



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL



**DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL: UMA
SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O SEXTO ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL**

JULIENE AZEVEDO MIRANDA 11412ECM010

Uberlândia, 2016



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL



**DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL: UMA
SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O SEXTO ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL**

JULIENE AZEVEDO MIRANDA 11412ECM010

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para obtenção do título de mestre no Curso de Mestrado Profissional.

Orientadora: Prof^ª Dr^ª Odaléa Aparecida Viana

Uberlândia, 2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

- M672d
2016
- Miranda, Juliene Azevedo, 1988
Desenvolvimento do raciocínio proporcional: uma sequência didática para o sexto ano do ensino fundamental / Juliene Azevedo Miranda. - 2016.
117 f. : il.
- Orientadora: Odaléa Aparecida Viana.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.
Inclui bibliografia.
1. Ciência - Estudo e ensino - Teses. 2. Matemática (Ensino fundamental) - Estudo e ensino - Teses. 3. Raciocínio - Teses. I. Viana, Odaléa Aparecida. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

Dedico este trabalho a minha mãe que sempre me apoiou, ajudou e me incentivou a estudar, que ia dormir só quando eu chegava da faculdade, levantava sempre nas madrugadas geladas para me servir café da manhã antes que eu saísse para as viagens até Uberlândia para assistir as aulas do programa de mestrado. Dedico esse trabalho exclusivamente a ela, que hoje não está ao meu lado para acompanhar mais essa etapa vencida, assim como tantas outras em que esteve presente.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi construído pelo esforço e dedicação, resultado do aprendizado de leituras e práticas. A construção deste deve meus agradecimentos:

A Deus que permitiu que este trabalho fosse desenvolvido.

À minha orientadora, professora Odaléa, por ter me proporcionado compreender e construir conceitos, mudar de atitudes frente a novos desafios, pela paciência, amizade, incentivo, orientação e apoio.

A escola parceira pela colaboração em permitir a aplicação do projeto.

Aos alunos participantes, pelo envolvimento com o projeto.

Ao meu marido Ronaldo, pela compreensão, companheirismo e apoio durante o curso.

Aos meus pais, que sempre me apoiaram e me compreenderam pelas faltas nos compromissos familiares.

RESUMO

Este trabalho, realizado no âmbito do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Faculdade de Ciências Integradas do Pontal da Universidade Federal de Uberlândia, visa apresentar uma sequência didática para favorecer o desenvolvimento do raciocínio proporcional tendo como suporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gerard Vergnaud. São objetivos específicos: (a) analisar uma sequência didática, organizada na forma de situações-problema visando favorecer o estabelecimento das relações de covariação e de invariância de grandezas, necessárias para conceituar razão e proporção e (b) analisar o desempenho e as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver situações-problema envolvendo o raciocínio proporcional, ao longo da aplicação da proposta didática. O trabalho tem apoio metodológico na Engenharia Didática e foi desenvolvido junto a aproximadamente 26 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da cidade de Ituiutaba/MG, no período regular de aulas. A sequência teve seis etapas, na primeira foi aplicada uma avaliação tipo lápis e papel e as etapas seguintes foram constituídas por situações-problema aplicadas com mediação da professora e também por avaliações, sendo que estes instrumentos foram elaborados com base na literatura existente sobre o tema raciocínio proporcional. Os dados foram analisados quantitativamente por meio da estatística descritiva e qualitativamente quando foram organizadas categorias de análise. Na primeira etapa, houve mais dificuldade nos problemas de comparação que nos de valor omitido e as estratégias multiplicativas utilizadas pelos alunos indicaram alguma inferência e predição na compreensão de que as grandezas envolvidas nos problemas variavam em conjunto. Ao longo da aplicação da sequência, verificou-se que os alunos passaram a identificar as grandezas proporcionais envolvidas nas situações e a maioria deles conseguiu justificar as repostas por meio da relação de covariação, valendo-se da simbologia adequada. Considera-se que a opção metodológica de oferecer situações diversificadas antes da apresentação formal desse conteúdo (que acontece a partir do sétimo ano do Ensino Fundamental) contribui para desenvolver o raciocínio proporcional dos alunos. Espera-se que as análises e discussões teóricas realizadas nesse trabalho possam contribuir para a prática do professor de matemática.

Palavras-chave: Raciocínio proporcional, campos conceituais, ensino de matemática.

ABSTRACT

This work, carried out during the Masters Course for teaching Science and Mathematics, within the postgraduate program in teaching Science and Mathematics at the Pontal College of Integrated Sciences of the Federal University of Uberlândia. It aims to introduce a didactic sequence to encourage the development of proportional reasoning with the theoretical support the Theory of Conceptual Fields (TCC) by Gerard Vergnaud. The specific objectives are: (a) to analyze a didactic sequence, arranged in the form of problem situations in order to promote the establishment of relations of covariance and invariance of quantities, required to conceptualize reason and proportion and (b) examine the performance and the strategies used by the students to solve problem situations involving proportional reasoning, through the application of didactic proposal. The work has methodological support in Teaching Engineering and was developed together with approximately 26 students of the sixth grade of an elementary school in the city of Ituiutaba, Minas Gerais, during regular class periods. The sequence had six stages, the first was a pencil and paper type evaluation and review the following stages were composed of problem situations applied with mediation of a teacher as well as evaluations, being that these instruments have been drawn up on the basis of the existing literature on the subject of proportional reasoning. Data was analyzed through quantitative and qualitative descriptive statistics when the categories of analysis were set up. In the first step, there was more difficulty with the problems of comparison than those of omissive value and the multiplicative strategies used by the students indicated some inference and prediction on the understanding that the values involved in the problems varied together. Throughout the implementation of the result, it was found that the students have come to identify the proportional quantities involved in situations and most of them managed to justify the answers through the relationship of covariance, using the appropriate symbol. The methodological option of offering diverse situations before the formal presentation of this content (which happens from the seventh grade of primary school) helps to develop proportional reasoning of students. It is expected that the analysis and theoretical discussions undertaken in this work could contribute to the work of a Maths teacher.

Keywords: Proportional Reasoning, Conceptual fields, Maths education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Quadro 1. Descritores e aspectos essenciais para o desenvolvimento do pensamento proporcional	34
Quadro 2. Descritores e aspectos essenciais para o desenvolvimento do pensamento proporcional	35
Quadro 3. Cronograma das atividades da sequência didática	50
Quadro 4. Desempenho dos alunos nos Problemas 1 e 2 constantes na Avaliação de desempenho	70
Quadro 5. Desempenho dos alunos no Problema 3 constante na Avaliação de desempenho	73
Quadro 6. Desempenho dos alunos no Problema 4 constante na Avaliação de desempenho	76
Quadro 7. Desempenho geral dos participantes na avaliação por problema resolvido	78
Quadro 8. Desempenho dos alunos no Problema dos colares	81
Quadro 9. Desempenho geral dos participantes no Problema dos Colares, por item respondido	88
Quadro 10. Desempenho dos alunos nos problemas da avaliação 2	97
Quadro 11. Resoluções corretas dos alunos nos problemas da avaliação 2	98
Quadro 12. Desempenho geral dos participantes na Avaliação: Sim ou Não, por item respondido	100
Quadro 13. Desempenho dos alunos no item 3 do Mais Situações-problema	103
Quadro 14. Resoluções corretas dadas para o item 3 do Mais Situações-problema	103
Quadro 15. Desempenho dos alunos no item 4 do Mais Situações-problema	104
Quadro 16. Resoluções dos alunos no item 4 do Mais Situações-problema	105
Quadro 17. Desempenho geral dos participantes na avaliação Mais situações-problema por item respondido	107
Figura 1. Relação parte-parte e parte-todo para as situações com inteiro contínuo (a) e discreto (b)	19
Figura 2. Exemplos de relações de primeira e de segunda ordem em situações que requerem o raciocínio proporcional	19
Figura 3. Exemplos de <i>within relation</i> e <i>between relation</i>	22
Figura 4. Exemplos de relações de primeira ordem estabelecidas através de comparações parte-parte	24

Figura 5. Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo	46
Figura 6. Análise vertical e horizontal em problema de relação quaternária	48
Figura 7. Avaliação de desempenho	52
Figura 8. Problema das urnas	53
Figura 9. Ficha da urna de Ana	54
Figura 10. Ficha da urna de Benê	55
Figura 11. Ficha da urna de Cadu	56
Figura 12. Ficha com a questão final	57
Figura 13. Esquema da relação de covariação das grandezas na urna de Ana	58
Figura 14. Esquema da relação de covariação das grandezas na urna de Benê	58
Figura 15. Esquema da relação de covariação das grandezas na urna de Cadu	59
Figura 16. Esquema da relação de Invariância das grandezas na urna de Ana	59
Figura 17. Esquema da relação de Invariância das grandezas na urna de Benê	60
Figura 18. Esquema da relação de Invariância das grandezas na urna de Cadu	60
Figura 19: Problema do colar	61
Figura 20. Esquema de Relação de Invariância e covariação das grandezas do problema do colar	62
Figura 21. Problema dos quadrados	63
Figura 22. Esquema de relação de covariação das grandezas	64
Figura 23. Esquema de relação de Invariância das grandezas	64
Figura 24. Esquema mostrando que não há relação de covariação entre as grandezas	64
Figura 25. Esquema mostrando que não há relação de invariância entre as grandezas	65
Figura 26. Avaliação 2: Sim ou não? Diga como pensou	65
Figura 27. Mais problemas	66
Figura 28. Esquema de relação de covariação das grandezas envolvendo a altura do Sr. Baixinho e do Sr. Altão	67
Figura 29. Esquema de relação de invariância das grandezas do problema 2	68
Figura 30. Resumo das estratégias e relações identificadas na solução dos problemas	69
Figura 31. Resoluções corretas dos alunos no Problema 1 constante da Avaliação de desempenho	71
Figura 32. Resoluções corretas dos alunos no problema 2 da avaliação de desempenho	72

Figura 33. Situações avaliadas no Problema 3 da avaliação de desempenho (Problema de Comparação)	73
Figura 34. Respostas corretas dos alunos no problema 3 da avaliação de desempenho	74
Figura 35. Respostas incorretas dos alunos no problema 3 da avaliação de desempenho	75
Figura 36. Respostas corretas dos alunos no problema 4 da avaliação de desempenho	76
Figura 37. Respostas incorretas dos alunos no problema 4 da avaliação de desempenho	77
Figura 38. Problema das Urnas	79
Figura 39. Fichas entregues no Problema das urnas	79
Figura 40. Esquemas de covariação e invariância das grandezas na urna de Ana	80
Figura 41: Foto tirada pela professora durante a interpretação do problema das urnas	81
Figura 42. Ficha com a questão final (a) e foto tirada pela professora durante o preenchimento da ficha	81
Figura 43. Resoluções corretas dos alunos no item 3 do problema dos colares	82
Figura 44. Resolução incorreta e resoluções parcialmente corretas para o item 3 - Problema dos colares	82
Figura 45. Resoluções incorretas para o item 4 do problema dos colares	84
Figura 46. Resoluções corretas para o item 4 do problema dos colares	84
Figura 47. Resoluções corretas para o item 5 do problema dos colares	85
Figura 48. Resoluções corretas para o item 6 do problema dos colares	86
Figura 49. Resoluções corretas para o item 7 do problema dos colares	86
Figura 50. Resoluções corretas para o item 8 do problema dos colares	87
Figura 51: Foto tirada pela professora durante o preenchimento da tabela	90
Figura 52. Resoluções dadas para o item 3 do Problema dos Quadrados	90
Figura 53. Resoluções dadas para o item 4 do Problema dos Quadrados	91
Figura 54. Resoluções dadas para o item 5 do Problema dos Quadrados	92
Figura 55. Resoluções dadas para o item 6 do Problema dos Quadrados	93
Figura 56: Foto tirada pela professora durante o preenchimento da tabela	94
Figura 57. Resoluções dadas para o item 7 do Problema dos Quadrados	94
Figura 58. Resoluções dadas para o item 8 do Problema dos Quadrados	95

Figura 59. Resoluções dadas para o item 9 do Problema dos Quadrados	96
Figura 60. Resoluções dadas para o item 10 do Problema dos Quadrados	96
Figura 61. Resoluções dadas para o item 1 do Mais Situações-problema	101
Figura 62. Resoluções corretas dadas para o item 2 do Mais Situações-problema	102

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
CAPÍTULO 1 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
1.1 O raciocínio proporcional	16
1.2 As estratégias dos alunos	21
1.3 As dificuldades dos alunos	30
1.4 Os caminhos apontados	32
1.5 A abordagem da proporção nos livros didáticos e em alguns documentos oficiais	33
CAPÍTULO 2 - A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS	37
2.1 Conceitos	37
2.2 O conjunto das Situações	39
2.3 O conjunto dos Invariantes operatórios	41
2.4 O conjunto das Representações simbólicas	44
2.5 O campo conceitual multiplicativo	45
CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA	49
CAPÍTULO 4 – ANÁLISE <i>A PRIORI</i> DA EXPERIÊNCIA	52
1ª etapa: Avaliação de desempenho	52
2ª etapa: A primeira situação-problema (Problema das urnas)	53
3ª etapa: Avaliação 1 (Problema do colar)	61
4ª etapa: A segunda situação-problema (Problema dos quadrados)	62
5ª etapa: Avaliação 2 (Sim ou não? Diga como pensou)	65
6ª etapa: Mais situações-problemas	66
CAPÍTULO 5 - A IMPLEMENTAÇÃO DA EXPERIÊNCIA	69
1ª etapa: Avaliação de desempenho	70
2ª etapa: A primeira situação-problema (Problema das urnas)	78

3ª etapa: Avaliação 1 (Problema do colar)	81
4ª etapa: A segunda situação-problema (Problema dos quadrados)	88
5ª etapa: Avaliação 2 (Sim ou não? Diga como pensou)	97
6ª etapa: Mais situações-problemas	100
 CAPÍTULO 6 - ANÁLISE A <i>POSTERIORI</i> E VALIDAÇÃO DA EXPERIÊNCIA	 108
1ª parte: a teoria dos campos conceituais e as situações-problema propostas	108
2ª parte: a revisão da literatura e as estratégias utilizadas pelos alunos durante a sequência didática	110
 CONSIDERAÇÕES FINAIS	 113
 REFERÊNCIAS	 115

INTRODUÇÃO

A escolha pela linha de pesquisa em ensino e aprendizagem em Ciências e Matemática se fez pelo fato de a mestrandia já ter realizado alguns trabalhos nesta área e ter se identificado com os temas relativos ao desenvolvimento do raciocínio proporcional em alunos do Ensino Fundamental. Enquanto a mesma era licencianda do curso de Matemática da Facip/UFU existia dúvidas, questionamentos, inquietudes e preocupações acerca da formação de conceitos matemáticos na criança.

Ainda durante a graduação, a autora, teve a oportunidade de desenvolver trabalhos com os conceitos de fração. Como conclusão de curso desta etapa acadêmica, foi apresentado o trabalho intitulado: Um estudo sobre o conhecimento de alunos de 7º ano acerca do conceito de frações, sob orientação da professora Odaléa Aparecida Viana. O desenvolvimento deste trabalho, fez com que a autora tivesse maior interesse em trabalhar com o tema em questão.

Quando teve início o exercício profissional como docente, as interrogações se multiplicaram e ficou evidente o desejo de pesquisar e tentar responder algumas perguntas a respeito da formação conceitual em matemática. No percurso profissional, vale destacar o trabalho com o conceito de razão enquanto professora supervisora no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), o que contribuiu para o surgimento de mais inquietudes e questionamentos frente ao tema.

Sendo assim, um dos motivos para a realização deste trabalho é o desejo de contribuir para a construção do conhecimento matemático pelos alunos do Ensino Fundamental e também o de tornar suas atitudes mais favoráveis frente a esse conteúdo.

Durante a realização das disciplinas vivenciadas no programa de Mestrado, despertou-se um interesse maior em desenvolver uma prática que levasse o aluno a aprender conceitos matemáticos – e não apenas técnicas. Neste viés, com base na experiência profissional desta autora, percebeu-se que um dos conteúdos nos quais os alunos parecem ter pouco entendimento é o de “razão e proporção”, tema deste trabalho.

Os conceitos de razão e proporção fazem parte do bloco de conteúdos denominado por Números e Operações, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998). O documento sugere que os alunos no terceiro ciclo do Ensino Fundamental (6º e 7º ano) devam reconhecer números racionais em diferentes contextos e saibam explorar situações-problema que indicam a relação parte/todo, quociente, razão ou operador e também aqueles que envolvem a ideia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens, pelo uso

de estratégias não convencionais. De maneira semelhante, na proposta no Estado de Minas Gerais, intitulada Currículo Básico Comum - CBC (MINAS GERAIS, 2014) o conteúdo de razão e proporção aparece como sendo um tópico a ser trabalhado dentro do tema variação de grandezas.

O conceito de razão e proporção tem sido tratado por vários autores nacionais e internacionais da área de Educação Matemática, conforme pode ser visto em Campos e Rodrigues (2007), Costa e Ponte (2008), Lamon (2005 apud COSTA & PONTE, 2008), Lesh et al. (1998), Morton (2014), Ponte e Marques (2011), Silvestre e Ponte (2009), Spinillo (1992), Silva et al. (2011), Torre et al. (2013), entre outros. No entanto, na pequena revisão bibliográfica que pôde ser realizada, foram encontrados poucos trabalhos com sugestões de atividades a serem realizadas em sala de aula (COSTA, 2007; PONTE et al., 2010; SILVESTRE, 2006).

O conceito de razão e proporção faz parte das chamadas estruturas multiplicativas, conforme a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. A grande maioria dos trabalhos citados tem por base essa teoria, que define o conceito como sendo um conjunto envolvendo situações (S), invariantes operatórios (I) e representações simbólicas (R), conforme Vergnaud (1990). Nesta perspectiva, a teoria sustenta que os alunos empregam esquemas cognitivos para resolver certos problemas, destacando-se, para o trabalho aqui exposto, o esquema de covariação e o de invariância entre as grandezas envolvidas nas situações que lhes são propostas.

Os estudos citados indicam que o raciocínio proporcional dos estudantes é evidenciado nas estratégias adotadas por eles quando resolvem problemas que requerem as estruturas multiplicativas – que dizem respeito aos conceitos relativos à multiplicação e à divisão. Com base na literatura, considera-se que alunos do sexto ano do Ensino Fundamental conseguiriam resolver problemas de regra de três simples sem utilizar técnicas mecanizadas e distinguiriam, inclusive, grandezas não proporcionais. Considera-se também que atividades que levam os alunos do sexto ano a resolver certos problemas desse tipo por meio de relações estabelecidas por eles próprios contribuem para o desenvolvimento do raciocínio proporcional, favorecendo trabalho com razões e proporções – tema que poderia não ficar restrito a um item do conteúdo do sétimo ano.

Neste sentido, a proposta do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática vem ao encontro das inquietudes da mestranda, especialmente a da linha de pesquisa que enfoca os fatores psicológicos cognitivos que influenciam a formação de

conceitos em matemática. A pesquisa realizada no âmbito do mestrado profissional visa o desenvolvimento e aperfeiçoamento profissional, priorizando as ações direcionadas para a intervenção nas práticas de sala de aula e a elaboração de um produto educacional (GOMES, 2013). Este, entre outras formas, pode ser apresentado na forma de uma sequência didática.

Desta forma, a pergunta diretriz desse trabalho é: uma sequência didática com base em situações-problema que favoreçam o estabelecimento das relações de covariação e invariância de grandezas pode contribuir para a formação do raciocínio proporcional de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental?

Assim, elaborou-se uma sequência didática com possibilidade de contribuir com o desenvolvimento do raciocínio proporcional, sendo direcionada aos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. A proposta tem características da Engenharia Didática na perspectiva de Artigue (1990, 1996) citada por Almouloud e Coutinho (2008) e por Carneiro (2005). Trata-se de uma metodologia de pesquisa baseada em "realizações didáticas" em sala de aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Propõe-se a apresentação de situações-problema acompanhadas de atividades de modo a favorecer o emprego de representações simbólicas e de esquemas cognitivos, destacando-se as relações de covariação e de invariância, próprios das estruturas multiplicativas, com base na teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990).

CAPÍTULO 1

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1 O raciocínio proporcional

As ideias de razão e de proporcionalidade podem ser inseridas no âmbito da chamada alfabetização matemática, ou alfabetização numérica, na perspectiva de Spinillo (2006). A autora utiliza o sentido de número para amparar o que seria uma pessoa alfabetizada numericamente, indicando que os números fazem parte de nosso cotidiano, já que:

Quantificamos, medimos e comparamos nas mais distintas situações: dividimos uma quantidade de objetos entre pessoas, estimamos a velocidade de um carro que se aproxima ao atravessarmos a rua, medimos a distância entre objetos, estabelecemos uma razão entre preço e quantidades de produtos aos comprarmos alimentos no supermercado e na feira, contamos os pontos em um jogo de videogame, estimamos o tempo gasto para realizar uma atividade etc. (SPINILLO, 2006, p.83).

Com relação aos números racionais, pode-se buscar apoio nas ideias de Caraça (1952), quando este revela que na construção do conceito foram mantidos os princípios básicos que orientam a evolução de toda a Matemática: o princípio da extensão, em que a construção de um novo conhecimento deve englobar o conhecimento já existente, mantendo-o válido; e o princípio da economia, onde as operações usadas para resolver problemas na situação antiga devem ser as mesmas operações usadas para resolver problemas análogos na nova situação.

Assim, “os casos de medição que tinham como resultado um número natural devem ser considerados casos particulares de medição nesse novo conjunto numérico, que será denominado conjunto dos números racionais” (CAMPOS & RODRIGUES, 2007, p. 72).

Campos e Rodrigues (2007) ainda ponderam que, apesar de os números racionais englobarem os naturais, são muitas as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do novo conjunto e estas têm merecido atenção por parte dos pesquisadores em educação matemática.

Thomas Kieren (1988, apud CAMPOS & RODRIGUES, 2007) considerou que o conceito de número racional pode ser construído a partir da articulação de quatro subconstrutos: 1) quocientes; 2) operadores; 3) medidas; 4) razões.

Na exposição teórica a seguir tem-se foco no número racional como representação de uma razão.

O conceito de razão está inserido no campo de conhecimento relativo à proporcionalidade, que é um tema de grande aplicação na Matemática, em outras áreas do conhecimento e em diversas situações da atividade humana.

Vários autores nacionais têm se dedicado ao estudo do tema, conforme pode ser visto em Campos e Rodrigues (2007), Silva et al. (2011) e Spinillo (1992, 1993, 2002). Entre os internacionais, podem ser citados os trabalhos de Costa (2007), Costa e Ponte (2008), Lesh et al. (1998), Morton (2014), Silvestre (2006), Silvestre e Ponte (2009), Ponte et al. (2010), Ponte e Marques (2011) e Torre et al. (2013).

Silvestre e Ponte (2009) afirmam que o termo “proporcionalidade” é usado de forma ambígua para designar proporções, razões, proporcionalidade direta e raciocínio proporcional.

Já Costa e Ponte (2008) enfatizam que o raciocínio proporcional é fundamental na resolução de problemas de muitas áreas do saber e trata-se de um tópico que permite estabelecer conexões com o cotidiano dos alunos, com outros tópicos matemáticos e com outras disciplinas e que constitui um elemento importante da iniciação dos alunos ao pensamento algébrico.

Lamon (2005 apud COSTA & PONTE, 2008) afirma que o raciocínio proporcional é a condição necessária para a compreensão de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade. Para o autor, o conceito de raciocínio proporcional vai além da mecanização de estratégias formais de resolução de problemas, estando associado à capacidade de analisar conscientemente as relações entre quantidades; esta capacidade é evidenciada por argumentos e explicações sobre as relações proporcionais.

Segundo Silvestre e Ponte (2009), quando o ensino é focado no treino de procedimentos e na verbalização de regras – sem desenvolver a compreensão da estrutura matemática da relação proporcional –, cria-se nos discentes a ilusão que todas as relações são proporcionais.

O raciocínio proporcional implica na compreensão de uma relação constante entre duas grandezas, ou seja, a invariância; e na noção de que estas grandezas variam em conjunto, ou seja, covariância. Lamon (2005 apud COSTA & PONTE, 2008) aponta a dificuldade dos alunos em compreender a natureza multiplicativa das situações proporcionais.

Neste mesmo viés, Lesh et al. (1988) apontam que o raciocínio proporcional é uma forma de raciocínio matemático que envolve o sentido de covariância e múltiplas comparações e também a capacidade para reunir e processar mentalmente diversos conjuntos

de informação. Este raciocínio está relacionado com inferência e com predição, envolvendo o pensamento qualitativo e quantitativo.

Os autores concluem que a principal característica do raciocínio proporcional é aquela que envolve mais a relação entre duas relações, ou seja, relações de segunda ordem, do que a simples relação entre dois objetos concretos ou duas grandezas diretamente perceptíveis.

Spinillo (1993, 2002) agrupa as tarefas que avaliam o conceito de proporção em duas classes: tarefas de incógnita e tarefas de comparação. As tarefas utilizadas variam em função das dimensões envolvidas: complementares e não complementares; as complementares são referentes a quantidades – contínuas ou discretas – que são partes que juntas formam o mesmo todo, ou seja, uma vez que uma das quantidades aumenta a outra diminui e vice-versa. Já as dimensões não complementares são quantidades que não constituem o mesmo todo.

Para Spinillo (1992, 1993), o raciocínio proporcional envolve a capacidade de lidar com as relações de primeira ordem e as relações de segunda ordem. Neste sentido, sabendo que as proporções requerem comparações entre relações, a autora julgou importante saber que tipo de relações as crianças são capazes de estabelecer desde muito cedo. Os resultados de sua pesquisa realizada com sujeitos de 4 a 6 anos permitiram afirmar que as crianças podem fazer julgamentos proporcionais entre razões quando as relações de primeira ordem envolvem relações simples como "maior/menor que" e "igual a".

Ao discutir sobre os níveis de complexidade identificados nas comparações realizadas pelas crianças, Spinillo (1992) afirma que:

Proporção requer estruturar relações entre relações (relações de segunda ordem) que envolvem comparações entre duas (ou mais) relações de primeira ordem. As relações de primeira ordem podem ser parte-todo ou parte-parte, sendo essas últimas mais fáceis que as primeiras. Comparações entre duas relações parte-parte podem ser de dois tipos: iguais ou diferentes (SPINILLO, 1992, p.307).

Spinillo (1992) esclarece que as relações parte-todo estão presentes em comparações entre uma classe e uma de suas subclasses (como na tarefa piagetiana de inclusão de classes – rosas x flores) e, em termos matemáticos, referem-se ao conceito de fração. Já as relações parte-parte que envolvem comparações entre duas subclasses (rosas x margaridas – juntas se inserem na a classe das flores) referem-se ao conceito de razão. A Figura 1 exemplifica as relações parte-parte e parte-todo de um inteiro contínuo e de um inteiro discreto e que são referentes às relações de primeira ordem envolvidas no raciocínio proporcional.

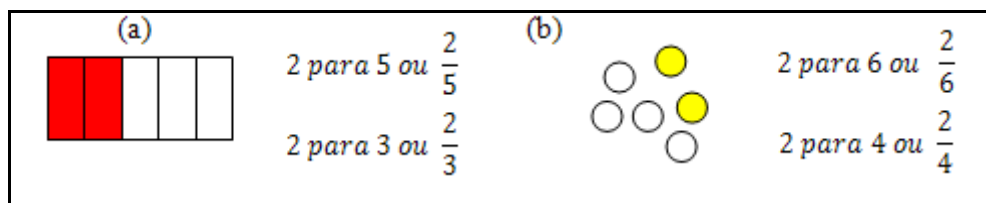


Figura 1. Relação parte-parte e parte-todo para as situações com inteiro contínuo (a) e discreto (b)
Fonte: Elaboração da autora

Já a Figura 2 ilustra quatro situações características em que é necessário o raciocínio proporcional: são misturados copos de concentrado (A, em vermelho) e de água (B, em branco) em quantidades variadas e busca-se avaliar qual suco será mais forte, mais fraco ou de sabor igual a partir de comparações parte-parte de inteiros discretos (simbolizadas por $>$, $<$ ou $=$).

Qual dos dois sucos I e II é mais forte?				
I	$A < B$	$A > B$	$A > B$	$A < B$
II	$A' > B'$	$A' = B'$	$A' > B'$	$A' < B'$
Qual dos dois sucos I ou II tem o mesmo sabor do suco III?				
III	$A < B$	$A = B$	$A > B$	$A < B$

Figura 2. Exemplos de relações de primeira e de segunda ordem em situações que requerem o raciocínio proporcional
Fonte: Elaboração da autora

Lesh et al. (1988) ainda apontam uma outra perspectiva, afirmando que o raciocínio proporcional deve envolver a relação linear entre duas variáveis. Desta forma, questões caracterizadas por relações do tipo $y=mx$ são consideradas como tarefas sobre proporções.

Os autores destacam sete tipos de tarefa em que se pode identificar o raciocínio proporcional do estudante.

1. Problemas de valor omissos, em que são dados três dos valores que compõem uma proporção e é pedido o quarto.
2. Problemas de comparação, em que são dadas duas razões e pede-se para indicar qual é maior, menor ou se são iguais.

3. Problemas de transformação, em que é necessário alterar valores de certa quantidade para comparar depois duas razões ou alterar uma quantidade de forma a obter uma igualdade entre duas razões.
4. Problemas de valor médio, em que são dados dois valores e é pedido para encontrar o terceiro.
5. Proporções que envolvem a conversão entre razão, taxa e frações, ou seja, em que os valores são representados numa determinada forma e se pede a determinação dos restantes valores.
6. Proporções que envolvem unidades de medida assim como números.
7. Problemas de conversão entre sistemas de representação, nos quais, a partir dos dados representados num determinado sistema, se pede a sua representação noutro sistema mantendo a relação entre si.

Em seu estudo, Torre et al. (2013) buscam identificar o raciocínio proporcional de estudantes. Analisando diferentes interpretações e examinando estratégias de resolução de problemas empregadas por estudantes, os autores exploram o desenvolvimento do raciocínio proporcional desde a compreensão inicial do conceito.

Na mesma linha, Silvestre (2006), analisa o modo como se desenvolve a aprendizagem da proporcionalidade nos alunos de 6º ano, dando destaque às atividades de investigação e de resolução de problemas em situações contextualizadas e recorrendo ao uso da folha de cálculo. Ao tentar verificar se os alunos distinguem situações de proporcionalidade direta de situações onde tal relação não existe, quais sistemas de representação utilizam e que tipo de estratégia empregam na resolução de tarefas envolvendo proporcionalidade direta, percebeu que os discentes distinguem situações em que existe uma relação proporcional daquelas em que tal relação não existe, e se mostram capazes de mobilizar conhecimento adquirido ao longo do desenvolvimento da proposta pedagógica.

Sendo assim, Silvestre (2006), embasado em outros autores, considera que o raciocínio proporcional envolve três condições: distinções de relações de natureza proporcional de relações que não o são; compreensão da natureza matemática das relações proporcionais e capacidade de resolução de vários tipos de problemas.

Kaput e West (1994 apud SILVESTRE & PONTE, 2009) propõem três níveis de competência informal de raciocínio proporcional que se referem a padrões de raciocínio que suportam a identificação do valor omissso, sem realçar a manipulação sintática do formalismo algébrico.

O nível I é marcado pela utilização da estratégia *build-up/build down*, que inclui a distinção das variáveis A e B quantificadas no contexto do problema. No exemplo dado pelo autor, se A representa lápis e B centavos, há construção da correspondência semântica entre as variáveis, ou seja, 4 lápis correspondem a 10 centavos. Também existe a construção de relação de correspondência entre as unidades e a distinção entre o terceiro valor numérico e o valor omisso; estes são ligados por meio de um referencial das variáveis, ou seja, se 4 lápis correspondem a 40 centavos, então 5, 6, 7, ...lápis correspondem a 50,60,70,... centavos.

No nível II, ainda utilizando a estratégia *build-up/build down*, o aluno divide as quantidades A e B dadas para obter o valor unitário, sendo este posteriormente multiplicado pelo terceiro valor numérico do problema. Por exemplo, se 4 lápis correspondem a 40 centavos, então 7 lápis irão corresponder a $40:4=10$ e $7 \times 10 = 70$ centavos.

Já no nível III a abordagem é por meio do fator unitário, ou seja, os alunos dividem a variável do valor omisso pela outra variável e depois multiplicam o fator unitário pelo terceiro valor numérico para determinar o valor omisso. Por exemplo, se são necessárias 15 latas para pintar 18 cadeiras, então com 25 latas é possível pintar $18/15=6/5$ e $6/5 \times 25=30$ cadeiras.

1.2 As estratégias dos alunos

Vários estudos buscam analisar o raciocínio proporcional dos estudantes observando as estratégias utilizadas por eles em tarefas específicas.

Uma estratégia bastante comum que pode ser identificada na resolução de problemas de valor omisso é o uso do produto cruzado com recurso à regra de três simples ou à propriedade fundamental das proporções, conforme verificado nas pesquisas de Costa e Ponte (2008). Outra estratégia empregada pelos estudantes foi identificada por Campos e Rodrigues (2007) como o uso de taxa unitária, ou seja, os alunos tentam responder à questão “quanto para um?”.

Parafraseando Silvestre (2006), Costa e Ponte (2008) afirmam que:

...o que leva o aluno a optar por uma certa estratégia parece depender da interpretação que ele faz do problema, do seu conhecimento sobre os números e das relações que consegue estabelecer de imediato. Assim, as estratégias não parecem ser hierarquizadas ao ponto de revelar ou não um raciocínio proporcional mais sofisticado e muito está ainda por investigar a este nível (COSTA & PONTE, 2008, p. 68).

Com relação à estratégia de produto cruzado, Lesh et al. (1988) constataram que esta é mal compreendida pelos alunos, que raramente é gerada naturalmente de um método de

resolução frequentemente usada pelos alunos mais para evitar o raciocínio proporcional do que para facilitar. Dessa forma, a utilização destes procedimentos impossibilitaria o uso do raciocínio proporcional, o que levou os autores a adotar a expressão problemas de proporção e não problemas sobre raciocínio proporcional.

Pittalis et al. (2003 apud COSTA & PONTE, 2008) analisaram as estratégias de 15 alunos do 6º ano, antes do ensino formal das proporções. Para os autores, a utilização correta de determinadas estratégias depende de fatores como o tipo de tarefa e a relação numérica entre os dados.

Assim, quando existe uma relação inteira entre os elementos da mesma grandeza tende a haver a aplicação de uma estratégia relacionando esses dados – relação interna (*within relation*) – recorrendo ao raciocínio escalar; quando a relação inteira é entre elementos de grandezas diferentes, tende a haver outro tipo de estratégia – relação externa (*between relation*) – recorrendo ao raciocínio funcional. [...] as estratégias dominantes baseiam-se em raciocínios escalares porque muitos problemas de razão e proporção podem ser resolvidos por adições sucessivas (COSTA & PONTE, 2008, p. 67).

