Um Curso de Geometria Euclidiana Plana

Sumário

Um Curso de Geometria Euclidiana Plana **3**

1 Geometria Absoluta **7**
1.1 Conceitos Primitivos e Axiomas 7
1.2 Retas, Segmentos, Semirretas, Semiplanos e Ângulos 10
1.3 Congruência 21
1.4 Desigualdades 27

2 Geometria Euclidiana **35**
2.1 O Problema das Paralelas 35
2.2 O Axioma Euclidiano das Paralelas 45
2.3 O Conceito de Semelhança 52
2.4 Circunferências e Discos 58
2.5 O Conceito de Área 72

Apêndice **83**

Referências **87**

Antes de começarmos...

O enfoque:

Este é um texto curto de Geometria Euclidiana Plana acessível a leitores que cursaram o Ensino Médio. Trata-se de um curso básico de ***Geometria Sintética***, ou seja, um curso no qual não se faz uso de sistemas de coordenadas no plano e, portanto, não se faz uso das ferramentas da Geometria Analítica ou Diferencial. Outro aspecto deste texto é que se trata de um texto ***axiomático***, ou seja, os diversos teoremas que enunciamos e demonstramos são deduzidos, em última instância, diretamente de um sistema axiomático previamente concebido. Sendo assim, nossa maior preocupação é com o encadeamento lógico-dedutivo dos resultados à medida em que avançamos na construção da teoria.

A originalidade:

É importante ressaltar que nossa primeira motivação ao escrever essas notas foi o curso de *Licenciatura em Matemática à Distância* da Universidade Federal de Uberlândia. Por essa razão, apesar de ser um texto curto, durante sua escrita tivemos a preocupação de redigi-lo da forma mais original possível, inserindo inclusive notas históricas para torná-lo mais atraente. É fato que há excelentes textos de Geometria Euclidiana Plana em língua portuguesa com a proposta descrita acima, como o livro do professor João Lucas [2], e das professoras Eliane e Maria Lúcia [13]. Portanto, não faria o menor sentido replicá-los nessas notas.

Os exercícios:

O leitor logo perceberá que não colocamos exercícios do tipo "aplicação de fórmulas" neste texto (que são abundantes em livros de Ensino Médio). Mesmo os exercícios "conceituais" são escassos e aparecem à medida em que se fazem necessários para complementar algum resultado exposto. Isso não significa que exercícios não sejam importantes: eles o são e devem ser feitos durante o estudo e serão propostos no ambiente de aprendizagem próprio do curso à distância. Naturalmente, há inúmeros ótimos exercícios em textos consagrados de geometria, como os já citados [2] e [13]. Não vamos replicá-los nessas notas. Aliás, uma sugestão valiosa em termos de exercícios para a consolidação do aprendizado de Geometria Euclidiana são as questões dos inúmeros vestibulares das universidades públicas brasileiras. Em plena era da informática é muito fácil encontrar e compilar um banco de questões muito boas (e originais!) acerca desse assunto. Encorajamos os leitores que façam essa busca.

As construções geométricas:

Outro aspecto que gostaríamos de destacar é que as construções geométricas "com régua e compasso" são extremamente importantes para a consolidação do aprendizado em geometria (e fazem parte da ementa da disciplina Geometria Euclidiana Plana do curso à distância). Neste texto não as colocamos, mas elas serão trabalhadas por meio do software livre de geometria dinâmica *GeoGebra*, sendo que todo o material de acompanhamento será disponibilizado *on line*, pela Internet, em site próprio divulgado posteriormente.

O conteúdo:

O curso está dividido em quatro módulos, sendo dois de *Geometria Absoluta* (Capítulo 1) e dois de *Geometria Euclidiana* (Capítulo 2):

Capítulo 1: Geometria Absoluta
(Módulos 1 e 2)

Módulo 1

Conceitos Primitivos e Axiomas.
- Três Personagens Importantes na História da Geometria.
- O Modelo Padrão para a Geometria Euclidiana.

Retas, Segmentos, Semirretas, Semiplanos e Ângulos.
- Retas e Distância entre Pontos.
- Segmentos e Semirretas.
- Semiplanos.
- Ângulos.
- Ortogonalidade.

Módulo 2

Congruência.
- Polígonos.
- Triângulos.

Desigualdades.
- O Teorema do Ângulo Externo e Consequências.
- Desigualdade Triangular.

Capítulo 2: Geometria Euclidiana
(Módulos 3 e 4)

Módulo 3

O Problema das Paralelas.
- Alguns Comentários sobre a História do "Problema das Paralelas".

O Axioma Euclidiano das Paralelas.
- A Existência e Unicidade da Paralela.
- Quadriláteros.
- Tales.

O Conceito de Semelhança.
- Triângulos Semelhantes.
- Triângulos Retângulos.
- Ampliando o Conceito de Semelhança.
- O Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Módulo 4

Circunferências e Discos.
- Definições e Primeiros Resultados.
- Arcos.
- Pontos Notáveis de um Triângulo.
- A Reta de Euler e a Circunferência dos Nove Pontos.
- Inscrição e Circunscrição de Polígonos Regulares em Circunferência.
- Comprimentos de Circunferências e de Arcos de Circunferências.

O Conceito de Área.
- O Retângulo.
- Área de Retângulo.
- O Conceito Geral de Área.
- Áreas de Figuras Poligonais.
- Área de Disco e Setor Circular.
- Semelhança e Áreas.

Além dos módulos acima, acrescentamos um interessante *Apêndice* sobre proposições equivalentes ao Quinto Postulado de Euclides, além, é claro, das *Referências*.

Apêndice.
- Equivalentes ao Quinto Postulado de Euclides.

Referências.

Bons estudos!
Os autores.

Uberlândia, agosto de 2013.

Capítulo 1

Geometria Absoluta

A *Geometria Absoluta* é a parte da Geometria desenvolvida sem o uso do chamado *Axioma das Paralelas*. Optamos por destacar a Geometria Absoluta em um capítulo separado devido ao fato de que todos os teoremas cujas demonstrações não façam uso do referido axioma são teoremas válidos na chamada *Geometria Hiperbólica*, que é uma *geometria não euclidiana* bastante importante do ponto de vista histórico.

1.1 Conceitos Primitivos e Axiomas

Três Personagens Importantes na História da Geometria

Euclides, de Alexandria.

Euclides foi o matemático grego responsável pela compilação de praticamente toda a matemática desenvolvida até sua época em uma monumental obra de 13 volumes chamada *Os Elementos*, confeccionada por volta do ano 300 a.C.

FIGURA 1: *Ilustração de Euclides, de Alexandria.*

Seu mérito não se restringe apenas à compilação, como também à introdução do método lógico-dedutivo no desenvolvimento de uma teoria, isto é, do método axiomático, tão conhecido da matemática dos dias atuais. Na obra de Euclides temos 10 axiomas ([1]), sendo 5 "noções comuns", que Euclides acreditava serem verdades aceitas sem contestações em qualquer ciência, e 5 "postulados" que pretendiam ser proposições específicas da geometria e que também deveriam ser aceitas sem contestações. A partir desses axiomas, Euclides deduziu 465 proposições, dentre as quais figuram também resultados de geometria espacial

[1] Proposições admitidas sem demonstrações.

e teoria dos números (do ponto de vista geométrico). Os livros didáticos de geometria, confeccionados ao longo do tempo, possuem, até hoje, *Os Elementos* de Euclides como base. Trata-se da segunda obra mais editada no mundo (a primeira é a Bíblia).

Sabe-se que Euclides nasceu por volta do ano 325 a.C. e morreu por volta de 265 a.C. Sabe-se também que ele viveu boa parte de sua vida na cidade de Alexandria, no Egito, onde trabalhou na famosa biblioteca de Alexandria, fundada por Alexandre, o Grande.

David Hilbert.

Hilbert foi um importante matemático e lógico alemão que nasceu em 1862 em Königsberg na Prússia (atualmente Königsberg é uma cidade russa) e morreu em 1943 em Göttingen na Alemanha.

No final do século XIX *Os Elementos* de Euclides não estavam resistindo ao rigor que a lógica exigia para os fundamentos da geometria. Muitas proposições de Geometria Euclidiana faziam uso de resultados que não haviam sido demonstrados anteriormente e que não constavam do rol de axiomas ([2]), ou seja, era necessária uma reformulação dos axiomas de Euclides. Uma proposta, ainda no século XIX, bem aceita pela comunidade matemática foi a de Hilbert ([3]), publicada em seu célebre trabalho *Grundlagen der Geometrie* (*Fundamentos de Geometria*), de 1899, em que Hilbert coloca a Geometria Euclidiana sobre bases sólidas por meio da substituição dos 5 Postulados de Euclides por 5 grupos de axiomas, os quais chamou de Axiomas de Incidência (7 axiomas), Axiomas de Ordem (4 axiomas), Axiomas de Congruência (6 axiomas), Axiomas de Continuidade (2 axiomas) e o Axioma das Paralelas.

FIGURA 2: *Foto de David Hilbert.*

Na obra original de Hilbert há 21 axiomas, mas o 21º axioma é, na verdade, consequência dos demais axiomas.

Além de propor um novo sistema de axiomas, ao contrário de Euclides, Hilbert considerou que ***ponto***, ***reta***, ***plano*** e ***espaço*** são ***conceitos primitivos*** (ou ***noções primitivas***), objetos não passíveis de serem definidos. Junto aos conceitos primitivos, Hilbert também considerou três *relações primitivas* (igualmente não passíveis de definição) que são as relações "*estar em*", "*estar entre*" e "*ser congruente a*".

[2]Um sistema axiomático para uma teoria deve ter necessariamente duas características: ser *coerente* e ser *suficiente*. Coerente significa que não se pode provar uma proposição e sua negação a partir do sistema de axiomas adotado. Suficiente significa que deve ser possível decidir sobre a veracidade ou não de uma proposição da teoria a partir de seu sistema de axiomas. Ainda há um aspecto desejável (mas não obrigatório) em um sistema axiomático: que um axioma não seja consequência dos demais, ou seja, que ele seja o mais enxuto possível.

[3]Há outros sistemas axiomáticos, até mais concisos que o de Hilbert, para a Geometria Euclidiana, como, por exemplo, o de Alfred Tarski e o de George Birkhoff. Entretanto, o sistema de Hilbert parece ter a virtude de ser mais sincronizado com *Os Elementos*.

George David Birkhoff.

Birkhoff (1884-1944) foi um matemático americano que também propôs um sistema axiomático para a Geometria Euclidiana. Seu trabalho, intitulado *A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor* foi publicado no conceituado periódico *Annals of Mathematics*, em 1932, e consiste de um sistema com apenas quatro axiomas. Tal concisão só foi possível devido à associação que Birkhoff faz de seus axiomas com a estrutura de *corpo ordenado completo* dos números reais. A construção axiomática do conjunto dos números reais já era algo muito bem estabelecido no campo da Análise à sua época.

FIGURA 3: *Foto de George David Birkhoff.*

Essa concisão que os axiomas de Birkhoff trouxe para a geometria foi extremamente bem-vinda do ponto de vista didático, uma vez que a manipulação das propriedades dos números reais é, geralmente, bem compreendida pelos estudantes. Atualmente, a grande maioria dos textos didáticos de geometria selecionam "seus axiomas" a partir de uma mistura dos axiomas de Hilbert e de Birkhoff, com pequenas alterações em seus enunciados. Neste texto também seguiremos por esse caminho.

O Modelo Padrão para a Geometria Euclidiana

Na referência [2] o prof. João Lucas M. Barbosa estabelece um interessante paralelo entre conceitos primitivos, axiomas e um jogo de damas. Embora seja algo que cause um certo incômodo em um primeiro estudo, não é possível defirmos tudo em uma teoria axiomática. Se quiséssemos definir rigorosamente *reta*, por exemplo, faríamos uso de termos que, por sua vez, precisariam ser definidos. Na definição desses termos, novos termos surgiriam e estes, por sua vez, precisariam também ser definidos. Cairíamos, fatalmente, em uma cadeia infinita de definições ou, então, em um ciclo vicioso ([4]). Os conceitos primitivos são como as pedras de um jogo de damas. Ninguém as define rigorosamente, até porque uma pedra no jogo de damas pode ter formatos variados, além de ser totalmente inútil para o jogo tal tentativa de definição. O que importa são as regras do jogo e não como a pedra é representada. Essas regras são os axiomas. A partir delas deve-se deduzir o que se pode fazer (os teoremas!) e o que não se pode fazer durante o jogo.

Outro aspecto importante que devemos ressaltar é o *modelo* que utilizamos para representar os conceitos primitivos da geometria. Obviamente estamos extremamente familiarizados em representar uma reta como uma "linha esticada" e um plano como uma "superfície esticada". Mas uma reta não precisa ter necessariamente esse formato. De fato, em estudos

[4]Por exemplo, Euclides "definiu" *reta* como sendo *comprimento* sem *largura*. Mas o que são os termos *comprimento* e *largura*? Euclides também "definiu" *ponto* como sendo aquilo que *não tem partes*. Possivelmente ele foi influenciado pelo conceito (errôneo) de átomo de sua época, segundo o qual acreditavam ser a porção indivisível da matéria. Mas, e o que significa *não ter partes*?

mais avançados podemos provar que qualquer superfície que possa ser "planificada sem distorções" ([5]) serve como modelo de "plano" para a Geometria Euclidiana. Naturalmente o formato das "retas" em tais superfícies pode ser extremamente variado. O que faz os *modelos usuais* de pontos, retas e planos da Geometria Euclidiana serem tão utilizados é a sua conveniência em relação às observações físicas que fazemos ao nosso redor.

Nesse sentido, o estudo de geometrias não euclidianas pode ser muito interessante. Existem muitos modelos diferentes para tais geometrias e seu estudo liberta nossa mente do vício de achar que tudo ao nosso redor se adequa necessariamente aos *modelos usuais* da Geometria Euclidiana.

Sugestão de trabalho: *Faça uma pesquisa nas referências bibliográficas deste texto e na Internet sobre o enunciado dos axiomas (originais) de Euclides, Hilbert e Birkhoff.*

1.2 Retas, Segmentos, Semirretas, Semiplanos e Ângulos

Retas e Distância entre Pontos

Toda a teoria deste texto está desenvolvida sobre um conjunto chamado ***plano*** (que é um conceito primitivo). Os elementos desse conjunto são os ***pontos*** (também conceito primitivo). Qualquer subconjunto de pontos do plano é chamado de ***figura***. Um tipo de figura importante do plano é composto por ***retas*** (outro conceito primitivo).

Conforme já discutido na seção anterior, podemos adotar como ***modelo de plano*** uma "superfície esticada" não limitada em todas as direções. Estamos extremamente familiarizados com este tipo de modelo de plano, uma vez que uma folha de papel sobre uma mesa fornece o "material concreto" para esboçarmos figuras em pelo menos uma parte limitada do plano.

Um ***modelo de reta*** pode ser adotado como sendo uma "linha esticada" não limitada em ambos os sentidos no plano. Do ponto de vista concreto também estamos absolutamente familiarizados com esse modelo, pois parte de tal linha pode ser traçada sobre uma folha de papel com o auxílio de uma régua.

Por fim, um ***modelo de ponto*** pode ser adotado como sendo uma "partícula" no plano. Também do ponto de vista concreto temos muita familiaridade com pontos, uma vez que eles podem ser produzidos sobre uma folha de papel com o auxílio da ponta de um lápis ou caneta.

Notação para pontos neste texto: letras latinas maiúsculas $(A, B, C, \ldots)$.
Notação para retas neste texto: letras latinas minúsculas $(r, s, t, \ldots)$. Também utilizamos a notação $\overleftrightarrow{AB}$ para designar a reta que contém os pontos distintos A e B.

Axioma A1. Em uma reta existem pelo menos dois pontos distintos. Dada uma reta, existe um ponto que não pertence a essa reta.

[5]Superfícies *isométricas* ao plano usual. Como exemplos clássicos de superfícies que podem ser planificadas isometricamente no plano usual temos os cilindros e os cones de revolução. Notemos que as referidas planificações de cilindros e cones não cobrem todo o plano usual.

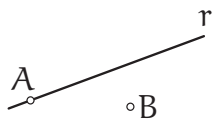


FIGURA 4: $A \in r$; $B \notin r$.

Axioma A2. Dois pontos distintos determinam ([6]) uma única reta.

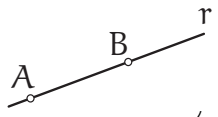


FIGURA 5: $r = \overleftrightarrow{AB}$.

Pontos sobre uma reta são ditos ***pontos colineares***.

O estudo de posições relativas entre retas no plano faz uso do princípio lógico do "terceiro excluído", ou seja, que uma afirmação ou é verdadeira ou é falsa, não havendo terceira possibilidade. Equivalentemente, ou "x é y" ou "x não é y", não havendo terceira possibilidade.

Sendo assim, há apenas duas posições relativas para duas retas r e s <u>distintas</u> no plano:
(**1**) r e s possuem pontos em comum;
(**2**) r e s não possuem pontos em comum.

Devido ao Axioma **A2**, no caso (**1**) não pode haver mais do que um único ponto de intersecção entre as retas r e s.

No caso (**1**) chamamos as retas r e s de retas concorrentes.

No caso (**2**) chamamos as retas r e s de retas paralelas.

Observação: os Axiomas **A1** e **A2** garantem a existência de retas concorrentes (verifique!), enquanto a prova da existência de retas paralelas ainda depende de outros axiomas que enunciaremos adiante.

Sintetizemos as duas definições acima:

Duas retas distintas são ditas ***concorrentes*** ou ***secantes*** quando possuem um único ponto em comum.

Duas retas distintas são ditas ***paralelas*** quando não possuem pontos em comum.

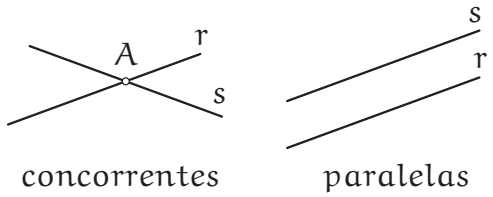


FIGURA 6: À esquerda $r \cap s = \{A\}$. À direita $r \cap s = \varnothing$.

Para os próximos axiomas vamos admitir conhecidas as propriedades do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, bem como o fato de $\mathbb{R}$, munido das operações usuais de adição e multiplicação, ser um *corpo ordenado completo* (referência [7]). É justamente essa caracteristica de $\mathbb{R}$ que garantirá a "continuidade" da reta.

[6]Nesses axiomas *determinar* tem o sentido de *existir*.

Axioma A3. A cada par de pontos é possível fazer corresponder um único número real não negativo. Este número é zero apenas quando os dois pontos são coincidentes.

O número referido pelo axioma acima é chamado de ***distância*** entre os pontos. Denotando a distância entre os pontos A e B por $d(A, B)$, o axioma acima afirma que:
$d(A, B) \geq 0$;
$d(A, B) = 0$ se, e somente se, $A = B$.
$d(A, B) = d(B, A)$. (simetria)

O leitor familiarizado com o conceito de *espaços métricos* perceberá que axioma acima é quase a definição de *métrica*, exceto pelo fato de que falta a chamada *desigualdade triangular*. No nosso caso, tal desigualdade não é axioma, mas sim teorema, e será demonstrado adiante.

Notemos também que o axioma acima é muito geral do ponto de vista prático. Por exemplo, poderíamos definir que $d(A, B) = 1$ quando $A \neq B$ e $d(A, B) = 0$ quando $A = B$ (essa é a conhecida *métrica zero-um*). Como o leitor pode perceber, não é uma métrica muito útil.

Vamos melhorar essa situação estabelecendo uma métrica melhor na reta por meio do axioma abaixo.

Axioma A4. Dada uma reta r, existe uma <u>bijeção</u> $\varphi : r \to \mathbb{R}$ tal que para A, $B \in r$ tem-se $d(A, B) = |\varphi(A) - \varphi(B)|$.

O axioma acima possui inúmeras implicações. Primeiramente observemos que a distância definida no Axioma A4 para retas cumpre o Axioma A3. Ele garante, também, que em uma reta há infinitos pontos, mais que isso, que a cardinalidade de uma reta r é a mesma de $\mathbb{R}$ (isto é, não enumerável).

Outra observação é que o fato de sempre podermos traçar uma reta por dois pontos A e B quaisquer (Axioma A2), permite que "estendamos" a distância definida no Axioma A4 para todo o plano. Além disso, uma bijeção φ como a apresentada no axioma acima estabelece naturalmente uma *unidade de medida*. Por exemplo, os pontos O e P de r tais que $\varphi(O) = 0$ e $\varphi(P) = 1$ (ou -1) estão à distância 1 um do outro.

Uma bijeção φ como a do axioma acima (que não é única) é chamada de ***sistema de coordenadas*** para a reta r, sendo $\varphi(A)$ chamado de ***coordenada*** de A e o ponto $O \in r$ tal que $\varphi(O) = 0$ a ***origem*** do sistema. Uma reta r munida de um sistema de coordenadas é chamada de ***reta real***.

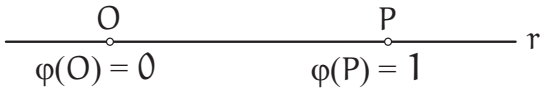


FIGURA 7: *Reta real. Estabelecendo a unidade de medida.*

Observemos que a ordem dos números reais pode ser transportada para uma reta via uma bijeção φ como a do Axioma A4 acima. Com isso, temos respaldo matemático para *orientar* uma reta. Uma reta orientada é comumente chamada de ***eixo***. Isso significa que o axioma acima é (também) o ponto de partida para a introdução de uma Geometria Analítica no plano.

Outra consequência importante do Axioma A4 é que intervalos de números reais podem ser transportados para uma reta r, via um sistema de coordenadas φ, dando origem a importantes conjuntos de pontos da reta, que são os segmentos e as semirretas. Antes de introduzi-los formalmente, propomos o seguinte exercício (resolvido).

Exercício. Mostre que dados dois pontos distintos A e B em uma reta r, existe um sistema de coordenadas φ para r tal que $\varphi(A) < \varphi(B)$.
Resolução.

O Axioma A4 garante a existência de uma bijeção $\varphi_1 : r \to \mathbb{R}$. Se $\varphi_1(A) < \varphi_1(B)$, basta tomar $\varphi = \varphi_1$. Caso contrário, ou seja, se $\varphi_1(A) > \varphi_1(B)$, definamos $\varphi = -\varphi_1$.

A aplicação φ é injetiva. De fato, para $P \neq Q$ em r temos

$$\varphi_1(P) \neq \varphi_1(Q) \Rightarrow -\varphi_1(P) \neq -\varphi_1(Q) \Rightarrow \varphi(P) \neq \varphi(Q).$$

A aplicação φ é sobrejetiva. De fato, seja $k \in \mathbb{R}$. Como $-k \in \mathbb{R}$, existe $P \in r$ tal que

$$\varphi_1(P) = -k \Rightarrow -\varphi_1(P) = k \Rightarrow \varphi(P) = k.$$

Portanto, φ é bijeção de r em $\mathbb{R}$.
Finalmente, $\varphi(A) = -\varphi_1(A) < -\varphi_2(B) = \varphi(B)$, como queríamos. □

Segmentos e Semirretas

Sejam r uma reta, A e B pontos distintos de r e φ um sistema de coordenadas para r tal que $\varphi(A) < \varphi(B)$. O conjunto

$$\overline{AB} = \{X \in r : \varphi(A) \leq \varphi(X) \leq \varphi(B)\}$$

é chamado de ***segmento*** de extremos (ou extremidades) A e B (também denotado por $\overline{BA}$), enquanto o conjunto

$$\overrightarrow{AB} = \{X \in r : \varphi(A) \leq \varphi(X)\}$$

é chamado de ***semirreta*** de origem A passando por B (note que B está em $\overrightarrow{AB}$).

De modo análogo, o conjunto

$$\overrightarrow{BA} = \{X \in r : \varphi(X) \leq \varphi(B)\}$$

é chamado de ***semirreta*** de origem B passando por A (note que A está em $\overrightarrow{BA}$).

Observemos que as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ não são coincidentes. Temos $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = r$ e $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$.

Também é conveniente notar que dado um ponto O em uma reta r, este ponto determina duas semirretas de mesma origem O cuja reunião é r e a intersecção é apenas o conjunto unitário formado pelo ponto O. Tais semirretas são chamadas de ***semirretas opostas***.

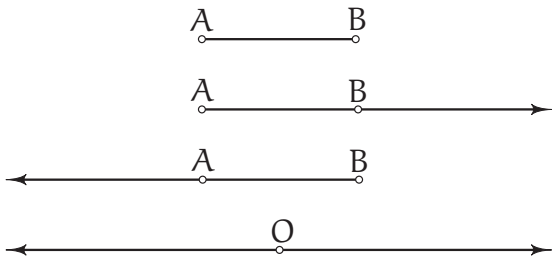


FIGURA 8: *Segmento e semirretas.*

O ***comprimento do segmento*** $\overline{AB}$ é definido como sendo a distância entre A e B, ou seja, $d(A,B) = |\varphi(A) - \varphi(B)|$. Observe que essa definição justifica a notação $\overline{AB} = \overline{BA}$, já que $|\varphi(A) - \varphi(B)| = |\varphi(B) - \varphi(A)|$.

Ainda resgatando a notação de segmento acima, quando $X \in \overline{AB}$ com $X \neq A$ e $X \neq B$, dizemos que X ***está entre*** A e B.

Dois segmentos são ditos ***congruentes*** quando possuem o mesmo comprimento.

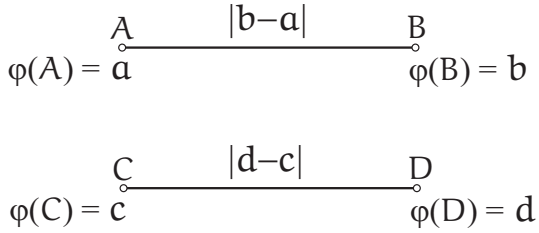


FIGURA 9: *Quando* $|b-a| = |d-c|$ *os segmentos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *são congruentes.*

Observações importantes sobre a notação estabelecida:
(**1**) Quando não houver perigo de confusão, denotamos "AB" (sem a barra em cima) tanto para o *segmento* com extremos A e B (que é um conjunto de pontos), quanto para o *comprimento do segmento* com extremos A e B (que é um número real).
(**2**) É comum utilizar letras latinas minúsculas para designar comprimentos $(a, b, c, \ldots)$. Alguns textos também trazem a notação $|AB|$ para o comprimento do segmento AB.
(**3**) Não há unanimidade com relação às notações nos textos de geometria. Por exemplo, ao contrário do que estabelecemos acima, há textos que consideram $\overline{AB}$ (com a barra em cima) com sendo o comprimento do segmento AB.
(**4**) Deve-se tomar cuidado com a notação $\overrightarrow{AB}$ para semirretas e não confundi-la com a notação de vetores. Quando houver tal perigo, preferimos escrever "*semirreta* AB". Alguns textos também utillizam a notação S_{AB} para semirreta de origem A passando por B.

Um ponto $M \in AB$ é dito ***ponto médio*** do segmento AB quando AM e MB possuem o mesmo comprimento.

Teorema 1.1 *Dado um segmento* AB*, existe apenas um único ponto médio em* AB*.*

Demonstração.
Seja φ um sistema de coordenadas tal que $\varphi(A) < \varphi(B)$. Seja M a imagem inversa por φ do número $\frac{\varphi(A)+\varphi(B)}{2}$. Observemos que M existe pelo fato de φ ser bijeção.
Mostremos que M é ponto médio de AB.
Como $\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(A)+\varphi(B)}{2}\right) = M$, então $\frac{\varphi(A)+\varphi(B)}{2} = \varphi(M)$. Logo, como $\varphi(A) < \varphi(B)$, então

$$\varphi(A) = \frac{\varphi(A) + \varphi(A)}{2} < \frac{\varphi(A) + \varphi(B)}{2} < \frac{\varphi(B) + \varphi(B)}{2} = \varphi(B).$$

Daí, $\varphi(A) < \varphi(M) < \varphi(B)$, ou seja, $M \in AB$.
Agora, utilizando o fato de que $\varphi(A) = 2\varphi(M) - \varphi(B)$, temos

$$\begin{aligned} AM &= |\varphi(M) - \varphi(A)| = \varphi(M) - \varphi(A) = \varphi(M) - (2\varphi(M) - \varphi(B)) = \\ &= \varphi(B) - \varphi(M) = |\varphi(B) - \varphi(M)| = MB. \end{aligned}$$

Portanto, M é ponto médio de AB.

Mostremos agora a unicidade do ponto médio. Consideremos novamente φ um sistema de coordenadas tal que $\varphi(A) < \varphi(B)$.

Suponhamos que M e N são pontos médios de AB. Daí, pelo fato de $M \in AB$, temos $\varphi(A) \leq \varphi(M) \leq \varphi(B)$.

