

TÚLIO GUIMARÃES

Hipersuperfícies do $\mathbb{R}^4$ invariantes por um
subgrupo de isometrias com curvatura escalar
nula



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

2011

TÚLIO GUIMARÃES

Hipersuperfícies do $\mathbb{R}^4$ invariantes por um subgrupo de isometrias com curvatura escalar nula

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Jocelino Sato.

UBERLÂNDIA - MG

2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.**

G963h Guimarães, Túlio, 1987-
 Hipersuperfícies do R^4 invariantes por um subgrupo de isometrias com
 curvatura escalar nula [manuscrito] / Túlio Guimarães. - 2011.
 51 f. : il.

 Orientador: Jocelino Sato.
 Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia,
 Programa de Pós-Graduação em Matemática.
 Inclui bibliografia.

 1. Geometria descritiva – Teses. 2. Hipersuperfícies – Teses. 3.
 Isometria (Matemática) – Teses. I. Sato, Jocelino. II. Universidade Federal
 de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 514.18



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Túlio Guimarães.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 100088.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Geometria Diferencial.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Hipersuperfícies do $\mathbb{R}^4$ invariantes por um subgrupo de isometrias com curvatura escalar nula.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Jocelino Sato.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática 1F119, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 01 de julho de 2011, às 14 h, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Jocelino Sato UFU - Universidade Federal de Uberlândia	_____
Prof. Dr. José Miguel Malacarne UFES - Universidade Federal do Espírito Santo	_____
Prof. Dr. Edson Agustini UFU - Universidade Federal de Uberlândia	_____

Uberlândia-MG, 01 de julho de 2011.

Dedicatória

Dedico a todos os meus familiares, em especial à minha avó, à minha mãe e à minha irmã pelo exemplo de esforço e superação que são em minha vida e por toda a educação. Dedico também à minha noiva Letícia por ser tão especial para mim.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela graça de concluir este trabalho e pela saúde, fé e perseverança que tem me dado;

à minha mãe, Vânia Guimarães, pela companhia, conselho e apoio durante todo o trabalho;

à minha noiva Letícia Caixeta Silva pela compreensão e pelo estímulo na hora da tribulação;

aos meus amigos pelo incentivo à busca de novos conhecimentos;

ao Prof. Dr. Jocelino Sato pela sabedoria e dedicação com que me orientou durante todo o estudo;

aos meus colegas do mestrado Carlos Tognon, Daniela Portes, Flávio Fernandes, Karla Barbosa, Lilyane Figueiredo e Thiago Rodrigo;

e aos professores Cícero Carvalho, Victor Gonzalo, Geraldo Botelho, Antônio Carlos e Rosana Jafelice por todo o conhecimento que adquiri durante este mestrado.

Agradecimentos são dados à CAPES, pelo apoio financeiro e a todos da Faculdade de Matemática da UFU que sempre esclareceram minhas dúvidas, em especial à Magda Laine, Sandra Valéria, Leopoldina Cabral e ao professor coordenador do mestrado Edson Agustini.

GUIMARÃES, T. *Hipersuperfícies do $\mathbb{R}^4$ invariantes por um subgrupo de isometrias com curvatura escalar nula*. 2011. (51 pág) Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Nesta dissertação estudamos as hipersuperfícies que possuem curvatura escalar nula. O trabalho teve como foco as hipersuperfícies invariantes por um subgrupo de isometrias, que são obtidas através de uma curva geratriz parametrizada pelo comprimento de arco. Usamos as geratrizes para reduzir as equações diferenciais parciais das curvaturas escalares S , num sistema de coordenadas locais, tornando-as equações diferenciais ordinárias nas coordenadas da geratriz.

Fizemos uma síntese do estudo qualitativo de equações diferenciais ordinárias para concluirmos a dissertação, analisando as equações ordinárias das curvaturas escalares e classificamos as hipersuperfícies de $\mathbb{R}^4$ com curvatura escalar nula que são invariantes por um dos seguintes subgrupos de isometrias: $O(3)$, $O(2) \times O(2)$.

Palavras-chave: Hipersuperfícies Invariantes, Normal de Gauss, Curvatura Escalar, Equações Diferenciais.

GUIMARÃES, T. *Hypersurfaces of $\mathbb{R}^4$ invariant by an isometry subgroup with zero scalar curvature*. 2011. (51 pages) M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this dissertation we study hypersurfaces with zero scalar curvature. The work is based on hypersurfaces that are invariant by an isometry subgroup and are generated by curves parametrized by arc length. These curves are used to transform the partial differential equations S , given by local coordinates, into ordinary differential equations given by the coordinates of the curves that generate the hypersurfaces.

We made a summary of the qualitative study of ordinary differential equations to conclude the dissertation, analyzing the differential equations and classifying the $O(3)$ -invariant hypersurfaces and $O(2) \times O(2)$ -invariant hypersurfaces with zero scalar curvature.

Keywords: Invariant Hypersurfaces, Gauss Map, Scalar Curvature, Differential Equations.

Lista de Figuras

1.1	Aplicação Implícita.	4
1.2	Parametrizações positivas.	6
1.3	Faixa de Moebius [18] e Garrafa de Klein [17].	8
1.4	Aplicação Normal de Gauss.	10
1.5	Construção de uma parametrização para a hiperesfera.	12
3.1	Singularidade - Atrator.	28
3.2	Singularidade - Repulsor.	28
3.3	Singularidade - Sela.	28
3.4	Classificação dos Retratos de Fase[19].	29
3.5	Seção transversal conexa de um campo planar.	32
3.6	Classificação das singularidades de uma E.D.O. não-linear [19].	34
3.7	Campo vetorial 1.	34
3.8	Campo vetorial 2.	34
4.1	Curva de nível de f	38
4.2	Campo vetorial $X(w, v) = (X_1(w, v), X_2(w, v))$	43
4.3	Caso 1.	46
4.4	Caso 2.	46
4.5	Caso 3.	47
4.6	Caso 4.	47
4.7	Caso 5.	47
4.8	Caso 6.	48
4.9	Caso 7.	48

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	ix
Introdução	1
1 Superfícies no espaço euclidiano	3
1.1 Alguns conceitos básicos	3
1.2 Orientação de uma superfície	6
1.3 Aplicação de Gauss em hipersuperfícies de $\mathbb{R}^{n+1}$	8
1.4 Hiperesferas em $\mathbb{R}^{n+1}$ de raio 1	12
2 Hipersuperfícies invariantes pela ação de um subgrupo de isometrias	16
2.1 Hipersuperfícies rotacionais $O(n+1)$	17
2.2 Hipersuperfícies invariantes por $O(n+1) \times O(n+1)$	19
3 Estudo qualitativo de E.D.O.	23
3.1 Equações diferenciais lineares de coeficientes constantes em $\mathbb{R}^n$	24
3.2 Classificação das singularidades de E.D.O. em $\mathbb{R}^2$	26
3.3 Equações diferenciais não-lineares em $\mathbb{R}^n$	29
3.4 Conjuntos invariantes	34
4 Hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$ invariantes por um subgrupo de isometrias com curvatura escalar nula	37
4.1 Hipersuperfícies rotacionais em $\mathbb{R}^4$ com curvatura escalar nula	37
4.2 Hipersuperfícies $O(2) \times O(2)$ em $\mathbb{R}^4$ com curvatura escalar nula	40

Conclusão	49
Referências Bibliográficas	50

Introdução

Os métodos da geometria equivariante têm permitido a construção e classificação de vários exemplos de hipersuperfícies invariantes com uma dada condição sobre a r -ésima curvatura média.

Nesta área de pesquisa, temos de início a classificação das superfícies rotacionais com curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$ obtidas por Delaunay em 1841 no trabalho [3]. Após a classificação dos grupos de isometrias de baixa cohomogenidade feita por HSIANG e LAWSON [8], vários trabalhos abordando geometria equivariante foram divulgados por Hsiang e seus colaboradores. Estudando hipersuperfícies de $\mathbb{R}^{2m}$ invariantes por $O(m) \times O(m)$, HSIANG, TENG e YU [9] mostram a existência de imersões de S^{2m-1} em $\mathbb{R}^{2m}$ ($m \geq 2$), com curvatura média constante, que não são hiperesferas redondas. Tais imersões são contra-exemplos para a conjectura de Hopf em dimensões n maior do que ou igual a 3, no caso $n = 2$ um contra-exemplo é o toro de Wente (não mergulhado) [7].

O objetivo desse trabalho foi construir e classificar algumas classes de hipersuperfícies de $\mathbb{R}^4$ com curvatura escalar zero. Os principais artigos que embasam esta dissertação são “Rotational hypersurfaces in space of constant curvature” de Maria Luiza Leite [10] e “ $O(2) \times O(2)$ -invariant hypersurfaces with zero scalar curvature” de Oscar Palmas [14].

No Capítulo 1 citamos conceitos e resultados básicos da teoria de superfícies, introduzindo a Aplicação Normal de Gauss e as curvaturas principais. Ainda nesse capítulo definimos a r -ésima curvatura média H_r de uma hipersuperfície e obtemos alguns resultados sobre a hiperesfera $\mathbb{S}^n$ que serão usados no Capítulo 2.

No Capítulo 2 estudamos a Aplicação Normal de Gauss das hipersuperfícies rotacionais $O(n + 1)$ e das hipersuperfícies invariantes por produto de rotações $O(n + 1) \times O(n + 1)$, fornecendo explicitamente as equações da curvatura escalar S destas hipersuperfícies.

No Capítulo 3, fizemos um resumo do estudo qualitativo das equações diferenciais ordinárias para termos condições, de, no quarto capítulo, estudarmos as equações associadas às hipersuperfícies com curvatura escalar nula.

O Capítulo 4 trata da resolução das equações diferenciais para curvatura escalar das hipersuperfícies rotacionais $S(u) = \frac{-2x''x + (1 - (x')^2)}{3x^2} = 0$ e das hipersuperfícies invariantes por produtos de rotações $S(u) = \frac{1}{3xz} [(-z''x' + x''z')(-z'z + x'x) - z'x'] = 0$, em que para hipersuperfícies rotacionais resolvemos através da integral primeira e para hipersuperfícies invariantes por produtos de rotações contruiremos o retrato de fase associado à equação, traduzindo os resultados no campo vetorial para as geratrizes, o que permite a classificação dessas hipersuperfícies.

Túlio Guimarães

Uberlândia-MG, 01 de julho de 2011.

Capítulo 1

Superfícies no espaço euclidiano

Neste capítulo estenderemos alguns conceitos da geometria de superfícies em $\mathbb{R}^3$ (ver DO CARMO [4]) para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, usando alguns resultados encontrados em LIMA [11], possibilitando o estudo de hipersuperfícies do $\mathbb{R}^n$.

1.1 Alguns conceitos básicos

Definição 1.1 *Um conjunto conexo $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície regular de dimensão m quando, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap M$ de um aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^m$ sobre $V \cap M \subset \mathbb{R}^n$ tal que:*

1. *X é diferenciável, isto é, suas funções coordenadas têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U ;*
2. *X é um homeomorfismo;*
3. *Para cada $u \in U$, a diferencial $dX_u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva.*

A aplicação $X : U \rightarrow V \cap M$ com $p \in V \cap M = X(U)$ é denominada uma *parametrização* de M em $p = X(u)$, $u = (u_1, \dots, u_m)$ é a *coordenada* de p e $X(U)$ é então chamada uma *vizinhança coordenada* de M em p . A notação $M^m \subset \mathbb{R}^n$ significa que M é uma superfície de dimensão m em $\mathbb{R}^n$, e o número $n - m > 0$ é a *codimensão* de M em $\mathbb{R}^n$. Uma superfície com co-dimensão 1 é chamada de *hipersuperfície*.

Assim, uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto que admite uma família $\mathcal{F}$ de parametrizações $X_\lambda : U_\lambda \rightarrow V_\lambda \cap M$, $\lambda \in \mathcal{F}$, denominada *atlas*, cujas imagens cobrem M , isto é, $M \subseteq \bigcup_{\lambda} X_\lambda(U_\lambda)$. O atlas permite estender as noções do cálculo diferencial à superfície M e, este processo inclui dois importantes teoremas do cálculo diferencial em $\mathbb{R}^m$:

1. TEOREMA DA APLICAÇÃO INVERSA

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $a \in U$ é tal que $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é invertível, então existe uma bola aberta $B = B(a; \delta) \subset U$ tal que a restrição $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V = f(B) \subset \mathbb{R}^m$ com $f(a) \in V$.

2. TEOREMA DA APLICAÇÃO IMPLÍCITA

Seja $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Suponha que $f(x_0, y_0) = c$ e a matriz $n \times n$ dada por $\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x_0, y_0) \right]$ é invertível. Então, existem um aberto $W \subset \mathbb{R}^m$ com $x_0 \in W$ e uma aplicação diferenciável $\xi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $\xi(x_0) = y_0$, tais que $\forall x \in W$ temos

$$f(x, \xi(x)) = c.$$

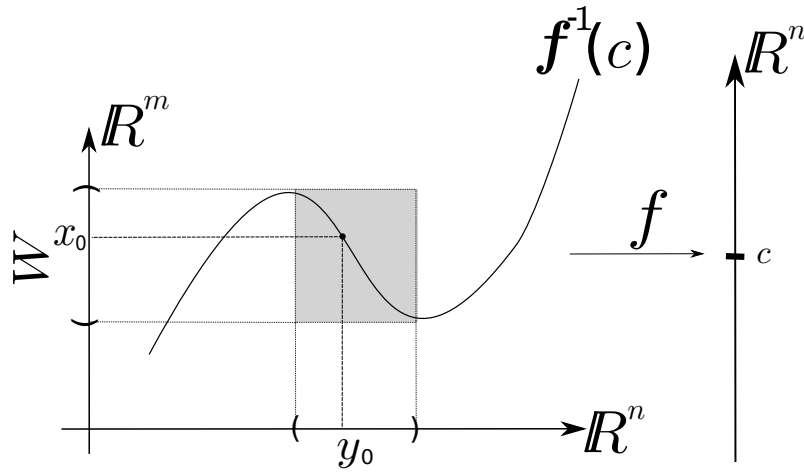


Figura 1.1: Aplicação Implícita.

Geometricamente essa igualdade significa que $f^{-1} \cap Z$, onde $Z = W \times \xi(W)$, é o gráfico da aplicação ξ .

Exemplo 1.1 Os gráficos de aplicações diferenciáveis $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, definidas em abertos $U \subset \mathbb{R}^n$, são hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$. Elas admitem um atlas constituído por uma única parametrização global $X : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, dada por $X(u) = (u, f(u))$, $u \in U$.

Exemplo 1.2 As imagens inversas de valores regulares $c \in \mathbb{R}^n$ de aplicações diferenciáveis $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, definidas em abertos $W \subset \mathbb{R}^{m+n}$, ou seja, o conjunto dos pontos $w \in W$ tais que $f(w) = c$ e que a diferencial $Df(w) \neq 0$, são superfícies diferenciáveis em $\mathbb{R}^{m+n}$. Neste caso, a existência do atlas para $M = f^{-1}(c)$ é consequência do Teorema da Aplicação Implícita e do exemplo anterior. Considerando $f(x) = \langle x, x \rangle$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ concluímos que a hipersfera $S^n(r) = f^{-1}(r)$, de centro na origem e raio $r > 0$, é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Outra consequência do Teorema da Aplicação Implícita é o fato da mudança de coordenada ser um difeomorfismo. Precisamente, se $X_\lambda : U_\lambda \rightarrow V_\lambda \cap M$ e $X_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta \cap M$ são parametrizações de vizinhanças $W_\lambda = V_\lambda \cap M$ e $W_\beta = V_\beta \cap M$, com $W = W_\lambda \cap W_\beta \neq \emptyset$ e se $p \in W$ tem coordenadas $u = (u_1, \dots, u_n) = X_\lambda^{-1}(p)$ em relação à X_λ e coordenadas $v = (v_1, \dots, v_n) = X_\beta^{-1}(p)$ em relação à X_β , então a *mudança de coordenadas*

$$X_\beta^{-1} \circ X_\lambda : U \longrightarrow V,$$

$u \longmapsto v$, é um difeomorfismo entre os abertos $U = X_\lambda^{-1}(W)$ e $V = X_\beta^{-1}(W)$ do $\mathbb{R}^m$.

Esse resultado fornece a boa definição da noção de diferenciabilidade para aplicações definidas em superfícies. Dizemos que uma aplicação

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}^p,$$

definida numa superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$, é diferenciável em $p \in M$ quando existe uma parametrização $X : U \rightarrow V \cap M$ com $p \in V \cap M = X(U)$ tal que a *representação local de f*

$$f \circ X : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

é diferenciável em $u = X^{-1}(p)$ no sentido usual.

Sejam $M^m \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície, $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização de uma vizinhança de $p \in X(U)$ em M . Definimos o conjunto $T_p M$, chamado *espaço tangente a M no ponto p* , como sendo tanto a imagem da transformação linear injetiva $X'(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $p = X(u)$, quanto o conjunto dos vetores tangentes $\lambda'(0)$ de todos os caminhos diferenciáveis $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ passando por $p = \lambda(0)$.

Sejam $M^m \subset \mathbb{R}^r$ e $N^n \subset \mathbb{R}^s$ duas superfícies e $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é diferenciável em $p \in M$ se existem uma vizinhança parametrizada $X(U)$ de p e uma vizinhança parametrizada $Y(V)$ de $q = f(p)$ tais que $f(X(U)) \subset Y(V)$ e a aplicação

$$Y^{-1} \circ f \circ X : U \longrightarrow V,$$

denominada *representação local de f* , é diferenciável em $X^{-1}(p)$. Assim, definimos f diferenciável num aberto $W \subset M$ se sua representação local for diferenciável em cada ponto do aberto $X^{-1}(W)$.