Relação interna (<i>within relation</i>)	Relação externa (<i>between relation</i>)
$\times 4 \left(\frac{1}{4} = \frac{2}{8} \right) \times 4$	$\begin{array}{c} \times 2 \\ \curvearrowright \\ \frac{1}{4} = \frac{2}{8} \\ \curvearrowleft \\ \times 2 \end{array}$

Figura 3. Exemplos de *within relation* e *between relation*
Fonte: Elaboração da autora

Silvestre e Ponte (2009), embasados em Post et al. (1988) e por Cramer et al. (1993), trazem ainda as estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade direta:

(i) Razão unitária, também conhecida por “quanto para um”, identificada como a estratégia mais intuitiva atendendo ao fato dos alunos a usarem desde os primeiros anos de escolaridade (cálculo de razões unitárias em problemas de divisão e cálculo de múltiplos das razões unitárias em problemas de multiplicação); (ii) Fator de mudança ou fator escalar [...], conhecida por “tantas vezes como”, estratégia que está condicionada a aspectos numéricos dos problemas mas está presente no repertório de estratégias das crianças; (iii) Comparação das razões, associada a problemas de comparação, que permite comparar as razões unitárias através de duas divisões; e (iv) Algoritmo do produto cruzado, também conhecida como “regra de três simples”, que, embora eficiente, é um processo mecânico desprovido de significado no contexto dos problemas (SILVESTRE & PONTE, 2009, p.2-3).

Post et al. (1988 apud SILVESTRE & PONTE, 2009) também apontam a estratégia da interpretação gráfica, na medida em que os gráficos podem ser usados para identificar razões equivalentes ou para identificar omissão do valor desconhecido em problemas de valor omisso.

Ao abordar a importância do referencial de “metade” e o desenvolvimento do conceito de proporção, Spinillo (1992), analisa e interpreta o desempenho de crianças em diversas tarefas de proporção à luz da distinção entre as relações de primeira e de segunda ordem. A autora examina a natureza das relações de primeira ordem em tarefas de proporção que envolvem dimensões complementares e encontrou que as relações de primeira ordem tanto podem ser estabelecidas através de comparações parte-parte como através de comparações parte-todo, e que as crianças são capazes de resolver problemas de proporção quando as relações de primeira ordem envolvem comparações parte-parte.

Um exemplo citado por Spinillo (1992) é uma tarefa em que as dimensões (A e B) são complementares e representadas não numericamente. A dimensão A de um retângulo pintada em azul e a dimensão B desse mesmo retângulo correspondente à parte pintada em branco. A criança comparando dois retângulos que variam na razão A: B e sendo solicitada a determinar qual deles está representado em um pequeno cartão que contém a razão A: B que um dos retângulos, as comparações iniciais estabelecidas entre A e B em cada retângulo são relações de primeira ordem, ou seja, azul maior que branco ($A > B$), azul menor que branco ($A < B$), azul igual a branco ($A = B$).

Agora se tomarmos outras situações propostas por Spinillo (1992):

- (1) um retângulo tem $A > B$ e o outro $A' < B'$;
- (2) um retângulo tem $A > B$ (ou $A < B$) e o outro $A' = B'$;
- (3) um retângulo tem $A > B$ e o outro $A' > B'$;
- (4) um retângulo tem $A < B$ e o outro $A' < B'$.

Essas situações podem ser exemplificadas na Figura 4.

Escolher qual retângulo (I ou II) está representado no cartão..				
I	Situação 1 	Situação 2 	Situação 3 	Situação 4 
	$A > B$	$A > B$	$A > B$	$A < B$
II				
	$A' < B'$	$A' = B'$	$A' > B'$	$A' < B'$
CARTÃO				

Figura 4. Exemplos de relações de primeira e de segunda ordem estabelecidas através de comparações parte-parte em inteiros contínuos
Fonte: Elaboração da autora

As comparações (1) e (2) são fáceis de ser estabelecidas porque envolvem duas relações de primeira ordem diferentes. Segundo Spinillo (1992), neste caso, a criança seria capaz de estruturar as relações de segunda ordem quando as relações de primeira ordem são diferentes. Entretanto, esta mesma criança pode ter dificuldades em estabelecer comparações entre duas relações de primeira ordem iguais, como as situações (3) e (4). Para a autora essa dificuldade decorreria do fato de que a relação entre as duas quantidades (A e B) seria a mesma nas duas relações de primeira ordem.

Assim, podemos supor que existem diferentes níveis de complexidade quanto ao estabelecimento de relações de segunda ordem, mesmo quando as relações de primeira ordem envolvem comparações parte-parte. Esta complexidade depende se as relações de primeira ordem são iguais ou diferentes (SPINILLO, 1992, p.308).

Segundo a autora, isto acontece porque entre relações de primeira ordem diferentes, a criança pode fazer julgamentos proporcionais usando códigos relativos, ou seja, "maior do que", "menor do que", "maior/menor do que", "igual a". Já nas relações de primeira ordem semelhantes a criança precisa usar códigos absolutos que são mais sofisticados que os códigos relativos.

Voltando as situações apresentadas, na situação (1) um dos retângulos, por exemplo, tem menos que a metade em azul ($A < B$) e o outro tem mais que a metade em azul ($A' > B'$). No caso (2) um dos retângulos tem mais/menos que metade em azul ($A > B$ ou $A < B$) e outro metade azul e metade branco ($A = B$). No caso (3) ambos os retângulos tem mais que metade em azul ($A > B$ e $A' > B'$) e no caso (4) ambos os retângulos tem menos que metade em azul

($A < B$ e $A' < B'$). Nesta abordagem é possível verificar que no caso (1) as comparações entre relações atravessam o limite do referencial de metade, no caso (2) as comparações explicitamente envolvem este referencial de metade. Já nos caso (3) e (4) as comparações ocorrem dentro dos limites do referencial de metade.

Para Spinillo (1992) as crianças fazem julgamentos sobre proporção quando as comparações atravessam os limites de metade (situação 1 e 2) ou explicitamente envolvem este referencial (situação 3 e 4).

Tratando da importância do referencial de metade em julgamentos sobre proporções, Spinillo (1992) aponta dois aspectos: as crianças podem usar os limites entre "mais que metade", "menos que metade" e "igual a metade" ao comparar dimensões complementares nas relações de primeira ordem; e as crianças tratam "metade" inicialmente em termos de relações parte-parte antes de fazê-lo em termos de relações parte-todo.

Com relação ao primeiro aspecto, Siegler e Vago (1978 apud SPINILLO, 1992) ao realizarem um experimento com recipientes que apresentavam $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ de água e cheios até o topo perceberam que o uso dos termos "metade" e "mais/menos que metade" pode ter encorajado a criança a tratar as relações de primeira ordem como comparações parte-parte (água e espaço vazio) sem necessitar estabelecer comparações parte-todo (água e volume total do copo) que são mais complexas que as primeiras; e ainda que esses termos referem-se ao conceito de "metade", o qual foi usado para estabelecer as relações de primeira ordem. Uma vez lidando com as relações de primeira ordem por meio do referencial de "metade" não era um problema para a criança estruturar as relações de segunda ordem essenciais para julgamentos proporcionais.

Para Siegler e Vago (1978 apud SPINILLO, 1992), as crianças passaram efetivamente a fornecer julgamentos proporcionais porque foram ensinadas a estabelecer relações de segunda ordem.

O trabalho com o referencial de "metade" foi observado no desempenho das crianças nos estudos de Noelting (1980 apud SPINILLO, 1992), os sujeitos tinham que determinar qual dentre duas bebidas (feitas de copos de água e de copos de suco de laranja) tinha um gosto mais forte de laranja, ou se o sabor era igual nas duas. O autor observou que poderiam classificar três tipos de razões, sendo elas: suco:água, onde as comparações atravessam o referencial "metade" (mais suco que água, mais água que suco); comparações que explicitamente envolvem o referencial "metade" (metade de água e metade de suco em uma

das bebidas ou em ambas); e comparações que não atravessam este referencial (ambas as bebidas têm mais suco que água ou mais água que suco).

Segundo nossa análise, as crianças [...] usavam os limites entre "mais que metade" e "menos que metade" como estratégia para fazer julgamentos de proporção. Entretanto, o uso de "metade" como estratégia em julgamentos proporcionais foi apenas experimentalmente examinado [...] em uma série de investigações com crianças entre 4 e 8 anos de idade, onde se testou a hipótese de que "metade" é uma categoria limite importante nos julgamentos iniciais que as crianças fazem sobre proporção (SPINILLO, 1992, p.311).

Nos estudos de Spinillo (1992), o aluno deveria escolher, entre duas alternativas, a que apresentava o modelo, estas por sua vez, consistiam em duas caixas de madeira com blocos (azuis e brancos) também em madeira. Os blocos eram arranjados de modo a formar uma parte azul (A) e outra branca (B). O modelo era um cartão retangular também dividido em partes azul e branca. Percebeu-se que crianças a partir de 6 anos de idade apresentavam uma noção sobre proporção e que “metade” era um referencial importante nesses julgamentos iniciais; elas estabeleciam relações de segunda ordem usando este referencial em termos de relação parte-parte.

Ainda evidenciando a importância do referencial de metade em julgamentos sobre proporções, Spinillo (1992) encontrou que as crianças tratam "metade" inicialmente em termos de relações parte-parte antes de fazê-lo em termos de relações parte-todo. O referencial de “metade” pode ser estabelecido em termos de relação parte-parte, por exemplo, razão – metade azul e metade branco ou mais que metade em azul e menos que metade em branco, e em termos de relação parte-todo, por exemplo, fração – metade do retângulo tem azul. Mas, as crianças usam “metade” em termos parte-parte antes de usarem este conceito em termos parte-todo.

Parrat-Dayana (1982 apud SPINILLO, 1992) explorou o conceito de metade em crianças de 4 a 12 anos de idade. A ação consistia na comparação de quantidade de líquido em recipientes de diferentes formas e tamanhos: A e A' de mesmo tamanho, E mais fino e alto que A e A' e L mais baixo e mais largo que A e A'.

O recipiente A continha um líquido vermelho e a criança tinha que encher o recipiente A' com um líquido verde na mesma quantidade que A. O nível do líquido era marcado no próprio recipiente, e a criança era então solicitada a despejar metade do conteúdo de A em E e metade de A' em L. Após este procedimento era solicitada a comparar a quantidade de líquido

em E e L, explicando quanto líquido tinha em cada um, justificando porque o nível de líquido era diferente, uma vez que, eles tinham a mesma quantidade de líquido para beber.

Houve a classificação dos sujeitos em quatro níveis:

Nível I (4-5 anos): "Metade" significa uma parte pequena de uma quantidade maior.

Nível II (5-7 anos): "Metade" é estabelecida em termos de duas partes iguais sem fazer referência ao volume total de líquido no recipiente original. Para obter "metade", a criança igualava a quantidade de líquido nos dois recipientes.

Nível III (8-10 anos): "Metade" é definida em relação ao volume total de líquido nos dois recipientes originais (parte-todo). A criança mencionava a parte (metade) e o todo (volume do líquido nos recipientes originais). O conceito é relacionado ao objeto do qual a "metade" foi extraída.

Nível IV (11 anos em diante): "Metade" é compreendida em termos parte-todo, e o sujeito reconhece a equivalência das duas frações apesar de diferenças nos níveis de líquido.

Para Spinillo (1992), a ideia de “metade” pode ser estruturada tanto em termos de relação parte-parte como de relação parte-todo, ou seja, “metade” pode ser estabelecida sem referência ao todo, apenas em termos de relação entre duas partes complementares. O conceito de “metade” parece ser inicialmente compreendido em termos de parte-parte (crianças entre 5 e 7 anos), antes que seja expresso em termos de uma relação parte-todo (crianças entre 8 e 10 anos). Sendo assim pode-se supor que as crianças inicialmente usam "metade" em termos parte-parte em seus julgamentos sobre proporções antes mesmo de compreenderem "metade" em termos de relações parte-todo.

Desta forma, o referencial de “metade” consiste em uma categoria limite que desempenha papel crucial na emergência do raciocínio proporcional em crianças.

Estudos mais recentes acerca das estratégias utilizadas por alunos na solução de problemas envolvendo proporções podem ser encontrados em Costa (2007), Morton (2014) e Torre et al (2013).

Costa (2007) identificou as estratégias: *building-up*, considerada como sendo de natureza aditiva; as estratégias multiplicativas com procedimentos escalares ou funcionais; e a estratégia do produto cruzado ou regra de três simples.

Morton (2014) analisou os padrões de estratégia e erros na resolução de problemas envolvendo o raciocínio proporcional e o nível de compreensão de 58 meninas e meninos Africano-americanos.

A tarefa proposta pelo autor foi a seguinte: Uma classe tem 28 alunos. A razão de meninas para meninos é de 4 para 3. Quantas meninas estão na turma? Explicar por que você acha que sua resposta está correta.

As estratégias mais comuns usadas pelos alunos para localizar o número de meninas na sala de aula foram por meio da utilização do princípio aditivo e multiplicativo, ou seja, $4 + 3 = 7$, $4.4 + 3.4 = 16 + 12 = 28$. Segundo o autor, a maioria dos estudantes não foi capaz de resolver efetivamente a tarefa e utilizou estratégias que não demonstraram entendimento de fração representando relações de parte-todo nem de razão representando relações de parte-parte ou parte-todo. Outro resultado do estudo de Morton (2014) foi que estudantes do sexo masculino e feminino utilizaram estratégias similares de resolução e demonstraram níveis semelhantes de compreensão.

Em seus estudos, Torre et al. (2013), identificaram as estratégias:

1. Construção abreviada, por exemplo, abreviação de adições repetidas com a multiplicação.
2. Ajuste de atraso, alunos ajustam a estratégia de construção através de uma estratégia de ajuste inicial, por exemplo, 14 maçãs custam R\$10,00, então 28 maçãs custam R\$20,00, 7 custam R\$5,00, logo 35 maçãs custam R\$25,00.
3. Fator de mudança para resolver problemas de raciocínio proporcional com relação de números inteiros, por exemplo, “sete maçãs custam \$5,00. Quanto custa 21 maçãs?” tem-se que há 3 vezes mais que 7 maçãs, então 21 maçãs custam 3 vezes mais do que 7 maçãs, ou seja,

$$\begin{array}{r} \text{x } 3 \\ \hline 7 \quad 21 \\ 5 \quad 15 \\ \hline \text{x } 3 \end{array}$$

Há ainda, dois tipos de raciocínio no fator de mudança:

- método escalar (dentro do fator de mudança), quando compara-se duas quantidades dentro de um espaço de medida e aplica um fator escalar para encontrar uma quantidade que falta em outro espaço de medida, por exemplo, uma fator escalar 3×7 maçãs são 21 maçãs.
- Método funcional (entre o fator de mudança), entre uma quantidade no espaço de medida e sua quantidade correspondente em outro espaço, por exemplo, uma relação funcional entre \$5,00 e 7 maçãs.

Lamon (1994 apud SILVESTRE & PONTE, 2009) também classifica as estratégias de raciocínio dentro e entre variáveis, como é apresentado na literatura sobre raciocínio proporcional e estruturas multiplicativas, diferenciando entre raciocínios de natureza escalar (ocorre quando se realizam transformações dentro da mesma variável) e o funcional (ocorre quando se estabelecem relações entre duas variáveis diferentes).

Análogo a Torre et al. (2013) e Lamon (1994 apud SILVESTRE & PONTE, 2009), Ponte et al. (2010) apontam o princípio multiplicativo por meio da covariação de grandezas (refere-se às relações multiplicativas dentro das variáveis) e da invariância de grandezas (refere-se a as relações de multiplicação entre as variáveis). Para exemplificar, apresenta-se a situação: para cada 10 pães de queijo comprados na padaria ganham-se 2 bombons; se eu comprar 20 pães ganharei 4 bombons. Pode-se entender a situação utilizando-se o esquema de covariação, ou seja, dobrando-se a quantidade de pães dobra-se a quantidade de bombons (ou ao dividir a quantidade de pães por dois, também se divide por dois a quantidade de bombons). Já o esquema de invariância permite entender que a quantidade de pães é sempre cinco vezes a quantidade de bombons (ou a quantidade de bombons é sempre a quinta parte da quantidade de pães) em qualquer situação.

No trabalho de Magina et al. (2014) são analisados o desempenho e as estratégias, à luz das ideias teóricas de Vergnaud, apresentadas por estudantes do 3º e 5º anos do Ensino Fundamental na resolução de duas situações do Campo Conceitual Multiplicativo, sendo classificados os níveis de raciocínio empregados por eles. Os autores centraram a discussão nas classes de situações dentro do eixo proporção simples: uma envolvendo a correspondência um para muitos, e outra, a correspondência de muitos para muitos.

Com relação à análise das estratégias utilizadas pelos alunos, Magina et al. (2014) identificaram quatro níveis:

1. Incompreensível: quando o aluno não explicou a operação utilizada para resolver o problema, ou quando não foi identificado o raciocínio utilizado.
2. Pensamento aditivo: gerou dois subníveis: contagem (aconteceu por meio de representação pictórica) e operação de adição (resoluções pictóricas e numéricas).
3. Transição do pensamento aditivo para o multiplicativo: a estratégia utilizada foi formar grupos de uma mesma quantidade, por meio de ícones agrupados (III III III = 12), ou numericamente ($4 + 4 + 4 = 12$).
4. Pensamento Multiplicativo: a estratégia utilizada pelo aluno passa necessariamente pela estrutura multiplicativa.

Desta forma, as pesquisas aqui relatadas identificaram algumas estratégias utilizadas nas resoluções de problemas envolvendo o raciocínio proporcional. Outro fato de grande relevância é a dificuldade dos alunos frente a problemas dessa natureza, sendo citadas pesquisas sobre esse assunto na próxima seção deste capítulo.

1.3 As dificuldades dos alunos

Na breve revisão bibliográfica realizada foram verificadas dificuldades dos alunos para resolver problemas envolvendo o raciocínio proporcional.

Silvestre (2006), embasada em estudos anteriores, aponta algumas causas da dificuldade encontrada pelos alunos, uma delas é resultante das opções curriculares gerais, por exemplo, a introdução tardia do conceito de razão, a abordagem isolada e sem relação com outros tópicos da proporcionalidade e a visão da proporcionalidade como um tópico ou assunto do currículo e não como um conceito a ser compreendido. Outras causas apontadas têm relação com os processos de ensino, já que frequentemente se apresenta um número restrito de problemas sobre proporcionalidade. O material de apoio normalmente apresenta limitações ao nível das definições, exemplo e processos de resolução para os tópicos de razão, taxa e proporção. Finalmente, outra causa apontada é a dificuldade dos professores que utilizam inadequadamente a regra de três simples.

Outra dificuldade foi observada por Torre et al. (2013), afirmando que os alunos de oitavo ano aplicam a estratégia de multiplicação cruzada para problema não proporcional, sendo um dos motivos possíveis para esta ação está no fato de que a multiplicação cruzada é ensinada na escola entre o sétimo e oitavo ano e os alunos não relacionam automaticamente o pensamento intuitivo para estas estratégias abstratas.

Lamon (2005 apud COSTA & PONTE, 2008) afirma que uma das tarefas mais difíceis para os alunos é compreender a natureza multiplicativa das situações proporcionais, o que requer compreensão da diferença que existe entre adicionar e multiplicar e dos contextos em que cada uma pode ser usada.

Spinillo (1992, 1993), com base na teoria piagetiana sobre inclusão de classes, aponta que as crianças têm dificuldade em estabelecer comparações parte-todo. Questões nas quais era necessário decidir qual copo estava mais “cheio” de água (copos de dimensões distintas) eram resolvidas por crianças a partir de 11 anos utilizando o referencial “metade” e a autora conclui que isso favorecia o estabelecimento de relações de segunda-ordem nestas tarefas de

proporção com dimensões contínuas. O mesmo referencial foi utilizado na pesquisa de Jeong et al (2011) em tarefas exitosas de raciocínio proporcional no contexto de um jogo que envolvia noções de probabilidade (tiro ao alvo) com quantidades discretas; no entanto, os autores encontraram que muitos alunos fracassaram porque contavam o número de chances (tiros) ou o número de acertos no alvo, mas não estabeleciam relações de segunda ordem. Já Boyer et al. (2008) concluíram que, apesar de resolverem problemas de comparação com quantidades contínuas a partir de 6 anos, crianças de 10 a 12 anos apresentam muita dificuldade em resolver problemas de raciocínio proporcional envolvendo unidades discretas e que esta situação pode ser devida ao fato de não se articular o ensino de frações com o de razões.

Viana (2013) constatou que vários estudantes do curso de Licenciatura em Matemática tiveram dificuldades para elaborar problemas envolvendo o conceito de razão na comparação de duas situações. Essa experiência, vivenciada no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) – Matemática da Facip/UFU, utilizou a metodologia de elaboração de problemas como forma de identificar os conhecimentos prévios acerca do conceito de razão. Os licenciandos deveriam elaborar e resolver um problema em que aparecessem duas situações a serem comparadas utilizando-se o conceito de razão. Além das dificuldades na elaboração do problema, verificou-se que a resolução estava atrelada a técnicas adquiridas no Ensino Fundamental, o que pode dificultar o entendimento do conceito e também a atuação dos futuros professores no ensino do tema.

Onuchic e Allevato (2015) em uma pesquisa com professores de Matemática constataram que há grandes dificuldades durante a resolução de problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade. Utilizando a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas, durante um minicurso para professores do Ensino Fundamental e Médio e pesquisadores em Educação Matemática, foi proposta a resolução de dois problemas em grupos de 2 ou 3 participantes. Entre os professores que acertaram as respostas, poucos sabiam como explicar os processos de resolução empregados. Já na aplicação de outro problema para licenciandos percebeu-se que alguns licenciandos apresentavam dificuldades em identificar uma proporção e ainda que não haviam percebido e compreendido que nas relações que representam grandezas proporcionais existe uma constante, a constante de proporcionalidade

Frente a essas dificuldades são relatados, no próximo item, caminhos apontados por alguns pesquisadores para o desenvolvimento proporcional.

1.4 Os caminhos apontados

Apontando um caminho para o trabalho com raciocínio proporcional, Lesh et al. (1988), afirmam que o professor deve propor aos seus alunos problemas de vários tipos. A diversificação das tarefas é preciso para que os alunos desenvolvam a necessária flexibilidade no seu raciocínio proporcional.

Campos e Rodrigues (2007), baseados na teoria dos campos conceituais de Vergnaud, afirmam que um conceito se constrói ao longo do tempo, por meio de situações que dão sentido ao conceito e que oferecem condições para o sujeito mobilizar os invariantes operatórios – ou conhecimentos em ação – e expressá-los por meio de representações simbólicas. Ao longo do processo, novos elementos são agregados e o sujeito desenvolve a capacidade para explicitar formalmente os invariantes operatórios, que compõe seus conhecimentos científicos.

Torre et al. (2013) apontam alguns caminhos no trabalho com o raciocínio proporcional, sugerindo que se deva trabalhar inicialmente com as estratégias multiplicativas antes de serem introduzidas as estratégias mais abstratas, como a multiplicação cruzada.

Outro ponto relevante apontado por Torre et al. (2013) é que, na resolução de problemas relacionados com raciocínio proporcional, quando o aluno forma relações com sinal de igual entre elas, isso não significa que ele tem a capacidade de raciocinar proporcionalmente.

Sendo assim, o autor afirma que as crianças devem ter a oportunidade de raciocinar sobre situações proporcionais antes do estudo do conceito de razão e proporção. O conceito de proporção formaliza o raciocínio proporcional, sendo aconselhado instituir procedimentos formais algébricos na resolução de problema de proporção só depois que abordagens informais tiverem sucesso.

De acordo com Ponte et al. (2010) deve-se explorar a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade, ampliando as experiências dos alunos nos diferentes tipos de problemas que envolvem esta relação. Nesta perspectiva, o autor indica o recurso ao trabalho com exploração de regularidades e de relações que, além de ser um caminho para o desenvolvimento das capacidades que envolvem o raciocínio proporcional (em particular o sentido de covariação e de invariância), contribui para o desenvolvimento da capacidade de generalização.

1.5 A abordagem da proporção nos livros didáticos e em alguns documentos oficiais

Em seus estudos, Ponte e Marque (2011) analisaram como o conceito de proporção é introduzido e desenvolvido nos livros didáticos de Matemática para alunos de 11 e 12 anos de idades em quatro países: Portugal, Espanha, Brasil e EUA. Desta forma, foram analisados quatro livros didáticos, sendo um de cada país. Os autores estavam interessados em comparar o livro didático Português com os livros didáticos dos países com os quais Portugal tem fortes ligações culturais ou educacionais. O Brasil foi escolhido porque tem a mesma língua; a Espanha, porque tem uma linguagem semelhante e tem uma raiz cultural comum; e os EUA, porque representa um papel de liderança a nível internacional na definição do currículo de Matemática.

Conforme os autores, a maioria dos livros didáticos apresenta o conceito de proporção como uma igualdade entre duas razões, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; no entanto a proporção era apresentada como: a está para b assim como c está d, ou seja,

$$\begin{array}{ccc} a & \text{-----} & b \\ & \times & \\ c & \text{-----} & d \end{array}$$

Assim, a, b, c e d estão em proporção e $ad=bc$. Desta forma, a abordagem é conhecida como regra de três simples ou regra de três, sendo que se conhecem três dos valores e pode-se descobrir o quarto, e ainda, os produtos ad e bc são nomeados como produtos cruzados.

A pesquisa dos autores aponta que a proporção direta presente nos livros didáticos tem duas principais abordagens: lidar com problemas usando regra de três e a propriedade fundamental das proporções (se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma proporção, então $ad=bc$).

Dentre outros aspectos, os autores perceberam que todos os livros, exceto os brasileiros, apresentam as tarefas de revisão no início de um novo capítulo. Com relação à introdução de um novo conceito, o livro didático português e o livro espanhol, apresentam inicialmente uma situação problema e sua solução, explicam os conceitos e apresentam exemplos e propõem, em seguida, uma bateria de tarefas práticas. O livro americano segue o mesmo modelo, mas introduz, no início de cada nova seção, um pequeno conjunto de tarefas de rotina para rever os conceitos anteriormente estudados. O livro didático brasileiro inicia o assunto com situações problema que são resolvidas por meio de uma "conversa" entre os personagens de desenhos animados e só depois propõe algumas tarefas para o aluno fazer,

sendo este o único livro que não apresenta formalização rápida dos conceitos. Além disso, todos os livros didáticos fazem poucas referências às tecnologias ou ao uso da calculadora.

Com relação ao conceito de proporção, Ponte e Marque (2011) verificaram que o livro didático português apresenta o conceito de razão; em seguida, define proporção e a propriedade fundamental das proporções e finalmente, apresenta porcentagens, escalas e proporção direta. O livro espanhol aborda a proporção usando série proporcional para discutir a relação das grandezas proporcionais; em seguida, apresenta proporção direta e inversa e, ao final, revisa o conceito de porcentagem de maneira mais profunda. O livro didático brasileiro em um primeiro capítulo, apresenta proporção, porcentagem e grandezas proporcionais, aludindo a grandezas inversamente proporcionais. Em capítulo posterior, o livro refere-se à proporção com aplicação na geometria, apresentando os temas de escalas, retângulos proporcionais, a propriedade fundamental das proporções e triângulos semelhantes. Por fim, o livro didático americano introduz os conceitos de proporção, taxa, proporção de figuras semelhantes e escalas e mostra como construir gráficos circulares e calcular as taxas de juros, em seguida, revisa o conceito de porcentagem e aprofunda neste conceito.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (ESTADO DE SÃO PAULO, 2008) foram analisados por Miranda (2009) e Camejo et al. (2009), citados por Maranhão e Machado (2011). Os autores relacionaram aspectos essenciais para o desenvolvimento do pensamento proporcional apontados pelos dois documentos. Maranhão e Machado (2011) fizeram uma meta-análise do conteúdo destas pesquisas de modo a estabelecer relações entre os descritores identificados nos dois estudos e os componentes do pensamento proporcional, segundo Post et al. (1988). Estes descritores são apresentados nos Quadros 1 e 2.

Quadro 1: Descritores e aspectos essenciais para o desenvolvimento do pensamento proporcional
Fonte: Miranda (2009 apud MARANHÃO & MACHADO, 2011)

1	Utilizar multiplicação ou divisão para resolver problemas envolvendo ideias de razão ou proporção.
2	Fazer comparações numéricas ou não numéricas; trabalhar com classes de equivalência de frações.
3	Distinguir situações proporcionais de não proporcionais.
4	Utilizar a ideia de covariação.
5	Representar situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas, símbolos, desenhos ou diagramas.
6	Relacionar proporcionalidade com ideias de medidas de comprimento, superfície, volume, massa, ou capacidade etc.; efetuar conversão de unidades de medida.
7	Desenhar ou representar em escala.
8	Utilizar proporções na análise de dados (de uma enquête ou pesquisa) ou em probabilidade.
9	Resolver problemas (tais como os que requeiram cálculos relativos a impostos) envolvendo custos, taxas, porcentagem, juros, descontos. Efetuar corretamente cálculos envolvendo esses tópicos.
10	Utilizar ideias centrais associadas aos sentidos do número racional, ou de relações e operações entre

	eles, além de suas representações, para resolver problemas envolvendo funções ou ideias associadas às funções e suas representações.
11	Relacionar proporcionalidade com ideias de semelhança, homotetia, ampliação ou redução de figuras planas.
12	Diferenciar grandezas diretamente proporcionais das inversamente proporcionais.
13	Resolver problemas usando a regra de três.
14	Usar o método da falsa posição ou algo similar a ele.
15	Usar reconfigurações geométricas precedidas de alteração de escala.
16	Relacionar ao menos duas das ideias centrais acerca do número racional: parte-todo, razão, divisão/quociente, taxas, porcentagem, probabilidade, operador, semelhança e homotetia.
17	Utilizar a propriedade aditiva das proporções.
18	Resolver problemas envolvendo a divisão em partes proporcionais.
19	Resolver problemas envolvendo inequações ou ideias associadas às inequações e suas representações.

Quadro 2: Descritores e aspectos essenciais para o desenvolvimento do pensamento proporcional
Fonte: Camejo et al.(2009 apud MARANHÃO & MACHADO, 2011)

A	Utilizar estratégias pessoais para a resolução de problemas envolvendo componentes do pensamento proporcional.
B	Utilizar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo ideias de razão e proporção.
C	Fazer comparações numéricas envolvendo os racionais e também não numéricas; trabalhar com classes de equivalência de frações.
D	Distinguir situações proporcionais e não proporcionais.
E	Usar ideia de covariação.
F	Representar razões por meio de gráficos, ou tabelas, ou símbolos, ou desenhos, ou, ainda, diagramas e resolver problemas envolvendo razões organizadas em tabelas, gráficos etc.
G	Relacionar proporcionalidade com ideias de medidas de comprimento, ou superfície, ou volume, ou massa, desenhar ou representar em escala.
H	Utilizar razões na análise de dados (de uma enquête ou pesquisa) ou em probabilidade.
I	Resolver problemas envolvendo porcentagem, juros, descontos, impostos e taxas.
J	Utilizar o pensamento proporcional para resolver problemas envolvendo funções e suas representações ou ideias associadas a elas.
k	Relacionar proporcionalidade com a ideia de semelhança.
L	Diferenciar grandezas diretamente proporcionais das inversamente proporcionais.
M	Reconhecer a divisibilidade de zero e a indivisibilidade por zero ao lidar com números racionais em suas diversas representações.
N	Relacionar ao menos duas das ideias acerca do número racional ou da fração: parte-todo, razão, divisão/quociente, porcentagem, operador.
O	Operar com os números racionais na representação fracionária e na decimal, bem como transformar uma dessas representações na outra, imprimindo significado a tais ações.

Ao confrontarem entre si os descritores citados, Maranhão e Machado (2011) apontaram que entre o descritor 3 do Quadro 1 e o D do Quadro 2 o correto seria: distinguir situações proporcionais e não proporcionais (D do Quadro 2). Com relação ao descritor 12 do Quadro 1 e ao L do Quadro 2, as autoras sugerem que o vocabulário seja mudado, ou seja, que passe a ser: diferenciar variáveis diretamente proporcionais das inversamente proporcionais. Entre o descritor 1 do Quadro 1 e o B do Quadro 2, as autoras apontam que o correto seria: usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade (B do Quadro 2). Com relação ao descritor 2 do Quadro 1 e ao C do Quadro 2, as autoras afirmam

que a frase mais coerente seria o C do Quadro 2, ou seja, fazer comparações numéricas envolvendo os racionais e também não numéricas; trabalhar com classes de equivalência de frações; mas apontam uma reformulação da mesma da seguinte maneira: fazer comparações numéricas envolvendo os racionais e também não numéricas, ao trabalhar com proporcionalidade.

Maranhão e Machado (2011) afirmam ainda que:

Os itens 4, 5, 7, 10, 11, 12 do Quadro 1 e, respectivamente, os itens E, F, G, J, K, L do Quadro 2 se relacionam à ideia de covariação, isto é, a variáveis interdependentes. O componente do pensamento proporcional correspondente a todos esses itens é, portanto, o que redigimos abaixo: usar a ideia de covariação. (MARANHÃO & MACHADO, 2011, p.154).

Sendo assim, todos os descritores citados acima são especificações do uso da ideia de covariação e existem outras tantas possibilidades de surgimentos de outras especificações relacionadas com a ideia de covariação (MARANHÃO & MACHADO, 2011).

Por fim, os descritores que envolvem o pensamento proporcional, em comparações envolvendo os números racionais, aparecem nos descritores 1, 2, 6, 8, 9, 16 do Quadro 1, que correspondem, respectivamente, aos itens B, C, G, H, I, N do Quadro 2 (MARANHÃO & MACHADO, 2011).

Na breve revisão bibliográfica dissertada até aqui, percebe-se uma linha de pensamento com relação ao desenvolvimento do raciocínio proporcional que evidencia a importância dada ao campo conceitual multiplicativo. Vale ressaltar que a maioria dos autores afirma a necessidade do entendimento acerca dos diferentes tipos de tarefas envolvendo o raciocínio proporcional.

CAPÍTULO 2

A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) fornece uma base para a aprendizagem e para o ensino e visa fornecer um quadro coerente de princípios básicos para o desenvolvimento de habilidades complexas. Apesar de não ser específica para a Matemática, esta teoria foi primeiramente elaborada para explicar os processos cognitivos envolvidos nas estruturas aditivas e multiplicativas, nas relações entre número e espaço e na álgebra.

O precursor dessa teoria é Gérard Vergnaud que aponta uma tríade de conjuntos – das situações, dos invariantes operatórios e das representações simbólicas – que formam o conceito (VERGNAUD, 1990).

2.1 Conceitos

Para Vergnaud (1990), no processo de ensino e aprendizagem, um conceito não pode ser reduzido a sua definição, pois a criança só atribui significado a um conceito por meio de situações vivenciadas e de problemas resolvidos por ela.

Nesta perspectiva, ao refletir sobre a teoria dos campos conceituais de Vergnaud, Oliveira (2007) aponta que o conceito não pode ser pensado de maneira isolada, desarticulado do contexto em que está sendo utilizado, principalmente das representações e dos esquemas empregados pelo aluno.

Segundo Vergnaud (1990), a operacionalidade de um conceito deve ser experimentada por meio de situações variadas e os pesquisadores devem analisar uma variedade de esquemas e comportamentos para entender, a partir do ponto de vista cognitivo, a formação de um conceito. Por exemplo, pode-se apresentar uma variedade de problemas práticos e teóricos ao estudante para avaliar se o conceito de razão foi compreendido por ele.

Nesse sentido, o conceito é definido pelo autor como três conjuntos $C(S, I, R)$: o primeiro é um conjunto de situações que constituem o referente do conceito, o segundo é um conjunto de invariantes operatórios (teoremas e conceitos-em-ação) que dão o significado do conceito, e o terceiro é um conjunto de representações simbólicas que compõem seu significante.

