

Universidade Federal de Uberlândia
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS POR
MEIO DE ANIMAÇÕES MATEMÁTICAS
UTILIZANDO O MANIM EM PYTHON**

Heronilza Silva Lima



Uberlândia-MG

2026

Heronilza Silva Lima

**ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS POR
MEIO DE ANIMAÇÕES MATEMÁTICAS
UTILIZANDO O MANIM EM PYTHON**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática

Linha de pesquisa: Geometria

Orientador(a): Ariosvaldo Marques Jatobá



Uberlândia-MG

2026

Dedico este trabalho a Deus, o maior orientador da minha vida. Sem a direção dada por Deus, a conclusão deste trabalho não seria possível. Por causa disso, dedico esta dissertação a Ele. Com muita gratidão no coração.

Agradecimentos

Agradeço a Deus e à minha família por me darem condições e incentivo para iniciar e concluir o mestrado.

Agradeço ao meu orientador, Ariosvaldo Marques Jatobá, por todo o conhecimento, pela paciência e ajuda nesse período.

Aos meus amigos, por todos os momentos de descontração e por ouvirem meus desabafos nos momentos sombrios.

Aos professores pela dedicação e compromisso com o ensino. Tenho profunda admiração e respeito por todos eles, desde os professores do ensino básico ao superior.

Gratidão por todas as pessoas que de forma direta ou indireta me ajudaram a escrever esse trabalho de conclusão de curso.

LIMA, H. S. .*Ensino de Funções Trigonométricas por meio de Animações Matemáticas Utilizando o Manim em Python*. 2026. 94p. Dissertação de Mestrado , Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

As animações são uma ferramenta altamente eficaz no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Elas proporcionam uma visualização dinâmica e interativa dos conteúdos, permitindo que os estudantes acompanhem, de forma mais concreta, o comportamento e o movimento dos objetos matemáticos. Essa abordagem ajuda na compreensão de conceitos abstratos de maneira lúdica, acessível e engajadora.

O Manim (Mathematical Animation Engine) é uma biblioteca desenvolvida em Python que possibilita a criação de animações envolvendo, por exemplo, figuras geométricas, expressões matemáticas e gráficos em duas e três dimensões. Ele foi criado por Grant Sanderson, conhecido pelo canal de divulgação científica 3Blue1Brown, voltado ao ensino de Matemática no YouTube.

Por meio dessa vertente educativa, este trabalho tem como objetivo apresentar a perspectiva visual e prática do estudo das funções trigonométricas por meio do Python, com o intuito de diversificar e aprimorar o aprendizado acerca desse objeto de estudo.

Palavras-chave: Funções trigonométricas, Biblioteca Manim e Python, Matemática Lúdica.

LIMA, H. S. .*Teaching Trigonometric Functions with Mathematical Animations Using Manim in Python*. 2026. 94p. M. Sc. Dissertation , Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

Animations are a highly effective tool in the teaching-learning process of Mathematics. They provide a dynamic and interactive visualization of the content, allowing students to follow, in a more concrete way, the behavior and movement of mathematical objects. This approach helps in the understanding of abstract concepts in a playful, accessible and engaging way. Manim (Mathematical Animation Engine) is a library developed in Python that allows the creation of animations involving, for example, geometric figures, mathematical expressions and graphs in two and three dimensions. It was created by Grant Sanderson, known for the science communication channel 3Blue1Brown, focused on teaching Mathematics on YouTube. Through this educational aspect, this work aims to bring the visual and practical perspective of the study of trigonometric functions through Python with the aim of diversifying and improving the object of study.

Keywords: Trigonometric functions, Manim Library and Python, Playful Mathematics.