Dada uma aplicação diferenciável $f : M^m \longrightarrow N^n$ para cada $p \in M$ e cada $v \in T_p M$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$ e faça $\beta = f \circ \alpha$. A derivada $f'(p)$ é uma aplicação $df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$, em que $df_p(v) = \beta'(0)$. Tal aplicação é uma transformação linear e sua definição não depende da curva α escolhida.

Usando os conceitos de diferenciabilidade e de derivada de aplicações entre superfícies estudamos, de forma natural, os resultados e conceitos do cálculo diferencial para aplicações definidas em superfícies. Em particular temos a regra da cadeia, o Teorema da Aplicação Implícita, o Teorema da Aplicação Inversa, entre outros resultados, e também os conceitos de gradiente, divergente, etc.

1.2 Orientação de uma superfície

Note que toda superfície $M \subset \mathbb{R}^n$ é localmente o gráfico de uma aplicação diferenciável e, portanto, é localmente a imagem inversa de um valor regular de uma aplicação diferenciável. Se $V \subset M$ é o gráfico de uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, então podemos definir V como a imagem inversa do valor regular 0 da aplicação $g : U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ definida por $g(x, y) = y - f(x)$. Porém nem sempre a imagem inversa de um valor regular $c \in \mathbb{R}^{n-m}$, de uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, pode ser definida, globalmente, como gráfico de uma aplicação $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ em um aberto $V \subset \mathbb{R}^m$, pois, esta superfície pode ser compacta e um gráfico sempre é homeomorfo ao seu domínio, logo, um aberto.

Nem todas as superfícies são dadas pela imagem inversa do valor regular de uma aplicação diferenciável, uma condição necessária para que isso ocorra é que a superfície seja orientável, conforme definiremos a seguir.

Um atlas $\mathcal{A} = \{X_\lambda : U_\lambda \rightarrow V_\lambda \cap M = W_\lambda, \lambda \in \mathcal{F}\}$ de uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ é dito *positivo* quando quaisquer duas parametrizações X_i e X_j são positivas, ou seja, ou temos $W = W_i \cap W_j = \emptyset$ ou para todo $p = X_j(u)$ em W , o *determinante Jacobiano* da mudança de coordenadas $(X_i^{-1} \circ X_j)(u)$ é positivo. Assim temos:

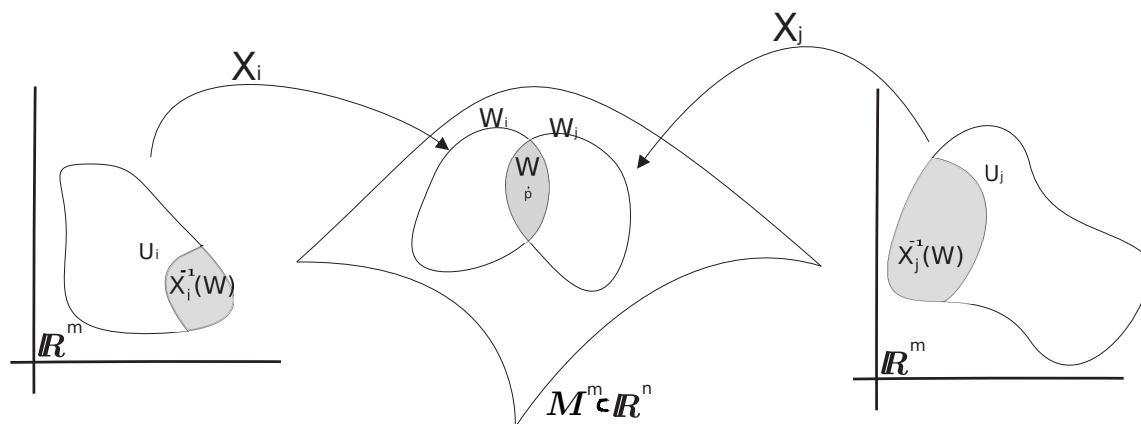


Figura 1.2: Parametrizações positivas.

Definição 1.2 Uma superfície M é dita ser orientável quando admite um atlas positivo. Do contrário dizemos que M é uma superfície não-orientável. Uma escolha de um atlas positivo é denominada uma orientação de M .

Observação 1.1 Como estamos trabalhando com superfícies conexas, qualquer superfície orientável M admite apenas duas orientações.

Exemplo 1.3 Toda superfície que admite um atlas formado por uma única parametrização global é uma superfície orientável. Logo, os conjuntos abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e os gráficos de funções diferenciáveis são superfícies orientáveis.

Uma forma de caracterizar uma superfície orientável $M \subset \mathbb{R}^n$ é através de campos contínuos de vetores normais desta superfície, que são aplicações $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que para todo $p \in M$ temos $v(p)$ pertencente ao complemento ortogonal do plano tangente ($v(p) \in T_p M^\perp$). Se uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ admite $n - m$ campos de vetores normais $v_1, \dots, v_{n-m} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ linearmente independentes em cada $p \in M$, então M é orientável.

De fato, seja $M^m \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície que admite tais campos e considere um atlas maximal $\mathcal{A}^* = \{X_\lambda : U_\lambda \rightarrow W_\lambda = V_\lambda \cap M, \lambda \in \mathcal{F}\}$ para M , vamos usar os campos v_i e $\mathcal{A}^*$ para produzir um atlas positivo $\mathcal{A}$ para M , ou seja, uma orientação. Dado $X_\lambda : U_\lambda \rightarrow W_\lambda$, $\lambda \in \mathcal{F}$, temos que a matriz coluna do tipo $n \times n$

$$\Phi_\lambda(u) = \left[\frac{\partial X_\lambda}{\partial x_1}(u), \dots, \frac{\partial X_\lambda}{\partial x_m}(u), v_1(X_\lambda(u)), \dots, v_{n-m}(X_\lambda(u)) \right]$$

tem determinante não nulo pelo fato das m primeiras colunas formarem uma base de $T_{X(u)}M$ e as outras $n - m$ uma base para $T_{X(u)}M^\perp$, com $\mathbb{R}^n = (T_{X(u)}M) \oplus (T_{X(u)}M^\perp)$. Sendo U_λ é conexo, o sinal do determinante da matriz $\Phi_\lambda(u)$ não muda em U_λ . Assim, se $\det \Phi_\lambda(u) > 0$ em U_λ , adicionamos X_λ ao conjunto $\mathcal{A}$. Agora, se $\det \Phi_\lambda(u) < 0$, então compondo X_λ com a aplicação $\xi(u_1, u_2, \dots, u_n) = (-u_1, u_2, \dots, u_n)$, obtendo $\tilde{X}_\lambda = X_\lambda \circ \xi$ com a mesma imagem W_λ e adicionamos $\tilde{X}_\lambda$ à $\mathcal{A}$. Aplicando esse procedimento para todo $\lambda \in \mathcal{F}$ obtemos um atlas positivo $\mathcal{A}$ para M . Para mostrar que $\mathcal{A}$ é positivo sejam $X_\lambda : U_\lambda \rightarrow W_\lambda$ e $X_\beta : U_\beta \rightarrow W_\beta$ parametrizações em $\mathcal{A}$ com $W = W_\lambda \cap W_\beta \neq \emptyset$. Em termos matriciais a Jacobiana da mudança de coordenadas de $u = X_\lambda^{-1}(p)$ para $v = X_\beta^{-1}(p)$ é dada por

$$J(X_\beta^{-1} \circ X_\lambda)(u) = (a_{ij}) = A,$$

com

$$\frac{\partial X_\lambda}{\partial x_j}(u) = \sum_{i=0}^n a_{ij} \frac{\partial X_\beta}{\partial y_i}(v), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Além disso, as matrizes $\Phi_\lambda(u) = \left[\frac{\partial X_\lambda}{\partial x_1}(u), \dots, \frac{\partial X_\lambda}{\partial x_m}(u), v_1(X_\lambda(u)), \dots, v_{n-m}(X_\lambda(u)) \right]$ e $\Psi_\beta(v) = \left[\frac{\partial X_\beta}{\partial y_1}(v), \dots, \frac{\partial X_\beta}{\partial y_m}(v), v_1(X_\beta(v)), \dots, v_{n-m}(X_\beta(v)) \right]$ satisfazem

$$\Phi_\lambda(u) = \Psi_\beta(v) \begin{pmatrix} A & \emptyset \\ \emptyset & I_{n-m} \end{pmatrix},$$

com $\det \Phi_\lambda(u) > 0$ e $\det \Psi_\beta(v) > 0$. Logo, por I_{n-m} ser a matriz identidade de ordem $n - m$, temos

$$\det J(X_\beta^{-1} \circ X_\lambda)(u) = \det \begin{pmatrix} A & \emptyset \\ \emptyset & I_{n-m} \end{pmatrix} = \det A > 0,$$

o que significa que X_λ e X_β são parametrizações positivas e, segue da arbitrariedade de X_λ e X_β que $\mathcal{A}$ é um atlas positivo, ou seja, M é orientável.

Exemplo 1.4 Se uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ é imagem inversa de um valor regular de uma aplicação diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, então M é orientável.

Quando a codimensão de M é igual a 1, vale a recíproca da afirmação acima. Ou seja:

Teorema 1.1 Uma hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é orientável se, e somente se, existe um campo contínuo de vetores normais $n : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, com $n(p) \neq 0$ para todo $p \in M$.

Como exemplo de superfícies não orientáveis temos a faixa de Moebius em $\mathbb{R}^3$, garrafa de Klein em $\mathbb{R}^4$ e o plano projetivo $\mathbb{P}^n$ em $\mathbb{R}^{2n}$ com n par, as quais não podem ser dadas como imagem inversa de um valor regular de um aplicação diferenciável.

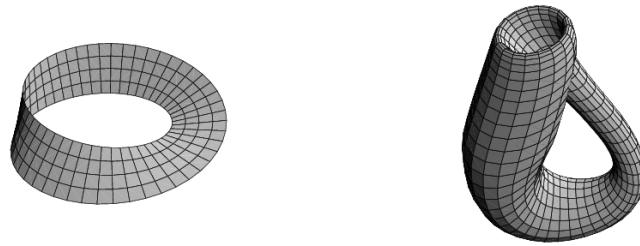


Figura 1.3: Faixa de Moebius [18] e Garrafa de Klein [17].

1.3 Aplicação de Gauss em hipersuperfícies de $\mathbb{R}^{n+1}$

Pelo Teorema 1.1 visto acima, a orientação de uma hipersuperfície orientável $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ pode ser dada pela escolha de um campo contínuo de vetores normais unitários em M .

Definição 1.3 A Aplicação Normal de Gauss de uma hipersuperfície orientável $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é definida como o campo contínuo de vetores normais unitários que dá a orientação positiva desta hipersuperfície. Ou seja, é uma aplicação $N : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ em que dado $p \in M$ o vetor $N(p)$ é perpendicular ao espaço tangente $T_p M$ e o conjunto $\{X_{u_1}, \dots, X_{u_n}, N(p)\}$ forma, nesta ordem, uma base orientada positivamente em $\mathbb{R}^{n+1}$. Logo, o determinante da matriz da transformação linear $A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que leva vetores da base canônica para a base $\{X_{u_1}, \dots, X_{u_n}, N(x)\}$, deve ter valor positivo.

Para definirmos localmente a Aplicação Normal de Gauss, além de uma parametrização é necessário utilizar de alguns resultados de Álgebra Multilinear (ver Capítulo VII de [11]). Temos:

- O produto vetorial de n vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ é um vetor em $\mathbb{R}^{n+1}$ definido formalmente pelo determinante

$$v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{n+1} \\ v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1(n+1)} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{n(n+1)} \end{vmatrix}, \quad (1.1)$$

em que $v_i = \sum_{j=1}^{n+1} v_{ij} e_j$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$;

- Denotando por $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i$ o produto interno canônico em $\mathbb{R}^{n+1}$ e usando o desenvolvimento de Laplace para calcular $v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$ obtemos a igualdade

$$\langle w, v_1 \times \dots \times v_n \rangle = \begin{vmatrix} w \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_{n+1} \\ v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1(n+1)} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{n(n+1)} \end{vmatrix}, \quad (1.2)$$

em que $w = (w_1, \dots, w_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

- Dada uma aplicação linear auto-adjunta $T : E \rightarrow E$, onde a dimensão de E é finita, existe uma base do espaço vetorial E formada por autovetores de T , em que T admite uma representação diagonal.

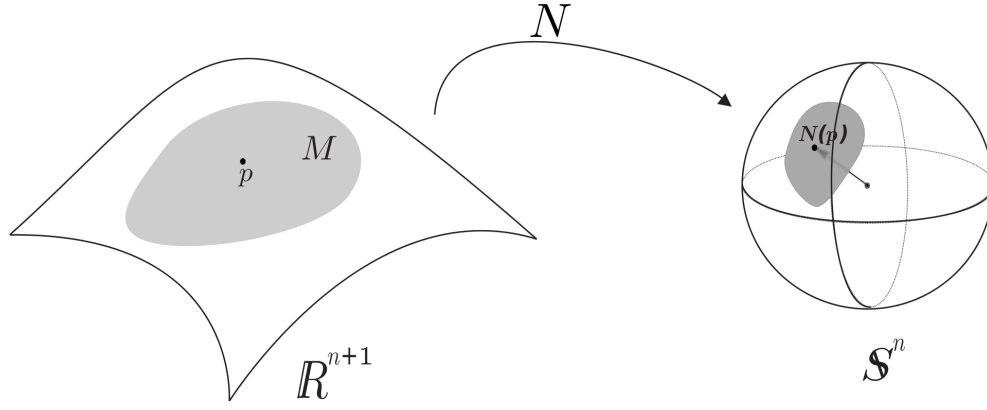


Figura 1.4: Aplicação Normal de Gauss.

Seja $X : U \rightarrow M$ uma parametrização de uma vizinhança de $p \in M$, então $\frac{w}{|w|}$ e $-\frac{w}{|w|}$, onde $w = X_{u_1} \times X_{u_2} \times \cdots \times X_{u_n}$, são vetores unitários normais a M , e por (1.2),

$$\begin{vmatrix} X_{u_1} \\ \vdots \\ X_{u_n} \\ w \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} w \\ X_{u_1} \\ \vdots \\ X_{u_n} \end{vmatrix} = (-1)^n \langle w, w \rangle = (-1)^n |w|^2.$$

Daí,

Proposição 1.1 A Aplicação Normal de Gauss $N : M \mapsto \mathbb{S}^n$ é diferenciável e sua representação local na parametrização $X : U \rightarrow V \cap M$ é dada por

$$N(p) = N \circ X(u) = (-1)^n \frac{X_{u_1} \times X_{u_2} \times \cdots \times X_{u_n}}{|X_{u_1} \times X_{u_2} \times \cdots \times X_{u_n}|}. \quad (1.3)$$

Ela associa a cada ponto $p = X(u)$, a um dos dois vetores unitários e perpendiculares a $T_p M$.

Proposição 1.2 A diferencial $dN_p : T_p M \mapsto T_p M$ da aplicação normal de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta. Assim, existe uma base de $T_p M$ formada por autovetores ortonormais $v_1, \dots, v_n$, associados a autovalores $k_1, \dots, k_n$, que diagonalizam dN_p .

Dem. Seja $u = (u_1, \dots, u_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$ com $X(u) = p$. Devemos mostrar que

$$\langle dN_{X(u)}(X_{u_i}), X_{u_j} \rangle = \langle X_{u_i}, dN_{X(u)}(X_{u_j}) \rangle.$$

Tome $c(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$, sendo $c(0) = u$, e $\alpha(t) = X(c(t))$ temos $\alpha'(t) = \sum_{i=1}^n u'_i X'_{u_i}$.

Assim, pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} \circ \alpha(t) &= \frac{d}{dt}(N \circ X)(c(t)) = \\ &= \sum_{i=1}^n u'_i (N \circ X)_{u_i} = \sum_{i=1}^n u'_i N_{u_i}, \end{aligned}$$

onde $N_{u_i} = (N \circ X)_{u_i}$. Por outro lado, temos

$$\frac{dN}{dt} \circ \alpha(t) = dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \sum_{i=1}^n u'_i dN_{\alpha(t)}(X_{u_i}),$$

donde concluímos que $dN_{\alpha(t)}(X_{u_i}) = N_{u_i}$.