Vergnaud (1990) define campo conceitual como sendo um conjunto de situações; por exemplo, o campo conceitual das estruturas aditivas é o conjunto de situações que requerem uma adição, uma subtração ou uma combinação dessas operações; já o campo das estruturas multiplicativas, o conjunto de situações que requerem multiplicação, divisão ou uma combinação destas operações.

Campos e Rodrigues (2007) também ao descrever essa teoria afirmam que o conhecimento está organizado em agrupamentos informais de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e provavelmente entrelaçados no processo de aquisição, sendo que essa ação recebe o nome de campos conceituais e traz a construção do conhecimento como um processo progressivo, contínuo e demorado do domínio desses campos.

Já Oliveira (2007) afirma que a Teoria dos Campos Conceituais está ligada ao entendimento de como as competências se desenvolvem. Embasado nessa teoria, o autor aponta que a maior parte de nossos conhecimentos são competências, ou seja, a capacidade que o indivíduo dispõe para enfrentar e resolver um problema. Para ele, essas competências só podem ser entendidas na ação do sujeito, pelo fato de muitas dessas não serem explicitáveis.

A Teoria dos Campos Conceituais propõe que o desenvolvimento do conhecimento se dê a partir do sujeito em ação, com o conceito inter-relacionado com diversos conceitos, formando uma rede. Desta forma, de acordo com Vergnaud (1990) campo conceitual é um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão.

Moreira (2002) colabora com o entendimento da teoria, afirmando que o campo conceitual é como um conjunto de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes, mas intimamente relacionados. O autor resume alguns argumentos que sustentam a ideia de campo conceitual: um conceito não se forma dentro de um só tipo de situação; uma situação não se analisa com um só conceito; a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação se apresentam em um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes.

Desta forma, Oliveira (2007) argumenta que ao descrever um campo conceitual há a necessidade de analisar as situações e/ou problemas, conceitos e teoremas. Para o autor a Teoria dos Campos Conceituais permite a produção de uma classificação baseada na análise

das tarefas cognitivas e dos procedimentos que podem ser adotados em cada uma das situações de referência.

Para Vergnaud (1990) a organização da conduta do sujeito envolve regras de ação e de antecipação, sendo que os invariantes operatórios (conceito-em-ação e teorema-em-ação) organizam a busca de informações relevantes em função do problema a ser resolvido ou a fim de alcançar e direcionar as inferências. Segundo o autor, o funcionamento cognitivo do sujeito nas situações depende do estado do seu conhecimento, explícito ou implícito, sendo necessário dar atenção ao desenvolvimento cognitivo, a sua continuidade, a sua ruptura, aos passos necessários, as classes de problemas complexos, aos procedimentos e representações simbólicas, a análise de erros graves e principais descobertas a respeito.

Vergnaud (1990) afirma ainda que, um conceito não leva seu significado a uma única classe de situações, e uma situação não é analisada com a ajuda de um único conceito, sendo necessário propor como objetos de investigação conjuntos relativamente grandes de situações e conceitos; classificando os tipos de relação, os tipos de problemas, esquemas e tratamento; representações linguísticas e simbólicas e conceitos de matemática que organizam este conjunto.

A seguir, serão descritos algumas características dos três conjuntos $C(S, I, R)$, ou seja, das situações, dos invariantes operatórios e das representações simbólicas.

2.2 O conjunto das situações

Com relação ao conceito de situação, Moreira (2002) esclarece que o termo não se refere a uma situação didática, mas sim a uma tarefa. Sabe-se que toda situação complexa pode ser analisada como combinação de tarefas, sendo preciso o conhecimento de suas naturezas e dificuldades próprias.

Magina e Campos (2004) reforçam que, na perspectiva dos campos conceituais, as competências e concepções dos alunos se constroem ao longo do tempo, por meio de experiências com situações, dentro ou fora da escola. Quando o aluno é posto frente a uma nova situação, tenta adaptar conhecimentos adquiridos anteriormente a esta nova situação. Vale ressaltar que o conhecimento do aprendiz pode ser explícito (quando pode expressá-lo de forma simbólica) ou implícito (quando pode usá-lo em ação, escolhendo operações adequadas, apesar de não conseguir expressar as razões de sua escolha).

Sendo assim, Carvalho e Aguiar (2008), afirmam que Vergnaud não procura construir uma teoria geral para o desenvolvimento, assim com fez Piaget, ele procura relacionar o desenvolvimento do sujeito com as tarefas que este é levado a resolver. Na teoria de Vergnaud, a cognição possui um componente fortemente ligado às situações. Desta forma, o processo de desenvolvimento cognitivo, por ser fortemente dependente das situações a serem enfrentadas pelo sujeito, tem como cerne a construção de conceitos (conceitualização), que é um processo longo e requer uma diversificação de situações.

Expondo o conceito de situação, Vergnaud (1990) aponta duas ideias principais: a da variedade, considerando que há uma grande variedade de situações em um determinado campo conceitual e que as variáveis da situação são um meio de gerar sistematicamente o conjunto de classes possíveis; e o da história, sendo que o conhecimento dos alunos é modelado por situações que foram encontradas e dominadas, especialmente as primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos.

Campos e Rodrigues (2007) afirmam que, na teoria dos campos conceituais, a construção do conhecimento depende do posicionamento do sujeito perante as novas situações, ou seja, da mobilização de conhecimentos prévios para resolvê-las e da utilização de recursos simbólicos para representar o pensamento e os resultados. Repetindo-se o processo ao longo do tempo, o conceito engloba mais elementos e fica cada vez mais aprimorado, o que leva, enfim, ao conhecimento científico formalizado.

A função adaptativa do conhecimento a partir das formas de ação do sujeito em dois tipos de classes de situações é explicada por Vergnaud (1990, p.2). No primeiro tipo, o sujeito tem em seu repertório – em dado momento do seu desenvolvimento – habilidades necessárias para o tratamento relativamente imediato daquela classe de situações e estas são demonstradas de acordo com certas circunstâncias. No segundo tipo, estão as situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias: isto faz surgir dúvidas e leva o sujeito a empregar um tempo para explorar a situação e refletir sobre suas decisões, levando-o ao sucesso ou fracasso.

Uma determinada situação não evoca todos os esquemas disponíveis pelo sujeito. Retomando, um esquema, para Vergnaud (1990), é uma totalidade organizada, que permite um tipo de comportamento diferente dependendo das características específicas de cada uma das situações. Isso só é possível porque o esquema envolve os operatórios invariantes (conceitos-em-ação e teorema-em-ação), as antecipações para obter os efeitos esperados e as fases intermediárias possíveis, as regras da ação (se...então....) que permitem gerar o número

de ações do sujeito, e as inferências (ou raciocínio) que permitem definir as regras, as informações e os invariantes operatórios disponíveis para o sujeito. Sendo assim, o foco no próximo item são os invariantes operatórios.

2.3 O conjunto dos invariantes operatórios

O sujeito sempre emprega esquemas cognitivos para as situações, mas estes não funcionam da mesma maneira. No primeiro caso, para uma classe de situações em que o sujeito já tem em seu repertório as habilidades necessárias, os procedimentos são mais automatizados e estão organizados por um esquema único. Já no segundo, para uma classe de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, há um esboço e uma combinação de esquemas e trata-se de um processo que necessariamente é acompanhado de descobertas.

Entende-se esquema como a organização invariante das operações mentais para uma determinada classe de situações. Para o autor, nos esquemas é onde se deve investigar o conhecimento em ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem que a ação do sujeito seja operatória.

Partindo da definição de esquema frente a Piaget e Vergnaud, Moreira (2002) afirma que o desenvolvimento cognitivo consiste no desenvolvimento de um vasto repertório de esquemas. Segundo o autor os ingredientes dos esquemas são:

1. metas e antecipações (um esquema se dirige sempre a uma classe de situações nas quais o sujeito pode descobrir uma possível finalidade de sua atividade e, eventualmente, submetas; pode também esperar certos efeitos ou certos eventos);
2. regras de ação do tipo "se ... então" que constituem a parte verdadeiramente geradora do esquema, aquela que permite a geração e a continuidade da sequência de ações do sujeito; são regras de busca de informação e controle dos resultados da ação;
3. invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) que dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação; são os conhecimentos contidos nos esquemas; são eles que constituem a base, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e dela inferir a meta a alcançar e as regras de ação adequadas;
4. possibilidades de inferência (ou raciocínios) que permitem "calcular", "aqui e agora", as regras e antecipações a partir das informações e invariantes operatórios de que dispõe o sujeito, ou seja, toda a atividade implicada nos três outros ingredientes requer cálculos "aqui e imediatamente" em situação (MOREIRA, 2002, p. 12-13).

Para Vergnaud (1990), os conhecimentos contidos nos esquemas são designados pelas expressões "conceito-em-ação" e "teorema-em-ação" ou ainda "invariante operatório". Sendo assim, o esquema é a organização de uma classe de situações; e "conceito-em-ação" e

"teorema-em-ação" são invariantes operacionais, ou seja, componentes essenciais dos esquemas e determinam as diferenças entre eles.

Entre os exemplos de esquemas citados por Vergnaud (1990), destaca-se a tarefa de comparar os volumes de um sólido e de um recipiente (situação nova) dada a alunos de quinta série. Para solucionar o problema, eles mobilizaram um primeiro esquema de comparação de alturas – o qual não permitiu tirar qualquer conclusão. O segundo esquema foi o de imersão (parcial) do objeto sólido no recipiente; obviamente, como o recipiente também estava cheio, a água transbordou e a conclusão equivocada dos alunos – como resultado desta outra ação operacional – foi que o objeto sólido era maior. Assim, vários esquemas aparentemente menos pertinentes tiveram que ser empregados antes de se obter a solução para o problema proposto.

Sendo assim, este exemplo ilustra que a ideia de função cognitiva de um indivíduo ou de um grupo de indivíduos em uma situação apoia-se no repertório de esquemas disponíveis e também na descoberta de novos aspectos e eventualmente na construção de novos esquemas.

Considerando que existem vários exemplos de esquemas na aprendizagem matemática, Vergnaud (1990) afirma que cada esquema diz respeito a situações com características bem definidas. Para que o indivíduo possa estender o esquema – ou seja, transferir, generalizar, descontextualizar – para uma classe mais ampla de situações é necessário que analogias e relações de semelhança e de diferença sejam estabelecidas pelo sujeito. Assim, o reconhecimento dos invariantes é a chave para a generalização do esquema.

Vergnaud (1990) afirma que o esquema leva o aluno a organizar e antecipar suas ações diante de situações específicas, sendo, portanto, um conceito fundamental da psicologia cognitiva e da didática.

Com relação aos invariantes operatórios, Vergnaud (1990) afirma que existem três tipos lógicos. O primeiro são os invariantes do tipo “proposições”, que são suscetíveis de serem verdadeiros ou falsos; os teoremas-em-ação são invariantes desse tipo, por exemplo, muitas crianças entre 8 e 10 anos compreendem que se um número de objetos comprados é multiplicado por 2, 3, 5, 10, 100, o preço é de 2, 3, 5, 10, 100 vezes maior. Este conhecimento pode ser expresso pelo teorema-em-ação: $f(nx) = nf(x)$ para n inteiro.

O segundo tipo são os invariantes do tipo “função proposicional”, que não são suscetíveis de serem verdadeiros ou falsos, por exemplo, os conceitos de cardeal, de estado inicial e de transformação são indispensáveis para a conceitualização das estruturas aditivas. Estes conceitos são raramente explicitados pelos alunos, embora sejam construídos por eles mesmos na ação, ou seja, são conceitos-em-ação.

De acordo com Moreira (2002), existe uma relação dialética entre conceitos-em-ação e teorema-em-ação, considerando que os conceitos são ingredientes de teoremas e os teoremas são propriedades que dão aos conceitos seus conteúdos. Por outro lado, não se pode confundirlos, pois conceitos-em-ação são ingredientes necessários das proposições, mas não são teoremas, porque permitem derivações que requerem proposições que podem ser verdadeiras ou falsas; já conceitos podem ser apenas relevantes ou irrelevantes. O autor afirma também que não há conceitos sem proposições.

Para Vergnaud (1990), entre as funções proposicionais é necessário considerar que existem funções com um argumento (as propriedades), funções com dois argumentos (relações binárias), função com três argumentos (relações ternárias, que incluem as leis de composição binária), função com quatro argumentos (como a proporcionalidade), e funções com mais de quatro argumentos.

Por fim, o terceiro tipo de invariante é o “argumento”, que trata da função proposicional e proposição. De acordo com Vergnaud (1990), os argumentos em matemática podem ser objetos materiais (o navio está à direita do farol), personagens (Karla é mais alta que Maria), números ($5 + 3 = 8$), relações (“maior que” é uma relação antissimétrica) e até mesmo proposições (“8 é um divisor de 24” é a recíproca de “24 é um múltiplo de 8”). Para o autor, essas distinções são fundamentais para o ensino, pois a transformação dos conceitos-úteis em conceitos-objetos é um processo essencial na conceitualização da realidade. Essa transformação significa que as funções proposicionais podem ser transformadas em argumentos.

A partir da reflexão sobre proposições e funções proposicionais pode-se concluir, segundo Moreira (2002), que um conceito-em-ação não é um verdadeiro conceito científico, nem um teorema-em-ação é um verdadeiro teorema a menos que se tornem explícitos. Conceitos e teoremas explícitos constituem a parte visível do *iceberg* da conceitualização que nada seria sem a parte escondida formada pelos invariantes operatórios. Os invariantes operatórios integrados nos esquemas têm ajuda das categorias do conhecimento explícito: proposições, funções proposicionais, objetos e argumentos.

Outra constituição da conceitualização são as representações simbólicas, que serão tratadas no próximo item.

2.4 O conjunto das representações simbólicas

Para Vergnaud (1990), o simbolismo matemático não é propriamente uma condição suficiente para a conceitualização, mas contribui para essa conceitualização, principalmente no que se refere às categorias de pensamento matemático. A linguagem natural é a essência da representação e também a identificação de categorias matemáticas, mas não possui diagramas, fórmulas e equações, indispensáveis para a seleção e tratamento das informações e relações relevantes. A importância atribuída ao simbolismo não impede a análise da ação do sujeito na situação, que é a fonte e o critério da conceitualização.

As representações simbólicas podem ser expressas por meio de uma palavra, uma frase matemática ou ainda por um esquema em que o sujeito exprime um significado ou um significante para a situação abordada. Vale ressaltar que o simbolismo não evoca todos os esquemas disponíveis por um sujeito.

Ao considerar a linguagem como uma representação simbólica, Vergnaud (1990) afirma que ela tem uma função de comunicação, representação e ainda pode ser considerada como suporte do pensamento. Ao utilizar a representação simbólica o indivíduo pode ser levado a planejar e controlar uma série de ações dominadas. Por outro lado, uma atividade automatizada não é acompanhada com palavras.

Segundo Vergnaud (1990), a atividade linguística favorece a realização da tarefa e a resolução de problemas, propiciando a descoberta de relações relevantes e a organização da ação. Por meio dessa atividade, o sujeito expressa argumentos, faz relações, proposições, inferências e aceitação ou rejeição da sequência realizada. Vale ressaltar que, ao tratar problemas matemáticos, o sujeito pode simbolizá-lo por meio de diagrama e/ou escritas matemáticas.

Sendo assim, conforme Vergnaud (1990), a Teoria dos Campos Conceituais se baseia no princípio de desenvolvimento pragmático do conhecimento, sendo que não se pode teorizar sobre a aprendizagem da matemática somente a partir do simbolismo ou apenas a partir das situações, é necessário considerar o significado dos símbolos e situações, enfim, considerar a ação do sujeito e a organização dessa ação.

2.5 O campo conceitual multiplicativo

Para este trabalho, será dada ênfase ao campo conceitual multiplicativo, em que se inserem as situações envolvendo razões e proporções. Na definição de Vergnaud (1990), campo conceitual é um conjunto de situações; assim, o campo das estruturas multiplicativas é o conjunto de situações que requerem multiplicação, divisão ou uma combinação destas operações.

Aprofundando, Magina et al. (2011) afirmam que o campo conceitual das estruturas multiplicativas é o conjunto de problemas ou situações cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, os quais se encontram em estreita conexão uns com os outros. Entre os conceitos, pode-se destacar: as funções lineares e não lineares, o espaço vetorial, a análise dimensional, a fração, razão, proporção, número racional, multiplicação e divisão.

Se as situações constituem a primeira entrada dos campos conceituais, Vergnaud (1990) aponta que a segunda entrada são os conceitos e teoremas. Assim, o campo conceitual das estruturas multiplicativas é ao mesmo tempo o conjunto das situações cujo tratamento envolve uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações: relações simples e proporção múltipla, escala de razão, de função não linear e linear direta etc.

Vergnaud (2009) distingue duas grandes categorias de relações multiplicativas: isomorfismo de medidas e produto de medidas. Com relação ao isomorfismo de medidas, trata-se de uma relação quaternária entre quatro quantidades: duas quantidades são medidas de certo tipo e as outras duas medidas são de outro tipo (Se duas canetas custam R\$ 10,00, quanto custarão 4 canetas?). Já o produto de medidas é uma relação ternária entre três quantidades, das quais uma é o produto das outras duas (Se eu tenho 4 blusas e 2 calças, quantos trajes distintos posso formar?).

Magina et al.(2014) ao descreverem as classes de situações que compõem o Campo Conceitual Multiplicativo (Figura 5) apresentam os eixos das relações quaternárias e ternárias.

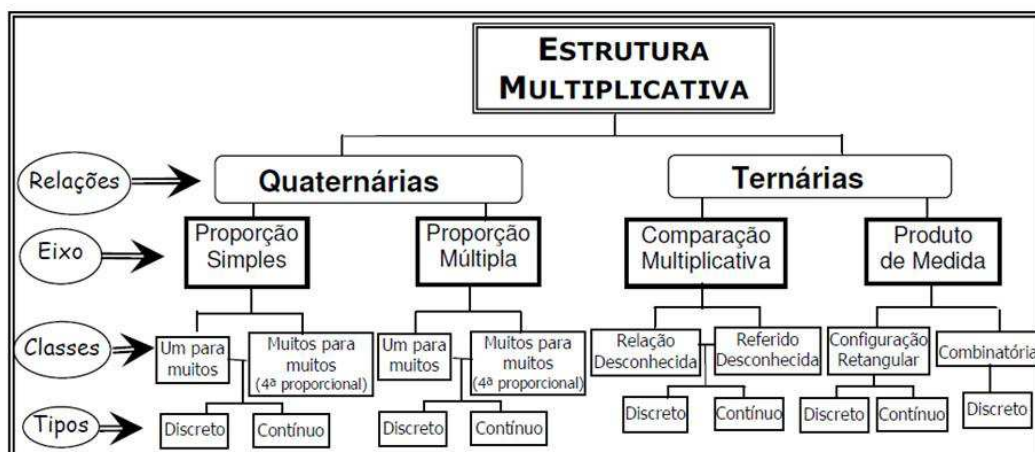


Figura 5. Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo
Fonte: Magina et al. (2011, p.3)

As relações quaternárias podem gerar quatro tipos de problemas elementares: a multiplicação (um para muitos), divisão-distribuição (um para muitos), divisão-cotas (um para muitos) e quarta proporcional (muitos para muitos).

Os autores afirmam que na proporção simples há uma relação entre quatro quantidades, sendo duas de mesma natureza e as outras duas de outra natureza, por exemplo pessoas e objetos. Nesse eixo há duas classes de situações: a correspondência um para muitos (Maria paga por uma dúzia de ovos 5 reais, quanto pagará por 6 dúzias?) e a correspondência muitos para muitos, que se divide em duas classes: na primeira é possível chegar à relação um para muitos (Quatro motos têm 8 rodas, quantas rodas têm 6 motos?); na segunda não faz sentido se obter a relação um para muitos (A cada cinco bombons comprados, a loja dá três caramelos de brinde. Se Ana comprar 15 bombons, quantos caramelos ela ganhará?).

No eixo denominado proporção múltipla, os autores explicam que se trata de uma relação entre quantidades relacionadas duas a duas, por exemplo, pessoas, comida e dias. Esse eixo também é dividido em duas classes: a correspondência um para muitos (Uma pessoa deveria ingerir 2400g em dois dias, qual é o consumo mensal de 3 pessoas?) e a correspondência muitos para muitos (Um grupo de 50 pessoas vai passar 28 dias de férias no campo. Eles precisam comprar uma quantidade de açúcar suficiente. Eles sabem que a média de consumo por semana para 10 pessoas é de 4 kg. Quantos quilos de açúcar elas precisam comprar?) (MAGINA et al., 2014).

Já as relações ternárias referem-se a dois eixos: comparação multiplicativa e produto de medidas. Os autores explicam que fazem parte do primeiro eixo as comparações

multiplicativas entre duas quantidades de mesma natureza (Maria tem o dobro que seu irmão. Se seu irmão tem R\$ 25,00, qual a quantia que Maria tem?). As autoras abordam três classes desse eixo:

- Classe 1: Relação desconhecida - Comprei uma boneca por R\$21,00 e uma bola por R\$3,00. Quantas vezes a boneca foi mais cara que a bola?
- Classe 2: Referente desconhecido - A idade de Paulo é 5 vezes maior que a idade do seu filho. Paulo tem 30 anos. Qual é a idade do seu filho?
- Classe 3: Referido desconhecido - A idade de Paulo é 5 vezes maior que a idade do seu filho. Seu filho tem 6 anos. Qual é a idade de Paulo? (MAGINA et al., 2014, p.523).

O segundo eixo, intitulado produto de medidas, é constituído por duas classes:

- Situações envolvendo a ideia de configuração retangular: quantidades representam certas medidas dispostas na horizontal e na vertical, de forma retangular, por exemplo, qual é a área de um terreno de 12 metros de frente e 15 metros de comprimento?
- Situações envolvendo a ideia de combinatória: noção do produto cartesiano entre dois conjuntos disjuntos, por exemplo, numa festa há quatro meninas e três meninos. Cada menino quer dançar com cada uma das meninas, e cada menina também quer dançar com cada um dos meninos. Quantos pares diferentes de menino-menina são possíveis de serem formados?

Assim, com base nas duas grandes categorias de relações multiplicativas destacadas por Vergnaud (2009) e nas classes de situações que compõem o Campo Conceitual Multiplicativo, conforme apresentadas por Magina et al. (2011), na Figura 5, considera-se que a sequência didática apresentada nesse trabalho conteve problemas de isomorfismo de medidas em que foram evidenciadas as relações quaternárias (isto é, aquelas que envolvem quatro quantidades, referentes a duas grandezas, discretas ou contínuas) do tipo muitos para muitos.

Para os problemas desse tipo, Vergnaud (2009) apresenta dois tipos de análise: análise vertical e análise horizontal. Um exemplo de problema pode ilustrar as análises apresentadas pelo autor: para cada 10 pães de queijo comprados na padaria ganham-se 2 bombons; se eu comprar 20 pães ganharei quantos bombons? A Figura 6 mostra as análises vertical e horizontal possíveis de serem estabelecidas no problema apresentado.

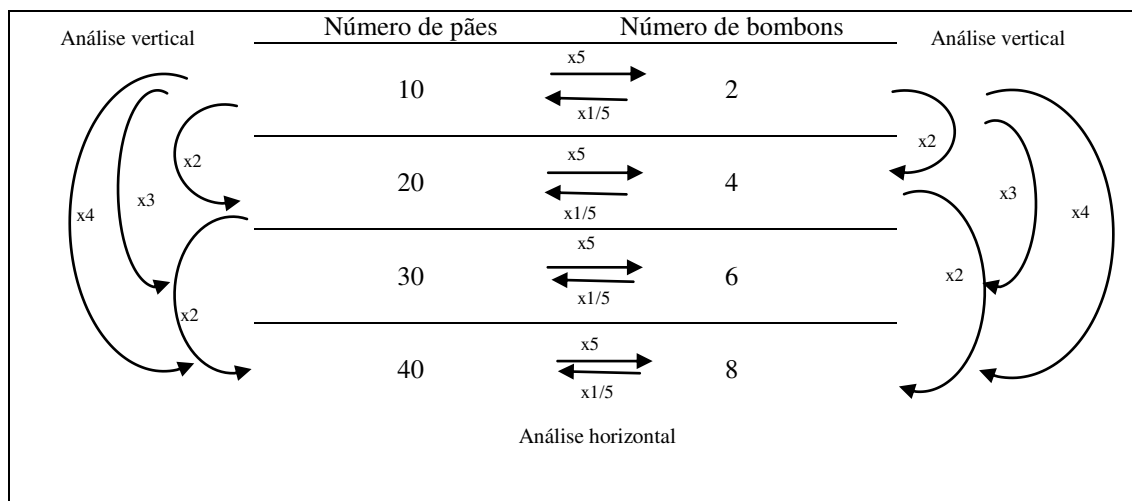


Figura 6. Análise vertical e horizontal em problema de relação quaternária

Fonte: Elaboração da autora

De acordo com Vergnaud (2009), a análise vertical permite passar de uma linha a outra em uma mesma grandeza; já a análise horizontal é centrada na ideia de um operador-função, isto é, uma relação invariável que permite passar de uma grandeza à outra. No problema apresentado, a relação invariável é: um bombom para cinco pães.

As análises citadas por Vergnaud (2009) quando apresenta os problemas de tipo multiplicativo foram evidenciadas em boa parte dos trabalhos encontrados na revisão da literatura, como em Torre (2013) e Lamon (1994 apud SILVESTRE & PONTE, 2009) e Ponte et al. (2010).

Assim, as análises vertical e horizontal correspondem, respectivamente, aos esquemas de covariação e invariância – conforme definidos por Ponte et al. (2010). Neste trabalho, são essas as relações estabelecidas pelos alunos nas situações-problema constantes da sequência didática aplicada no sexto ano com objetivo de contribuir para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

O presente trabalho teve por objetivo apresentar uma sequência didática de modo a contribuir para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Especificamente, pretendeu-se:

- Analisar uma sequência didática, organizada na forma de situações-problema e de atividades, com vistas a favorecer o estabelecimento das relações de covariação e de invariância de grandezas, necessárias para conceituar razão e proporção.
- Analisar as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver as situações-problema que envolviam o raciocínio proporcional, ao longo da aplicação da sequência didática.

O trabalho foi desenvolvido com vinte e seis alunos do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola particular situada na cidade de Ituiutaba/MG. A escolha por esta escola e pela turma deu-se pelo fato de a mestrandia exercer a função de docente na mesma.

A metodologia do trabalho tem sustentação na Engenharia Didática, proposta por Michele Artigue (1996), citada por Carneiro (2005). A Engenharia Didática “designa produções para o ensino, derivadas de resultados de pesquisa, e também designa uma específica metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula” (CARNEIRO, 2005, p. 90). Especificamente, conforme descrevem Almouloud e Coutinho (2008), a Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito.

Segundo Artigue (1996 apud CARNEIRO, 2005), a Engenharia Didática inclui quatro fases: 1) análises prévias; 2) concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de matemática; 3) implementação da experiência; 4) análise *a posteriori* e validação da experiência.

Entende-se que a revisão da literatura sobre o tema favoreceu as análises prévias e as primeiras concepções que fundamentaram a busca de subsídios para a elaboração da proposta, bem como a organização das etapas a serem seguidas na ocasião da implementação da experiência.

A implementação da experiência, ou seja, da sequência didática, deu-se em seis etapas. A primeira etapa consistiu na aplicação de uma avaliação de desempenho utilizando-se de lápis e papel a fim de avaliar o raciocínio proporcional, ou seja, verificar quais esquemas eram

empregados pelos alunos para resolver quatro problemas: dois de valor omissso (em que são dados três dos valores que compõem uma proporção e é pedido o quarto) e outros dois de comparação (em que os alunos deveriam indicar, sem apresentação formal, qual razão era maior, menor ou se eram iguais), com base na classificação de problemas de raciocínio proporcional feita Lesh et al. (1988) e amplamente utilizada por pesquisadores do tema, conforme apontou a literatura.

Nas etapas seguintes foram utilizadas situações-problema com mediação da professora, de modo a favorecer o estabelecimento das relações de covariação e de invariância de grandezas, conforme definição de Ponte et al. (2010). Considerou-se, para esta pesquisa, que uma situação-problema é um problema para o qual não se espera resposta correta de imediato, já que se deseja explorar as ideias envolvidas de modo a levar os alunos a estabelecer certas relações entre as quantidades. Assim, cada etapa da sequência didática consistiu na apresentação de um problema e de um roteiro de atividades que organizava a discussão a ser mediada pela professora e que permitia aos alunos representar as relações estabelecidas por meio de desenhos, tabelas e frases preenchidas com palavras ou símbolos matemáticos.

Cada etapa foi seguida de uma avaliação formada por problemas semelhantes àqueles apresentados na etapa anterior, de modo a identificar os esquemas utilizados pelos alunos. Finalmente, foram apresentados “mais problemas” envolvendo o valor omissso e a comparação entre razões.

A sequência didática foi organizada conforme o Quadro 3.

Quadro 3. Cronograma das atividades da sequência didática

Fonte: Elaboração da autora

Etapas	Número de aulas	Dia
1ª) Avaliação de desempenho	1	17/09
2ª) A primeira situação-problema (Problema das urnas)	2	22/10
3ª) Avaliação 1 (Problema do colar)	2	29/10
4ª) A segunda situação-problema (Problema dos quadrados)	2	12/11
5ª) Avaliação 2 (Sim ou não? Diga como pensou)	1	18/11
6ª) Mais situações-problema	1	26/11

A participação dos alunos foi autorizada por seus responsáveis e pela direção da escola através da assinatura de um termo de consentimento. As folhas com as resoluções dos

problemas e com as representações feitas pelos alunos foram recolhidas para análise. A professora anotou em seu caderno os diálogos que serviram para analisar as relações estabelecidas pelos alunos.

Os dados da avaliação de desempenho foram analisados quantitativamente, utilizando a estatística descritiva, e qualitativamente, quando foram organizadas categorias de análise com base nos esquemas identificados, conforme apresentados pela teoria adotada. Foi feita uma análise interpretativa dos dados referentes à aplicação da sequência, conforme definição de Carvalho (2006), já que foram consideradas a fala, a escrita e as ações da professora e dos alunos durante as aulas.

A investigação pode ser classificada como “pesquisa do professor”, conforme Carneiro (2008). Ao diferenciar a pesquisa científica e a pesquisa do professor, o autor pondera que a científica tem a preocupação com a originalidade, a validade e o reconhecimento por uma comunidade científica; já a pesquisa do professor busca o conhecimento da realidade, para transformá-la, visando a melhoria das práticas pedagógicas.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE A *PRIORI* DA EXPERIÊNCIA

Conforme Almouloud e Coutinho (2008, p.67), o objetivo de uma análise a priori, na perspectiva da Engenharia Didática, é descrever as situações que serão postas aos alunos em “função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá”. Assim, como a sequência foi organizada em seis etapas (Quadro 3), serão apresentadas as etapas seguidas de sua descrição.

1ª etapa: Avaliação de desempenho

A avaliação contém quatro problemas apresentados a seguir (Figura 7).

1) O barzinho da escola está fazendo uma promoção: a cada 5 pães de queijo comprados eles dão dois bombons de brinde. Se eu comprar 15 pães de queijo, quantos bombons eu vou ganhar? Explique como você pensou. Resposta:		
2) Quatro pizzas (iguais) custam R\$ 60,00. Quanto pagaria por 8 dessas pizzas? Explique como você pensou. Resposta:		
3) Em cada situação temos água (copo branco) e suco concentrado (copo amarelo), já adoçado. Ao misturamos todos, indique qual suco (suco A ou suco B) ficará mais forte. Explique como você pensou.		
a) Suco A	Suco B	Resposta:
	ou 	
b) Suco A	Suco B	Resposta:
	ou 	
c) Suco A	Suco B	Resposta:
	ou 	
d) Suco A	Suco B	Resposta:
	ou 	

4) Três meninos, Ronaldo, Felipe e Jairo, estavam treinando chutes a gol. Veja o que aconteceu:

Ronaldo: de cada 2 chutes, fazia 1 gol.

Felipe: de cada 3 chutes, fazia 2 gols.

Jairo: de cada 6 chutes, fazia 3 gols.

Observando as informações acima, responda:

a) Qual menino se saiu melhor no treino, isto é, qual deles teve o melhor desempenho?

Resposta:

b) Houve desempenhos iguais? Explique como você pensou.

Resposta:

Figura 7. Avaliação de desempenho

Fonte: Elaboração da autora

As questões contidas nesta avaliação envolvem o raciocínio proporcional (Figura 7), sendo que os dois primeiros problemas são classificados como de valor omissivo e os dois últimos como de comparação, conforme classificação feita por Lesh et al. (1988). Buscou-se verificar quais estratégias seriam empregadas pelos alunos já que a literatura aponta que os alunos em séries mais avançadas aplicam a estratégia de multiplicação cruzada sem relacionar com o conceito de proporcionalidade. Outros autores afirmam que a natureza multiplicativa das situações proporcionais é uma das tarefas mais difíceis para os alunos compreenderem. Os pesquisadores do tema apontam também que as crianças têm dificuldade em estabelecer comparações parte-todo, isso devido ao fato de não se articular o ensino de frações com o de razões.

2ª etapa: A primeira situação-problema (Problema das urnas)

Nesta etapa, optou-se por apresentar o problema das urnas (Figura 8) para os alunos.

PROBLEMA DAS URNAS

Ana, Benê e Cadu vão encher simultaneamente urnas com bolas pretas e brancas.

Ana vai fazer assim: para cada bola preta, ela vai colocar 2 brancas.

Benê vai fazer assim: 4 brancas para cada bola preta colocada.

Cadu: para cada 2 pretas, vai colocar 3 brancas.

Quando Ana, Benê e Cadu estavam enchendo as urnas, o sinal para o intervalo bateu; então eles perceberam que estavam com o mesmo número de bolas brancas. Então, quem ficou com mais bolas pretas?

Figura 8. Problema das urnas

Fonte: Elaboração da autora

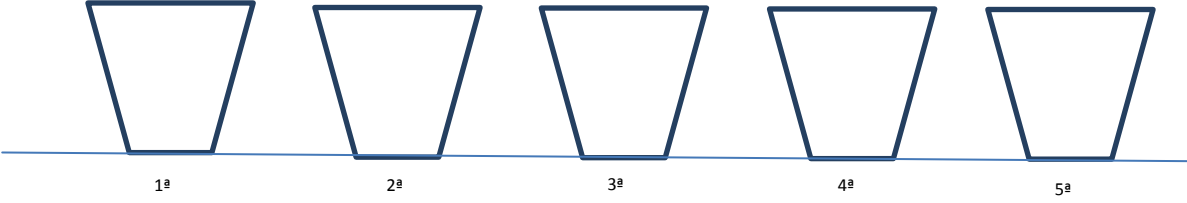
Para a realização desta etapa, devem ser necessários os materiais: três urnas, bolas pretas e brancas. Após a leitura da situação e com o encaminhamento e mediação da

professora, três alunos (que foram selecionados aleatoriamente) devem colocar em suas respectivas urnas as bolas como indicadas no problema.

As fichas para cada urna e para questão final, apresentadas nas Figuras 9, 10, 11 e 12, devem ser entregues para serem preenchidas pelos alunos, com discussão acerca de cada um dos itens, organizada pela professora.