Sumário

Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	vi
Introdução	1
1 Fundamentação Teórica	4
1.1 A origem da trigonometria	4
1.1.1 O Seqt e as pirâmides no Egito Antigo	4
1.1.2 O relógio de sol criado pelos gregos	5
1.1.3 A curiosidade hindu pela astronomia	8
1.1.4 Os árabes e a Escola de Bagdá	9
1.1.5 O início da trigonometria contemporânea	11
1.2 A trigonometria atual	11
1.2.1 Sistemas de coordenadas no plano	11
1.2.2 Triângulo retângulo: razões trigonométricas	14
1.2.3 Medida de arcos e o radiano	17
1.2.4 Círculo orientado	19
1.2.5 Extensões das funções trigonométricas de qualquer ângulo.	21
1.3 Manim e Notion como recursos para o ensino de Matemática	30
1.3.1 Manim (Mathematical Animation Engine)	31
1.3.2 O Google Colab	32
1.3.3 Instalação do Manim	32
1.3.4 Passo a passo para criação de uma animação no Colab	33
1.3.5 Texto no Colab	34
1.3.6 Eixos coordenados no Colab	34
1.3.7 Círculos no Colab	35

1.3.8 Notion	37
2 Metodologia	39
2.1 Caracterização do produto educacional	39
2.1.1 Caracterização da pesquisa: pesquisa aplicada e bibliográfica	40
2.1.2 Público-alvo e contexto educacional	41
2.1.3 Desenvolvimento das animações e recursos tecnológicos	41
2.1.4 Utilização da Inteligência Artificial no desenvolvimento das animações	42
2.1.5 Fundamentação pedagógica e aprendizagem significativa	43
3 Desenvolvimento	45
3.1 Aula 1: Relações trigonométricas no triângulo retângulo	45
3.1.1 Definição de seno, cosseno e tangente por meio de semelhança de triângulos.	45
3.1.2 Seno, cosseno e tangente só dependem do ângulo	47
3.1.3 Relações entre seno, cosseno e tangente	48
3.1.4 Ângulos de 30° , 45° e 60°	51
3.2 Aula 2: Razões trigonométricas na circunferência	54
3.2.1 Arcos de circunferência	54
3.2.2 Ângulo central	55
3.2.3 Medida e comprimento de arcos de circunferência	56
3.2.4 Unidades de medida de arcos de circunferência	57
3.2.5 Circunferência orientada	60
3.2.6 Circunferência trigonométrica	61
3.2.7 Arcos côngruos	62
3.2.8 Seno e cosseno de um arco	63
3.2.9 Tangente de um arco	69
3.3 Aula 3: Funções trigonométricas	72
3.3.1 Função Seno	72
3.3.2 Função cosseno	74
3.3.3 Função tangente	76
4 Considerações Finais	79
Referências Bibliográficas	81

Lista de Figuras

1.1	Representação da inclinação das faces de uma pirâmide	5
1.2	Teorema de Ptolomeu para um quadrilátero cíclico.	7
1.3	Relógio de sol criado pelo gregos	8
1.4	O "Jiva"hindú	9
1.5	Representação do jiva pelo príncipe Al-Battani	10
1.6	Eixos Coordenados	11
1.7	Coordenadas de P no sistema retângular x0y	12
1.8	Quadrantes	13
1.9	Círculo Unitário	13
1.10	Razões trigonométricas em um triângulo retângulo	14
1.11	Semelhança de triângulos retângulos	15
1.12	Triângulo Retângulo e seus elementos	16
1.13	Representação de arcos em circunferências concêntricas	17
1.14	Nomenclatura de arcos e raios em circunferências concêntricas	18
1.15	1 radiano	18
1.16	Arco $\widehat{AB}$	19
1.17	$\text{med}(\widehat{AB}) = \frac{\pi}{2}\text{rad}$ ou $\text{med}(\widehat{AB}) = 90^\circ$	20
1.18	$\text{med}(\widehat{AB}) = \frac{-3\pi}{2}\text{rad}$ ou $\text{med}(\widehat{AB}) = -270^\circ$	20
1.19	Ilustração do arco $\widehat{APB}$	21
1.20	$F(x) = P, \text{med}(\widehat{AP}) = x$	22
1.21	Círculo representando a $\text{med}(\widehat{AP}) = x + 2k\pi$	23
1.22	Sinal do par ordenado $(\text{sen } x, \text{cos } x)$	24
1.23	$\text{med}(\widehat{AB}) = x$, no 2º quadrante	24
1.24	$\text{med}(\widehat{AB}) = x$, no 3º quadrante	25
1.25	$\text{med}(\widehat{AB}) = x$, no 4º quadrante	26
1.26	Gráfico da função $y = \text{sen } x$, para $0 \leq x \leq 2\pi$	26