Logo, $\varphi(A) - \varphi(M) \leq 0 \leq \varphi(B) - \varphi(M)$. Daí $\varphi(M) - \varphi(A) \geq 0$ e $\varphi(B) - \varphi(M) \geq 0$.

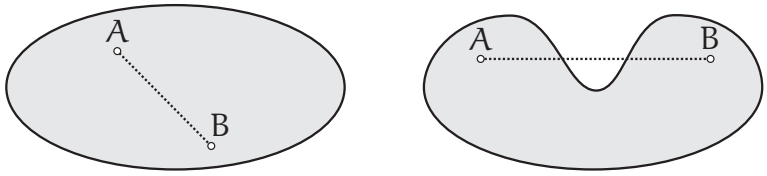
Analogamente, $\varphi(N) - \varphi(A) \geq 0$ e $\varphi(B) - \varphi(N) \geq 0$. Utilizando novamente o fato de M e N serem pontos médios temos, $AM = MB$, ou seja,

$$|\varphi(A) - \varphi(M)| = |\varphi(B) - \varphi(M)| \Longrightarrow \varphi(M) - \varphi(A) = \varphi(B) - \varphi(M)$$
$$\Longrightarrow \varphi(M) = \frac{\varphi(A) + \varphi(B)}{2}.$$

Analogamente, $\varphi(N) = \frac{\varphi(A)+\varphi(B)}{2}$. Logo, $\varphi(M) = \varphi(N)$. Como φ é bijeção, temos que $M = N$. Portanto, o ponto médio é único. $\square$

Semiplanos

Um conjunto $\mathcal{C}$ no plano é dito ***convexo*** quando para quaisquer pontos $A, B \in \mathcal{C}$ o segmento AB está contido em $\mathcal{C}$.



convexo *não convexo*

FIGURA 10: *Conjuntos convexo e não convexo no plano.*

Axioma A5. Uma reta r contida em um plano determina dois conjuntos nesse plano de tal modo que:

- A intersecção dos dois conjuntos é a reta r;
- Cada conjunto é convexo.
- Se o ponto A pertence a um dos conjuntos e o ponto B pertence ao outro, então a intersecção do segmento AB com r é não vazia.

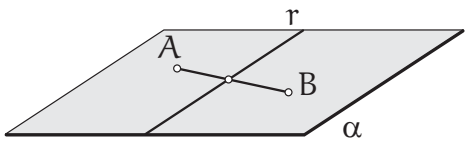


FIGURA 11: $AB \cap r \neq \varnothing$.

Cada um dos conjuntos do Axioma A5 é chamado de ***semiplano*** gerado por r (ou com origem em r).

Para o próximo teorema, adiantamos a definição de *triângulo* (que é caso particular de *polígono* e será visto na próxima seção).

Dados três pontos A, B e C não colineares, o ***triângulo*** ABC é definido como sendo a reunião dos segmentos AB, BC e CA. Os pontos A, B e C são os ***vértices*** do triângulo, enquanto que os segmentos AB, BC e CA são os ***lados*** do triângulo.

Teorema 1.2 *(Pasch) Se uma reta intersecta um dos lados de um triângulo e não passa por nenhum de seus vértices, então essa reta também intersecta um dos outros dois lados do triângulo.*

Demonstração.

Sejam ABC o triângulo e r a reta. Sem perda de generalidade, suponhamos que r intesecta AB, conforme figura abaixo.

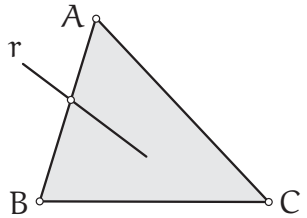


FIGURA 12: *Figura auxiliar.*

Como r não intersecta nenhum vértice, então r divide o plano em dois semiplanos de tal forma que A está em um dos semiplanos e B está no outro semiplano (pois se A e B estivessem no mesmo semiplano então AB não intersectaria r pelo Axioma $A5$).

Agora, como r não intersecta C, então C está no mesmo semiplano que A ou C está no mesmo semiplano que B. Pelo Axioma $A5$, no primeiro caso, $r \cap BC \neq \varnothing$ e, no segundo caso, $r \cap CA \neq \varnothing$.

Portanto, r intersecta um dos outros dois lados do triângulo. □

Observação. Em alguns textos de geometria o *Teorema de Pasch* é tomado no lugar do Axioma $A5$ que enunciamos acima.

Ângulos

Um ***ângulo*** é a reunião de duas semirretas com mesma origem. Cada semirreta é chamada de ***lado*** do ângulo e a origem comum é chamada de ***vértice*** do ângulo.

Quando $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são lados de um ângulo de vértice A, denotamos tal ângulo por $B\widehat{A}C$ ou $C\widehat{A}B$, ou ainda $\widehat{A}$, quando não houver perigo de confusão (com outro ângulo de mesmo vértice).

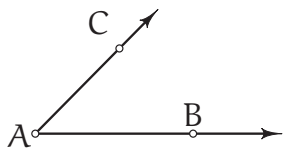


FIGURA 13: *Ângulo* $B\widehat{A}C$.

Há duas situações especiais de ângulos que merecem destaque: quando os lados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ formam uma reta ou quando $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. No primeiro caso dizemos que o ângulo $\widehat{A}$ é ***raso***, enquanto que no segundo caso dizemos que o ângulo $\widehat{A}$ é ***nulo***.

Observações.

(1) Em alguns contextos, como na trigonometria, por exemplo, é importante estendermos o conceito de ângulo para *ângulo orientado*. Tal extensão consiste simplesmente em ordenar os lados, ou seja, há um lado escolhido como *lado inicial* e outro escolhido como *lado final* do ângulo.

(2) Assim como ocorre com a notação de segmento, não há unanimidade quanto à notação de ângulo. Além de ângulo $B\widehat{A}C$ ou $C\widehat{A}B$, ou ainda $\widehat{A}$, conforme estabelecemos acima, alguns autores utilizam a notação $\angle BAC$ ou $\measuredangle BAC$ ou ainda $\sphericalangle BAC$. Por fim, há autores que sempre grafam "ângulo BAC" (sem o acento circunflexo no A).

Consideremos um ângulo $B\widehat{A}C$ não nulo e não raso. Sejam as retas $r = \overleftrightarrow{AB}$ e $s = \overleftrightarrow{AC}$. Sejam $\mathcal{S}_C$ o semiplano gerado por r que contém a semirreta $\overrightarrow{AC}$ e $\mathcal{S}_B$ o semiplano gerado por s que contém a semirreta $\overrightarrow{AB}$. O conjunto $\mathcal{I} = \mathcal{S}_C \cap \mathcal{S}_B - B\widehat{A}C$ é chamado de ***interior*** do ângulo $B\widehat{A}C$.

A reunião de um ângulo com seu interior recebe o nome de ***setor angular***.

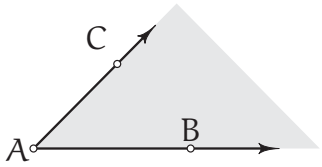


FIGURA 14: *Setor angular* BAC.

Axioma A6. A cada ângulo é possível fazer corresponder um único número real no intervalo $[0, 180]$. Este número é 0 apenas quando o ângulo é nulo e 180 apenas quando o ângulo é raso.

O leitor não terá dificuldades em perceber que o axioma acima prepara o caminho para que possamos medir ângulos. A escala de 0 a 180 está associada à medida em ***graus*** e é comum indicar um número dessa escala junto ao símbolo $^\circ$ (exemplo: 30 graus é escrito 30°). Naturalmente, o intervalo $[0, 180]$ não tem nada de especial (a não ser o bonito fundamento histórico que data da época dos babilônios) e poderíamos trocá-lo, por exemplo, por $[0, \pi]$ e trabalhar com outra escala (radianos, conforme veremos adiante).

Dado um ângulo $B\widehat{A}C$, o número referido pelo Axioma $A6$ a ele associado é chamado de ***medida*** de $B\widehat{A}C$ e indicado por $mB\widehat{A}C$.

Quando não houver perigo de confusão e for conveniente, utilizamos $B\widehat{A}C$ (ou $\widehat{A}$) tanto para indicar ângulo (reunião de semirretas) quanto para indicar medida de ângulo (número real). Também é comum indicarmos medidas de ângulos por letras gregas minúsculas $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$. Assim, por exemplo, a medida de um ângulo com vértice em A é geralmente denotada por α.

O próximo axioma é uma espécie de recíproca do axioma anterior.

Axioma A7. Seja $\mathcal{S}$ um dos dois semiplanos gerados por uma reta $\overleftrightarrow{AB}$ de um plano. A cada número $\alpha \in [0, 180]$ corresponde um único ângulo $B\widehat{A}C$ contido em $\mathcal{S}$ tal que $mB\widehat{A}C = \alpha$.

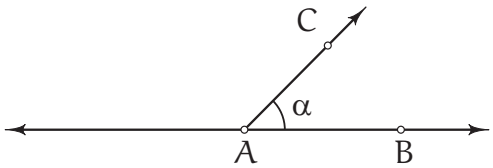


FIGURA 15: *Correspondendo medida a ângulo.*

Axioma A8. Seja o ângulo $B\widehat{A}C$ não nulo.

Se $B\widehat{A}C$ não for raso e D for ponto no interior desse ângulo, então $mD\widehat{A}B + mD\widehat{A}C = mB\widehat{A}C$.

Se $B\widehat{A}C$ for raso e D for ponto não pertencente aos lados de $B\widehat{A}C$, então $mD\widehat{A}B + mD\widehat{A}C = 180$.

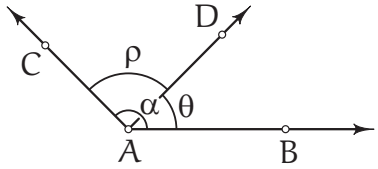


FIGURA 16: $\alpha = \theta + \rho$.

Dois ângulos de mesma medida são chamados de ângulos ***congruentes***.

Dois ângulos cuja soma de suas medidas é a medida de um ângulo raso são chamados de ângulos ***suplementares***.

Dois ângulos congruentes e suplementares são chamados de ângulos ***retos***.

Dois ângulos cuja soma de suas medidas é a medida de um ângulo reto são chamados de ângulos ***complementares***.

Um ângulo cuja medida é menor do que a medida de um ângulo reto é chamado de ângulo ***agudo***.

Um ângulo cuja medida é maior do que a medida de um ângulo reto é chamado de ângulo ***obtuso***.

Dois ângulos, não nulos e não rasos, que compartilham um mesmo lado e cuja intersecção de seus interiores é vazia são chamados de ângulos ***adjacentes***.

Quando D é ponto no interior do ângulo não nulo e não raso $B\widehat{A}C$ e tal que $B\widehat{A}D$ e $D\widehat{A}C$ são ângulos adjacentes congruentes, dizemos que a semirreta $\overrightarrow{AD}$ é ***bissetriz*** do ângulo $B\widehat{A}C$.

Observemos que, como consequência das definições e axiomas acima, um ângulo reto tem medida 90 graus.

Observemos também que o Axioma A7 garante a existência de ângulos retos.

Teorema 1.3 *A bissetriz de um ângulo existe e é única.*

Demonstração.

Seja $B\widehat{A}C$ um ângulo, $r = \overleftrightarrow{AB}$ e $\mathcal{S}$ o semiplano determinado por r que contém C. Seja $\alpha = \frac{1}{2}B\widehat{A}C$.

Pelo Axioma A7, existe e é único $B\widehat{A}D \in \mathcal{S}$ tal que $B\widehat{A}D = \alpha$. Mostremos que $\overrightarrow{AD}$ é a bissetriz de $B\widehat{A}C$.

Suponhamos que D não esteja no interior de $B\widehat{A}C$. Como $D \in \mathcal{S}$, então C está no interior de $B\widehat{A}D$. Daí, $B\widehat{A}D = C\widehat{A}D + B\widehat{A}C$, ou seja,

$$\frac{1}{2}B\widehat{A}C = C\widehat{A}D + B\widehat{A}C \Longrightarrow C\widehat{A}D = -\frac{1}{2}B\widehat{A}C,$$

o que é absurdo. Logo, D está no interior de $B\widehat{A}C$.

Por contrução, $B\widehat{A}D$ e $C\widehat{A}D$ são adjacentes. Além disso, $B\widehat{A}C = C\widehat{A}D + B\widehat{A}D$, ou seja, $C\widehat{A}D = \frac{1}{2}B\widehat{A}C$.

Logo, $B\widehat{A}D$ e $C\widehat{A}D$ são congruentes.

Portanto, a bissetriz de $B\widehat{A}C$ existe.

Mostremos a unicidade. Suponhamos que $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$ sejam bissetrizes de $B\widehat{A}C$. Daí, $B\widehat{A}D = C\widehat{A}D$ e $B\widehat{A}E = E\widehat{A}C$.

Além disso, $B\widehat{A}C = B\widehat{A}D + C\widehat{A}D$ e $B\widehat{A}C = B\widehat{A}E + E\widehat{A}C$. Daí, $B\widehat{A}D = B\widehat{A}E$.

Pelo Axioma A7, os ângulos são coincidentes. Portanto, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$, ou seja, a bissetriz é única. □

Teorema 1.4 *(Crossbar) Se* D *é um ponto no interior do ângulo* $B\widehat{A}C$*, então a semirreta* $\overrightarrow{AD}$ *intersecta o segmento* BC*.*

Demonstração.

A reta $r = \overleftrightarrow{AD}$ divide o plano em dois semiplanos. Um dos semiplanos contém C e o outro semiplano contém D, pois, caso contrário, D não seria ponto interior de $B\widehat{A}C$. Pelo Axioma A5, r intersecta BC. Como o interior do ângulo $B\widehat{A}C$ é convexo, concluímos que BC intersecta a semirreta $\overrightarrow{AD}$, como queríamos demonstrar. □

Ortogonalidade

Duas retas r e s concorrentes no ponto A determinam quatro ângulos, tendo A como vértice comum. Quando esses quatro ângulos são congruentes dizemos que as retas r e s são ***perpendiculares*** ou ***ortogonais*** ([7]).

Observemos que, como consequência da definição acima, os quatro ângulos determinados por duas retas perpendiculares são ângulos retos.

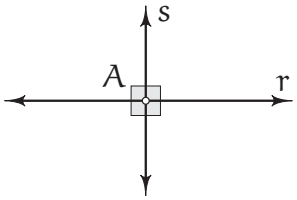


FIGURA 17: *Retas perpendiculares.*

Podemos estender o conceito de ortogonalidade para segmentos e semirretas. Dizemos que dois segmentos ou duas semirretas são ortogonais quando as retas que os (as) contêm assim o forem. O leitor não terá dificuldades em generalizar o conceito de ortogonalidade envolvendo segmento e semirreta, segmento e reta ou, ainda, reta e semirreta.

Dois ângulos são ditos ***opostos pelo vértice*** quando os lados de um dos ângulos forem as semirretas opostas dos lados de outro ângulo.

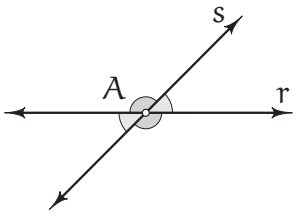


FIGURA 18: *Dois pares de ângulos opostos pelo vértice.*

[7] A palavra *ortogonal* é mais abrangente do que a palavra *perpendicular*. Na geometria plana não há muita razão para distingui-las, mas na geometria espacial há bons motivos para tal, como, por exemplo, no caso de retas *reversas* (retas não coplanares). Não é comum utilizar a palavra *perpendicular* em um contexto de retas reversas, pois estas possuem intersecção vazia. Neste caso, a palavra *ortogonal* é mais adequada. De um modo geral, a palavra *perpendicular* utilizada no contexto de dois objetos pressupõe que a intersecção entre esses objetos não seja vazia.

Como consequência da definição acima, ângulos opostos pelo vértice possuem o vértice em comum e, ainda, que duas retas concorrentes determinam dois pares de ângulos opostos pelo vértice.

Teorema 1.5 *Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

Demonstração.
Sejam $B\widehat{A}C$ e $D\widehat{A}E$ ângulos opostos pelo vértice de tal forma que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$ são semirretas opostas assim como $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AE}$, conforme a figura abaixo.

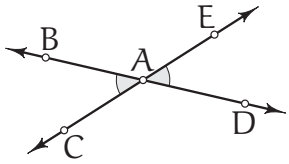


FIGURA 19: *Figura auxiliar.*

Logo, $B\widehat{A}D$ é raso e E não pertence aos lados de $B\widehat{A}D$. Dessa forma, $B\widehat{A}E + E\widehat{A}D = 180^o$.
Analogamente, $E\widehat{A}C$ é raso e $B\widehat{A}E + B\widehat{A}C = 180^o$.
Portanto, $B\widehat{A}E + E\widehat{A}D = B\widehat{A}E + B\widehat{A}C$, ou seja, $E\widehat{A}D = B\widehat{A}C$. Logo, $E\widehat{A}D$ e $B\widehat{A}C$ são congruentes. □

Observação. A argumentação da demonstração acima pode ser simplesmente sintetizada na seguinte frase: "Ângulos opostos pelo vértice são congruentes porque possuem um mesmo ângulo suplementar em comum."

Teorema 1.6 *(da perpendicular I) Por qualquer ponto de uma reta* r *pode-se traçar uma única reta perpendicular a* r.

Demonstração.
Seja A um ponto qualquer da reta r e B um outro ponto qualquer, diferente de A, da reta r. Seja $\mathcal{S}$ um dos semiplanos gerados por r.
Pelo Axioma A7 existe um único ângulo $B\widehat{A}C$ contido em $\mathcal{S}$ tal que $B\widehat{A}C = 90^o$.
Consideremos a reta $s = \overleftrightarrow{AC}$. Então, por construção, s é perpendicular a r.
Mostremos que s é única.
Suponhamos que t seja outra reta perpendicular a r e $A \in t$. Seja $D \in t \cap \mathcal{S}$ então $B\widehat{A}D = 90^o$, como na figura abaixo.

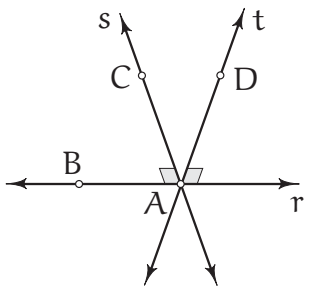


FIGURA 20: *Figura auxiliar.*

Daí, pelo Axioma A7, $B\widehat{A}D = B\widehat{A}C$, ou seja, as semirretas $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AC}$ são coincidentes. Logo, $C \in t$ e $s = t$. □

Dado um segmento AB e seu ponto médio M, a reta perpendicular a AB passando por M é chamada de ***mediatriz*** do segmento AB.

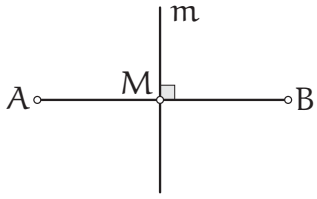


FIGURA 21: *Mediatriz do segmento* AB.

Pelo teorema acima, a mediatriz de um segmento existe e é única. Veremos na próxima seção que os pontos da mediatriz de um segmento AB equidistam dos extremos A e B do segmento.

1.3 Congruência

Polígonos

Sejam $A_1, \ldots, A_n$ com $n \geq 3$ pontos distintos de um plano tais que os segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 cumprem as seguintes propriedades:

(i) Nenhum par de segmentos se autointersecciona, a não ser em um extremo.

(ii) Nenhum par de segmentos com extremo comum é colinear.

A reunião dos segmentos acima é chamada de ***polígono*** de ***vértices*** $A_1, \ldots, A_n$ e ***lados*** A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 e indicamos por $A_1A_2 \ldots A_n$.

Observemos que, como consequência da definição acima, um polígono é uma ***linha poligonal fechada*** e, portanto, determina no plano duas regiões: uma limitada ([8]), chamada de ***interior*** do polígono e cuja fronteira é o próprio polígono, e outra não limitada. Quando o interior de um polígono é uma região convexa do plano, dizemos que o polígono é ***convexo***.

A soma dos comprimentos dos lados de um polígono é chamada de ***perímetro*** do polígono.

É comum nos textos de geometria confundir a reunião de um polígono e seu interior (que é uma *superfície plana poligonal*) com o próprio polígono. É isso que permite que se fale, por exemplo, em *área* de um polígono. Além disso, o contexto sempre estará claro.

[8]Dizemos que uma figura $\mathcal{F}$ é *limitada* no plano quando existir um número real $d > 0$ tal que $d(P, Q) < d$ para quaisquer $P, Q \in \mathcal{F}$. Equivalentemente, uma figura é limitada no plano quando for possível colocá-la no interior de um disco de diâmetro d (definiremos disco mais adiante).

A nomenclatura de um polígono varia de acordo com a quantidade de lados. Alguns exemplos:

Número de lados	**Nome do polígono**
3	triângulo (∗)
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	eneágono
10	decágono
11	undecágono
12	dodecágono
20	icoságono

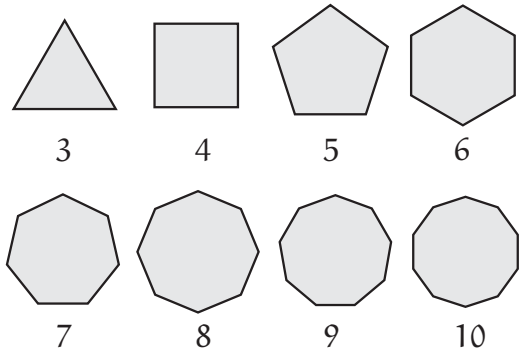


FIGURA 22: *Alguns exemplos de polígonos convexos (regulares).*

(∗) Observemos que a definição de triângulo que demos na seção anterior é caso particular da definição geral de polígonos que demos acima.

Em um polígono convexo $\mathcal{P} = A_1 \ldots A_n$ os ângulos $A_1\widehat{A}_2A_3$, $A_2\widehat{A}_3A_4$, ..., $A_{n-1}\widehat{A}_nA_1$ e $A_n\widehat{A}_1A_2$ são chamados de ***ângulos internos*** de $\mathcal{P}$.

Dado um ângulo interno $B\widehat{A}C$ de um polígono convexo $\mathcal{P}$, é possível construir dois ângulos de vértice A suplementares e adjacentes a $B\widehat{A}C$ de tal modo que seus interiores não se intersectam. Cada um desses ângulos é chamado de ***ângulo externo*** ao polígono convexo $\mathcal{P}$ no vértice A.

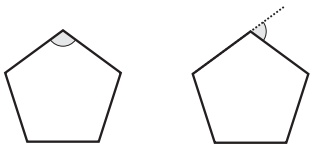


FIGURA 23: *Um ângulo interno e um ângulo externo em um pentágono convexo.*

Um polígono convexo é dito ***regular*** quando possuir todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes.

Triângulos

Vimos acima que um triângulo é um polígono com três lados. Entretanto, devido ao fato de o triângulo ser a figura básica no desenvolvimento da geometria plana, ele recebe vários subdenominações conforme abaixo:

Triângulo equilátero: possui os três lados com mesmo comprimento.

Triângulo isósceles: possui dois lados com mesmo comprimento, chamados de ***laterais***, enquanto que o terceiro lado é chamado de ***base***.

Triângulo escaleno: todos os lados possuem medidas diferentes.

Triângulo retângulo: possui um ângulo interno reto. Os lados que compõem o ângulo interno reto são chamados de ***catetos***, enquanto que o terceiro lado é chamado de ***hipotenusa***.

Triângulo acutângulo: possui os três ângulos internos agudos.

Triângulo obtusângulo: possui um ângulo interno obtuso.

Triângulo equiângulo: possui os três ângulos internos congruentes.

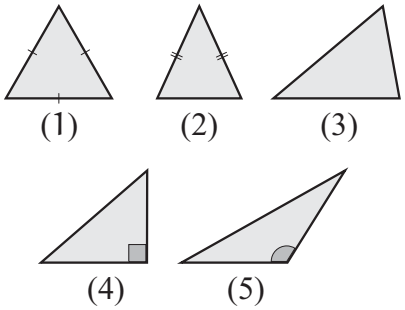


FIGURA 24: *A partir do canto superior esquerdo:* (1) *triângulo equilátero, equiângulo e acutângulo;* (2) *triângulo isósceles;* (3) *triângulo escaleno;* (4) *triângulo retângulo e* (5) *triângulo obtusângulo.*

Observação. Em alguns textos, um triângulo de vértices A, B e C é indicado por pela notação ΔABC.

Dado um triângulo ABC:

- O segmento que liga o vértice A ao ponto médio M do lado oposto BC é chamado de ***mediana*** do triângulo ABC relativa ao vértice A. De modo análogo temos as medianas relativas aos vértices B e C.

- O segmento que liga o vértice A a um ponto H da reta $\overleftrightarrow{BC}$ tal que AH é ortogonal a $\overleftrightarrow{BC}$ é chamado de ***altura*** do triângulo ABC relativa ao vértice A. De modo análogo temos as alturas relativas aos vértices B e C (veremos adiante - Teorema da Perpendicular II - que a altura relativa ao um vértice de um triângulo existe e é única).

- O segmento que liga o vértice A a um ponto D do lado BC, tal que AD está contido na bissetriz do ângulo $B\widehat{A}C$, é chamado de ***bissetriz*** do triângulo ABC relativa ao vértice A. De modo análogo temos as bissetrizes relativas aos vértices B e C.

- A mediatriz do lado AB do triângulo é, também, chamada de ***mediatriz*** do triângulo relativa ao lado AB. De modo análogo temos as mediatrizes relativas aos lado BC e AC.

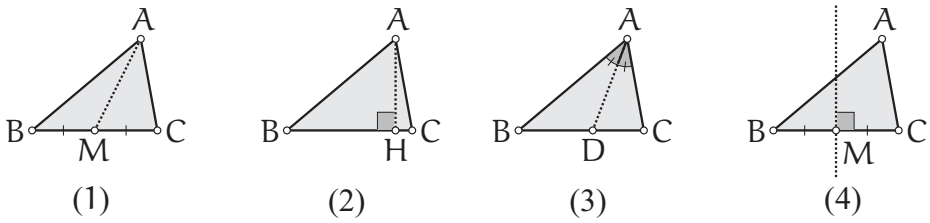


FIGURA 25: *Da esquerda para a direita:* (1) *mediana relativa ao vértice* A*;* (2) *altura relativa ao vértice* A*,* (3) *bissetriz relativa ao vértice* A *e* (4) *mediatriz relativa ao lado* BC*.*

Observação. É também comum chamar de *altura* do triângulo ABC, relativa ao vértice A, o *comprimento* do segmento AH que definimos acima. Assim, a palavra *altura* pode representar um segmento ou um número. O contexto sempre estará claro.

Dois triângulos são ditos ***congruentes*** quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de tal modo que lados correspondentes tenham a mesma medida e ângulos correspondentes também tenham a mesma medida.

Assim, os triângulos ABC e DEF são congruentes quando existir uma bijeção $\varphi : \{A, B, C\} \to \{D, E, F\}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} d(A,B) = d(\varphi(A), \varphi(B)) & & \widehat{A} = \varphi(\widehat{A}) \\ d(A,C) = d(\varphi(A), \varphi(C)) & \text{e} & \widehat{B} = \varphi(\widehat{B}) \\ d(B,C) = d(\varphi(B), \varphi(C)) & & \widehat{C} = \varphi(\widehat{C}) \end{array}$$

Se tivermos, por exemplo, que $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) = E$ e $\varphi(C) = F$, as igualdades acima tornam-se

$$\begin{array}{ccc} AB = DE & & \widehat{A} = \widehat{D} \\ AC = DF & \text{e} & \widehat{B} = \widehat{E} \\ BC = EF & & \widehat{C} = \widehat{F} \end{array}$$

Não é difícil o leitor familiarizado com a noção de *relação de equivalência* perceber que, da forma como definimos acima, *congruência entre triângulos* é uma relação de equivalência no conjunto de todos os triângulos. De fato, é fácil provar que a relação acima é:

- reflexiva (ABC é congruente a ABC - basta tomar $\varphi = \mathrm{Id}$).

- simétrica (se ABC é congruente a DEF, então DEF é congruente a ABC - basta tomar φ^{-1}).

- transitiva (se ABC é congruente a DEF e DEF é congruente a GHI, então ABC é congruente a GHI - basta fazer a composição das bijeções).

Existem 5 casos de congruência envolvendo triângulos. O primeiro deles, chamado LAL (lado, ângulo e lado), precisa ser estabelecido por axioma.

Axioma A9. *(Caso* LAL *de congruência)* Se ABC e DEF são triângulos tais que $AB = DE$, $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $AC = DF$, então ABC e DEF são congruentes.

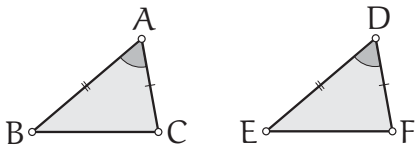


FIGURA 26: *Caso* LAL *de congruência.*

Teorema 1.7 *(Caso* ALA *de congruência) Se* ABC *e* DEF *são triângulos tais que* $AB = DE$, $\widehat{A} = \widehat{D}$ *e* $\widehat{B} = \widehat{E}$, *então* ABC *e* DEF *são congruentes.*

Demonstração.

