41.662,68	41.225,08	40.529,05	40.225,59
2011 - 13											38.646,75	38.754,19	38.382,31	37.979,17	37.337,94
2012 - 14											31.837,47	31.824,69	31.913,17	31.606,93	31.274,95