1.27	Gráfico da função $y = \cos x$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.	27
1.28	Gráficos das funções seno e cosseno.	27
1.29	Representação geométrica função tangente.	28
1.30	Representação geométrica das funções seno e cosseno.	29
1.31	Gráfico da função tangente $y = \operatorname{tg}(x)$.	29
1.32	Logo do Manim	31
1.33	Logo do Google Colab	32
1.34	Código de instalação do Manim no Google Colab	32
1.35	Código de verificação da instalação do Manim	33
1.36	Código animação em texto	34
1.37	Print da animação em texto	34
1.38	Código Eixos Coordenados	34
1.39	Eixos Coordenados	35
1.40	Código do Círculo com pontos e linha	35
1.41	Círculo com pontos e linha	36
1.42	Ambiente inicial do Notion.	37
1.43	Página da Aula 1: Relações trigonométricas.	38
1.44	Organização de informações em tabela no ambiente Notion.	38
3.1	Aula 1: Relações trigonométricas no triângulo retângulo	45
3.2	Triângulo retângulo $\triangle ABC$.	46
3.3	Semelhança de triângulos retângulos.	46
3.4	Triângulos retângulos semelhantes.	48
3.5	Relação fundamental.	49
3.6	Triângulo retângulo com ângulo α .	50
3.7	Triângulo retângulo com ângulos α e β .	50
3.8	Triângulo equilátero ABC e sua altura relativa ao lado BC .	51
3.9	Cálculo da altura em um triângulo equilátero.	52
3.10	Triângulo retângulo isósceles.	53
3.11	Aula 2: Razões trigonométricas na circunferência	54
3.12	Arcos $\widehat{AB}$.	54
3.13	Classificação dos arcos de circunferência.	55
3.14	Ângulo central e arco correspondente em uma circunferência.	56
3.15	Exemplos de medidas de ângulos centrais e arcos correspondentes.	56
3.16	Arcos de circunferências concêntricas de mesmo ângulo central α .	57

3.17	Divisão da circunferência em 360° e detalhe da unidade de 1° .	57
3.18	Representação dos arcos notáveis na circunferência.	58
3.19	Definição de 1 radiano.	59
3.20	Circunferência orientada indicando sentidos positivo e negativo.	60
3.21	Círculo trigonométrico.	62
3.22	Circunferência trigonométrica com o arco $\frac{\pi}{3}$.	63
3.23	Eixo dos Senos e Cossenos	64
3.24	Sinais do seno e cosseno nos quatro quadrantes.	65
3.25	Redução ao 1° quadrante para arcos suplementares.	66
3.26	Redução ao 1° quadrante para arcos que diferem de π .	67
3.27	Redução ao 1° quadrante para arcos replementares ($2\pi - \alpha$).	68
3.28	Redução ao 1° quadrante para arcos replementares ($2\pi - \alpha$ e $-\alpha$).	69
3.29	Ciclo trigonométrico e a representação da tangente no ponto T .	70
3.30	Sinais da tangente nos quatro quadrantes do ciclo trigonométrico.	71
3.31	Aula 3: Funções trigonométricas	72
3.32	Representação do seno do arco AP no eixo vertical v .	73
3.33	Simetria do seno dos arcos notáveis.	74
3.34	Gráfico da função $f(x) = \sin(x)$.	74
3.35	Representação do cosseno do arco $\widehat{AP}$ no eixo horizontal u .	75
3.36	Gráfico da função $f(x) = \cos x$.	76
3.37	Representação geométrica da tangente do arco $\widehat{AP}$ no eixo das tangentes t .	77
3.38	Gráfico da função $f(x) = \operatorname{tg} x$.	78

Lista de Tabelas

1.1	Tabela do seno e cosseno dos arcos notáveis	30
1.2	Tabela da tangente para arcos notáveis	30
3.1	Tabela das razões trigonométricas dos ângulos notáveis.	53
3.2	Valores de seno e cosseno para arcos notáveis e arcos de eixos.	65
3.3	Valores da tangente para arcos notáveis e arcos de eixos.	71

Introdução

O ensino de Matemática e, por extensão, o aprendizado estão imersos nas inovações tecnológicas que surgem cotidianamente. Uma educação engessada e tradicionalista perde espaço para a dinâmica da vida moderna, repleta de vídeos, jogos e mídias aos quais a sociedade, de modo geral, tem acesso na atualidade.