Das igualdades $\langle N, X_{u_i} \rangle = 0$ e $\langle N, X_{u_j} \rangle = 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial u_j} \langle N, X_{u_i} \rangle = \langle N_{u_j}, X_{u_i} \rangle + \langle N, X_{u_i u_j} \rangle, \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial u_i} \langle N, X_{u_j} \rangle = \langle N_{u_i}, X_{u_j} \rangle + \langle N, X_{u_j u_i} \rangle. \end{aligned}$$

Daí, $\langle N_{u_j}, X_{u_i} \rangle = -\langle N, X_{u_i u_j} \rangle = \langle X_{u_j}, N_{u_i} \rangle$, ou seja,

$$\langle dN_{\alpha(t)}(X_{u_j}), X_{u_i} \rangle = -\langle N, X_{u_i u_j} \rangle = \langle X_{u_j}, dN_{\alpha(t)}(X_{u_i}) \rangle. \quad (1.4)$$

Segue-se da linearidade da diferencial dN_p e do produto interno que dN_p é auto-adjunta. $\square$

Definição 1.4 *Os autovalores da aplicação $-dN_p$ são as curvaturas principais da hipersuperfície M em p .*

Por meio das n curvaturas principais de uma hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, definimos as r -ésimas curvaturas médias de hipersuperfícies por:

$$H_r(p) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} k_{i_1} k_{i_2} \dots k_{i_r}, \quad 1 \leq r \leq n. \quad (1.5)$$

e algumas dessas r -ésimas curvaturas médias recebem um nome especial como:

- *Curvatura Média:*

$$\begin{aligned} H &= H_1(p) = \frac{1}{\binom{n}{1}} \sum_i k_i = \frac{1}{n} \sum_i k_i \\ H &= \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{n} \end{aligned} \quad (1.6)$$

- *Curvatura Escalar:*

$$\begin{aligned} S &= H_2(p) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i < j} k_i \cdot k_j \\ S &= \frac{2}{n(n-1)} (k_1 \cdot k_2 + \dots + k_1 \cdot k_n + k_2 \cdot k_3 + \dots + k_2 \cdot k_n + \dots + k_{n-1} \cdot k_n) \end{aligned} \quad (1.7)$$

- *Curvatura Gauss-Kronecker:*

$$\begin{aligned} K &= H_n(p) = \frac{1}{\binom{n}{n}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n} k_{i_1} k_{i_2} \dots k_{i_n} \\ K &= k_1 k_2 \dots k_n. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Neste estudo, iremos tratar das hipersuperfícies com curvatura escalar nula invariantes por rotações, ou por produto de rotações.

1.4 Hiperesferas em $\mathbb{R}^{n+1}$ de raio 1

Primeiramente definimos uma parametrização da hiperesfera $\mathbb{S}^n$ de raio unitário e centro na origem, que será fixada desta forma sempre que fizermos uma referência a ela, e obteremos igualdades que são importantes nos estudo das hipersuperfícies invariantes.

Tomando um ponto $P = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$ se P_n é a projeção ortogonal de P no hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por $x_{n+1} = 0$, então $P := P_n + \cos(\theta_n) \cdot e_{n+1}$ com $|P_n| = \sin(\theta_n)$. Prosseguindo obtemos $P_n := P_{n-1} + \sin(\theta_n) \cos(\theta_{n-1}) \cdot e_n$ com $|P_{n-1}| = \sin(\theta_n) \sin(\theta_{n-1})$ onde P_{n-1} é a projeção de P_n no hiperplano $x_n = 0$ de $\mathbb{R}^n$, e assim por diante. Através desse procedimento conseguimos escrever as coordenadas de P da seguinte forma

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \cos(\theta_n) \\ x_n &= \sin(\theta_n) \cos(\theta_{n-1}) \\ x_{n-1} &= \sin(\theta_n) \sin(\theta_{n-1}) \cos(\theta_{n-2}) \\ &\vdots \\ x_3 &= \sin(\theta_n) \sin(\theta_{n-1}) \cdots \sin(\theta_3) \cos(\theta_2) \\ x_2 &= \sin(\theta_n) \sin(\theta_{n-1}) \cdots \sin(\theta_3) \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) \\ x_1 &= \sin(\theta_n) \sin(\theta_{n-1}) \cdots \sin(\theta_3) \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \end{aligned}$$

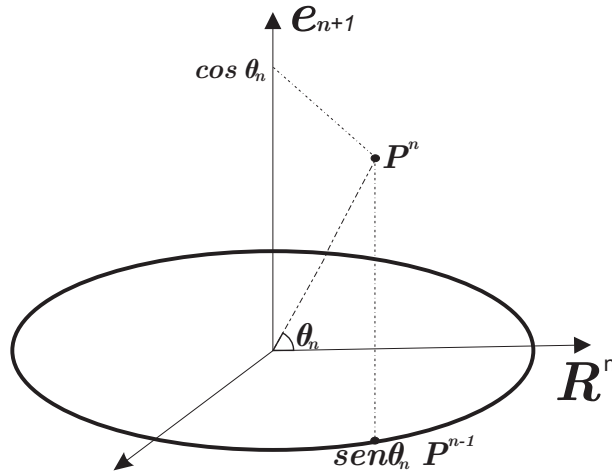


Figura 1.5: Construção de uma parametrização para a hiperesfera.

Chamemos de parametrização em coordenadas esféricas da hiperesfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a aplicação

$$\Psi^n(\theta_1, \dots, \theta_n) = (x_1(\theta_1, \dots, \theta_n), \dots, x_{n+1}(\theta_1, \dots, \theta_n)),$$

onde $\theta_1 \in (0, 2\pi)$ e $\theta_i \in (0, \pi)$, para $2 \leq i \leq n$. Simplificando, podemos escrever $\Psi^{n-1} = (x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \dots, x_n^{n-1})$ e $\Psi^n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_{n+1}^n)$ em que $x_i^n = x_i^{n-1} \sin(\theta_n)$, para $1 \leq i \leq n$,

como sendo as parametrizações em coordenadas esféricas de $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, respectivamente. Assim:

$$\begin{aligned}\Psi^n &= (x_1^n, x_2^n, \dots, x_{n+1}^n) \\ &= \text{sen}(\theta_n)(x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \dots, x_n^{n-1}) \oplus \cos(\theta_n) \\ &= \text{sen}(\theta_n)\Psi^{n-1} \oplus \cos(\theta_n)\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\Psi_{\theta_i}^n &= \text{sen}(\theta_n)\Psi_{\theta_i}^{n-1} \oplus 0 \quad \text{para } i \neq n \\ \Psi_{\theta_n}^n &= \cos(\theta_n)\Psi^{n-1} \oplus (-\text{sen}(\theta_n)),\end{aligned}\tag{1.9}$$

sendo $\oplus$ a soma direta. Logo, valem as seguintes igualdades

$$\langle \Psi^n, \Psi^n \rangle = 1 \tag{1.10a}$$

$$\langle \Psi^n, \Psi_{\theta_i}^n \rangle = 0 \tag{1.10b}$$

$$\langle \Psi_{\theta_i}^n, \Psi_{\theta_j}^n \rangle = 0, i \neq j, \tag{1.10c}$$

$$\langle \Psi_{\theta_i}^n, \Psi_{\theta_i}^n \rangle = \begin{cases} \text{sen}^2(\theta_n) \langle \Psi_{\theta_i}^{n-1}, \Psi_{\theta_i}^{n-1} \rangle, & \text{se } i \neq n \\ 1, & \text{se } i = n \end{cases} \tag{1.10d}$$

que podem ser deduzidas, usando indução sobre a dimensão n . Outro resultado importante na hiperesfera de raio 1 é sua Aplicação de Gauss em coordenadas locais dada por (1.3).

Proposição 1.3 *Sejam $\mathbb{S}^n$ a hiperesfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$ e Ψ^n sua parametrização em coordenadas esféricas. Temos as igualdades*

$$\Psi_{\theta_1}^n \times \Psi_{\theta_2}^n \times \dots \times \Psi_{\theta_n}^n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_{n+1} \\ \Psi_{\theta_1}^n \\ \Psi_{\theta_2}^n \\ \vdots \\ \Psi_{\theta_n}^n \end{vmatrix} = \left[(-1)^n \cdot \prod_{i=1}^n \text{sen}^{i-1}(\theta_i) \right] \Psi^n \tag{1.11}$$

e

$$\langle \Psi^n, \Psi_{\theta_1}^n \times \Psi_{\theta_2}^n \times \dots \times \Psi_{\theta_n}^n \rangle = \begin{vmatrix} \Psi^n \\ \Psi_{\theta_1}^n \\ \Psi_{\theta_2}^n \\ \vdots \\ \Psi_{\theta_n}^n \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot \prod_{i=1}^n \text{sen}^{i-1}(\theta_i) \tag{1.12}$$

Logo, a representação local da Aplicação Normal de Gauss será $N = \Psi^n$.

Dem. Esta demonstração será feita usando o desenvolvimento de Laplace e indução sobre n .

Para isso usaremos as igualdades (1.1) e (1.2). Assim

- Para $n = 1$, temos $\Psi^1 = (\text{sen}(\theta_1), \cos(\theta_1))$ e $\Psi_{\theta_1}^1 = (\cos(\theta_1), -\text{sen}(\theta_1))$ logo:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) \end{vmatrix} = (-\text{sen}(\theta_1), -\cos(\theta_1)) = -\Psi^1 = (-1)^1 \Psi^1$$

$$\begin{vmatrix} \Psi^1 \\ \Psi_{\theta_1}^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) \\ \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) \end{vmatrix} = -\text{sen}^2(\theta_1) - \cos^2(\theta_1) = -1$$

- Para $n = 2$, temos

$$\Psi^2 = \text{sen}(\theta_2) \cdot \Psi^1 \oplus \cos(\theta_2)$$

$$\Psi_{\theta_1}^2 = \text{sen}(\theta_2) \cdot \Psi_{\theta_1}^1 \oplus 0$$

$$\Psi_{\theta_2}^2 = \cos(\theta_2) \cdot \Psi^1 \oplus -\text{sen}(\theta_2)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\theta_1}^2 \times \Psi_{\theta_2}^2 &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \Psi_{\theta_1}^2 \\ \Psi_{\theta_2}^2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+3} e_3 \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) \begin{vmatrix} \Psi_{\theta_1}^1 \\ \Psi^1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} (-\text{sen}(\theta_2)) \text{sen}(\theta_2) \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ \Psi_{\theta_1}^1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^2 \text{sen}(\theta_2) [\text{sen}(\theta_2) \Psi^1 + \cos(\theta_2) e_3] \\ &= (-1)^2 \text{sen}(\theta_2) \Psi^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi^2, \Psi_{\theta_1}^2 \times \Psi_{\theta_2}^2 \rangle &= \langle \Psi^2, (-1)^2 \text{sen}(\theta_2) \Psi^2 \rangle \\ &= (-1)^2 \text{sen}(\theta_2) \end{aligned}$$

- Supondo verdadeira para $n = k$, ou seja, que

$$\Psi_{\theta_1}^k \times \Psi_{\theta_2}^k \times \cdots \times \Psi_{\theta_k}^k = (-1)^k \cdot \prod_{i=1}^k \text{sen}^{i-1}(\theta_i) \cdot \Psi^k$$

$$\langle \Psi^k, \Psi_{\theta_1}^k \times \Psi_{\theta_2}^k \times \cdots \times \Psi_{\theta_k}^k \rangle = (-1)^k \cdot \prod_{i=1}^k \text{sen}^{i-1}(\theta_i),$$

- Vamos mostrar para $n = k + 1$. Temos:

$$\Psi^{k+1} = \text{sen}(\theta_{k+1}) \cdot \Psi^k \oplus \cos(\theta_{k+1})$$

$$\Psi_{\theta_i}^{k+1} = \text{sen}(\theta_{k+1}) \cdot \Psi_{\theta_i}^k \oplus 0 \quad \text{para } i < k + 1$$

$$\Psi_{\theta_{k+1}}^{k+1} = \cos(\theta_{k+1}) \cdot \Psi^k \oplus -\text{sen}(\theta_{k+1})$$

e, usando o método de Laplace na última coluna, obtemos

$$\begin{aligned}
& \Psi_{\theta_1}^{k+1} \times \Psi_{\theta_2}^{k+1} \times \dots \times \Psi_{\theta_{k+1}}^{k+1} = \\
& = (-1)^{1+(k+2)} e_{k+2} \text{sen}^k(\theta_{k+1}) \cos(\theta_{k+1}) (-1)^k \langle \Psi^k, \Psi_{\theta_1}^k \times \Psi_{\theta_2}^k \times \dots \times \Psi_{\theta_k}^k \rangle + \\
& \quad + (-1)^{(k+2)+(k+2)} (-\text{sen}(\theta_{k+1})) \text{sen}^k(\theta_{k+1}) (\Psi_{\theta_1}^k \times \Psi_{\theta_2}^k \times \dots \times \Psi_{\theta_k}^k) = \\
& = (-1)^{k+1} \cdot \prod_{i=1}^k \text{sen}^{i-1}(\theta_i) [e_{k+2} \text{sen}^k(\theta_{k+1}) \cos(\theta_{k+1}) + \text{sen}(\theta_{k+1}) \text{sen}^k(\theta_{k+1}) \cdot \Psi^k] = \\
& = (-1)^{k+1} \prod_{i=1}^{k+1} \text{sen}^{i-1}(\theta_i) [\text{sen}(\theta_{k+1}) \Psi^k + e_{k+2} \cos(\theta_{k+1})] = \\
& = \left[(-1)^{k+1} \prod_{i=1}^{k+1} \text{sen}^{i-1}(\theta_i) \right] \Psi^{k+1}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \Psi^{k+1}, \Psi_{\theta_1}^{k+1} \times \Psi_{\theta_2}^{k+1} \times \dots \times \Psi_{\theta_{k+1}}^{k+1} \rangle &= \langle \Psi^{k+1}, (-1)^{k+1} \prod_{i=1}^{k+1} \text{sen}^{i-1}(\theta_i) \Psi^{k+1} \rangle \\
&= (-1)^{k+1} \prod_{i=1}^{k+1} \text{sen}^{i-1}(\theta_i)
\end{aligned}$$

□

Em qualquer ponto p da hipersfera e para $w \in T_p \mathbb{S}^n$, temos uma igualdade da forma

$$dN_p(w) = a_1 \Psi_{\theta_1}^n + a_2 \Psi_{\theta_2}^n + \dots + a_n \Psi_{\theta_n}^n$$

e usando a igualdade (1.4) podemos escrever

$$\left\langle dN_p(\Psi_{\theta_i}^n), \Psi_{\theta_j}^n \right\rangle = - \left\langle N, \Psi_{\theta_i \theta_j}^n \right\rangle = \left\langle \Psi_{\theta_i}^n, \Psi_{\theta_j}^n \right\rangle.$$

Logo, concluímos de (1.10c) e (1.10d) que

$$\left\{ v_1 = \frac{\Psi_{\theta_1}^n}{\|\Psi_{\theta_1}^n\|}, v_2 = \frac{\Psi_{\theta_2}^n}{\|\Psi_{\theta_2}^n\|}, \dots, v_n = \frac{\Psi_{\theta_n}^n}{\|\Psi_{\theta_n}^n\|} \right\}$$

é uma base ortonormal de autovetores associados a autovalores $k_1 = 1, \dots, k_n = 1$, que diagonalizam $-dN$. Portanto todas as curvaturas principais são iguais a 1 e como consequência as r -ésimas curvaturas médias de $\mathbb{S}^n$ são $H_r(p) = \frac{r!(n-r)!}{n!} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} k_{i_1} k_{i_2} \dots k_{i_r} =$

$$\frac{r!(n-r)!}{n!} \frac{n!}{r!(n-r)!} = 1.$$

Capítulo 2

Hipersuperfícies invariantes pela ação de um subgrupo de isometrias

Uma hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é dita *invariante* se existe um subgrupo G do grupo de isometrias do $\mathbb{R}^{n+1}$, $ISO(\mathbb{R}^{n+1})$, que deixa M invariante, isto é, $g(M) = M, \forall g \in G$.

Identificando o grupo das matrizes 4×4 ,

$$G(4) = \left\{ \begin{bmatrix} A & a \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

em que $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é transformação linear ortogonal, a é um vetor 3×1 que representa uma translação T_a e $\emptyset$ é a matriz nula 1×3 com o grupo de isometrias do $\mathbb{R}^3$,

$$ISO(\mathbb{R}^3) = \{F = A \circ T_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3\},$$

por meio do isomorfismo

$$(A, a) \mapsto \begin{bmatrix} A & a \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix}.$$

MEDEIROS & RIPOLL em [12] dá uma classificação dos subgrupos a um parâmetro de isometrias do $\mathbb{R}^3$. Usando esta classificação obtemos três tipos de superfícies invariantes por um subgrupo a um parâmetro de isometrias:

- as *superfícies rotacionais*, invariantes por $O(2)$;
- as *superfícies helicoidais*, invariantes pela composição de translações com rotações;
- as *superfícies translacionais*, invariantes por translações.

Neste capítulo determinaremos as expressões da curvatura escalar de hipersuperfícies invariantes pela ação dos grupos de isometrias $O(n+1)$ e $O(n+1) \times O(n+1)$.

As *órbitas principais* da ação de $G = O(n+1)$ em $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+2}$,

$$\begin{aligned}\pi : G \times \overline{M} &\rightarrow \overline{M} \\ (A, (u, v)) &\rightarrow (Au, v),\end{aligned}$$

são hipersferas $S^n(\|u\|)$, se observarmos a projeção no hiperplano $x_{n+2} = 0$, a uma altura v . As hipersuperfícies invariantes $M^{n+1} \subset \overline{M} = \mathbb{R}^{n+2}$ são denominadas *hipersuperfícies rotacionais*. Essas hipersuperfícies são dadas pela união de órbitas $G_{\gamma(u)}$, onde $\gamma(u) = (x(u), z(u))$, $u \in I$, é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco (ppca), ou seja, $[x'(u)]^2 + [z'(u)]^2 = 1$, contida no *espaço de órbitas*

$$Q = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\},$$

chamada *curva geratriz*, aqui x define o raio da hipersfera e z sua altura. Todo ponto da curva interior a Q corresponde a uma órbita principal da ação do grupo.