FICHA DA URNA DE ANA

Vamos ver o que acontece com a urna da ANA.
 Nós vamos chamar de FASES, cada vez que ela colocar as bolas na urna e você deve completar os desenhos das urnas e registre na tabela o número total de bolas pretas e o número total de bolas brancas, a cada fase.



FASES	Número de bolas		Razão entre bolas pretas e bolas brancas
	Pretas	Brancas	
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			

1) Se dobrar o número de bolas pretas, também o número de bolas brancas.

2) Se triplicar o número de bolas pretas, também..... o número de bolas brancas.

3) Se multiplicar por 5 o número de bolas pretas, o nº de bolas brancas fica multiplicado por

4) Podemos verificar que o número de bolas pretas e o número de bolas brancas variam

5) Neste problema, as bolas pretas e as bolas brancas são chamadas de GRANDEZAS

6) As grandezas bolas pretas e bolas brancas são proporcionais na RAZÃO 1 para 2 (1 preta para 2) ou 1:2 ou ½.

7) As grandezas bolas brancas e bolas pretas são proporcionais na RAZÃO 2 para 1 (..... brancas para preta) ou 2:1 ou -.

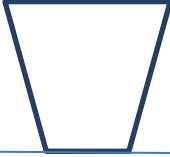
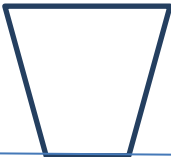
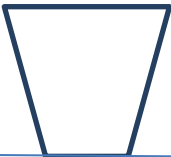
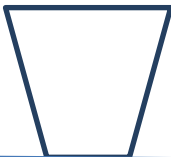
8) Isso quer dizer que o número de bolas é metade do número de bolas, ou o número de bolas é o dobro do número de bolas.....

Figura 9. Ficha da urna de Ana
 Fonte: Elaboração da autora

FICHA DA URNA DE BENÊ

Vamos ver o que acontece com a urna do Benê.

Nós vamos chamar de FASES, cada vez que ela colocar as bolas na urna e você deve completar os desenhos das urnas e registre na tabela o número total de bolas pretas e o número total de bolas brancas, a cada fase.


1ª
2ª
3ª
4ª
5ª

FASES	Número de bolas		Razão entre bolas pretas e bolas brancas
	Pretas	Brancas	
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			

- 1) Se dobrar o número de bolas pretas, também o número de bolas brancas.
- 2) Se triplicar o número de bolas pretas, também..... o número de bolas brancas.
- 3) Se multiplicar por 5 o número de bolas pretas, o número de bolas brancas fica multiplicado por
- 4) Podemos verificar que o número de bolas pretas e o número de bolas brancas variam
- 5) Bolas pretas e bolas brancas são, então GRANDEZAS
- 6) As grandezas bolas pretas e bolas brancas são proporcionais na RAZÃO 1 para (1 preta para) ou ou
- 7) As grandezas bolas brancas e bolas pretas são proporcionais na RAZÃO 4 para..... (..... brancas para preta) ou ou.....
- 8) Isso quer dizer que o número de bolas é do número de bolas, ou o número de bolas é a do número de bolas.....

Figura 10. Ficha da urna de Benê

Fonte: Elaboração da autora

FICHA DA URNA DO CADU

Vamos ver o que acontece com a urna do Cadu.

Nós vamos chamar de FASES, cada vez que ela colocar as bolas na urna e você deve completar os desenhos das urnas e registre na tabela o número total de bolas pretas e o número total de bolas brancas, a cada fase.

FASES	Número de bolas		Razão entre bolas pretas e bolas brancas
	Pretas	Brancas	
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			

- 1) Se dobrar o número de bolas pretas, também o número de bolas brancas.
- 2) Se triplicar o número de bolas pretas, também..... o número de bolas brancas.
- 3) Se multiplicar por 1,5 o número de bolas pretas, o nº de bolas brancas fica multiplicado por
- 4) Podemos verificar que o número de bolas pretas e o número de bolas brancas variam
- 5) Bolas pretas e bolas brancas são, então, ...
- 6) As grandezas bolas pretas e bolas brancas são proporcionais na RAZÃO 2 para 3 (2 preta para) ou ou ...
- 7) As grandezas bolas brancas e bolas pretas são proporcionais na RAZÃO 3 para..... (..... brancas para preta) ou ou.....
- 8) Isso quer dizer que o número de bolas..... é $\frac{2}{3}$ do número de bolas, ou o número de bolas é do número de bolas.....

Figura 11. Ficha da urna de Cadu

Fonte: Elaboração da autora

FICHA COM A QUESTÃO FINAL									
Se as urnas estiverem com o mesmo número de bolas brancas, qual terá mais bolas pretas? Tente responder por meio da tabela.									
FASES	URNA DA ANA			URNA DO BENÊ			URNA DO CADU		
	Pretas	Branças	Razão entre bolas pretas e bolas brancas	Pretas	Branças	Razão entre bolas pretas e bolas brancas	Pretas	Branças	Razão entre bolas pretas e bolas brancas
1ª									
2ª									
3ª									
4ª									
5ª									
6ª									
7ª									
O que você concluiu? Quando bateu o sinal, quem ficou com mais bolas pretas? Você pode tentar responder fazendo uma comparação entre as razões que foram obtidas nas urnas de Ana, Benê e Cadu. Resposta:									

Figura 12. Ficha com a questão final

Fonte: Elaboração da autora

O primeiro problema (Problema das urnas) enfatiza questões da comparação entre as grandezas (quantidade de bolas pretas e quantidade de bolas brancas) e o trabalho envolve as relações de primeira e segunda ordem conforme aponta Spnillo (1992). As relações de segunda ordem são estabelecidas a partir das relações de primeira ordem, quando os alunos comparam bolas pretas com brancas (parte-parte), pretas com o total (parte-todo) ou brancas com o total (parte-todo). No momento que os discentes começam a relacionar as urnas de Ana, Benê e Cadu para descobrir em qual urna há mais bolas pretas, devem estabelecer as relações de segunda ordem e registrar o raciocínio na folha de atividades.

É importante que na questão final a professora deixe que os alunos percebam a necessidade de continuidade da tabela, estabelecendo as relações de segunda ordem para entender que a resposta correta poderá ser dada quando em cada urna houver a mesma quantidade de bolas brancas, diferenciando apenas as bolas pretas.

No preenchimento das tabelas a professora deve levar a turma a notar o princípio multiplicativo por meio da covariação de grandezas e a invariância de grandezas. A covariação de grandezas refere-se às relações multiplicativas dentro das variáveis, o que pode ser observado nas Figuras 13, 14 e 15.

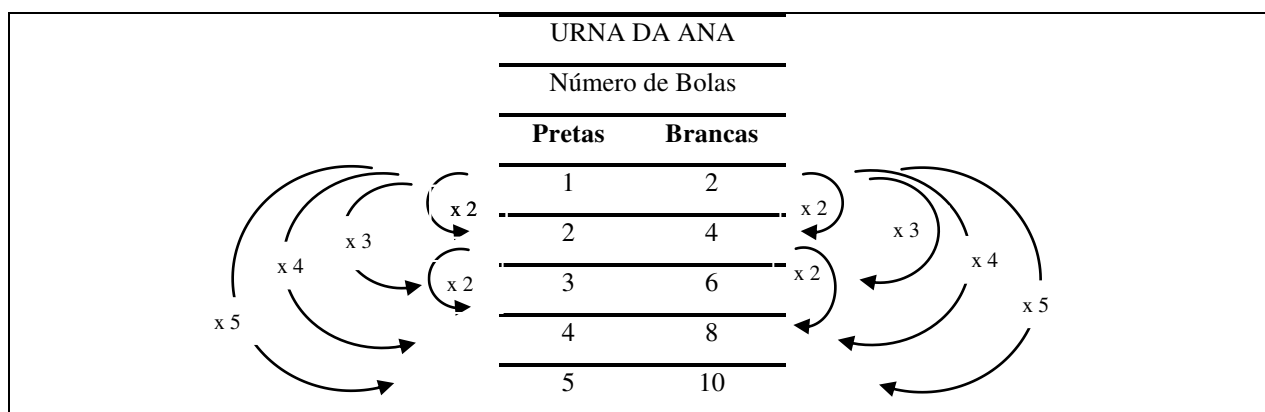


Figura 13. Esquema da relação de covariação das grandezas na urna de Ana
Fonte: Elaboração da autora

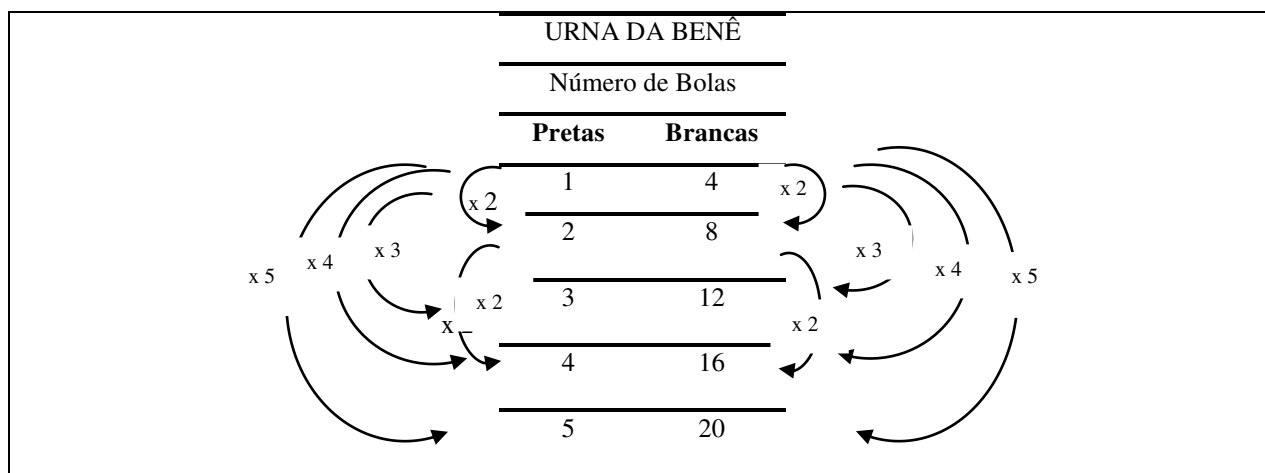


Figura 14. Esquema da relação de covariação das grandezas na urna de Benê
Fonte: Elaboração da autora

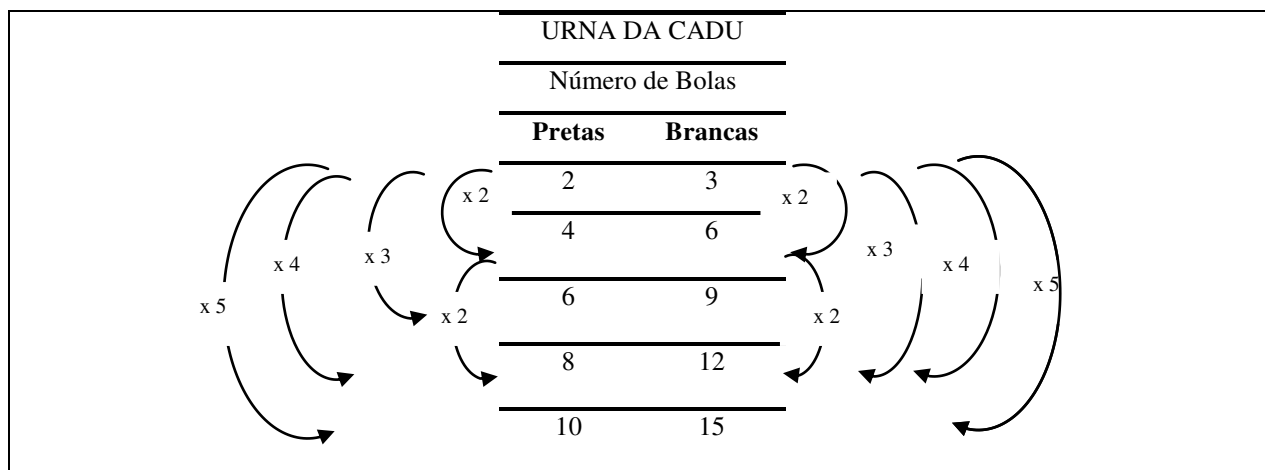


Figura 15. Esquema da relação de covariação das grandezas na urna de Cadu
Fonte: Elaboração da autora

Já a relação de invariância refere-se às relações de multiplicação entre duas variáveis. Na situação das urnas, o esquema está apoiado na invariância que se mantém no decorrer das urnas de Ana, Benê e Cadu (Figuras 16, 17 e 18).

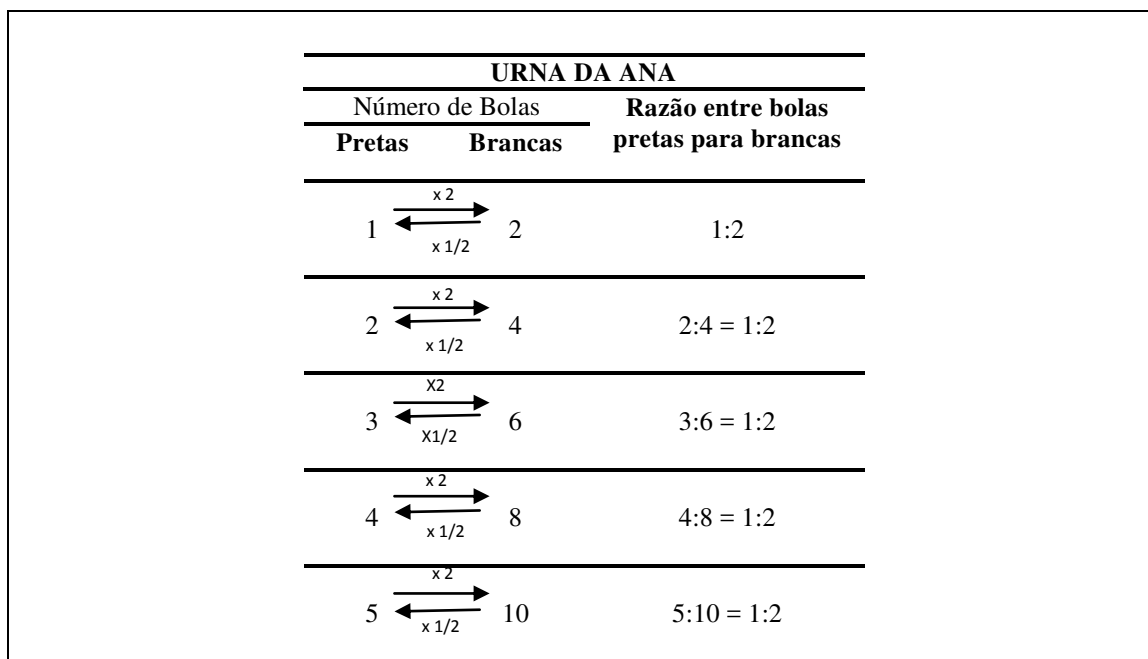


Figura 16. Esquema da relação de Invariância das grandezas na urna de Ana
Fonte: Elaboração da autora

URNA DA BENÊ		
Número de Bolas		Razão entre bolas pretas para brancas
Pretas	Brancas	
1	4	1:4
2	8	2:8 = 1:4
3	12	3:12 = 1:4
4	16	4:16 = 1:4
5	20	5:20 = 1:4

Figura 17: Esquema da relação de Invariância das grandezas na urna de Benê
Fonte: Elaboração da autora

URNA DA CADU		
Número de Bolas		Razão entre bolas pretas para brancas
Pretas	Brancas	
2	3	2:3
4	6	4:6 = 2:3
6	9	6:9 = 2:3
8	12	8:12 = 2:3
10	15	10:15 = 2:3

Figura 18: Esquema da relação de Invariância das grandezas na urna de Cadu
Fonte: Elaboração da autora

Por fim, para responder a questão final, os alunos devem chegar à conclusão de que a razão $\frac{2}{3}$ é maior que as razões $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$, ou seja, devem conseguir comparar as razões, colocando-as em ordem crescente: $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$.

3ª etapa: Avaliação 1 (Problema do colar)

Em outra aula, deve ser entregue aos discentes uma folha contendo um problema parecido com o das urnas (Figura 19), intitulado “Problema do colar” – adaptado do trabalho de Ponte et al. (2010) – com o objetivo de avaliar a compreensão do conceito de razão por meio dos esquemas empregados na solução.

PROBLEMA DO COLAR

A Maria está fazendo um colar para oferecer à sua amiga. Só tem contas de duas cores - brancas e azuis. Começou a construir o colar colocando três contas azuis e duas contas brancas. O desenho ao lado mostra o colar sendo construído na 1ª etapa.

Na sequência, colocou mais três contas azuis e duas contas brancas. A 2ª etapa está representada na figura ao lado:

1)Desenhe a 3ª etapa do colar na figura ao lado, seguindo o mesmo padrão:

2)Complete: Para a 4ª etapa, a Maria usou ____ contas azuis e ____ contas brancas.

3)Complete a tabela:

Etapas	Número de contas		Razão entre o número de contas azuis para contas brancas
	Azuis	Brancas	

4)Quantas contas azuis e quantas brancas vai ter o colar na quinta etapa? Explique como você pensou.

5)E na 30ª etapa, o colar vai ter quantas contas azuis? E quantas brancas? Explique como você pensou.

6)Em uma das etapas, havia 21 contas azuis. Quantas eram as brancas, nessa etapa? Como pensou?

7)Quando ela terminou o colar, verificou que havia 48 bolas brancas. Quantas eram as azuis? Como pensou?

8)O Número de contas azuis e o número de contas brancas são grandezas proporcionais? Por quê?

O diagrama ilustra a construção de um colar em três etapas. A primeira etapa mostra uma curva com 3 contas azuis e 2 contas brancas. A segunda etapa mostra a mesma curva com 6 contas azuis e 4 contas brancas. A terceira etapa mostra uma curva vazia para o aluno desenhar a próxima etapa.

Figura 19: Problema do colar

Fonte: Elaboração da autora

Com a resolução do problema do colar, espera-se que os alunos estabeleçam e representem as relações de covariância e invariância das grandezas, sendo almejado o esquema apresentado na Figura 20.

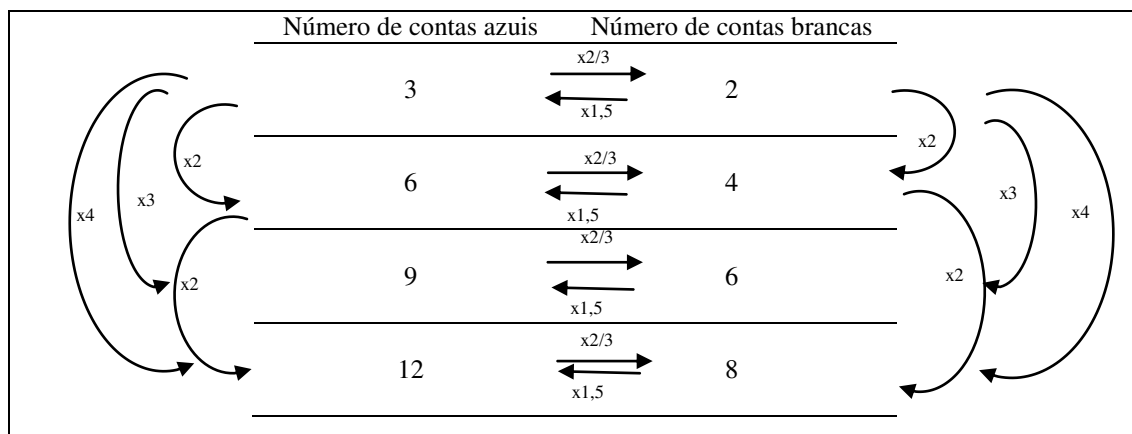


Figura 20. Esquema de Relação de Invariância e covariação das grandezas do problema do colar

Fonte: Elaboração da autora

Após a montagem deste esquema, esperava-se ainda que os alunos consigam responder as perguntas de número 5, 6, 7 e 8, apresentando justificativas que evidenciem o raciocínio proporcional.

4ª etapa: A segunda situação-problema (Problema dos quadrados)

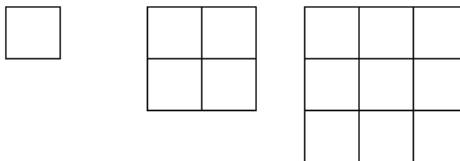
A segunda situação (Figura 21) foi retirada da proposta de Ponte et al. (2010), com o objetivo de levar os alunos a perceberem regularidades e fazer generalizações.

Com essa tarefa, espera-se que os alunos consigam evidenciar a relação de proporcionalidade entre o comprimento do lado do quadrado e o seu perímetro, observando também que não há proporcionalidade entre o comprimento do lado do quadrado e a sua área.

Em um primeiro momento, a professora deve entregar a tarefa aos alunos deixando que eles exponham suas ideias para, em seguida, encaminhar a solução junto aos alunos.

PROBLEMA DOS QUADRADOS

Observe a sequência, sendo que cada quadrado tem 1 cm de lado:



1. Desenhe a 4.^a figura da sequência e explique o que você pensou ao fazer o desenho.
2. Complete a tabela:

Quadrado	Medidas do quadrado		Razão entre a medida do lado do quadrado para o perímetro do quadrado
	Lado	Perímetro	
1º			
2º			
3º			
4º			
3. Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado mede 20 cm? Explique como você pensou.
4. Escreva uma frase que relacione a medida do lado de um quadrado qualquer com o seu perímetro.
5. Determine a medida do lado de um quadrado que tem perímetro igual a 40 cm. Explique como você pensou.
6. A medida do lado do quadrado e o perímetro do quadrado são grandezas proporcionais? Por quê?
7. Complete a tabela.

Quadrado	Medidas do quadrado		Razão entre a medida do lado do quadrado para a área do quadrado
	Lado	Área	
1º			
2º			
3º			
4º			
8. Qual é a área de um quadrado cujo lado mede 9 cm? Explique como você pensou.
9. Determine a medida do lado de um quadrado que tem área igual a 121 cm^2 . Explique como você pensou.
10. Escreva uma frase que relacione a medida do lado de um quadrado qualquer com a sua área.
11. A medida do lado do quadrado e a área do quadrado são grandezas proporcionais? Por quê?

Figura 21. Problema dos quadrados

Fonte: Elaboração da autora

Para o desenvolvimento dessa situação seria importante que os alunos já tivessem formado o conceito de área e perímetro.

Com essa tarefa os discentes têm a oportunidade de perceber a covariação do comprimento do lado e o perímetro e a invariância da razão entre perímetro e o comprimento do lado que, neste caso, corresponde ao número de lados da figura (Figuras 22 e 23).

Medidas do quadrado	
Lado	Perímetro
1	4
2	8
3	12
4	16

Figura 22. Esquema de relação de covariação das grandezas

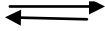
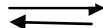
Medidas do quadrado		Razão entre a medida do lado para o perímetro do quadrado
Lado	Perímetro	
1	$\xrightarrow{\quad x\ 4 \quad}$  $\xleftarrow{\quad x\ 1/4 \quad}$	4
2	$\xrightarrow{\quad x\ 4 \quad}$  $\xleftarrow{\quad x\ 1/4 \quad}$	8
3	$\xrightarrow{\quad x\ 4 \quad}$  $\xleftarrow{\quad x\ 1/4 \quad}$	12
4	$\xrightarrow{\quad x\ 4 \quad}$  $\xleftarrow{\quad x\ 1/4 \quad}$	16

Figura 23. Esquema de relação de Invariância das grandezas

Com relação à área de um quadrado espera-se que os alunos percebam que não existe uma relação de covariação nem invariância entre as grandezas (Figuras 24 e 25), não se tratando, portanto de uma relação de proporcionalidade.

Medidas do quadrado		
	Lado	Área
	1	1
	2	4
	3	9
	4	16

Figura 24. Esquema mostrando que não há relação de covariação entre as grandezas

Medidas do quadrado			Razão entre a medida do lado para a área do quadrado
Lado		Área	
1	x 1 x 1/1	1	1:1
2	x 2 x 2/4	4	2:4=1:2
3	x 3 x 3/9	9	3:9=1:3
4	x 4 x 4/16	16	4:16=1:4

Figura 25. Esquema mostrando que não há relação de invariância entre as grandezas.

Fonte: Elaboração da autora

5ª etapa: Avaliação 2 (Sim ou não? Diga como pensou)

Para a avaliação deve ser entregue uma folha aos alunos pedindo que eles indiquem se as frases eram verdadeiras ou falsas e ainda que justifiquem suas respostas (Figura 26). O objetivo era identificar se os alunos a partir da situação apresentada e resolvida anteriormente – Problema dos quadrados – conseguiriam justificar quando uma determinada situação envolvia grandezas proporcionais ou também quando acontecia o contrário, ou seja, não ser proporcional.

Sim ou não? Diga como pensou	
1)	Vou comprar doces e cada doce custa R\$ 2,00. A quantia que eu vou pagar vai variar proporcionalmente em relação ao número de doces que comprei?
2)	Carla tem 40 anos e seu filho José tem 20. As idades de ambos irão variar proporcionalmente?
3)	Se Clara chega à escola em 10 minutos, então ela e sua amiga levam 20 minutos para chegar a escola?
4)	Se uma caixa de cereais custa R\$ 2,80, então duas custam R\$5,60?
5)	Se um rapaz faz um modelo de carro em 2 horas, pode fazer 3 modelos iguais em 6 horas?
6)	Se o Hugo pinta o muro em 2 dias, o Hugo, o Tomás e um terceiro colega pintam em 6 dias?

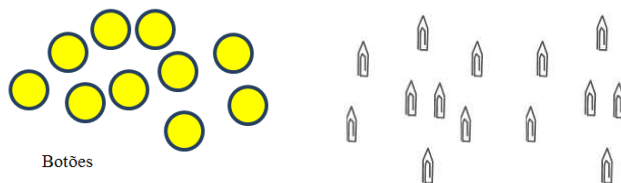
Figura 26. Avaliação 2: Sim ou não? Diga como pensou

Fonte: Elaboração da autora

6ª etapa: Mais situações-problemas

Em continuidade ao trabalho, devem ser disponibilizados mais problemas (Figura 27).

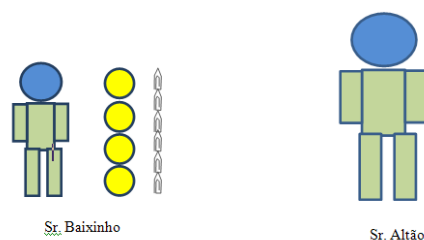
1) Sr. Altão e Sr. Baixinho



Botões

Clipes

A altura do Sr. Baixinho é 4 botões ou de 6 clipes.
A altura do Sr. Altão é de 6 botões.
Qual a altura do Sr. Altão em clipes?

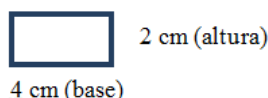


Sr. Baixinho

Sr. Altão

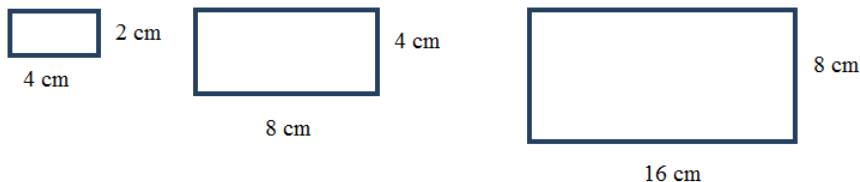
2) Retângulos

Maria desenhou o retângulo a seguir com 4 cm de base e 2 cm de altura:



4 cm (base)

Depois, ela quis ampliar o desenho e fez vários outros retângulos, dobrando as medidas. Continuou triplicando, quadruplicando etc e fez muitos retângulos. Veja alguns retângulos que ela desenhou.



Um dos retângulos desenhados por Maria tinha 40 cm de base. Qual era a altura desse retângulo?
Escreva como você pensou.

3) Sim ou não? Diga como pensou

- a) Se Clara gasta 10 minutos para chegar à escola, então ela e sua amiga juntas levariam 20 minutos para chegar a escola?
- b) Se seis caixas iguais pesam 200 kg, então três dessas caixas pesariam 100 kg?
- c) Se hoje Marta tem 10 anos e Deise tem 20 anos, então quando Marta tiver 30 anos Deise terá 60 anos?

4) Probleminhas

- a) Com 7 latas de tinta consigo pintar 10 m de parede. Então, se eu quiser pintar 30 m de parede, de quantas latas de tinta eu vou precisar?
- b) Tatiana, Bruna e Lara estão treinando bola ao cesto. Veja o desempenho delas:
Tatiana – fez 10 arremessos e conseguiu 4 cestas
Bruna – fez 4 arremessos e conseguiu 3 cestas
Lara – fez 5 arremessos e conseguiu 2 cestas.
Quem se saiu melhor no treino? Houve desempenhos iguais?
- c) A cada vinte e cinco reais em abastecimento de combustível, o Posto Parada Boa dá cinco pães de

brinde. Se Ronaldo abastecer seu carro com cem reais de combustível, quantos pães ele ganhará?

Figura 27. Mais problemas.

Fonte: Elaboração da autora

Esta etapa da metodologia objetiva avaliar se os alunos conseguem resolver problemas sobre proporção sem a utilização de técnicas. Os problemas envolvem o valor omissivo e a comparação entre razões, podendo ser resolvidos por meio do estabelecimento da relação de covariação e invariância das grandezas.

Espera-se que no primeiro problema seja realizado um esquema demonstrando a relação de covariação, assim como na Figura 28.

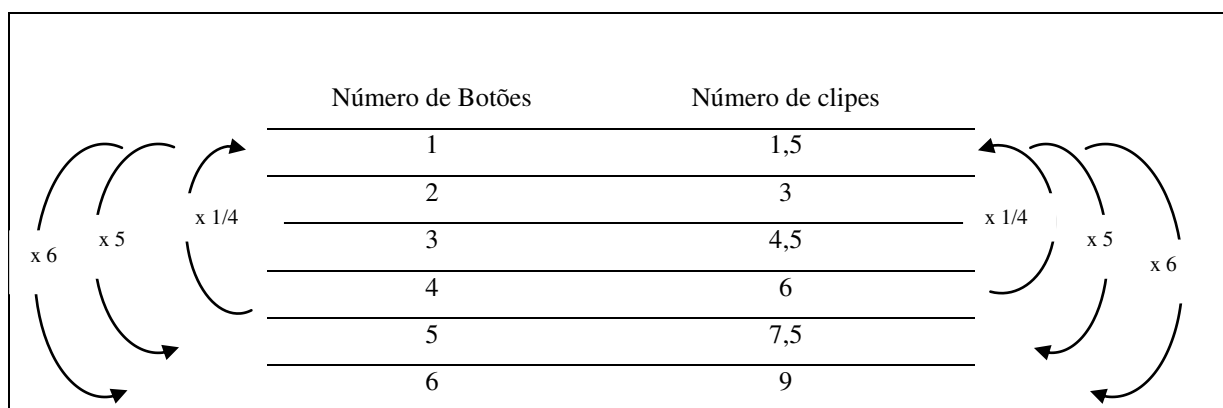


Figura 28. Esquema de relação de covariação das grandezas envolvendo a altura do Sr. Baixinho e do Sr. Altão

Fonte: Elaboração da autora

No segundo problema os alunos tem a oportunidade de se apoiar na relação de invariância ou covariação para responder ao proposto, como segue na Figura 29.

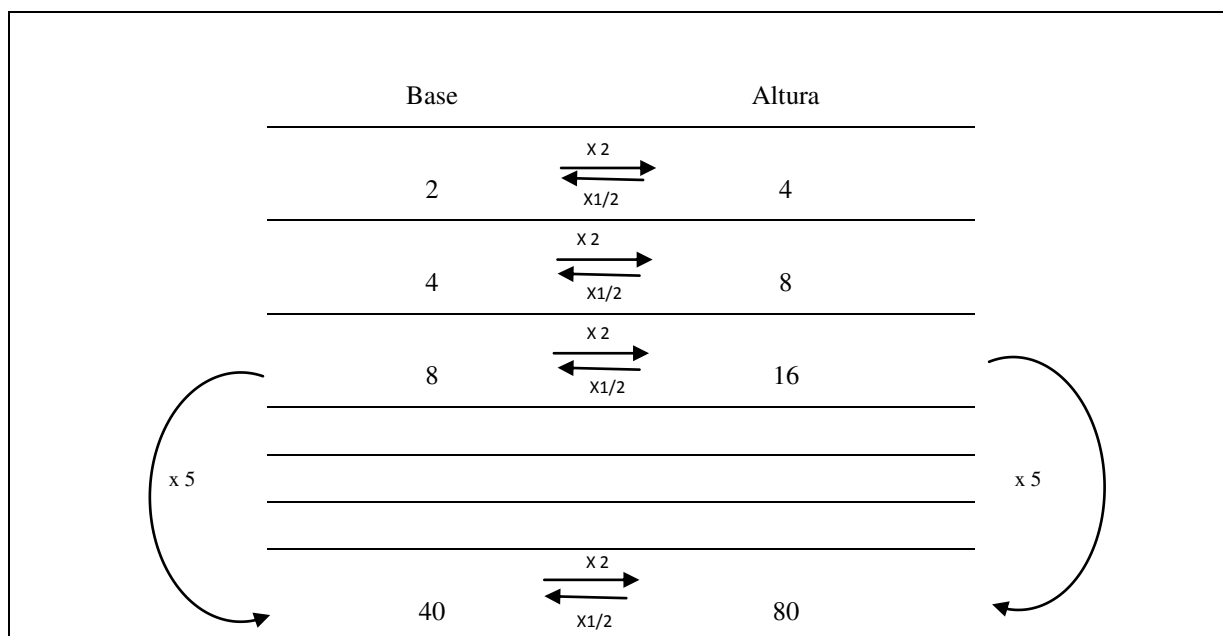


Figura 29. Esquema de relação de invariância das grandezas do problema 2

Fonte: Elaboração da autora

A terceira questão, que se refere a várias situações, tem por objetivo verificar se o aluno consegue identificar grandezas proporcionais, utilizando quaisquer dos esquemas.

A quarta questão, formada por dois problemas de valor omisso e um de comparação de razões, objetiva avaliar se o aluno se vale dos esquemas aprendidos para resolvê-los.

CAPÍTULO 5

A IMPLEMENTAÇÃO DA EXPERIÊNCIA

A terceira fase da engenharia didática proposta por Artigue (1996 apud CARNEIRO, 2005) é relativa à implementação da experiência.

A sequência didática teve sua aplicação seguindo a ordem de ações proposta no Quadro 3, exposto na metodologia. Será apresentado o decorrer de cada etapa, o quantitativo de acertos e erros, as estratégias identificadas para cada problema e, a seguir, a análise paralela para cada participante (chamados de S1, S2 etc.) em quadros que mostram o desempenho geral dos alunos por problema proposto.

Com relação aos problemas de valor omissivo, foram identificados dois grupos de estratégias: aditivas e multiplicativas. As estratégias aditivas compreenderam representações pictóricas, que pareciam indicar contagem, e/ou indicativas de operações e de algoritmos de cálculos.

Nos problemas de comparação, foram identificadas as estratégias: referencial de metade, covariação e conceito de razão.

No geral, as estratégias utilizadas pelos alunos, bem como as relações estabelecidas por eles na solução dos problemas foram resumidas na Figura 30 que são as mesmas elencadas por Viana e Miranda (2016).