Seja F' um ponto da semirreta $\overrightarrow{DF}$ tal que $AC = DF'$.

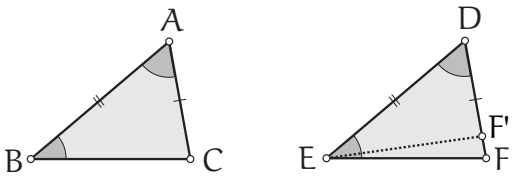


FIGURA 27: *Figura auxiliar.*

Comparando os triângulos ABC e DEF' vemos que, $AB = DE$, $B\widehat{A}C = E\widehat{D}F'$ e $AC = DF'$, então, pelo caso de congruência LAL, os triângulos ABC e DEF' são congruentes.

Dessa congruência segue que $A\widehat{B}C = D\widehat{E}F'$.

E como já tínhamos, por hipótese, que $D\widehat{E}F = A\widehat{B}C$, então $D\widehat{E}F = D\widehat{E}F'$. Daí, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EF'}$. E, como F e F' pertencem a $\overleftrightarrow{DF}$ segue que $F = F'$.

Logo, DEF e DEF' são congruentes. Como já tínhamos a congruência entre ABC e DEF', concluímos, pela transitividade da congruência, que ABC e DEF são congruentes. □

Teorema 1.8 *(triângulo isósceles)* (**1**) *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.*

(**2**) *Um triângulo que possui dois ângulos congruentes é isósceles.*

(**3**) *Seja* ABC *triângulo isósceles com base* BC*. Então, a mediana relativa ao vértice* A*:*

- é altura e bissetriz relativas ao vértice A*.*

- está contida na mediatriz da base BC*.*

Demonstração.

(**1**) Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Queremos mostrar que $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Consideremos, para isso, a bijeção $\varphi : \{A, B, C\} \to \{A, B, C\}$ tal que $\varphi(A) = A$, $\varphi(B) = C$ e $\varphi(C) = B$ e consideremos o triângulo ACB.

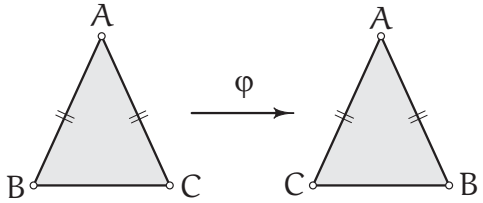


FIGURA 28: *Figura auxiliar - replicando o triângulo* ABC*.*

Daí, por hipótese, temos que $AB = AC$, $\widehat{A} = \widehat{A}$ e $AC = AB$. Logo, pelo caso de congruência LAL, temos que ABC é congruente ao triângulo ACB. Daí, $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Portanto, os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

(**2**) Seja ABC um triângulo tal que $\widehat{B} = \widehat{C}$. Consideremos a mesma bijeção φ do item (**1**).

Daí, como $\widehat{B} = \widehat{C}$, $BC = BC$ e $\widehat{C} = \widehat{B}$, então, ABC é congruente a ACB pelo caso de congruência ALA. Logo, $AB = AC$, ou seja, ABC é isósceles.

(**3**) Seja AM a mediana relativa ao vértice A. Logo, $BM = MC$.

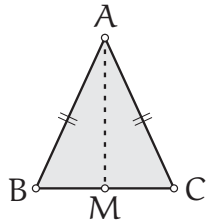


FIGURA 29: *Figura auxiliar.*

Da hipótese de ABC ser isósceles, temos ainda que $AB = AC$ e $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Daí, pelo caso de congruência LAL, temos que os triângulos ABM e ACM são congruentes. Daí, $B\widehat{A}M = C\widehat{A}M$, ou seja, AM é a bissetriz relativa ao vértice A.

Mais ainda, da congruência segue que $A\widehat{M}C = A\widehat{M}B$. Como $B\widehat{M}C$ é raso e $B\widehat{M}C = B\widehat{M}A + C\widehat{M}A$, então $A\widehat{M}C = 90^o$.

Logo, AM é a altura relativa ao vértice A.

Podemos concluir também que $\overleftrightarrow{AM}$ é a mediatriz relativa ao lado BC já que, por hipótese, passa pelo ponto médio M e mostramos que $\overleftrightarrow{AM}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$. □

Observemos que, como consequência dos itens (1) e (2) do teorema acima, um triângulo é equilátero se, e somente se, é equiângulo.

Teorema 1.9 *(Caso* LLL *de congruência) Se* ABC *e* DEF *são triângulos tais que* $AB = DE$*,* $AC = DF$ *e* $BC = EF$*, então* ABC *e* DEF *são congruentes.*

Demonstração.

No semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$ e que não contém o ponto A, consideremos uma semirreta de origem B e que forma com $\overrightarrow{BC}$ um ângulo congruente ao ângulo $D\widehat{E}F$.

Escolhamos sobre ela um ponto D' de forma que $BD' = ED$.

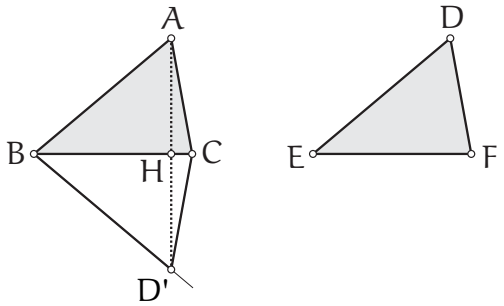


FIGURA 30: *Figura auxiliar* - $H \in BC$ *com* $H \neq B$ *e* $H \neq C$.

Logo, como $BC = EF$, $C\widehat{B}D' = D\widehat{E}F$ e $BD' = DE$, temos que os triângulos $D'BC$ e DEF são congruentes pelo caso LAL de congruência.

Mostremos agora que ABC e $D'BC$ são congruentes.

Seja H o ponto em que AD' corta $\overleftrightarrow{BC}$ (H existe pelo Axioma $A5$).

Consideremos, primeiramente, o caso em que H está entre B e C, como na figura anterior.

Do fato de DEF e $D'BC$ serem congruentes concluímos que $D'C = DF$ e, como $DF = CA$ por hipótese, temos que $D'C = CA$.

Daí, temos que os triângulos ABD' e ACD' são isósceles. Logo, $B\widehat{A}D' = B\widehat{D'}A$ e $C\widehat{A}D' = C\widehat{D'}A$.

Assim, $B\widehat{A}C = B\widehat{A}D' + C\widehat{A}D' = B\widehat{D'}A + C\widehat{D'}A = B\widehat{D'}C$.

Agora, $BD' = DE = AB$, $B\widehat{A}C = B\widehat{D'}C$ e $D'C = CA$, então, os triângulos ABC e $D'BC$ são congruentes pelo caso LAL.

Portanto, ABC é congruente a DEF.

Caso H não esteja entre B e C, como na figura que se segue, a demonstração é análoga.

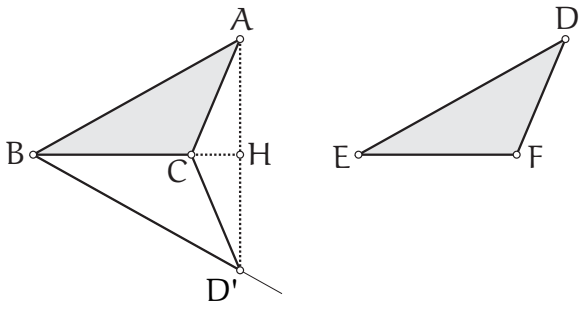


FIGURA 31: *Figura auxiliar* - $H \notin BC$.

Caso $H = B$ ou $H = C$, então A, B e D', ou então A, C e D' são colineares.

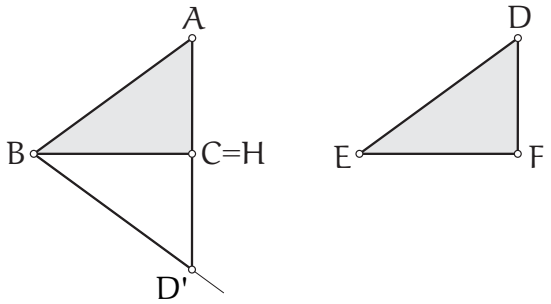


FIGURA 32: *Figura auxiliar* - H *é extremo de* BC.

Neste caso, lembrando que $D'BC$ e DEF são congruentes e por isso $D'C = DF = AC$, temos que o triângulo ABD' (no caso de A, C e D' serem colineares) é isósceles.

Daí $\widehat{A} = \widehat{D'}$ e como já tinhamos que $\widehat{D'} = \widehat{D}$, segue $\widehat{A} = \widehat{D}$.

Novamente pelo caso LAL de congruência temos que ABC e $D'BC$ são congruentes e, portanto, ABC e DEF são congruentes. □

1.4 Desigualdades

O Teorema do Ângulo Externo e Consequências

No teorema abaixo, um ângulo ser maior do que outro significa que sua *medida* é maior do que a *medida* do outro.

Teorema 1.10 *(do Ângulo Externo) Um ângulo externo de um triângulo* ABC *é maior do que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração.

Seja $D\widehat{C}A$ um ângulo externo ao ângulo $\widehat{C}$. Seja M o ponto médio de AC e P pertencente à semirreta $\overrightarrow{BM}$ de tal forma que $BM = MP$ (a existência de P é garantida pelo Axioma $A4$).

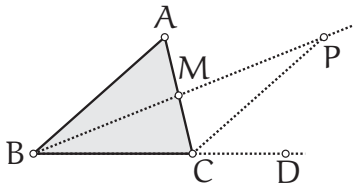


FIGURA 33: *Figura auxiliar.*

Logo, $AM = MC$ (pois M é ponto médio de AC), $A\widehat{M}B = P\widehat{M}C$ (pois são opostos pelo vértice) e $BM = MP$.

Daí, os triângulos AMB e PMC são congruentes pelo caso LAL. Logo, $B\widehat{A}M = P\widehat{C}M$. Assim, $D\widehat{C}A = D\widehat{C}P + P\widehat{C}A > P\widehat{C}A = B\widehat{A}C$.

Tomando agora o ponto médio de BC, podemos concluir de forma análoga que $D\widehat{C}A > A\widehat{B}C$.

Portanto, um ângulo externo de um triângulo é maior do que os ângulos internos não adjacentes a ele. □

Observemos que, como consequência imediata do Teorema do Ângulo Externo, a soma de dois dos ângulos de um triângulo qualquer é sempre menor do que a medida de um ângulo raso. Também é consequência imediata que os ângulos não retos de um triângulo retângulo são agudos.

Os dois próximos teoremas estão relacionados à ortogonalidade e, embora não ligados diretamente a triângulos, decorrem de teoremas já demonstrados envolvendo triângulos.

Teorema 1.11 *(da perpendicular II) Dada uma reta* r *e um ponto* $P \notin r$*, existe e é única a reta* s *passando por* P *e perpendicular a* r*.*

Demonstração.
Sejam Q e R dois pontos distintos quaisquer de r.
Se $\overleftrightarrow{PQ}$ ou $\overleftrightarrow{PR}$ forem perpendiculares a r, então existe a reta perpendicular enunciada.
Caso contrário, consideremos o semiplano $\mathcal{S}$ determinado por r que não contém P.
Pelo Axioma A7 existe $R\widehat{Q}T$ em $\mathcal{S}$ tal que $R\widehat{Q}T = R\widehat{Q}P$.

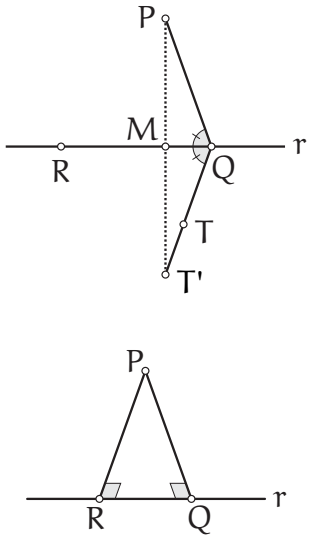


FIGURA 34: *Figura auxiliar.*

Considere na semirreta $\overrightarrow{QT}$ um ponto T' tal que $PQ = QT'$. Daí, o triângulo PQT' é isósceles e $\overrightarrow{QR}$ é a bissetriz de $P\widehat{Q}T'$.

Seja M o ponto de intersecção de PT' e $\overrightarrow{QR}$.

Logo, o triângulo PQM é congruente ao triângulo $T'QM$ pelo caso LAL pois, $T'Q = QP$, $T'\widehat{Q}M = P\widehat{Q}M$ e $QM = QM$. Dessa forma, $P\widehat{M}Q = Q\widehat{M}T$ e $P\widehat{M}T'$ é raso.

Logo, $P\widehat{M}Q = 90^o$. Portanto, $\overleftrightarrow{PT'}$ é perpendicular à reta r (figura acima à esquerda).

Quanto à unicidade, ela é decorrência do Teorema do Ângulo Externo, pois, se supormos a existência de duas perpendiculares a r passando por P, teríamos um triângulo PQR com dois ângulos retos, o que é barrado pelo referido teorema (figura acima à direita). □

Observemos que o teorema acima garante a existência e unicidade da altura de um triângulo relativa a um vértice.

Além disso, o Teorema da Perpendicular II permite que definamos distância de um ponto P a uma reta r, indicado por $d(P, r)$. De fato, quando $P \in r$ definimos a $d(P, r) = 0$. Quando $P \notin r$ consideremos o ponto $Q \in r$, intersecção da reta s que passa por P e é perpendicular a r com a reta r. Neste caso, definimos $d(P, r) = PQ$. O ponto Q é chamado de ***pé da perpendicular*** baixada de P a r ou então de ***projeção ortogonal*** de P sobre r e é denotada por $\text{proj}_r P$.

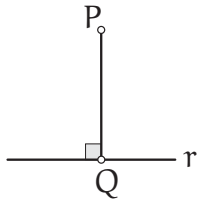


FIGURA 35: *Definindo distância de ponto a reta.*

Veremos adiante que PQ é o segmento de menor comprimento ligando P a um ponto da reta r.

Teorema 1.12 *(da mediatriz) Os pontos da mediatriz do segmento* AB *equidistam de* A *e de* B*. Reciprocamente, o conjunto dos pontos do plano que equidistam de* A *e de* B *é a mediatriz do segmento* AB*.*

Demonstração.

Sejam r a mediatriz de AB e M o ponto de intersecção de r com AB. Seja P um ponto qualquer de r.

Se $P = M$ então, é claro que P equidista de A e B (pois M é ponto médio de AB).

Suponhamos então que $P \neq M$.

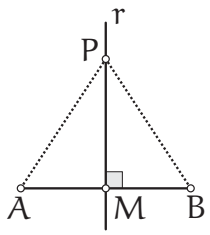


FIGURA 36: *Figura auxiliar.*

Consideremos então os triângulos PMA e PMB. Como $PM = PM$, $P\widehat{M}A = P\widehat{M}B = 90^o$ e $MA = MB$ então os triângulos PMA e PMB são congruentes pelo caso LAL.

Logo, $PA = PB$. Como P é arbitrário segue que os pontos da mediatriz equidistam de A e B.

Mostremos agora que a reta r, composta pelo conjunto de pontos equidistantes de A e B, é a mediatriz de AB. Observemos primeiramente que o ponto médio M de AB pertence à reta r. Consideremos agora um ponto P qualquer de r distinto de M. Então, $PA = PB$, por hipótese, $PM = PM$ e $AM = MB$. Logo, os triângulos PAM e PBM são congruentes pelo

caso LLL. Daí, os ângulos $P\widehat{M}A$ e $P\widehat{M}B$ são congruentes e $A\widehat{M}B$ é raso, donde $P\widehat{M}A = 90^o$. Dessa forma, r passa pelo ponto médio de AB e é perpendicular a AB. Portanto, r é a mediatriz de AB. □

Sejam r, s e t retas distintas de tal modo que t intersecta r e s em pontos A e B distintos. Em tal disposição de retas diremos que t é reta ***transversal*** a r e a s. Em torno de A e B temos oito ângulos que, por facilidade (e abuso!) de notação iremos indicar por $\widehat{1}$, $\widehat{2}$, ..., $\widehat{8}$ conforme a figura abaixo.

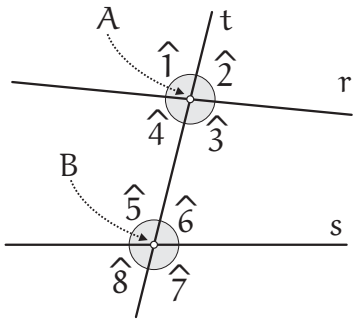


FIGURA 37: *Ângulos definidos por uma transversal.*

Vamos adotar a seguinte nomenclatura:

Ângulos	**Designação**
$\widehat{1}$ e $\widehat{5}$ $\widehat{2}$ e $\widehat{6}$ $\widehat{3}$ e $\widehat{7}$ $\widehat{4}$ e $\widehat{8}$	***Correspondentes***
$\widehat{1}$ e $\widehat{8}$ $\widehat{2}$ e $\widehat{7}$	***Colaterais externos***
$\widehat{3}$ e $\widehat{6}$ $\widehat{4}$ e $\widehat{5}$	***Colaterais internos***
$\widehat{1}$ e $\widehat{7}$ $\widehat{2}$ e $\widehat{8}$	***Alternos externos***
$\widehat{3}$ e $\widehat{5}$ $\widehat{4}$ e $\widehat{6}$	***Alternos internos***

Teorema 1.13 *Se a reta t é transversal às retas r e s e os ângulos correspondentes são congruentes, então r e s são retas paralelas.*

Demonstração.

Suponhamos, por absurdo, que r e s não sejam paralelas, ou seja, $r \cap s = \{P\}$.

Sejam ainda, $\{A\} = t \cap s$, $\{B\} = t \cap r$ e α e β os ângulos correspondentes conforme a figura.

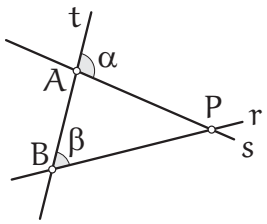


FIGURA 38: *Figura auxiliar.*

Pelo teorema do ângulo externo aplicado ao triângulo ABP teríamos $\alpha > \beta$ (ou $\beta > \alpha$ dependendo de qual lado do semiplano determinado por t o ponto P estiver), o que contradiz a hipótese.

Portanto, r e s são paralelas. □

Observemos que uma consequência imediata do teorema acima é que "*duas retas distintas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas*".

No início do primeiro capítulo definimos retas paralelas, mas ficamos devendo sua a existência. A junção do "Teorema da Perpendicular" (I ou II) e o teorema acima fornece a existência previamente anunciada (além de um procedimento para sua construção geométrica).

Teorema 1.14 (1) *Se em um triângulo há dois lados não congruentes, então os ângulos opostos a esses lados não são congruentes e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*
(2) *Se em um triângulo há dois ângulos não congruentes, então os lados opostos a esses ângulos não são congruentes e o maior lado é oposto ao maior ângulo.*

Demonstração.
(1) Seja ABC um triângulo qualquer. Suponhamos que $AB > AC$.

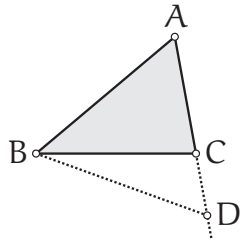


FIGURA 39: *Figura auxiliar.*

Queremos mostrar que $m\widehat{ACB} > m\widehat{ABC}$.

Seja D o ponto da semirreta $\overrightarrow{AC}$ tal que $AD = AB$.

Então o triângulo ABD é isósceles. Daí, $\widehat{ABD} = \widehat{ADB}$.

Como $AD = AB > AC$, então C está entre A e D. Logo, C está no interior de $\widehat{ABD}$.

Assim, $m\widehat{ABD} = \widehat{ABC} + \widehat{CBD} > \widehat{ABC}$.

O ângulo $\widehat{ACB}$ é externo ao triângulo BCD. Dessa forma, pelo Teorema do Ângulo Externo segue que $\widehat{ACB} > \widehat{ADB}$.

Logo, $\widehat{ACB} > \widehat{ADB} = \widehat{ABD} > \widehat{ABC}$, como queríamos demonstrar.

Suponhamos agora que $\widehat{A} \geq \widehat{B}$ e $\widehat{A} \geq \widehat{C}$. Queremos mostrar que $BC \geq AC$ e $BC \geq AB$.

Suponhamos, por absurdo, que $BC < AC$ ou $BC < AB$.

No primeiro caso, pelo que acabamos de demonstrar, teríamos $\widehat{A} < \widehat{B}$, o que contraria a hipótese.

No segundo caso, teríamos $\widehat{A} < \widehat{C}$, o que também contraria a hipótese.

Portanto, o maior ângulo é oposto ao maior lado.

(2) Seja ABC um triângulo com $\widehat{C} > \widehat{B}$. Queremos mostrar que $AB > AC$.

Temos três possibilidades para as medidas de AB e AC: $AB = AC$, $AB < AC$ e $AB > AC$.

Caso $AB = AC$, então o triângulo ABC é isósceles de base BC. Logo, $\widehat{B} = \widehat{C}$, o que contradiz a hipótese.

Caso $AB < AC$ então, pelo item (1), $\widehat{C} < \widehat{B}$, o que contradiz a hipótese.

Logo, devemos ter $AB > AC$.

Suponhamos agora que $AB \geq BC$ e $AB \geq AC$. Queremos mostrar que $\widehat{C} \geq \widehat{A}$ e $\widehat{C} \geq \widehat{B}$.

Suponhamos, por absurdo, que $\widehat{C} < \widehat{A}$ ou $\widehat{C} < \widehat{B}$. Daí, pelo que acabamos de msotrar, $AB < BC$ ou $AB < AC$, o que contraria a hipótese.

Logo, o maior lado é oposto ao maior ângulo. □

Temos como consequência do teorema acima que a hipotenusa de um triângulo retângulo é maior do que qualquer um dos catetos. Desta forma, podemos também justificar que se P é ponto não pertencente à reta r e $d(P, r) = PQ$, então PQ é o segmento de menor comprimento ligando P a um ponto de r. Aliás, essa é a ideia por trás do conceito de distância entre duas figuras quaisquer no plano: se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são figuras no plano, $d(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é definida com sendo o *ínfimo* do conjunto dos comprimentos de todos os segmentos que ligam um ponto de $\mathcal{F}$ a um ponto de $\mathcal{G}$. Observemos que devemos utilizar o *ínfimo* e não o *mínimo*, pois nem sempre existe um segmento ligando um ponto de $\mathcal{F}$ a um ponto de $\mathcal{G}$ que tenha o menor comprimento possível. Por exemplo: sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ dois discos abertos (isto é, sem o bordo) de raios 1 com centros distando 3 ([9]). Temos $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 1$, mas não existe um segmento ligando um ponto de $\mathcal{F}$ a um ponto de $\mathcal{G}$ que tenha comprimento 1.

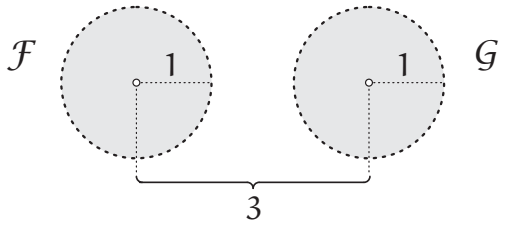


FIGURA 40: *Distância entre figuras.*

Abaixo seguem os dois últimos casos de congruência de triângulos.

Teorema 1.15 *(Caso* LAA_0 *- lado, ângulo, ângulo oposto - de congruência) Se* ABC *e* DEF *são triângulos tais que* $AB = DE$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ *e* $\widehat{C} = \widehat{F}$, *então* ABC *e* DEF *são congruentes.*

Demonstração.

Seja H um ponto da semirreta $\overrightarrow{BC}$ tal que $BH = EF$.

Temos três hipóteses para H, quais sejam:

(1) $H \in BC$ (H diferente de C);

(2) $H \notin BC$;

(3) $H = C$.

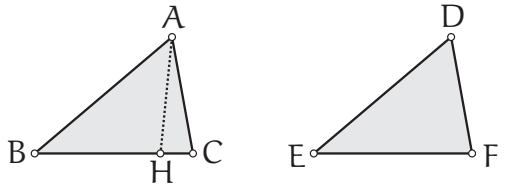


FIGURA 41: *Figura auxiliar.*

[9]Trabalharemos com *discos* em capítulo posterior. Por enquanto, apenas a definição de disco aberto de centro C e raio r no plano Π basta: trata-se do conjunto $\{P \in \Pi : d(P, C) < r\}$.

Consideremos o caso (1): como $AB = DE$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ e $BH = EF$ segue, pelo caso de cogruência LAL, que os triângulos ABH e DEF são congruentes.

Logo, $A\widehat{H}B = D\widehat{F}E$. Mas, $A\widehat{H}B$ é um ângulo externo ao triângulo AHC. Logo, pelo Teorema do Ângulo Externo, $A\widehat{H}B > A\widehat{C}H = D\widehat{F}E$ (hipótese), ou seja, $A\widehat{H}B > D\widehat{F}E$, o que é absurdo.

No caso (2) concluiríamos que $A\widehat{H}B < D\widehat{F}E$, o que é novamente absurdo.

Portanto, resta apenas o caso (3), ou seja, $H = C$. Daí, ABC e DEF são congruentes. □

Teorema 1.16 *(Caso cateto-hipotenusa de congruência) Se* ABC *e* DEF *são triângulos retângulos com hipotenusas congruentes e um par de catetos congruentes, então* ABC *e* DEF *são congruentes.*

Demonstração.

Suponhamos que $\widehat{B} = \widehat{E} = 90^o$, $AC = DF$ e $AB = DE$. Tomemos o ponto Q na semirreta oposta a $\overrightarrow{EF}$ de modo que $EQ = BC$.

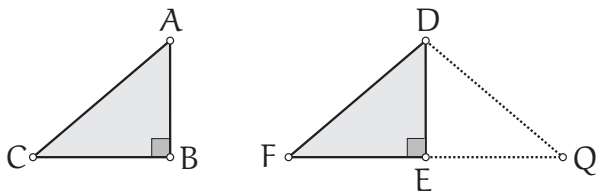


FIGURA 42: *Figura auxiliar.*

Logo, $AB = DE$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ e $BC = EQ$. Então, ABC e DEQ são congruentes pelo caso LAL.

Daí, $DQ = AC$ e, por isso, o triângulo DFQ é isósceles, donde $\widehat{F} = \widehat{Q}$.

Mas como já tínhamos que $\widehat{Q} = \widehat{C}$ da congruência entre ABC e DEQ, então $\widehat{F} = \widehat{C}$.

Assim, $AB = DE$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ e $\widehat{C} = \widehat{F}$.

Logo, pelo caso LAA_0, os triângulos ABC e DEF são congruentes. □

Desigualdade Triangular

Teorema 1.17 *(desigualdade triangular) A soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é sempre maior do que o comprimento do terceiro lado.*

Demonstração.

Seja ABC um triângulo qualquer. Queremos mostrar que $AB + AC > BC$. Seja D um ponto na semirreta oposta a $\overrightarrow{AC}$ tal que $AD = AB$.

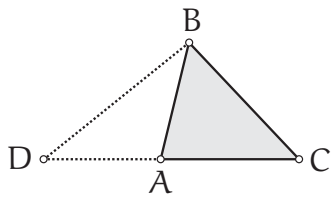


FIGURA 43: *Figura auxiliar.*

Logo, o triângulo ADB é isósceles. Daí, $A\widehat{D}B = A\widehat{B}D$. Como, por construção, A está entre D e C, segue que $DC = AD + AC = AB + AC$.

Agora, $D\widehat{B}C = D\widehat{B}A + A\widehat{B}C > B\widehat{D}A = B\widehat{D}C$. Daí, pelo Teorema 1.14 temos que $DC > BC$. Portanto, $DC = AB + AC > BC$, como queríamos demonstrar. □

O *Teorema do Ângulo Externo* e o *Teorema da Desigualdade Triangular* são resultados envolvendo desigualdades em um triângulo. A condição necessária ($\Rightarrow$) do próximo resultado é conhecida como *Teorema da Dobradiça* e refere-se a desigualdades envolvendo dois triângulos distintos.

Teorema 1.18 *Sejam* ABC *e* DEF *triângulos tais que* $AB = DE$ *e* $AC = DF$. *Temos* $\widehat{A} > \widehat{D}$ *se, e somente se,* $BC > EF$.

Demonstração.

Suponhamos, primeiramente que $\widehat{A} > \widehat{D}$. Consideremos a semirreta $\overrightarrow{AQ}$, com Q e B do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ tal que $Q\widehat{A}C = \widehat{D}$.

