

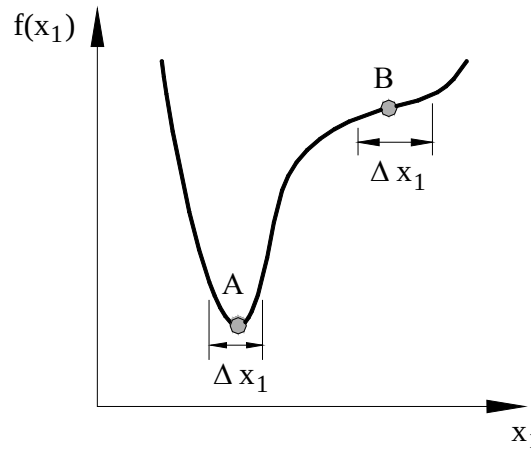


Figure 5.5 – Solutions optimales robustes (figure adaptée de (Lee et Park, 2001)).

Une fonction de robustesse est un estimateur qui permet d'évaluer l'impact des variations des paramètres de conception sur la fonction objectif. Généralement la construction d'une fonction de robustesse est basée sur la *moyenne* (μ) et l'*écart type* (σ) des fonctions coût. Dans ce mémoire, on utilise l'approche robuste proposée par Ait Brik (2005), où la fonction robustesse f^r d'une fonction objectif $f(x)$ est définie par le rapport entre la valeur moyenne et l'écart type, exprimée sous la forme suivante :

$$f^r = (\sigma_f / \mu_f)^{-1} \quad (5.3)$$

où le rapport (σ_f / μ_f) mesure la dispersion, étant nommée fonction vulnérabilité de $f(x)$, dénoté par $f^v(x)$. La Figure 5.6 illustre la méthode utilisée dans ce mémoire, dans le but de trouver des solutions du problème posé au concepteur, en tenant compte des incertitudes sur les paramètres de conception au cours de l'optimisation des structures amorties par matériaux viscoélastiques. Pour cela on définit un nouveau problème d'optimisation multiobjectif robuste (POMR) capable de trouver les optima stables lorsque les paramètres de conception sont aléatoires. Dans ce nouveau problème d'optimisation, l'intérêt est d'optimiser simultanément les fonctions coût initiales et leurs robustesses. Le PMO initial est défini par l'expression (5.1), alors que le PMOR est exprimé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{F}^*(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_1^v(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_2^v(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}), f_n^v(\mathbf{x})) \\ g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \quad \mathbf{x} \in C \end{array} \right. \quad (5.4)$$

où $f_i^v(\mathbf{x})$ est la fonction vulnérabilité de la fonction objectif $f_i(\mathbf{x})$ et $i = 1, \dots, N$.

Les solutions robustes vis-à-vis des incertitudes sont celles qui permettent de minimiser simultanément les fonctions coût initiales et de maximiser leurs robustesses, ou de minimiser leurs vulnérabilités.

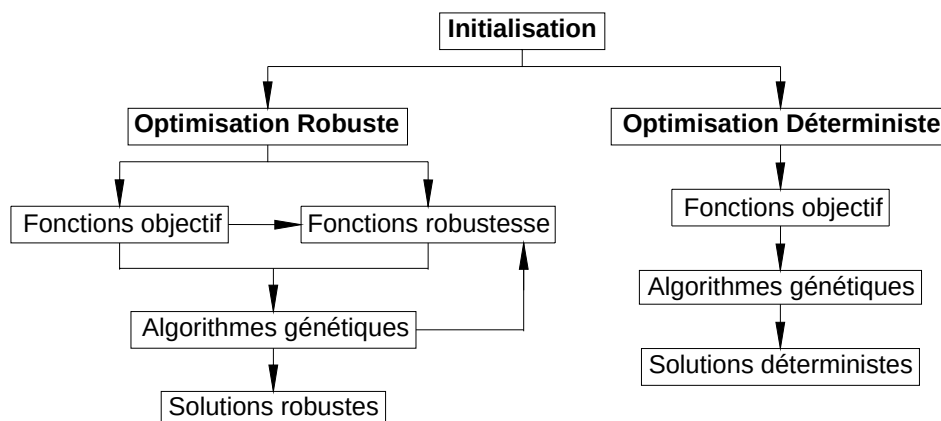


Figure 5.6 – Méthodologie d'optimisation multiobjectif robuste
(figure empruntée à la référence (Ait Brik, 2005))

Une fois le problème d'optimisation robuste défini, le problème consiste à évaluer numériquement la fonction robustesse de manière simple et avec un nombre d'échantillons aussi réduit que possible, puisqu'il ne s'agit pas seulement de caractériser un optimum, mais d'intégrer un critère de robustesse à l'algorithme de recherche. Une solution économique consiste à remplacer un tirage aléatoire classique de Monte Carlo (Papadrakakis et Kotsopoulos, 1999) par la méthode d'Hyper Cube Latin (HCL) (Florian, 1992). D'autres méthodes peuvent être utilisées pour résoudre le problème du temps de calcul comme les métamodèles basés sur les surfaces de réponse ou les réseaux de neurones, comme montrés au Chapitre 4, et l'approche non-paramétrique (Soize, 1999 ; 2000).

Comme montré dans le Chapitre 4, les métamodèles sont des outils d'approximation pour approcher les fonctions coût par des polynômes, pour les surfaces de réponses, ou par un modèle non linéaire, pour les réseaux de neurones. La stratégie consiste à évaluer l'effet des incertitudes des paramètres de conception sur les fonctions approchées et non pas sur les fonctions exactes. Cette stratégie permet de réduire considérablement le temps de calcul surtout pour les modèles viscoélastiques de grande taille. L'utilisation de l'approche non paramétrique présente aussi une alternative intéressante lorsque la structure mécanique est définie par un modèle élément fini et l'évaluation des fonctions coûts est relativement coûteuse, comme dans les problèmes de dynamique des structures d'une manière générale.

5.3 Analyse des données *a posteriori* – la méthode SOM

Dans certains problèmes multiobjectif, l'ensemble des solutions Pareto-optimales est très grand, et dans ce cas, l'utilisation et l'analyse de cet ensemble de données sont très compliquées surtout si l'espace des fonctions coût est de grande dimension (problème d'optimisation multiobjectif de dimension supérieure à trois) (Morse, 1980). Dans ces conditions, les solutions obtenues sont pratiquement inexploitable par le concepteur. Pour cette raison, on utilise alors une technique de *clustering* ou de regroupement des données similaires pour supprimer un certain nombre de solutions. Cette procédure est justifiée par deux raisons principales : la première c'est que dans le cas d'une frontière de Pareto continue, garder toutes

les solutions n'est pas nécessaire ; et la deuxième c'est d'éviter des temps de calcul importants lorsque l'ensemble de Pareto est relativement grand.

Parmi les plusieurs techniques de *datamining*, dans ce mémoire, on est particulièrement intéressé aux cartes auto-organisatrices proposées par Kohonen (1982), appelée cartes SOM (*Self Organising Map*). Elles sont des outils simples d'analyse et de visualisation de données par une représentation synthétique de l'information, permettant une visualisation des données souvent en deux ou trois dimensions nettement plus intéressante dans de nombreux cas qu'une analyse en composantes principales (PCA) (Besse, 2002).

La Figure 5.7 montre le principe général de la technique SOM. A partir des entrées, qui peuvent être par exemple, des solutions d'un problème d'optimisation multiobjectif, après l'application des ces cartes, on a les *clusters* (ensembles des points semblables au sens d'un certain critère). Ensuite, il faut visualiser ces groupes, et parmi les plusieurs méthodes de visualisation qui peuvent être utilisées pour représenter les résultats obtenus à l'aide de SOM, on peut utiliser le mappage de Sammon, les U-matrices, les plans de projection des données, etc. (Vesanto, 2000). Dans ce mémoire on utilise la technique les U-matrices.

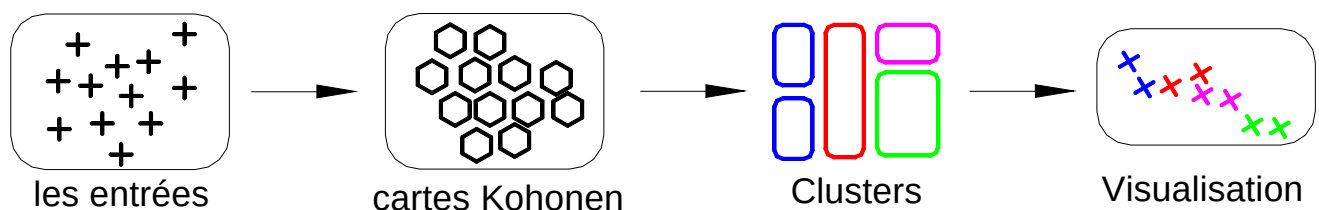


Figure 5.7 – Analyse de données avec le SOM
(figure empruntée à la référence (Ait Brik, 2005)).

Pour mieux comprendre le fonctionnement et l'utilisation du SOM, on prend les solutions optimales mieux classées au rang 1, montrées en Figure 5.3. On applique la technique SOM sur cet ensemble, afin de regrouper les données en différents clusters, comme montré en Figure 5.8, identifiés par les différentes couleurs.

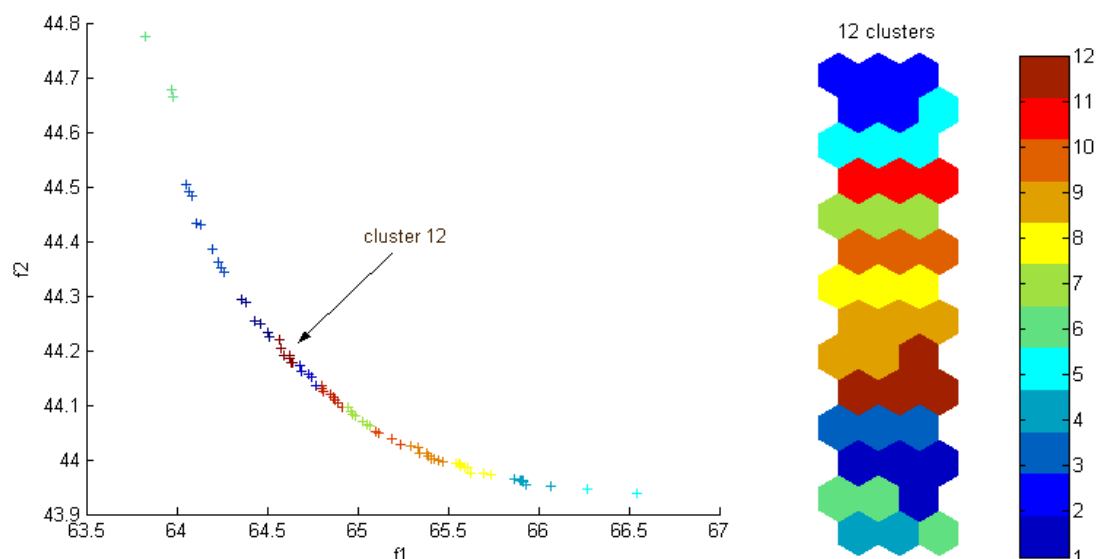


Figure 5.8 – Visualisation et regroupement des 12 clusters dans l'espace des fonctions coût.