Para $G = O(n+1) \times O(n+1)$ temos a ação de G em $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$

$$\begin{aligned}\pi : G \times \overline{M} &\rightarrow \overline{M} \\ ((A, B), (u, v)) &\rightarrow (Au, Bv),\end{aligned}$$

onde $A, B \in O(n+1)$ e $(u, v) \in \overline{M}$. As órbitas principais desta ação são produtos de hipersferas $S^n(\|u\|) \times S^n(\|v\|)$ e as hipersuperfícies invariantes $M^{2n+1} \subset \overline{M} = \mathbb{R}^{2n+2}$ são dadas pela união de órbitas $G_{\gamma(u)}$, onde $\gamma(u) = (x(u), z(u))$, $u \in I$, é uma curva ppca contida no espaço de órbitas

$$\overline{Q} = \{(x, z); x \geq 0, z \geq 0\},$$

chamada curva geratriz. Aqui x e z fornecem os raios das hipersferas.

Observação 2.1 *As hipersuperfícies do espaço euclidiano com r -curvaturas médias constantes são dadas, no caso geral, por soluções de equações diferenciais parciais (EDP) (ver equação 1.5). Esse problema, quase sempre, vem de natureza bastante complicada. A vantagem de se trabalhar com hipersuperfícies invariantes é podermos reduzir o problema de E.D.P. a um problema de E.D.O, em termos das funções coordenadas da curva geratriz como veremos a seguir.*

2.1 Hipersuperfícies rotacionais $O(n+1)$

Seja $M^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ uma hipersuperfície rotacional $O(n+1)$ com geratriz, $\gamma(u) = (x(u), z(u))$, $u \in I$, parametrizada pelo comprimento de arco. Para construirmos uma parametrização para

M , vamos utilizar as parametrizações das esferas $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ em coordenadas esféricas, vista no capítulo anterior, dadas por $\Psi^n = \sin(\theta_n) \cdot \Psi^{n-1} \oplus \cos(\theta_n)$. Uma parametrização desta hipersuperfície gerada por $\gamma(u) = (x(u), z(u))$ é dada por:

$$X(u, \theta_1, \dots, \theta_n) = x(u) \cdot \Psi^n + z(u) e_{n+2} = x \Psi^n \oplus z,$$

em que Ψ^n define as $(n+1)$ primeiras coordenadas da parametrização e z a coordenada em relação a e_{n+2} .

Para calcular a curvatura escalar destas hipersuperfícies precisamos calcular a aplicação normal N e os autovalores da diferencial $-dN$, que são as curvaturas principais. Temos as derivadas parciais:

$$X_u = x' \Psi^n \oplus z' \quad (2.1)$$

$$X_{\theta_i} = x \Psi_{\theta_i}^n \oplus 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Logo, usando o desenvolvimento de Laplace e a Proposição 1.3, obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{n+2} \\ & X_u & & \\ & X_{\theta_1} & & \\ & X_{\theta_2} & & \\ & \vdots & & \\ & X_{\theta_n} & & \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{n+1} & e_{n+2} \\ & x' \Psi^n & & & z' \\ & x \Psi_{\theta_1}^n & & & 0 \\ & x \Psi_{\theta_2}^n & & & 0 \\ & \vdots & & & \\ & x \Psi_{\theta_n}^n & & & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+(n+2)} e_{n+2} \begin{vmatrix} x' \Psi^n \\ x \Psi_{\theta_1}^n \\ x \Psi_{\theta_2}^n \\ \vdots \\ x \Psi_{\theta_n}^n \end{vmatrix} + (-1)^{2+(n+2)} z' \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{n+1} \\ & x \Psi_{\theta_1}^n \\ & x \Psi_{\theta_2}^n \\ & \vdots \\ & x \Psi_{\theta_n}^n \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} e_{n+2} x' x^n (-1)^n \prod_{i=1}^n \sin^{i-1}(\theta_i) + (-1)^n z' x^n (-1)^n \prod_{i=1}^n \sin^{i-1}(\theta_i) \Psi^n \\ &= \left[x^n \prod_{i=1}^n \sin^{i-1}(\theta_i) \right] (z' \Psi^n \oplus -x'). \end{aligned}$$

Portanto,

$$X_u \times X_{\theta_1} \times \cdots \times X_{\theta_n} = \left[x^n \prod_{i=1}^n \sin^{i-1}(\theta_i) \right] (z' \Psi^n \oplus -x') \quad (2.3)$$

Sendo assim, por (1.3) obtemos o campo normal:

$$N = (-1)^{n+1} \frac{\prod_{i=1}^n \sin^{i-1}(\theta_i) (z' \Psi^n \oplus -x')}{\left\| \prod_{i=1}^n \sin^{i-1}(\theta_i) (z' \Psi^n \oplus -x') \right\|}$$

$$N = (-1)^n (-z' \Psi^n \oplus x').$$

Como na curvatura escalar o sinal não irá interferir, pode-se tratar a aplicação normal simplesmente por

$$N = (-z' \Psi^n \oplus x'),$$

tendo como derivadas

$$dN_{X(u, \theta_1, \dots, \theta_n)}(X_u) = N_u = (-z'' \Psi^n \oplus x'')$$

$$dN_{X(u, \theta_1, \dots, \theta_n)}(X_{\theta_i}) = N_{\theta_i} = (-z' \Psi_{\theta_i}^n \oplus 0).$$

Pelas igualdades (1.10a)-(1.10d) vemos que o conjunto $\{X_u, X_{\theta_1}, \dots, X_{\theta_n}\}$ forma uma base ortogonal para $T_p M$, logo, para um $w \in T_p M$ temos que

$$dN_{X(u, \theta_1, \dots, \theta_n)}(w) = \alpha X_u + \alpha_1 X_{\theta_1} + \dots + \alpha_n X_{\theta_n}.$$

Fazendo o produto interno com as derivadas parciais X_u e X_{θ_i} na igualdade acima, obtemos $\alpha = \frac{\langle dN(w), X_u \rangle}{\langle X_u, X_u \rangle}$ e $\alpha_i = \frac{\langle dN(w), X_{\theta_i} \rangle}{\langle X_{\theta_i}, X_{\theta_i} \rangle}$, $i = 1, \dots, n$. Mas a aplicação normal é auto-adjunta, logo, concluímos que as curvaturas principais são

$$k_0 = \alpha = \frac{\langle dN(X_u), X_u \rangle}{\langle X_u, X_u \rangle} = (-z'' x' + x'' z')$$

e

$$k_i = \alpha_i = \frac{\langle dN(X_{\theta_i}), X_{\theta_i} \rangle}{\langle X_{\theta_i}, X_{\theta_i} \rangle} = \frac{-z'}{x} \quad i = 1, \dots, n.$$

Agora que achamos as curvaturas principais em função das coordenadas da curva geratriz $\gamma(u) = (x(u), z(u))$ temos que a curvatura escalar S das hipersuperfícies rotacionais geradas pela curva ppca $\gamma(u) = (x(u), z(u))$ é:

$$S(u) = \frac{-2x''x + (n-1)(1-(x')^2)}{(n+1)x^2}. \quad (2.4)$$

2.2 Hipersuperfícies invariantes por $O(n+1) \times O(n+1)$

Considere uma hipersuperfície $M^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ invariante pela ação de $G = O(n+1) \times O(n+1)$ em $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$, com geratriz, $\gamma(u) = (x(u), z(u))$, $u \in I$, parametrizada pelo

comprimento de arco. Uma parametrização explícita para a hipersuperfície M é dada por

$$X(u, \theta, \bar{\theta}) = x(u)\Psi^n(\theta) \oplus z(u)\Phi^n(\bar{\theta}),$$

em que $\Psi^n(\theta)$ e $\Phi^n(\bar{\theta})$ são parametrizações em coordenadas esféricas da esfera $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, com $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ e $\bar{\theta} = (\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_n)$. Temos como derivadas parciais:

$$\begin{aligned} X_u &= x'\Psi^n \oplus z'\Phi^n \\ X_{\theta_i} &= x\Psi_{\theta_i}^n \oplus 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \\ X_{\bar{\theta}_j} &= 0 \oplus z\Phi_{\bar{\theta}_j}^n \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Assim, pelas igualdades em (1.10a)-(1.10d) observe que para todo $1 \leq i, j \leq n$:

$$\begin{aligned} \langle X_u, X_u \rangle &= [x']^2 + [z']^2 = 1 \\ \langle X_{\theta_i}, X_{\theta_j} \rangle &= \begin{cases} x^2 \langle \Psi_{\theta_i}^n, \Psi_{\theta_j}^n \rangle, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \\ \langle X_{\bar{\theta}_i}, X_{\bar{\theta}_j} \rangle &= \begin{cases} z^2 \langle \Phi_{\bar{\theta}_i}^n, \Phi_{\bar{\theta}_j}^n \rangle, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \\ \langle X_u, X_{\theta_i} \rangle &= 0 \\ \langle X_u, X_{\bar{\theta}_j} \rangle &= 0 \\ \langle X_{\theta_i}, X_{\bar{\theta}_j} \rangle &= 0, \end{aligned}$$

logo, o conjunto $\{X_u, X_{\theta_1}, \dots, X_{\theta_n}, X_{\bar{\theta}_1}, \dots, X_{\bar{\theta}_n}\}$ é uma base ortogonal para $T_p M$.

Da mesma forma que na seção anterior, devemos calcular

$$X_u \times X_{\theta_1} \times \dots \times X_{\theta_n} \times X_{\bar{\theta}_1} \times \dots \times X_{\bar{\theta}_n}$$

para encontrar a aplicação normal N e, em seguida calcular a curvatura escalar S .

Para isso, fixemos n e consideremos

$$X(u, \theta, \bar{\theta}) = x(u)\Psi^n(\theta) \oplus z(u)\Phi^k(\bar{\theta})$$

em que $\Psi^n(\theta)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, parametriza $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $\Phi^k(\bar{\theta})$, $\bar{\theta} = (\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_k)$, parametriza $\mathbb{S}^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$. Um processo recursivo, usando matrizes em bloco, propriedades do determinante e

a Proposição 1.3 fornece a igualdade

$$\begin{vmatrix} e_1 \cdots e_{n+1} & e_{n+2} \cdots e_{n+k+1} \\ x' \Psi^n & z' \text{sen}(\bar{\theta}_k) \Phi^{k-1} \\ x \Psi_{\theta_1}^n & 0 \\ \vdots & \vdots \\ x \Psi_{\theta_n}^n & 0 \\ 0 & z \text{sen}(\bar{\theta}_k) \Phi_{\theta_1}^{k-1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & z \text{sen}(\bar{\theta}_k) \Phi_{\theta_{k-1}}^{k-1} \end{vmatrix} = (-1)^k x^n z^{k-1} \left[\prod_{i=1}^n \text{sen}^{i-1}(\theta_i) \right] \left[\prod_{j=1}^{k-1} \text{sen}^{j-1}(\bar{\theta}_j) \right] \left[-z' \text{sen}(\bar{\theta}_k) \Psi^n \oplus x' \Phi^{k-1} \right].$$

para $k = 1, 2, \dots, n$, em que $\Phi^k(\bar{\theta}) = \text{sen}(\bar{\theta}_k) \Phi^{k-1} \oplus \cos(\bar{\theta}_k)$.

Usando essa igualdade e o desenvolvimento de Laplace obtemos o seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} e_1 \cdots e_{n+1} & e_{n+2} \cdots e_{n+k+2} \\ x' \Psi^n & z' \Phi^k \\ x \Psi_{\theta_1}^n & 0 \\ \vdots & \vdots \\ x \Psi_{\theta_n}^n & 0 \\ 0 & z \Phi_{\theta_1}^k \\ \vdots & \vdots \\ 0 & z \Phi_{\theta_k}^k \end{vmatrix} = (-1)^{k+1} x^n z^k \left[\prod_{i=1}^n \text{sen}^{i-1}(\theta_i) \right] \left[\prod_{j=1}^k \text{sen}^{j-1}(\bar{\theta}_j) \right] \left[-z' \Psi^n \oplus x' \Phi^k \right].$$

Com este resultado temos que o produto vetorial de $X_u, X_{\theta_1}, \dots, X_{\theta_n}, X_{\bar{\theta}_1}, \dots, X_{\bar{\theta}_n}$ é dado por

$$(-1)^{n+1} x^n z^n \prod_{i=1}^n \text{sen}^{i-1}(\theta_i) \prod_{j=1}^n \text{sen}^{j-1}(\bar{\theta}_j) [-z' \Psi^n \oplus x' \Phi^n]$$

e a Aplicação Normal de Gauss destas hipersuperfícies fica definida por:

$$N = (-1)^{n+1} [-z' \Psi^n \oplus x' \Phi^n].$$

Mas, novamente por trabalharmos com a curvatura escalar, iremos desprezar o sinal $(-1)^{n+1}$ e considerar

$$N = -z' \Psi^n \oplus x' \Phi^n. \quad (2.5)$$

Assim, suas derivadas parciais são

$$dN_{X(u, \theta, \bar{\theta})}(X_u) = N_u = -z'' \Psi^n \oplus x'' \Phi^n \quad (2.6)$$

$$dN_{X(u, \theta, \bar{\theta})}(X_{\theta_i}) = N_{\theta_i} = -z' \Psi_{\theta_i}^n \oplus 0 \quad (2.7)$$

$$dN_{X(u, \theta, \bar{\theta})}(X_{\bar{\theta}_j}) = N_{\bar{\theta}_j} = 0 \oplus x' \Phi_{\bar{\theta}_j}^n. \quad (2.8)$$

Escrevendo

$$dN_{X(u,\theta,\bar{\theta})}(w) = \alpha X_u + \alpha_1 X_{\theta_1} + \cdots + \alpha_n X_{\theta_n} + \bar{\alpha}_1 X_{\bar{\theta}_1} + \cdots + \bar{\alpha}_n X_{\bar{\theta}_n} \quad (2.9)$$

e tomando o produto interno em ambos os membros da igualdade acima com X_u , X_{θ_i} e $X_{\bar{\theta}_j}$ obtemos $\alpha = \frac{\langle dN(w), X_u \rangle}{\langle X_u, X_u \rangle}$, $\alpha_i = \frac{\langle dN(w), X_{\theta_i} \rangle}{\langle X_{\theta_i}, X_{\theta_i} \rangle}$ e $\bar{\alpha}_j = \frac{\langle dN(w), X_{\bar{\theta}_j} \rangle}{\langle X_{\bar{\theta}_j}, X_{\bar{\theta}_j} \rangle}$. Em particular, tomando w igual a uma das derivadas parciais de $X(u, \theta, \bar{\theta})$, obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\langle dN(X_u), X_u \rangle}{\langle X_u, X_u \rangle} = -z''x' + x''z' \\ \alpha_i &= \frac{\langle dN(X_{\theta_i}), X_{\theta_i} \rangle}{\langle X_{\theta_i}, X_{\theta_i} \rangle} = \frac{-z'}{x} \\ \bar{\alpha}_j &= \frac{\langle dN(X_{\bar{\theta}_j}), X_{\bar{\theta}_j} \rangle}{\langle X_{\bar{\theta}_j}, X_{\bar{\theta}_j} \rangle} = \frac{x'}{z}. \end{aligned}$$

Portanto, as curvaturas principais são dadas por

$$k_0 = -z''x' + x''z'$$

$$k_i = \frac{-z'}{x}$$

$$\bar{k}_j = \frac{x'}{z}$$

e a curvatura escalar é

$$\begin{aligned} S(u) &= \frac{1}{(2n+1)n} \left[nk_0 \cdot k_i + nk_0 \cdot \bar{k}_j + \frac{n(n-1)}{2} k_i^2 + \frac{n(n-1)}{2} \bar{k}_j^2 + n^2 k_i \bar{k}_j \right] \\ &= \frac{1}{(2n+1)} \left[(-z''x' + x''z') \left(\frac{-z'}{x} + \frac{x'}{z} \right) + \frac{(n-1)}{2} \left(\frac{[-z']^2}{x^2} + \frac{[x']^2}{z^2} \right) + n \frac{(-z')}{x} \frac{x'}{z} \right] \\ S(u) &= \frac{1}{2n+1} \left[(-z''x' + x''z') \frac{-z'z + x'x}{xz} + \frac{n-1}{2} \left(\frac{[-z'z]^2 + [x'x]^2}{x^2 z^2} \right) + n \frac{-z'x'}{xz} \right] \quad (2.10) \end{aligned}$$

sendo aplicado em hipersuperfícies $O(n+1) \times O(n+1)$.

Observação 2.2 *Se tivéssemos nas hipersuperfícies invariantes por $O(m+1) \times O(n+1)$, então teríamos como curvatura escalar*

$$\begin{aligned} S(u) &= \frac{2}{(m+n+1)(m+n)} \left[m(-z''x' + x''z') \frac{-z'}{x} + n(-z''x' + x''z') \frac{x'}{z} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(m-1)}{2} \left(\frac{[z']^2}{x^2} \right) + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{[x']^2}{z^2} \right) + nm \frac{(-z'x')}{xz} \right]. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Estudo qualitativo de E.D.O.

Neste capítulo faremos uma rápida introdução ao estudo qualitativo das equações diferenciais ordinárias, maiores detalhes podem ser encontrados em DOERING [6]. Os conceitos abordados são necessários para estudar o comportamento das soluções de E.D.O.'s associadas às hipersuperfícies invariantes com curvatura escalar nula.