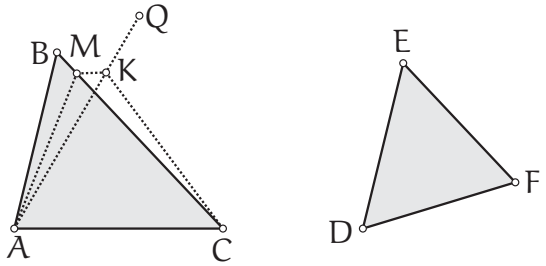


FIGURA 44: *Figura auxiliar.*

Sobre $\overrightarrow{AQ}$ tomamos um ponto K tal que $AK = DE$. Daí, $AK = DE$, $K\widehat{A}C = E\widehat{D}F$ e $AC = DF$.

Logo, pelo caso LAL temos que os triângulos AKC e DEF são congruentes donde concluímos que $KC = EF$.

Se K pertence ao segmento BC, então $KC < BC$ e, então, $EF < BC$, como queríamos.

Suponhamos então que K não pertence ao segmento BC.

Seja M o ponto em que a bissetriz de $B\widehat{A}K$ intersecta BC.

Daí, $AK = DE = AB$, $M\widehat{A}B = M\widehat{A}K$ e $AM = AM$, então, pelo caso LAL temos que os triângulos ABM e AKM são congruentes, donde $BM = MK$.

Aplicando a desigualdade triangular ao triângulo MKC temos $KC < MC + MK = MC + BM = BC$. Portanto, $EF = KC < BC$, como queríamos.

Suponhamos agora que $BC > EF$. Mostremos que $\widehat{A} > \widehat{D}$.

Se tivéssemos $\widehat{A} < \widehat{D}$ então, pelo que provamos na primeira parte desse teorema teríamos $BC < EF$, o que contraria a hipótese.

Se tivéssemos $\widehat{A} = \widehat{D}$ então $AB = DE$, $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $AC = DF$ donde os triângulos ABC e DEF seriam congruentes pelo caso LAL.

Daí, $BC = EF$, o que contraria a hipótese.

Portanto, por exclusão, devemos ter $\widehat{A} > \widehat{D}$. □

Capítulo 2

Geometria Euclidiana

2.1 O Problema das Paralelas

Alguns Comentários sobre a História do "Problema das Paralelas"

O estudo sistemático de geometrias "não euclidianas" em espaços homogêneos, ou seja, espaços que apresentam a mesma curvatura gaussiana ([1]) em todos os seus pontos, teve origem a partir do final do século XVIII e começo do século XIX, quando Gauss estudou o "Problema das Paralelas", que consistia em tentar provar que o Quinto Postulado ([2]) de Euclides era independente dos demais. Ironicamente, podemos dizer que o próprio Euclides, ao adotar seu Quinto Postulado em sua obra *Os Elementos*, lançou a semente das geometrias não euclidianas, uma vez que o questionamento de tal postulado levou ao desenvolvimento da teoria que serviu de base para a fundamentação da "primeira" geometria não euclidiana, a *Geometria Hiperbólica.*

Na geometria hiperbólica não vale o Quinto Postulado de Euclides, o qual é substituido por um outro contrário a este. Todos os outros axiomas da Geometria Euclidiana são adotados, exceto o das paralelas. Isso significa que todos os teoremas que enunciamos no capítulo anterior valem na Geometria Hiperbólica. Aliás, por causa desse fato, a geometria do primeiro capítulo recebe o nome de *Geometria Absoluta.*

É bastante curioso que o próprio Euclides parece ter evitado ao máximo o uso de seu Quinto Postulado, uma vez que as 28 primeiras proposições de sua obra *Os Elementos* não o utilizam. Isso levantou a suspeita em matemáticos posteriores de que tal postulado fosse, na verdade, uma proposição que Euclides não conseguiu demonstrar. Além disso, o próprio enunciado do Quinto Postulado destoa dos enunciados dos demais teoremas, por ser demasiadamente longo, reforçando ainda mais tal suspeita.

[1] De um modo bastante intuitivo e informal, a curvatura gaussiana de uma superfície regular S em um ponto $P \in S$ é uma *taxa de variação* que mede "o quanto S afasta-se, em uma vizinhança de P, de seu plano tangente em P". Para a definição formal de curvatura gaussiana indicamos as referências:

Carmo, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. 2005.

Tenenblat, K. *Introdução à Geometria Diferencial.* Brasília: Editora da Universidade de Brasília. 1988.

[2] **P5 -** Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Abaixo, vamos apresentar brevemente alguns matemáticos (além de Euclides, Hilbert e Birkhoff, já apresentados no capítulo anterior) que se envolveram com o "Problema das Paralelas" ou seus desdobramentos. Conforme veremos, este famoso problema parece ter sido o que permaneceu por mais tempo em aberto na Matemática.

Claudius Ptolomeu.

Claudius Ptolomeu foi um dos matemáticos que contestaram o Quinto Postulado de Euclides, propondo uma demonstração do deste postulado a partir dos quatro primeiros. A demonstração proposta por Ptolomeu fazia uso, implicitamente, da vigésima nona proposição ([3]) do primeiro volume de "Os Elementos", que depende do Quinto Postulado, isto é, ele usou uma proposição equivalente ao próprio Quinto Postulado, fazendo portanto, um ciclo vicioso do ponto de vista lógico.

Claudius Ptolomeu nasceu em 85 d.C. no Egito e morreu em 165 d.C. em Alexandria, também no Egito. Foi um eminente matemático e astrônomo que escreveu uma importante obra, intitulada *Almagesto*, que introduziu a trigonometria como ferramenta no estudo de astronomia.

FIGURA 45: *Ilustração de Claudius Ptolomeu.*

Proclus Diadochus.

Proclus foi um estudioso das obras clássicas gregas e muito do que se sabe da história e da filosofia da Grécia Antiga sobreviveu em seus escritos. Ele escreveu um trabalho sobre a obra de Euclides chamado *Comentários sobre Euclides* em que, assim como Ptolomeu, também critica o Quinto Postulado de Euclides, propondo uma demonstração do postulado a partir dos quatro outros postulados. Essa demonstração é baseada na aceitação do fato de que retas paralelas são equidistantes, fato este que é equivalente ao próprio Quinto Postulado de Euclides.

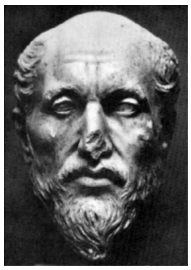


FIGURA 46: *Foto de escultura de Proclus Diadochus.*

Proclus nasceu em 411 d.C. em Constantinopla (atualmente Istambul, na Turquia) e morreu em 485 d.C. em Atenas, na Grécia.

[3] "Se uma reta corta outras duas retas paralelas, então os ângulos correspondentes são congruentes."

Nasir al-Din al-Tusi (Nasiredin).

Assim como Ptolomeu, Nasiredin também estudou astronomia e tentou provar o Quinto Postulado de Euclides. Para tanto, ele utilizou uma proposição-axioma, que foi tomada sem demonstração devido ao seu caráter de autoevidência ([4]). No entanto, essa proposição assumida é um equivalente do Quinto Postulado de Euclides. Assim como Ptolomeu, Nasiredin acabou realizando um raciocínio cíclico em suas deduções.

Nasiredin era árabe e nasceu 1201 em Tus na Pérsia (atualmente Irã) e morreu em 1274 em Kadhimain, Persia (próximo a Bagdá, atualmente Iraque).

FIGURA 47: *Ilustração de Nasiredin.*

John Wallis.

John Wallis foi um eminente matemático inglês que escreveu algumas obras sobre secções cônicas, álgebra e aritmética. Uma delas, a saber, *Arithmetica Infinitorum* (Aritmética Infinita) foi utilizada por Isaac Newton em seus estudos. Em suas pesquisas, Wallis também tentou demonstrar o Quinto Postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros. Para tanto, ele fez uso da existência de triângulos semelhantes e não congruentes, fato este que é equivalente ao próprio Quinto Postulado.([5])

Wallis nasceu em 1616 em Ashford na Inglaterra e morreu em 1703 em Oxford, também na Inglaterra.

FIGURA 48: *Tela de John Wallis.*

[4] "Sejam r e s duas retas; $A \in r$ e B o pé da perpendicular baixada de A em s. Suponha ainda que AB não é perpendicular a r. Então, os segmentos perpendiculares a s baixados de r no lado do ângulo agudo entre AB e r são menores do que AB e os do lado oposto são maiores do que AB."

[5] Um dos quatro axiomas do sistema axiomático original de Birkhoff para a Geometria Euclidiana Plana é justamente sobre a existência de semelhança.

Giovanni Girolamo Saccheri.

Saccheri foi um padre jesuíta e estudioso de teologia, filosofia, retórica e matemática que viveu nas cidades de Milão, Turim e Pávia. Sua obra mais famosa é *Euclides Ab Omni Naevo Vindicatus* (Euclides Livre de Todas as Máculas) que é considerada uma das primeiras obras de geometria não euclidiana (embora Saccheri não tenha concebido esta obra com tal intuito). Em sua obra ele tenta, assim como seus antecessores, provar o Quinto Postulado de Euclides a partir dos quatro anteriores. A novidade é que, pela primeira vez, o método de redução ao absurdo em demonstrações foi utilizado no "Problema das Paralelas". Com isto, Saccheri supôs a negação do Quinto Postulado e tentou chegar a uma contradição fazendo uso de um quadrilátero com dois ângulos retos na base e dois lados verticais congruentes. Como ele sabia que a existência de retângulos e o Quinto Postulado são equivalentes, a negação assumida conduziu a dois casos, a saber: o caso em que os ângulos congruentes do topo são obtusos e o caso em que são agudos. Esse quadrilátero mais tarde passou a se chamar "Quadrilátero de Saccheri". O caso em que os ângulos do topo de seu quadrilátero são obtusos conduz a uma contradição com o Segundo Postulado de Euclides. O caso em que os ângulos são agudos não conduz a uma contradição. No entanto, após ter desenvolvido vários resultados, que hoje são conhecidos como teoremas de Geometria Hiperbólica, Saccheri forçou uma contradição admitindo ser impossível a existência de duas retas paralelas assintóticas, ou seja, retas que são paralelas, mas que vão se aproximando à medida que são percorridas em um determinado sentido. Essas retas podem ser utilizadas para a construção dos chamados *triângulos generalizados* da Geometria Hiperbólica.

Saccheri nasceu em 1667 em São Remo na Itália e morreu em 1733 em Milão, também na Itália.

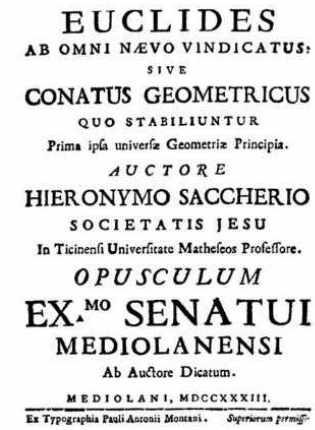

EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permiss.

FIGURA 49: *Página da obra de Saccheri.*

Johann Heinrich Lambert.

Assim como Saccheri, Lambert também tentou provar o Quinto Postulado de Euclides por redução ao absurdo, em seu trabalho *Theorie der Parallellinien* de 1766, via a introdução de um quadrilátero que possui três ângulos retos, conhecido hoje como "Quadrilátero de Lambert". Como conseqüência, ele deduziu uma série de resultados que hoje são conhecidos como teoremas de Geometria Hiperbólica. Talvez seu mais importante resultado nesse trabalho tenha sido a dedução de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é inversamente proporcional à sua área, em uma geometria onde não vale o Quinto Postulado. Apesar de suas contribuições no campo da geometria, Lambert é mais conhecido no mundo matemático pela prova rigorosa que fez da irracionalidade do número π.

Lambert nasceu em 1728 em Mülhausen na França e morreu em 1777 em Berlim na Alemanha.

FIGURA 50: *Tela de Johann Heinrich Lambert.*

Adrien Marie Legendre.

Legendre escreveu um tratado de geometria intitulado "Eléments de Géométrie" em 1794, que serviu de texto básico no ensino de geometria durante muitas décadas na Europa. Foi nesse trabalho que Legendre voltou-se para a questão do "Problema das Paralelas" e, assim como seus antecessores, tentou demonstrar o Quinto Postulado a partir dos quatro primeiros. Em uma de suas demonstrações ele admitiu que, a partir de um ponto no inteiror de um ângulo não degenerado, cuja medida não é superior a $60°$, é possível traçar uma reta que intersecta os dois lados desse ângulo. Embora pareça evidente, essa proposição é equivalente ao próprio Quinto Postulado de Euclides e, desta forma, do ponto de vista lógico-dedutivo, assumi-la significa assumir o Quinto Postulado. Embora Legendre não tenha feito progressos no "Problema das Paralelas", seu trabalho no campo da geometria foi magistral do ponto de vista didático e da clareza de raciocínio com que demonstrou diversos teoremas da Geometria Euclidiana.

Legendre nasceu em 1752 em Paris, na França, e morreu em 1833 no mesmo local.

FIGURA 51: *Tela de Adrien Marie Legendre.*

Johann Carl Friedrich Gauss.

Gauss tomou conhecimento logo cedo, por volta dos quinze anos de idade, do "Problema das Paralelas" e, assim como seus antecessores, de início tentou demonstrar o Quinto Postulado a partir dos quatro primeiros. No entanto, logo convenceu-se de que tal demonstração não era possível. Embora não haja registros, é possível que Gauss tenha lido os trabalhos de Saccheri, Lambert e Legendre sobre o "Problema das Paralelas" e tomado conhecimento dos vários teoremas de geometrias não euclidianas constantes desses trabalhos. Embora não tenha publicado nada sobre esse assunto sabe-se, por meio de numerosas correspondências que Gauss mantinha com diversos matemáticos da época, que ele desenvolveu uma série de

resultados de Geometria Hiperbólica e, certamente, foi o primeiro matemático a reconhecer a existência de uma geometria consistente diferente da euclidiana. Talvez a não publicação de tais resultados tenha sido motivada pelo receio da não aceitação de uma geometria diferente da clássica e da contestação da filosofia de Kant, adotada pela igreja, que coloca o universo como euclidiano.

O termo "não euclidiana" é de Gauss. Em 1824, em carta a F. A. Taurinus, declara que "se supusermos que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180º (o que equivale a considerar uma das negações do Quinto Postulado), é possível desenvolver uma longa série de resultados não contraditórios que constituem uma geometria não euclidiana".

Gauss foi um dos maiores matemáticos que já existiram e possui contribuições em diversas áreas dessa ciência. Nasceu em 1777 em Brunswick na Alemanha e morreu em 1855 em Göttingen, também na Alemanha.

FIGURA 52: *Tela de Johann Carl Friedrich Gauss.*

János Bolyai.

O húngaro János Bolyai é filho de um amigo de Gauss, chamado Farkas Bolyai (1775-1856), que tentou demonstrar o Quinto Postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros. Talvez, por isso, János tenha tentado logo cedo resolver o "Problema das Paralelas". Assim como Gauss, o jovem János logo se convenceu da impossibilidade de tal demonstração e passou a admitir e a desenvolver diversos resultados de Geometria Hiperbólica.

FIGURA 53: *Tela de János Bolyai.*

János publicou, em latim, o fruto de seu trabalho sob o título *Ciência do Espaço Absoluto* ([6]), em 1832, como um apêndice de um livro didático escrito por seu pai, intitulado *Tentamen.*

[6]Uma tradução para o inglês do trabalho "Ciência do Espaço Absoluto" de János Bolyai pode ser encontrada no final da referência:

Um fato curioso na história de János se deu quando seu pai Farkas enviou uma cópia do *Tentamen* para que seu amigo Gauss avaliasse o brilhante trabalho de seu filho. No entanto, ao contrário do esperado elogio do eminente matemático, Farkas recebeu uma carta de Gauss na qual este diz que elogiar o trabalho de János seria o mesmo que elogiar a si próprio, uma vez que a maioria dos resultados descobertos por János já haviam sido descobertos por ele mesmo anos antes. Entretanto, Gauss escreveu que estava feliz e surpreso pelo fato de esses resultados de Geometria Hiperbólica terem sido descobertos de modo independente pelo prodigioso filho de um ilustre amigo. Naturalmente, a carta de Gauss provocou profundo descontentamento em János, que passou a cultivar profunda aversão ao "Príncipe dos Matemáticos".

János nasceu 1802 em Kolozsvár na Hungria (hoje é uma cidade da Romênia) e morreu em 1860 in Marosvásárhely na Hungria (hoje, também Romênia).

Nikolai Ivanovich Lobachewsky.

Assim como seus antecessores, Lobachewsky tentou demonstrar o Quinto Postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros e logo se convenceu da impossibilidade desse feito. A partir de então, passou a reconhecer a existência e a desenvolver, de forma independente, resultados de uma nova geometria, a Hiperbólica, diferente da Euclidiana, denominada por ele de *pangeometria* ou *geometria imaginária*. Em 1826 chegou a proferir palestra sobre a existência de geometrias não euclidianas na Universidade de Kazan onde foi professor e reitor. Em 1829, Lobachewsky publicou um trabalho, em russo, sobre suas descobertas mas quase que completamente ignorado pela comunidade científica russa e completamente ignorado no restante do mundo. Entretanto, cronologicamente, trata-se da primeira publicação de uma geometria cujo autor admite ser não euclidiana. Posteriormente, em busca do reconhecimento de seu trabalho, Lobachewsky publicou uma versão em alemão em 1840, intitulada *Pesquisas Geométricas Sobre a Teoria das Paralelas* ([7]), chegando às mãos de Gauss, que ficou mais uma vez surpreso com o fato de Lobachewsky ter descoberto os mesmos resultados de forma independente. Além disso, Gauss também se superpreendeu com a forma como os teoremas da Geometria Hiperbólica foram demonstrados por Lobachewsky, de modo totalmente diferente dos seus, chegando a afirmar em correspondência para um amigo astrônomo, de nome Schumacher, que o livro de Lobachewsky continha uma exposição admirável de toda a teoria de Geometria Hiperbólica. Em 1866, dez anos após sua morte, uma versão em francês de seu trabalho foi publicada.

Lobachewsky nasceu em 1792 em Nizhny na Rússia e morreu em 1856 em Kazan, também na Russia.

Bonola, R. *Non-Euclidean Geometry:* a critical and historical study of its development. New York. Dover Publications, Inc. 1955.

[7]Uma tradução para o inglês do trabalho "Pesquisas Geométricas Sobre a Teoria das Paralelas", de Lobachewsky, pode ser encontrada no final da referência:

Bonola, R. *Non-Euclidean Geometry:* a critical and historical study of its development. New York. Dover Publications, Inc. 1955.

FIGURA 54: *Tela de Nikolai Ivanovich Lobachewsky.*

Georg Friedrich Bernhard Riemann.

Riemann generalizou as geometrias não euclidianas por meio do conceito de curvatura e fundamentou a Geometria Elíptica, que pode ser obtida, do ponto de vista axiomático, da negação do Quinto Postulado de Euclides, que conduz à não existência de retas paralelas, e à substituição do Segundo Postulado de Euclides por postulados que permitem que uma reta seja finita (Axiomas de Separação). Com isso, a geometria sobre uma esfera, que sob certas restrições serve de modelo para a Geometria Elíptica, desvinculou-se como parte da Geometria Euclidiana Espacial e passou a ter vida própria.

O trabalho de Riemann sobre geometria está muito além da simples generalização das três geometrias de espaço homogêneo (curvatura gaussiana constante ([8])). Ele introduziu as hoje chamadas Geometrias Riemannianas que podem, inclusive, não ser homogêneas e que foram, posteriormente, utilizadas na Teoria da Relatividade de Albert Einstein em 1906.

Riemann nasceu em 1826 em Breselenz na Alemanha e morreu em 1866 em Selasca na Itália, vítima de tuberculose.

FIGURA 55: *Foto de Georg Friedrich Bernhard Riemann.*

[8] A definição rigorosa de curvatura gaussiana de uma superfície requer a introdução de definições e resultados de geometria diferencial e pode ser encontrada nas páginas de 164 a 167 da referência:

TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial.* Brasília: Editora da Universidade de Brasília. 1988.

Geometricamente, a curvatura gaussiana em um ponto de uma superfície suave indica, de um certo modo, o quanto essa superfície afasta-se de seu plano tangente em uma vizinhança desse ponto. Uma superfície que possui curvatura gaussiana constante em qualquer um de seus pontos possui a propriedade de ser homogênea, ou seja, intrisecamente não há pontos "especiais", qualquer um de seus pontos possuem as mesmas propriedades e são indistinguíveis. Exemplos de superfícies com curvatura gaussiana constante e positiva são as esferas euclidianas e, com curvatura gaussiana nula, é o plano euclidiano.

Eugenio Beltrami.

Embora a grande maioria dos teoremas de Geometria Hiperbólica já estivesse estabelecida na segunda metade do século XIX, o problema da consistência de tal geometria ainda não havia sido resolvido. Havia a preocupação sobre a garantia da impossibilidade de se encontrar, no futuro, durante o desenvolvimento da Geometria Hiperbólica, uma contradição lógica na teoria, ou seja, um resultado verdadeiro cuja negação também pudesse ser provada verdadeira. O problema foi resolvido mediante a introdução de *modelos euclidianos* para a Geometria Hiperbólica, isto é, superfícies nas quais as retas são definidas de modo que os axiomas da Geometria Hiperbólica passam a ser interpretados e aceitos como verdadeiros. Desta forma, uma contradição na Geometria Hiperbólica seria automaticamente transferida para a Geometria Euclidiana, que é considerada consistente.

Beltrami foi o primeiro a introduzir um tal modelo parcial para a Geometria Hiperbólica, em 1868, em um artigo intitulado "Essay on an Interpretation of Non-euclidean Geometry". Tal modelo faz uso da *pseudoesfera*, superfície de revolução da curva denominada *tratriz* em torno de sua assíntota.

Beltrami nasceu em 1835 em Cremona no Império Austríaco (atualmente, Itália) e morreu em 1900 em Roma, na Itália.

FIGURA 56: *Foto de Eugenio Beltrami.*

Felix Christian Klein.

O modelo de Beltrami da pseudoesfera para a Geometria Hiperbólica não era totalmente adequado devido ao fato de ser parcial, ou seja, representava apenas parte do plano hiperbólico, impedindo que as retas hiperbólicas fossem convenientemente estendidas ao infinito, como reza o Segundo Postulado de Euclides. Deste modo, a busca por modelos completos para a Geometria Hiperbólica passou a ser um preocupação dentre os geômetras no final do século XIX.

Felix Klein foi um eminente geômetra que publicou em 1871 dois artigos sobre geometrias não euclidianas, nas quais introduziu um modelo completo ([9]) para a Geometria Hiperbólica (Modelo do Disco de Klein) e dois modelos para a Geometria Elíptica (Modelo do Disco

[9] Os modelos completos para a Geometria Hiperbólica imersos no Espaço Euclidiano não possuem métrica induzida da Geometria Euclidiana (*geometricamente, uma superfície possui métrica induzida da métrica do espaço no qual ela está inserida quando o comprimento de qualquer curva dessa superfície é computado como sendo o comprimento dessa curva quando vista como curva do espaço. Assim, se uma esfera de raio* r *possui métrica induzida da métrica usual do espaço euclidiano, então um arco de circunferência ligando pontos antípodas da esfera terá comprimento* πr). Neste caso, a noção de medida é diferente da euclidiana e faz com que as retas hiperbólicas, ao contrário do modelo da pseudoesfera, não sejam geodésicas euclidianas (curva de menor comprimento euclidiano que une dois pontos, descrita sobre uma superfície) sobre a superfície do modelo.

Fechado e Modelo Duplo da Esfera). Talvez o trabalho mais conhecido de Klein seja o estudo das propriedades do espaço que são invariantes por um dado grupo de transformações, trabalho este conhecido como "Erlanger Programm", de 1872, e que influenciou profundamente o desenvolvimento da geometria no século XX. Por fim, cabe ressaltar que os termos "hiperbólica" e "elíptica" para as duas geometrias não euclidianas homogêneas foram introduzidos por Klein.

FIGURA 57: *Foto de Felix Christian Klein.*

Klein nasceu em 1849 em Düsseldorf na Prússia (hoje, Alemanha) e morreu em 1925 em Göttingen na Alemanha.

Jules Henri Poincaré.

Poincaré é um dos maiores matemáticos de todos os tempos e é considerado o último universalista em matemática, ou seja, uma pessoa que detinha conhecimento profundo de todas as áreas da matemática. Possui contribuições significativas em diversas áreas da matemática e, dentre elas, a geometria. No final do século XIX, após estudo de trabalhos de Lazarus Fuchs, Poincaré introduziu dois modelos euclidianos para a Geometria Hiperbólica enquanto pesquisava grupos de transformações automorfas do plano no plano que são razões de transformações afins de uma variável complexa. Tais grupos são conhecidos atualmente como *grupos fuchsianos.* Os modelos completos introduzidos por Poincaré são amplamente utilizados no estudo e no ensino de Geometria Hiperbólica e são conhecidos como Modelo do Semiplano Superior e Modelo do Disco de Poincaré.

Poincaré nasceu em 1854 em Nancy na França e morreu em 1912 em Paris, também na França.

FIGURA 58: *Foto de Jules Henri Poincaré.*

Com o trabalho de David Hilbert (que apresentamos no primeiro capítulo) encerra-se talvez o mais longo problema em aberto na Matemática, o "Problema das Paralelas" que, conforme vimos, ironicamente, foi introduzido pelo próprio Euclides e resistiu por cerca de 2200 anos!

2.2 O Axioma Euclidiano das Paralelas

A Existência e Unicidade da Paralela

Axioma A10. (das Paralelas) Em um plano, por um ponto P não pertencente a uma reta r, pode-se traçar uma <u>única</u> reta paralela a r passando por P.

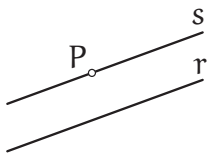


FIGURA 59: *A reta s é única.*

Vamos indicar duas retas r e s paralelas por $r//s$.

Observemos que a importância do axioma acima reside na unicidade da paralela e não em sua existência. De fato, vimos no capítulo anterior que a existência de retas paralelas é garantida sem o auxílio do axioma da paralelas.

Teorema 2.1 *(transitividade do paralelismo) Duas retas distintas paralelas a uma mesma reta são paralelas.*

Demonstração.

Suponha que r e s são as retas distintas paralelas à reta t. Suponhamos, por absurdo, que r e s não sejam paralelas.

Seja P o ponto de interseção de r e s. Daí, $P \notin t$, r é paralela a t passando por P e s é paralela a t passando por P, o que contradiz a unicidade determinada pelo Axioma das Paralelas.

Portanto, r e s são paralelas. □

Observemos a consequência imediata da transitividade do paralelismo: se uma reta t intersecta uma de duas paralelas, então t intersecta a outra.

Teorema 2.2 *Se uma reta transversal intersecta duas retas paralelas, então os ângulos correspondentes são congruentes.*

Demonstração.

Sejam α e β medidas de ângulos correspondentes e t reta transversal às retas paralelas s e r conforme figura.

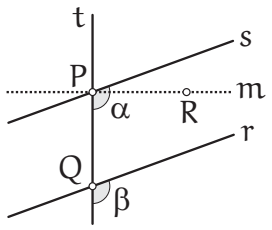


FIGURA 60: *Figura auxiliar.*

Suponhamos, por absurdo, que α e β sejam diferentes. Sejam $\{P\} = s \cap t$ e $\{Q\} = r \cap t$.

Então, pelo Axioma A7, existe um ângulo $Q\widehat{P}R$ tal que $Q\widehat{P}R = \beta$. Consideremos a reta $m = \overleftrightarrow{PR}$ que é, portanto, distinta de s.

Pelo Teorema 1.13 m é paralela a r. Logo, m e s são paralelas a r passando por P, o que contradiz a unicidade do Axioma das Paralelas.

Portanto, os ângulos correspondentes de medidas α e β são congruentes. □

Consequência dos dois teoremas acima é que se uma reta t intersecta uma de duas paralelas ortogonalmente, então t intersecta a outra também ortogonalmente.

O teorema abaixo é central na Geometria Euclidiana. A caracterização da soma dos ângulos internos de um triângulo é um dos resultados mais lembrados pelos estudantes. Na verdade, este teorema é equivalente ao próprio axioma das paralelas.

Teorema 2.3 *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é a medida de um ângulo raso.*

Demonstração.

Sejam ABC um triângulo e r a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ passando por A. Consideremos α, β e γ a medidas dos ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente, como na figura abaixo.

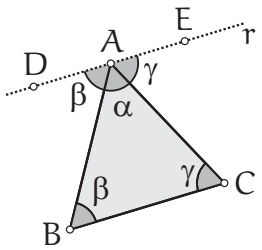


FIGURA 61: *Figura auxiliar.*

Pelo teorema acima $D\widehat{A}B = \beta$ e $E\widehat{A}C = \gamma$. Logo, $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$, como queríamos.□

Como consequência imediata do teorema acima temos que os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares. Também é consequência que a medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Quadriláteros

Vimos que um polígono de quatro lados recebe o nome de quadrilátero.