5.3.1 SOM : outil d'aide à la décision dans les problèmes d'optimisation multiobjectif

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la technique SOM en post-traitement (technique *a posteriori*) après la phase d'optimisation multiobjectif comme illustré en Figure 5.9. On applique le SOM sur l'espace des fonctions coût afin de créer les clusters et d'organiser cet espace, comme illustré en Figure 5.8. Les valeurs de fonctions coût qui sont semblables sont regroupées dans un même groupe, ce qui permet de réduire considérablement la dimension de l'espace de ces fonctions. Ensuite le concepteur peut choisir un cluster quelconque. Normalement, on préfère le cluster qui garde le mieux compromis entre les fonctions coût. On explore les paramètres de conception par rapport au cluster choisi, et ensuite on applique la technique SOM une fois de plus dans l'espace de conception pour en réduire le nombre de variables, en se basant sur leurs corrélations (Ait Brik, 2005).

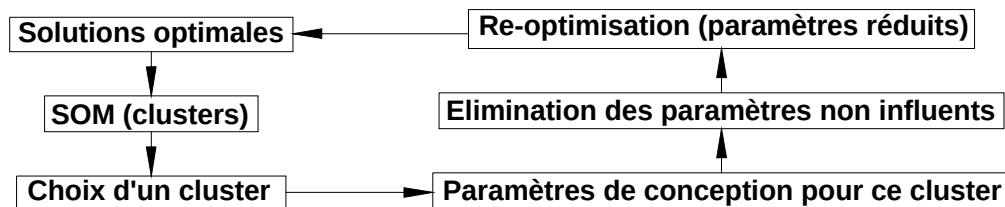


Figure 5.9 – SOM en post-traitement de données.

Comme illustration de l'efficacité de la méthode SOM appliquée aux solutions Pareto-optimales afin de réduire le nombre de solutions sur le front de Pareto et aussi de trouver les éventuelles corrélations entre les paramètres de conception optimaux, on s'intéresse au cluster numéro 12, représenté en Figure 5.8. Pour ce cluster, on examine les tendances dans l'espace de conception en appliquant la technique SOM. Pour cela, on considère que le problème de départ était composé par 8 variables de conception. Pour la visualisation des corrélations entre les variables, on utilise les U-matrices, comme montré en Figure 5.10, qui permet de mettre en évidence les 8 variables de conception et leurs corrélations.

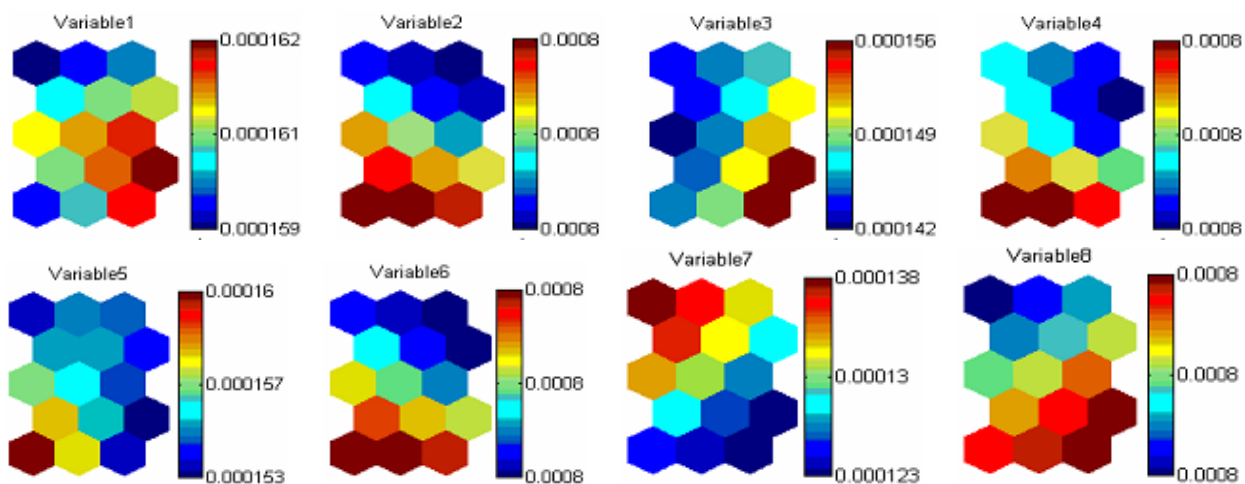


Figure 5.10 – Corrélation entre les paramètres de conception – Les U-matrices.

Les U-matrices permettent de visualiser les groupes implicites contenus dans l'échantillon. Pour le cluster 12, l'analyse de la Figure 5.10 permet de trouver les corrélations entre les variables 1 et 8, 2 et 6, 2 et 4, 4 et 6 et 6 et 8, respectivement. Ceci permet d'éliminer les variables 1, 2, 4 et 6 qui n'ont pas une influence significative sur le cluster choisi. Pour vérifier les résultats, on reprend le même problème d'optimisation de départ avec seulement les 4 paramètres de conception retenus (variables 3, 5, 7 et 8), et les autres sont maintenus constantes aux valeurs nominales. La Figure 5.11 confirme la technique SOM en montrant que les variables de conception éliminées ne sont pas influentes pour les fonctions coût.

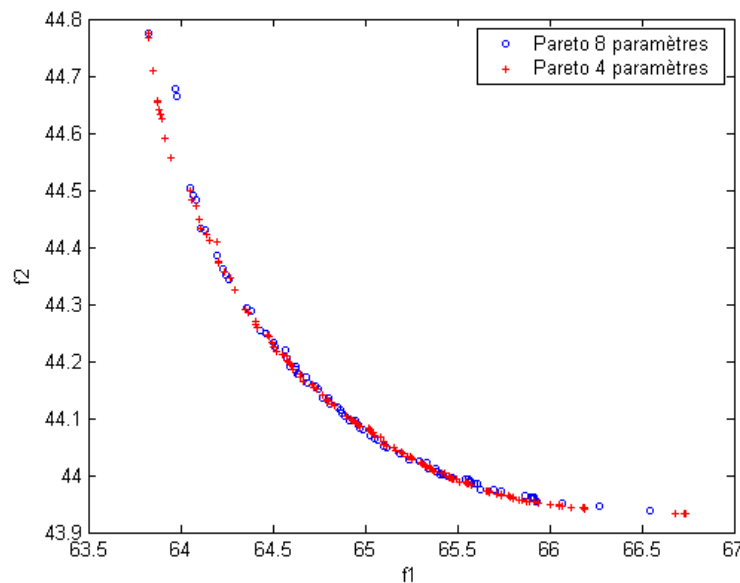


Figure 5.11 – Front de Pareto de l'optimisation à 8 et 4 paramètres de conception.

5.4 Exemples numériques

5.4.1 Couplage NSGA-Condensation robuste (NSGA-CR)

L'exemple proposé dans cette section est constitué par la plaque courbe renforcée par quatre raidisseurs illustrée en Figure 4.14 (Cf. Section 4.3.1, Chapitre 4). Pour cela, on garde le même maillage aux éléments finis, les mêmes caractéristiques physiques/géométriques de la plaque base, et la même configuration du traitement viscoélastique. L'analyse dynamique est réalisée dans la même bande fréquentielle [135-210 Hz] comportant les cinq modes globaux, comme illustré en Figure 5.12, pour le système sans traitement viscoélastique.

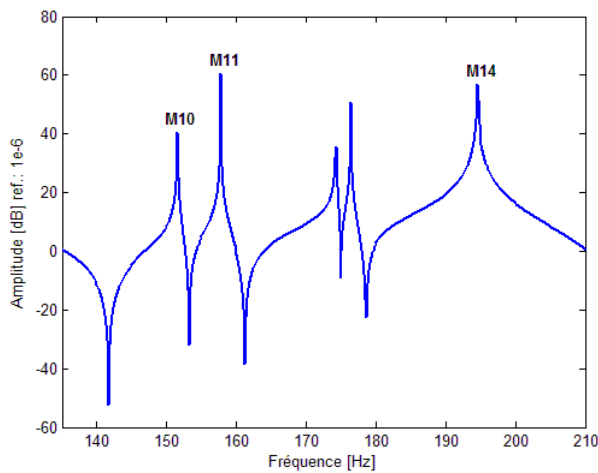


Figure 5.12 – FRF non amortie de la plaque courbe renforcée.

Tableau 5.1 – Définition de l'espace de conception (NSGA-CR)

Variables	Valeurs nominales	Variations admissibles
h_2	0,0254 mm	$\pm 60\%$
h_3	0,5 mm	$\pm 30\%$
T	25°C	$\pm 15\%$

Les zones modifiables de la structure amortie sont celles associées aux zones traitées par couche contrainte. On suppose que toutes les 10 patches ont les mêmes valeurs pour les épaisseurs de la couche viscoélastique (h_2) et de la couche contrainte (h_3), respectivement, et qu'on utilise un seul matériau viscoélastique à la température T . Les valeurs nominales de ces variables de conception et leurs variations admissibles constituent l'espace de conception pour l'optimisation multiobjectif, comme montré en Tableau 5.1. Ces paramètres de conception choisis sont ceux définis comme étant les variables de perturbations pour l'application de la méthodologie de condensation robuste.

Les fonctions coût à optimiser sont :

$$\text{minimiser} \begin{cases} f_1 = [\text{amplitude}(M10) + \text{amplitude}(M11)] \\ f_2 = \text{la masse totale du traitement viscoélastique} \end{cases} \quad (5.5)$$

Les paramètres du NSGA sont définis en Tableau 5.2.

Tableau 5.2 – Paramètres de NSGA-CR

NSGA	
Probabilité de sélection	0,25
Probabilité de croisement	0,25
Probabilité de mutation	0,25
Nombre de générations	100
Nombre d'individus/génération	30
Coefficient de niche (σ)	0.2

Dans la stratégie d'optimisation robuste, le système viscoélastique modifié est réduit à chaque génération par la mise à jour de la base de condensation robuste suivante :

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_0(115) \quad \mathbf{R}_A(74)] \quad (5.6)$$

où $T_0 = [\phi_0^{(60)} \quad R^{(1)} \quad R_A^{o(54)}]$ est la base de réduction nominale. On précise que la qualité de prédiction du modèle nominal condensé par l'utilisation de cette base a été vérifiée en Section 4.3.1, au Chapitre 4. Les résidus statiques $R_A(74)$ sont associés aux modifications des paramètres h_2 et h_3 au cours de l'optimisation, pour les zones viscoélastiques.