Nessa perspectiva, o processo de ensino-aprendizagem da Matemática necessita de atualizações contínuas. Os avanços tecnológicos exigem das diversas áreas do conhecimento — o que inclui a educação matemática — abordagens mais dinâmicas, inclusivas e didáticas ao longo do tempo.

Nos últimos séculos, o ensino de maneira geral – a matemática em particular – passou por uma série de significativas mudanças, tanto com relação a áreas de conhecimento como em relação à prática pedagógica exercida em sala de aula. É notória a presença e a significância que essa ciência tem em nosso cotidiano. Por conta disso, é indispensável que estejamos aptos a redescobrir maneiras mais simples e dinâmicas de ensiná-la na sala de aula, devido a sua importância para as práticas cotidianas de nossos alunos [12].

Ainda nessa vertente, as funções trigonométricas são conteúdos que abrangem diversos contextos presentes na nossa realidade, desde ondas eletromagnéticas, no estudo da Física, até o movimento oscilatório de um pêndulo, por exemplo. No entanto, a forma como geralmente são abordadas, totalmente teórica e tradicionalista, pode trazer uma perspectiva totalmente desvinculada da realidade ou, por outro lado, uma abordagem inadequada pode não proporcionar uma boa percepção e retenção de aspectos essenciais envolvidos no objeto de estudo.

Assim, a Matemática da escola, que por vezes aparece distante da realidade, exige do educador o domínio não apenas do conteúdo, mas também das novas tecnologias que proporcionem um aspecto mais prático e real na exposição do conteúdo.

Dos Santos discorre sobre esse fato em seu artigo "Jogos Matemáticos como Ferramenta Educacional Lúdica no Processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática na Educação Básica", quando diz:

A Matemática exposta nas escolas de Educação Básica e a realidade do mundo moderno marcham em sentidos antagônicos, enquanto o mundo contempla o aparecimento de novas tecnologias, o ensino de Matemática praticamente permanece sendo revelado nos mesmos moldes do início do século XX. [11]

Por outro lado, existem diversas estratégias pedagógicas voltadas à melhoria da compreensão dos conteúdos matemáticos, que vão desde jogos didáticos e documentários sobre a origem histórica dos temas até animações tecnológicas que auxiliam na visualização de aspectos fundamentais de determinado assunto.

Sendo assim, este trabalho propõe a utilização de animações criadas com a biblioteca Manim (Mathematical Animation Engine), desenvolvida em Python, como recurso didático. A intenção é apresentar uma sugestão de abordagem para o ensino de funções trigonométricas sob uma perspectiva dinâmica e prática do objeto de estudo.

A linguagem Python, aliada à biblioteca Manim, proporciona a representação animada por meio de vídeos, nos quais os alunos podem observar a estrutura, as oscilações, os períodos, a amplitude e a forma de diversas funções e objetos de conhecimento matemático. No presente estudo, o foco recairá sobre as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente.

A proposta deste trabalho, portanto, conecta o conteúdo das funções trigonométricas simples às animações do Manim para possibilitar o vislumbre dos aspectos práticos, dinâmicos e funcionais das funções mencionadas.

Portanto, o objetivo geral deste trabalho é apresentar, por meio da biblioteca Manim na linguagem Python, uma proposta de abordagem dinâmica, inclusiva e didática das principais funções trigonométricas — frequentemente consideradas o “calcanhar de Aquiles” de muitos alunos da educação básica — visando contribuir para a melhoria da qualidade do ensino nas redes pública e privada.

Para tanto, foram delineados os seguintes objetivos específicos:

- Discorrer sobre a origem das funções trigonométricas, desde a noção fundamental do triângulo retângulo, onde se definem as razões seno, cosseno e tangente para ângulos agudos, até a transição para o ciclo trigonométrico, abordando as principais demonstrações, axiomas e corolários relacionados;
- Apresentar a biblioteca Manim, detalhando os códigos essenciais para a criação das animações;
- Sugerir três planos de aula que integrem o ensino de funções trigonométricas às animações produzidas no Google Colab e apresentadas no Notion, explorando o potencial do recurso tecnológico como mediador da aprendizagem.