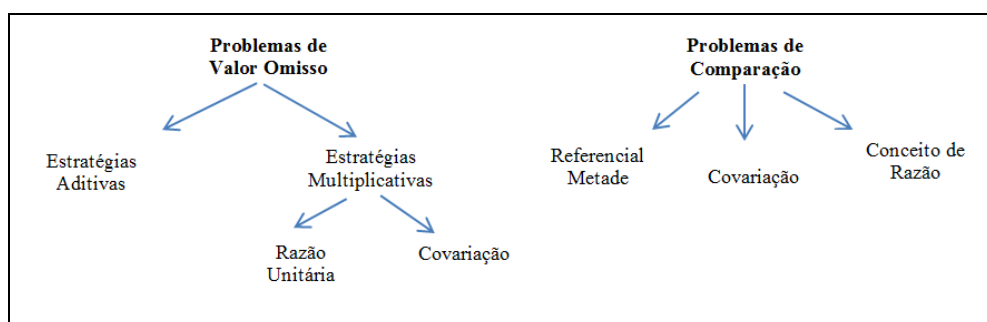


Figura 30. Resumo das estratégias e relações identificadas na solução dos problemas

Fonte: Viana e Miranda (2016)

1ª etapa: Avaliação de Desempenho

Dos vinte e seis alunos que compunham o 6º ano, no dia da aplicação da avaliação de desempenho (17/09/2015) faltaram três alunos. Desta forma, obtivemos vinte e três questionários resolvidos, o que serviu de aporte para a realização da análise das respostas dos alunos.

Como já relatado anteriormente, o Problema 1 e o Problema 2 foram classificados como de valor omissivo, conforme nomenclatura proposta por Lesh et al. (1988). No Quadro 4 é mostrado o desempenho dos alunos no Problema 1 e no Problema 2.

Quadro 4. Desempenho dos alunos nos Problemas 1 e 2 constantes na Avaliação de desempenho
Fonte: Elaboração da autora

	Problema 1: O barzinho da escola está fazendo uma promoção: a cada 5 pães de queijo comprados eles dão dois bombons de brinde. Se eu comprar 15 pães de queijo, quantos bombons eu vou ganhar? Explique como você pensou.	Problema 2: Quatro pizzas (iguais) custam R\$ 60,00. Quanto pagaria por 8 dessas pizzas? Explique como você pensou.
	Número de alunos	Número de alunos
Acertaram	22	20
Erraram	1	3
Total	23	23

Alguns alunos apresentaram a estratégia aditiva para solucionar o Problema 1 (S4, S9, S10, S14 e S19), mas a maioria utilizou estratégias multiplicativas (S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8, S13, S15, S17, S18, S21, S23, S24, S25), ou seja, realizou operações de multiplicação e divisão. Algumas estratégias empregadas pelos alunos que acertaram o Problema 1 são mostradas na Figura 31.

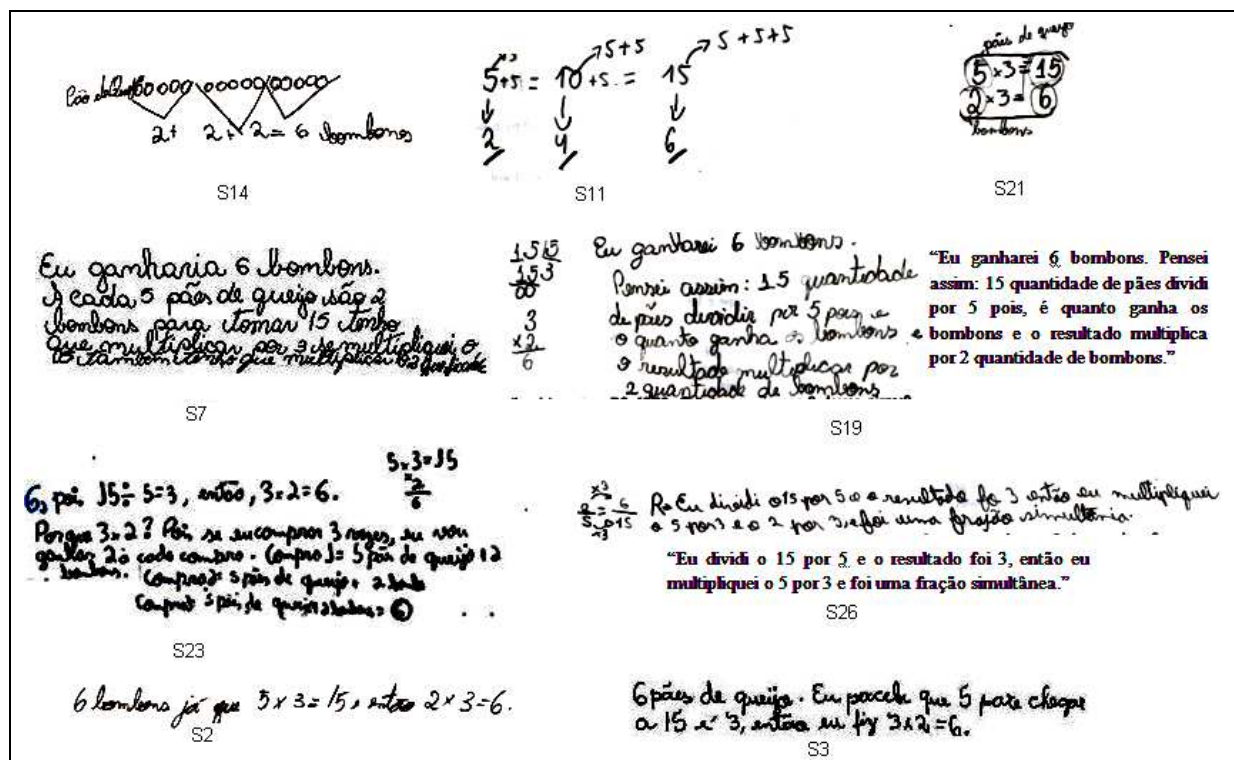


Figura 31. Resoluções corretas dos alunos no Problema 1 constante da Avaliação de desempenho
Fonte: Elaboração da autora

Nota-se na Figura 31 que, apesar do pensamento aditivo demonstrado, S11 parece relacionar cada número da sequência obtida 2, 4, 6 ao número de vezes em que a parcela 5 é escrita, como se estabelecesse a relação de covariação, ou seja, modificasse os elementos de mesma grandeza utilizando o raciocínio escalar.

Notou-se que vários alunos dividiram 15 por 5, como pode ser visto na resolução de S26, o que poderia ser interpretado como determinação da taxa unitária. Infere-se que a operação esteja indicando o estabelecimento de uma relação ternária entre os elementos dados 15 (número de pães a serem comprados) e 5 (número de pães ao qual se tem a referência para os bombons) e o elemento encontrado 3 (que é a relação encontrada entre os outros dois elementos). Esse número, sendo um escalar, é aplicado à outra grandeza (2 bombons) por meio da multiplicação $3 \times 2 = 6$. Nota-se que S19 teve dificuldade para explicar o que significaria o número 3 obtido; já S23 pareceu se apoiar em pensamento multiplicativo (quando se referiu a “comprar 3 vezes”). Outros participantes encontraram a relação “triplo” sem apresentar a divisão – alguns usaram a expressão “para chegar a” (S3). Aplicaram, então, a relação $\times 3$ em ambas as grandezas – utilizando o argumento “também tenho que multiplicar” – demonstrando que haviam estabelecido a relação de covariação (S7).

A relação de covariação pareceu ser mais bem explicitada na solução do Problema 2, quando vários alunos se valem das expressões lógicas “se é o dobro...”; “então tenho que

fazer”, “tem que pagar o dobro” etc.(S1, S2, S3, S5, S6, S7, S13, S14, S15, S18, S21, S25, 26), conforme pode ser visto na Figura 32.

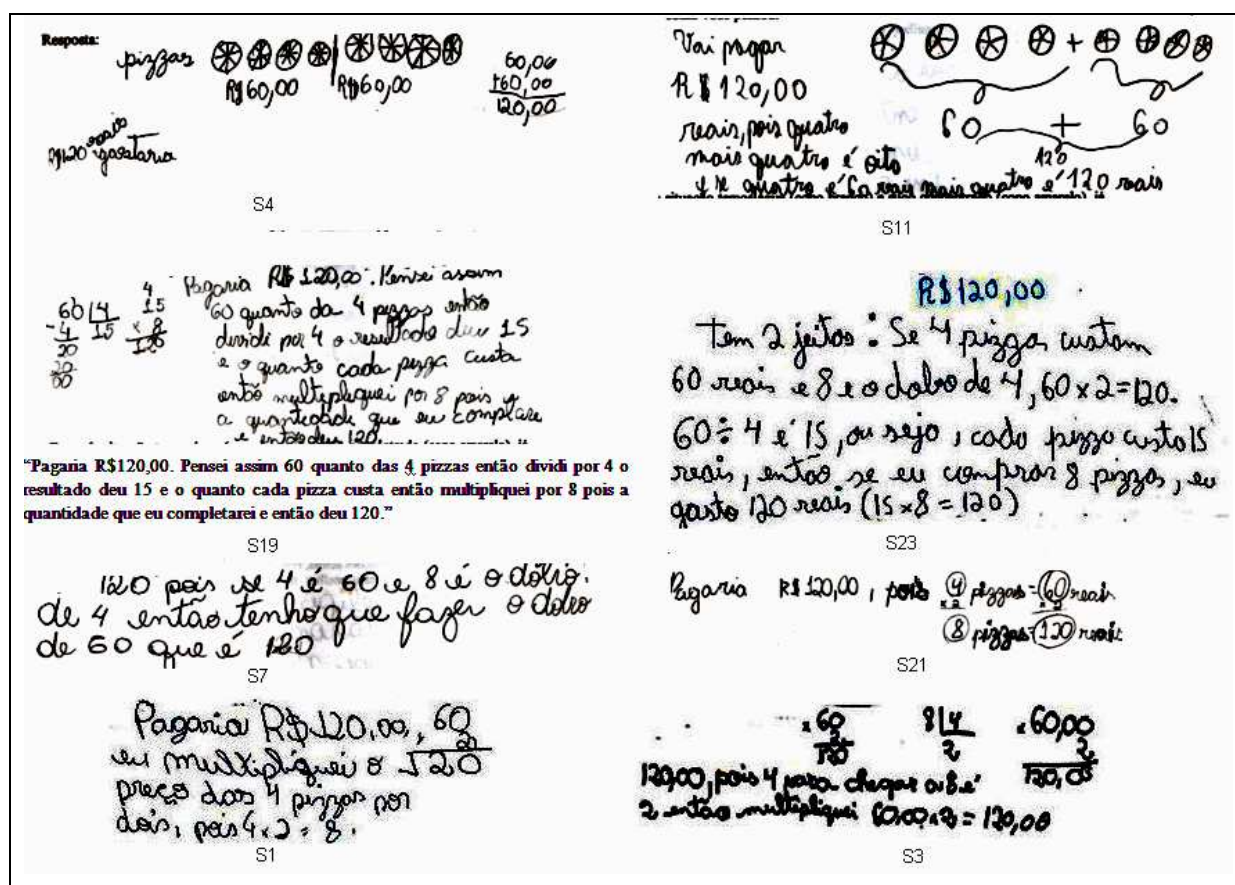


Figura 32. Resoluções corretas dos alunos no problema 2 da avaliação de desempenho
 Fonte: Elaboração da autora

Apenas dois participantes se valeram de estratégias aditivas com representações pictóricas; como demonstram S4 e S11 (Figura 32).

Foi encontrado apenas um participante (S19) que calculou o preço de uma pizza, o que indica a estratégia de determinação da razão unitária, mostrada na Figura 32. Já S23 usou esta estratégia apenas como exemplificação de “jeitos” de resolver o problema – o que leva a crer que a opção pela estratégia da razão unitária pode não estar relacionada a níveis de desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Já os problemas de comparação (Problema 3 e Problema 4) requereram outros tipos de estratégias. No Problema 3 eram apresentados, em quatro situações (a, b, c e d), dois sucos A e B feitos com copos de suco concentrado e de água e o aluno deveria decidir qual suco era o mais forte. Convém esclarecer que as situações (a) e (c) assemelham-se àquelas denominadas por (1) e (2) e constantes na Figura 2 – revisão bibliográfica, conforme proposição feita por Spinillo (1993) e seriam, de acordo com a autora, mais simples. Na situação (a) A e B têm o mesmo número total de copos, sendo que A tem mais suco concentrado (Su) que água (Ag) e

em B dá-se o contrário; em (c) B tem igualdade entre o número de copos de água e o de suco concentrado, o que ajudaria a concluir que A – em que não há igualdade – seria mais forte porque haveria menos água que suco concentrado. A situação (b) foi proposta porque leva a comparar a mesma quantidade de copos (1 copo) de suco concentrado em A e B, o que levaria à conclusão que, com menos água, A seria mais forte. As situações (a), (b) e (c) foram consideradas, por hipótese, como sendo mais simples; a situação (d), mais complexa, já requeria alguma estratégia para a comparação dos sucos A e B. A Figura 33 resume a explicação dada.

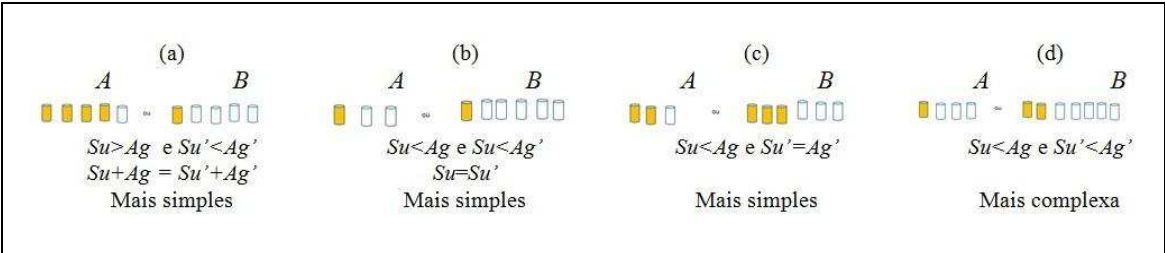


Figura 33. Situações avaliadas no Problema 3 da avaliação de desempenho (Problema de Comparação)
 Fonte: Elaboração da autora

O desempenho nos alunos no Problema 3 é mostrado no Quadro 5.

Quadro 5. Desempenho dos alunos no Problema 3 constante na Avaliação de desempenho
 Fonte: Elaboração da autora

Problema 3: Em cada situação temos água (copo branco) e suco concentrado (copo amarelo), já adoçado. Ao misturamos os dois, indique qual suco (suco A ou suco B) ficará mais forte. Explique como você pensou.				
	(a)	(b)	(c)	(d)
	A B	A B	A B	A B
Número de alunos	19	18	19	11
Acertaram	19	18	19	11
Erraram	4	5	4	12
Total	23	23	23	23

Foram observadas estratégias diversas para a comparação dos sucos: estratégias que explicitamente envolviam o referencial "metade" (metade de água e metade de suco em uma das bebidas) no item (c), estratégias que atravessavam o referencial "metade" (mais suco que água, mais água que suco) nos itens (a) e (b) e ainda aquelas que não utilizavam este referencial no item (d).

A maioria dos alunos acertou as situações propostas (a), (b) e (c), apesar de vários deles não terem apresentado justificativas que indicassem, de fato, as relações estabelecidas:

estas respostas foram denominadas de “mal definidas”. Entre aqueles que apresentaram explicação mais consistente, alguns alunos compararam os copos de água (ou os de suco concentrado) nas duas situações A e B, o que implica no estabelecimento da “relação parte-parte” (S1, S7, S9, S10, S13, S19, S23); alguns se referiram ao total de copos, ou seja, estabeleceram relação “parte-todo” (S2, S6, S17, S18, S21, S25). Algumas respostas corretas são mostradas na Figura 34.

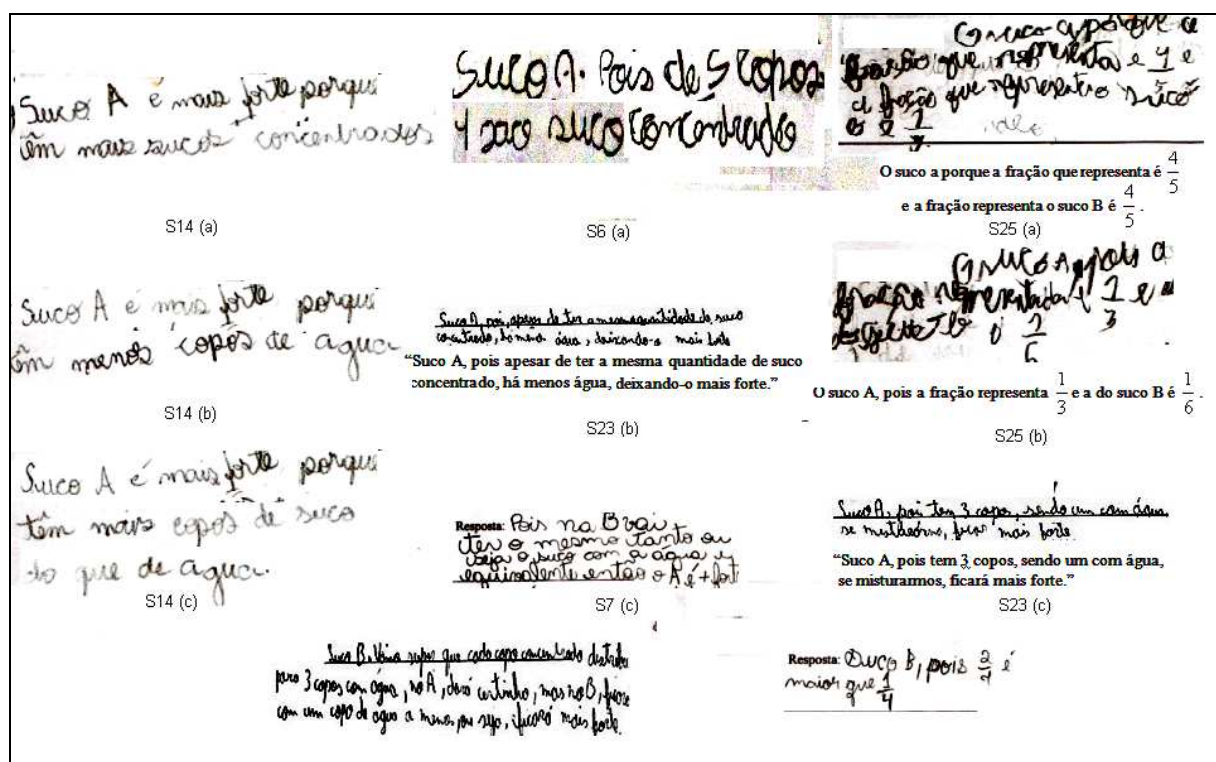


Figura 34. Respostas corretas dos alunos no problema 3 da avaliação de desempenho

Fonte: Elaboração da autora

Na Figura 34, nota-se que S23(b) apresenta maior clareza no item (b) do que no item (c), ou seja, em S23(c). Notou-se que, para a situação (c), nenhum participante referiu-se à metade do total de copos em B, apesar de se valer da igualdade de copos como forma de realizar a comparação – conforme pode ser visto em S7(c).

No item (d), o único participante que pareceu demonstrar a relação de covariação – característica do raciocínio proporcional – foi S23(d): nota-se, pela Figura 34, que ele identifica a relação 1:3 em A (apesar de não representá-la desta forma) e utiliza o escalar 2 (dobrando) as quantidades de água e de suco para obter um suco equivalente; compara este com B e percebe que faltaria 1 copo.

Já a Figura 35 mostra algumas respostas incorretas apresentadas pelos alunos.

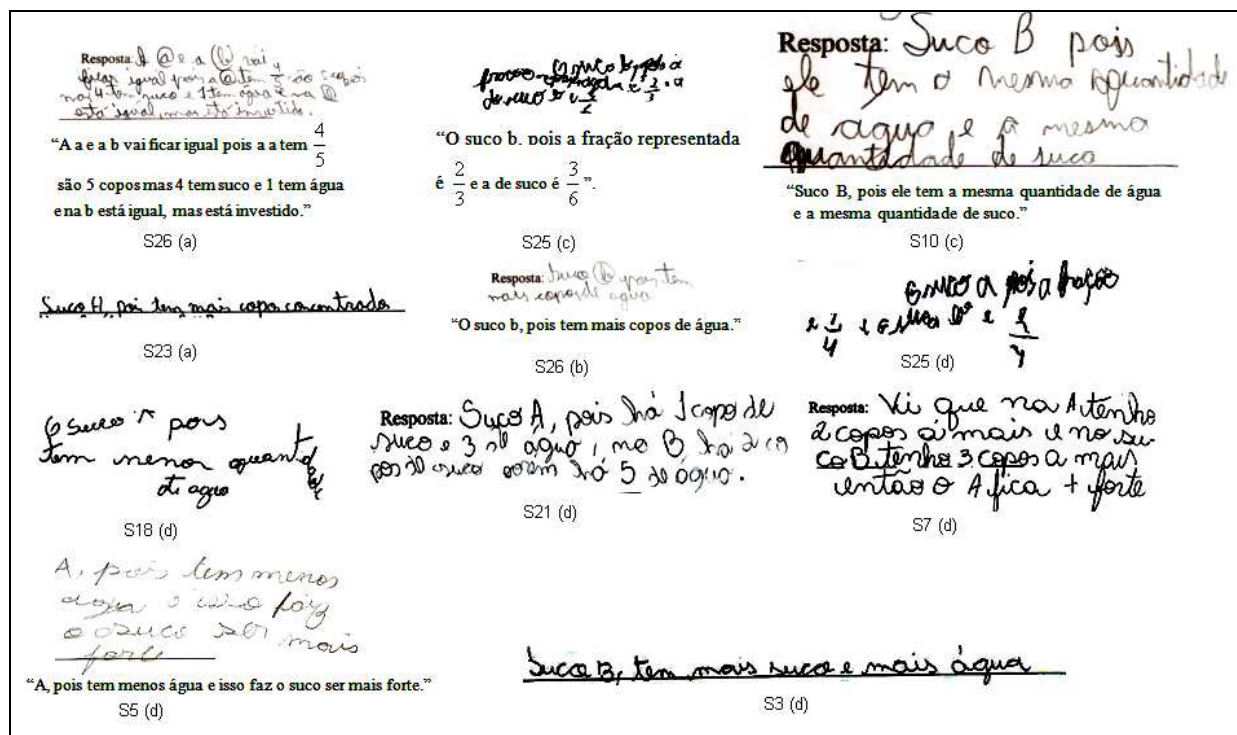


Figura 35. Respostas incorretas dos alunos no problema 3 da avaliação de desempenho
Fonte: Elaboração da autora

Observa-se, na Figura 35, que S23(a) não estabelece comparação entre A e B. No item (c) – aparentemente simples – alguns alunos se atrapalham na escolha do suco mais forte A nas situações analisadas: S10(c), apesar de verificar a igualdade em B, não se convence que A seria mais forte; S25(c) até se vale da representação na forma de razões, o que caracterizaria a relação parte-todo, mas erra a alternativa porque não consegue estabelecer relação de ordem entre elas.

Nota-se, que no item d, S25(d) tenta utilizar fração para fazer a comparação; soluções erradas também podem ser vistas em S18(d), S21(d) e S3(d), em que a justificativa apresentada não esclarece a escolha da alternativa. S7(d) parece tentar determinar uma relação invariante nos dois sucos, pois afirma que em A “tenho 2 copos a mais”, talvez se referindo à razão 1 copo de suco para 1 de água e observando os copos de água supostamente restantes (restariam, pelo raciocínio do estudante, 2 de água em A e 3 de água em B – o que justificaria, equivocadamente, que A era mais forte).

O estabelecimento de relações que indicam o raciocínio proporcional foi investigado nas justificações apresentadas ao Problema 4, também de comparação. O desempenho nos alunos no Problema 4 é mostrado no Quadro 6.

Quadro 6. Desempenho dos alunos no Problema 4 constante na Avaliação de desempenho

Fonte: Elaboração da autora

Problema 4: Três meninos, Ronaldo, Felipe e Jairo, estavam treinando chutes a gol. Veja o que aconteceu: Ronaldo: de cada 2 chutes, fazia 1 gol. Felipe: de cada 3 chutes, fazia 2 gols. Jairo: de cada 6 chutes, fazia 3 gols. Observando as informações acima, responda:		
a) Qual menino se saiu melhor no treino, isto é, qual deles teve o melhor desempenho?	b) Houve desempenhos iguais? Explique como você pensou.	
	Número de alunos	Número de alunos
Acertaram	13	6
Erraram	10	17
Total	23	23

Na Figura 36 são apresentadas algumas respostas corretas dos alunos e na Figura 37 as incorretas.

Handwritten student answers for Problem 4, showing calculations and reasoning for Ronaldo, Felipe, and Jairo's performance.

S17 (a): Felipe, pois acertou mais da metade dos chutes $\frac{2}{3}$

S5 (b): Sim - pois $\frac{2}{2} = 1$ e $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ → Jairo

S5 (a): Felipe. Pois se por exemplo cada um teve 6 chances Ronaldo e Jairo fariam 3 e Felipe 4

S7 (b): Sim de Ronaldo e Jairo os dois acertaram metade de seus chutes.

S7 (a): Felipe pois os outros dois só acertaram metade dos chutes e Felipe mais da metade.

S1 (b): Sim, pois Ronaldo e Jairo fizeram de gols de metade dos números de chutes, como se fosse metade, então colocamos um 1 depois:

$$\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$$
 então os dois são equivalentes.

S1 (a): Felipe, pois ele fez 2 gols a cada 3 chutes. Jairo: 3 a cada 6, mais que a metade de 3. Ronaldo: $\frac{1}{2}$ gol a cada 2 chutes. Felipe: $\frac{2}{3}$ gol a cada 3 chutes. Jairo: $\frac{3}{6}$ gol a cada 6 chutes. Então Felipe é o melhor.

S21 (a) e (b): Ronaldo: 50% de acerto
 Felipe: 66...% de acerto
 Jairo: 50% de acerto
 Felipe tem o melhor desempenho
 Sim o desempenho de Ronaldo e de Jairo foi igual: 50%.

S2(a): Felipe já que sua porcentagem de aproveitamento era melhor, sendo cerca de 66.666% comparado com os outros que são apenas de 50%.

Figura 36. Respostas corretas dos alunos no problema 4 da avaliação de desempenho

Fonte: Elaboração da autora

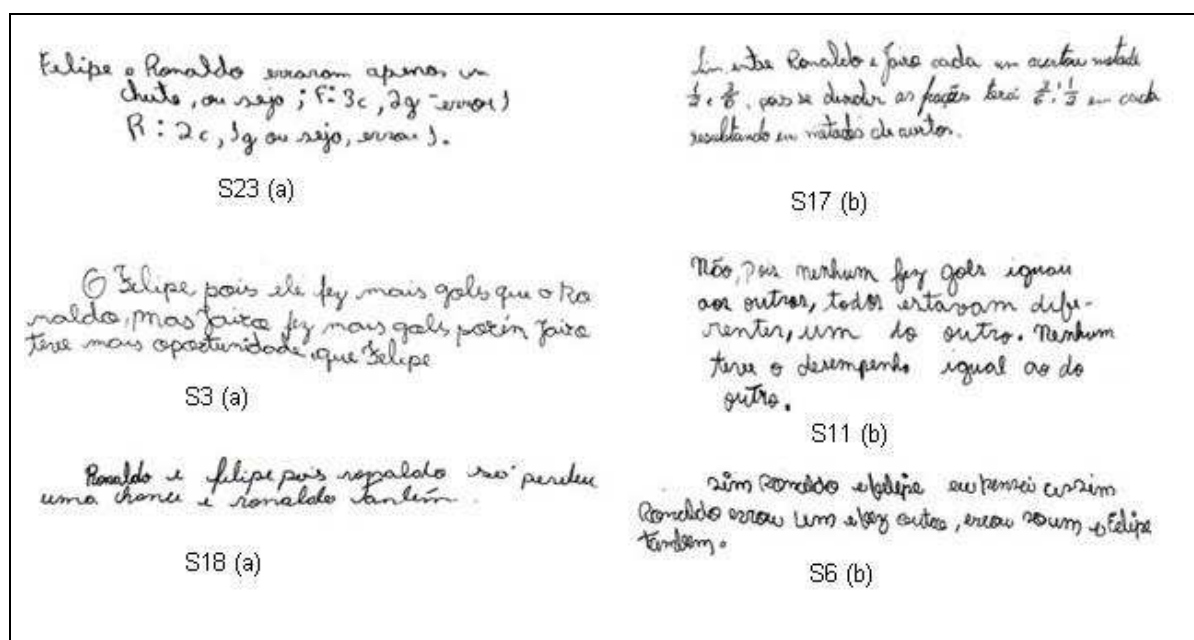


Figura 37. Respostas incorretas dos alunos no problema 4 da avaliação de desempenho

Fonte: Elaboração da autora

Na Figura 36, podem ser encontradas justificativas mais consistentes apoiadas no Referencial Metade para resolver os itens apresentados – S1(a) e (b), S7(a) e (b), S17(a) – e nota-se que S1 escreve as frações para cada jogador.

Apenas um aluno (S5) faz uso correto do Conceito de Razão, estabelecendo a relação de equivalência entre as razões que comparam o número de chutes com o de gols.

Observou-se que dois alunos – S2(a) e S21(a) e (b) – utilizaram o referencial de metade apoiados na porcentagem. É importante destacarmos que estes alunos eram oriundos de outra escola, e não sabemos ao certo se estes já haviam visto o conteúdo abordado.

Com relação ao item (a), verificou-se que a maioria dos participantes demonstrou dificuldade em estabelecer as relações necessárias para realizar a comparação solicitada. Nota-se – Figura 37 – que alguns participantes colocam foco no número de chutes errados, como em S23(a) e S18(a). S3(a) tenta estabelecer relação entre os chutes de Felipe e de Jairo, alegando que este teve “mais chances”, mas não consegue justificativa consistente para sua resposta.

As mesmas dificuldades verificadas para responder ao item (a) também foram identificadas no item (b) do Problema 4, em que se perguntava se teria havido desempenhos iguais. A maioria dos participantes apresentou respostas parecidas com S6(b) e S18(a) – Figura 37 –, ou seja, consideram equivalentes os desempenhos de Ronaldo e de Felipe,

alegando que ambos erraram 1 gol. Já S11(b) considera que os desempenhos foram diferentes, apesar de não apresentar explicação para a resposta.

O Quadro 7 apresenta o desempenho dos participantes nos problemas resolvidos. Estão destacadas em cinza escuro as questões que foram respondidas corretamente e/ou que continham estratégias e relações identificáveis. Em cinza claro, aquelas que, apesar da resposta ou a alternativa estar correta, as justificativas não estavam suficientemente definidas, não mostrando clareza acerca das relações estabelecidas. Em branco estão as respostas erradas ou em branco.

Quadro 7. Desempenho geral dos participantes na avaliação por problema resolvido¹
Fonte: Elaboração da autora

Part.	Problemas de Valor Omisso		Problemas de Comparação					
	1	2	3a	3b	3c	3d	4a	4b
S1	Covariação	Covariação	Parte-Parte	Parte-Parte	Parte-Parte		Ref. Metade	Ref. Metade
S2	Covariação	Covariação	Parte-Todo	Parte-Todo	Parte-Todo	Parte-Todo	Ref. Metade (porcentagem)	Ref. Metade
S3	Covariação	Covariação	Mal definida			Mal definida	Mal definida	
S4	Aditivas	Aditivas	Mal definida	Mal definida	Mal definida			
S5	Covariação	Covariação	Mal definida	Mal definida	Mal definida		Covariação	Conceito de razão
S6	Covariação	Covariação	Parte-Todo	Parte-Todo				
S7	Covariação	Covariação	Mal definida	Mal definida	Parte-Parte		Ref. Metade	Ref. Metade
S8	Covariação	Covariação						
S9	Aditivas	Mal definida	Parte-Parte	Mal definida	Mal definida			
S10	Aditivas		Parte-Parte	Mal definida		Mal definida		
S11	Aditivas	Aditivas	Mal definida	Mal definida	Mal definida	Mal definida	Mal definida	
S13	Covariação	Covariação	Parte-Parte	Parte-Parte			Mal definida	
S14	Aditivas	Aditivas	Mal definida	Mal definida	Mal definida	Mal definida	Mal definida	
S15	Covariação	Covariação					Mal definida	
S17	Covariação		Parte-Todo	Parte-Todo	Parte-Todo		Ref. Metade	Ref. Metade
S18	Covariação		Parte-Todo	Parte-Todo	Parte-Todo		Ref. Metade	Ref. Metade
S19	Covariação	R.Unitária	Parte-Parte	Parte-Parte				
S20								
S21	Covariação	Covariação	Parte-Todo	Parte-Todo	Parte-Todo	Parte-Todo	Ref. Metade (porcentagem)	Ref. Metade (porcentagem)
S23	Covariação	Covariação	Parte-Parte	Parte-Parte	Mal definida	Covariação		
S24	Covariação	Covariação			Mal definida		Mal definida	Ref. Metade
S25	Covariação	Covariação	Parte-Todo	Parte-Todo				
S26								

¹Cédula: cinza escuro (resposta correta bem definida); cinza claro (correta mal definida); branca (resposta errada ou em branco)

2ª etapa: A primeira situação-problema (Problema das urnas)

Essa etapa da sequência didática ocorreu no dia 22/10/15, com a participação de 25 alunos (pois neste dia faltou um aluno) e foi iniciada por meio da situação-problema exposta a seguir, já apresentada anteriormente.

Ana, Benê e Cadu vão encher simultaneamente urnas com bolas pretas e brancas.

Ana vai fazer assim: para cada bola preta, ela vai colocar 2 brancas.

Benê vai fazer assim: 4 brancas para cada bola preta colocada.

Cadu: para cada 2 pretas, vai colocar 3 brancas.

Quando Ana, Benê e Cadu estavam enchendo as urnas, o sinal para o intervalo bateu; então eles perceberam que estavam com o mesmo número de bolas brancas. Então, quem ficou com mais bolas pretas?

Figura 38. Problema das Urnas

Fonte: Elaboração da autora

Com a sala de aula organizada em formato de U e com três carteiras no centro da sala, a professora escolheu aleatoriamente três alunos para interpretar o problema das urnas utilizando urnas e bolas brancas e pretas.

Após a leitura e a interpretação do problema em conjunto com os alunos, a professora entregou a Ficha de Ana (Figura 39-a). Auxiliados pela mediação da docente, os discentes preencheram a ficha conjuntamente. Na lousa, a professora fez os esquemas de covariação e invariância das grandezas na urna de Ana, conforme mostrado na Figura 40.

Em seguida, foi entregue a ficha de Benê (Figura 39-b) e Cadu (Figura 39-c), neste momento cada aluno, individualmente ou em conjunto com o colega ao lado, preencheram-nas. No final, a professora socializou as respostas e representou na lousa os esquemas de covariação e invariância para cada problema.