La Figure 5.13.a montre les solutions optimales obtenues par les stratégies NSGA (prise comme référence) et NSGA-CR. On remarque que les solutions sont comparables. On précise que pour la stratégie NSGA on utilise le modèle nominal condensé construit par la base de réduction T_0 , où à chaque génération, les modes $\phi_0^{(60)}$ du système SCA, sont obtenus par la résolution du problème aux valeurs propres du système modifié. La Figure 5.13.b compare les Fronts de Pareto pour les fonctions coût pour les deux approches d'optimisation. On peut conclure que la stratégie NSGA-CR représente de forme raisonnable la réponse du système amorti modifié, comme démontré par la similitude des deux nuages des solutions optimales.

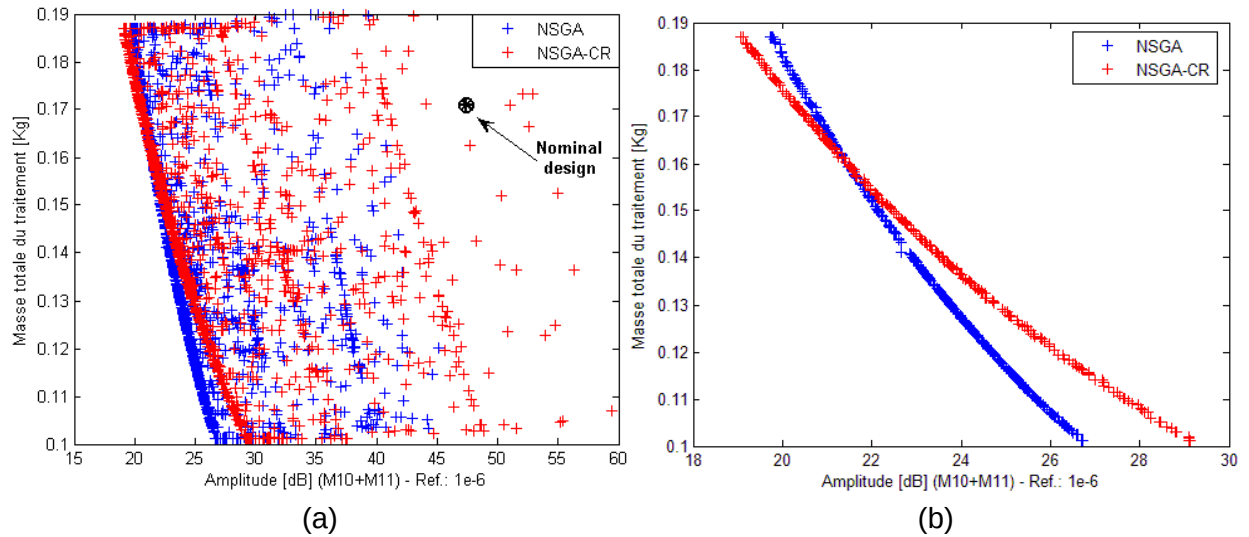


Figure 5.13 – Solutions NSGA et NSGA-CR (a); Premiers Fronts de Pareto (b).

Ces résultats sont confirmés par le calcul de la distance de Mahalanobis, comme on montre en Tableau 5.3, en mettant en évidence que les deux *clusters* de solutions sont comparables au sens de la norme adoptée.

La distance de Mahalanobis est définie comme suit :

$$D_M^2 = [x_1 - x_2]^T S^{-1} [x_1 - x_2] \quad (5.7)$$

où x_1 et x_2 sont deux nuages de points, et S est la matrice de covariance entre x_1 et x_2 .

Tableau 5.3 – Distances de Mahalanobis (NSGA-CR)

Nuage 1/Nuage 2		
$D_M^{min} = 0,50$	$D_M^{mean} = 18,5$	$D_M^{max} = 33,2$

Pour cet exemple, la comparaison des temps CPU (Tableau 5.4) montre que le couplage NSGA-CR permet une réduction du coût de calcul significative, avec un rapport de réduction d'environ 42%, ce qui démontre l'intérêt de coupler la stratégie de condensation robuste avec les algorithmes itératifs d'optimisation et/ou recalage de modèles.

Tableau 5.4 – Temps de calcul (NSGA-CR)

Stratégie	CPU Time [min]	Rapport [%]
NSGA	1558	42
NSGA-CR	900	

5.4.2 Couplage NSGA-réseaux de neurones (NSGA-PMC)

Pour cet exemple, on considère la même structure de la section précédente, sauf que dans ce cas le traitement viscoélastique est composé par 15 patches viscoélastiques, dont chacune est composée par 16 éléments finis de plaque sandwich à trois couches. De plus, dans le but de vérifier la capacité des réseaux de neurones pour approcher des problèmes complexes à plusieurs entrées de natures différentes, on suppose que les positions de patches ne sont pas fixées, et qu'on souhaite optimiser la position de chaque patch. Par conséquent, pour le problème d'optimisation, il y a un total de 45 variables définissant l'espace de conception : 31 variables continues (15 pour les épaisseurs de couches viscoélastiques, 15 pour les épaisseurs de couches contraintes, et la température du matériau) ; et 15 variables discrètes représentant les positions de patches.

Le Tableau 5.5 représente les variables de conception exprimées en termes de leurs valeurs nominales et leurs variations admissibles. Les trois fonctions coût à optimiser sont :

$$\text{minimiser} \begin{cases} f_1 = \text{amplitude}(M10) \\ f_2 = \text{amplitude}(M11) \\ f_3 = \text{amplitude}(M14) \end{cases} \quad (\text{représenté en Figure 5.12}) \quad (5.8)$$

Tableau 5.5 – Définition de l'espace de conception (NSGA-PMC)

	Variables de conception	Valeurs nominales	Variations admissibles
Continue	$h_{2i} \ (i = 1, \dots, 15 \text{ patches})$	0,0254 mm	$\pm 60\%$
	$h_{3i} \ (i = 1, \dots, 15 \text{ patches})$	0,5 mm	$\pm 30\%$
	T	25°C	$\pm 15\%$
Discrète	Positions des patches		

Seulement les valeurs minimales et maximales admissibles des variables continues définies précédemment sont prises comme contraintes dans le problème d'optimisation. Les paramètres du NSGA-PMC sont définis dans le Tableau 5.6.

Tableau 5.6 – Paramètres de NSGA-PMC

NSGA		PMC	
Probabilité de sélection	0,25	No. de couches cachées No. de neurones par couche	2 20
Probabilité de croisement	0,25		
Probabilité de mutation	0,25		
Nombre de générations	100		
Nombre d'individus/génération	30		
Coefficient de niche (σ)	0,2		

La Figure 5.14.a montre les solutions obtenues à travers les stratégies NSGA et NSGA-PMC. On précise que pour ces deux processus, on utilise la procédure de condensation robuste. Par la comparaison entre les premiers Fronts de Pareto pour les fonctions coût f_1 et f_2 , on remarque que l'approche NSGA-PMC représente la réponse du système amorti, comme démontré par la similitude des deux nuages des solutions optimales (Figure 5.14.b).

L'erreur quadratique tolérée pour l'apprentissage et la validation du PMC est de 10^{-3} . Si au cours de l'optimisation, la valeur de l'erreur quadratique dépasse la valeur fixée *a priori*, il y a une augmentation automatique du nombre de neurones dans chaque couche cachée. Cette stratégie permet de construire à chaque fois un réseau de neurones capable de mieux approcher les réponses exactes du système amorti modifié.

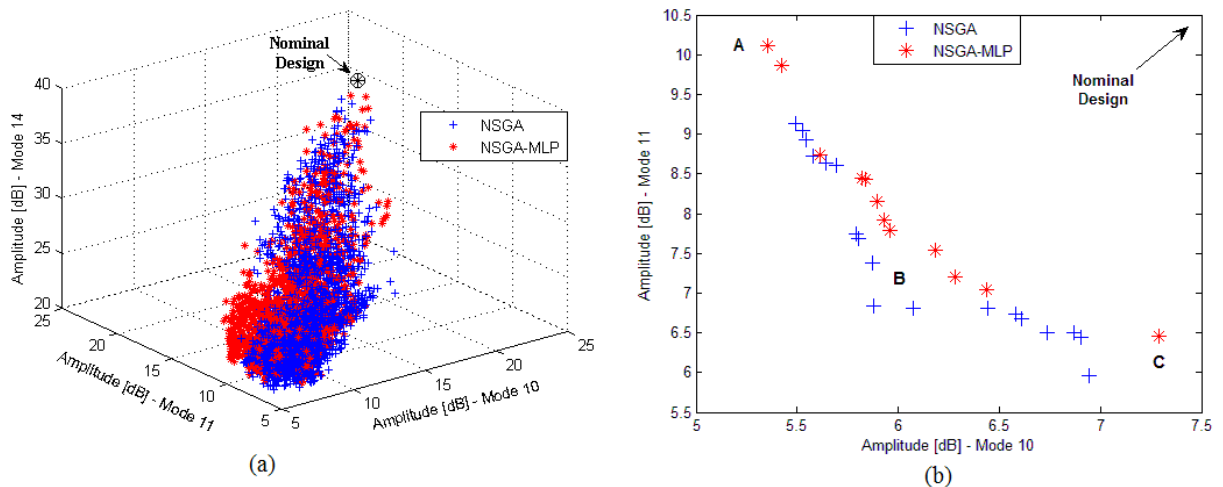


Figure 5.14 – Solutions NSGA et NSGA-PMC (a); Fronts de Pareto (b).

Dans le Tableau 5.7 on montre la distance de Mahalanobis, calculée pour les solutions optimales représentées en Figure 5.14.b, mettant en évidence l'approximation entre les deux clusters au sens de la norme adoptée.

Tableau 5.7 – Distances de Mahalanobis (NSGA-PMC)

Nuage 1/Nuage 2		
$D_M^{max} = 0,8$	$D_M^{min} = 0,01$	$D_M^{mean} = 0,005$

Le nombre total de générations pour trouver les solutions optimales a été limité à 100, ce qui signifie que le nombre maximal d'évaluations des fonctions coût en utilisant la stratégie

NSGA est 3000. Le but d'introduire le métamodèle (couplage NSGA-PMC) est de réduire le nombre d'évaluations du problème exact pendant le processus d'optimisation. Pour cela, le PMC est mis à jour à chaque 20 générations après la génération 5, permettant de ramener le nombre d'évaluations exactes de 3000 à 170. Le temps de calcul (temps de CPU) pour les deux approches d'optimisation sont donnés au Tableau 5.8, ce qui mène à conclure que le couplage entre l'algorithme génétique NSGA et les réseaux de neurones permet une réduction drastique du temps de calcul pendant le processus d'optimisation.