Um segmento ligando dois vértices de um quadrilátero que não são extremos de um mesmo lado é chamado de ***diagonal*** do quadrilátero. Observemos que um quadrilátero possui duas diagonais.

Como todo quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos por meio de uma de suas diagonais, temos como consequência do teorema acima que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é a soma de dois ângulos rasos.

Dois lados de um quadrilátero que não possuem vértice comum são chamados de ***lados opostos*** do quadrilátero. Caso contrário, ***lados consecutivos***. Analogamente, ângulos que não compartilham um mesmo lado de um quadrilátero são chamados de ***ângulos opostos*** do quadrilátero. Caso contrário, ***ângulos consecutivos***.

Um quadrilátero com um par de lados opostos paralelos é chamado de ***trapézio***. Se os outros dois lados forem congruentes e não paralelos, o trapézio é chamado de ***trapézio isósceles***.

Um quadrilátero com os dois pares de lados opostos paralelos é chamado de ***paralelogramo***.

Um quadrilátero com os quatro lados congruentes é chamado de ***losango*** ou ***rombo***.

Um quadrilátero com os quatro ângulos internos congruentes (portanto, retos) é chamado de ***retângulo***.

Um quadrilátero com os quatro lados e os quatro ângulos internos congruentes (portanto, losango e retângulo) é chamado de ***quadrado***.

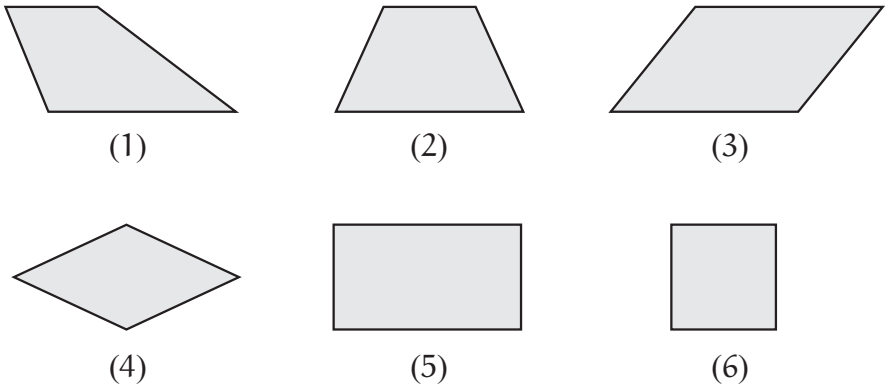
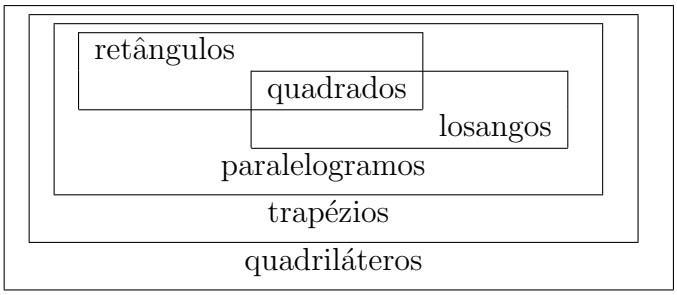


FIGURA 62: *A partir do canto superior esquerdo:* (1) *trapézio (não isósceles);* (2) *trapézio isósceles;* (3) *paralelogramo;* (4) *losango;* (5) *retângulo e* (6) *quadrado.*

É fácil provar com os teoremas que temos até aqui o seguinte diagrama:



É um exercício fácil provar, utilizando os teoremas acima, que lados opostos de um paralelogramo são congruentes. Com esse resultado aplicado aos retângulos, é muito simples provar que se r e s são retas paralelas e $P, Q \in r$, então $d(P, s) = d(Q, s)$ (faça!). É justamente essa conclusão que permite que consideremos retas paralelas como sendo "equidistantes".

Portanto, podemos definir de modo preciso a ***distância*** entre duas retas r e s paralelas como sendo a distância de qualquer ponto de uma reta até a outra reta, ou seja, $d(r, s) = d(P, s)$ sendo $P \in r$ ponto qualquer de r.

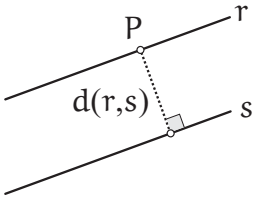


FIGURA 63: *Distância entre retas paralelas.*

Teorema 2.4 *O segmento com extremos nos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e possui a metade de seu comprimento.*

Demonstração.

Seja ABC um triângulo com D e E os pontos médios de AB e AC, respectivamente.

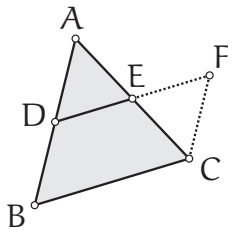


FIGURA 64: *Figura auxiliar.*

Vamos mostrar que DE é paralelo a BC e que $DE = \frac{1}{2}BC$.

Seja F o ponto da semirreta oposta a $\overrightarrow{ED}$ tal que $DE = EF$.

Temos que $A\widehat{E}D = F\widehat{E}C$, pois são ângulos opostos pelo vértice.

Logo, $DE = EF$, $A\widehat{E}D = F\widehat{E}C$ e $AE = EC$, donde os triângulos ADE e CFE são congruentes pelo caso LAL. Daí, $FC = AD = DB$.

Além disso, $A\widehat{D}E = E\widehat{F}C$. Logo, pelo Teorema 1.13, AD é paralelo a FC.

O triângulo DFC é congruente ao triângulo CBD pelo caso LAL pois, pelo Teorema 2.2 tem-se que $m C\widehat{D}F = m D\widehat{C}B$. Desta congruência segue que $DF = BC$, o que implica $DE = \frac{1}{2}BC$.

Novamente pelo Teorema 1.13 concluímos que DF é paralelo a BC, ou seja, DE é paralelo a BC. □

Tales

Para o próximo teorema dizemos que duas retas r e s *determinam um segmento* sobre uma reta t quando t é transversal a r e a s, e os extremos do segmento são os pontos de intersecção de t com r e s.

Teorema 2.5 *Se três ou mais retas paralelas determinam segmentos congruentes em uma transversal, então elas determinam segmentos congruentes em qualquer outra transversal.*

Demonstração.

Consideremos uma transversal m intersectando as retas paralelas r, s e t nos ponto A, B e C, respectivamente, com $AB = BC$.

Seja n uma outra transversal intersectando estas retas nos ponto D, E e F, respectivamente. Mostremos que $DE = EF$.

Consideremos, primeiramente, o caso em que m e n não são paralelas.

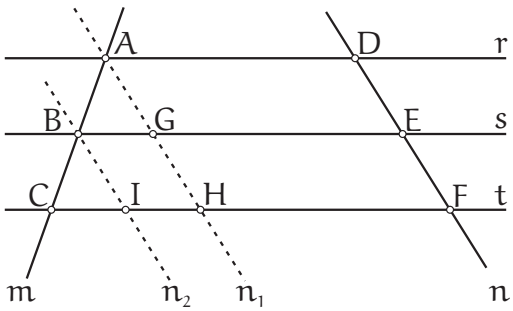


FIGURA 65: *Figura auxiliar.*

Seja n_1 a reta paralela a n que passa por A e sejam G e H os pontos de interseção de n_1 com s e t, respectivamente. E, seja n_2 a reta paralela a n passando por B e I o ponto de interseção de n_2 com t.

Assim, temos os paralelogramos $ADGE$ e $BIFE$. Como os lados opostos dos paralelogramos são congruentes temos que $AG = DE$ e $BI = FE$.

Pelo Teorema 2.2 temos que $A\widehat{B}G = B\widehat{C}I$ pois s e t são paralelas cortadas pela transversal m.

Analogamente, $B\widehat{A}G = C\widehat{B}I$ pois n_1 e n_2 são paralelas cortadas pela transversal m.

Juntamente com $AB = BC$ temos, pelo caso ALA, que os triângulos ABG e BCI são congruentes. Logo, $AG = BI$.

Como já tínhamos que $AG = DE$ e $BI = FE$ então $DE = FE$.

Consideremos agora o caso em que as transversais se intersectam em um ponto A da reta r.

Seja n_1 a reta que passa por B, paralela a n e que intersecta t em I (veja figura abaixo à esquerda).

Analogamente ao caso anterior temos que os triângulos ABE e BCI são congruentes por ALA e, portanto, $AE = BI$. Como $BIFE$ é um paralelogramo temos $BI = FE$. Portanto, $AE = EF$, isto é, $DE = EF$.

No caso em que m e n são paralelas, como na figura abaixo a direita, o resultado decorre imediatamente do fato dos lados opostos de paralelogramos serem congruentes.

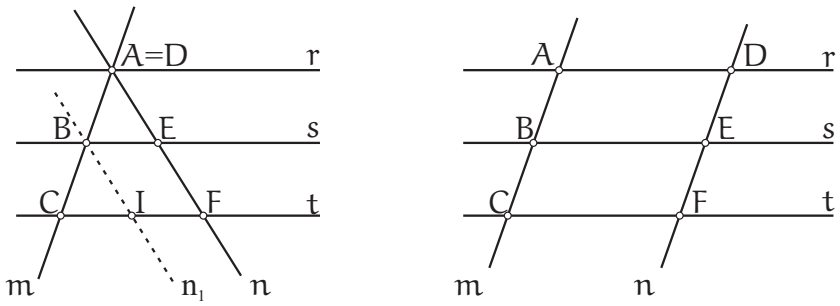


FIGURA 66: *Figura auxiliar.*

Com isso, a demonstração se encerra. □

Como consequência do teorema acima e do Axioma $A4$ temos que o encontro das medianas de um triângulo ocorre em um único ponto que as divide na razão 2 para 1. Mais precisamente:

Teorema 2.6 *As medianas de um triângulo intersectam-se em um único ponto. Este ponto dista de cada vértice $\frac{2}{3}$ do comprimento da medina relativa a esse vértice.*

Demonstração.

Seja ABC um triângulo qualquer e AM_1, BM_2, CM_3 as medianas. Seja X o ponto de interseção entre BM_2 e CM_3. Consideremos os pontos médios D e E de BX e CX, respectivamente.

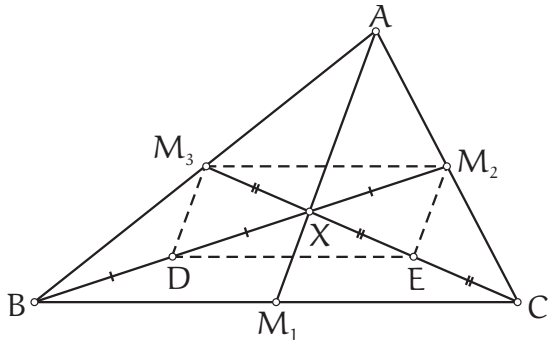


FIGURA 67: *Figura auxiliar.*

Como $AM_3 = BM_3$ e $AM_2 = CM_2$ então, pelo Teorema 2.4, $M_2M_3 \| BC$ e $M_2M_3 = \frac{1}{2}BC$.

Analogamente, $XD = BD$ e $XE = CE$ então $DE \| BC$ e $DE = \frac{1}{2}BC$. Daí, $M_2M_3 \| DE$ e $M_2M_3 = DE$.

Pelo Teorema 2.2 $\widehat{DM_2M_3} = M_2\widehat{D}E$ e $M_2\widehat{X}M_3 = D\widehat{X}E$, pois são opostos pelo vértice.

Daí, os triângulos DEX e M_2M_3X são congruentes pelo caso LAA_0 donde $DX = XM_2$ e $M_3X = XE$. Então $BM_2 = 3DX$ e portanto, $BX = \frac{2}{3}BM_2$.

Analogamente, $CX = \frac{2}{3}BM_3$. Logo, a mediana BM_2 intercepta a mediana CM_3 num ponto X tal que $BX = 2XM_2$.

Tomando as medianas AM_1 e BM_2 e sendo Y o ponto de interseção entre AM_1 e BM_2, de modo análogo concluímos que $BY = \frac{2}{3}BM_2$ e $AY = \frac{2}{3}AM_1$.

Seja φ um sistema de coordenadas tal que $\varphi(B) < \varphi(M_2)$. Daí, $BX = \frac{2}{3}BM_2 = BY \Longrightarrow \varphi(X) - \varphi(B) = \varphi(Y) - \varphi(B)$. Da injetividade de φ concluímos que $X = Y$.

Portanto $AM_1 \cap BM_2 \cap CM_3 = \{X\}$ e $AX = \frac{2}{3}AM_1$, $BX = \frac{2}{3}BM_2$, $CX = \frac{2}{3}BM_3$, como queríamos demonstrar. □

O ponto que é encontro das medianas de um triângulo é chamado de ***baricentro*** ou ***centroide*** do triângulo. Em estudos mais avançados prova-se que o baricentro é o "centro de massa" ou "ponto de equilíbrio" do triângulo.

Lema 2.1 *Dados dois segmentos* AB *e* CD, *temos* $\frac{AB}{CD} = \frac{n}{m}$ *onde* n *e* m *são números inteiros positivos se, e somente se, existe um segmento de comprimento* c *tal que* $AB = nc$ *e* $CD = mc$.

Demonstração.

Sejam dados dois segmentos AB e CD e os números positivos n e m tais que $\frac{AB}{CD} = \frac{n}{m}$.

Sejam, $P_0 = A$, $P_1, ..., P_n = B$ n pontos em AB tais que $P_0P_1 = P_1P_2 = ... = P_{n-1}P_n$ (ou seja, estamos dividindo o segmento AB em n partes iguais). Seja c o comprimento de tais segmentos.

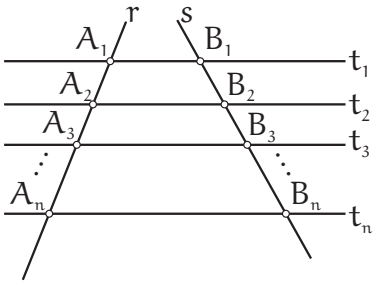
Então, $\frac{AB}{CD} = \frac{n}{m} = \frac{nc}{mc}$.

Como, por construção, $AB = nc$ então $CD = mc$.

A recíproca é imediata. □

Teorema 2.7 *(Tales) Se duas retas* r *e* s *são transversais a um feixe de retas paralelas* ([10]), *então a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer determinados pelo feixe sobre* r *é igual a razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes determinados pelo feixe sobre* s.

[10]Feixe de retas neste enunciado tem o mesmo sentido de conjunto de retas.



$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \cdots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$$

FIGURA 68: *Teorema de Tales.*

Demonstração.

Sejam AB e CD dois segmentos de r e $A'B'$ e $C'D'$ os respectivos segmentos correspondentes em s.

Queremos mostrar que $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.

Consideremos, primeiramente, o caso em que $\frac{AB}{CD}$ é racional, ou seja, existem m e n inteiros positivos tais que $\frac{AB}{CD} = \frac{n}{m}$.

Daí, pelo Lema anterior, existe um segmento de comprimento c tal que $AB = nc$ e $CD = mc$.

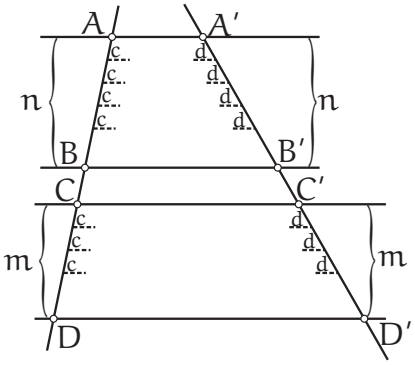


FIGURA 69: *Figura auxiliar.*

Pelo Teorema 2.5, existe d inteiro positivo tal que $A'B' = nd$ e $C'D' = md$.

Logo, $\frac{AB}{CD} = \frac{nc}{mc} = \frac{n}{m} = \frac{nd}{md} = \frac{A'B'}{C'D'}$.

Consideremos, agora, o caso em que $\frac{AB}{CD}$ é um número irracional.

Seja n um inteiro qualquer.

Então, existe um segmento de comprimento c tal que $CD = nc$ (ou seja, estamos dividindo CD em n partes iguais e chamando o comprimento de cada parte de c).

Por $\frac{AB}{CD}$ ser irracional, ou seja, não existir um segmento submúltiplo comum de AB e CD, então, marcando sucessivamente c em AB um certo número inteiro m de vezes temos $mc < AB < (m+1)\,c$. Assim, $\frac{m}{n} < \frac{AB}{CD} < \frac{m+1}{n}$.

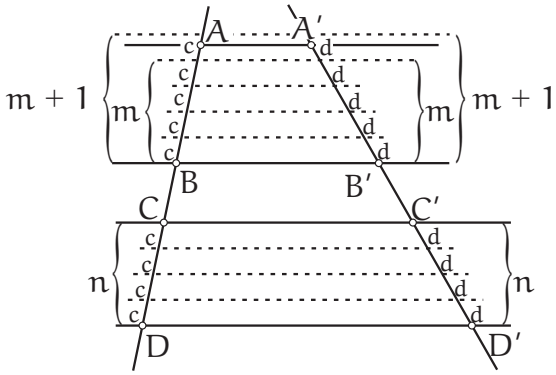


FIGURA 70: *Figura auxiliar.*

Pelo Teorema 2.5 temos que $C'D' = nd$ e $md < A'B' < (m+1)\,d$. Daí, $\frac{m}{n} < \frac{A'B'}{C'D'} < \frac{(m+1)}{n}$, ou seja, $-\frac{(m+1)}{n} < -\frac{A'B'}{C'D'} < -\frac{m}{n}$.

Assim, $\frac{m}{n} - \frac{(m+1)}{n} < \frac{AB}{CD} - \frac{A'B'}{C'D'} < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n}$, isto é, $-\frac{1}{n} < \frac{AB}{CD} - \frac{A'B'}{C'D'} < \frac{1}{n}$ e, portanto, $\left|\frac{AB}{CD} - \frac{A'B'}{C'D'}\right| = \frac{1}{n}$.

Como n é um inteiro positivo qualquer (então podemos tomá-lo tão "grande" quanto quisermos) segue que $\left|\frac{AB}{CD} - \frac{A'B'}{C'D'}\right| = 0$. Portanto, $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$. □

2.3 O Conceito de Semelhança

Triângulos Semelhantes

Intuitivamente, dois objetos são *semelhantes* quando são "iguais a menos de escala". Exemplos cotidianos bem simples podem ser encontrados em brinquedos, em que miniaturas de carros, casas e pessoas (bonecos) são semelhantes aos originais.

Nesta seção vamos trabalhar com o conceito de semelhança envolvendo triângulos. Trata-se de um caso particular da definição geral de semelhança que comentaremos no final desta seção.

Dois triângulos são ditos ***semelhantes*** quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de tal modo que lados correspondentes tenham medidas proporcionais e ângulos correspondentes tenham a mesma medida.

Assim, os triângulos ABC e DEF são semelhantes quando existir uma bijeção $\varphi : \{A, B, C\} \to \{D, E, F\}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} d(A,B) = k.d(\varphi(A), \varphi(B)) & & \widehat{A} = \varphi(\widehat{A}) \\ d(A,C) = k.d(\varphi(A), \varphi(C)) & \text{e} & \widehat{B} = \varphi(\widehat{B}) \\ d(B,C) = k.d(\varphi(B), \varphi(C)) & & \widehat{C} = \varphi(\widehat{C}) \end{array}$$

sendo $k > 0$ a constante de proporcionalidade das medidas dos lados, chamada de ***razão de semelhança*** do triângulo ABC para o triângulo DEF.

Se tivermos, por exemplo, que $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) = E$ e $\varphi(C) = F$, as igualdades acima tornam-se

$$\begin{array}{ccc} AB = k.DE & & \widehat{A} = \widehat{D} \\ AC = k.DF & \text{e} & \widehat{B} = \widehat{E} \\ BC = k.EF & & \widehat{C} = \widehat{F} \end{array}$$

É fácil verificar que se k é a razão de semelhança de ABC para DEF, então $\frac{1}{k}$ é a razão de semelhança de DEF para ABC.

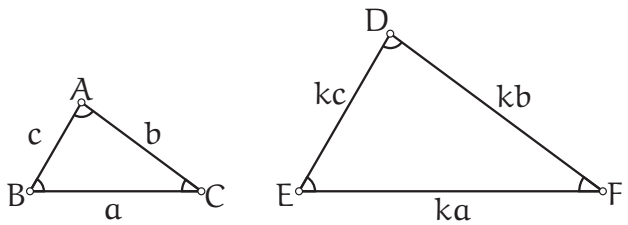


FIGURA 71: *Triângulos semelhantes.*

Quando $k = 1$ temos exatamente a definição de *congruência* entre os triângulos ABC e DEF.

Há alguns "casos de semelhança" que auxiliam na verificação da definição acima.

Teorema 2.8 *(caso AAA) Se dois triângulos ABC e DEF são tais que $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ e $\widehat{C} = \widehat{F}$, então ABC é semelhante a DEF.*

Demonstração.
Consideremos E' e F' pontos de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente, tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$, conforme a figura abaixo.

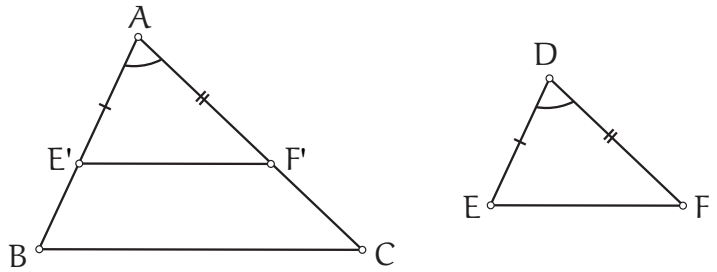


FIGURA 72: *Figura auxiliar.*

Como já tínhamos $\widehat{A} = \widehat{D}$ então, pelo caso LAL, os triângulos $AE'F'$ e DEF são congruentes. Logo, $A\widehat{E'}F' = D\widehat{E}F = \widehat{B}$.
Daí, pelo Teorema 1.13 $\overleftrightarrow{E'F'} \| \overleftrightarrow{BC}$. Se $\overleftrightarrow{E'F'} = \overleftrightarrow{BC}$ então $E'F' = BC$ e daí ABC e DEF são congruentes, e, portanto, semelhantes.
Se $\overleftrightarrow{E'F'} \neq \overleftrightarrow{BC}$ então pelo Teorema de Tales $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$.
Da congruência entre $AE'F'$ e DEF temos que $AE' = DE$ e $AF' = DF$. Daí, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$.
Analogamente mostramos que $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$. Assim, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$. Logo, $AB = k.DE$, $AC = k.DF$ e $BC = k.EF$. Portanto, ABC e DEF são semelhantes. □

Na verdade, o caso acima pode ser chamado de caso "AA" pois conhecendo-se dois dos ângulos de um triângulo, o terceiro fica univocamente determinado.

Exercício: Se uma reta corta dois lados de um triângulo dividindo-os na mesma razão, então ela é paralela ao terceiro lado.
Resolução.
Seja ABC um triângulo qualquer. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{DE}$ onde D é um ponto entre A e B, e E um ponto entre A e C com $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

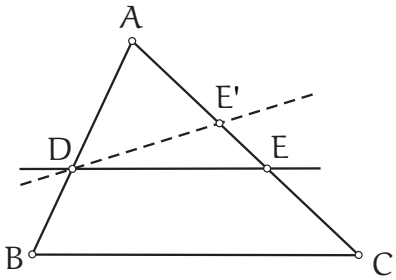


FIGURA 73: *Figura auxiliar.*

Seja $\overleftrightarrow{DE'}$ a reta passando por D, paralela à $\overleftrightarrow{BC}$ e intersectando $\overleftrightarrow{AC}$ em E'. Pelo Teorema de Tales temos que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE'}$ e, portanto, $AE' = AC\frac{AD}{AB}$.

Mas, por hipótese temos $AE = AC\frac{AD}{AB}$. Portanto, $AE = AE'$. Logo, $E = E'$ e $\overleftrightarrow{DE}$ é paralela à $\overleftrightarrow{BC}$. □

Teorema 2.9 *(caso* LAL*) Se dois triângulos* ABC *e* DEF *são tais que* $AB = k.DE$, $\widehat{A} = \widehat{D}$ *e* $AC = k.DF$, *sendo* k *constante real positiva, então* ABC *é semelhante a* DEF.

Demonstração.

Consideremos E' em $\overrightarrow{AB}$ e F' em $\overrightarrow{AC}$ tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$ então, pelo caso LAL, os triângulos $AE'F'$ e DEF são congruentes, conforme figura abaixo.

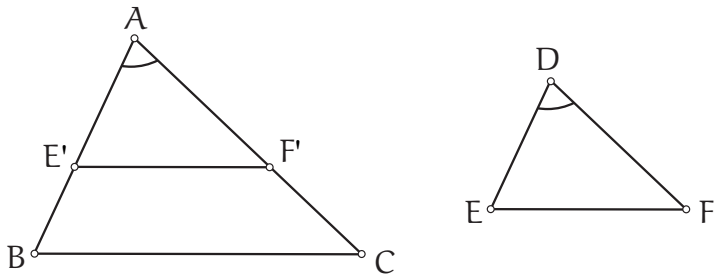


FIGURA 74: *Figura auxiliar.*

Logo, $A\widehat{E'}F = \widehat{E}$, $AE' = DE$ e $AF' = DF$. Logo, $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$. Daí, pelo exercício anterior $\overleftrightarrow{E'F'} \| \overleftrightarrow{BC}$ donde $\widehat{B} = A\widehat{E'}F' = \widehat{E}$.

Portanto, pelo caso AAA, os triângulos ABC e DEF são semelhantes. □

Teorema 2.10 *(caso* LLL*) Se dois triângulos* ABC *e* DEF *são tais que* $AB = k.DE$, $AC = k.DF$ *e* $BC = k.EF$, *sendo* k *constante real positiva, então* ABC *é semelhante a* DEF.

Demonstração.

Consideremos E' em $\overrightarrow{AB}$ e F' em $\overrightarrow{AC}$ tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$, conforme a figura abaixo.

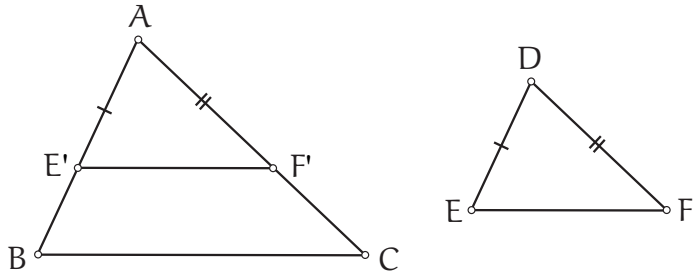


FIGURA 75: *Figura auxiliar.*

Da hipótese, temos $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$. Logo, $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$. Daí, pelo exercício anterior, $\overleftrightarrow{E'F'}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas.

Então, pelo Teorema 2.2, $\widehat{B} = A\widehat{E'}F'$ e $\widehat{C} = A\widehat{F'}E'$.

Logo, pelo caso de semelhança AAA, temos que $AE'F'$ e ABC são semelhantes e, daí, $\frac{E'F'}{BC} = \frac{AE'}{AB}$, ou seja, $E'F' = BC\frac{AE'}{AB} = BC\frac{DE}{AB} = EF$.

Assim, $E'F' = EF$, $AE' = DE$ e $AF' = DF$, o que implica, pelo caso de congruência LLL, que os triângulos $AE'F'$ e DEF são congruentes.

Daí, $A\widehat{E'}F' = \widehat{E}$ e $A\widehat{F'}E' = \widehat{F}$. Mas já tínhamos que $\widehat{B} = A\widehat{E'}F'$ e $\widehat{C} = A\widehat{F'}E'$.

Portanto, $\widehat{B} = \widehat{E}$ e $\widehat{C} = \widehat{F}$. Donde, ABC e DEF são semelhantes pelo caso AAA. □

Triângulos Retângulos

Teorema 2.11 *A altura correspondente à hipotenusa de um triângulo retângulo divide-o em dois triângulos que são semelhantes um ao outro e semelhantes ao triângulo retângulo original.*

Demonstração.

Seja ABC um triângulo retângulo em A e AH a altura relativa à hipotenusa BC. Mostremos que ABC e HBA são semelhantes assim como ABC e HAC.

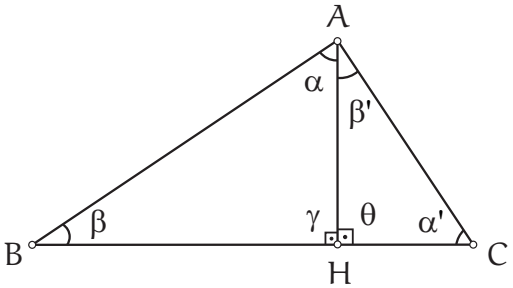


FIGURA 76: *Figura auxiliar.*

Considere os ângulos α, α', β, β', γ e θ conforme figura acima.