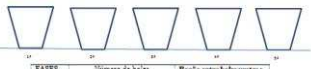
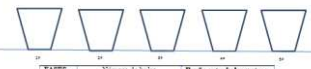
FICHA DA URNA DE ANA	FICHA DA URNA DE BENÊ	FICHA DA URNA DE CADU																																																																														
Vamos ver o que acontece com a urna de Ana. São 5 urnas chamadas FASES, cada uma que ela coloca as bolas na urna e você deve completar os dados das urnas e registrar na tabela o número total de bolas pretas e o número total de bolas brancas, a cada fase.  <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">FASES</th> <th colspan="2">Número de bolas</th> <th rowspan="2">Razão entre bolas pretas e bolas brancas</th> </tr> <tr> <th>Pretas</th> <th>Brancas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1ª</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2ª</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3ª</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4ª</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5ª</td><td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table> 1) Se dobrar o número de bolas pretas, também o número de bolas brancas. 2) Se triplicar o número de bolas pretas, também o número de bolas brancas. 3) Se multiplicar por 5 o número de bolas pretas, o nº de bolas brancas fica multiplicado por 4) Podemos verificar que o número de bolas pretas e o número de bolas brancas variam 5) Neste problema, as bolas pretas e as bolas brancas são chamadas de GRANDEZAS 6) As grandezas bolas pretas e bolas brancas são proporcionais na RAZÃO para 1 (1 preta para ou 1:2 ou 7) As grandezas bolas brancas e bolas pretas são proporcionais na RAZÃO para 1 (..... brancas para pretas) ou 2:1 ou 2:1. 8) Isso quer dizer que o número de bolas é metade do número de bolas ou o número de bolas é o dobro do número de bolas	FASES	Número de bolas		Razão entre bolas pretas e bolas brancas	Pretas	Brancas	1ª				2ª				3ª				4ª				5ª				Vamos ver o que acontece com a urna de Benê. São 5 urnas chamadas FASES, cada uma que ela coloca as bolas na urna e você deve completar os dados das urnas e registrar na tabela o número total de bolas pretas e o número total de bolas brancas, a cada fase.  <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">FASES</th> <th colspan="2">Número de bolas</th> <th rowspan="2">Razão entre bolas pretas e bolas brancas</th> </tr> <tr> <th>Pretas</th> <th>Brancas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1ª</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2ª</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3ª</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4ª</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5ª</td><td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table> 1) Se dobrar o número de bolas pretas, também o número de bolas brancas. 2) Se triplicar o número de bolas pretas, também o número de bolas brancas. 3) Se multiplicar por 5 o número de bolas pretas, o número de bolas brancas fica multiplicado por 4) Podemos verificar que o número de bolas pretas e o número de bolas brancas variam 5) Neste problema, as bolas pretas e as bolas brancas são chamadas de GRANDEZAS 6) As grandezas bolas pretas e bolas brancas são proporcionais na RAZÃO para (..... pretas para ou 7) As grandezas bolas brancas e bolas pretas são proporcionais na RAZÃO para (..... brancas para pretas) ou 8) Isso quer dizer que o número de bolas é do número de bolas ou o número de bolas é do número de bolas	FASES	Número de bolas		Razão entre bolas pretas e bolas brancas	Pretas	Brancas	1ª				2ª				3ª				4ª				5ª				Vamos ver o que acontece com a urna de Cadu. São 5 urnas chamadas FASES, cada uma que ela coloca as bolas na urna e você deve completar os dados das urnas e registrar na tabela o número total de bolas pretas e o número total de bolas brancas, a cada fase.  <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">FASES</th> <th colspan="2">Número de bolas</th> <th rowspan="2">Razão entre bolas pretas e bolas brancas</th> </tr> <tr> <th>Pretas</th> <th>Brancas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1ª</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2ª</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3ª</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4ª</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5ª</td><td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table> 1) Se dobrar o número de bolas pretas, também o número de bolas brancas. 2) Se triplicar o número de bolas pretas, também o número de bolas brancas. 3) Se multiplicar por 5 o número de bolas pretas, o nº de bolas brancas fica multiplicado por 4) Podemos verificar que o número de bolas pretas e o número de bolas brancas variam 5) Neste problema, as bolas pretas e as bolas brancas são chamadas de GRANDEZAS 6) As grandezas bolas pretas e bolas brancas são proporcionais na RAZÃO para 1 (2 pretas para ou 7) As grandezas bolas brancas e bolas pretas são proporcionais na RAZÃO para (..... brancas para pretas) ou 8) Isso quer dizer que o número de bolas é 2/3 do número de bolas ou o número de bolas é do número de bolas	FASES	Número de bolas		Razão entre bolas pretas e bolas brancas	Pretas	Brancas	1ª				2ª				3ª				4ª				5ª			
FASES		Número de bolas			Razão entre bolas pretas e bolas brancas																																																																											
	Pretas	Brancas																																																																														
1ª																																																																																
2ª																																																																																
3ª																																																																																
4ª																																																																																
5ª																																																																																
FASES	Número de bolas		Razão entre bolas pretas e bolas brancas																																																																													
	Pretas	Brancas																																																																														
1ª																																																																																
2ª																																																																																
3ª																																																																																
4ª																																																																																
5ª																																																																																
FASES	Número de bolas		Razão entre bolas pretas e bolas brancas																																																																													
	Pretas	Brancas																																																																														
1ª																																																																																
2ª																																																																																
3ª																																																																																
4ª																																																																																
5ª																																																																																
(a) Ficha da Ana	(b) Ficha da Benê	(c) Ficha da Cadu																																																																														

Figura 39. Fichas entregues no Problema das urnas

Fonte: Elaboração da autora

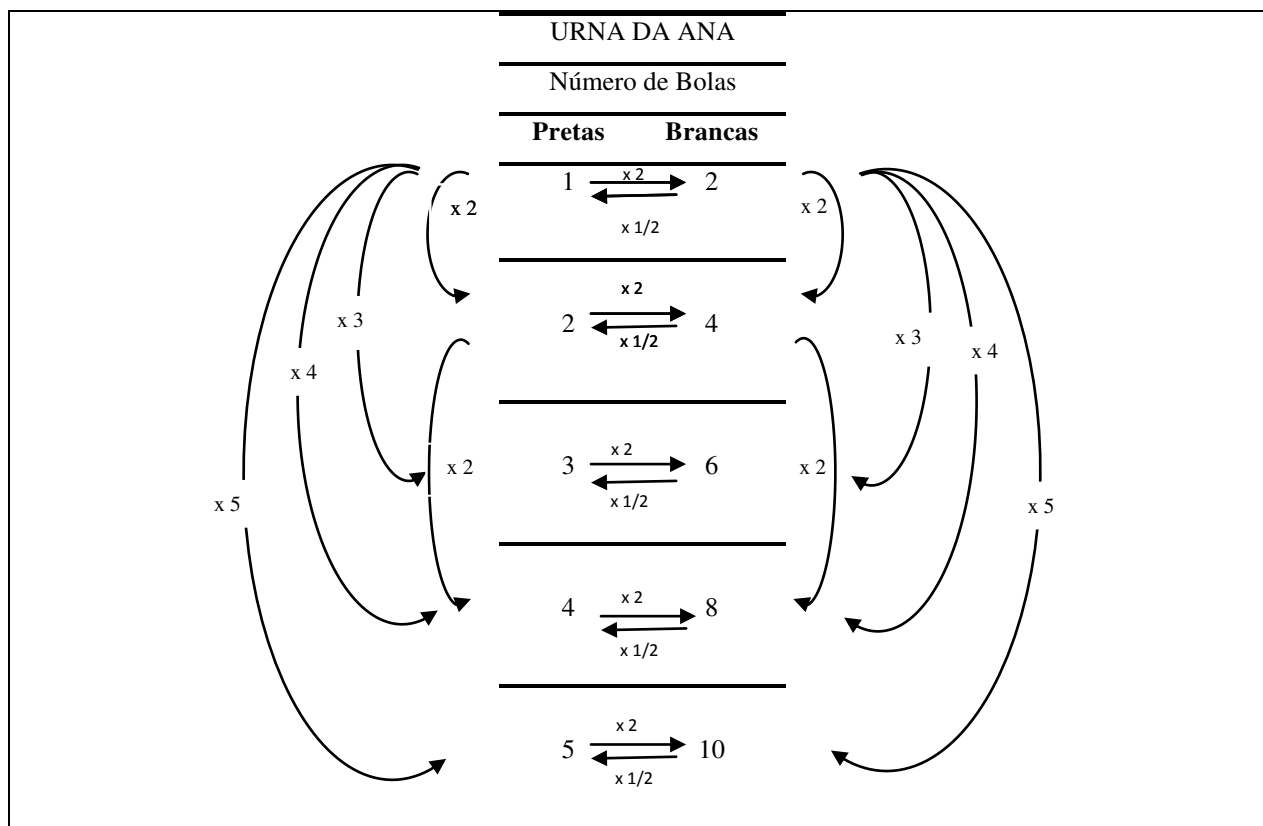


Figura 40. Esquemas de covariação e invariância das grandezas na urna de Ana

Fonte: Elaboração da autora

Após o preenchimento de todas as fichas, a professora voltou ao problema entregue no início da aula e questionou os alunos sobre as respostas dadas. Neste momento, todos receberam a ficha com a questão final (Figura 42-a); a docente esperou alguns minutos até que todos tivessem tempo para preencher a ficha, e em seguida, socializou na lousa o preenchimento correto.

Parte dos alunos pareceu identificar que Cadu estava com mais bolas pretas, mas alguns alunos não chegaram a esta solução. Como o sinal para o intervalo bateu no momento da conclusão, na aula seguinte – 26/10/15 – a professora retomou por meio do data show as fichas preenchidas, e assim aqueles alunos que ficaram confusos com a resposta final pareceu ter sanado as dúvidas e conseguiram chegar a conclusão esperada, ou seja, que $2:3 > 1:2 > 1:4$.

As figuras 41 e 42 apresentam momentos da aplicação do problema das urnas.



Figura 41: Foto tirada pela professora durante a interpretação do problema das urnas
Fonte: Arquivo da autora

(a)

FICHA COM A QUESTÃO FINAL									
Se as urnas estiverem com o mesmo número de bolas brancas, qual terá mais bolas pretas? Tente responder por meio da tabela.									
FASES	URNA DA ANA			URNA DO BENÊ			URNA DO CADU		
	Pretas	Brancas	Razão entre bolas pretas e bolas brancas	Pretas	Brancas	Razão entre bolas pretas e bolas brancas	Pretas	Brancas	Razão entre bolas pretas e bolas brancas
1ª									
2ª									
3ª									
4ª									
5ª									
6ª									
7ª									

O que você concluiu? Quando bateu o sinal, quem ficou com mais bolas pretas? Você pode tentar responder fazendo uma comparação entre as razões que foram obtidas nas urnas de Ana, Benê e Cadu.
Resposta:

(b)

FASES	URNA DA ANA			URNA DO BENÊ			URNA DO CADU		
	Pretas	Brancas	Razão entre bolas pretas e bolas brancas	Pretas	Brancas	Razão entre bolas pretas e bolas brancas	Pretas	Brancas	Razão entre bolas pretas e bolas brancas
1ª	1	2	1:2	1	4	1:4	2	3	2:3
2ª	2	4	2:4 = 1:2	2	8	2:8 = 1:4	4	6	4:6 = 2:3
3ª	3	6	3:6 = 1:2	3	12	3:12 = 1:4	6	9	6:9 = 2:3
4ª	4	8	4:8 = 1:2	4	16	4:16 = 1:4	8	12	8:12 = 2:3
5ª	5	10	5:10 = 1:2	5	20	5:20 = 1:4	10	15	10:15 = 2:3
6ª	6	12	6:12 = 1:2	6	24	6:24 = 1:4	12	18	12:18 = 2:3
7ª	7	14	7:14 = 1:2	7	28	7:28 = 1:4	14	21	14:21 = 2:3

O que você concluiu? Quando bateu o sinal, quem ficou com mais bolas pretas? Você pode tentar responder fazendo uma comparação entre as razões que foram obtidas nas urnas de Ana, Benê e Cadu.
Resposta:

$6:12 = 1:2$
 $8:16 = 1:2$
 $10:20 = 1:2$
 $12:24 = 1:2$
 $14:28 = 1:2$
 $16:32 = 1:2$

Figura 42. Ficha com a questão final (a) e foto tirada pela professora durante o preenchimento da ficha(b)
Fonte: Arquivo da autora

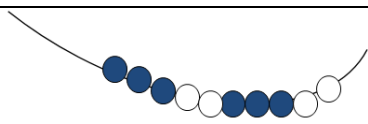
3ª etapa: Avaliação 1 (Problema do colar)

O problema dos colares foi aplicado no dia 29/10/15, em que estiveram presentes os 26 alunos. No quadro 8 é exposto o problema e o desempenho dos alunos nos questionamentos propostos nos itens 1 e 2.

Quadro 8. Desempenho dos alunos no Problema dos colares
Fonte: Arquivo da autora

A Maria está fazendo um colar para oferecer à sua amiga. Só tem contas de duas cores - brancas e azuis. Começou a construir o colar colocando três contas azuis e duas contas brancas. O desenho ao lado mostra o colar sendo construído na 1ª etapa.

Na sequência, colocou mais três contas azuis e duas contas brancas. A 2ª etapa está representada na

figura ao lado:			
1) Desenhe a 3º etapa do colar na figura ao lado, seguindo o mesmo padrão.		2) Complete: Para a 4º etapa, a Maria usou _____ contas azuis e _____ contas brancas.	
Acertaram	23	21	
Erraram	3	5	
Total	26	26	

No item 3 havia uma tabela com as mesmas características das tabelas do problema das urnas, sendo almejado que os alunos conseguissem montar os esquemas de covariância e invariância das grandezas. Dos 26 alunos, 16 acertaram todo o preenchimento da tabela, sendo que 10 alunos simplificaram as razões (S1, S3, S8, S11, S12, S17, S19, S23, S21, S25) o restante não fez essa ação (S2, S5, S6, S14, S16 e S24). Dos alunos que acertaram, apenas dois apresentaram o esquema de covariação das grandezas (S1 e S21). A Figura 43 ilustra algumas resoluções.

Etapas	Número de contas		Razão entre o número de contas azuis para contas brancas
	Azuis	Brancas	
1	3	2	3:2
2	6	4	6:4
3	9	6	9:6
4	12	8	12:8
S2			

Etapas	Número de contas		Razão entre o número de contas azuis para contas brancas
	Azuis	Brancas	
1	3	2	3:2 → 3:2
2	6	4	6:4 → 3:2
3	9	6	9:6 → 3:2
4	12	8	12:8 → 3:2
S21			

Figura 43. Resoluções corretas dos alunos no item 3 do problema dos colares
Fonte: Elaboração da autora

Com relação ao preenchimento incorreto, dois alunos estabeleceram relações não condizentes com a questão (S20 e S22) e oito erraram apenas o preenchimento da coluna da razão entre o número de contas azuis para contas brancas (S4, S7, S9, S10, S13, S15, S18 e S26). Na Figura 44 são apresentadas algumas resoluções, sendo uma totalmente incorreta e outras parcialmente corretas.

Etapas	Número de contas		Razão entre o número de contas azuis para contas brancas
	Azuis	Brancas	
10	8	6	8:6
20	9	8	9:8
30	10	6	10:6
40	9	6	15
S20			

Etapas	Número de contas		Razão entre o número de contas azuis para contas brancas
	Azuis	Brancas	
1	3	2	3x2
2	6	4	6x4
3	9	6	9x6
4	12	8	12x8
S4			

Etapas	Número de contas		Razão entre o número de contas azuis para contas brancas
	Azuis	Brancas	
1°	3	2	5
2°	3	2	5
3°	3	2	5
4°	3	2	5

S26

Etapas	Número de contas		Razão entre o número de contas azuis para contas brancas
	Azuis	Brancas	
1	3	2	$3=2$
2	6	4	$6=4$
3	9	6	$9=6$
4	12	8	$12=8$

S7

Etapas	Número de contas		Razão entre o número de contas azuis para contas brancas
	Azuis	Brancas	
1°	3	2	$3:2=1$ $2:2=1$
2°	6	4	$6:3=2$ $4:2=2$
3°	9	6	$9:3=3$ $6:2=3$
4°	12	8	$12:3=4$ $8:2=4$

S9

Etapas	Número de contas		Razão entre o número de contas azuis para contas brancas
	Azuis	Brancas	
1	3	2	$1:2$
2	6	4	$6:4=1:2$
3	9	6	$9:6=1:2$
4	12	8	$12:8=1:2$

S18

Figura 44. Resolução incorreta e resoluções parcialmente corretas para o item 3 - Problema dos colares
Fonte: Elaboração da autora

Vale ressaltar que, nas resoluções parcialmente corretas, foram verificados os procedimentos: multiplicação dos termos da razão (S4, S10 e S13), soma dos termos (S26), utilização do sinal de igual entre eles (S7), simplificação correta sem apresentar a razão (S18), simplificação errada (S9) e não preenchimento da coluna (S15).

As respostas aos itens 4, 5, 6 e 7 foram analisadas de modo a se vislumbrar as categorias apontadas na literatura: estratégias aditivas e multiplicativas, em especial aquelas que evidenciassem relações de covariação. O item 4 abordava a seguinte problemática:

Quantas contas azuis e quantas brancas vai ter o colar na quinta etapa? Explique como você pensou.

Observou-se que 21 alunos acertaram e 5 alunos erraram esse item. Dos alunos que erraram, dois não deixaram claro o raciocínio utilizado (S20 e S22) e os outros três pareciam empregar raciocínio correto, mas não deram a resposta certa (S5, S10, S23). A Figura 45 ilustra os resultados encontrados.

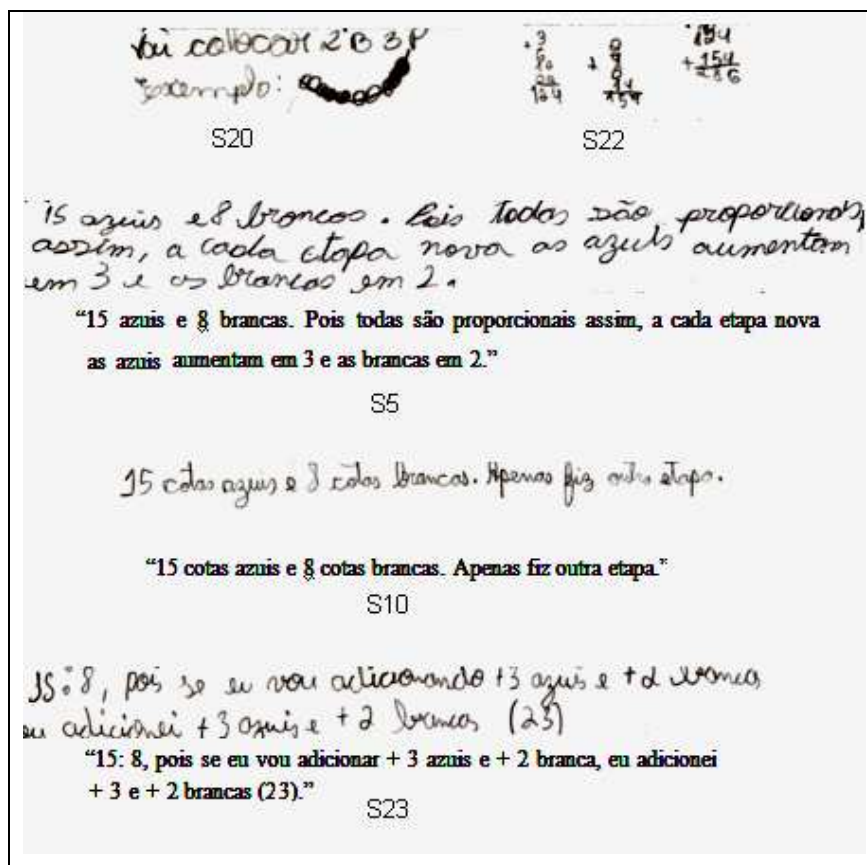


Figura 45. Resoluções incorretas para o item 4 do problema dos colares

Fonte: Elaboração da autora

Analisando as respostas corretas, verificou-se que a maioria dos participantes utilizou estratégias aditivas, indicando as operações ou os algoritmos de cálculos (S2, S3, S6, S7, S8, S11, S13, S14, S15, S16, S17, S21, S24, S26). Quatro alunos utilizaram as estratégias multiplicativas por meio da covariação (S1, S9, S12, S18). Foram verificadas também três respostas corretas sem justificativas (S4, S25, S19). A Figura 46 ilustra alguns resultados.

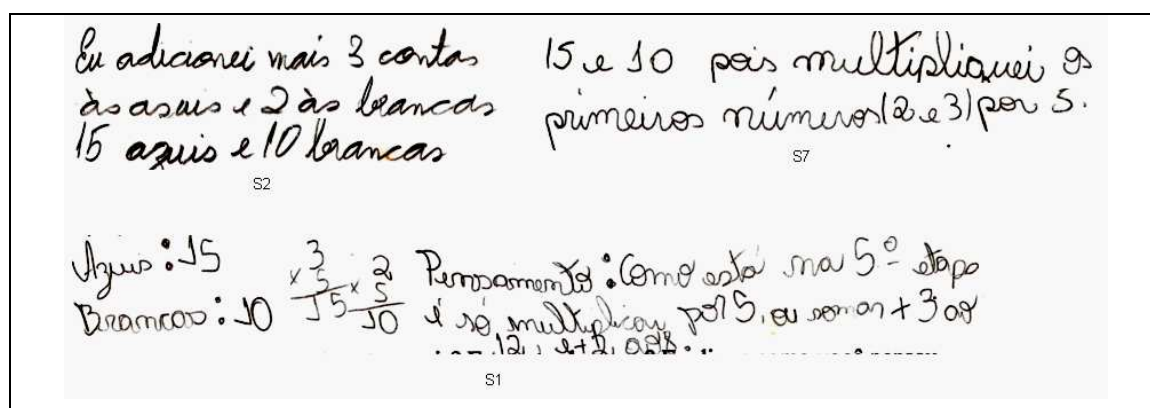


Figura 46. Resoluções corretas para o item 4 do problema dos colares

Fonte: Elaboração da autora

O item 5 abordava o seguinte questionamento:

E na 30ª etapa, o colar vai ter quantas contas azuis? E quantas brancas? Explique como você pensou.

Houve 22 acertos e quatro erros (S4, S13, S20 e S22). A estratégia multiplicativa por meio da covariação foi utilizada pela maioria dos alunos que acertaram a questão (S1, S2, S3, S6, S7, S8, S9, S11, S12, S14, S15, S16, S17, S18, S19, S21, S23, S26), sendo que quatro respostas corretas estavam sem justificativas ou com justificativas mal definidas (S5, S10, S24, S25). É importante observar que S14 estabeleceu relação “parte- parte”. Algumas resoluções são mostradas na Figura 47.

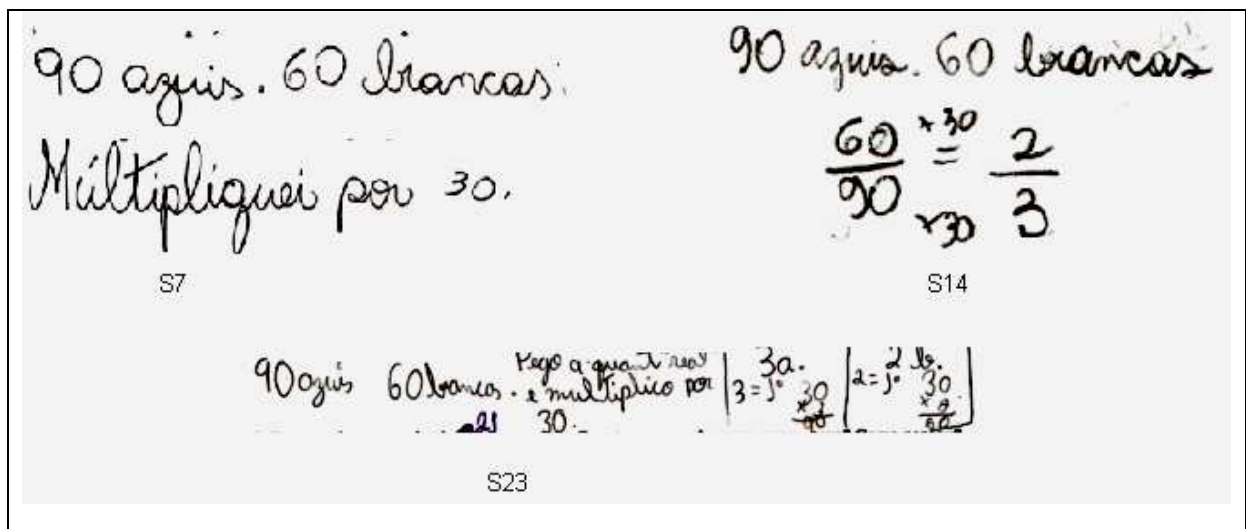


Figura 47. Resoluções corretas para o item 5 do problema dos colares
Fonte: Elaboração da autora

O item 6 solicitava:

Em uma das etapas, havia 21 contas azuis. Quantas eram as brancas, nessa etapa? Como pensou?

Verificou-se que 17 alunos acertaram e nove erraram (S1, S4, S6, S8, S11, S15, S18, S20 e S22). Dos alunos que acertaram, quatro alunos utilizaram a estratégia multiplicativa (S3, S9, S12, S16), quatro alunos indicaram a estratégia de determinação da razão unitária (S5, S17, S21, S25) e nove resoluções estavam sem justificativas ou com justificativas mal definidas (S2, S7, S10, S13, S14, S19, S23, S24, S26). Nota-se que S14 novamente estabeleceu relação “parte-parte” para fazer a comparação. Na Figura 48 apresentam-se algumas resoluções corretas.

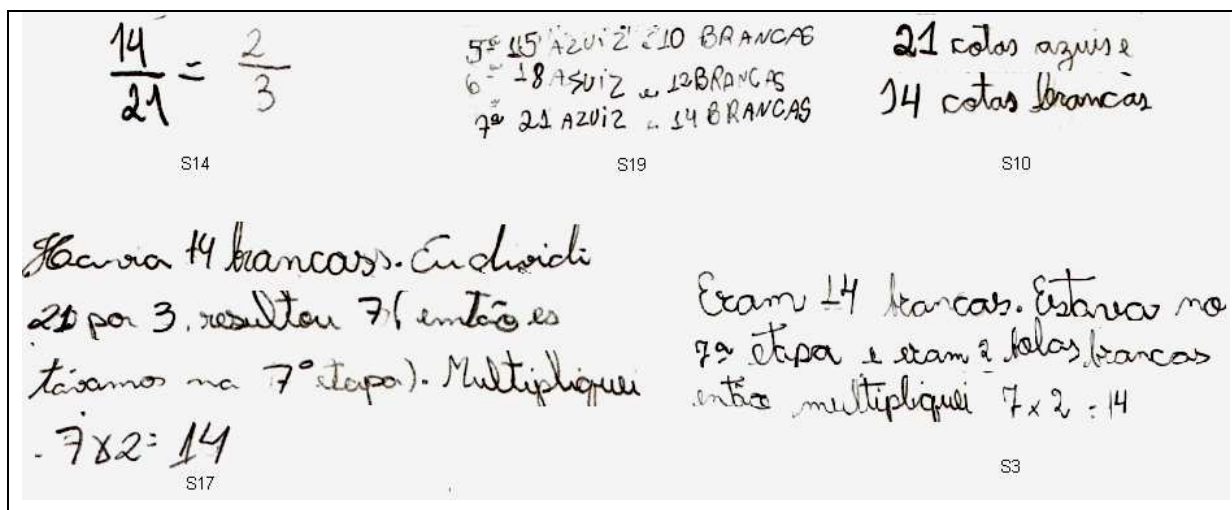


Figura 48. Resoluções corretas para o item 6 do problema dos colares
Fonte: Elaboração da autora

A pergunta do item 7 era:

Quando ela terminou o colar, verificou que havia 48 bolas brancas.
Quantas eram as azuis? Como pensou?

Nessa questão houve 18 acertos, sete erros (S3, S4, S6, S10, S16, S22, S24) e apenas um aluno não resolveu (S20). Dos alunos que acertaram, nove alunos utilizaram a estratégia multiplicativa (S1, S5, S11, S12, S14, S15, S16, S19, S26), seis alunos indicaram a estratégia de determinação da razão unitária (S2, S8, S17, S21, S23, S25), e três resoluções estavam sem justificativas ou com justificativas mal definidas (S7, S13, S18). Mais uma vez, destaca-se que S14 utilizou a relação “parte-parte” para fazer a comparação. Na Figura 49 apresentam-se algumas resoluções corretas.

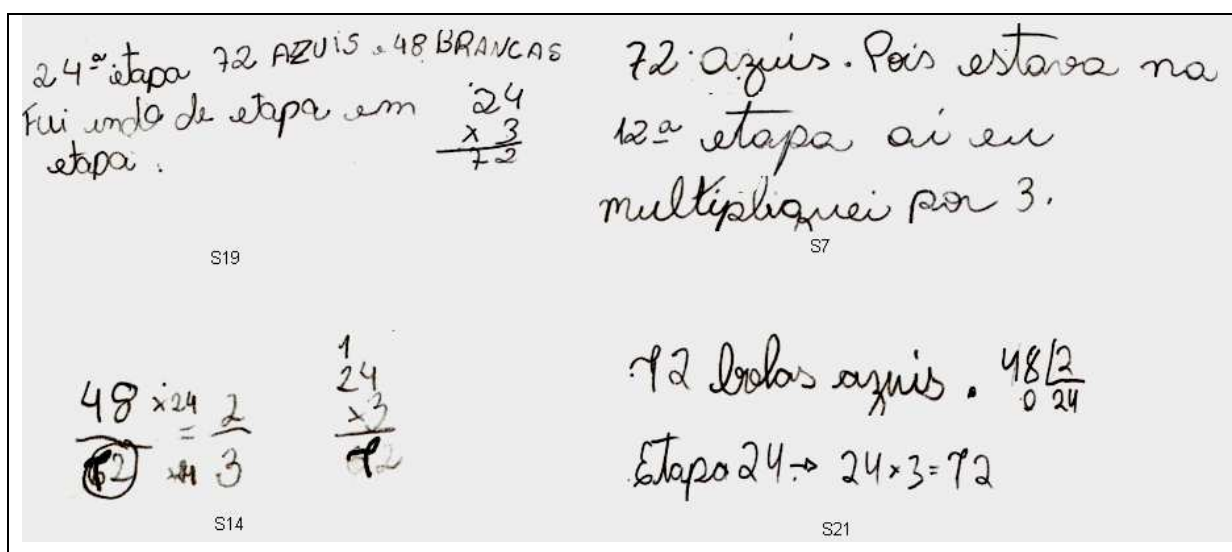


Figura 49. Resoluções corretas para o item 7 do problema dos colares
Fonte: Elaboração da autora

O último questionamento tratava-se da seguinte pergunta:

O Número de contas azuis e o número de contas brancas são grandezas proporcionais? Por quê?

Encontrou-se que 16 alunos acertaram a resposta da questão; sete erraram (S4, S7, S8, S9, S10, S16, S17) e três alunos não responderam (S13, S20, S25). Das respostas corretas, 10 alunos responderam que são proporcionais, mas não souberam de fato justificar a resposta (S2, S6, S12, S15, S18, S19, S22, S23, S24, S26), enquanto que seis alunos conseguiram explicar corretamente (S1, S3, S4, S5, S11, S21). Essas respostas corretas seguem na Figura 50.

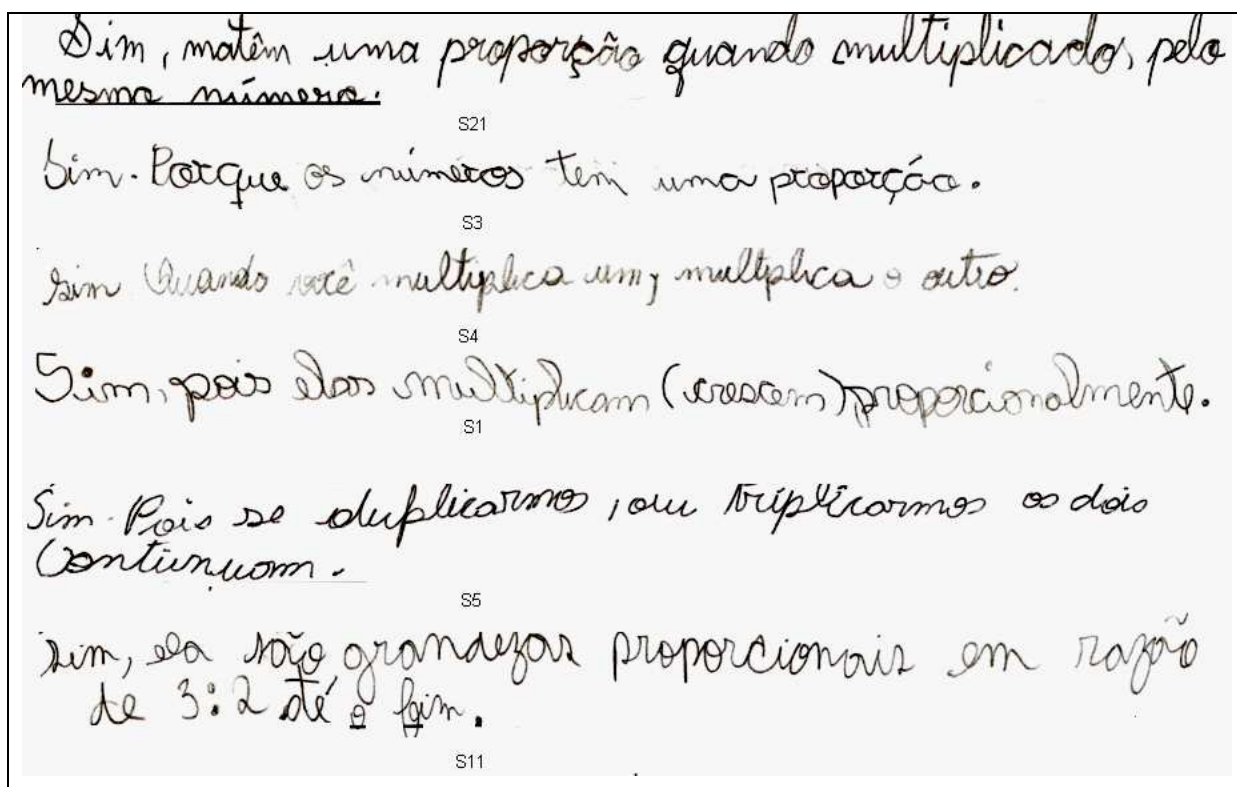


Figura 50. Resoluções corretas para o item 8 do problema dos colares
Fonte: Elaboração da autora

O Quadro 9 apresenta o desempenho geral dos participantes nos itens resolvidos.

Quadro 9. Desempenho geral dos participantes no Problema dos Colares, por item respondido ¹

Fonte: Elaboração da autora

Part.	Problemas de Valor Omissos							Conceito de grandezas proporcionais
	1	2	3	4	5	6	7	8
S1			Covariação	Covariação	Covariação		Covariação	
S2				Aditivas	Covariação	Mal definida	Taxa unitária	
S3				Aditivas	Covariação	Covariação		
S4				Mal definida				
S5					Mal definida	Taxa unitária	Covariação	
S6				Aditivas	Covariação			
S7				Aditivas	Covariação	Mal definida	Mal definida	
S8				Aditivas	Covariação		Taxa unitária	
S9				Covariação	Covariação	Covariação		
S10					Mal definida	Mal definida		
S11				Aditivas	Covariação		Covariação	
S12				Covariação	Covariação	Covariação	Covariação	
S13				Aditivas		Mal definida	Mal definida	
S14				Aditivas	Parte-Parte	Parte-Parte	Parte-Parte	
S15				Aditivas	Covariação		Covariação	
S16				Covariação	Covariação	Covariação	Covariação	
S17				Aditivas	Covariação	Taxa unitária	Taxa unitária	
S18				Covariação	Covariação		Mal definida	
S19				Mal definida	Covariação	Mal definida	Covariação	
S20								
S21			Covariação	Aditivas	Covariação	Taxa unitária	Taxa unitária	
S22								
S23					Covariação	Mal definida	Taxa unitária	
S24				Aditivas	Mal definida	Mal definida		
S25				Mal definida	Mal definida	Taxa unitária	Taxa unitária	
S26				Aditivas	Covariação	Mal definida	Covariação	

¹Cédula: cinza escuro (resposta correta bem definida); cinza claro (correta mal definida); branca (resposta errada ou em branco)

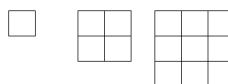
4ª etapa: A segunda situação-problema (Problema dos quadrados)

O problema dos quadrados foi aplicado no dia 12/11/2015; neste dia havia na aula 25 alunos presentes.