Tableau 5.8 – Temps de calcul (NSGA-PMC)

Stratégie	CPU Time [min]	Rapport [%]
NSGA	2016,2	91
NSGA-PMC	180	

On évalue maintenant les solutions optimales correspondantes aux points **A**, **B** et **C**, indiqués en Figure 5.14.b. Pour cela, on compare les amplitudes de vibrations amorties (FRFs) associées au point P (voir Figure 4.14) du système sans et avec traitement viscoélastique. Par la comparaison entre les Figures 5.14.b et 5.15, on remarque que pour le point **A**, les solutions optimales mènent à une meilleure atténuation de la réponse pour le mode M10. Par contre, pour le point **C**, la solution optimale conduit à une meilleure atténuation pour le mode M11 (Figure 5.16. Finalement pour le point **B**, comme prévu, la solution mènent à des atténuations semblables pour les modes M10 et M11 (Figure 5.17).

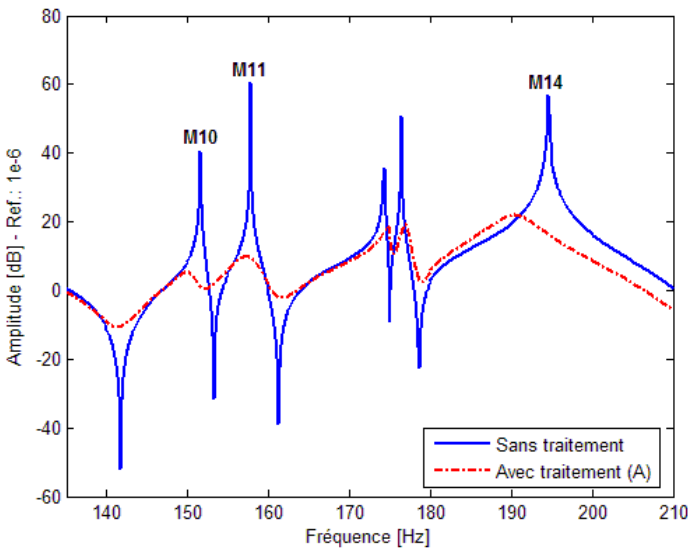
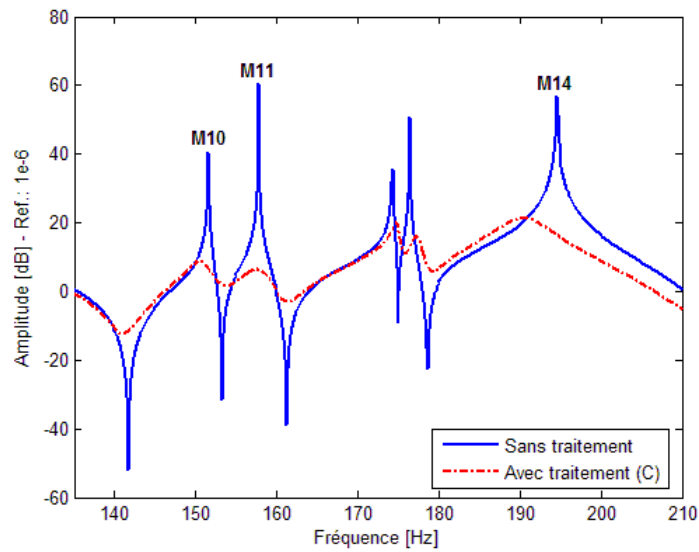
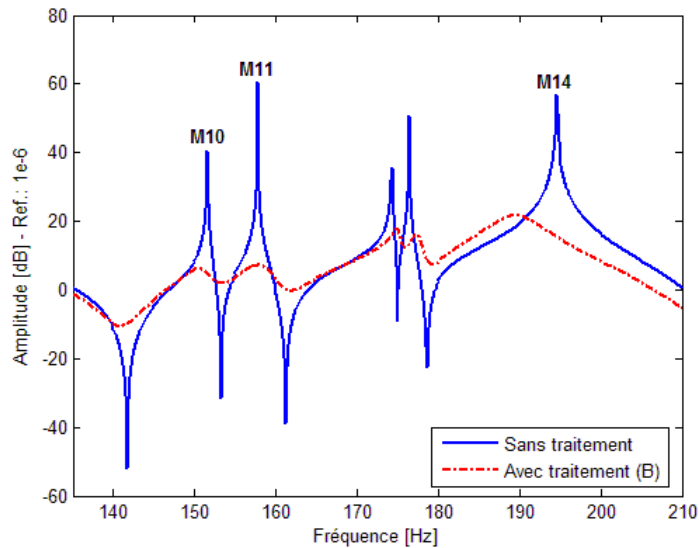


Figure 5.15 – FRFs pour le point **A**

Figure 5.16 – FRFs pour le point **C**Figure 5.17 – FRFs pour le point **B**

Comme illustration, la Figure 5.18 montre les positions optimales des patches viscoélastiques issus du processus d'optimisation pour le point **B**. Les valeurs optimales des épaisseurs des couches viscoélastiques et contraintes sont aussi indiquées en Tableau 5.9. Pour ce point, la valeur optimale de la température du matériau viscoélastique est 22,5°C.

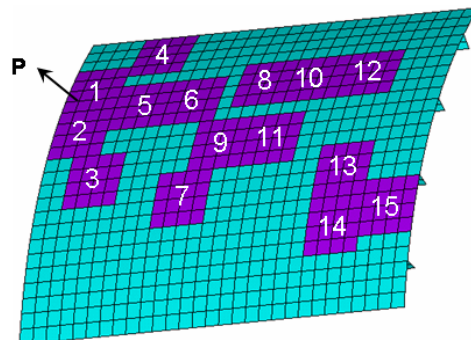
Figure 5.18 – Positions optimales de patches viscoélastiques (point **B**)

Tableau 5.9 – Valeurs optimales des épaisseurs de chaque patch (point **B**)

patches 1,4,7,10,13		patches 2,5,8,11,14		patches 3,6,9,12,15	
h_2 [m]	h_3 [m]	h_2 [m]	h_3 [m]	h_2 [m]	h_3 [m]
$1,58 \times 10^{-5}$	$1,25 \times 10^{-3}$	$1,65 \times 10^{-5}$	$0,97 \times 10^{-3}$	$1,54 \times 10^{-5}$	$1,25 \times 10^{-3}$
$1,54 \times 10^{-5}$	$1,25 \times 10^{-3}$	$1,54 \times 10^{-5}$	$1,25 \times 10^{-3}$	$1,54 \times 10^{-5}$	$0,40 \times 10^{-3}$
$1,54 \times 10^{-5}$	$1,05 \times 10^{-3}$	$1,54 \times 10^{-5}$	$1,25 \times 10^{-3}$	$1,54 \times 10^{-5}$	$1,17 \times 10^{-3}$
$1,54 \times 10^{-5}$	$1,20 \times 10^{-3}$	$2,45 \times 10^{-5}$	$1,25 \times 10^{-3}$	$1,54 \times 10^{-5}$	$1,25 \times 10^{-3}$
$1,54 \times 10^{-5}$	$0,95 \times 10^{-3}$	$1,54 \times 10^{-5}$	$1,25 \times 10^{-3}$	$1,54 \times 10^{-5}$	$1,25 \times 10^{-3}$

5.4.3 Couplage NSGA-RSM et NSGA-ARSM.

Pour illustrer la procédure de couplage entre les algorithmes génétiques multiobjectif, et les surfaces de réponses pour l'optimisation de systèmes viscoélastiques, on considère le même système abordé en Section 5.4.1. De cette façon, les variables de conception qui seront considérées dans le processus d'optimisation avec leurs variations admissibles sont celles représentées en Tableau 5.1, qui ont été utilisées pour générer les polynômes donnés en Section 4.3.3, au Chapitre 4, qu'on rappelle ici :

- **RSM classique**

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= 34.498 - 3.3968X_1 + 3.5322X_2 + 7.2375X_3 - 0.04243X_1X_2 + 0.058855X_1X_3 + \dots \\ &\quad 0.61575X_2X_3 + 0.43194X_1^2 + 0.086663X_2^2 - 1.8471X_3^2 \\ \hat{y}_2 &= 0.14556 + 0.042901X_1 + 0.0015336X_3\end{aligned}$$

- **ARSM**

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= 34.488 - 3.3858X_1 + 3.55566X_2 + 7.2603X_3 - 0.059721X_1X_2 + 0.051235X_1X_3 + \dots \\ &\quad 0.60234X_2X_3 + 0.44414X_1^2 + 0.072274X_2^2 - 1.8321X_3^2 \\ \hat{y}_2 &= 0.14556 + 0.042901X_1 + 0.0015336X_3\end{aligned}$$

On rappelle que les fonctions $\hat{y}_1$ et $\hat{y}_2$, représentent, respectivement, les approximations des fonctions coût, f_1 et f_2 (expression (5.5)). Les variables X_1 , X_2 et X_3 , sont les variables auxquelles on doit appliquer la technique de décodification suivante :

$$X_1 = (h_3 - \bar{h}_3) / (h_3^{max} - h_3^{min}); \quad X_2 = (T - \bar{T}) / (T^{max} - T^{min}); \quad X_3 = (h_2 - \bar{h}_2) / (h_2^{max} - h_2^{min})$$

Les solutions NSGA de référence sont celles obtenus en Section 5.4.1 à travers l'utilisation des mêmes caractéristiques définies en Tableau 5.2. La Figure 5.19 montre la comparaison entre les Fronts de Pareto obtenus par les processus NSGA (référence), NSGA-RSM et NSGA-ARSM, respectivement. On remarque une bonne concordance entre les nuages de solutions optimales calculées par les deux approches.

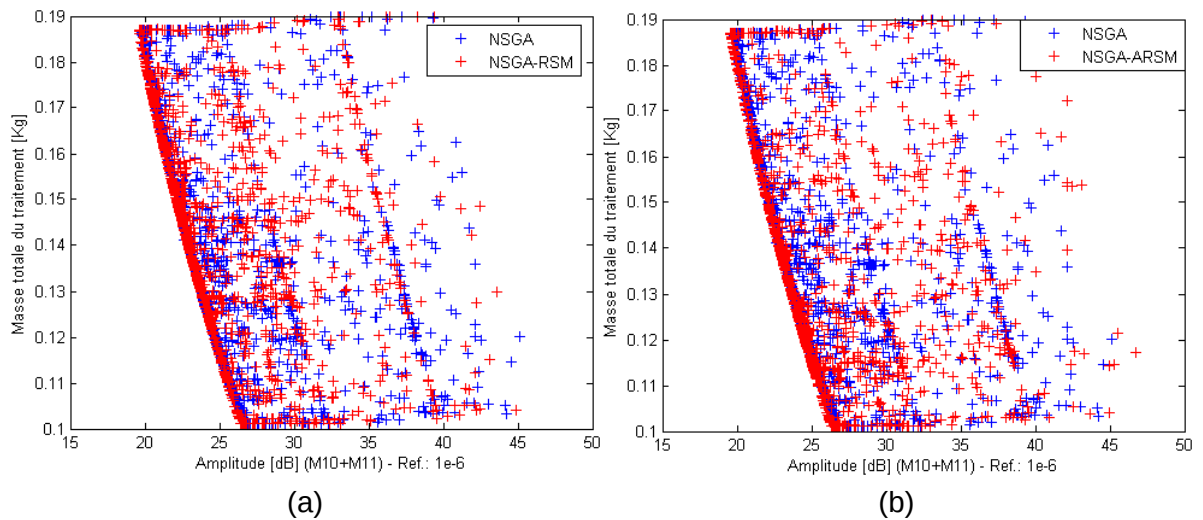


Figure 5.19 – Solutions NSGA et NSGA-RSM (a), et NSGA et NSGA-ARSM (b).