Como o ângulo $B\widehat{A}C$ é um ângulo reto, então $\alpha + \beta' = 90^o$. Com γ é reto, temos também que $\alpha + \beta = 90^o$. Daí, $\beta = \beta'$.

Como α' é comum aos triângulos ABC e AHC, então ABC e ACH são semelhantes pelo caso AAA.

Analogamente, mostramos que ABC e AHB são semelhantes. □

Recordemos que dados dois números reais não nulos a e b, a *média geométrica* entre a e b é definida como sendo $\sqrt{ab}$.

Assim, como consequência do teorema acima, temos que:

(1) a altura correspondente à hipotenusa de um triângulo retângulo é a média geométrica entre os comprimentos das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.

(2) cada cateto tem comprimento igual à média geométrica entre o comprimento da hipotenusa e o comprimento da projeção ortogonal de tal cateto sobre a hipotenusa.

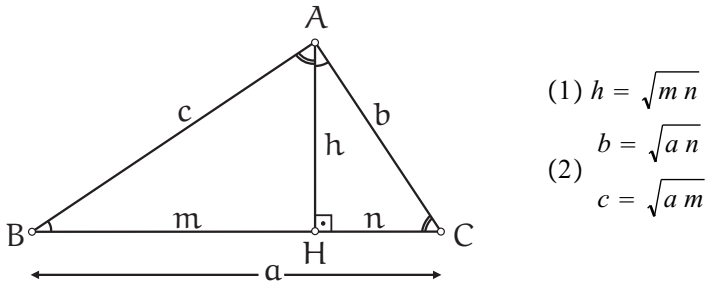


FIGURA 77: *Médias geométricas.*

Teorema 2.12 (1) *(Pitágoras) Em um triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

(2) *(Recíproca do Teorema de Pitágoras). Se* a, b *e* c *são números reais positivos tais que* $a^2 = b^2 + c^2$, *então existe um triângulo retângulo com hipotenusa medindo* a *e catetos medindo* b *e* c.

Demonstração.

(1) Seja ABC um triângulo retângulo em A.

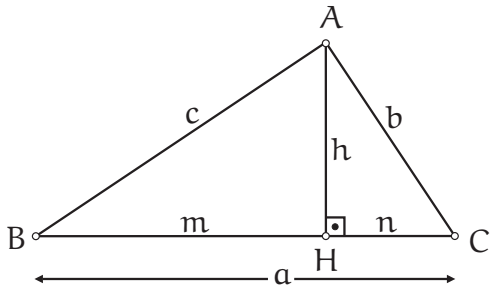


FIGURA 78: *Figura auxiliar.*

Chamemos $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. Mostremos que $a^2 = b^2 + c^2$.

Decorre da observação anterior que $c^2 = am$ e $b^2 = an$. Então $b^2 + c^2 = an + am = a(m + n)$. Como $m + n = a$ então temos que $b^2 + c^2 = a^2$.

(2) Seja ABC um triângulo tal que $a^2 = b^2 + c^2$ onde $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. Então, $a = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Seja DEF um triângulo retângulo em D com catetos $DE = c$ e $DF = b$. Chamemos $d = EF$.

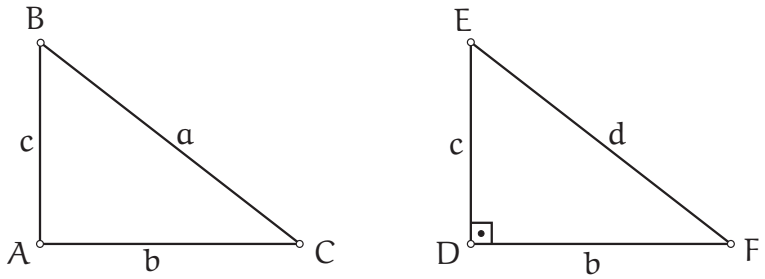


FIGURA 79: *Figura auxiliar.*

Daí, pelo teorema de Pìtágoras, $d^2 = b^2 + c^2$, ou seja, $d = \sqrt{b^2 + c^2}$. Logo, $a = d$.

Assim, pelo caso de congruência LLL, os triângulos ABC e DEF são congruentes, donde $\widehat{A} = \widehat{D}$. Portanto, $\widehat{A}$ é reto. □

Ampliando o Conceito de Semelhança

Vamos conceituar matematicamente e de forma precisa a ideia de semelhança no plano euclidiano (tal conceituação é a mesma no espaço).

A definição que demos acima para o estudo de triângulos semelhantes é caso particular da definição abaixo.

Duas figuras $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ no plano euclidiano são ditas **semelhantes** quando existirem uma bijeção $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ e um número real positivo k tal que para quaisquer $P, Q \in \mathcal{F}$ tem-se

$$P'Q' = k.PQ$$

sendo $P' = \varphi(P)$ e $Q' = \varphi(Q)$. (em outra notação: $d(\varphi(P), \varphi(Q)) = k.d(P, Q)$)

A constante de proporcionalidade k é chamada de **razão de semelhança** (ou **fator de escala**) de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{G}$.

É fácil verificar que se k é a razão de semelhança de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{G}$, então $\frac{1}{k}$ é a razão de semelhança de $\mathcal{G}$ para $\mathcal{F}$.

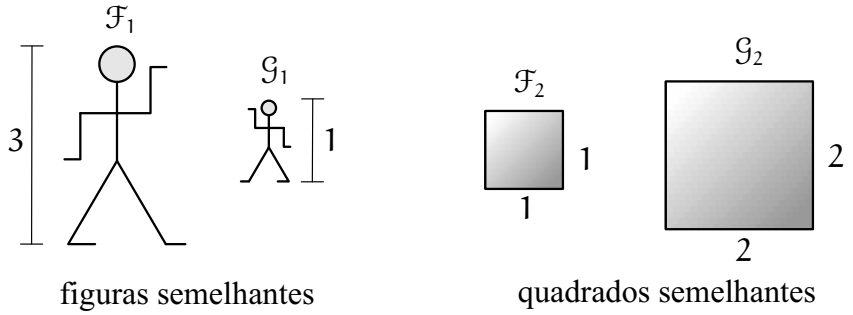


FIGURA 80: *Figuras semelhantes.*

Quando $k = 1$ dizemos que as figuras $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são **congruentes**, e que a bijeção φ é uma **isometria** entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$.

Sejam O um ponto de um plano Π, r um número real positivo e $\sigma_{O,r} : \Pi \to \Pi$ uma aplicação tal que, quando $P \in \Pi$, tem-se

$$OP' = r.OP$$

sendo $P' = \sigma_{O,r}(P)$. Nessas condições, dizemos que $\sigma_{O,r}$ é uma **homotetia** de **centro** (ou **origem**) O e **razão** r.

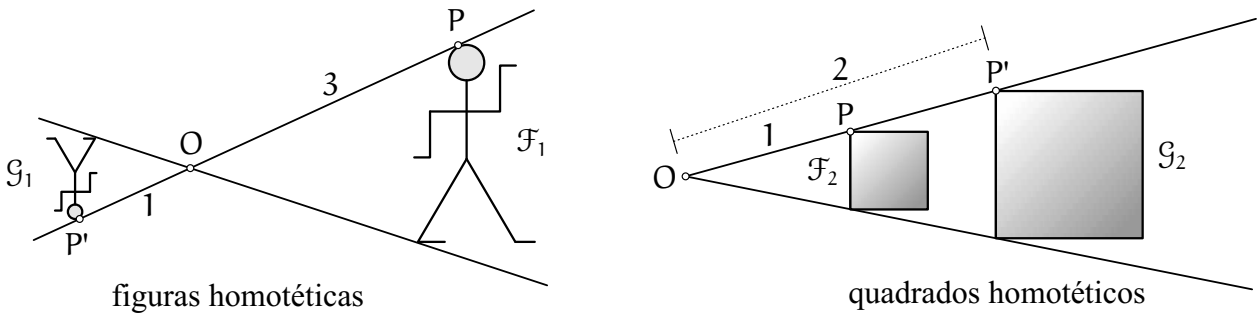


FIGURA 81: *Figuras homotéticas.*

A importância das homotetias reside no fato de elas serem "fábricas" de figuras semelhantes, conforme a proposição abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada na referência [9].

Proposição 2.1 *Sejam $\sigma_{O,r} : \Pi \to \Pi$ homotetia de centro O e razão r e $\mathcal{F}$ uma figura no plano Π. Então, $\mathcal{G} = \sigma_{O,r}(\mathcal{F})$ e $\mathcal{F}$ são figuras semelhantes e a razão de semelhança de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{G}$ é $k = r$. (neste caso a bijeção φ é a restrição de $\sigma_{O,r}$ a $\mathcal{F}$).*

O próximo teorema é muito útil como ferramenta para vários resultados que precisaremos adiante. Sua demonstração pode ser encontrada na referência [10].

Teorema 2.13 (Fundamental da Proporcionalidade) *Se* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *é crescente e tal que* $f(nx) = nf(x)$ *para quaisquer* $n \in \mathbb{N}$ *e* $x \in \mathbb{R}^+$*, então* $f(rx) = rf(x)$ *para quaisquer* $r, x \in \mathbb{R}^+$.

Nas condições do teorema acima, temos que se $y = f(x)$, sendo x e y grandezas positivas relacionadas (por exemplo: comprimentos, áreas, volumes, medidas de ângulos, massa, etc), então y é *diretamente proporcional* a x. De fato, fazendo $k = f(1)$ temos $f(r) = kr$ para qualquer $r \in \mathbb{R}^+$, ou, em linguagem mais familiar, $f(x) = kx$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$, o que significa $y = kx$. A constante k é chamada de *constante de proporcionalidade.*

2.4 Circunferências e Discos

Definições e Primeiros Resultados

Uma ***circunferência*** de ***centro*** C e ***raio*** $r > 0$ é definida como sendo o conjunto dos pontos do plano à distância r de C. Denotemos tal circunferência por $\mathcal{C}(C, r)$.

Pontos do plano à distância de C menor do que r são os ***pontos interiores*** à circunferência $\mathcal{C}(C, r)$.

Pontos do plano à distância de C maior do que r são os ***pontos exteriores*** à circunferência $\mathcal{C}(C, r)$.

Um segmento com extremos na circunferência $\mathcal{C}(C, r)$ é chamado de ***corda*** da mesma. Observemos que uma corda que passa por C tem sempre comprimento $2r$.

Chamamos de ***diâmetro*** de uma circunferência $\mathcal{C}(C, r)$ o comprimento $2r$ de qualquer corda que passe pelo centro C da mesma.

Duas circunferências são ditas ***congruentes*** quando possuírem o mesmo raio.

A reunião de uma circunferência $\mathcal{C}(C, r)$ com seus pontos interiores é chamada de ***disco*** de centro C e raio r e denotado por $\mathcal{D}(C, r)$. ([11])

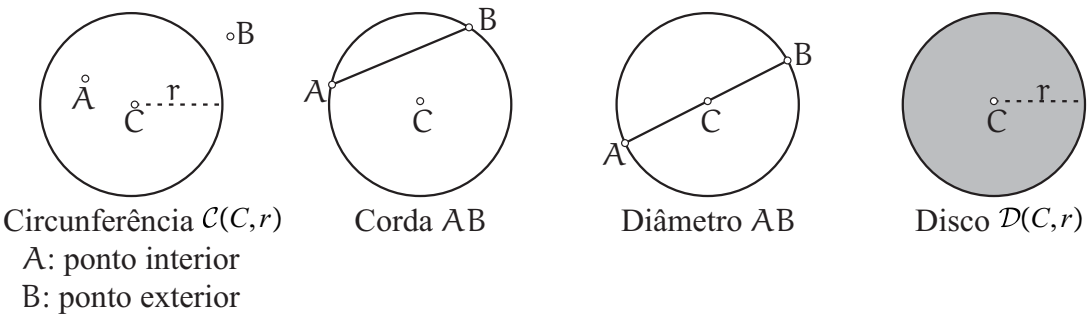


FIGURA 82: *Circunferências e discos.*

Observações.
(1) É também comum chamar de *diâmetro* de $\mathcal{C}(C, r)$ uma corda qualquer que passe pelo centro de $\mathcal{C}(C, r)$. O contexto estará sempre claro quando nos referimos a diâmetro como número ou como segmento.

[11] Às vezes é conveniente distinguir entre *disco aberto* e *disco fechado.* A definição que demos é de disco fechado (pois contém a circunferência que o originou). Um disco aberto de centro C e raio r é constituído apenas pelos pontos interiores a $\mathcal{C}(C, r)$.

(2) Assim como no caso do diâmetro, a palavra *raio* também pode ser utilizada com dois sentidos: um deles como número (conforme definimos acima) e outro como segmento que liga o centro C a um ponto qualquer de $\mathcal{C}(C, r)$. Mais uma vez, o contexto sempre estará claro.
(3) Alguns textos trazem a palavra ***círculo*** como sinônimo de circunferência ou então de disco. Não há consenso a esse respeito. Quando se fala, por exemplo, em *área de um círculo*, estamos pensando no disco. Quando se fala, por exemplo, em *arco de círculo*, estamos pensando na circunferência.

Uma reta é dita ***tangente*** a uma circunferência (ou disco) quando intersectar a circunferência em apenas um ponto, chamado de ***ponto de tangência***. Nas condições dessa definição, também dizemos que a circunferência é tangente à reta, ou então, que a reta e a circunferência são tangentes.

Uma reta é dita ***secante*** a uma circunferência quando intersectá-la em mais de um ponto.

Reta tangente à circunferência Reta secante à circunferência

FIGURA 83: *Duas posições relativas entre reta e circunferência no plano.*

Exercícios. (1) Mostre que existem retas e circunferências tangentes.
(2) Mostre que existe reta secante à circunferência.

Teorema 2.14 *Sejam* s *uma reta e* $\mathcal{C}(C, r)$ *circunferência de centro* C *e raio* r*, ambos em um mesmo plano. Seja* $P = \text{proj}_s C$*. Nessas condições:*
(1) *Se* $CP > r$*, então os pontos de* s *são exteriores à* $\mathcal{C}(C, r)$*.*
(2) *Se* $CP = r$*, então* P *é ponto de tangência entre* s *e* $\mathcal{C}(C, r)$*.*
(3) *Se* $CP < r$*, então* s *intersecta* $\mathcal{C}(C, r)$ *em exatamente dois pontos.*

Demonstração.
(1) Se $CP > r$ então P é um ponto exterior à circunferência $\mathcal{C}(C, r)$. Consideremos X um ponto qualquer da reta s distinto de P, como na figura abaixo à esquerda.

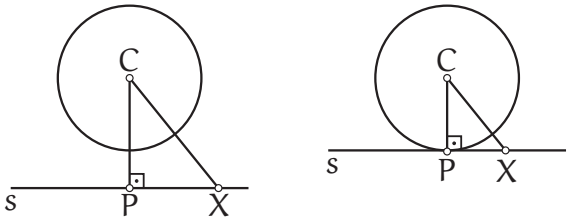


FIGURA 84: *Figura auxiliar.*

Então, pelo Teorema de Pitágoras, $CX^2 = (CP)^2 + (PX)^2$. Daí, $CX = \sqrt{(CP)^2 + (PX)^2} > CP > r$.

Logo, X também é um ponto exterior à $\mathcal{C}(C, r)$. Da arbitrariedade de X segue que todos os pontos de s são exteriores à $\mathcal{C}(C, r)$.

(2) Se $CP = r$ então P é um ponto da circunferência $\mathcal{C}(C, r)$.

De forma análoga ao caso anterior, consideremos X um ponto de s distinto de P, como na figura a cima à direita.

Novamente pelo Teorema de Pitágoras $CX > CP > r$ donde X é exterior à $\mathcal{C}(C, r)$.

Da arbitrariedade de X segue que P é o único ponto que pertence à s e $\mathcal{C}(C, r)$.

Portanto, s é tangente à $\mathcal{C}(C, r)$.

(3) Se $CP < r$ então P é um ponto interior à circunferência.

Consideremos primeiramente o caso em que P é distinto de C, como podemos ver na figura abaixo à esquerda.

Seja O e O' dois pontos distintos de s tais que a união das semirretas $\overrightarrow{PO}$ e $\overrightarrow{PO'}$ seja a reta s.

Pelo Axioma $A4$ existe um único ponto Q em $\overrightarrow{PO}$ tal que $PQ = \sqrt{r^2 - (CP)^2}$ (ou seja, $r^2 = (PQ)^2 + (CP)^2$).

Por outro lado, como o triângulo CPQ é retângulo em P então, pelo Teorema de Pitágoras, $CQ^2 = (CP)^2 + (PQ)^2$ donde $CQ = r$.

Logo, Q pertence à $\mathcal{C}(C, r)$.

Portanto, Q está em $\mathcal{C}(C, r)$ e em s.

De modo análogo, considerando agora a semirreta $\overrightarrow{PO'}$ existe um ponto S que está em s e em $\mathcal{C}(C, r)$. Pela bijetividade do axioma $A4$ temos o resultado.

Caso $P = C$ então, pelo axioma $A4$ existe e é único Q em $\overrightarrow{PO}$ tal que $PQ = r$, mas isso implica que Q pertence à $\mathcal{C}(C, r)$.

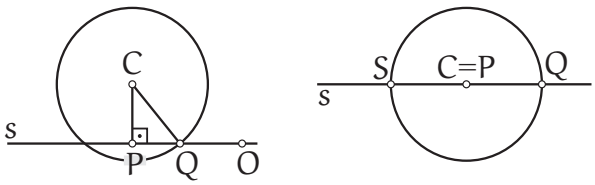


FIGURA 85: *Figura auxiliar.*

Analogamente, existe S em $\overrightarrow{PO'}$ tal que S está em $\mathcal{C}(C, r)$ e s. □

Notemos que, devido ao item (3) do teorema acima, uma reta secante a uma circunferência possui extamente dois pontos de intersecção com ela.

Exercício. Mostre que é consequência do teorema acima que uma reta é tangente a uma circunferência se, e somente se, essa reta é perpendicular ao raio da circunferência que liga seu centro ao ponto de tangência.

O teorema acima possui um análogo envolvendo duas circunferências com o seguinte enunciado: "*Sejam duas circunferências com raios* a *e* b *e distância* c *entre seus centros. Se* $|a - b| < c < a + b$*, então as duas circunferências intersectam-se em dois pontos, um de cada lado da reta que contém os centros.*". O leitor interessado poderá consultar a demonstração desse teorema na referência [13].

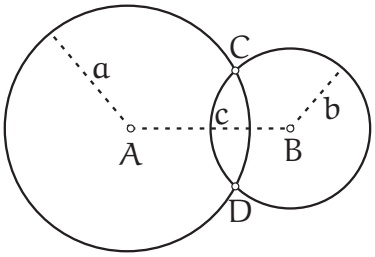


FIGURA 86: *Intesecção de duas circunferências.*

Arcos

Consideremos uma circunferência $\mathcal{C}(C, r)$ e uma reta r que passa pelo seu centro C. A intersecção de $\mathcal{C}(C, r)$ com cada um dos dois semiplanos determinados por r é chamada de ***semicircunferência*** de centro C e raio r. Definimos a ***medida de uma semicircunferência*** com sendo a medida de um ângulo raso.

Consideremos uma circunferência $\mathcal{C}(C, r)$ e um setor angular com vértice em C:

(1) A intersecção de $\mathcal{C}(C, r)$ com o setor angular é chamado de ***arco menor de circunferência*** de centro C e raio r. Chamando de A e B a intersecção de $\mathcal{C}(C, r)$ com os lados do setor angular e sendo X um ponto qualquer do arco menor, distinto de A e B, iremos indicar o arco menor de circunferência por $\overset{\frown}{AXB}$. A ***medida do arco menor*** de circunferência é a medida do setor angular que o define.

(2) A intersecção de $\mathcal{C}(C, r)$ com a região exterior ao setor angular que define $\overset{\frown}{AXB}$ reunido com os pontos A e B é chamado de ***arco maior de circunferência*** de centro C e raio r. Sendo Y um ponto qualquer do arco maior, distinto de A e B, iremos indicar o arco maior de circunferência por $\overset{\frown}{AYB}$. A ***medida do arco maior*** de circunferência é a soma das medidas de dois ângulos rasos menos a medida do setor angular que define o arco menor (em graus: $360°-$ medida em graus de $\overset{\frown}{AXB}$).

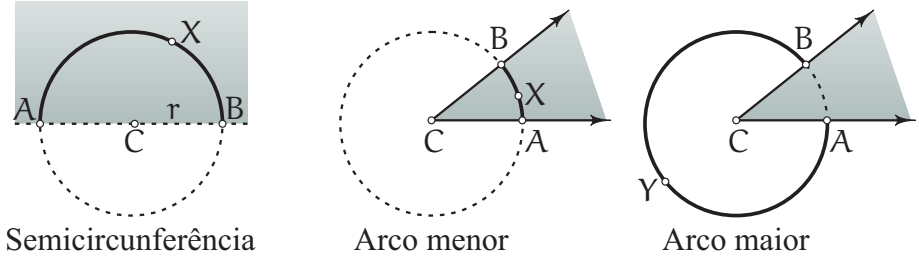


FIGURA 87: *Arcos de circunferências.*

Sejam uma circunferência $\mathcal{C}(C, r)$ e um setor angular BAD, de vértice A, tal que B, A e D são pontos de $\mathcal{C}(C, r)$. Chamamos a intersecção do setor BAD (sem o vértice A) com a circunferência $\mathcal{C}(C, r)$ de ***arco de circunferência correspondente*** ao setor angular BAD. Observemos que os extremos desse arco são os pontos B e D. Também dizemos (com um certo abuso de linguagem) que, na situação descrita, o setor angular BAD está ***inscrito*** na circunferência $\mathcal{C}(C, r)$.

A definição acima pode ser estendida de modo a contemplar o caso em que a reta que contém um dos lados do setor angular é tangente à circunferência. Também continuamos a dizer, nessa situação, que o setor angular está inscrito na circunferência.

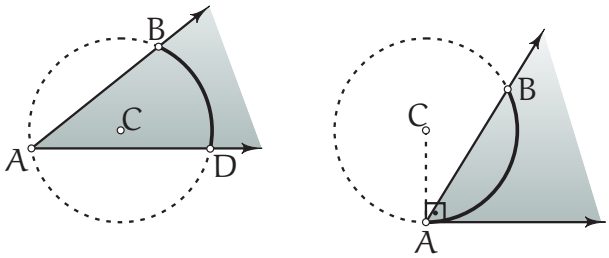


FIGURA 88: *Arcos de circunferências.*

Observemos que um arco de circunferência correspondente a um setor angular pode ser um arco menor de circunferência, um arco maior de circunferência ou uma semicircunferência.

Teorema 2.15 *A medida de um arco de circunferência correspondente a um setor angular nela inscrito é igual ao dobro da medida do setor angular.*

Demonstração.

Seja BAD o setor angular de vértice A inscrito na circunferência de tal forma que B e D sejam pontos da circunferência. Seja $\overset{\frown}{BXD}$ o arco menor de circunferência determinado por BAD.

Queremos mostrar que $2D\widehat{A}B = \overset{\frown}{BXD}$.

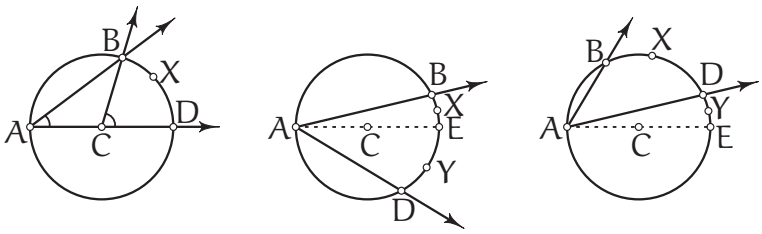


FIGURA 89: *Figura auxiliar.*

Suponhamos que um lado do ângulo $\widehat{A}$ contenha um diâmetro AD da circunferência $\mathcal{C}(C, r)$, conforme figura acima à esquerda.

Então, como $A\widehat{C}D$ é um ângulo raso temos que $D\widehat{C}B + B\widehat{C}A = 180^o$. Além disso, pelo Teorema 2.3, $C\widehat{A}B + A\widehat{B}C + B\widehat{C}A = 180^o$.

Daí, $D\widehat{C}B = C\widehat{A}B + A\widehat{B}C = 2C\widehat{A}B$. Como $AC = BC = r$ então o triângulo ABC é isósceles, donde $C\widehat{A}B = A\widehat{B}C$. Logo, $2D\widehat{A}B = 2C\widehat{A}B = D\widehat{C}B = \overset{\frown}{BXD}$.

Suponhamos agora que B e D estejam em lados distintos do diâmetro AE conforme figura acima ao meio.

Então $D\widehat{A}B = B\widehat{A}E + E\widehat{A}D$. Logo, pelo caso anterior, $2D\widehat{A}B = 2B\widehat{A}E + 2E\widehat{A}D = \overset{\frown}{BXE} + \overset{\frown}{EYD} = \overset{\frown}{BXD}$.

Caso B e D estejam do mesmo lado do diâmetro AE, conforme figura acima à direita então $D\widehat{A}B = B\widehat{A}E - E\widehat{A}D$. Logo, pelo primeiro caso, $2D\widehat{A}B = 2B\widehat{A}E - 2E\widehat{A}D = \overset{\frown}{BXE} - \overset{\frown}{EYD} = \overset{\frown}{BXD}$. □

Fixado um arco de circunferência (menor, maior ou semicircunferência), dizemos que todos os setores angulares correspondentes a esse arco estão ***inscritos*** no arco (mais uma vez estamos abusando da linguagem).

Assim, pelo teorema acima, todos os setores angulares inscritos em um determinado arco de circunferência possuem a mesma medida. Em particular, os setores angulares inscritos em uma semicircunferência são todos retos.

Teorema 2.16 *Sejam uma circunferencia $\mathcal{C}$ e um ponto P exterior a $\mathcal{C}$. Seja r reta que passa por P e é secante a $\mathcal{C}$ em A e B.*

(1) *Seja s reta que passa por P e é secante a $\mathcal{C}$ nos pontos C e D. Então,* $PA.PB = PC.PD$.

(2) *Seja t uma reta que passa por P e é tangente a $\mathcal{C}$ em T. Então,* $PT^2 = PA.PB$.

Demonstração.

(1) Consideremos os triângulos BPC e DAP. Então, o ângulo P é comum aos dois triângulos e, além disso, $C\widehat{B}P$ e $A\widehat{D}P$ são congruentes pois correspondem ao mesmo arco de circunferência $\overset{\frown}{AC}$, conforme figura abaixo à esquerda.

Logo, pelo caso AA de semelhança temos que os triângulos BPC e DAP são semelhantes. Logo, existe $k > 0$ tal que $PA = k.PC$ e $PD = k.PB$, donde $PA.PB = PC.PD$.

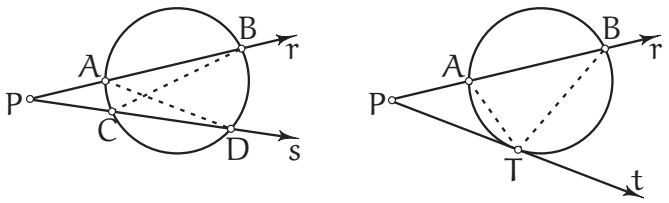


FIGURA 90: *Figura auxiliar.*

(2) Consideremos os triângulos PBT e PAT. Observemos na figura acima à direita que o ângulo P é comum aos dois triângulos e os ângulos $A\widehat{T}P$ e $P\widehat{B}T$ correspondem aos mesmo arco AT .

Novamente pelo caso AA de semelhança temos que existe $k > 0$ tal que $PA = kPT$ e $PT = kPB$, donde $(PT)^2 = PA.PB$. □

No teorema acima, o número $p = PT^2 = PA.PB$ fica univocamente determinado pelo ponto P e pela circunferência $\mathcal{C}$, independente dos pontos A e B. Tal número é chamado de ***potência*** do ponto P em relação à circunferência $\mathcal{C}$.

Pontos Notáveis de um Triângulo

Já mostramos que as medianas de um triângulo se encontram em um único ponto (chamado de baricentro do triângulo). Vamos mostrar que as mediatrizes, as bissetrizes e as alturas de um triângulo também possuem propriedade análoga.

Teorema 2.17 *As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes em um único ponto.*

Demonstração.

Consideremos um triângulo qualquer ABC.

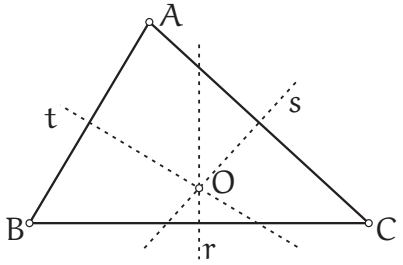


FIGURA 91: *Figura auxiliar.*

Sejam r, s e t as mediatrizes dos lados BC, AC e AB, respectivamente. Seja O o (único) ponto de interseção entre as retas r e s.