Assim, para o desenvolvimento deste trabalho, realizou-se uma pesquisa bibliográfica acerca da origem e do ensino das funções trigonométricas, de natureza aplicada, com objetivo descritivo, abordagem qualitativa e procedimento bibliográfico, culminando na elaboração de uma proposta de aula utilizando as animações desenvolvidas em Python utilizando a biblioteca Manim.

Por conseguinte, na fundamentação teórica, discorremos sobre a origem da trigonometria por meio de uma pesquisa bibliográfica, na qual podemos conhecer o que levou nossos antepassados a criar os fundamentos e conceitos que formaram a base para o que hoje conhecemos sobre as funções trigonométricas. Partindo dessa ideia, apresentamos as principais demonstrações relacionadas ao objeto de estudo, proporcionando uma visão matemática das definições e dos aspectos conceituais atrelados aos principais teoremas e proposições aos quais, nos dias atuais, temos acesso por meio dos materiais didáticos disponíveis. Neste tópico, também abordaremos algumas informações sobre a biblioteca Manim e o aplicativo de organização Notion, nos quais iremos trabalhar no desenvolvimento deste trabalho, a fim de conhecermos a origem, as funções e os trabalhos relacionados a essas duas tecnologias utilizadas.

Além disso, na metodologia, detalhamos a escolha do tipo de pesquisa, fundamentamos o método utilizado e a abordagem adotada para a elaboração deste trabalho.

No desenvolvimento, apresentamos a proposta de aula sobre as funções trigonométricas, mediada pelas imagens e animações produzidas com a biblioteca Manim em Python — o ponto central desta dissertação. Nesta seção, discorremos sobre o plano de ensino, abrangendo desde o conteúdo teórico até os materiais utilizados na sequência didática. Incluímos, ainda, links para as aulas animadas, permitindo que o leitor acompanhe todos os vídeos e imagens criadas para a abordagem das funções trigonométricas no aplicativo Notion.

Por fim, nas considerações finais, apresentamos um compilado do trabalho, destacando os principais aspectos observados durante a pesquisa. Nesse fechamento, são analisados os pontos positivos e os desafios surgidos ao longo de todo o processo de estudo e investigação deste mestrado.

Fundamentação Teórica

1.1 A origem da trigonometria

1.1.1 O Seqt e as pirâmides no Egito Antigo

Um longo caminho foi percorrido pela trigonometria desde as civilizações antigas até a trigonometria contemporânea. Esse percurso foi marcado por situações e necessidades reais enfrentadas por diferentes povos em seu cotidiano. Os primeiros vestígios da trigonometria remontam aos antigos egípcios e mesopotâmios.

Na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces, e pode ter sido essa a preocupação que levou os egípcios a introduzir um conceito equivalente ao de cotangente de um ângulo. Na tecnologia moderna, é essencial medir o grau de inclinação de uma reta por uma razão entre segmentos verticais e horizontais, que é recíproca da usada costumeiramente no Egito. A palavra egípcia seqt significava o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura. [...] Portanto, o seqt da face de uma pirâmide era o quociente do afastamento horizontal pelo vertical, o primeiro medido em mãos, o segundo, em cúbitos. [6]

Na [Fig. 1.1](#) abaixo está representado um modelo de pirâmide de base quadrada, no qual podemos visualizar a inclinação de uma de suas faces. Na construção das pirâmides no Egito Antigo, era essencial manter constante a inclinação dessas faces. Para determinar essa inclinação, os egípcios dividiam o afastamento horizontal $\overline{BC}$ pela vertical $\overline{BA}$. Essa razão era conhecida por eles como Seqt, o que atualmente corresponde ao conceito de cotangente.

Nesse período, eles ainda não conheciam formalmente o conceito de triângulo retângulo como o entendemos hoje. No entanto, podemos observar que, intuitivamente, já utilizavam essa ideia, uma vez que, para manter constante a inclinação das faces da pirâmide, o Seqt de cada uma delas deveria

permanecer igual. Isso implica que o eixo de simetria da pirâmide deveria estar a 90° em relação à base sobre a qual a pirâmide estava sendo construída.