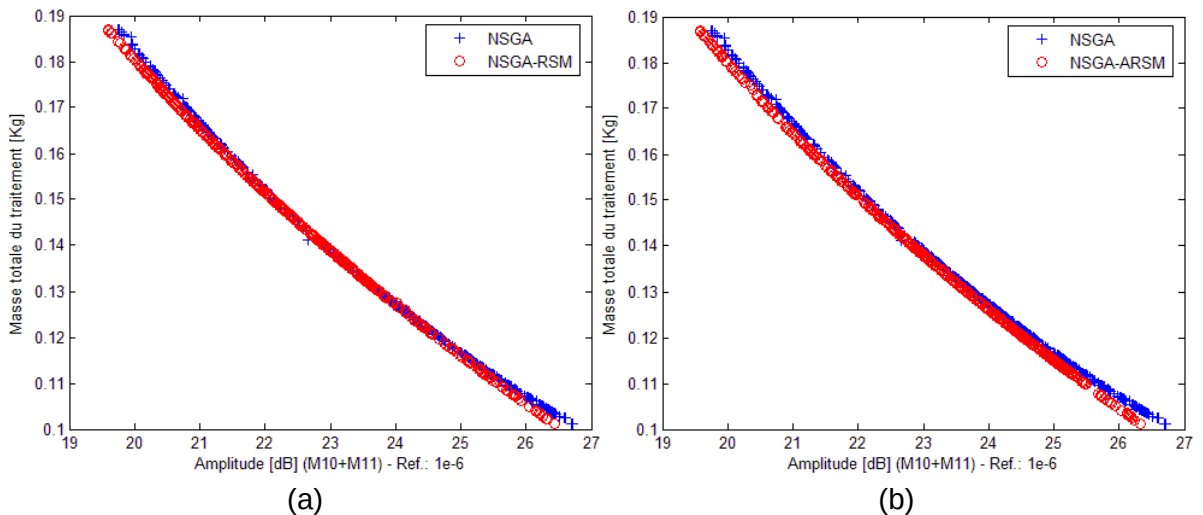


Figure 5.20 – Fronts de Pareto pour NSGA-RSM (a), et NSGA-ARSM (b).

Pour cet exemple, la comparaison des temps CPU (Tableau 5.10) montre que le couplage NSGA-RSM/ARSM permet une réduction significative des coûts de calcul avec un rapport de réduction minimum d'environ 82%.

Tableau 5.10 – Temps de calcul (NSGA-RSM, NSGA-ARSM)

Stratégie	CPU Time [min]	Rapport [%]
NSGA	1558	
NSGA-RSM	280,85 (pol.) + 3,81 (opt.) = 284,66	82
NSGA-ARSM	133,15 (pol.) + 3,78 (opt.) = 136,93	91

où (pol.) et (opt.) signifie, respectivement, les temps pour générer les polynômes, et les temps pour l'optimisation à partir des polynômes.

5.4.4 Exemple d'optimisation robuste

Dans cette section, on applique la stratégie d'optimisation multiobjectif robuste pour l'optimisation de systèmes viscoélastiques. Pour cela, on considère la même plaque courbe traitée montrée en Figure 5.18. Les variables de conception adoptées dans l'optimisation et leurs niveaux d'incertitudes sont montrées au Tableau 5.11.

Tableau 5.11 – Définition de l'espace de conception (optimisation robuste)

Variables de conception	Valeurs nominales	Variations admissibles	Niveaux d'incertitudes
h_2	0,0254 mm	$\pm 60\%$	$\Delta h_2 = 10\%$
h_3	0,5 mm	$\pm 30\%$	$\Delta h_3 = 10\%$
T	25°C	$\pm 15\%$	$\Delta T = 5\%$

Les fonctions coût à optimiser sont celles définies par l'expression (5.5). Pour chaque fonction coût, on introduit une fonction vulnérabilité supplémentaire comme fonction à optimiser en même temps que les fonctions coût originales. On obtient ainsi le problème multiobjectif robuste (PMOR) à quatre fonctions coût :

$$\text{minimiser : } \mathbf{F}(x) = (f_1, f_1^v, f_2, f_2^v) \quad \text{où} \quad f_1^v = (\sigma_1 / \mu_1)^{-1}; f_2^v = (\sigma_2 / \mu_2)^{-1} \quad (5.9)$$

Pour trouver les solutions optimales robustes, on utilise l'algorithme NSGA couplé avec les réseaux de neurones (PMC) avec les caractéristiques montrées en Tableau 5.6. Pour calculer les fonctions vulnérabilités, à chaque génération, on génère 200 tirages aléatoires pour chaque variable continue par la méthode d'Hyper Cube Latin (HCL).

Remarque : Le nombre de générations pour trouver les solutions optimales est de 100 générations, ce qui signifie qu'il faut 3000 évaluations exactes des réponses fréquentielles, plus l'évaluation des échantillons pour calculer la fonction vulnérabilité pour chaque fonction coût, ce qui engendre un nombre prohibitif de 6×10^5 évaluations du problème exact. Dans ce cas, on intègre les réseaux de neurones (PMC) dans la procédure d'optimisation robuste, pour en réduire davantage le nombre d'évaluations du problème exact. Pour cela, le PMC est actualisé à chaque 20 générations à partir de la génération 5. Ainsi sur 100 générations, l'opération ne permet de faire que 170 calculs exacts.

La Figure 5.21 montre les résultats issus de l'optimisation robuste NSGA-PMC, représentant, respectivement, chaque fonction coût et sa vulnérabilité. Dans la pratique, les fonctions vulnérabilités utilisées consistent à minimiser les dispersions autour de chaque solution trouvée. On remarque que l'intervalle de dispersion pour chaque fonction coût est :

- De 0,04% à 0,14% pour les solutions optimales correspondantes à la somme des amplitudes des modes (M10+M11) ;

- De 0% à 0.07% pour les solutions optimales correspondantes à la masse totale du traitement viscoélastique.

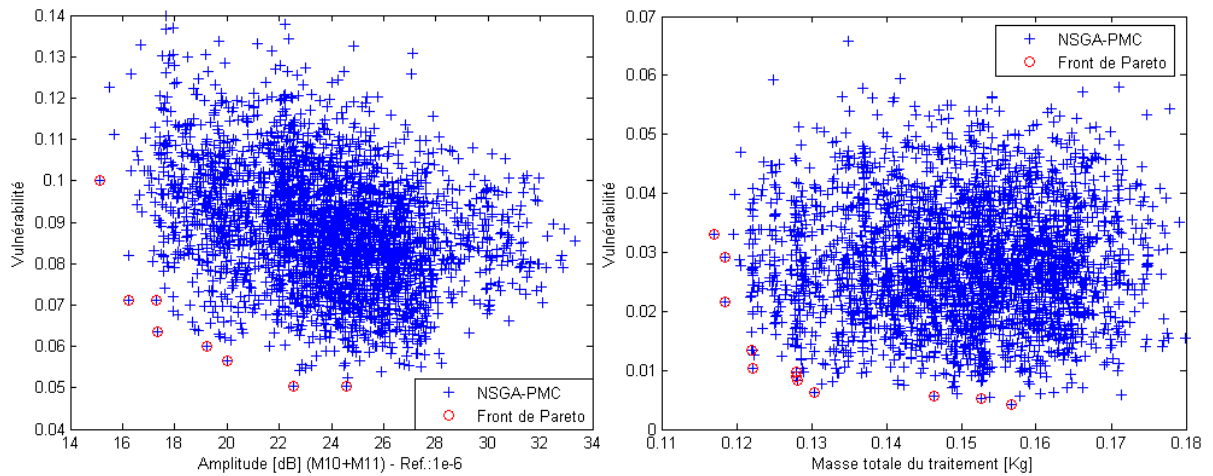


Figure 5.21 – Fonctions coût et leurs vulnérabilités.

La Figure 5.22 représente les Fronts de Pareto des solutions robustes exactes NSGA, et les solutions robustes obtenues par NSGA-PMC, pour les deux fonctions coût. On remarque que les solutions issues des deux procédures sont comparables.

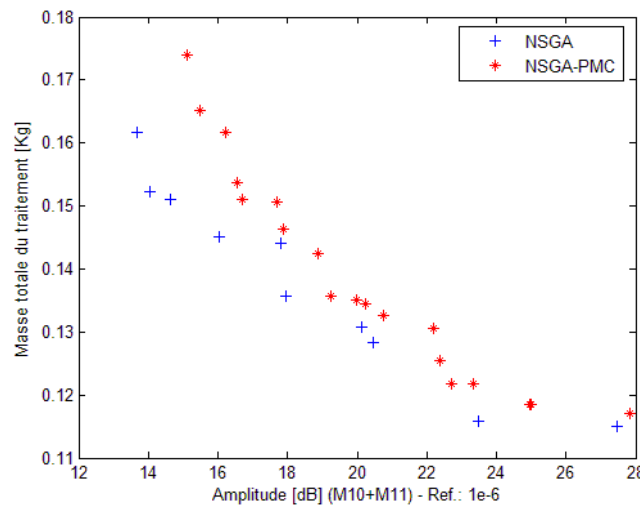


Figure 5.22 – Comparaison entre les solutions robustes NSGA et NSGA-PMC.

Le Tableau 5.12 représente le gain en temps de calcul (temps de CPU) obtenu par la stratégie NSGA-PMC en comparaison avec NSGA. Pour les deux cas d'optimisation, on utilise la méthode de condensation robuste.

Tableau 5.12 – Temps de calcul (NSGA-PMC)

Stratégie	CPU Time [jours]	Rapport [%]
NSGA	23	85
NSGA-PMC	3,5	

La Figure 5.23 montre une comparaison entre les solutions robustes et les solutions déterministes. On peut conclure que les solutions déterministes dominent les solutions

robustes. Néanmoins, les solutions déterministes ne sont pas robustes vis-à-vis des incertitudes sur les paramètres de conception.