Como a avaliação do desempenho dos alunos no Problema dos colares havia revelado as dificuldades de vários alunos para elaborar os esquemas de invariância e covariação das grandezas e também para reconhecer se as grandezas envolvidas no problema eram ou não proporcionais, a professora iniciou a aula recordando o problema anterior. A partir desta ação, entregou o Problema dos quadrados para que eles individualmente lessem as questões; depois, estas foram lidas e respondidas em conjunto, com questionamentos feitos pela professora que socializava as respostas obtidas.

O enunciado do Problema dos quadrados e o primeiro questionamento são reproduzidos a seguir:

Observe a sequência, sendo que cada quadrado tem 1 cm de lado:



Desenhe a 4.^a figura da sequência e explique o que você pensou ao fazer o desenho.

Observou-se que esta etapa não pareceu apresentar dificuldade aos alunos, já que todos fizeram o desenho. No segundo item, era solicitado aos alunos que completassem a tabela:

Quadrado	Medidas do quadrado		Razão entre a medida do lado do quadrado para o perímetro do quadrado
	Lado	Perímetro	
1º			
2º			
3º			
4º			

A professora esperou que os alunos preenchessem a tabela e depois socializou com eles esse preenchimento e os esquemas de relação de invariância e covariação das grandezas na lousa, como mostra a Figura 51.

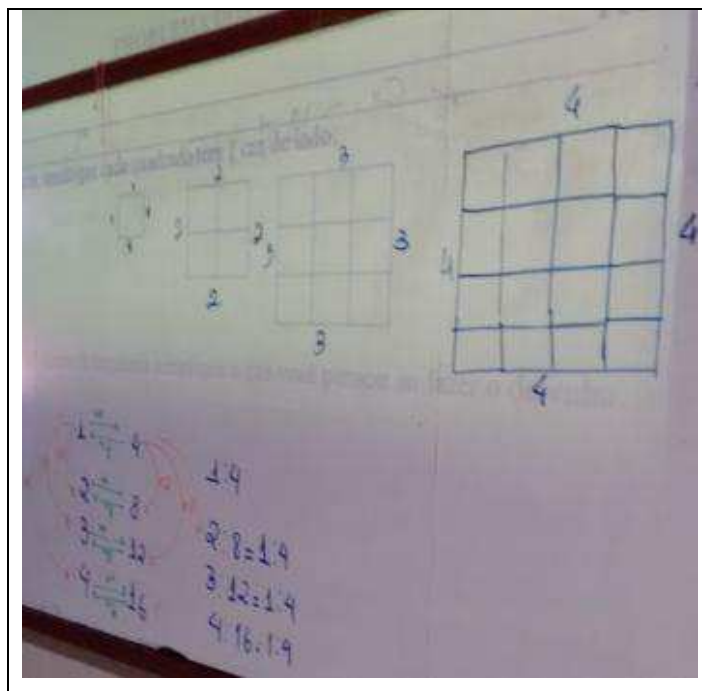


Figura 51: Foto tirada pela professora durante o preenchimento da tabela
Fonte: Arquivo da autora

O terceiro questionamento tratava da seguinte pergunta:

Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado mede 20 cm?
Explique como você pensou?

Alguns alunos tiveram a necessidade de fazer o desenho; outros conseguiram resolver algebricamente utilizando, ora utilizando o campo aditivo, ora o campo multiplicativo, como mostra a Figura 52.

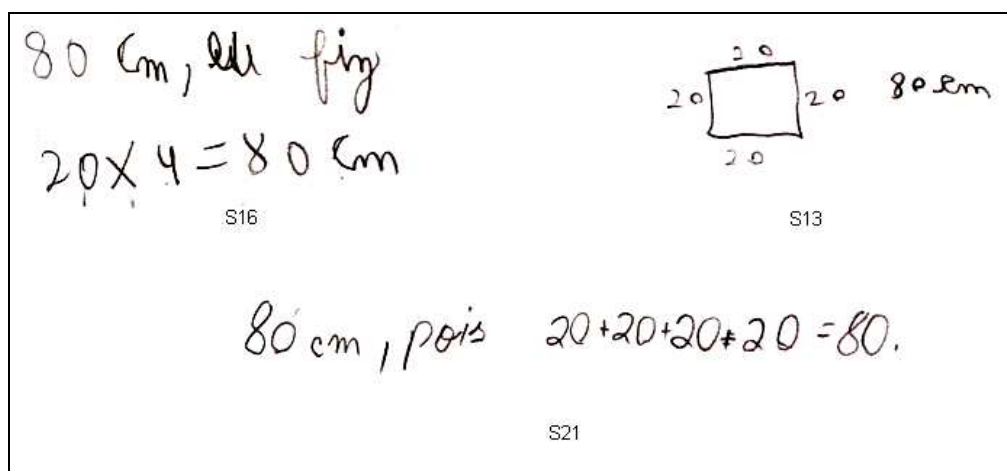


Figura 52. Resoluções dadas para o item 3 do Problema dos Quadrados
Fonte: Elaboração da autora

O quarto item pedia:

Determine a medida do lado de um quadrado que tem de perímetro 40 cm. Explique como você pensou.

Algumas respostas seguem na Figura 53.

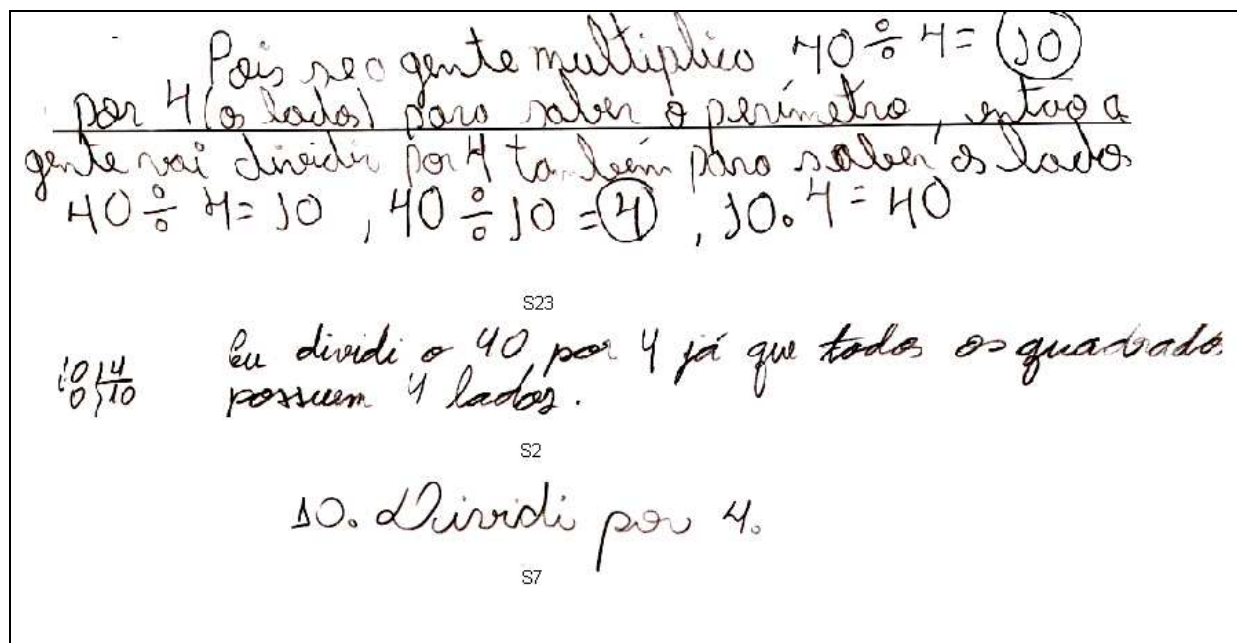


Figura 53. Resoluções dadas para o item 4 do Problema dos Quadrados

Fonte: Elaboração da autora

O quinto item solicitava:

Escreva uma frase que relacione a medida do lado de um quadrado qualquer com o seu perímetro.

Na Figura 54 são apresentadas algumas resposta elaboradas pelos alunos. Vale ressaltar que, apenas S7 utilizou a palavra proporção para explicar a relação.

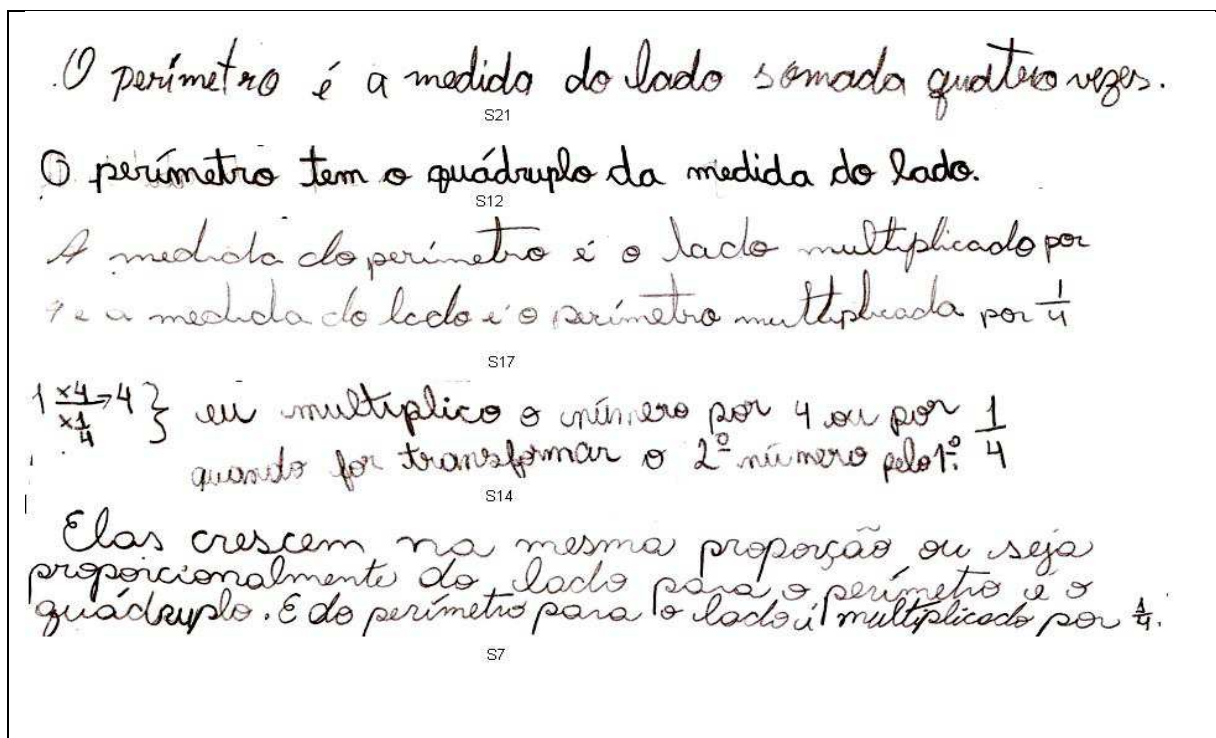


Figura 54. Resoluções dadas para o item 5 do Problema dos Quadrados
Fonte: Elaboração da autora

O sexto item questionava:

A medida do lado do quadrado e o perímetro do quadrado são grandezas proporcionais? Por quê?

Neste momento, a professora permitiu que os alunos respondessem e ela não escreveu as respostas na lousa, fazendo com que a socialização ocorresse oralmente somente após eles terem escrito no papel. Algumas respostas seguem na Figura 55.

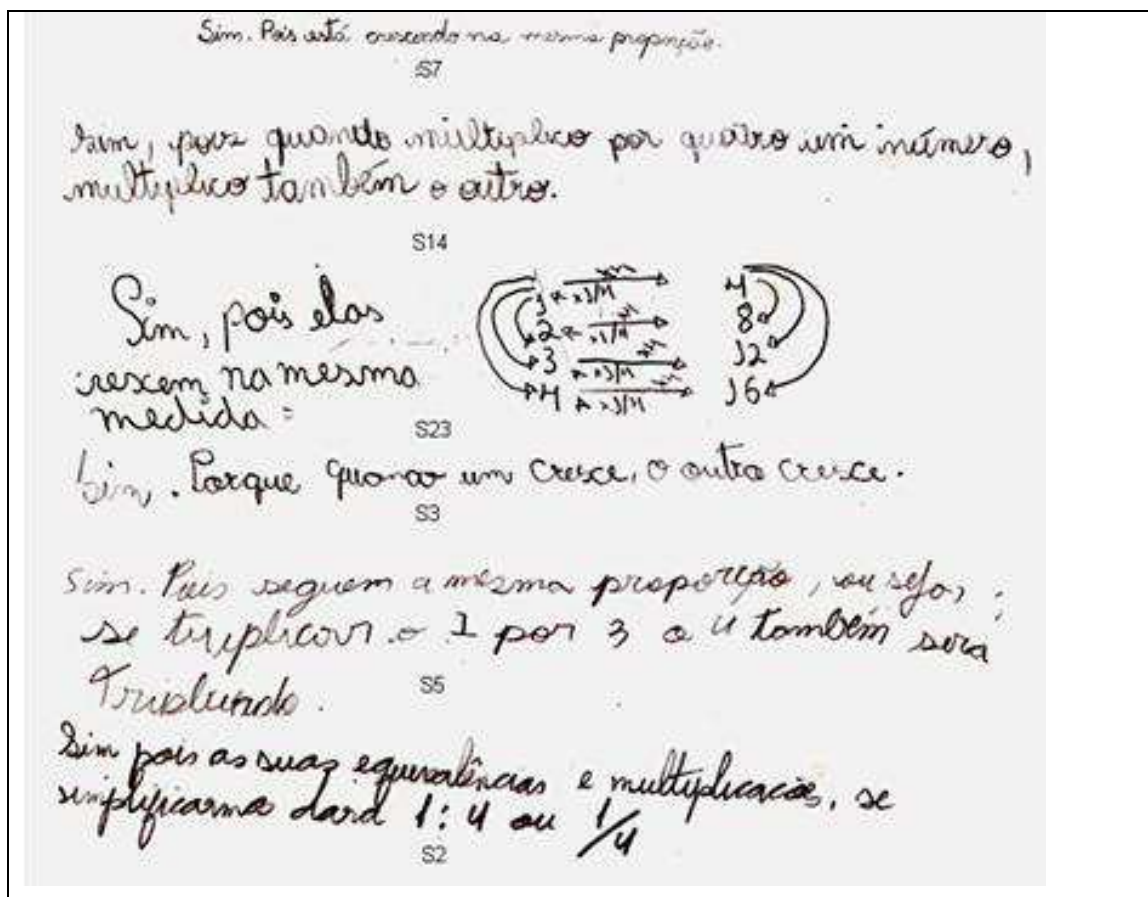


Figura 55. Resoluções dadas para o item 6 do Problema dos Quadrados
Fonte: Elaboração da autora

O sexto item solicitava aos alunos que completassem a tabela:

Quadrado	Medidas do quadrado		Razão entre a medida do lado do quadrado para a área do quadrado
	Lado	Área	
1°			
2°			
3°			
4°			

Novamente, a professora esperou que os alunos preenchessem a tabela e depois socializou com eles esse preenchimento e o esquema de relação de covariação das grandezas na lousa, como mostra a Figura 56.

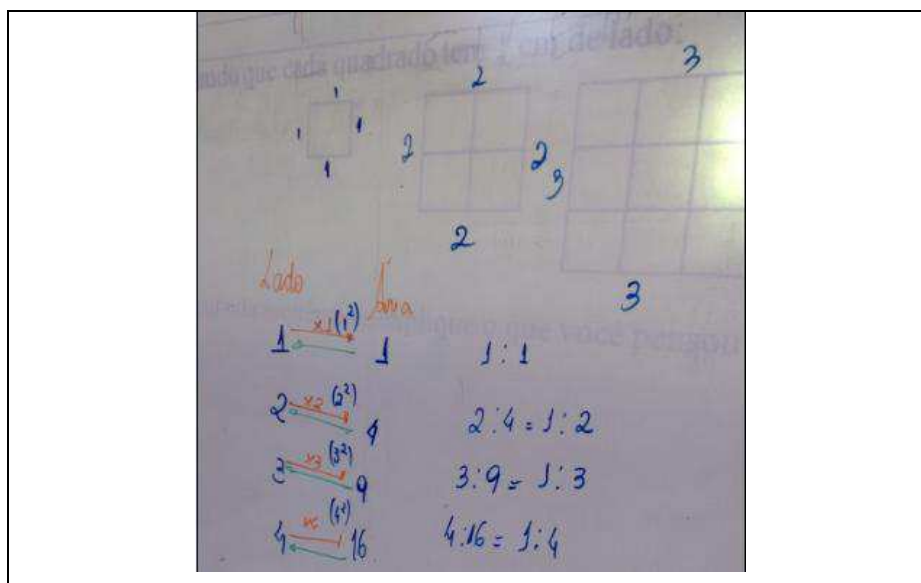


Figura 56: Foto tirada pela professora durante o preenchimento da tabela

Fonte: Arquivo da autora

Com relação ao oitavo item, perguntava-se:

Qual é a área de um quadrado cujo lado mede 9 cm? Explique como você pensou.

Na Figura 57 seguem algumas respostas dos alunos.

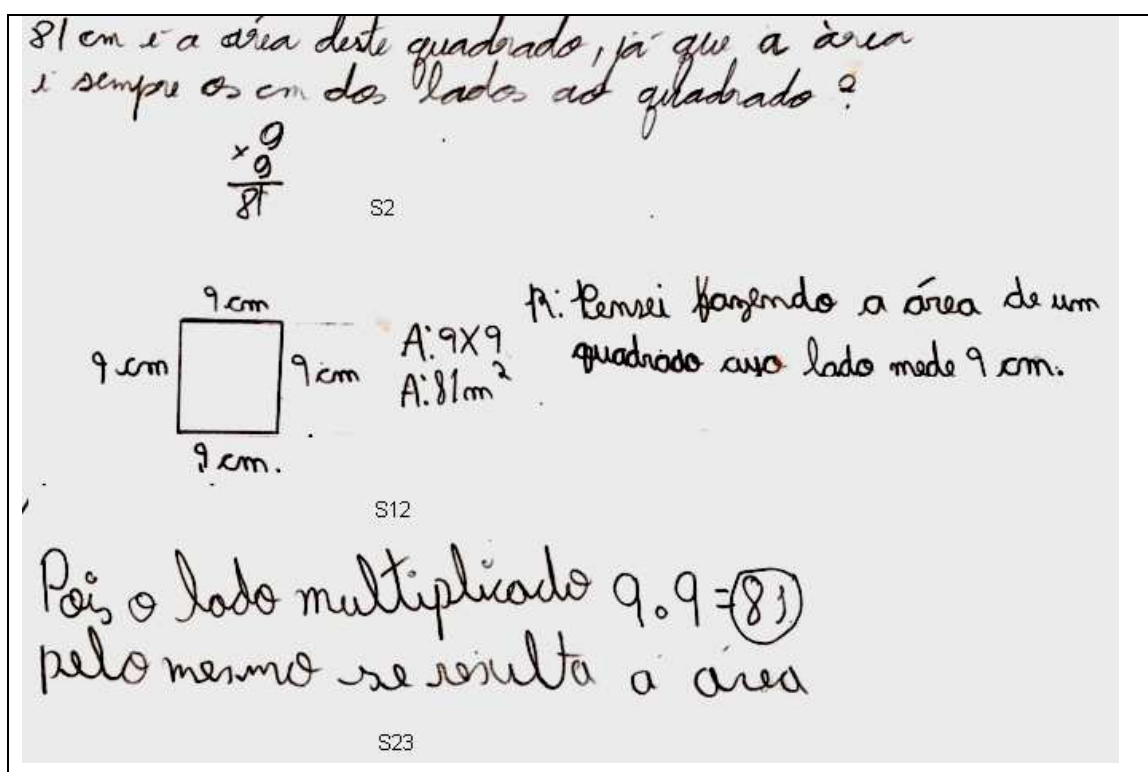


Figura 57. Resoluções dadas para o item 7 do Problema dos Quadrados

Fonte: Elaboração da autora

O nono item solicitava:

Determine a medida do lado de um quadrado que tem de área 121 cm². Explique como você pensou.

Algumas respostas seguem na Figura 58.

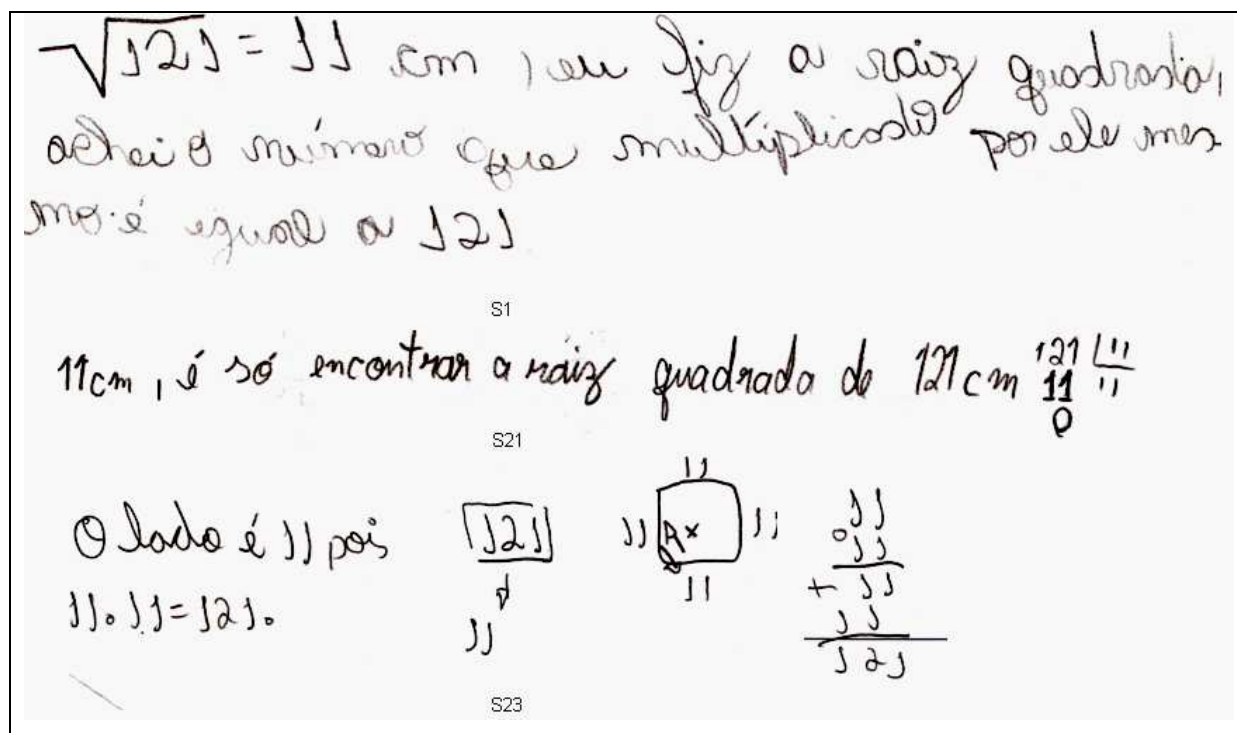


Figura 58. Resoluções dadas para o item 8 do Problema dos Quadrados
Fonte: Elaboração da autora

O décimo item solicitava:

Escreva uma frase que relacione a medida do lado de um quadrado qualquer com a sua área.

Algumas respostas seguem na Figura 59.

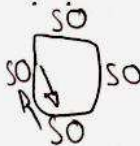
O lado vezes si próprio resulta na área.
 S12
 Multiplicar o lado por ele mesmo ou
 usar a $\sqrt{\quad}$ do n° da área
 S17
 Para descobrir a relação é só ver o lado do
 Quadrado, ou seja multiplicar o número por ele mes.
 mes.
 S1
 A área é a multiplicação de dois lados do quadrado
 S21
 A área para o lado é a raiz quadrada.
 S3
 Que o lado é a
 raiz quadrada da
 área: $(\sqrt{250} = 50 \cdot 50)$
 $\frac{50}{50} = 250$
 S23


Figura 59. Resoluções dadas para o item 9 do Problema dos Quadrados
 Fonte: Elaboração da autora

Finalmente, o décimo primeiro item abordava:

A medida do lado do quadrado e a área do quadrado são grandezas proporcionais? Por quê?

Na Figura 60, seguem algumas respostas elaboradas pelos alunos.

Não pois os números da multiplicação são diferentes
 S4
 Não, pois não crescem na mesma proporção
 S17
 Não. Pois não seguem proporcionalmente, ou seja
 se triplicarmos um e outro não triplicam
 S5

Figura 60. Resoluções dadas para o item 10 do Problema dos Quadrados
 Fonte: Elaboração da autora

5ª etapa: Avaliação 2 (Sim ou não? Diga como pensou)

Essa etapa foi realizada no dia 18/11 com a participação dos 26 alunos. Vale ressaltar que, nesta etapa a professora não interferiu nas respostas dos alunos como na etapa anterior que os problemas foram resolvidos em conjunto com toda a sala.

Foi entregue uma folha aos alunos solicitando que indicassem se as frases eram verdadeiras ou falsas e ainda que escrevessem como pensaram. No quadro 10 é exposto cada problema o quantitativo de alunos que acertaram e erraram cada um.

Quadro 10. Desempenho dos alunos nos problemas da avaliação 2

Fonte: Elaboração da autora

Problemas	Acertos	Erros	Sem resposta	Resposta incompreensível
1) Vou comprar doces e cada doce custa R\$ 2,00. A quantia que eu vou pagar vai variar proporcionalmente em relação ao número de doces que comprarei?	24	2	0	0
2) Carla tem 40 anos e seu filho José tem 20. As idades de ambos irão variar proporcionalmente?	9	17	0	0
3) Se Clara chega à escola em 10 minutos, então ela e sua amiga levam 20 minutos para chegar a escola?	18	6	0	2
4) Se uma caixa de cereais custa R\$ 2,80, então duas custam R\$5,60?	25	0	0	1
5) Se um rapaz faz um modelo de carro em 2 horas, pode fazer 3 modelos iguais em 6 horas?	24	1	0	1
6) Se o Hugo pinta o muro em 2 dias, o Hugo, o Tomás e um terceiro colega pintam em 6 dias?	17	7	1	1

Na busca de apresentar uma solução, alguns alunos apresentaram cálculos e esquemas. No primeiro problema, dos alunos que acertaram, 13 fizeram esquema de covariação e/ou invariância (S1, S3, S6, S9, S10, S11, S13, S14, S16, S17, S19, S20, S22); três alunos encontraram a relação “dobro” (S8, S23, S24) e nas respostas de oito alunos não foi possível identificar a estratégia utilizada (S4, S5, S7, S12, S15, S21, S25, S26).

No segundo problema, dos nove alunos acertaram, mas apenas dois souberam justificar a resposta (S1 e S14); nestes problemas alguns alunos tentaram utilizar o esquema de covariação para justificar a resposta, mas nenhum conseguiu fazer a representação correta.

No terceiro problema, a justificativa dada pela maioria era que “uma pessoa a mais no trajeto não dobra o tempo gasto”.

No quarto problema, entre os que acertaram a resposta, 13 alunos utilizaram estratégias aditivas (S4, S6, S7, S8, S10, S11, S12, S14, S15, S18, S19, S23, S25) e 11 alunos utilizaram estratégias multiplicativas (S1, S2, S3, S5, S9, S13, S16, S17, S21, S24, S26); apenas na resolução do aluno S1 ficou evidente a relações de covariação.

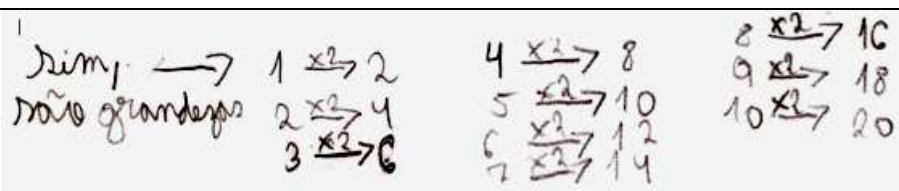
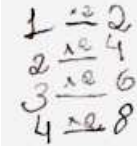
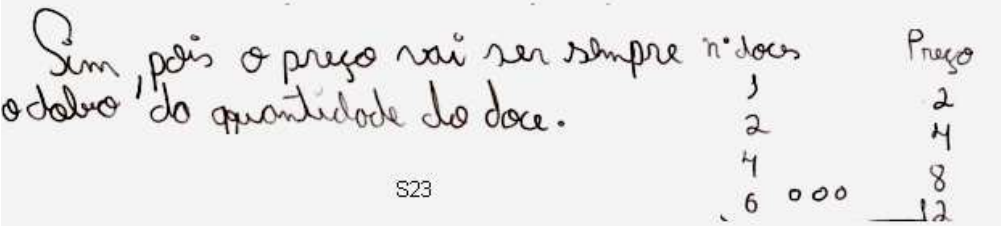
No quinto problema, entre as respostas corretas, um aluno utilizou a estratégia aditiva (S26), 18 alunos utilizaram a estratégia multiplicativa (S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8, S9, S11, S13, S12, S14, S15, S17, S19, S23, S24) e não foi possível identificar a estratégia de cinco alunos (S16, S18, S20, S21, S25). Vale ressaltar que dois alunos (S11, S13) utilizaram a relação “triplo e dobro” para justificar suas respostas.

No último problema, destaca-se a justificativa dada: “quanto mais pessoas trabalhando, menos tempo será gasto” para as 11 respostas corretas (S1, S2, S4, S7, S8, S11, S14, S15, S17, S21, S23); seis respostas estavam incompreensíveis (S3, S5, S6, S10, S18, S25),

No Quadro 11 são expostas algumas resoluções corretas dadas pelos alunos.

Quadro 11. Resoluções corretas dos alunos nos problemas da avaliação 2

Fonte: Elaboração da autora

Problemas	Resolução
1) Vou comprar doces e cada doce custa R\$ 2,00. A quantia que eu vou pagar vai variar proporcionalmente e em relação ao número de doces que comprarei?	S11  S1  S19  S23 

2) Carla tem 40 anos e seu filho José tem 20. As idades de ambos irão variar proporcionalmente?

Não, cresceram proporcionalmente, mas no momento em que ele tiver 21 e ela 41, não vão crescer na mesma proporção

S1

ex: Carla - 90 anos
José - 40 anos

Não.

S14

3) Se Clara chega à escola em 10 minutos, então ela e sua amiga levam 20 minutos para chegar a escola?

Não, as duas irão ter o mesmo tempo juntas

S14

Se não, gastar 10 min não importa quanto levar

S16

4) Se uma caixa de cereais custa R\$ 2,80, então duas custam R\$5,60?

Sim, pois $2,80 \times 2 = 5,60$

S1

Sim, pensei fazendo sim

$2,80 + 2,80 = 5,60$

S12

2,80
+ 2,80
5,60

S14

5) Se um rapaz faz um modelo de carro em 2 horas, pode fazer 3 modelos iguais em 6 horas?

Sim, pensei fazendo:

S12

Sim, pois é 1 x 2 2
proporção - 2 x 2 4
na 3 x 2 6
4 x 2 8

S11

6) Se o Hugo pinta o muro em 2 dias, o Hugo, o Tomás e um terceiro colega pintam em 6 dias?

Não, pois quanto mais pessoas, mais trabalho se faz, e assim eles terminam mais rápido

S1

Não, pois mais pessoas trabalhando é igual a menos dias.

S23

O Quadro 12 apresenta o desempenho dos participantes nos itens resolvidos.

Quadro 12. Desempenho geral dos participantes na Avaliação: Sim ou Não, por item respondido¹

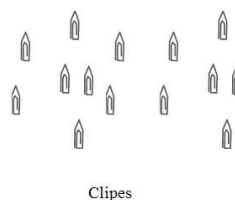
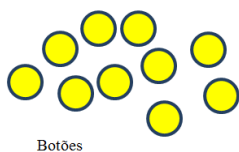
Fonte: Elaboração da autora

	1 (Grandezas proporcionais)	2(Grandezas não proporcionais)	3(Grandezas proporcionais)	4(Grandezas proporcionais)	5(Grandezas proporcionais)	6 (Grandezas não proporcionais)
S1	Covariação e invariância			Covariação	Covariação	
S2				Est. multiplicativa	Covariação	
S3	Covariação			Est. multiplicativa	Covariação	Mal definida
S4	Mal definida		Mal definida	Est. aditiva	Covariação	
S5	Mal definida			Est. multiplicativa	Covariação	Mal definida
S6	Covariação		Mal definida	Est. aditiva	Covariação	Mal definida
S7	Mal definida			Est. aditiva	Covariação	
S8	Covariação			Est. aditiva	Covariação	
S9	Covariação e invariância			Est. multiplicativa	Covariação	
S10	Covariação			Est. aditiva		Mal definida
S11	Covariação			Est. aditiva	Covariação	
S12	Mal definida			Est. aditiva	Covariação	
S13	Covariação			Est. multiplicativa	Covariação	
S14	Covariação			Est. aditiva	Covariação	
S15	Mal definida			Est. aditiva	Covariação	
S16				Est. multiplicativa	Mal definida	
S17	Covariação e invariância			Est. multiplicativa	Covariação	
S18				Est. aditiva	Mal definida	Mal definida
S19	Covariação			Est. aditiva	Covariação	
S20	Covariação		Mal definida	Mal definida	Mal definida	
S21	Mal definida			Est. multiplicativa	Mal definida	
S22	Covariação					
S23	Covariação			Est. aditiva	Covariação	
S24	Covariação			Est. multiplicativa	Covariação	
S25	Mal definida			Est. aditiva	Mal definida	Mal definida
S26	Mal definida			Est. multiplicativa	Est. aditiva	

¹Cédula: cinza escuro (resposta correta bem definida); cinza claro (correta mal definida); branca (resposta errada ou em branco)

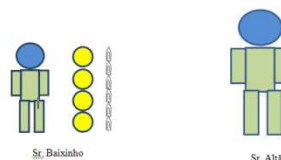
6ª etapa: Mais situações-problema

A aplicação desta etapa ocorreu no dia 26/11 com a participação de 25 alunos. O primeiro problema, denominado Sr. Altão e Sr. Baixinho, é classificado como de valor omissivo segundo Lesh et al. (1988). A partir da imagem:



Foi realizado o seguinte questionamento:

A altura do Sr. Baixinho é 4 botões
ou de 6 cliques.
A altura do Sr. Altão é de 6 botões.
Qual a altura do Sr. Altão em
cliques?