Dada uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida em cada ponto (t, x) de um aberto U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$, dizemos que a igualdade

$$x' = f(t, x) \tag{3.1}$$

é uma *equação diferencial ordinária* (E.D.O.) em $\mathbb{R}^n$ definida por f . As soluções desta equação são caminhos $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ deriváveis em I , tais que $(t, x(t)) \subset U$ e $x'(t) = f(t, x(t))$, para todo $t \in I$. Se fixarmos um ponto $(t_0, x_0) \in U$, então pelo Teorema da Existência e Unicidade de Soluções existe uma única solução $x(t)$ satisfazendo a *condição inicial* $x(t_0) = x_0$, desde que $f(t, x)$ e sua derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ sejam aplicações contínuas no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dizemos que o sistema
$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
 é um problema de valor inicial (P.V.I.).

Quando f independe da variável temporal t a equação $x' = f(t, x) := f(x)$ é chamada *equação diferencial autônoma*, $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é denominado *campo de vetores* e as soluções $x(t)$ são suas *trajetórias* ou *órbitas*. Dado uma E.D.O. arbitrária $x' = f(t, x)$ podemos definir a aplicação $F(X) = F(x, t) = (1, f(t, x))$, em que $X(t) = (t, x(t))$ e temos que a equação diferencial vetorial $x' = f(t, x)$ em $\mathbb{R}^n$ é equivalente à equação diferencial vetorial autônoma $X' = F(X)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Assim, é sempre possível fazer o estudo qualitativo da E.D.O. (3.1) por meio de um campo de vetores $F : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

3.1 Equações diferenciais lineares de coeficientes constantes em $\mathbb{R}^n$

As equações diferenciais lineares homogêneas a coeficientes constantes, $x' = f(x)$ são E.D.O.'s autônomas associadas aos campos lineares $f(x) = T_A(x) = A.x$, onde o operador linear $f = T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dado, em termos matriciais, pelo produto da matriz $A \in \mathcal{M}(n)$ com o vetor-coluna $n \times 1$ representando $x \in \mathbb{R}^n$. O caminho $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivável em $\mathbb{R}$ é uma solução quando

$$x'(t) = Ax(t).$$

Equivalentemente, as funções coordenadas $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de $x(t)$ são soluções do sistema associado à matriz A , o que significa que são soluções do sistema de n equações diferenciais lineares de primeira ordem

$$\begin{cases} x'_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x'_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ &\vdots \\ x'_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}.$$

Toda teoria algébrica sobre sistemas lineares contém, como caso particular, toda a teoria de uma única E.D.O., em particular, determinar a solução geral de um sistema de n equações consiste em encontrar um conjunto de n soluções linearmente independentes.

A matriz $A \in \mathcal{M}(n)$, sobre o corpo dos $\mathbb{C}$, possui escalares $c_i \in \mathbb{C}$ tais que a matriz $(A - c_i.I)$ seja singular, conhecidos por *autovalores*. Resumindo, os autovalores são os escalares λ que resolvem a equação $p_A(\lambda) = 0$, em que o polinômio

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \quad (3.2)$$

é chamado *polinômio característico*, sendo I a matriz identidade de ordem n . Os autovetores associados aos autovalores λ são os vetores $v \neq 0$ tais que $Av = \lambda v$.

Se $v \in \mathbb{R}^n$ é um autovetor real de $A \in M(n)$ associado ao autovalor real $\lambda \in \mathbb{R}$, então por derivação direta concluímos que

$$x(t) = e^{\lambda t}v, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

é solução do P.V.I. $x' = Ax$, $x(0) = v$. No caso complexo, se $w = u + iv \in \mathbb{C}^n$ é um autovetor complexo de $A \in M(n)$ associado ao autovalor complexo $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, então

$$page \begin{cases} x(t) = e^{at}[(\cos bt)u - (\sin bt)v] \\ y(t) = e^{at}[(\sin bt)u + (\cos bt)v] \end{cases} \quad (3.4)$$

são duas soluções de $x' = Ax$, com condições iniciais $x(0) = u$ e $y(0) = v$, respectivamente.

Segue do exposto acima que quando a matriz A é *diagonalizável* o problema de encontrar a solução geral de um P.V.I. $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ está completamente resolvido. No caso geral, introduzimos o conceito de *exponencial da matriz* A , dada por

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{j!}A^j + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j$$

e temos o seguinte resultado geral.

Teorema 3.1 *Se $A \in \mathcal{M}(n)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, então o caminho*

$$x(t) = e^{tA}x_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

define a única solução da E.D.O. linear $x' = Ax$ com condição inicial $x(0) = x_0$. Mais precisamente, cada coordenada da solução $x(t)$ é uma combinação linear das funções

$$t \mapsto t^j e^{at} \cos(bt) \text{ e } t \mapsto t^j e^{at} \sin(bt),$$

com $0 \leq j \leq n-1$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a + ib$ é um autovalor complexo da matriz.

Para um problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

com condição inicial em (t_0, x_0) a solução é dada por $x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$, $t \in \mathbb{R}$, que pode ser expressa por mudança de parâmetro (translação) como $x(s) = e^{sA}x_0$, onde $s \in I(x_0)$ e a condição inicial passa a ser $(0, x_0)$.

Nem sempre podemos explicitar a solução de uma *equação diferencial não linear*, mas, do ponto de vista qualitativo, mais importante do que explicitar a solução é compreender seu comportamento assintótico, quando $t \rightarrow \infty$. Para estudar o comportamento assintótico das soluções vamos introduzir a terminologia de sistemas dinâmicos para campos lineares e, mais tarde, estenderemos estas noções para campos associados às equações não lineares autônomas.

Dado a E.D.O. linear $x' = Ax$, $A \in M(n)$, a aplicação $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $\phi_t(x) = e^{tA}x$, e conhecida como *fluxo do campo linear* A ou *fluxo da equação diferencial* $x' = Ax$, fornece informações globais do comportamento de todas trajetórias da E.D.O $x' = Ax$ (equivalentemente do campo A). O *retrato de fase* desse campo consiste no esboço de algumas trajetórias representativas do próprio campo, observando que, da unicidade de soluções, uma

trajetória fica determinada por uma condição inicial $x(t_0) = x_0$, e que, além disso, quaisquer duas trajetórias ou são coincidentes ou não possuem pontos em comum.

Note que $e^{tA} = \Phi_t$: é um *homomorfismo de grupos*, do grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ no grupo dos difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ ($Dif(\mathbb{R}^n)$) com

$$\Phi_{t+s} = e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = \Phi_t \circ \Phi_s.$$

$$\phi_t(0) = 0.$$

Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax_0 = 0$ é chamado *uma singularidade (ou ponto de equilíbrio) do campo linear* $x \mapsto Ax$. Uma trajetória por um ponto singular x_0 de A é sempre trivial e é denominada *trajetória singular*, ou seja, temos $x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 = x_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Os pontos não singulares são chamados *pontos regulares* e as trajetórias por esses pontos de *trajetórias regulares* do campo. Um outro tipo topológico de trajetória que é bem específico, mas importante, é o tipo trajetória fechada que a partir de um período T , se repete (isto é, $x(t) = x(t+T), \forall t \in \mathbb{R}$), denominadas *trajetórias periódicas*.

Dada uma trajetória por um ponto não singular x_1 próximo de um ponto singular x_0 gostaríamos de tentar responder as seguintes perguntas:

1. A trajetória regular tende à singularidade x_0 ? Isto é, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$?
2. Se a trajetória regular não tende para a singularidade, ela descreve uma órbita fechada em torno dessa singularidade ou se afasta dela?

Isso nos leva aos seguintes conceitos. Dizemos que x_0 é uma *singularidade estável* quando, para qualquer $\epsilon > 0$, podemos sempre encontrar $\delta > 0$ tal que $|\phi_t(x) - x_0| \leq \epsilon$ para todo $t > 0$ e qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ com $|x - x_0| \leq \delta$, sendo $|\cdot|$ a norma euclidiana. Se o ponto x_0 não é uma singularidade estável, dizemos que é uma *singularidade instável*.

3.2 Classificação das singularidades de E.D.O. em $\mathbb{R}^2$

Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ uma matriz associada a um campo linear em $\mathbb{R}^2$ e seja a matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, onde λ_1 e λ_2 são autovalores generalizados (real ou complexo) de A , dados pelos zeros de

$$p_A(t) = p_D(t) = t^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)t + \lambda_1\lambda_2 = t^2 - (\text{tr}D)t + \det D, \quad (3.5)$$

onde $\text{tr}D$ é a soma dos termos da diagonal de D chamado *traço*. Temos que $\det A = \det D$ e ambas as matrizes possuem os mesmos autovalores, além disso, estudando a forma canônica de Jordan concluimos que estudar a equação $x' = Ax$ equivale a estudarmos a equação

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y. \quad (3.6)$$

O ponto de equilíbrio x_0 que, sem perda de generalidade, vamos supor $x_0 = (0, 0) = O$, pode ser classificado de acordo com a natureza dos autovalores λ_1 e λ_2 . Levando em conta as expressões explícitas das trajetórias (soluções) dadas pelo Teorema 3.1, cuja prova passa pelo estudo da forma de Jordan da matriz A . Para campos em $\mathbb{R}^2$ temos o seguinte resumo dos possíveis resultados dos autovalores em uma singularidade O :

1. Ambos os autovalores são reais, distintos, e negativos. Neste caso as soluções $x(t) \rightarrow O$ quando $t \rightarrow +\infty$ (Figura 3.1) e a singularidade é conhecida como nó estável (atrator);
2. Ambos os autovalores são reais, distintos, e positivos. As soluções $x(t) \rightarrow O$ quando $t \rightarrow -\infty$ (Figura 3.2) e a singularidade é denominada nó instável (repulsor);
3. Os autovalores são reais com sinais opostos. Existem quatro soluções limites que tendem a O sobre as retas determinadas pelos autovetores, duas quando $t \rightarrow +\infty$ e duas quando $t \rightarrow -\infty$, e as demais não tendem a O para $t \rightarrow \pm\infty$ (Figura 3.3). Tal singularidade é chamada sela.
4. Os autovalores são reais iguais a $\lambda \neq 0$ (A não é a matriz nula). A singularidade é denominada nó impróprio, e temos duas possibilidades, conforme λ admita apenas um ou dois autovetores. No segundo caso as trajetórias são semirretas que tendem a O , sendo que O é um nó impróprio estável quando $\lambda < 0$ ou nó impróprio instável quando $\lambda > 0$. Agora, no primeiro caso as trajetórias na direção do autovetor são semirretas e as outras possuem retas tangentes cujas direções tendem à direção do autovalor. Da mesma forma temos que é um nó impróprio estável quando $\lambda < 0$ ou nó impróprio instável quando $\lambda > 0$.
5. Os autovalores são complexos conjugados com partes reais nulas. Para este caso temos as trajetórias periódicas, sendo que nenhuma solução não-trivial tende para a origem quando $t \rightarrow \pm\infty$, e a partir de um período T a trajetória se repete ($x(t) = x(t + T)$, $t \in \mathbb{R}$). A singularidade O é denominada centro.

6. Os autovalores são complexos conjugados com parte real não nula. Nesse caso, as trajetórias terão a forma de espiral, sendo uma espiral estável quando a parte real for negativa e, quando for positiva, é uma espiral instável.

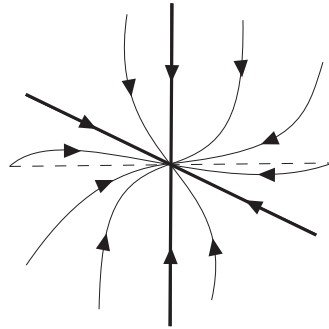


Figura 3.1: Singularidade - Atrator.

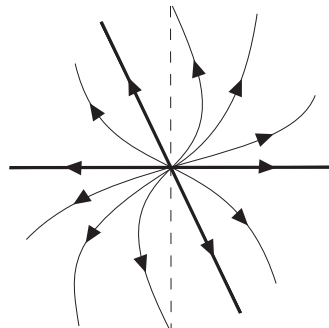


Figura 3.2: Singularidade - Repulsor.

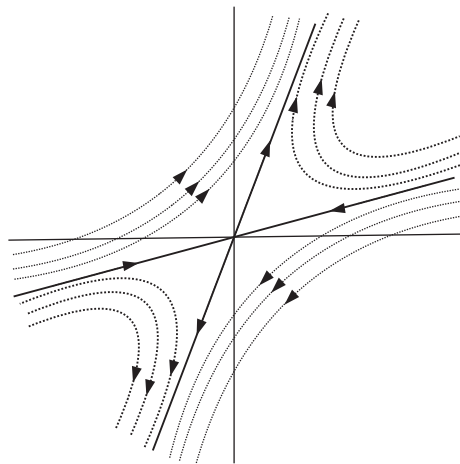


Figura 3.3: Singularidade - Sela.

Se pensarmos no discriminante $\Delta = (\text{tr} D)^2 - 4 \det D$, vemos que:

1. Os autovalores são ambos reais e distintos se $\Delta > 0$, isto é, se

$$\begin{aligned} \Delta &= (\text{tr} D)^2 - 4 \det D = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4(\lambda_1 \lambda_2) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)^2 > 0; \end{aligned}$$

2. Os autovalores são complexos conjugados se

$$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 < 0;$$

3. Os autovalores são reais e iguais se

$$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 0;$$

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

Assim, a figura abaixo no plano cartesiano $\text{tr } D \times \det D$ fornece um resumo da classificação das singularidades de uma E.D.O. linear em $\mathbb{R}^2$ e viabiliza a construção de seu retrato de fase (Figura 3.4).

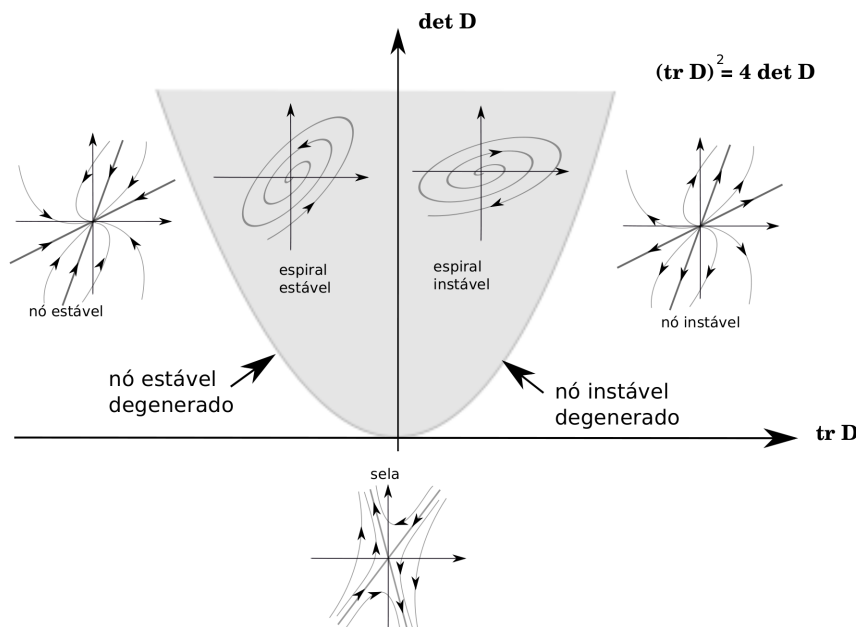


Figura 3.4: Classificação dos Retratos de Fase[19].

3.3 Equações diferenciais não-lineares em $\mathbb{R}^n$

Seja $x' = f(x)$ uma E.D.O. autônoma não-linear associada ao campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, no aberto $E \subset \mathbb{R}^n$. Para estudarmos o *retrato de fase* desse campo fazemos um estudo da existência e comportamento de suas trajetórias $x(t)$. A imagem $x(I)$ de uma trajetória da E.D.O com condição inicial $x(t_0) = x_0$, chamamos de *órbita* de f por x_0 . Para as *órbitas regulares* temos o Teorema do Fluxo Tubular, para as *órbitas periódicas* de campos bidimensionais, o Teorema de Poincaré-Bendixson e, mediante um processo de linearização, classificamos um tipo especial de

singularidade (singularidades hiperbólicas), que fornecem o comportamento das *órbitas singulares* na vizinhança de uma singularidade. Vários conceitos introduzidos para campos lineares estendem-se para campos associados às equações autônomas e quase sempre utilizaremos estes conceitos de maneira natural.

Admitiremos $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , logo, temos a garantia da existência e unicidade de soluções. Dadas as condições iniciais em $t_0 = 0$, para cada $x_0 \in E$ existe um intervalo aberto máximo $I(x_0)$, onde está definida a única solução $\phi_{x_0}(t) = \phi(t, x_0)$ da E.D.O. tal que $\phi_{x_0}(0) = \phi(0, x_0) = x_0$ e fica definida a aplicação de classe C^1 , $\phi : \Omega \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$, definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, dada por $\phi(t, x) = \phi_t(x) = x(t)$ e denominada *fluxo* do campo de vetores f em E . A derivada parcial em relação de t do fluxo satisfaz, para cada $(t, x) \in \Omega$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = f(\phi(t, x)) = x'(t).$$

Para um fluxo $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, a propriedade de grupos vale tanto para equações diferenciais lineares quanto para não-lineares, então

$$\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x)$$

para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$ e $x \in E$ tais que $s, t + s \in I(x)$.

Uma propriedade interessante das equações autônomas é que, qualquer trajetória sai de qualquer subconjunto compacto do domínio E de seu campo, logo, vale a seguinte consequência importante (ver [6], página 149).