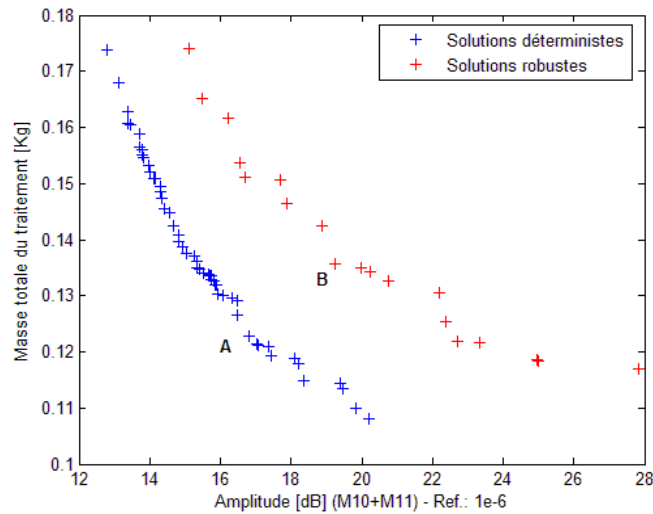


Figure 5.23 – Comparaison entre les solutions déterministes et les solutions robustes.

Dans le but de vérifier la stabilité (niveau de dispersion) des solutions optimales robustes par rapport aux solutions déterministes, on évalue les solutions optimales correspondantes aux points **A** et **B**, indiqués en Figure 5.23. Pour chaque ensemble de solutions, il s'agit de prendre aléatoirement par la méthode d'Hyper Cube Latin (HCL), **200 échantillons** de points pour chaque ensemble, et de calculer les réponses, où les dispersion données autour des variables de conceptions sont : $\Delta h_2 = 5\%$, $\Delta h_3 = 5\%$ et $\Delta T = 2\%$.

L'examen de la Figure 5.24, montre que les solutions robustes (Figure 5.24.a) sont plus stables que les solutions déterministes (Figure 5.24.b) vis-à-vis des incertitudes introduites, ce qui montre que les solutions optimales sont assez robustes (vulnérabilités minimales) pour prendre en compte des petits perturbations.

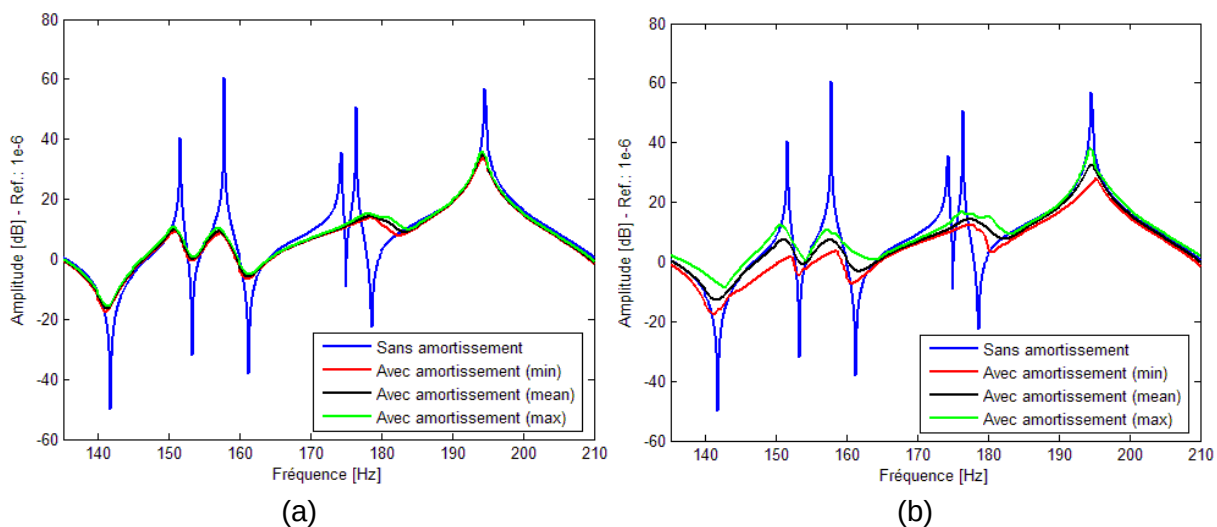


Figure 5.24 – Comparaison entre les solutions robustes (a) et déterministes (b).

5.5 Conclusions

Dans cette partie du mémoire on a vérifié la procédure de couplage entre les algorithmes génétiques multiobjectif déterministes et les stratégies de réanalyse approchée et d'approximation de fonctions montrées au Chapitre 4. Pour cela, on a utilisé une structure moyennement complexe composée par une plaque courbe renforcée par des raidisseurs, partiellement traitée par couche contrainte. Dans un premier temps, on montre le couplage entre la stratégie NSGA et la méthode de condensation robuste de systèmes viscoélastiques. A travers les résultats issus des simulations numériques on a conclu que pour des raisons de coût de calcul, la réanalyse approchée par condensation robuste a un grand intérêt dans des procédures itératives d'évaluation de solutions, comme l'optimisation multiobjectif et/ou de recalage de modèles, qui requièrent un nombre élevé d'évaluations des réponses. Dans un deuxième temps, on a intégré les réseaux de neurones artificiels et les surfaces de réponses dans la procédure d'optimisation multiobjectif déterministe pour accélérer la convergence, et ainsi réduire le temps de calcul de solutions. Ceci a pu être vérifié à travers les résultats des simulations numériques. Finalement on a vérifié la procédure d'optimisation multiobjectif robuste de systèmes viscoélastiques. À cause du très grand nombre d'évaluation des fonctions vulnérabilité on a intégré les réseaux de neurones pour approcher les fonctions vulnérabilité, ce qui a permis un gain de temps très significatif pour le calcul des solutions robustes.

CHAPITRE 6

Eléments Finis Stochastiques et Analyse de Sensibilité pour la Conception Robuste de Systèmes Viscoélastiques

Dans ce chapitre, on propose un modèle de propagation des incertitudes au niveau des éléments finis de plaque sandwich. À travers ce modèle, les incertitudes sont introduites dans les paramètres de conception les plus influents qui caractérisent le traitement viscoélastique de façon originale à travers les fonctions d'interpolation du modèle aux éléments finis dans le but d'obtenir les matrices stochastiques. Pour quantifier l'influence des variables de conception on propose une méthodologie numérique pour évaluer la sensibilité des FRFs de systèmes amortis par rapport aux paramètres géométriques et la température du matériau viscoélastique.

6.1 Quelques concepts fondamentaux

Les origines des incertitudes en mécanique vibratoire sont diverses. En effet, elles découlent des tolérances de fabrication, des conditions aux limites, des variabilités affectant les propriétés des matériaux, etc. (Schuëller, 2001). De plus, la modélisation des systèmes physiques passe généralement par une mise en équations mathématiques qui sont dans la majorité des cas difficiles à résoudre numériquement et dont le coût de résolution est élevée. On est alors amené à faire un certain nombre d'hypothèses simplificatrices pour remédier à cet inconvénient majeur, ce qui résulte alors à une source d'incertitudes qu'on doit prendre en compte dans les modèles. Ceci se traduit par une modélisation plus coûteuse, mais aussi plus réaliste des systèmes mécaniques réels.

D'une manière générale, les incertitudes sont prises en compte dans les modèles selon l'approche non paramétrique qui permet d'introduire les incertitudes directement sur les matrices globales du modèle (Soize, 1999 ; 2000), et les approches paramétriques en utilisant principalement la méthode des éléments finis stochastiques (SFEM), qui combine l'analyse classique par éléments finis et l'analyse statistique (Ghanem et Spanos, 1991 ; Schuëller, 2001).

Dessombz (2001) définit les incertitudes au stade de conception en deux types : les incertitudes statistiques, qu'on modélise par variables aléatoires, dont on connaît bien la loi de probabilité ; et les variables incertaines et bornées, qu'on modélise par des intervalles définies par la physique. De plus, les incertitudes peuvent être classées en quatre grandes catégories :

- **Les paramètres aléatoires** : les paramètres physiques ou mécaniques dont on connaît bien les tolérances. Ils peuvent être, par exemple, l'épaisseur de tôles métalliques, souvent modélisée par une loi gaussienne (Ghanem et Spanos, 1991).

- **Les paramètres mal connus** : les conditions aux limites sont des problèmes typiques. Par exemple, un encastrement correspond à une raideur de très grande valeur, mais dont on ne connaît au mieux qu'un ordre de grandeur ; les différents types d'assemblage, tels que soudage, collage, boulonnage, etc. sont difficiles à modéliser, et il apparaît que les valeurs déterministes utilisées pour représenter ces phénomènes sont insuffisantes.
- **Les paramètres variables** : on peut distinguer ici les paramètres qui peuvent être variables dans le temps, et qu'on ne maîtrise pas bien, par exemple la dégradation ou le vieillissement d'un matériau viscoélastique dans le temps.
- **Les incertitudes de modèle** : ce sont par exemple les lois de comportement choisies qui représentent mal ou de façon incomplète les phénomènes physiques, les erreurs dues au choix du maillage éléments finis, de sa finesse, des éléments choisis, etc. En général, ces incertitudes sont difficiles à évaluer.

6.1.1 Techniques pour résoudre le problème stochastique

Les méthodes existantes pour résoudre les problèmes stochastiques sont normalement classés en quatre grandes catégories (Benaroya et Rehak, 1988 ; Ibrahim, 1987 ; Shuëller, 2001) : la méthode de simulation de Monte Carlo (MC) (Schinozura, 1972 ; Rubinstein, 1981 ; Papadrakakis et Kotsopoulos, 1999) souvent considérée comme la méthode de référence, mais qui a l'inconvénient d'être très coûteuse en temps et en quantité de calculs. Comme alternative, la méthode d'Hyper Cube Latin (HCL) (Iman et Conover, 1980 ; Florian, 1992 ; Mantefel et Randall, 2000) a été proposée, permettant de réduire de manière significative le coût de calcul de la simulation de Monte Carlo tout en conservant son niveau de prédiction ; les méthodes de perturbation qui sont basées sur des expansions en série de Taylor (Kleiber et Hien, 1992 ; Alvin, 1998) ou en série de Neumann (Yamazaki et Schinozuka, 1988 ; Lei et Qiu, 2000), des réponses autour des moyennes des variables aléatoires ; et les méthodes spectrales qui utilisent des fonctions de base de l'espace de Hilbert associées aux problèmes aléatoires (Ghanem et Spanos, 1991 ; Ghanem et Kruger, 1996). Ces fonctions peuvent être des polynômes orthogonaux d'une façon générale, et un chaos polynomial en particulier. Dans ce cas, on utilise des variables aléatoires où les champs aléatoires continus sont discrétisés. Ces catégories de méthodes prennent en compte des variables aléatoires dont on connaît la densité de probabilité. Des variables gaussiennes sont employées dans la plupart des cas ou bien on se ramène par diverses méthodes à un ensemble de variables gaussiennes (Ghanem et Spanos, 1991).