O ponto O existe (e é único) pois se r e s fossem paralelas então também seriam paralelas as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ e, daí, ABC não seria um triângulo.

Pelo Teorema 1.12 temos que, do fato de r ser mediatriz de BC, então $OC = OB$. Analogamente, $OA = OC$.

Dessa forma, $OA = OB$ e, novamente pelo Teorema 1.12 o ponto O está na mediatriz de AB, ou seja, O pertence às três mediatrizes e $OA = OB = OC$. □

O encontro das mediatrizes enunciado no teorema acima recebe o nome de ***circuncentro*** do triângulo.

Decorre do teorema acima que existe uma <u>única</u> circunferência com centro no circuncentro do triângulo e que passa por todos os três vértices do triângulo. Tal circunferência é chamada de circunferência ***circunscrita*** ao triângulo.

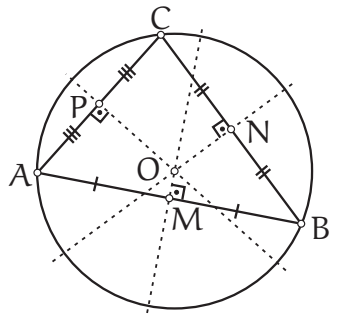


FIGURA 92: *Circuncentro.*

Exercício. Utilizando a unicidade da circunferência circunscrita a um triângulo, mostre que duas circunferências distintas intersectam-se em, no máximo, dois pontos.

Teorema 2.18 *As alturas relativas aos vértices de um triângulo são concorrentes em um único ponto.* ([12])

Demonstração.

Seja ABC um triângulo e AH a altura relativa ao lado BC do triângulo.

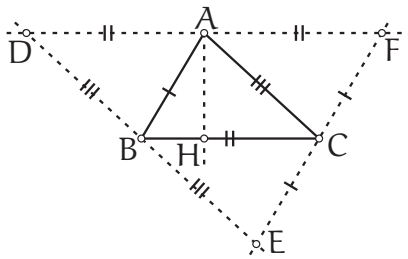


FIGURA 93: *Figura auxiliar.*

Tracemos por cada vértice do triângulo ABC uma reta paralela ao lado oposto. Estas três retas determinam um triângulo DEF como na figura acima.

Dessa construção AF e BC são paralelos assim como AB e CF, e daí, $ABCF$ é um paralelogramo. Logo, $AF = BC$ e $AB = FC$.

[12]Neste enunciado, estamos considerando as retas que contém as alturas do triângulo. Essas retas se encontram em um único ponto o qual pode não estar sobre altura (segmento) alguma do triângulo.

A construção também nos permite concluir que AC e BD são paralelas assim como AD e BC, donde $ACBD$ é um paralelogramo. Logo, $AD = BC$ e $BD = AC$.

Assim, $DF = DA + AF = 2DA$, ou seja, A é ponto médio de DF.

Além disso, como BC e DF são paralelos e AH é perpendicular à BC então AH é perpendicular à DF. Logo, AH é a mediatriz do lado DF.

De forma análoga podemos concluir que as alturas relativas aos outros lados são as outras mediatrizes do triângulo DEF.

Pelo teorema anterior, essas mediatrizes se encontram num único ponto. Portanto, as alturas se encontram num único ponto. □

O ponto de encontro das alturas de um triângulo recebe o nome de ***ortocentro*** do triângulo.

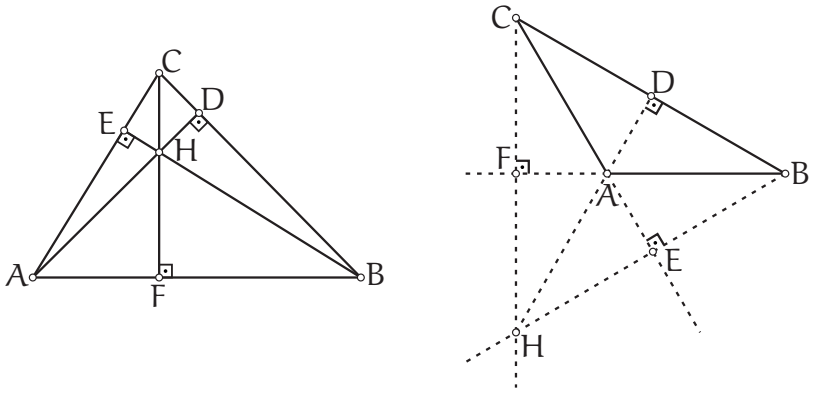


FIGURA 94: *Ortocentro*

Lema 2.2 *A bissetriz de um ângulo, exceto sua origem, é o conjunto dos pontos do interior do ângulo equidistantes dos lados do ângulo.*

Demonstração.

Considere a figura abaixo.

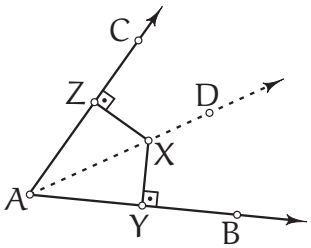


FIGURA 95: *Figura auxiliar.*

Seja $B\widehat{A}C$ um ângulo e $\overrightarrow{AD}$ sua bissetriz. Mostremos que os pontos de $\overrightarrow{AD}$ equidistam de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Seja X um ponto de $\overrightarrow{AD}$. Seja $Y = \text{proj}_{\overrightarrow{AB}} X$ e $Z = \text{proj}_{\overrightarrow{AC}} X$.

Então $AX = AX$, $X\widehat{A}Z = X\widehat{A}Y$ (pelo fato de AD ser bissetriz) e $A\widehat{Z}X = A\widehat{Y}X$ (pelo fato da projeção ser ortogonal). Logo, pelo caso de congruência LAA_0 os triângulos AXZ e AXY são congruentes.

Logo, $XY = XZ$, ou seja, os pontos de $\overrightarrow{AD}$ equidistam de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Seja agora a semirreta $\overrightarrow{AD}$ cujos pontos equidistam de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Mostremos que $\overrightarrow{AD}$ é a bissetriz de $B\widehat{A}C$.

De fato: seja X um ponto de $\overrightarrow{AD}$ e $Y = \text{proj}_{\overrightarrow{AB}} X$ e $Z = \text{proj}_{\overrightarrow{AC}} X$. Como X equidista de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ então $XY = XZ$. Além disso, $XA = XA$.

Logo, os triângulos AXZ e AXY são congruentes pelo caso cateto-hipotenusa. Daí, $X\widehat{A}Z = X\widehat{A}Y$, ou seja, $\overrightarrow{AD}$ é a bissetriz de $B\widehat{A}C$. □

Teorema 2.19 *As bissetrizes relativas aos vértices de um triângulo são concorrentes em um único ponto. Tal ponto é equidistante dos lados do triângulo.*

Demonstração.
Considere a figura abaixo.

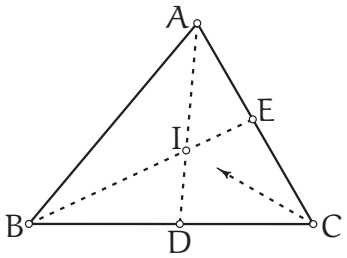


FIGURA 96: *Figura auxiliar.*

Seja I a interseção das bissetrizes $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BE}$. Pelo Lema anterior, como $\overrightarrow{AD}$ é bissetriz de $B\widehat{A}C$ então I equidista de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

E, como $\overrightarrow{BE}$ é bissetriz de $A\widehat{B}C$ então I equidista de $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$. Logo, I equidista de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ donde, pelo Lema anterior, I pertence à bissetriz de $A\widehat{C}B$.

Logo, o ponto I é comum às três bissetrizes e equidista dos lados do triângulo. □

O ponto de encontro das bissetrizes de um triângulo é chamado de ***incentro*** do triângulo.

Decorre do teorema acima que existe uma única circunferência com centro no incentro do triângulo e que tangencia os três lados do triângulo. Tal circunferência é chamada de circunferência ***inscrita*** ao triângulo.

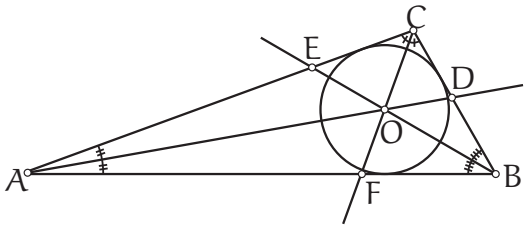


FIGURA 97: *Incentro.*

Dado um triângulo, seu baricentro, circuncentro, ortocentro e incentro são chamados de ***pontos notáveis*** do triângulo.

A Reta de Euler e a Circunferência dos Nove Pontos

Há um teorema muito interessante, devido a Leonhard Euler $(1707 - 1783)$, envolvendo três dos quatro pontos notáveis de um triâgulo com o seguinte enunciado: "*Em um triângulo, o circuncentro, o baricentro e o ortocentro são colineares. Além disso, o baricentro divide o segmento que liga o circuncentro ao ortocentro na razão* 1 *para* 2.". A reta que passa pelo circuncentro, baricentro e ortocentro de um triângulo recebe o nome de *reta de Euler*.

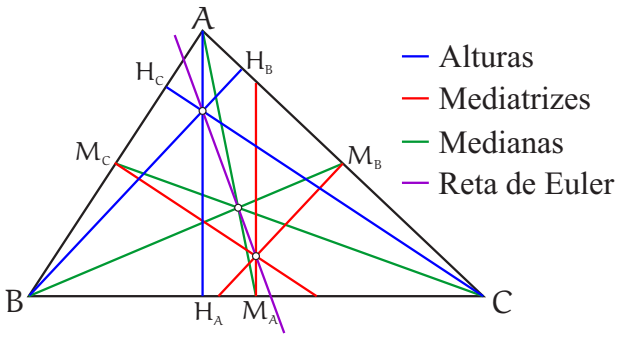


FIGURA 98: *Reta de Euler.*

Outro teorema bastante curioso envolvendo o ortocentro é o resultado que estabelece a chamada "*circunferência de nove pontos*". Essa circunferência foi descoberta por Charles Brianchon ($1783-1864$) e Jean Poncelet ($1788-1867$), mas foi Karl Feuerbach (1800-1834) quem fez um estudo bastante completo a seu respeito (e com apenas 22 anos de idade!). O enunciado é o seguinte: "*A circunferência que passa pelos três pés das alturas de um triângulo, também passa pelos três pontos médios dos lados e pelos três pontos médios dos segmentos que ligam o ortocentro desse triângulo aos seus vértices.*". É possível mostrar que o centro da circunferência de nove pontos está sobre a reta de Euler e é o ponto médio do segmento que liga o circuncentro ao ortocentro do triângulo. Talvez por esse motivo, a circunferência de nove pontos seja conhecida (indevidamente) pelo nome de *circunferência de Euler-Feuerbach.*

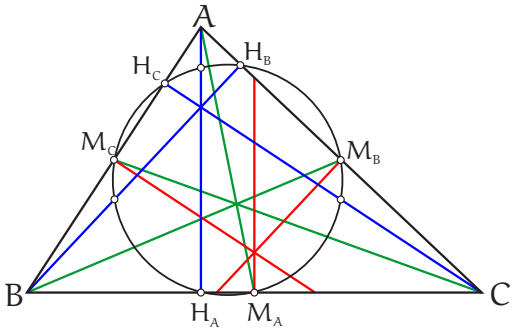


FIGURA 99: *Circunferência de nove pontos.*

As demonstrações dos dois resultados citados acima podem ser encontradas na referência [13].

Ainda sobre o ortocentro, mais um resultado peculiar cuja demonstração deixamos para o leitor mais persistente: "*O lugar geométrico dos ortocentros dos triângulos* ABC *que possuem o lado* BC *fixado e a altura relativa ao vértice* A *constante é uma parábola.*".

(obs.: não vamos definir as curvas cônicas neste texto, portanto, deixamos para o leitor a pesquisa sobre a definição e propriedades da parábola)

Inscrição e Circunscrição de Polígonos Regulares em Circunferência

Um polígono regular está ***inscrito*** em uma circunferência quando todos os seus vértices são pontos da circunferência. Também dizemos, nesta situação, que a circunferência está circunscrita ao polígono.

Um polígono regular está ***circunscrito*** a uma circunferência quando todos os seus lados tangenciam a circunferência. Também dizemos, nesta situação, que circunferência está inscrita ao polígono.

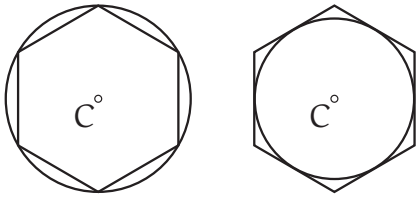


FIGURA 100: *Polígono inscrito e circunscrito à circunferência.*

Teorema 2.20 *Dada uma circunferência, sempre é possível nela inscrever ou circunscrever um polígono regular com qualquer número de lados.*

O teorema acima, embora intuitivamente bastante óbvio, servirá de fundamento para estabelecer o comprimento de uma circunferência. Além disso, seguindo a tradição grega da construção com régua e compasso, dependendo do número de lados, nem sempre é possível fazer uma construção exata de inscrição ou circunscrição de polígonos regulares em uma circunferência.

Comprimentos de Circunferências e de Arcos de Circunferências

Por meio dos axiomas que introduzimos no início deste texto, estabelecemos a noção de comprimento de um segmento de reta e, consequentemente, sabemos como conceituar a distância entre dois objetos no plano. Entretanto, não sabemos como calcular comprimentos de *curvas* quaisquer no plano ([13]). De fato, o estabelecimento de tal noção foge aos propósitos dessas notas (envolve integrais). Além de retas e segmentos, circunferências e seus arcos são as únicas curvas que consideramos neste texto, logo, será interessante que trabalhemos a noção de comprimento de pelo menos esses tipos de curvas.

Intuitivamente, o comprimento de uma circunferência poderia ser estabelecido se pudéssemos, de alguma forma, "retificá-la" em um segmento. Na prática, seria como se a circunferência fosse uma linha que pudesse ser cortada em um ponto e estendida sobre um segmento. Como sabemos medir comprimento de segmentos, poderíamos medir o comprimento da circunferência por esse método.

A ideia de retificação de curvas já existia na época da Grécia antiga mas, seguindo a mais pura tradição grega de construção com régua e compasso, a retificação da circunferência é impossível de ser feita com exatidão (devido ao fato de que o número π, razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, não ser *construtível* com régua e compasso).

O problema pode ser contornado com o teorema de inscrição e circunscrição de polígonos regulares em circunferências. Sabemos calcular a soma dos comprimentos dos lados de um polígono regular (isto é, seu perímetro). Logo, inscrevendo-se polígonos regulares com número de lados cada vez maior em uma circunferência, podemos aproximar (por falta) o comprimento da circunferência pelos perímetros desses polígonos. A aproximação será tanto melhor quanto maior for o número de lados desses polígonos inscritos. Naturalmente, o mesmo raciocínio se aplica para o caso dos polígonos circunscritos a uma circunferência sendo que, neste caso, a aproximação é por excesso.

[13] Foge aos objetivos desse texto a definição formal de "curva plana". O leitor interessado poderá consultar um texto de Análise ou Geometria Diferencial sobre esse assunto.

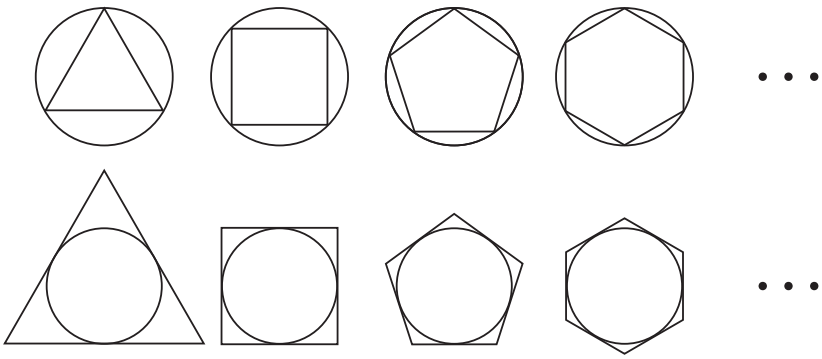


FIGURA 101: *Aproximando a circunferência por polígonos regulares inscritos e circunscritos.*

Com as considerações acima, vamos *definir* o comprimento de uma circunferência dada como sendo o número c tal que para qualquer $\varepsilon > 0$, existem um polígono regular com perímetro p_1 inscrito na circunferência e um polígono regular com perímetro p_2 circunscrito a circunferência, de tal modo que

$$c - \varepsilon < p_1 < c < p_2 < c + \varepsilon.$$

Embora seja muito intuitiva, a existência (e unicidade) do número real c deve ser provada. Isso é feito, geralmente, em um curso de Análise 1. Prova-se, também, que c é proporcional ao raio r da circunferência, ou seja, $c = kr$. Metade dessa constante real k é usualmente indicada pela letra grega π. Desta forma,

$$c = 2\pi r$$

e, sendo $2r$ o diâmetro da circunferência de raio r, chegamos à afirmação feita acima, de que π é a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro.

Este resultado merece ser colocado sob forma de teorema.

Teorema 2.21 *O comprimento de uma circunferência de raio* r *é dado por* $2\pi r$.

É claro que a natureza do número π suscita estudos mais avançados. É possível provar que π é um número *irracional*, portanto, não pode ser expresso por meio de uma razão entre dois número inteiros. Mais do que isso, π é um número *transcendente*, ou seja, não pode ser solução de equação polinomial com coeficientes inteiros (tais soluções são chamadas de números algébricos). O leitor interessado neste assunto pode consultar a referência [4].

É certo que em diversas situações práticas precisamos de uma aproximação para o número π. Esta aproximação pode ser feita facilmente por meio dos cálculos dos perímetros de polígonos regulares com 2^n lados inscritos na circunferência de raio r. Deixamos essas contas como exercício.

Exercício. Mostre que o perímetro p_{2^n} de um polígono regular com 2^n lados, $n \geq 2$, inscrito em uma circunferência de raio r é dado por

$$p_{2^n} = 2^n r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}},$$

sendo que a expressão acima é formada por $n-1$ radicais (ou, equivalentemente, $n-1$ números 2).

O exercício acima permite que construamos a seguinte tabela:

n	p_{2^n}	p_{2^n} (aprox.)
2	$4r\sqrt{2}$	$5,656854248r$
3	$8r\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$6,122934920r$
4	$16r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$6,242890306r$
5	$32r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$	$6,273096966r$
6	$64r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$	$6,280662426r$
7	$128r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$	$6,282555037r$
8	$256r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}$	$6,283029650r$
9	$512r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}$	$6,283139169r$

que fornece a aproximação de $3,141565$ para o número π.

O comprimento de um arco de circunferência pode ser calculado de modo diretamente proporcional ao ângulo que esse arco determina utilizando o *Teorema Fundamental da Proporcionalidade*, relacionando as grandezas comprimento de arco e medida de ângulo.

Antes, porém, de desenvolvermos o procedimento para cálculo do comprimento de arco de circunferência, vamos definir a medida de unidade radiano, que utiliza o conceito de comprimento de arco.

Seja um ângulo $B\widehat{A}C$ de tal modo que B e C estejam em uma circunferência de centro A e raio $r = AB = AC$. A medida do ângulo $B\widehat{A}C$ em ***radianos*** é definida como sendo a razão $\frac{B\overset{\frown}{X}C}{r}$, onde X é um ponto da cirucunferência no interior do ângulo $B\widehat{A}C$ e $B\overset{\frown}{X}C$ é o comprimento do arco de extremos B e C que contém X. ([14])

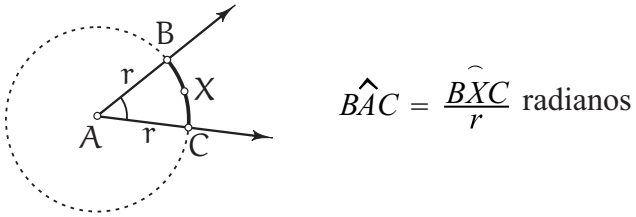


FIGURA 102: *Medindo ângulos em radianos.*

[14]Como já feito várias vezes neste texto: estamos considerando a notação $B\overset{\frown}{X}C$ com dois sentidos, conjunto de pontos (arco) e número real (medida do arco).

Veremos abaixo que a definição de radiano acima independe do raio r da circunferência, o que permite, também, estendê-la para arcos de circunferência (inclusive *arcos maiores* de circunferência).

Podemos estender a definição de medida de ângulo em radianos para ângulo de um arco de circunferência $B\overset{\frown}{X}C$ de centro A e extremos B e C, com X sobre a circunferência, mas não necessariamente no interior do ângulo $B\widehat{A}C$, ou seja, a medida do ângulo do arco de circunferência $B\overset{\frown}{X}C$ em radianos continua sendo a razão $\frac{B\overset{\frown}{X}C}{r}$.

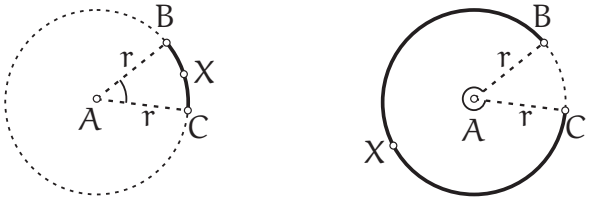


FIGURA 103: *Medindo arcos em radianos.*

Naturalmente, a medida do ângulo do arco de circunferência $B\overset{\frown}{X}C$ também pode ser em graus.

Consideremos uma função f que associa os ângulos de medida θ dos arcos de circunferência de raio r (fixo) aos seus comprimentos, ou seja, $c_\theta = f(\theta)$ é o comprimento do arco de circunferência de raio r e ângulo de medida θ.

A função f é, obviamente crescente (decorre dos axiomas de medidas de ângulos) e, além disso, se duplicarmos o ângulo do arco, o comprimento duplica. Se triplicarmos o ângulo do arco, o comprimento triplica, e assim por diante. Logo, estamos nas hipóteses do *Teorema Fundamental da Proporcionalidade*. Isso significa que a medida do ângulo de um arco de circunferência é diretamente proporcional ao seu comprimento. Assim, $c_\theta = f(\theta) = k\theta$, sendo $k = f(1)$ o comprimento do arco de circunferência de ângulo de medida 1. Se adotarmos a unidade de medida radianos, o comprimento do arco de circunferência de raio r de ângulo medindo 1 radiano é $\frac{2\pi r}{2\pi} = r$.

Assim

$$c_\theta = r\theta$$

é o comprimento de um arco de circunferência de raio r e ângulo de medida θ radianos.

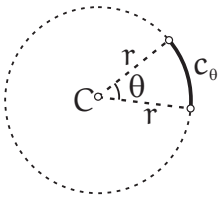


FIGURA 104: *Comprimento de arco.*

Se utilizarmos a unidade de medida graus temos $k = f(1) = \frac{2\pi r}{360^\circ}$, ou seja, $c_\theta = \frac{2\pi r}{360^\circ}\theta$ sendo θ dado em graus.

O racicínio desenvolvido acima pode ser colocado em um dispositivo prático bastante interessante, conhecido como "regra de três":

	Ângulo (rad)		Comprimento de Arco	
$\uparrow$	2π	——	$2\pi r$	$\uparrow$
	θ	——	c_θ	

$$\Longrightarrow 2\pi c_\theta = \theta 2\pi r \Rightarrow c_\theta = r\theta.$$

2.5 O Conceito de Área

O Retângulo

Desejamos fazer o estudo do conceito de área de um polígono e, de modo mais geral, o conceito de área de uma "*região*" no plano.

Para tanto, vamos destacar um tipo de polígono especial, que é o retângulo. Um lado qualquer do retângulo pode ser escolhido e chamado de ***base*** e a distância entre as retas paralelas que contém a base e o lado oposto a ela é chamada de ***altura*** do retângulo.

Quando os lados de um retângulo medem a e b, ele é chamado de *retângulo de dimensões* a *e* b.

Um segmento que liga dois vértices de um retângulo e que não está contido em qualquer de seus lados é chamado de **diagonal** desse retângulo. Observemos que um retângulo possui exatamente duas diagonais e elas são congruentes.

Por fim, já vimos que um retângulo cujos lados são congruentes é chamado de *quadrado*, portanto, um polígono regular.

Para dar prosseguimento ao nosso estudo, precisamos do conceito de "congruência" entre duas regiões no plano. Este, por sua vez, foi introduzido em seção passada a partir do conceito muito útil em geometria, que é o conceito de *semelhança* entre duas regiões no plano.

Área de Retângulo

Medir uma grandeza significa compará-la com uma outra de mesma natureza que corresponde a *uma unidade*.

Intuitivamente, a *área de um polígono*, por exemplo, é um número (resultante da comparação acima) associado à região do plano ocupada pelo interior desse polígono.

Na Geometria Euclidiana Plana, definimos que **uma unidade de área** corresponde à região do plano ocupada por um quadrado de lados unitários, chamado de *quadrado unitário*.

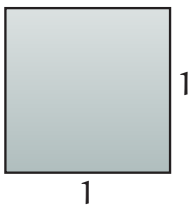


FIGURA 105: *Quadrado unitário.*

Sendo assim, medir a área de um polígono significa, de forma intuitiva, "verificar *quantas vezes* o quadrado unitário cabe dentro desse polígono". De forma mais precisa, o conceito de área de um polígono é definido de modo a satisfazer:

(i) Polígonos $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ congruentes possuem a mesma área, ou seja, $A(\mathcal{F}) = A(\mathcal{G})$.

(ii) Polígonos $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ cuja intersecção de seus <u>interiores</u> é vazia são tais que $A(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = A(\mathcal{F}) + A(\mathcal{G})$.

Naturalmente, estabelecer o "tamanho" de uma unidade de comprimento é algo totalmente arbitrário. Por exemplo, se o comprimento 1 dos lados do quadrado unitário for

convencionado como sendo 1 *metro* ($1\ m$), então dizemos que a área do quadrado unitário é 1 *metro quadrado* ($1\ m^2$).

Com o estabelecimento da unidade de área e das condições acima podemos deduzir a área de um retângulo. Esta, por sua vez, será útil na conceituação precisa de área de uma região que faremos adiante.

Teorema 2.22 *A área de um retângulo de dimensões* a *e* b *é* $A = ab$*, ou seja, produto do comprimento da base por sua altura.*

Demonstração.

Para fixar as notações, tomemos a como sendo a variável positiva comprimento (uma grandeza) da base, e b a altura do retângulo.

A variável positiva área (outra grandeza) do retângulo depende de a e b, ou seja, $A = A(a, b)$.

Observemos que, se fixarmos b, a variável área A fica em função da variável comprimento a, ou seja, $f(a) = A(a, b)$, ou, em linguagem mais familiar, $f(x) = A(x, b)$.

Naturalmente, devido à condição (ii) acima, f é crescente, pois, com altura fixada, se aumentarmos (ou diminuirmos) o comprimento da base do retângulo, então sua área também aumenta (ou diminui).

Além disso, devido à condição (i) acima, com altura fixada, se duplicarmos o comprimento da base, a área duplica. Se triplicarmos o comprimento da base, a área triplica, e assim, por diante.

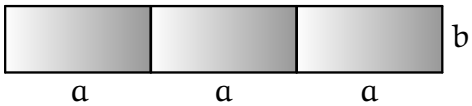


FIGURA 106: *Aplicando o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.*

Desta forma, temos $A(nx, b) = nA(x, b)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $f(nx) = nf(x)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, temos que $f(rx) = rf(x)$ para qualquer $r \in \mathbb{R}^+$, ou seja,

$$A(rx, b) = rA(x, b) \text{ para qualquer } r \in \mathbb{R}^+.$$

Naturamente, raciocínio análogo pode ser desenvolvido para a variável altura, ou seja,

$$A(a, ry) = rA(a, y) \text{ para qualquer } r \in \mathbb{R}^+.$$

Com as considerações acima:

$$A = A(a, b) = A(a, b.1) = bA(a, 1) = bA(a.1, 1) = abA(1, 1).$$

Mas $A(1, 1)$ é a área do retângulo unitário que, por definição, é 1.

Conclusão:

$$A = ab,$$

como queríamos. □

É importante observar que, se as dimensões de um retângulo a e b forem números naturais ou mesmo racionais positivos, não é necessário o uso do Teorema Fundamental da Proporcionalidade para demonstrar que $A = ab$.

Exercício. Demonstre que a área do retângulo de dimensões racionais positivas a e b é $A = ab$ sem usar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Como um retângulo de dimensões a e b pode ser dividido em dois triângulos retângulos congruentes com catetos medindo a e b, temos como consequência imediata do teorema acima que a área A_{tr} de um tal triângulo é dada pela metade do produto do comprimento de sua base por sua altura, ou seja, $A_{tr} = \frac{ab}{2}$.