Proposição 3.1 *Se um campo f tem domínio $\mathbb{R}^n$ e se $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma trajetória de f tal que $|x(t)|$ é limitada, para todo $t \in I$, então $I = \mathbb{R}$.*

Raramente é possível obter a estabilidade de uma singularidade em sistemas não-lineares através de soluções explícitas. Por isso, faz-se um processo de substituição, chamado *linearização*, em que o fluxo f de um sistema $x' = f(x)$ é substituído por um termo linear $A(x - x_0)$ que aproxima $f(x)$. Sendo x_0 uma singularidade ($f(x_0) = 0$), como f é de classe C^1 , podemos utilizar a Fórmula de Taylor e escrever $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x - x_0)$, onde $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$, tendo a aproximação

$$f(x) \simeq f'(x_0)(x - x_0)$$

em que $f'(x_0)$ é a transformação linear representada pela *matriz jacobiana*

$$A = f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

e, assim temos o sistema linear $x' = A(x - x_0)$ com $A = f'(x_0)$, denominado *linearização de* $x' = f(x)$ *numa vizinhança de* x_0 .

Em alguns casos, uma E.D.O. não-linear pode ser melhor estudada usando uma função diferenciável conforme definimos abaixo. Uma **integral primeira** de uma equação diferencial $x' = f(x)$ de primeira ordem associado a um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $E \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto, é uma função diferenciável $V : E \rightarrow \mathbb{R}$ que não é constante em abertos, porém é constante ao longo de cada solução da equação diferencial, ou seja, dada uma solução $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ de $x' = f(x)$ teremos, para todo $t \in I$, que

$$(V \circ x)'(t) = 0.$$

Assim, cada solução da E.D.O. é expressa por uma única superfície de nível $V_{[\alpha]} = \{x \in E; V(x) = \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ constante, da integral primeira V . A cada superfície de nível temos condições que restringem a posição da evolução temporal das soluções da equação diferencial. Logo, para obter as soluções de equações diferenciais de primeira ordem em $\mathbb{R}^n$, são necessárias $n - 1$ integrais primeiras $V_i(x)$ linearmente independentes, isto é, para cada $x \in E$, os vetores gradientes $\nabla V_1(x), \nabla V_2(x), \dots, \nabla V_{n-1}(x)$, são linearmente independentes e definem as curvas-soluções da E.D.O. pelas interseções das superfícies de nível $V_i = \alpha_i$ de dimensão $n - 1$ obtidas em cada integral primeira. Estas curvas-soluções não estão explicitamente em função da variável temporal t , portanto, elas determinam implicitamente as órbitas.

Exemplo 3.1 *Seja a equação diferencial $(x_1, x_2, x_3)' = (-x_2, x_1, 0)$ em $\mathbb{R}^3$, obtemos duas integrais primeiras $V_1(x_1, x_2, x_3) = x_3$ e $V_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$. Essas duas integrais primeiras permitem identificar as curvas definidas pelas soluções da equação diferencial: as órbitas estão sempre nas interseções de planos $x_3 = k_1$ com cilindros $x_1^2 + x_2^2 = k_2$, sendo k_1, k_2 constantes, logo, são círculos horizontais centrados no eixo x_3 do $\mathbb{R}^3$.*

Após ver outra maneira de estudar uma equação diferencial não-linear, começemos o estudo do retrato de fase, analisando as órbitas por pontos regulares. Para isso introduz-se o conceito de conjugação.

Dados dois campos $f_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, ou os seus fluxos ϕ_1 e ϕ_2 , dizemos que eles são *topologicamente conjugados* quando existe um homeomorfismo $g : E_1 \rightarrow E_2$, tal que $\phi_2 \circ g = g \circ \phi_1$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Um fluxo é dito *tubular* quando todas as trajetórias do fluxo $\phi(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n)$ que estão num hiperplano $H : y_1 = c$, c constante, estão também no hiperplano $\bar{H} : y_1 = c + t$ após decorrido um tempo t .

Dizemos que um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem *propriedade do fluxo tubular* em um ponto $x_0 \in E$ quando existem uma vizinhança $U \subseteq E$ de x_0 , denominada *vizinhança tubular*, um aberto $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$, uma constante $r > 0$ e um difeomorfismo $g : U \rightarrow (-r, r) \times W$ que conjugua o fluxo ϕ de f em U com o fluxo ψ do campo constante $\bar{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) = (1, 0, \dots, 0)$ em $(-r, r) \times W$, ou seja, $\psi(t, g(x)) = g(\phi(t, x))$ para qualquer $x \in U$ e cada t com $|t| < r$.

Teorema 3.2 (Teorema do Fluxo Tubular) *Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $E \subset \mathbb{R}^n$. Se $x_0 \in E$ não é um ponto de equilíbrio, então x_0 tem a propriedade do fluxo tubular.*

Com esse teorema, demonstrado em DOERING [6], podemos dizer que o comportamento de todos os campos na vizinhança de um ponto regular tem, localmente, o mesmo comportamento tubular.

Para entendermos como funciona este comportamento, definimos a *seção transversal local* do campo f num ponto $x_0 \in E$ pelo conjunto $S = W \cap H \subset E$ obtido pela interseção de uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 em E com um hiperplano transversal H por x_0 , tal que, para cada $x \in S$, colocando a origem do vetor $f(x)$ no ponto x , temos $f(x) \notin H$.

Dado um ponto regular qualquer de um campo f de classe C^1 num aberto de $\mathbb{R}^n$, existe uma seção transversal local conexa S de f em x_0 , tal que $f(x) \neq 0$ para cada $x \in S$, e os vetores $f(x)$, com $x \in S$, apontam todos para o mesmo lado de S em $\mathbb{R}^n$.

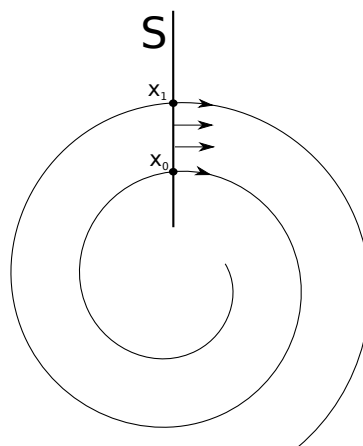


Figura 3.5: Seção transversal conexa de um campo planar.

Faremos agora um breve comentário sobre o comportamento das órbitas de um campo não-linear que se aproximam de uma singularidade desse campo.

A noção de ponto de equilíbrio estável para campos não-lineares $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a mesma do caso linear e, dizemos que um ponto de equilíbrio x_0 é *assintoticamente estável* para $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, quando para qualquer vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 , existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 , tal que $W \subset E \cap U$ e

- $\phi_t(x) \in U$, para quaisquer $x \in W$ e $t > 0$ e
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = x_0$ para qualquer $x \in W$.

Se x_0 for um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o campo $-f$, então dizemos que x_0 é *assintoticamente instável* para f .

Dizemos que uma singularidade $x_0 \in E$ é um *poço (atrator)* de f quando $f'(x_0) \in \mathcal{M}(n)$ tem autovalores complexos com parte real negativa; quando $f'(x_0)$ tem autovalores complexos com parte real positiva dizemos que $x_0 \in E$ é uma *fonte (repulsor)* de f . Assim, se formos pensar em relação aos autovalores das matrizes, A para o caso linear, ou $f'(x_0)$ no caso não-linear, teremos que o sinal da parte real dos autovalores caracteriza estabilidade assintótica. Precisamente temos:

Teorema 3.3 (Liapunov-Perron) *Seja $x_0 \in E$ uma singularidade de um campo de vetores $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Se x_0 é um poço, então x_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de f . Agora, se x_0 é uma fonte, então x_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente instável de f .*

Dizemos que uma singularidade x_0 é um *ponto hiperbólico* se todos os autovalores generalizados da parte linear $Df(x_0)$ do campo f em x_0 tem parte real não-nula. O comportamento local de uma singularidade hiperbólica é sempre classificado pelo comportamento da parte linear do campo, pois

Teorema 3.4 (Grobman-Hartman) *Seja $x_0 \in E$ um ponto de equilíbrio do campo de vetores $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 definido no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se x_0 é uma singularidade hiperbólica, então f em x_0 é localmente conjugado ao campo linear $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ na origem 0.*

Segue dos Teoremas de Liapunov-Perron e Grobman-Hartman a seguinte adaptação do caso linear (ver página 29) para o *estudo local* das singularidades de um campo planar não linear $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de acordo com a Figura 3.6, em que não são possíveis concluir sobre os casos em que a parte real dos autovalores se anulam, ou seja, nas fronteiras de acordo com a figura abaixo.

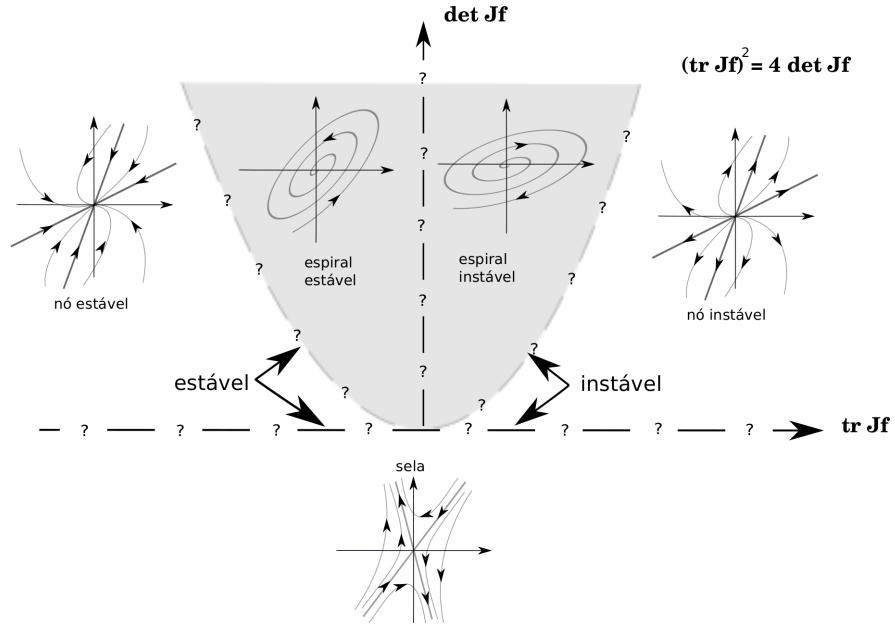


Figura 3.6: Classificação das singularidades de uma E.D.O. não-linear [19].

3.4 Conjuntos invariantes

Da mesma forma que definimos hipersuperfície invariante, dizemos que um conjunto é invariante pelo fluxo ϕ do campo f quando $\phi_t(C) \subset C$ para todo $t \in \mathbb{R}^n$. Quando um fluxo em um conjunto C permanecer em C para $t > 0$, dizemos que C é *positivamente invariante*, quando permanecer em C para $t < 0$ é um conjunto *negativamente invariante*.

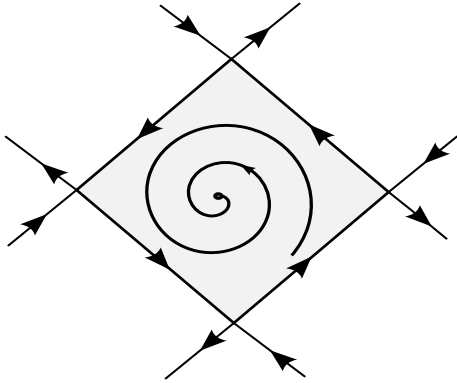


Figura 3.7: Campo vetorial 1.

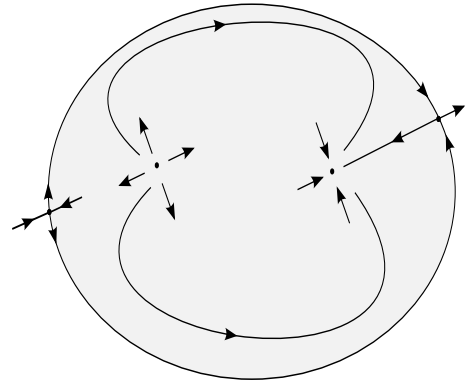


Figura 3.8: Campo vetorial 2.

Nas Figuras 3.7 e 3.8 observamos dois campos em que as órbitas, quando $t \rightarrow \pm\infty$, tendem ou para um ponto ou para um conjunto de pontos. Dizemos *conjunto ω -limite* de um ponto $x \in E$ ao conjunto $L_\omega(x)$ dos pontos $y \in E$ para os quais existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(x) = y$. Analogamente, o *conjunto α -limite* de um ponto $x \in E$ é o conjunto $L_\alpha(x)$ dos pontos $y \in E$ em que $\phi_{t_n}(x) \rightarrow y$ para alguma sequência $t_n \rightarrow -\infty$.

Destas duas definições concluímos que dois pontos x e y de uma mesma órbita tem os

mesmos conjuntos α e ω -limite, ou seja, $L_\alpha(x) = L_\alpha(y)$ e $L_\omega(x) = L_\omega(y)$. Outro resultado é o fato de $L_\alpha(x)$ (ou $L_\omega(x)$) ser fechado e invariante.

Para termos um entendimento global do comportamento das trajetórias, já vimos os pontos de equilíbrio e pontos regulares, agora faremos um breve comentário sobre o comportamento dos campos em órbitas compactas através de suas estabilidades.

Se a órbita de f por x é periódica de período T , então $L_\omega(x)$ é a própria órbita periódica, pois para todo x , se tomarmos a sequência $t_n = nT$ então $\phi_{t_n}(x) \rightarrow x$ quando $t \rightarrow +\infty$, logo o conjunto ω -limite é a própria órbita. Já se tivermos $L_\omega(x)$ compacto, então ele também será conexo.

Para campos de vetores no plano temos

Teorema 3.5 (Poincaré-Bendixson) *Os únicos conjuntos α -limite ou ω -limite de um campo planar que são compactos, não-vazios e sem singularidades são as órbitas periódicas desse campo.*

Uma demonstração deste resultado encontra-se em [6], sendo que a prova de tal teorema é válido somente para o caso planar por causa do **Teorema da Curva de Jordan** o complemento de uma curva fechada sem auto-interseções no plano tem duas componentes conexas abertas e disjuntas, uma limitada e a outra ilimitada, e a curva é a fronteira comum das duas.

Um outro teorema importante nos estudos de campos vetoriais no plano é o Teorema de Bendixson que é aplicado a um campo em uma região simplesmente conexa E , ou seja, uma região na qual o interior de qualquer curva de Jordan em E está inteiramente contido em E ; visualmente falando, não tem buracos. Mas para enunciá-lo relembremos o conceito de divergente e o Teorema de Green.

Dada um campo $f = (f_1, f_2) : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ chamamos de *divergente* do campo ao traço da matriz jacobiana de f , e a nomenclatura é dada por div . Assim $\text{div } f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por:

$$\text{div } f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \text{tr } Df.$$

O *Teorema de Green* diz que dado um compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ com interior não-vazio cuja fronteira é imagem de uma curva $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, fechada e sem auto-interseção, C^1 por partes, e P e Q são funções reais de classe C^1 num aberto contendo K , então $\oint_\lambda P \, dx + Q \, dy = \iint_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx \, dy$.

Teorema 3.6 (Teorema de Bendixson) *Se o campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$, de classe C^1 no aberto simplesmente conexo E de $\mathbb{R}^2$, tem uma órbita periódica, então ou $\text{div } f$ é identicamente nulo ou troca de sinal em E .*

Dem. Esta demonstração está em [6] em que seja λ uma órbita periódica do campo $f = (f_1, f_2)$ parametrizada pela solução $(x'_1, x'_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ em um ponto qualquer de λ , de modo que $f_1 dx_2 - f_2 dx_1 = (-f_2, f_1) \cdot (dx_1, dx_2) = (-f_2, f_1) \cdot (f_1, f_2) dt = 0 dt$, pois $dx_1 = f_1 dt$ e $dx_2 = f_2 dt$. Assim,

$$\int \int_R \operatorname{div} f dA = \int \int_R \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dA = \oint_{\lambda} f_1 dx_2 - f_2 dx_1 = 0,$$

onde R é o interior de λ , contido em E , e a segunda igualdade é garantida pelo Teorema de Green.

Como f é C^1 em E , o divergente de f é contínuo e, portanto, a igualdade $\int \int_R \operatorname{div} f dA = 0$ garante que $\operatorname{div} f$ é identicamente nulo ou troca de sinal em R . $\square$

Estes resultados de E.D.O. nos possibilitarão estudar as equações diferenciais 2.4 e 2.10 no $\mathbb{R}^4$, como veremos no próximo capítulo.

Capítulo 4

Hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$ invariantes por um subgrupo de isometrias com curvatura escalar nula

Após feito todos os cálculos para encontrar as E.D.O.'s da curvatura escalar das hipersuperfícies invariantes por um dos grupos de isometrias $O(n+1)$ ou $O(n+1) \times O(n+1)$, e também após o resumo de estudos qualitativos de E.D.O., neste capítulo apresentaremos a parte principal do trabalho. Faremos uma análise através de integral primeira e do campo vetorial associado às E.D.O.'s (2.4) e (2.10) no caso do espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$, obtendo e classificando classes de soluções.