Dans ce mémoire, pour l'analyse dynamique des structures stochastiques viscoélastiques, on est particulièrement intéressé à la méthode d'Hyper Cube Latin (LHC).

6.2 Formulation général du modèle EF viscoélastique stochastique

6.2.1 Discrétisation des champs aléatoires

Un champ aléatoire $H(x, \theta)$ est une collection de variables aléatoires indexées par un paramètre continu $x \in \Omega$, où $\Omega \in R^d$ est un ensemble ouvert décrivant la géométrie du système du système physique. Une procédure de discrétisation est basée sur l'approximation de $H(x, \theta)$ par $\hat{H}(x, \theta)$. Parmi les familles de méthodes utilisées pour discrétiser spatialement un champ stochastique, dont la taille du maillage éléments finis dépend de la longueur de corrélation du champ aléatoire, on utilise dans ce mémoire les méthodes appelées *Series Expansion Methods* (Ghanem et Spanos), qui consistent à coupler un développement en série du champ aléatoire et une analyse spectrale visant à sélectionner les termes les plus importants. Parmi les trois méthodes intégrées dans cette catégorie, on détaille le développement de *Karhunen-Loève (KL)* proposé par Ghanem et Spanos (1991). La discrétisation par KL d'un champ gaussien homogène, est écrit sous la forme suivante :

$$\hat{H}(x, \theta) = \mu + \sum_{r=1}^n H_r(x) \xi_r(\theta) \quad (6.1)$$

où $\{\xi_r, i = 1, \dots, n\}$ sont des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes (moyenne zéro et variance un) ; $\{H_r(x), r = 1, \dots, n\}$ sont des fonctions déterministes ; et x et θ sont, respectivement, le vecteur position du champ et une variable appartenant à l'espace des événements aléatoires.

Soit $C(x_1, x_2)$ la fonction de covariance connue associée à $H(x, \theta)$, bornée, symétrique et définie positive. La décomposition spectrale de $C(x_1, x_2)$ est exprimée comme suit (Ghanem et Spanos, 1991) :

$$C(x_1, x_2) = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r f_r(x_1) f_r(x_2) \quad (6.2)$$

où (λ_r, f_r) représentent, respectivement, les valeurs propres et les fonctions propres de $C(x_1, x_2)$. La décomposition de KL de $H(x, \theta)$ sur la base des fonctions propres $f_r(x)$ est donnée par l'expression suivante :

$$H(x, \theta) = \mu + \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_r} f_r(x) \xi_r(\theta) \quad (6.3)$$

dont la forme tronquée aux r premiers termes de la série est écrite comme suit :

$$\hat{H}(x, \theta) = \mu + \sum_{r=1}^n \sqrt{\lambda_r} f_r(x) \xi_r(\theta) \quad (6.4)$$

6.2.2 Modèle éléments finis stochastique de plaque sandwich

La formulation des éléments finis stochastiques viscoélastiques est basée sur l'utilisation de la décomposition de Karhunen-Loève d'un champ aléatoire $H(x, \theta)$ sur la base des fonctions propres du modèle sandwich dont la formulation déterministe est présentée au Chapitre 3. D'une façon générale, les paramètres incertains choisis pour des systèmes amortis par matériaux viscoélastiques sont liés aux épaisseurs des couches viscoélastiques et couches contraintes, et la température du matériau viscoélastique. A noter que les incertitudes sur la température sont introduites par la formule d'approximation suivante :

$$T(\theta) = T(1 + \delta_T \xi(\theta)) \quad (6.5)$$

où T est la température moyenne et δ_T est la dispersion sur la température.

A travers les relations (3.56) à (3.58), la matrice stochastique de masse de l'élément fini de plaque sandwich à trois couches résulte de la combinaison des matrices de masse de chaque couche. La dispersion des paramètres incertains est introduite dans la matrice de masse qui doit être définie positive comme suit :

$$\mathbf{M}(\theta) = \bigcup_{i=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega_i} H_r(x, \theta) \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_i \right] \quad (6.6)$$

En remplaçant $H_r(x, \theta)$ par l'expression (6.4), la matrice de masse stochastique devient :

$$\mathbf{M}(\theta) \approx \mathbf{M} + \sum_{r=1}^n \mathbf{M}_r \xi_r(\theta) \quad (6.7)$$

où $\mathbf{M} = \bigcup_{i=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega} \mu \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right]$ est la matrice moyenne de masse du élément fini sandwich, et

$\mathbf{M}_i = \bigcup_{i=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega} H_r(x) \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right]$ représente la partie stochastique.

Pour formuler matrice de rigidité de l'élément finis sandwich on doit reprend l'expression (2.24), de sorte que la matrice de raideur aléatoire globale s'exprime comme suit :

$$\mathbf{K}(\omega, \theta, T) = \mathbf{K}_e(\theta) + \mathbf{K}_v(\omega, \theta, T) \quad (6.8)$$

De cette façon, les formes tronquées des matrices aléatoires de rigidités associées aux couches élastiques et viscoélastiques sont écrites comme suit :

$$\mathbf{K}_e(\theta) \approx \mathbf{K}_e + \sum_{r=1}^n \mathbf{K}_{e_r} \xi_r(\theta) \quad (6.9)$$

$$\mathbf{K}_v(\omega, \theta, T) \approx G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}_v + G(\omega, \theta, T) \sum_{r=1}^n \bar{\mathbf{K}}_{v_r} \xi_r(\theta) \quad (6.10)$$

où $\bar{\mathbf{K}}_v$ est la matrice de raideur de la couche viscoélastique avec le module complexe aléatoire factorisé; $\mathbf{K}_e = \bigcup_{i=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega} \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} d\Omega \right]$ et $\bar{\mathbf{K}}_v = \bigcup_{i=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega} \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} d\Omega \right]$ sont, respectivement, les matrices de raideur moyennes élastique et viscoélastique; $\mathbf{K}_{e_r} = \bigcup_{i=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega} H_r(x) \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} d\Omega \right]$ et $\bar{\mathbf{K}}_{v_r} = \bigcup_{i=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega} H_r(x) \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} d\Omega \right]$ représentent, respectivement, les parties aléatoires élastique et viscoélastique.

Les détails de développement des matrices stochastiques pour l'élément de plaque sandwich à trois couches sont donnés dans l'Annexe B.

Lorsqu'on attribue à des zones traitées par matériau viscoélastique un niveau d'incertitude, soit sur les épaisseurs de couches, soit sur la température du matériau viscoélastique, l'équation d'équilibre stochastique de la structure amortie soumise à une excitation harmonique supposée déterministe est écrite sous la forme suivante :

$$\left[\mathbf{K}_e(\theta) + G(\omega, T, \theta) \bar{\mathbf{K}}_v(\theta) - \omega^2 \mathbf{M}(\theta) \right] \mathbf{Q}(\omega, \theta) = \mathbf{F}(\omega) \quad (6.11)$$

ou encore sous la forme suivante :

$$[\mathbf{Z}(\omega, T) + \mathbf{Z}(\omega, \theta, T)] \mathbf{Q}(\omega, \theta) = \mathbf{F}(\omega, \theta) \quad (6.12)$$

où $\mathbf{M}(\theta)$, $\mathbf{K}_e(\theta)$ et $\bar{\mathbf{K}}_v(\theta)$ sont les matrices stochastiques de masse et de raideur; $G(\omega, T, \theta)$ est le module complexe stochastique; $\mathbf{Q}(\omega, \theta)$ et $\mathbf{F}(\omega)$ sont, respectivement, les vecteurs de réponses stochastiques et de forces. $\mathbf{Z}(\omega, T) = \mathbf{K}_e + G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}_v - \omega^2 \mathbf{M}$ est la matrice de raideur dynamique moyenne; $\mathbf{Z}(\omega, \theta, T) = \sum_{r=1}^n \left(\mathbf{K}_{e_r} + G(\omega, \theta, T) \bar{\mathbf{K}}_{v_r} - \omega^2 \mathbf{M}_r \right) \xi_r(\theta)$ est la raideur dynamique stochastique.

6.3 Calcul des réponses stochastiques

Dans le cas d'un modèle aux éléments finis de grande taille, la résolution du système aléatoire (6.12) à travers l'inversion directe de la matrice incertaine $\mathbf{Z}(\omega, \theta, T)$ est pratiquement inexploitable et conduirait à des temps de calcul prohibitifs. Dans ce cas, on fait l'appel à la technique de condensation robuste pour des systèmes viscoélastiques (Cf. Section 4.1, Chapitre 4) en ramenant la matrice dynamique aléatoire $\mathbf{Z}(\omega, \theta, T)$ à une forme réduite $\mathbf{Z}_r(\omega, \theta, T)$.

6.3.1 La méthode d'Hyper Cube Latin (HCL)

Cette méthode, introduite par Iman et Conovers (1980) puis améliorée par Florian (1992) est considérée comme l'une des meilleures approches de tirages aléatoires de petits échantillons. La méthode d'Hyper Cube Latin (HCL) consiste à diviser l'intervalle de variation des variables incertaines en n intervalles dont les probabilités d'obtenir les valeurs incluses dans ceux-ci sont égales. Dans chaque intervalle on choisit une valeur particulière. Cette valeur peut être définie comme le centre de l'intervalle ou déterminée de manière aléatoire. La méthode consiste ensuite à choisir de manière aléatoire une valeur particulière parmi les n valeurs de chaque paramètre puis à exécuter le calcul. Lorsqu'une valeur d'une variable a été sélectionnée, elle est éliminée et ne peut pas être sélectionnée une seconde fois. Il y a donc n calculs à effectuer.

6.4 Sensibilité paramétrique des systèmes traités par couche contrainte

Dans cette section, on propose une stratégie numérique pour caractériser l'influence des paramètres géométriques des traitements viscoélastiques par couches contraintes, sans recourir à l'analyse exacte. Puisqu'on s'intéresse à l'optimisation de systèmes viscoélastiques et l'introduction des incertitudes dans les paramètres de conception, cette stratégie constitue un outil efficace pour l'analyse dans la phase d'avant-projet de systèmes amortis par matériaux viscoélastiques : il s'agit de l'analyse de sensibilité paramétrique, qui permet, sous une forme approchée, d'analyser l'influence des variations paramétriques des réponses mécaniques (statiques et/ou dynamiques) de tels systèmes. En conception robuste des structures l'analyse de sensibilité, l'optimisation et la propagation des incertitudes sont trois phases indispensables pour aboutir à une conception orientée qualité.