O Conceito Geral de Área

Vamos definir um polígono especial, chamado de ***polígono retangular***, que nada mais é do que o polígono proveniente de uma reunião finita de retangulos justapostos pelos lados. Essa justaposição de retângulos é feita de tal modo que existem duas retas perpendiculares tais que qualquer lado do polígono retangular é paralelo a uma dessas duas retas ([15]).

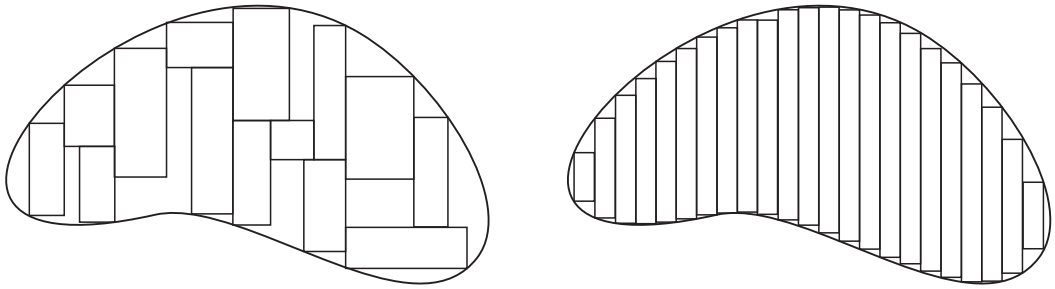


FIGURA 107: *Aproximando figuras por polígonos retangulares.*

A *área de um polígono retangular* é, devido à condição (ii), a soma das áreas dos retângulos que o constituem.

Como pretendemos conceituar área para objetos mais gerais do que polígonos, vamos utilizar a palavra "região" para objetos no plano que sejam passíveis de terem a área não nula univocamente estabelecida conforme definição abaixo.

Sejam $\mathcal{R}$ conjunto limitado de pontos no plano ([16]) e $A(\mathcal{R})$ número real tal que:

Dados $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ quaisquer com $r_1 < A(\mathcal{R}) < r_2$, existem polígonos retangulares $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{P}_2$ cujas áreas $A(\mathcal{P}_1)$ e $A(\mathcal{P}_2)$ satisfazem $r_1 < A(\mathcal{P}_1) \leq A(\mathcal{R}) \leq A(\mathcal{P}_2) < r_2$.

O número real $A(\mathcal{R})$ é definido como o ***área*** de $\mathcal{R}$.

Conjuntos $\mathcal{R}$ que possuem áreas não nulas definidas conforme acima são chamados de ***regiões***.

Em palavras mais simples, a área de uma região $\mathcal{R}$ é o número real $A(\mathcal{R})$ cujas aproximações por falta são áreas de polígonos retangulares contidos na região e cujas aproximações por excesso são as áreas de polígonos retangulares que contêm a região.

Em cursos mais avançados (de Análise Real ou Teoria da Medida) é possível mostrar que existem conjuntos limitados de pontos no plano que não possuem a área estabelecida

[15] Para que respeitemos a definição de polígono as intersecções dos lados dos retângulos que compõem um polígono retangular não são considerados como lados do mesmo.

[16] Conjunto limitado de pontos no plano significa que o existe um retângulo que o contém.

conforme a definição que demos acima. Além disso, é possível mostrar que a área de um conjunto limitado de pontos no plano (quando existe) é única.

Os leitores que possuem familiaridade com integrais de funções reais de uma variável real (integrais simples) devem se recordar que a área da região plana delimitada pelo eixo das abscissas, pelo gráfico de uma função positiva e limitada e por duas retas paralelas ao eixo das ordenadas é feita via o limite de uma *Soma de Riemann*, que está relacionada com um polígono retangular especial, obtido pela justaposição de vários retângulos todos com bases sobre o eixo das abscissas.

A conceituação de área que demos acima está bem definida do ponto de vista matemático, mas é bastante inconveniente para usos práticos. Precisamos de teoremas que facilitem os cálculos de áreas para as principais regiões do plano.

Áreas de Figuras Poligonais

Lema 2.3 *Num triângulo, o produto de cada um de seus lados pela altura relativa a esse lado é constante.*

Demonstração.

Seja ABC um triângulo com alturas AH_A e BH_B relativas aos lados BC e AC, respectivamente. Suponhamos que o ortocentro do triângulo esteja em seu interior conforme figura abaixo.

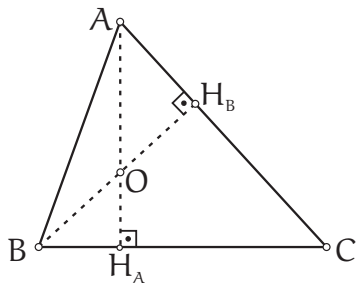


FIGURA 108: *Figura auxiliar.*

Os triângulos AH_AC e BH_BC são semelhantes pelo caso AA pois os ângulos H_A e H_B são retângulos e o ângulo C é comum aos dois triângulos.

Logo, existe um número real $k > 0$ tal que $AH_A = k.BH_B$ e $AC = k.BC$. Portanto, $AH_A.BC = BH_B.AC$.

De maneira análoga, mostramos que $AH_A.BC = CH_C.AB$.

O caso em que o ortocentro do triângulo está no exterior do triângulo será deixado como exercício. □

Teorema 2.23 *A área de um triângulo é dada pela metade do produto do comprimento de um de seus lados pela altura relativa a este lado.*

Demonstração.

Seja ABC um triângulo e AH_A a altura relativa ao lado BC.

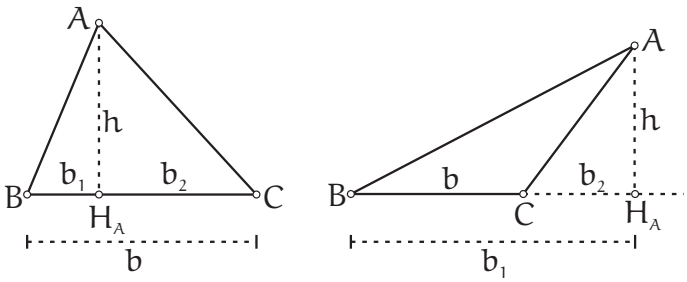


FIGURA 109: *Figura auxiliar.*

Denotemos por b e h as medidas do lado BC e da altura AH_A, respectivamente.

Pelo lema anterior, basta mostrar que a área do triângulo ABC é $\frac{1}{2}bh$.

Suponhamos, primeiramente, que H_A está entre B e C, como na figura acima à esquerda.

Daí os triângulos ABH_A e ACH_A são retângulos e compõem o triângulo ABC.

Por 2.5 a área de ABH_A é $\frac{1}{2}hb_1$ e a área de ACH_A é $\frac{1}{2}hb_2$. Logo, a área do triângulo ABC é $\frac{1}{2}hb_1 + \frac{1}{2}hb_2$.

Observando que $b_1 + b_2 = b$ temos que a área do triângulo ABC é $\frac{1}{2}bh$.

Caso H_A coincida com B ou C o triângulo ABC é retângulo e o resultado decorre diretamente de 2.5.

Se C estiver entre B e H_A, como na figura acima à direita, então os triângulos ACH_A e ABH_A são retângulos e a área do triângulo ABC é a área do triângulo ABH_A subtraída da área do triângulo ACH_A.

Logo, a área do triângulo ABC é $\frac{1}{2}hb_1 - \frac{1}{2}hb_2 = \frac{1}{2}bh$ pois, $b_1 = b + b_2$. □

Como consequência do teorema acima, temos o seguinte resultado: sejam ABC um triângulo e r reta passando por A e paralela ao lado BC. Então, qualquer triângulo $A'BC$ com $A' \in r$ possui a mesma área do triângulo ABC.

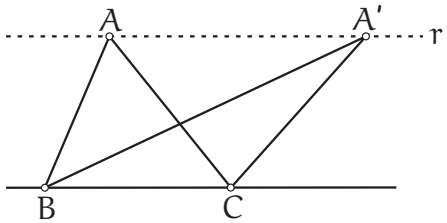


FIGURA 110: *Uma propriedade relativa à área de triângulos.*

Também é consequência imediata do teorema acima que a área de um losango é dada pela metade do produto do comprimento de suas diagonais.

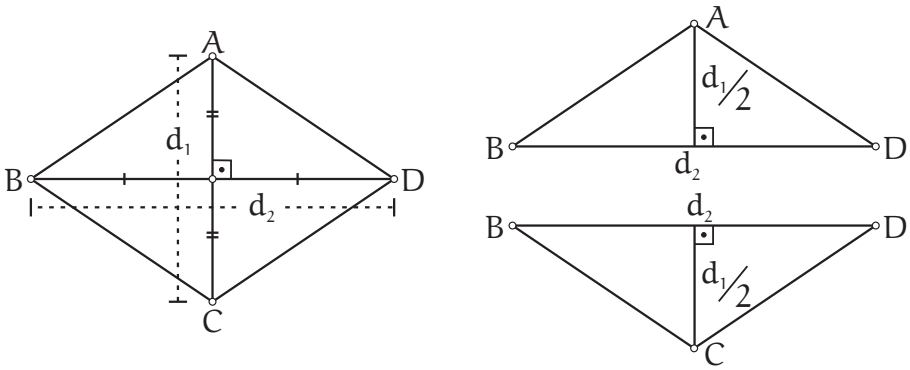


FIGURA 111: *Calculando a área de um losango.*

Embora a palavra *base* seja utilizada em vários contextos na Matemática (e em especial na Geometria), é comum dizer que a área de um triângulo é *metade do produto da base pela altura*, significando, com isto, que estamos escolhendo um lado do triângulo como *base*, e a altura em questão é a altura relativa a este lado. Naturalmente, quando dizemos "produto da base pela altura", estamos cometendo um abuso de linguagem, confundindo base (que é um segmento) com o comprimento da base. Este tipo de abuso não causa transtornos pois o contexto sempre estará claro. Continuaremos a fazê-lo abaixo com paralelogramos e trapézios.

A distância entre lados opostos, que chamaremos de *bases*, de um paralelogramo é chamada de *altura* do paralelogramo relativa a este par de lados. Naturalmente, há duas alturas em um paralelogramo.

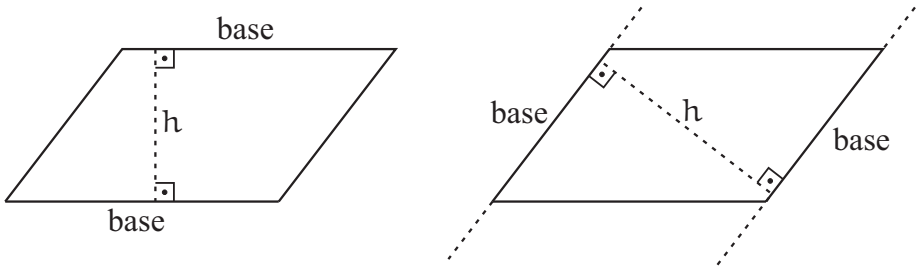


FIGURA 112: *Estabelecendo bases e altura em paralelogramo.*

Teorema 2.24 *A área de um paralelogramo é dada pelo produto do comprimento de uma base pela altura correspondente.*

Demonstração.
Seja $ABCD$ um paralelogramo e escolhamos a base $b = BC$ e altura $h = AH$.

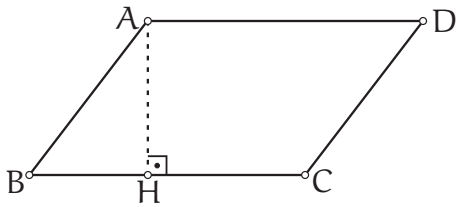


FIGURA 113: *Figura auxiliar.*

A diagonal AC divide o paralelogramo em dois triângulos congruentes pelo caso LLL, logo, os triângulos possuem a mesma área que é $\frac{1}{2}bh$. Assim, a área do paralelogramo é $\frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}bh = bh$. □

Observemos que a fórmula da área de um retângulo é um caso particular do teorema acima.

A distância entre lados opostos e paralelos de um trapézio, que chamaremos de *bases menor e maior*, é chamado de altura do trapézio.

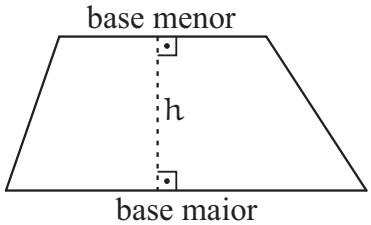


FIGURA 114: *Estabelecendo bases e altura em trapézios.*

Teorema 2.25 *A área de um trapézio é dada pela metade do produto de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases.*

Demonstração.
Seja $ABCD$ um trapézio.

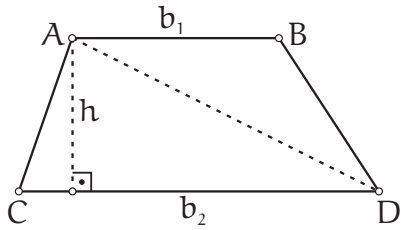


FIGURA 115: *Figura auxiliar.*

Denotemos $AB = b_1$, $CD = b_2$ as bases do trapézio e h sua altura.

Consideremos os triângulos ACD e ADB. Então, pelo Teorema 2.23 a área do triângulo ACD é $\frac{1}{2}hb_2$ e a área do triângulo ABD é $\frac{1}{2}hb_1$.

Logo, utilizando a definição de polígono, temos que a área do trapézio é $\frac{1}{2}hb_2 + \frac{1}{2}hb_1$, ou seja, $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$. □

Observemos que as demonstrações que fizemos nos dois teoremas acima consistem em dividir figuras em triângulos. Essa ideia pode ser generalizada para polígonos quaisquer. A área de um polígono pode ser obtida particionando-se o polígono em triângulos e calculando a soma das áreas desses triângulos.

Neste ponto, uma questão se coloca de modo natural: *sempre é possível particionar um polígono em triângulos?* A resposta é óbvia quando o polígono é convexo, pois ele pode ser particionado em triângulos a partir de um único vértice. Neste caso, um polígono convexo de n lados pode ser particionado em $n - 2$ triângulos.

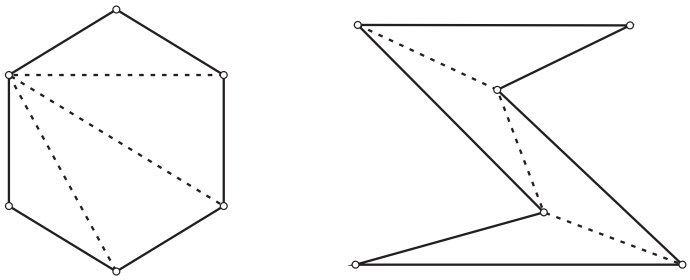


FIGURA 116: *Dividindo um polígono em triângulos.*

O curioso é que a divisão de um polígono de n lados em $n-2$ triângulos também é válida para polígonos não convexos.

Como consequência, este resultado leva-nos imediatamente ao teorema:

Um polígono de n lados possui ângulos internos cuja soma é dada por $(n-2).180°$.

Área de Disco e Setor Circular

A área de um disco pode ser obtida de forma análoga àquela que fizemos para calcular o comprimento de uma circunferência. Por meio de polígonos regulares inscritos e circunscritos

ao disco. Para tanto, precisamos das relações trigonométricas básicas do triângulo retângulo ABC com ângulo reto em B:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\widehat{A}\right) &= \frac{BC}{AC}; \\ \cos\left(\widehat{A}\right) &= \frac{AB}{AC}; \\ \operatorname{tg}\left(\widehat{A}\right) &= \frac{BC}{AB} \end{aligned}$$

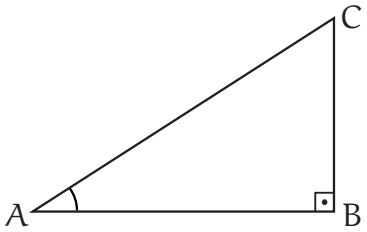


FIGURA 117: *Estabelecendo razões entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.*

Exercícios. (i) Mostre que a área de um polígono regular de n lados inscrito em um disco de raio r é dada por $\frac{1}{2}r^2 n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

(ii) Mostre que a área de um polígono regular de n lados circunscrito em um disco de raio r é dada por $r^2 n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

(iii) Mostre que o perímetro de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio r é dado por $2rn \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

(iv) Mostre que o perímetro de um polígono regular de n lados circunscrito em uma circunferência de raio r é dado por $2rn \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Para o próximo teorema, que usa os dois primeitos itens do exercício acima, o leitor notará que utilizamos de forma explícita alguns limites. Optamos por essa abordagem devido ao fato de que tal conceito geralmente já é de domínio do leitor a esta altura dos estudos. Além disso, a noção de limite já apareceu de forma velada em alguns resultados deste próprio texto como, por exemplo, na dedução da fórmula do comprimento de circunferência e no Teorema de Tales.

Teorema 2.26 *A área de um disco de raio* r *é* πr^2.

Demonstração.

Denotemos por A a área do disco. Conforme o Teorema 2.20 podemos inscrever e circunscrever polígonos regulares de qualquer número de lados na circunferência delimitada pelo disco.

Consideremos um polígono P_1 de n lados inscrito no disco. Pelo exercício anterior sua área é $\frac{1}{2}r^2 n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Consideremos agora um polígono P_2 de n lados circunscrito no disco. Novamente, pelo exercício anterior, sua área é $r^2 n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Agora, pela definição de área, a área do disco é maior do que a do polígono P_1 e menor do que a do polígono P_2, ou seja,

$$\frac{1}{2}r^2 n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) < A < r^2 n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Aumentando indefinidamente o número de lados dos polígonos P_1 e P_2 a relação permanece. Daí, utilizando o limite fundamental $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1$ e propriedades de limites, temos que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}r^2 n\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)=r^2\lim_{n\to+\infty}\pi\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}=\pi r^2.$$

$$\lim_{n\to+\infty}r^2 n\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)=r^2\lim_{n\to+\infty}n\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}=r^2\lim_{n\to+\infty}\pi\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}=\pi r^2.$$

Portanto, pelo Teorema do Sanduíche (ou do Confronto) temos que $A=\pi r^2$. □

Seja $\overset{\frown}{BXC}$ um arco de circunferência de centro A e extremos B e C. O conjunto de todos os segmentos com extremos em A e em um ponto do arco $\overset{\frown}{BXC}$ é chamado de ***setor circular*** de centro A e raio $r=AB=AC$.

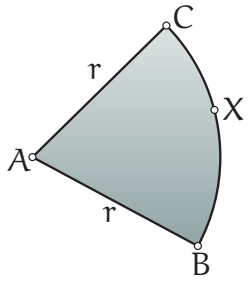


FIGURA 118: *Setor circular.*

O procedimento para o cálculo da área de um setor circular é análogo ao que fizemos para o cálculo do comprimento de um arco de circunferência. Vamos repeti-lo abaixo.

Consideremos uma função f que associa os ângulos de medida θ dos setores circulares de raio r (fixo) às suas áreas, ou seja, $A_\theta=f(\theta)$ é a área do setor circular de raio r e ângulo de medida θ.

A função f é, obviamente crescente (decorre das propriedades de área) e, além disso, se duplicarmos o ângulo do setor, a área duplica. Se triplicarmos o ângulo do setor, a área triplica, e assim por diante. Logo, estamos nas hipóteses do *Teorema Fundamental da Proporcionalidade*. Isso significa que a medida do ângulo de um setor circular é diretamente proporcional a sua área. Assim, $A_\theta=f(\theta)=k\theta$, sendo $k=f(1)$ a área do setor circular de ângulo 1. Se adotarmos a unidade de medida radianos, a área de um setor circular de ângulo medindo 1 radiano é $\frac{\pi r^2}{2\pi}=\frac{r^2}{2}$.

Assim

$$A_\theta=\frac{r^2}{2}\theta$$

é a área de um setor circular de raio r e ângulo de medida θ radianos.

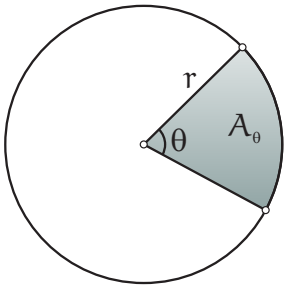


FIGURA 119: *Estabelecendo a área de um setor circular em função de seu ângulo.*

Se utilizarmos a unidade de medida graus temos $k = f(1) = \frac{\pi r^2}{360^\circ}$, ou seja, $A_\theta = \frac{\pi r^2}{360^\circ}\theta$ sendo θ dado em graus.

O racicínio desenvolvido acima pode ser colocado em um dispositivo prático bastante interessante, conhecido como "regra de três":

	Ângulo (rad)		Área Setor	
$\uparrow$	2π	——	πr^2	$\uparrow$
	θ	——	A_θ	

$$\Longrightarrow 2\pi A_\theta = \theta\pi r^2 \Rightarrow A_\theta = \frac{r^2}{2}\theta.$$

O mesmo desenvolvimento acima pode ser feito relacionando as grandezas comprimento de arco l do setor circular de raio r e sua área A_l, chegando a

$$A_l = \frac{r}{2}l.$$

O dispositivo prático, neste caso fica do seguinte modo:

	Comprimento Arco		Área Setor	
$\uparrow$	$2\pi r$	——	πr^2	$\uparrow$
	l	——	A_l	

$$\Longrightarrow 2\pi r A_l = l\pi r^2 \Rightarrow A_l = \frac{r}{2}l.$$

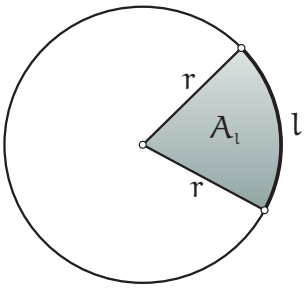


FIGURA 120: *Estabelecendo a área de um setor circular em função de seu arco.*

Essa mesma fórmula pode ser obtida de $A_\theta = \frac{r^2}{2}\theta$ apenas lembrando da definição de radiano: $\theta = \frac{l}{r}$.

Semelhança e Áreas

Definimos figuras semelhantes em seção anterior. É possível mostrar uma curiosa relação entre semelhança e área dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.27 *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ figuras planas semelhantes cuja razão de semelhança de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{G}$ seja k. Então, $A(\mathcal{F}) = k^2 A(\mathcal{G})$, sendo $A(\mathcal{F})$ e $A(\mathcal{G})$ as áreas de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, respectivamente.*

A demonstração deste teorema faz uso de homotetia e é deixada como desafio para o leitor. Casos especiais em que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são polígonos são bastante fáceis de serem demonstrados.

Uma consideração final interessante sobre áreas.

Todas as fórmulas de áreas de Geometria Euclidiana Plana que estudamos são concebidas tomando-se o quadrado unitário como unidade de área. Uma pergunta bastante natural que pode ser feita é a seguinte: *como ficam essas fórmulas se a unidade de área fosse convencionada como sendo uma figura diferente do quadrado unitário?* A resposta não é difícil de ser concebida. As fórmulas mudam, mas não muito. Na verdade, as novas fórmulas diferirão das "originais" apenas por um fator constante (que dependerá apenas da figura tomada como unidade de área). Neste sentido, o conceito de área é universal.

Apêndice

Equivalentes ao Quinto Postulado de Euclides

Conforme comentamos na parte histórica do início do capítulo sobre Geometria Euclidiana, várias tentativas de demonstração do Quinto Postulado de Euclides fracassaram devido ao uso de proposições equivalentes ao próprio postulado que se pretendia demonstrar. Essas proposições são bastante curiosas devido ao fato de que só valem na Geometria Euclidiana. O leitor não terá dificuldades em reconhecer várias dessas proposições, algumas das quais estão demonstradas nesse texto.

Quinto Postulado de Euclides - Se uma reta corta duas outras retas formando um par de ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

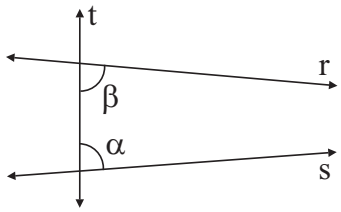


FIGURA 121: $\alpha + \beta < 180^\circ \Longrightarrow r$ *não é paralela a* s.

(i) (John Playfair, $1748 - 1819$) - Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.
Observação: esse é o enunciado que adotamos como "Axioma das Paralelas" desse texto.

(ii) A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.
Observação: na Geometria Hiperbólica, essa soma é menor do que dois ângulos retos, enquanto, na Geometria Elíptica, é maior.

(iii) Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.
Observação: semelhança é conceito exclusivo da Geometria Euclidiana!

(iv) Existe um par de retas equidistantes.

(v) Se r //s e s // t, então r // t.

(vi) Considere a figura abaixo:

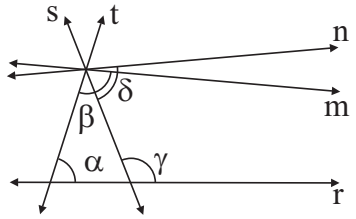


FIGURA 122

Se $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$, então $m = n$.

(vii) A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre a mesma.

($viii$) Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por estes três pontos.

(ix) Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então o último também é reto.

(x) Uma reta que corta uma de duas paralelas, corta também a outra.

(xi) Uma reta perpendicular a uma de duas paralelas é, também, perpendicular a outra.

(xii) Retas paralelas são equidistantes.

($xiii$) Existem retângulos.
Observação: isso significa que <u>não existem</u> retângulos em geometrias não euclidianas!

(xiv) Considere a figura abaixo:

FIGURA 123

Se $AB \equiv CD$, então $\alpha = \beta = 90°$.

(xv) Um ângulo inscrito em um semicírculo é sempre reto.

(xvi) Lados opostos de um paralelogramo são congruentes. (*paralelogramo: quadrilátero com lados opostos paralelos*)

($xvii$) Considere a figura abaixo:

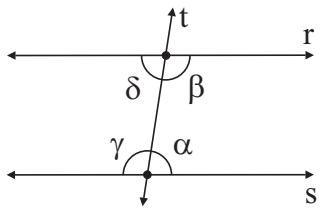


FIGURA 124

Se r é paralela a s, então $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.

($xviii$) Sejam m e n duas retas, $A \in m$ e $B \in n$ tais que $AB \perp n$ e forma um ângulo agudo com m. Então, as perpendiculares baixadas de m à reta n, do lado do ângulo agudo são menores do que AB e as que ficam do outro lado são maiores do que AB.

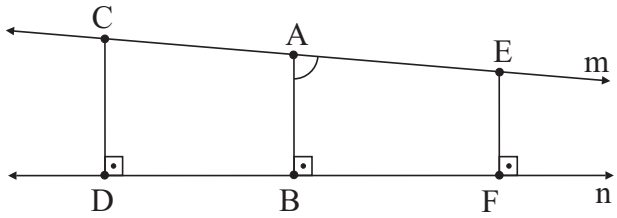


FIGURA 125 $CD > AB > EF$.

(xix) Dado um triângulo, é possível construir outro semelhante com lados arbitrariamente grandes.

(xx) Por um ponto dentro de um ângulo menor que dois retos pode-se traçar uma reta que intesecta os dois lados desse ângulo.

Referências Bibliográficas

[1] Araujo, P. V. *Geometria Diferencial.* Rio de Janeiro: SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 1998.

[2] Barbosa, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana.* 10ª. ed. Rio de Janeiro: SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 2006.

[3] Dolce, O & Pompeo, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar* (coleção de 11 volumes - **vol. 9**: geometria plana). 6ª ed. São Paulo: Atual Editora. 2005.

[4] Figueiredo, D. G. *Números Irracionais e Transcendentes.* 3ª. ed. Rio de Janeiro: SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 2002.

[5] Heath, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* vol. 1 (Books I and II), vol. 2 (Books III-IX), vol. 3 (Books X-XIII). 2nd. ed. New York: Dover Publications. 1956.

[6] Jacobs, H. *Geometry.* New York: W. H. Freeman. 1974.

[7] Lima, E. L. *Análise Real.* vol. 1. 11ª. ed. Rio de Janeiro: SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 2011.

[8] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. & Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio* (coleção de 4 volumes - **vols. 1 e 4**). 6ª. ed. Rio de Janeiro: SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 2006.

[9] Lima, E. L. *Medida e Forma em Geometria.* 4ª. ed. Rio de Janeiro: SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 2009.

[10] Lima, E. L. *Meu Professor de Matemática.* 4ª. ed. Rio de Janeiro: SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 2004.

[11] Neto, S. L. *Construções Geométricas - Exercícios e Soluções.* Rio de Janeiro: SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 2010.

[12] Revista do Professor de Matematica. Publicação quadrimestral da SBM Sociedade Brasileira de Matemática. (81 números publicados até o primeiro quadrimestre de 2013).

[13] Rezende, E. Q. F, & Queiroz, M. L. B. *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas.* 2ª. ed. Campinas: Editora Unicamp. 2008.

[14] Wagner, E. *Construções Geométricas.* 6ª. ed. Rio de Janeiro: SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 2007.

[15] WWW-HISTORY.MCS.ST-AND.AC.UK - The MacTutor History of Mathematics archive - Site de história da matemática da University of Saint Andrews - Scotland.