4.1 Hipersuperfícies rotacionais em $\mathbb{R}^4$ com curvatura escalar nula

As hipersuperfícies rotacionais de $\mathbb{R}^4$ com curvatura escalar S nula são hipersuperfícies $M^3 \subset \mathbb{R}^4$, invariantes por $O(3)$ e geradas por uma curva ppca $\gamma(u) = (x(u), z(u))$, $u \in I$, cuja coordenada x é, conforme visto no Capítulo 2, solução da E.D.O.

$$S(u) = \frac{-2x''x + (1 - (x')^2)}{3x^2} = 0,$$

ou seja, é solução da E.D.O. de segunda ordem

$$2x''x - (1 - (x')^2) = 0, \tag{4.1}$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{1-y^2}{2x} \end{cases} \quad (4.2)$$

Estudamos este sistema baseado no trabalho de LEITE [10], que leva em conta a existência de uma integral primeira (ver página 31) para o sistema. Multiplicando a E.D.O. (4.1) por x' e integrando em relação a u , concluímos que

$$f(x, y) = x(1 - y^2)$$

define uma integral primeira $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ para o sistema. É imediato verificar que

$$f(x, y) = x(1 - y^2) = c \quad (4.3)$$

define uma superfície de nível das soluções x . As geratrizes são curvas em $Q = \{(x, z); x > 0\}$, assim, para estudar a integral primeira, tomemos $x = w$ e $y = v$, então teremos como soluções locais de (4.3) as curvas de níveis com $w > 0$ na função

$$f(w, v) = w(1 - v^2). \quad (4.4)$$

Fazendo o estudo das curvas de níveis $f = c$ chegamos às seguintes classes (Figura 4.1):

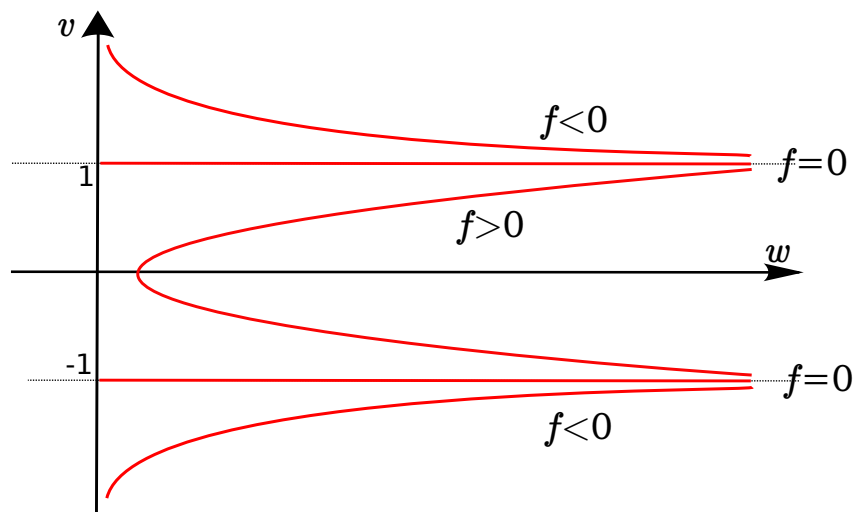


Figura 4.1: Curva de nível de f .

- Para $c < 0$

Por ser $w > 0$ temos $w(1 - v^2) < 0$ logo $v^2 > 1$. Supondo a constante $c = -1$, logo teremos $v^2 = \frac{1}{w} + 1 > 1$. Assim, $v^2 \rightarrow 1 \Rightarrow w \rightarrow \infty$ e quando $v^2 \rightarrow \infty \Rightarrow w \rightarrow 0$.

- Para $c = 0$

Como $w > 0$ logo $1 - v^2 = 0$, ou seja, $v = \pm 1$.

- Para $c > 0$

Logo $1 - v^2 > 0$, ou seja, $v \in (-1, 1)$. Supondo $c = 1$, então $1 - v^2 = \frac{1}{w}$. Assim, quando $v \rightarrow 1 \Rightarrow w \rightarrow \infty$ e quando $v \rightarrow -1 \Rightarrow w \rightarrow \infty$.

Feito o estudo do comportamento das curvas de nível de $f(w, v)$, observemos que não existem pontos singulares da função f em $(w, v) \in Q$, pois

$$\left(\frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) = (1 - v^2, -2wv)$$

será nulo apenas quando $v = \pm 1$ e $w = 0$, logo, f não possui singularidades em Q .

Por outro lado, lembrando que a geratriz $\lambda(u) = (x(u), z(u))$ é ppca, ou seja, $[x'(u)]^2 + [z'(u)]^2 = 1$, logo $(x')^2 = v^2 \leq 1$, assim temos duas famílias de soluções para a integral primeira V que satisfazem $f(w, v) \geq 0$.

Para definirmos esta família em função de f , fixemos $f = c \geq 0$ e observemos pela igualdade (4.4), o fato da curva geratriz ser ppca e a mudança de variável, assim:

$$\begin{cases} (x')^2 + (z')^2 = 1 \\ c = w(1 - v^2) \\ w = x \\ v = x' \end{cases}$$

que resulta em $c = x.(z')^2 \Rightarrow \frac{c}{x} = (z')^2 \leq 1$. Daqui notamos que $x \geq c$.

Teorema 4.1 *As geratrizes ppca de hipersuperfícies rotacionais $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ com curvatura escalar nula satisfazem à E.D.O. $x(z')^2 = c$. Se $c = 0$ então a hipersuperfície é um hiperplano.*

Dem. Se tivermos $c = 0$ concluímos, pelo fato da solução estar em Q com $x > 0$, que $z' = 0$, ou seja, z é uma constante k , sendo a geratriz uma semirreta $\gamma(u) = (u, k)$, $u > 0$. Pela parametrização de rotacionais (2.1) em $\mathbb{R}^4$ da geratriz $\gamma(u)$ e visto que z é constante, teremos por $X(u, \theta_1, \theta_2) = u.\Psi^2 + k.e_4 = u\Psi^2 \oplus k$ que a hipersuperfície é a união das esferas do $\mathbb{R}^3$ de raio u no hiperplano $e_4 = k$. Isto mostra que a hipersuperfície é dada por $\mathbb{R}^3 \oplus z$ para algum $z \in \mathbb{R}$ constante, ou seja, é um hiperplano. $\square$

Teorema 4.2 *As geratrizes ppca de hipersuperfícies rotacionais $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ com curvatura escalar nula que satisfazem à E.D.O. $x(z')^2 = c$ com $c > 0$ são parábolas dadas por $z^2 = 4cx + 4c^2$.*

Dem. Se $c > 0$, obtemos a família de soluções das expressões $(\pm z')^2 = \frac{c}{x}$ e $(x')^2 + (z')^2 = 1$. Temos

$$\left[\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right]^2 = \frac{(z')^2}{(x')^2} = \frac{c}{x - c},$$

logo $\pm \frac{\partial z}{\partial x}(x) = \sqrt{\frac{c}{x-c}}$. Integrando em ambos os lados temos que $\pm z = 2\sqrt{c} \cdot \sqrt{x-c}$, isto é, a curva geratriz é uma parábola de equação $z^2 = 4cx - 4c^2$, $c > 0$. $\square$

4.2 Hipersuperfícies $O(2) \times O(2)$ em $\mathbb{R}^4$ com curvatura escalar nula

Agora caracteriza-se as famílias de curvas geratrizes ppca que geram hipersuperfícies de $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ invariantes pela ação do grupo $O(2) \times O(2)$ com a curvatura escalar nula. Os resultados aqui apresentados seguem de perto o artigo de PALMAS [14].

Se $\gamma(u) = (x(u), z(u))$, $u \in I$, é uma geratriz, então suas coordenadas x e z são, conforme estudo feito no Capítulo 2, soluções da E.D.O. de segunda ordem

$$0 = (-z''x' + x''z')(-z'z + x'x) - z'x'. \quad (4.5)$$

Estudaremos essa equação pelo método usado por BOMBIERI, de GIORGI e GIUSTI em [2], introduzindo a mudança de coordenadas $(x, z) \mapsto (w, v)$ em que w e v são os ângulos formados do eixo Ox para os vetores posição e tangente, respectivamente,

$$\begin{cases} w = \arctg\left(\frac{z}{x}\right) \\ v = \arctg\left(\frac{z'}{x'}\right). \end{cases} \quad (4.6)$$

Essa mudança reduz o estudo qualitativo da E.D.O. (4.5) ao estudo das órbitas de um campo vetorial definido num aberto de $\mathbb{R}^2$.

Observe que w e v são invariantes por homotetia $w(x, z) = w(\lambda x, \lambda z)$ e $v(x, z) = v(\lambda x, \lambda z)$ e que satisfazem

$$\begin{aligned} x' &= \cos v \\ z' &= \sin v \\ x &= \sqrt{x^2 + z^2} \cos w \\ z &= \sqrt{x^2 + z^2} \sin w. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Observação 4.1 Sabemos que $\frac{d}{dt} \arctg(f(t)) = \frac{1}{1+f(t)^2} \cdot f'(t)$, assim temos

$$\begin{aligned} w' &= \frac{d}{du} \arctg\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{z'x - x'z}{x^2 + z^2}. \\ v' &= \frac{d}{du} \arctg\left(\frac{z'}{x'}\right) = \frac{z''x' - x''z'}{x'^2 + z'^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Observação 4.2 Ao fazermos a comparação entre x, z, x', z', v e w obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} w = 0 &\Leftrightarrow z = 0 & v = 0 &\Leftrightarrow z' = 0 \\ w = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow x = 0 & v = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow x' = 0 \\ w = v &\Leftrightarrow \frac{z}{x} = \frac{z'}{x'} & v = \frac{\pi}{2} - w &\Leftrightarrow xx' - zz' = 0 \end{aligned}$$

Multiplicando (4.5) por $(z'x - x'z)$, fazendo uso da mudança de coordenada (4.6) e usando as igualdades (4.7) e (4.8) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= (-z''x' + x''z')(-z'z + x'x)(z'x - x'z) - z'x'(z'x - x'z) \\ 0 &= -v'((-z')^2zx + x'z'x^2 + z'x'z^2 - (x')^2zx) - z'x'(x^2 + z^2)w' \\ 0 &= v'((xz - x'z'(x^2 + z^2)) - z'x'(x^2 + z^2)w' \\ 0 &= v'((x^2 + z^2)[\cos w \sin w - \cos v \sin v]) - \sin v \cos v (x^2 + z^2)w' \\ 0 &= (\cos w \sin w - \cos v \sin v)v' - (\sin v \cos v)w' \end{aligned}$$

Esta igualdade equivale ao sistema dado por

$$\begin{cases} w' = \frac{1}{2}(\sin 2w - \sin 2v) \\ v' = \frac{1}{2}(\sin 2v) \end{cases} \quad (4.9)$$

ao qual podemos associar o campo vetorial $X(w, v) = (X_1(w, v), X_2(w, v))$ onde

$$\begin{cases} X_1(w, v) = \frac{1}{2}(\sin 2w - \sin 2v) \\ X_2(w, v) = \frac{1}{2}\sin 2v \end{cases}. \quad (4.10)$$

Resolver o sistema de equações diferenciais (4.9) é o mesmo que determinar as órbitas $\psi(t) = (w(t), v(t))$ do campo vetorial X .

Observemos que X é π -periódico em cada coordenada e, além disso,

$$\begin{aligned} X\left(w + \frac{\pi}{2}, v + \frac{\pi}{2}\right) &= -X(w, v), \quad (w, v) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ X\left(w + \frac{\pi}{2}, v - \frac{\pi}{2}\right) &= -X(w, v), \quad (w, v) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{aligned}$$

nos possibilitando estudar o campo vetorial somente no retângulo $R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, para obter a resolução em todo o $\mathbb{R}^2$. Sendo X um campo limitado, segue da Proposição 3.1 que as órbitas $\psi(t) = (w(t), v(t))$ do campo vetorial X estão definidas para todo valor de $t \in \mathbb{R}$.

Para estudar o retrato de fase desse campo obtemos as famílias de órbitas através dos pontos singulares. Os pontos singulares (w, v) de X na região R são $(0, 0)$, $(0, \pm\frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2})$.

A classificação desses pontos singulares é feita de acordo com a matriz jacobiana $J(X(w, v))$ de cada um desses pontos. Temos que X é não linear e

$$J(X(w, v)) = \begin{pmatrix} \cos 2w & -\cos 2v \\ 0 & \cos 2v \end{pmatrix},$$

logo, pelo que vimos na página 28, tomando os resultados do discriminante, concluímos que:

- $(0, 0)$ é um repulsor;
- $(\frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{2})$ são atratores;
- $(0, \pm \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, 0)$ são pontos de sela.

Para melhor observarmos o comportamento das órbitas na região R dada por $\{(w, v); 0 \leq w \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$, a dividimos em sub-regiões

$$\begin{aligned} R^+ &= \left\{ (w, v) \in R; 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \right\} \\ R^- &= \left\{ (w, v) \in R; -\frac{\pi}{2} \leq v \leq 0 \right\} \\ R_1 &= \left\{ (w, v) \in R^+; v > \frac{\pi}{2} - w \right\} \\ R_2 &= \left\{ (w, v) \in R^+; v < \frac{\pi}{2} - w \right\}. \end{aligned}$$

Lema 4.1 *O divergente do campo X é*

$$\operatorname{div}(X) = \frac{\partial X_1}{\partial w} + \frac{\partial X_2}{\partial v} = \cos 2w + \cos 2v,$$

e, portanto, X não possui órbitas fechadas nas regiões R_1 ou R_2 .

Dem. Temos as derivadas parciais

$$\frac{\partial X_1}{\partial w} = \cos 2w \quad \text{e} \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = \cos 2v,$$

o que fornece a expressão do divergente. Em R_1 temos $v > \frac{\pi}{2} - w$, ou seja, $\cos 2v < \cos 2(\frac{\pi}{2} - w) = -\cos 2w$, logo,

$$\operatorname{div}(X) = \cos 2w + \cos 2v < \cos 2w + \cos 2\left(\frac{\pi}{2} - w\right) = \cos 2w - \cos 2w = 0.$$

Da mesma forma, em R_2 teremos $\cos v > \cos(\frac{\pi}{2} - w)$ mostrando que $\operatorname{div}(X) > 0$. Segue do critério de Bendixson, Teorema 3.6, que X não possui órbita fechada em R_1 ou R_2 . $\square$

Através destas informações acima e fazendo algumas análises do campo (4.10) por meio da teoria sobre equações diferenciais (ver Capítulo 3) obtemos uma descrição do retrato de fase do campo X :

Proposição 4.1 *As trajetórias do campo X em R são de uma das seguintes categorias:*

1. *Existem apenas três trajetórias horizontais com α -limite $(0, v)$ e ω -limite $(\frac{\pi}{2}, v)$, onde $v \in \{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\}$.*

2. Trajetórias com α -limite $(0,0)$ que entram no interior de R^+ e a deixam em pontos da forma $(0,v)$, onde $0 < v < \frac{\pi}{2}$.
3. Uma única trajetória com α -limite $(0,0)$ e ω -limite $(0, \frac{\pi}{2})$.
4. Trajetórias com α -limite $(0,0)$ e ω -limite $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ possuindo uma tangente vertical nos pontos (w,v) satisfazendo $w = v$ ou $v = \frac{\pi}{2} - w$.
5. Uma única trajetória com α -limite $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e ω -limite $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
6. Trajetórias que entram no interior de R^+ por pontos da forma $(\frac{\pi}{2}, v)$, $0 < v < \frac{\pi}{2}$ possuindo ω -limite $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
7. Todas as trajetórias intersectando R^- , entram nessa região por pontos da forma $(0, v_1)$ e a deixa por pontos da forma $(\frac{\pi}{2}, v_2)$, onde $v_1, v_2 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

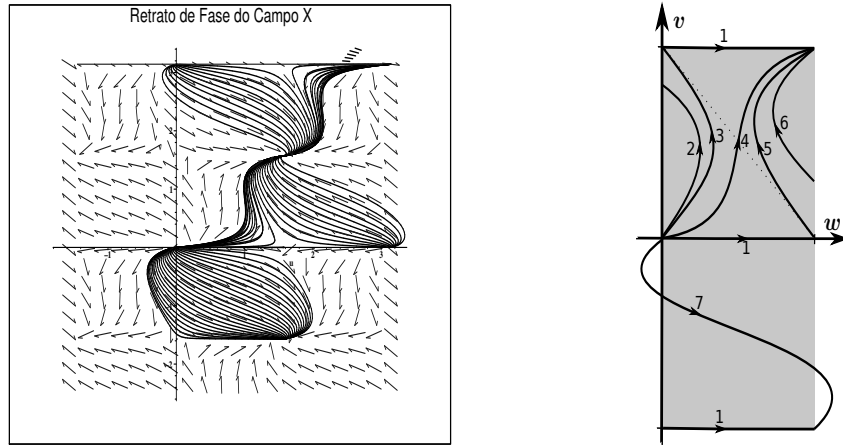


Figura 4.2: Campo vetorial $X(w, v) = (X_1(w, v), X_2(w, v))$.

Dem. Inicialmente observemos que o campo X satisfaz o Teorema de existência e unicidade de soluções, assim concluímos que as trajetórias do item (1) são as únicas que passam pelos segmentos de reta (t, v) em que $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ e com $v = -\frac{\pi}{2}, 0$ ou $\frac{\pi}{2}$.

Pelo Lema 4.1, não há órbitas fechadas nas regiões R_1 e R_2 e, além disso, não há singularidades no interior dessas regiões. Logo, pelo Teorema 3.5 de Poincaré-Bendixson, todas as trajetórias precisam sair de R_1 e R_2 . Usando a unicidade de soluções e a transversalidade de X na fronteira de R_1 , concluímos que todas as trajetórias que entram na região R_1 , a deixam no ponto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Em particular, toda trajetória que entra em R_1 através de pontos da forma $(\frac{\pi}{2}, v)$, onde $v \in (0, \frac{\pi}{2})$, saem por $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ provando o item (6).