6.4.1 Définition de la sensibilité paramétrique – Evaluation par différences finies

L'analyse de sensibilité est généralement basée sur l'évaluation des dérivées (le plus fréquemment limitées au premier ordre) de la réponse des systèmes par rapport à un ensemble de paramètres d'intérêt. Elle peut être associée à différents types de réponses mécaniques : déplacements statiques, contraintes dynamiques, solutions propres (valeurs et vecteurs propres), réponses fréquentielles et réponses temporelles (Huang et al, 1996). Selon Murthy et Haftka (1988), la conception optimale des systèmes mécaniques dans une phase d'avant-projet a une relation étroite avec l'analyse de sensibilité paramétrique puisqu'une partie significative des algorithmes d'optimisation exécutent généralement un grand nombre d'évaluations des réponses de systèmes pour différentes valeurs des variables de conception. Les dérivées peuvent être employées pour approcher la réponse des systèmes modifiés, ce qui réduit le coût de réanalyses du problème exact, particulièrement pour les systèmes industriels dont les modèles éléments finis sont d'ordre élevé. De même, lors du calcul de la variabilité des structures en présence d'incertitudes, il est également nécessaire de procéder au préalable à une analyse de sensibilité des variables de conception afin de ne retenir que les variables les plus influentes.

Plusieurs approches ont été développées pour faire l'analyse de sensibilité des réponses dynamiques de systèmes élastiques. Parmi les techniques pour le calcul des sensibilités des solutions propres on peut citer : la méthode modale (Fox et Kapoor, 1968) ; la méthode de Nelson (Nelson, 1976) ; et la méthode modale améliorée (Lim et al, 1987). La méthode modale nécessite principalement le calcul de toutes les solutions propres du système mécanique, qui peut conduire à des coûts numériques prohibitifs dans le cas de systèmes complexes. Cependant, les applications à des systèmes mécaniques contenant des composants viscoélastiques ne sont pas connues, ce qui motive l'étude rapportée dans cette section.

Dans ce qui suit, la formulation des sensibilités des réponses fréquentielles (FRFs) par rapport aux paramètres géométriques et par rapport à la température de systèmes amortis par matériaux viscoélastiques est développée et appliquée aux structures mécaniques traitées par couches contraintes. Pour cela, on fait appel aux développements présentés dans la Section 3.9, au Chapitre 3, sur la modélisation et la paramétrisation des modèles de plaques sandwichs couplées avec l'approche module complexe pour représenter de comportement des matériaux viscoélastiques.

Les matrices globales de masse et de raideur, $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}(\omega, T) \in R^{N \times N}$, d'un système mécanique quelconque traité par matériaux viscoélastiques, apparaissant dans l'expression (2.23.a) (Cf. Section 2.6, Chapitre 2), conduisent à la dépendance des réponses dynamiques de ce système par rapport à un ensemble de paramètres de conception (caractéristiques physiques et géométriques, température du matériau viscoélastique). Cette dépendance peut être exprimée sous la forme générale comme suit :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{M}(\mathbf{p}), \mathbf{K}(\mathbf{p})) \quad (6.13)$$

où $\mathbf{r}$ et $\mathbf{p}$ représentent, respectivement, les vecteurs de réponses (statiques, fréquentielles, temporelles, etc.) et les paramètres de conception. La sensibilité des réponses structurales par rapport à un paramètre de conception donné p_i , évaluée pour un ensemble donné de valeurs de ce paramètre $\mathbf{p}^0$, est définie par une dérivée partielle comme suit :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_i} \right|_{\mathbf{p}^0} = \lim_{\Delta p_i \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{r}(\mathbf{M}(p_i^0 + \Delta p_i), \mathbf{K}(p_i^0 + \Delta p_i)) - \mathbf{r}(\mathbf{M}(p_i^0), \mathbf{K}(p_i^0))}{\Delta p_i} \right] \quad (6.14)$$

où Δp_i représente une variation arbitraire appliquée à la valeur courante du paramètre p_i^0 , alors que tous les autres paramètres demeurent inchangés.

La sensibilité de la réponse par rapport à p_i peut être estimée par la méthode classique des différences finies, où l'on calcule successivement les réponses du système mécanique correspondant à $p_i = p_i^0$ et $p_i = p_i^0 + \Delta p_i$, respectivement, par l'expression suivante :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_i} \right|_{p^0} \approx \left[\frac{\mathbf{r}(\mathbf{M}(p_i^0 + \Delta p_i), \mathbf{K}(p_i^0 + \Delta p_i))}{\Delta p_i} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{M}(p_i^0), \mathbf{K}(p_i^0))}{\Delta p_i} \right] \quad (6.15)$$

Une telle approche est en général inefficace du point de vue de calcul. Par ailleurs, les résultats dépendent du choix des valeurs des l'incrément des paramètres. Une autre stratégie, retenue dans cette étude, consiste à calculer les dérivés analytiques des réponses structurales, comme les fonctions réponses en fréquence (FRFs) de systèmes amortis par rapport aux paramètres d'intérêt.

6.4.2 Sensibilité des réponses fréquentielles par rapport aux paramètres structuraux et par rapport à la température

Si on prend la matrice complexe des FRFs d'un système viscoélastique donné par l'expression (2.28) (Cf. Section 2.6, Chapitre 2), la sensibilité par rapport à un paramètre structural donné peut être calculée en dérivant la relation $\mathbf{H}(\omega, T, p) \mathbf{H}^{-1}(\omega, T, p) = \mathbf{I}$, ce qui mène à l'expression suivante:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}(\omega, T, p)}{\partial p_i} \right|_{(\omega, T^0, p^0)} = -\mathbf{c} \mathbf{H}(\omega, T^0, p^0) \left(\frac{\partial \mathbf{K}(\omega, T^0, p^0)}{\partial p_i} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}(p^0)}{\partial p_i} \right) \mathbf{H}(\omega, T^0, p^0) \mathbf{b} \quad (6.16)$$

où :

$$\mathbf{H}(\omega, T) = \mathbf{c} [\mathbf{K}_e + G(\omega_r, T^0) \bar{\mathbf{K}}_v - \omega^2 \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{b}$$

Concernant l'équation ci-dessus, il convient de noter que lorsque le paramètre apparaît explicitement dans les matrices $\mathbf{M}$ ou $\mathbf{K}(\omega, T)$ (c'est fréquemment le cas de modèles paramétrés (Cf. Section 3.9, Chapitre 3)), le calcul des dérivés de ces matrices par rapport à un tel paramètre est beaucoup moins coûteux, ce qui résulte généralement du caractère creux des matrices.

Remarque : Pour les modèles amortis de grande taille, il faut présenter la formule ci-dessus dans un espace réduit en utilisant une base de condensation robuste vis-à-vis des modifications paramétriques introduites par le traitement viscoélastique. Ainsi, au lieu de manipuler $\mathbf{H}(\omega, T)$, ce qui peut être coûteux, on propose d'exploiter $\mathbf{H}_r(\omega, T) = \mathbf{T}^T \mathbf{H}(\omega, T) \mathbf{T}$, où $\mathbf{T}$ est la base de réduction robuste exprimée par l'expression (4.14) déjà proposée dans la Section 4.1.1, au Chapitre 4.

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}_r(\omega, T, p)}{\partial p_i} \right|_{(\omega, T^0, p^0)} = -\mathbf{c} \mathbf{H}_r(\omega, T^0, p^0) \left(\frac{\partial \mathbf{K}_r(\omega, T^0, p^0)}{\partial p_i} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}_r(p^0)}{\partial p_i} \right) \mathbf{H}_r(\omega, T^0, p^0) \mathbf{b} \quad (6.17)$$

Par contre, le calcul des dérivées des réponses fréquentielles par rapport à la température des matériaux viscoélastiques exige que ce paramètre apparaisse explicitement

dans les matrices de rigidité de la sous-structure viscoélastique. Dans ce cas, le procédé basé sur l'utilisation du *Principe de Superposition Fréquence-Température (PSFT)* et de la fréquence réduite (Cf. Chapitre 2, Section 2.3) peut être utilisé.

En combinant les expressions (2.10) et (2.27) avec l'expression (6.16), on obtient :

$$\mathbf{H}(\omega, T) = \mathbf{c} [\mathbf{K}_e + G(\omega_r, T^0) \bar{\mathbf{K}}_v - \omega^2 \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{b} \quad (6.18)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}(\omega, T, p)}{\partial T} \right|_{(\omega, T^0, p^0)} = -\mathbf{c} \mathbf{H}(\omega_r, T^0, p^0) \left(\frac{\partial G(\omega_r, T^0)}{\partial T} \bar{\mathbf{K}}_v(p^0) \right) \mathbf{H}(\omega_r, T^0, p^0) \mathbf{b} \quad (6.19)$$

Si on considère la même remarque pour de systèmes industriels, l'expression (6.19) est ramenée à la forme suivante :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}_r(\omega, T, p)}{\partial T} \right|_{(\omega, T^0, p^0)} = -\mathbf{c} \mathbf{H}_r(\omega_r, T^0, p^0) \left(\frac{\partial G(\omega_r, T^0)}{\partial T} \bar{\mathbf{K}}_{vr}(p^0) \right) \mathbf{H}_r(\omega_r, T^0, p^0) \mathbf{b} \quad (6.20)$$

A partir des relations (2.10), la dérivée du module complexe par rapport à la température peut être calculé comme suit:

$$\frac{\partial G(\omega_r, T^0)}{\partial T} = \frac{\partial G}{\partial \omega_r} \frac{\partial \omega_r}{\partial T} = \frac{\partial G}{\partial \omega_r} \frac{\partial \alpha_T}{\partial T} \omega \quad (6.21)$$

Les fonctions $G(\omega_r)$ et $\alpha_T(T)$ peuvent être obtenues à partir des essais expérimentaux pour les matériaux viscoélastiques spécifiques. Certaines de ces fonctions sont proposées par Nashif et al. (1985). Comme résultat d'un travail expérimental conséquent, Drake et Soovere (1982) suggèrent des expressions analytiques pour le module complexe et le facteur de décalage pour différents matériaux viscoélastiques disponibles dans le commerce, comme les expressions (2.11) et (2.12) du matériau viscoélastique ISD112™ produit par 3M.

6.5 Applications numériques

6.5.1 Sensibilité paramétrique

Pour illustrer le calcul de sensibilité des FRFs de systèmes amortis par matériaux viscoélastiques, on utilise le modèle aux éléments finis d'une plaque plane en aluminium, avec les conditions aux limites libres, totalement traitée par couche contrainte, comme illustré en Figure 6.1. Pour les simulations, on utilise le matériau viscoélastique 3M ISD112™ à la température de 25°C. Les caractéristiques physiques et géométriques utilisées pour générer le modèle EF sont données en Tableau 6.1. Le modèle est constitué de 80 éléments finis de plaque à trois couches, ayant 99 noeuds et 693 degrés de liberté. Les calculs consistent à obtenir les sensibilités des FRFs collocalisées associées au point I , dénote par $\mathbf{H}_I(\omega, T, p)$.