Neste problema, apenas dois alunos (S12 e S21) acertaram a resposta e 23 erraram. Todos os alunos que erraram, escreveram que o a altura do Sr. Altão seria de oito cliques, ou seja, eles observaram a figura inicial e notaram que havia 14 cliques, então tiraram desse valor os seis cliques referente a altura do Sr. Baixinho, o que resultou em oito cliques. Na Figura 61 seguem algumas as respostas dadas pelos alunos.

Resoluções corretas

9 cliques

2 botões = 3 cliques

$\times 3 \downarrow$

6 botões = 9 cliques

S21

A altura em cliques do Sr. Altão é de 9 cliques.

$\begin{array}{r} 1,5 \\ \times 6 \\ \hline 9 \end{array}$

S12

Resolução incorreta

A altura do Sr. Altão em cliques é de 8 cliques

$\begin{array}{r} 14 \\ - 6 \\ \hline 8 \end{array}$

S2

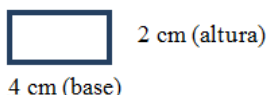
Figura 61. Resoluções dadas para o item1 do Mais Situações-problema

Fonte: Elaboração da autora

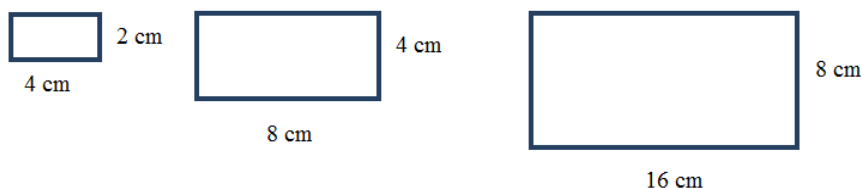
Nota-se (Figura 61) que S21 estabeleceu a relação de covariação, já S12 utilizou a estratégia multiplicativa.

O segundo item, intitulado “Retângulos”, também classificado como problema de valor omitido segundo Lesh et al. (1988), apresentava o seguinte questionamento:

Maria desenhou o retângulo a seguir com 4 cm de base e 2 cm de altura:



Depois, ela quis ampliar o desenho e fez vários outros retângulos, dobrando as medidas. Continuou triplicando, quadruplicando etc e fez muitos retângulos. Veja alguns retângulos que ela desenhou.



Um dos retângulos desenhados por Maria tinha 40 cm de base. Qual era a altura desse retângulo? Escreva como você pensou.

Com relação aos acertos, 19 alunos responderam corretamente, sendo que a relação de covariação foi mais bem explicitada na solução de 17 alunos. Os alunos S1, S2, S6, S12, S14, S18, S23 e S26 justificaram afirmando que a altura é a metade da base ou realizando a divisão de 40 por 2. Já S3, S8, S7, S11 e S19 justificaram que a base é o dobro da altura ou realizando a multiplicação de 20 por 2. Os alunos S5, S9 e S17 utilizaram as duas justificativas. Já o aluno S21 utilizou o esquema de covariação, S13 e S25 responderam corretamente, mas não justificaram e, finalmente, seis erraram ao dar a resposta (S4, S10, S16, S20, S22, S24). Na Figura 62 seguem algumas respostas corretas que exemplificam a separação realizada.

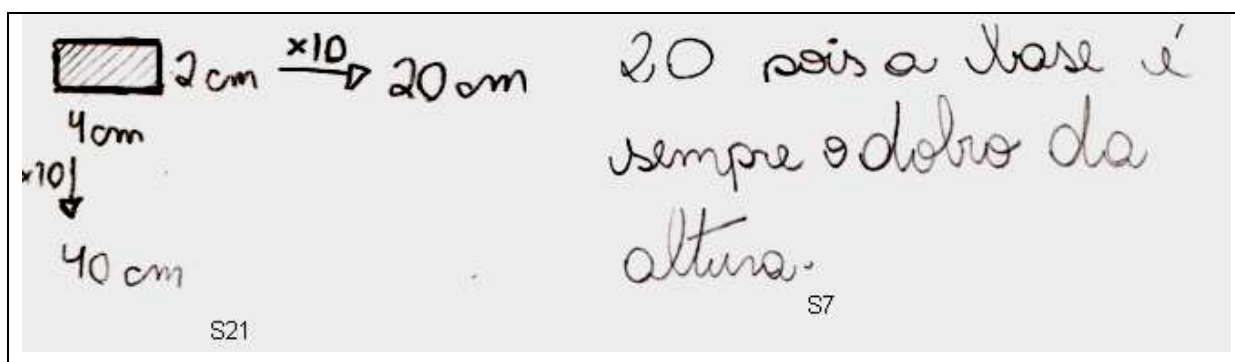


Figura 62. Resoluções corretas dadas para o item 2 do Mais Situações-problema
Fonte: Elaboração da autora

No terceiro item, havia três afirmações e a pergunta:

Sim ou não? Diga como pensou.

Os alunos deveriam identificar se as afirmações de cada item se referiam a grandezas proporcionais. No Quadro 13 são apresentados os problemas e o quantitativo de acertos e erros.

Quadro 13. Desempenho dos alunos no item 3 do Mais Situações-problema

Fonte: Elaboração da autora

Problemas	Acertos	Erros	Sem resposta
a) Se Clara gasta 10 minutos para chegar à escola, então ela e sua amiga juntas levariam 20 minutos para chegar a escola?	23	1	1
b) Se seis caixas iguais pesam 200 kg, então três dessas caixas pesariam 100 kg?	23	2	0
c) Se hoje Marta tem 10 anos e Deise tem 20 anos, então quando Marta tiver 30 anos Deise terá 60 anos?	15	10	0

No problema (a), os alunos que acertaram justificaram que o caminho percorrido é o mesmo, então o número de pessoas não interfere no tempo gasto.

No problema (b), dos alunos que acertaram, 15 utilizaram o argumento da “metade” (S1, S2, S5, S6, S7, S8, S12, S13, S16, S17, S18, S23, S24, S25, S26), três fizeram esquema de covariação (S9, S14, S21), dois utilizaram o argumento do “dobro” (S3, S11) e três alunos responderam apenas que eram grandezas proporcionais (S4, S10, S22).

No problema (c), entre aqueles que acertaram, três responderam apenas “não” (S5, S24, S25); oito alunos, parecendo utilizar o princípio aditivo, responderam que a diferença era de 10 anos e a Deise teria 40 anos (S3, S6, S7, S10, S11, S19, S21, S23) e quatro alunos responderam apenas que Deise terá 40 anos (S2, S4, S14, S26).

No Quadro 14 seguem algumas respostas corretas que exemplificam a classificação realizada.

Quadro 14. Resoluções corretas dadas para o item 3 do Mais Situações-problema

Fonte: Elaboração da autora

Problemas	Resoluções
a) Se Clara gasta 10 minutos para chegar à escola, então ela e sua amiga juntas levariam 20 minutos para chegar a escola?	<i>Não, pois tempo não se somado ele para sempre o mesmo, não importa o número de pessoas</i>

b) Se seis caixas iguais pesam 200 kg, então três dessas caixas pesariam 100 kg?

Sim, pois é o metade, $6:2=3$ e $200:2=100$
então é o metade de caixas e metade do peso.

S6

Sim, pois são grandezas proporcionais
 $\begin{pmatrix} 6 = 200 \\ 3 = 100 \end{pmatrix} : 2$ $\begin{matrix} 200 & 16 \\ 20 & 3 \end{matrix}$
20

S21

c) Se hoje Marta tem 10 anos e Deise tem 20 anos, então quando Marta tiver 30 anos Deise terá 60 anos?

Não quando Marta tiver 30 anos Deise terá 40 anos

10 — 20
20 — 30
30 — 40
40 — 50
50 — 60

S19

Não. Não são grandezas proporcionais

Marta → 10, 20, 30, 40...

S21

Deise → 20, 30, 40, 50...

No quarto item – Probleminhas – os alunos deveriam resolver cada um dos três problemas apresentados. O quadro 15 reapresenta os problemas e apresenta o desempenho dos alunos em cada um.

Quadro 15. Desempenho dos alunos no item 4 do Mais Situações-problema

Fonte: Elaboração da autora

Problemas	Acertos	Erros	Sem resposta
a) Com 7 latas de tinta consigo pintar 10 m de parede. Então, se eu quiser pintar 30 m de parede, de quantas latas de tinta eu vou precisar?	18	6	1
b) Tatiana, Bruna e Lara estão treinando bola ao cesto. Veja o desempenho delas: Tatiana – fez 10 arremessos e conseguiu 4 cestas Bruna – fez 4 arremessos e conseguiu 3 cestas Lara – fez 5 arremessos e conseguiu 2 cestas. i) Quem se saiu melhor no treino? ii) Houve desempenhos iguais?	i)19 ii)12	i)5 ii)8	i)1 ii)5
c) A cada vinte e cinco reais em abastecimento de combustível, o Posto Parada Boa dá cinco pães de brinde. Se Ronaldo abastecer seu carro com cem reais de combustível, quantos pães ele ganhará?	17	7	1

No problema (a), entre os que acertaram, quatro justificaram utilizando o esquema de covariação (S1, S7, S14, S21), três utilizaram estratégias aditivas (S19, S23, S26), e o restante dos alunos utilizou a estratégia da multiplicação de 3 por 7 (S2, S3, S4, S5, S6, S8, S12, S16, S17, S24, S25), o que indica que estabeleceram a relação de covariação.

No problema (b), dos alunos que acertaram, seis estabeleceram a relação de equivalência entre as razões que comparam o número de arremessos com o de gols (S1, S2, S5, S11, S12, S14, S19, S21), três alunos acertaram o problema, mas não justificaram (S4, S7, S8) e dois alunos utilizaram a porcentagem para justificar a resposta (S2, S17).

No problema (c), 13 se apoiaram nos esquemas de covariação para justificar a resposta (S1, S2, S6, S7, S9, S12, S14, S16, S17, S19, S21, S23, S26), seis alunos fizeram esquemas, três disseram que o número de pães era 20 mas não justificaram (S4, S13, S25) e um aluno justificou por meio da estratégia aditiva (S11).

No Quadro 16 seguem algumas respostas corretas que exemplificam a classificação realizada.

Quadro 16. Resoluções dos alunos no item 4 do Mais Situações-problema

Fonte: Elaboração da autora

Problemas	Resoluções
a) Com 7 latas de tinta consigo pintar 10 m de parede. Então, se eu quiser pintar 30 m de parede, de quantas latas de tinta eu vou precisar?	$\frac{7}{10} \times 30 = 21$ Vai precisar de 21 latas S4 21 latas. $\frac{7}{10} \times 30 = 21$ S1
b) Tatiana, Bruna e Lara estão treinando bola ao cesto. Veja o desempenho delas: Tatiana – fez 10 arremessos e conseguiu 4 cestas Bruna – fez 4 arremessos e conseguiu 3 cestas Lara – fez 5 arremessos e conseguiu 2 cestas. Quem se saiu melhor no treino? Houve desempenhos iguais?	Bruna se saiu melhor. acertou 75% das cestas, e Tatiana e Lara acertaram 40%. S17 Bruna se saiu melhor ($\frac{15}{20}$ ou $\frac{3}{4}$) Os desempenhos de Lara e Tatiana foram iguais. $\frac{4}{10} = \frac{8}{20}$ $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ S21

c) A cada vinte e cinco reais em abastecimento de combustível, o Posto Parada Boa dá cinco pães de brinde. Se Ronaldo abastecer seu carro com cem reais de combustível, quantos pães ele ganhará?

$$100 \div 25 = 4 = 5 \text{ pães}$$

$$25 \times 4 = 5 \times 4 = 20 \text{ pães}$$

R: Ele ganhará 20 pães.

S12

20 pães.

$$\begin{array}{r} \times 4 \quad 25 \rightarrow 5 \\ 100 \rightarrow 20 \end{array} \quad) 11$$

S21

Ele ganhará 20 pães pois

$$25 = 5 \text{ e } 100 \text{ é equi}$$

$$\begin{array}{r} 25 + 25 + 25 + 25 \\ \hline 5 + 5 + 5 + 5 \end{array}$$

S11

O Quadro 17 apresenta o desempenho dos participantes nos problemas resolvidos.

Quadro 17. Desempenho geral dos participantes na avaliação Mais situações-problema por item respondido ¹

Fonte: Elaboração da autora

Part.	Problemas de Valor Omisso		Sim ou não? Diga como pensou. Problemas de Grandezas proporcionais e não proporcionais			Mais problemas Comparação			Valor Omisso 4c
	1	2	3a(Grandezas não proporcionais)	3b(Grandezas proporcionais)	3c(Grandezas não proporcionais)	Valor Omisso 4a	4b		
S1		Covariação		Covariação		Covariação	Conceito de razão	Conceito de razão	Covariação
S2		Covariação		Covariação	Mal definida	Covariação	Conceito de razão	Conceito de razão	Covariação
S3		Covariação		Covariação	Est. aditiva	Covariação			
S4				Mal definida	Mal definida	Covariação	Mal definida	Mal definida	Mal definida
S5		Covariação		Covariação	Mal definida	Covariação	Conceito de razão	Conceito de razão	
S6		Covariação		Covariação	Est. aditiva	Covariação			Covariação
S7		Covariação		Covariação	Est. aditiva	Covariação	Mal definida	Mal definida	Covariação
S8		Covariação		Covariação		Covariação	Mal definida	Mal definida	
S9		Covariação		Covariação					Covariação
S10				Mal definida	Est. aditiva				
S11		Covariação		Covariação	Est. aditiva		Conceito de razão	Conceito de razão	Est. aditiva
S12	Covariação	Covariação		Covariação			Conceito de razão	Conceito de razão	Covariação
S13		Mal definida		Covariação					Mal definida
S14		Covariação		Covariação	Mal definida	Covariação	Conceito de razão	Conceito de razão	Covariação
S16				Covariação		Covariação			Covariação
S17		Covariação		Covariação		Covariação	Conceito de razão	Conceito de razão	Covariação
S18		Covariação		Covariação					
S19		Covariação			Est. aditiva	Est. aditiva	Conceito de razão	Conceito de razão	
S20									
S21	Covariação	Covariação			Est. aditiva	Covariação	Conceito de razão	Conceito de razão	
S22				Mal definida					
S23		Covariação		Covariação	Est. aditiva	Est. aditiva			
S24				Covariação	Mal definida	Covariação			
S25		Mal definida		Covariação	Mal definida	Covariação			Mal definida
S26		Covariação		Covariação	Mal definida	Est. aditiva			

¹Cédula: cinza escuro (resposta correta bem definida); cinza claro (correta mal definida); branca (resposta errada ou em branco)

CAPÍTULO 6

ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO DA EXPERIÊNCIA

Segundo Artigue (1996 apud CARNEIRO, 2005), a quarta e última fase da Engenharia Didática refere-se à análise *a posteriori* e à validação da experiência. Para Almouloud e Coutinho (2008, p.68), esta fase consiste na “análise feita à luz da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa”.

Este capítulo foi dividido em duas partes: a teoria dos campos conceituais e as situações-problema propostas e a revisão da literatura e as estratégias utilizadas pelos alunos durante a sequência didática.

1ª parte: a teoria dos campos conceituais e as situações-problema propostas

Para Vergnaud (1990), a operacionalidade de um conceito deve ser vivenciada por meio de situações variadas, ou seja, pode-se apresentar uma variedade de problemas práticos e teóricos ao estudante para avaliar se determinado conceito foi compreendido por ele. No caso deste trabalho, o conceito em questão é o de razão e procurou-se favorecer uma série de situações variadas de problemas aos alunos.

Assim, foram propostas duas situações-problema – Problema das urnas e Problema dos quadrados – porque se concorda com o autor quando este afirma que o saber forma-se a partir de situações a dominar. Nesta perspectiva, problema é qualquer situação em que é necessário descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, hipótese e verificação, para produzir uma solução.

Conforme a Teoria dos Campos Conceituais – TCC, o conceito é definido a partir de três conjuntos C (S,I,R): o primeiro é um conjunto de situações que constituem o referente do conceito, o segundo é um conjunto de invariantes operatórios (teoremas e conceitos-em-ação) que dão o significado do conceito, e o terceiro é um conjunto de representações simbólicas que compõem seu significante.

O primeiro conjunto, das situações que dão sentido ao conceito, foi contemplado pela exploração dos problemas propostos, de maneira que os alunos pudessem empregar estratégias próprias, lançar hipóteses e verificar as soluções, utilizando-se de ações com

materiais e de relações com outros conceitos, caracterizando assim o chamado “sujeito em ação”, conforme propõe Vergnaud (1990).

Vale destacar que o conceito de razão faz parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas, sendo que o conjunto de situações referentes a este campo requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão. Seguindo o que propõe a teoria, um conceito não se forma dentro de um só tipo de situação; por esse motivo tentou-se apresentar situações diversificadas aos alunos. Tem-se ainda que uma situação não se analisa com um só conceito: isso justifica o fato de os alunos terem utilizado várias estratégias para resolver as situações, em que destacam o conceito de razão, a taxa unitária, o princípio aditivo e o multiplicativo etc.

Durante a aplicação da sequência – e também depois desta – percebeu-se que, quando os alunos eram postos frente a uma nova situação, eles tentavam adaptar conhecimentos adquiridos anteriormente; da mesma forma, no processo de solução de problemas, utilizavam seu conhecimento na ação e escolhiam as operações adequadas, apesar de em muitas das vezes não conseguirem expressar as razões de escolha.

Com relação ao segundo conjunto – dos invariantes operatórios (teoremas e conceitos-em-ação) – estes podem ser identificados neste trabalho quando os sujeitos empregam esquemas (organização invariante das operações mentais para uma classe de situação) para as situações-problema propostas pela professora. Verificou-se, no Problema das urnas e no Problema dos quadrados, que os alunos não dispunham de todas as competências necessárias para resolvê-los de imediato, o que justifica a necessidade da mediação da docente para organizar as descobertas realizadas pelos próprios alunos.

Por exemplo, quando no Problema das urnas se solicitava comparar a quantidade de bolas pretas e bolas brancas nas urnas de Ana, Benê e Cadu, alguns alunos identificavam, desde o início das ações, que Cadu ficaria com mais bolas pretas, mas não sabiam explicar, tampouco representar simbolicamente este resultado. Já no Problema dos quadrados, antes da mediação da professora, os alunos tentavam responder os questionamentos no papel, buscando inferir, argumentar e empregar esquemas de solução advindos de suas descobertas.

Vale ressaltar que os invariantes estiveram presentes também nas outras fases da aplicação da sequência, quando os alunos tentaram transferir os esquemas empregados para as outras situações propostas.

O terceiro conjunto é constituído pelas representações simbólicas e estas podem ser identificadas na linguagem adotada pela professora e pelos alunos e, principalmente, na

definição do conceito de razão e nas escritas matemáticas utilizadas nas etapas de solução do Problema das urnas e do Problema dos Quadrados.

A partir da linguagem que foi utilizada nesses dois problemas, percebeu-se que os alunos, ao longo da aplicação da sequência, foram se apoderando da simbologia apresentada e se valendo dela para se expressar – seja oralmente, seja por escrito.

É importante lembrar que, para Vergnaud (1990), as representações simbólicas não são propriamente uma condição suficiente para a conceitualização, mas contribui para essa conceitualização, principalmente no que se refere às categorias de pensamento matemático.

2ª parte: a revisão da literatura e as estratégias utilizadas pelos alunos durante a sequência didática

Durante a aplicação da sequência didática, percebeu-se que os problemas de valor omissivo não apresentavam grandes dificuldades para os alunos. O fato de a maioria ter utilizado estratégias multiplicativas – que demonstravam o estabelecimento da relação de covariação – parecia indicar certo desenvolvimento do raciocínio proporcional, já que, conforme apontam Costa e Ponte (2008), este está associado à capacidade de analisar conscientemente as relações entre quantidades; esta capacidade é evidenciada por argumentos e explicações sobre as relações proporcionais – o que pareceu bastante evidente nas justificativas apresentadas para os problemas de valor omissivo. Apesar de, evidentemente, não apresentar a palavra covariação, os argumentos “tem que multiplicar” ou “também dobrei” pareciam indicar inferência e predição e implicar na compreensão de que as grandezas envolvidas nos problemas variavam em conjunto (LESH et al., 1988).

Na Avaliação de desempenho, apesar da dificuldade em explicar as relações, a maioria dos participantes acertou as questões mais simples de comparação, estabelecendo relações parte-parte. Conforme estudo de Spinillo (1992, 1993), realizado com quantidades contínuas – e adequado para os valores discretos neste trabalho –, este tipo de tarefa contém quatro valores e requer dos alunos o estabelecimento de uma relação de segunda ordem entre as relações de primeira ordem estabelecida entre os pares. Aquela relação foi facilitada nos itens (a), (b) e (c) do Problema 3 da avaliação de desempenho, pois havia elementos notáveis.

Já no item (d) do mesmo problema as dificuldades foram bem maiores, o que corrobora os resultados obtidos por Boyer et al. (2008), ou seja, apesar de resolverem problemas de comparação com quantidades contínuas a partir de seis anos, crianças de 10 a

12 anos apresentam muita dificuldade em resolver problemas de raciocínio proporcional envolvendo unidades discretas e que esta situação pode ser devido ao fato de não se articular o ensino de frações com o de razões.

Os participantes – com exceção de S23 – não se valeram quer da ideia de covariação, quer do referencial metade, o que teria facilitado o estabelecimento da relação de segunda ordem, conforme encontrado por Spinillo (1992, 1993).

As justificativas apresentadas ao Problema 4 da Avaliação de desempenho foram muito semelhantes àsquelas encontradas no estudo de Jeong et al. (2011) nas tarefas que requeriam o estabelecimento de relações parte-todo; ao tentar responder qual jogador havia tido melhor desempenho – ou se havia desempenhos iguais – os participantes comparavam ou o número de acertos ou o de erros, e não o total. Evidências de raciocínio proporcional foram verificadas nas respostas dos alunos que utilizaram o Referencial Metade e, em especial, na do sujeito que utilizou o conceito de razão e naquelas dos sujeitos que utilizaram a razão como ideia de porcentagem, talvez por ter aprendido fração com esta ideia.

Na Avaliação1 (Problema dos colares) a maioria dos alunos conseguiu resolver os três primeiros itens, que apresentavam ser mais simples. Observou-se que no item 4 – problema de valor omisso – a maioria dos alunos valeu-se das estruturas aditivas, sendo essa uma das estratégias que tem destaque nos trabalhos de Costa (2007), Morton (2014) e Torre et al. (2013).

Nos itens seguintes, que também tratavam de problemas de valor omisso, a estratégia multiplicativa e o estabelecimento da relação de covariação foram mais evidentes, o que também se verificou nos trabalhos citados acima. Diferente do trabalho de Morton (2014), que verificou que os estudantes não demonstraram entendimento de fração representando relações de parte-todo nem de razão representando relações de parte-parte ou parte-todo, nesta etapa do trabalho aqui exposto, foi possível verificar que S14 conseguiu justificar suas respostas por meio da razão representando as relações de parte-parte.

Nos itens 6 e 7 ainda da Avaliação1(Problema dos colares), alguns alunos utilizaram taxa unitária ou razão unitária apontada nos trabalhos de Silvestre e Ponte (2009) e Campos e Rodrigues (2007).

Na Avaliação 2 (Sim ou não? Diga como pensou), nas situações em que as grandezas eram proporcionais, a maioria dos alunos conseguiu justificar as repostas por meio da estratégia multiplicativa e pela relação de covariação, estratégia listada por Torre (2013) e Lamon (1994 apud SILVESTRE & PONTE, 2009), Ponte et al. (2010). Notou-se ainda, que

com o transcorrer da sequência, essas estratégias foram mais frequentes nas respostas dos alunos.

Na última etapa (Mais situações-problemas), as situações apresentadas eram parecidas com aquelas propostas na primeira etapa (Avaliação de desempenho) e percebeu-se que o desempenho geral dos alunos foi melhor na última que na primeira etapa.

Comparando o desempenho dos alunos no Problema 4 da Avaliação de desempenho e no problema b do item 4 da etapa Mais situações-problema – ambos de comparação e com um contexto parecido – fica evidente que os alunos conseguiram utilizar o conceito de razão ao final da sequência.

A partir dos níveis de raciocínio listados por Magina et al. (2014), pode-se verificar que a maioria dos alunos apresentou características do nível 4 – Pensamento Multiplicativo – em que a estratégia utilizada pelo aluno passa necessariamente pela estrutura multiplicativa.

Finalmente, concorda-se com o que aponta Lesh et al. (1988), ou seja, a diversificação das tarefas é imprescindível para que os alunos desenvolvam a necessária flexibilidade no seu raciocínio proporcional. É importante também ressaltar Campos e Rodrigues (2007) quando afirmam que, ao longo do processo de aprendizagem, novos elementos são agregados e o sujeito desenvolve a capacidade para explicitar formalmente os invariantes operatórios, que compõe seus conhecimentos científicos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A inserção no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática teve grande relevância para autora deste estudo, professora regente da turma. Foi possível refletir sobre as vivências profissionais e engajar em discussões acerca do processo de ensino e aprendizagem – por meio das disciplinas cursadas e pelos professores que sempre se mostraram envolvidos com a proposta deste mestrado –, ações que, provavelmente, não aconteceriam caso a professora estivesse voltada apenas para lecionar aulas de Matemática.

A articulação entre a prática de sala de aula da educação básica e as teorias discutidas na instituição superior contribuiu para a formação continuada desta docente, que tentará dar continuidade à pesquisa em sala de aula.

Vale destacar a importância da aplicação da sequência didática aqui proposta na convivência do dia a dia com os alunos, sendo que o envolvimento destes durante a sequência didática provocou uma proximidade maior deles com a professora, contribuindo para um bom relacionamento entre docente e discentes – o que antes não ficava evidente, pois havia certa rejeição da turma com relação a esta professora.

Recordando, a questão anunciada neste trabalho foi: uma sequência didática com base em situações-problema que favoreçam o estabelecimento das relações de covariação e invariância de grandezas pode contribuir para a formação do raciocínio proporcional de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental?

Os resultados mostraram que, de um modo geral – e nas condições em que se deu a sequência –, não parecia existir paralelo entre as relações estabelecidas pelos participantes para resolver Problemas de Valor Omisso e Problemas de Comparação. Com o caminhar da sequência, a relação de covariação foi sendo utilizada por quase todos os alunos para resolver estes tipos de problemas.

Uma conclusão que pode ser esboçada a partir desse resultado é que, assim como encontrado por Costa e Ponte (2008), responder corretamente a problemas de valor omisso não significa que o aluno seja capaz de realizar raciocínios proporcionais em outras situações e que as estratégias utilizadas pelos alunos não parecem ser hierarquizadas a ponto de revelar ou não este tipo de raciocínio. Concorde-se com os autores que a opção de utilizar uma estratégia à outra parece depender da experiência do aluno com aquele tipo de problema, “da interpretação que ele faz do mesmo, do seu conhecimento sobre os números e das relações que consegue estabelecer de imediato” (p.68).

Assim, concorda-se com Magina e Campos (2004) que, com base na Teoria dos Campos Conceituais, indicam ser importante conhecer que classes de problemas os alunos entendem melhor e quais procedimentos são mais naturalmente utilizados por eles para que se possa promover, gradativamente, “novas classes de problemas que requeiram raciocínios mais sofisticados desses alunos e assim expandir o campo conceitual envolvido” (p.59).

Como encaminhamento deste estudo, sugere-se que, entre as ideias da fração – conceito que geralmente é introduzido nos anos iniciais do Ensino Fundamental – seja desenvolvida também a noção de razão entre duas grandezas discretas e complementares, envolvendo relações parte-parte e parte-todo. Em vez de aplicar, de forma mecanizada, técnicas de redução de frações a mesmo denominador, os alunos podem ser desafiados a solucionar problemas que requeiram a comparação de razões e, assim, descobrir relações de equivalência que podem facilitar o desenvolvimento do raciocínio proporcional e também o probabilístico.

A literatura aponta que várias dificuldades encontradas pelos alunos são resultantes das opções curriculares gerais, por exemplo, a introdução tardia do conceito de razão, a abordagem isolada e sem relação com outros tópicos da proporcionalidade e a visão da proporcionalidade como um tópico ou assunto do currículo e não como um conceito a ser compreendido. Tem-se então, como opção metodológica, a promoção de situações diversificadas de modo a levar o aluno a atribuir significado aos conceitos de razão e proporção antes das representações simbólicas e das propriedades formais a serem estudadas a partir do sétimo ano do Ensino Fundamental.

Vale ressaltar que, de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, a construção e a apropriação de todas as propriedades de um conceito ou de todos os aspectos de uma situação se apresentam em um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes. Apesar de a sequência ter sido realizada em pouco mais de dois meses, tentou-se dar um espaço entre uma etapa e outra a fim de que os alunos tivessem algum tempo para refletir sobre aquela situação e tentar fazer analogias com as que seriam trabalhadas mais adiante.

Vale destacar que este trabalho foi apenas uma introdução ao conceito de razão e tem-se a clareza de que o trabalho nos próximos anos de escolaridade deve ser contínuo de modo a levar os alunos a fazer novas analogias entre as novas situações propostas.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. de Q. e S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V 3.6, p.62-77, UFSC. São Carlos, 2008.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.
- BOYER, T. W.; LEVINE, S. L. HUTTENLOCHER, J. Development of Proportional Reasoning: Where Young Children Go Wrong. **Developmental Psychology**, V. 44, No. 5, 1478–1490, 2008.
- CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W. R. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V2.4, p.68-93, UFSC. São Carlos, 2007.
- CARVALHO, A. M. P. de. Uma metodologia de pesquisa para estudar os processos de ensino e aprendizagem em salas de aula. In: SANTOS, F. M. T. dos; GRECA, I. M. (Org.) **A pesquisa em ensino de ciências no Brasil e suas metodologias**. Ijuí: Unijuí, cap.1, p. 13-48, 2006.
- CARVALHO JR., G.D.; AGUIAR JR., O. Os Campos Conceituais de Vergnaud como ferramenta para o planejamento didático. **Cad. Bras. Ens. Fís.**, v. 25, nº. 2, p. 207-227, ago. 2008.
- CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **ZETETIKÉ– Cempem – FE– Unicamp**, v. 13, n. 23, Campinas (SP), 2005.
- _____. Contribuições para a Formação de Professores de Matemática Pesquisador nos Mestrados Profissionalizantes na Área de Ensino. **Bolema**, ano 21, n. 29. Rio Claro (SP), 2008.
- CARAÇA, B. J., **Conceitos fundamentais da Matemática** – Tipografia Matemática, Lisboa, 1952.
- COSTA, S. C. H. C. da. **O Raciocínio Proporcional dos alunos do 2º ciclo do Ensino Básico**. Dissertação de Mestrado. Universidade de Lisboa, 2007.
- COSTA, S.; PONTE, J. P. O Raciocínio Proporcional dos alunos do 2º ciclo do Ensino Básico. **Revista da Educação**, Vol. XVI, nº 2, p.65-100, 2008.
- GOMES, S. C. Ensino de Trigonometria numa Abordagem Histórica: um produto educacional. **Bolema**, v. 27, n. 46, p. 563-577, Rio Claro (SP), 2013.

JEONG, Y.; LEVINE, S. C.; HUTTENLOCHER, J. The Development of Proportional Reasoning: Effect of Continuous Versus Discrete Quantities. **Journal of Cognition and Development**, 8:2, 237-256, 2007.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988, p. 93-118. Disponível em:<http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/88_8.html>

MAGINA, S.; CAMPOS, T. As estratégias dos alunos na resolução de problemas aditivos: um estudo diagnóstico. **Educ. Mat. Pesqui.** V 6, nº. 1, p. 53-71. São Paulo, 2004.

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. L.. Comparação multiplicativa: a força que a expressão exerce na escolha das estratégias de resolução dos estudantes. **Anais XIII CIAEM – Conferência Interamericana de Educação Matemática**, Recife, 2011.

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciênc. Educ.**, v. 20, n. 2, p. 517-533. Bauru, 2014.

MARANHÃO, C; MACHADO, S. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revista**, nº. Especial 1, p. 141-156, UFPR. Curitiba, 2011.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado da Educação. **Currículo Básico Comum do Ensino Fundamental: Matemática**. Educação Básica. Belo Horizonte, 2014.

MOREIRA, M. A. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**. V.7, nº.1, p. 7-29, 2002.

MORTON, C, H. An investigation into ixth grade students' understanding of ratio and proportion. **International Journal for Research in Mathematics Education**, V. 4, N.1, p.68-80, 2014.

OLIVEIRA, G. R. F. de. **Investigação do papel das grandezas físicas na construção do conceito de volume**. Tese de doutorado. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2007.

ONUCHIC, L. de La R.; ALLEVATO, N. S. G. Proporcionalidade através da Resolução de Problemas no Curso Superior de Licenciatura em Matemática. Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 6, Pirenópolis, Goiás, 2015 **Anais...** Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2015.

PONTE, J. P. da; SILVESTRE, A. I.; GARCIA, C.; COSTA, S. **O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade direta pela exploração de regularidades**. Tarefas para 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico: Materiais de Apoio ao Professor. 2010.

PONTE, J. P.; MARQUES, S. Proportion in school mathematics textbooks: A comparative study. **International Journal for Research in Mathematics Education**. **International Journal for Research in Mathematics Education**, V. 1, N.1, p.36-53, 2011.

SILVESTRE, A. I. **Investigações e Novas Tecnologias no Ensino da Proporcionalidade Directa**: Uma Experiência no 2.º Ciclo. Dissertação de Mestrado. Universidade de Lisboa, 2006.

SILVESTRE, A. I.; PONTE, J. P. Resolução de Problemas de Valor Omisso: Análise das Estratégias dos Alunos. **Anais XIXEIAM - Encontro de Investigação em Educação Matemática**. Vila Real, 2009.

SILVA, A. F. G.; CANOVA, R. F.; CAMPOS, T. M. M; DIAS, M. A. A Fração no Currículo no Estado de São Paulo. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 13, Recife, PE, Sociedade Brasileira de Educação Matemática. **Anais...**, Recife, PE, 2011.

SPINILLO, A. G. A importância do referencial de "metade" e o desenvolvimento do conceito de proporção. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Vol. 8, Nº 3, p.305-331, 1992.

_____. As relações de primeira-ordem em tarefas de proporção: uma outra explicação quanto às dificuldades das crianças. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Vol. 9, Nº 2, p. 349-364, 1993.

_____. O Papel de Intervenções Específicas na Compreensão da Criança sobre Proporção. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Vol. 15, Nº 3, p. 475-487, 2002.

_____. O sentido de número e sua Importância na Educação Matemática. In: BRITO, M.R.F.(org). **Solução de Problemas e a Matemática Escolar**. Campinas: Alínea, 2006.

TORRE, J.; TJOE, H.; RHOADS, K.; LAM, D. Conceptual and Theoretical Issues in Proportional Reasoning. **International Journal for Studies in Mathematics Education**. V.6 (1), p. 21-38, 2013.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Tradução: Juan D. Godino. V. 10, n. 23, p. 133-170. Grenoble, 1990.

_____. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução: Maria Lucia Faria Moro; revisão técnica: Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.

VIANA, O. A. Elaboração de problemas e os sentidos dados para o conceito de razão: um estudo introdutório com alunos da licenciatura. Seminário PIBID/UFU: Integração de Projetos, 4, Uberlândia, 2013. **Anais...** UFU, Uberlândia, 2013.

VIANA, O. A.; MIRANDA, J. A. O raciocínio proporcional e as estratégias de resolução de problemas de valor omissivo e de comparação. **Revemat**, 2016 (no prelo).