Para o item (5) temos pelo comportamento do campo X que sua jacobiana no ponto $(\frac{\pi}{2}, 0)$, dada por $J(X(\frac{\pi}{2}, 0)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, nos dá os autovetores $(-1, 0)$ e $(-1, 2)$, logo, observamos que a trajetória deixa o ponto $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e entra na R_1 por ser tangente a $(-1, 2)$, deixando essa região em $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definindo a trajetória do item (5).

Da mesma forma, obtemos (2) e (3) na região R_2 .

Observando que algumas trajetórias de X podem deixar R_2 pela reta $v = \frac{\pi}{2} - w$, então elas entram em R_1 e, pela primeira parte desta análise, deixam R_1 em $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, o que é o caso (4) pois se tivermos $w = v$ e $v = \frac{\pi}{2} - w$ então a aplicação X_1 se anula.

Para o item (7) temos que $(0, 0)$ é um repulsor e $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ é um atrator e na fronteira onde $w = 0$ e $-\frac{\pi}{2} < v < 0$ as trajetórias entram na região R^- e tem como α -limite o repulsor $(0, 0)$ e saem de R^- na fronteira em que $w = \frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2} < v < 0$. $\square$

Observe que se tomarmos as funções-coordenadas da curva-geratriz $\gamma(u) = (x(u), z(u))$ de forma que z esteja em função de x , obtemos:

Lema 4.2 *Seja M uma hipersuperfície invariante por $O(2) \times O(2)$ em $\mathbb{R}^4$, com curvatura escalar nula, gerada pela curva ppca $\gamma(u) = (x(u), z(u))$ com $z = z(x)$, então*

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \left(1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right) \frac{dz}{dx} \left[-x + z \frac{dz}{dx} \right]^{-1}. \quad (4.11)$$

Dem. Lembrando que γ é ppca, $(x')^2 + (z')^2 = 1$, e que $\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{du}}{\frac{dx}{du}} = \frac{z'}{x'}$, então o resultado decorre da equação (4.5) através das igualdades:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{z'}{x'} \right) = \frac{1}{\frac{dx}{du}} \cdot \frac{d}{du} \frac{z'}{x'} = \frac{z''x' - z'x''}{(x')^3} \quad (4.12)$$

$$z'z - x'x = \frac{dz}{du}z - \frac{dx}{du}x = \frac{dx}{du} \left[z \frac{dz}{dx} - x \right] \quad (4.13)$$

$$x'z' = \frac{dx}{du} \frac{dz}{du} = \left[\frac{dx}{du} \right]^2 \left[\frac{dz}{dx} \right] \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{du} \right)^2} = 1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \quad (4.15)$$

$\square$

Do lema obtemos os seguintes resultados que relacionam $v = \arctg \left(\frac{z'}{x'} \right)$, definido no campo X , com a concavidade da curva geratriz:

Proposição 4.2 *Temos as seguintes relações entre o ângulo v e a concavidade da curva geratriz de M :*

1. Se $v < \frac{\pi}{2} - w$, $0 < v < \frac{\pi}{2}$, a curva geratriz tem concavidade para baixo e não toca o eixo z .
2. Se $v > \frac{\pi}{2} - w$, $0 < v < \frac{\pi}{2}$, a curva geratriz tem concavidade para cima e não toca o eixo x .

Dem. Primeiramente observamos que $0 < v < \frac{\pi}{2}$ implica $x' \neq 0$ e $z' \neq 0$, pelas equações (4.7). Assim, $\frac{dz}{dx} \neq 0$ e podemos tomar $x = x(z)$ ou $z = z(x)$, se tomarmos a curva geratriz como a função $z = z(x)$, podemos usar a relação

$$v = \operatorname{arctg} \frac{z'}{x'} = \operatorname{arctg} \frac{dz}{dx}$$

para obtermos na 1ª afirmação o resultado

$$v < \frac{\pi}{2} - w \implies \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} v < \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - w \right) = \operatorname{cotg} w = \frac{x}{z} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} v > 0$$

e assim concluindo parte da afirmação com o Lema 4.2.

Para mostrar que a curva toca o eixo x primeiro que o eixo z , suponha por absurdo que $(0, z_0)$ esteja na fronteira de $Q = \{(x, z); x \geq 0, z \geq 0\}$ e $(x_1, z_1) \in Q$ sejam pontos de uma curva geratriz $(x(u), z(u))$, respectivamente, correspondendo a u_0 e u_1 . Logo a função contínua $z(u) \frac{dz}{dx}(u) - x(u)$ é positiva em u_0 e negativa em u_1 , sendo assim existe um ponto entre u_0 e u_1 em que anula a função, tornando $\frac{d^2z}{dx^2}$ singular, concluindo que a curva não passa por estes pontos.

A demonstração de (2) é análoga. □

Agora podemos demonstrar o principal resultado desta seção, classificando as hipersuperfícies por meio das curvas geratrizes.

Teorema 4.3 *As hipersuperfícies invariantes pela ação do grupo $O(2) \times O(2)$ em $\mathbb{R}^4$ com curvatura escalar nula, pertencem a uma das seguintes classes:*

1. Cilindros, ou seja, hipersuperfícies da forma $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.
2. Hipersuperfícies cuja geratriz intersecta a fronteira do espaço de órbitas Q no eixo x , formando um ângulo v com o eixo x , onde $0 < v < \frac{\pi}{2}$. Neste caso temos $x \neq 0$.
3. Hipersuperfícies cuja curva geratriz intersecta a fronteira do espaço de órbitas Q no eixo x , formando um ângulo reto com ele.
4. Hipersuperfícies cuja curva geratriz tem uma singularidade em Q .

5. *Hipersuperfícies cuja geratriz intersecta a fronteira do espaço de órbitas Q no eixo z , formando um ângulo reto com ele.*
6. *Hipersuperfícies cuja geratriz intersecta a fronteira do espaço de órbitas Q no eixo z , formando um ângulo v com o eixo z , onde $0 < v < \frac{\pi}{2}$. Neste caso temos $z \neq 0$.*
7. *Hipersuperfícies cuja geratriz intersecta a fronteira do espaço de órbitas Q em pontos da forma $(x, 0)$, $x \neq 0$ e $(0, z)$, $z \neq 0$, em ambos os casos formando um ângulo diferente de $\frac{\pi}{2}$ com o eixo de intersecção.*

Dem. Temos como resultados úteis para essa demonstração as Proposições 4.1 e 4.2 e as relações (4.7), que transformam a análise do comportamento das trajetórias de X na análise do comportamento das curvas. Estamos seguindo a mesma numeração dada na Proposição 4.1. Assim concluímos:

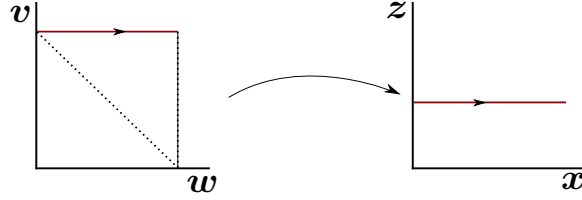


Figura 4.3: Caso 1.

1. As trajetórias horizontais de X satisfazem $v = 0$ ou $v = \pm \frac{\pi}{2}$, assim $z' = 0$ ou $x' = 0$, respectivamente. Isto nos diz que a curva geratriz é $z = \text{constante}$ ou $x = \text{constante}$, gerando um cilindro.
2. Essas são as hipersuperfícies cuja curva geratriz intersecta o eixo x , tendo $0 = z = \sqrt{x^2 + z^2} \sin w$, em um ângulo $v_0 = \arctg \frac{z'}{x'}$. Elas estão associadas às trajetórias de X que passam por pontos da forma $(0, v_0)$, $0 < v_0 < \frac{\pi}{2}$. Sendo $z = 0$ no ponto de intersecção,

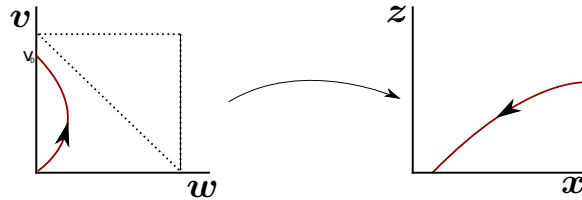


Figura 4.4: Caso 2.

a equação (4.5) nos diz que $x \neq 0$ neste ponto, pois, caso contrário, devemos ter $x'z' = 0$ neste ponto, contradizendo $0 < v_0 < \frac{\pi}{2}$.

3. É fácil ver que se $(w, v) \rightarrow (0, \frac{\pi}{2})$, então $z \rightarrow 0$. Devido à Proposição 4.2 temos que a curva geratriz associada a essa trajetória é côncava para baixo e está completamente contida em $0 < \frac{z}{x} < 1$, pois neste caso $0 < w < \frac{\pi}{4}$. Ela aproxima-se do eixo x com ângulo limite $\frac{\pi}{2}$.

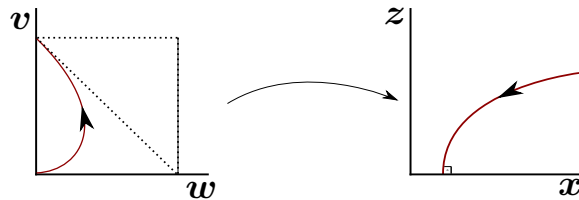


Figura 4.5: Caso 3.

4. Aqui as trajetórias podem ser divididas em duas partes: uma de $(0, 0)$ para o único ponto P onde a trajetória intersecta a reta $v = \frac{\pi}{2} - w$ e outra de P para $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

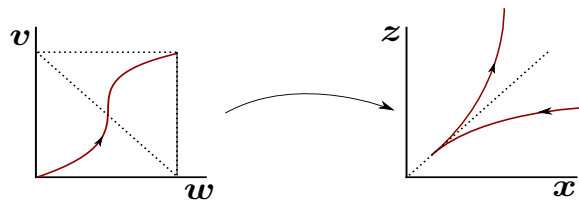


Figura 4.6: Caso 4.

Esta reta corresponde às singularidades das curvas geratrizes, então, de fato, podemos considerar essas duas partes separadamente. A primeira parte, indo de $(0, 0)$ para $v = \frac{\pi}{2} - w$ nos dá uma curva com concavidade para baixo e a segunda parte nos dá uma curva com concavidade para cima.

5. Este caso é similar ao caso (2), em que a curva geratriz pode ser obtida refletindo-a com relação à reta $z = x$.

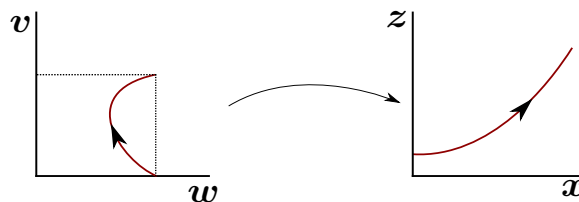


Figura 4.7: Caso 5.

6. Este caso é similar ao caso (3). Novamente, as curvas geratrizes podem ser obtidas por uma reflexão com relação à reta $z = x$.

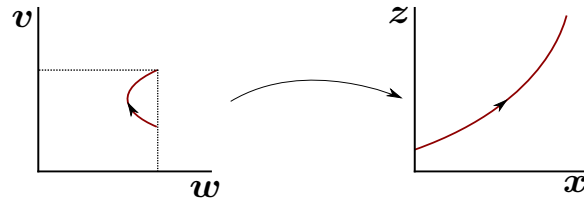


Figura 4.8: Caso 6.

7. As trajetórias de X que passam por $(0, v_1)$ e $(\frac{\pi}{2}, v_2)$, com $0 > v_1, v_2 > -\frac{\pi}{2}$, nos dizem que as curvas geratrizes passam por $x = 0$ e $z = 0$ com ângulos diferentes de 0 e $\frac{\pi}{2}$.

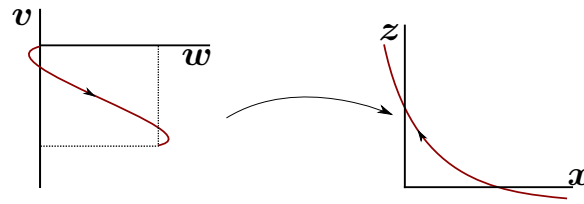


Figura 4.9: Caso 7.

□

Conclusão

Da mesma forma que obtemos estes resultados de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$, os métodos de geometria diferencial equivariante têm sido usados por pesquisadores para classificar as hipersuperfícies invariantes por subgrupos de isometrias que possuem a r -ésima curvatura média constante em espaços $\mathbb{R}^n$, como é feito por HSIANG e LAWSON [8].

Nesta área de pesquisa temos no trabalho de HSIANG et al [9] a construção de novas famílias de imersões de esferas $\mathbb{S}^{2k-1}$ em espaços euclidianos $\mathbb{R}^{2k}$ com curvatura média constante, provando a existência de infinitas imersões generalizando as hipersuperfícies rotacionais do tipo $O(k) \times O(k)$ que são difeomorfas a $\mathbb{S}^{2k-1}$ e que tem curvatura média constante. Há também o artigo de PALMAS [14], em que estuda e classifica as hipersuperfícies invariantes $O(2) \times O(2)$ em $\mathbb{R}^4$ com curvatura escalar zero, e o de SATO & NETO [16], que generaliza o caso de Palmas para as hipersuperfícies invariantes $O(p+1) \times O(q+1)$ no espaço $\mathbb{R}^{p+q+2}$ com $p, q \leq 1$.

Já OKAYASU [13] cita o primeiro exemplo de hipersuperfícies completas com curvatura escalar constante negativa. DO CARMO e DAJCZER [5] estendem as notações clássicas de superfícies rotacionais do $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^n$ e ALENCAR [1] estabeleceu uma classificação das hipersuperfícies minimais de $\mathbb{R}^{2m}$ invariantes por $SO(m) \times SO(m)$.

PALMAS em [15] estuda a classificação de todas as hipersuperfícies de rotação completas com H_k constante em espaços euclidianos $\mathbb{R}^{n+1}$ e hiperbólicos $\mathbb{H}^{n+1}$, além de resultados parciais no espaço esférico $\mathbb{S}^{n+1}$, tendo como base o artigo de Maria Luiza Leite [10].

Referências Bibliográficas

- [1] ALENCAR, H. *Minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^{2m}$ invariant by $SO(m) \times SO(m)$* . Trans. Amer. Math. Soc. n° 337(1), p.129-141, 1993.
- [2] BOMBIERI, E.; DE DIORGI, E.; GIUSTI, E., *Minimal cones and the Bernstein problem*. Invent. Math. 7, p. 243-269, 1969.
- [3] DELAUNAY, C., *Sur la surface de révolution don't la courbure moyenne est constante*. J. Math. pure et appl. Série 16, 1841.
- [4] DO CARMO, M. P., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Tradução: Pedro Roitman. 3.ed. Rio de Janeiro: Textos Universitários - SBM, 2008.
- [5] DO CARMO, M. P. & DAJCZER, M. *Rotational hypersurfaces in spaces of constant curvature*. Trans. Amer. Math. Soc. n° 277(2) p.685-709, 1983.
- [6] DOERING, C. I.; LOPES, A. O., *Equações Diferenciais Ordinárias*. 3ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [7] HOPF, H., *Differential Geometry in the Large*. Lectures Notes in Mathematics, vol.1000 2ed. Springer-Verlag, 1989.
- [8] HSIANG, W. Y.; LAWSON, H. B. *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, Journal of Differential Geometry. vol. 5, p.1-38, 1971.
- [9] HSIANG, W. Y.; TENG, Z. H.; Yu, W. C. *New examples of constant mean curvature immersions of $(2k - 1)$ -spheres into Euclidian $2k$ -space*. Annals of Math. n° 117 p.609-625, 1983.
- [10] LEITE, M. L., *Rotational hypersurfaces of space forms with constant scalar curvature*. Manuscripta Mathematica. v.67 n° 1 p.285-304. :Ed. Springer-Verlag, 1990.
- [11] LIMA, E. L., *Curso de Análise v.2*. 10.ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2008.

- [12] MEDEIROS, N. A. C.; RIPOLL, J. B., *Hipersuperfícies Invariantes de Curvatura Média Constante*. Matemática Universitária n° 13 p.39-63. Porto Alegre: Instituto de Matemática - UFRGS, 1991.
- [13] OKAYASU, T. $O(2) \times O(2)$ -invariant hypersurfaces with constant negative scalar curvature in E^4 , Proc. Amer. Math. Soc. n° 107 p.1045-1050, 1989.
- [14] PALMAS, O., $O(2) \times O(2)$ -invariant hypersurfaces with zero scalar curvature. Archives der Mathematiques n° 74 p.226-233. Basel: Ed. Birkhäuser Verlag, 2000.
- [15] PALMAS, O., *Complete rotation hypersurfaces with H_k constant in space forms*. Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, v.30, n° 2, p.139-161, 1999.
- [16] SATO, J. & NETO, V.F.S., *Complete and Stable $O(p+1) \times O(q+1)$ -Invariant Hypersurfaces with Zero Scalar Curvature in Euclidean Space $\mathbb{R}^{p+q+2}$* . Annals Global Analysis and Geometry 29, p. 221-240, 2006.
- [17] Wikipédia: a enciclopédia livre - Klein. Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:KleinBottle-01.png>>. Acessado em: 06 de Julho de 2011.
- [18] Wikipédia: a enciclopédia livre - Mobius . Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:MobiusStrip-01.png>>. Acessado em: 06 de Julho de 2011.
- [19] ZILL, D. G. & MICHAEL, R. C. *Equações Diferenciais - Vol. 2*. Tradução: Alfredo Alves de Farias - São Paulo: MAKRON Books, 2001.