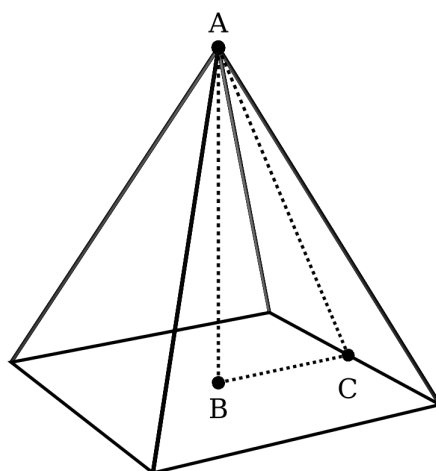


Figura 1.1: Representação da inclinação das faces de uma pirâmide

1.1.2 O relógio de sol criado pelos gregos

Os gregos, por sua vez, apresentaram pela primeira vez na história, até onde há registros, a ideia que posteriormente estaria relacionada à Lei dos Senos, por meio das relações entre ângulos ou arcos em uma circunferência e os comprimentos de suas cordas [13]. Eles estudavam triângulos, especialmente os triângulos retângulos, e calculavam razões entre lados e ângulos, o que pode ser considerado a base para o desenvolvimento dessa lei.

Um dos principais nomes desse período foi Hiparco de Niceia (180–125 a.C.), astrônomo e matemático grego, considerado o pai da trigonometria. Aprimorando a ideia de Hipsicles, que havia dividido o zodíaco em 360 partes, Hiparco transferiu essa divisão para o círculo e criou a primeira tabela trigonométrica.

O astrônomo Hiparco de Niceia (180–125 a.C.), conhecido como “o pai da trigonometria”, recebeu essa denominação por ter elaborado o que é considerado possivelmente a primeira tabela trigonométrica. Provavelmente durante a segunda metade do século II a.C., essa tabela continha os valores das cordas correspondentes a uma série de ângulos de 0° a 180° . Assim, ele observou que, em um dado círculo, a razão do arco diminui de 180° para 0° , associando a cada corda de um arco o respectivo ângulo central correspondente. [1]

No entanto, Hiparco considerava que a base sexagesimal era a mais apropriada e, por isso, atribuiu o nome de “arco de 1 grau” a cada uma das 360 partes da circunferência. Cada arco de 1° foi subdividido em 60 partes, originando o arco de 1 minuto [14].

Sua trigonometria baseava-se em uma única função: para cada arco de circunferência de raio arbitrário, associava-se a respectiva corda [8]. Essa corda correspondia ao segmento de reta cujas

extremidades coincidiam com as extremidades do arco.

Hiparco elaborou tabelas com valores de cordas correspondentes a diferentes arcos em circunferências de raios arbitrários, o que foi fundamental para seus estudos em astronomia e trigonometria. Para cada arco (ou ângulo) em um círculo, determinava-se o comprimento da corda que o subtendia. Essa relação entre arco e corda foi essencial para o desenvolvimento da trigonometria na antiguidade.

Além de calcular o comprimento dessas cordas, Hiparco organizou os dados em tabelas para facilitar o cálculo de distâncias e ângulos em problemas astronômicos e geométricos. Observou-se ainda que a razão entre o comprimento do arco e a corda que o subtende tende a 1 à medida que o arco diminui de 180° para 0° . Essa observação está diretamente relacionada às propriedades trigonométricas do círculo.

Diante disso, podemos afirmar que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \quad (1.1)$$

Em outras palavras, observando a equação 1.1, quando o arco é pequeno, ele se aproxima de uma linha reta, e a corda que o subtende torna-se praticamente igual ao comprimento desse arco, fazendo com que a razão entre ambos se aproxime de 1.

Hiparco foi um dos autores mais importantes para o desenvolvimento da trigonometria na antiguidade. Seus estudos influenciaram profundamente a obra conhecida como *Almagesto*, segundo registros históricos, Hiparco teria produzido cerca de doze livros sobre o cálculo de cordas, incluindo uma tábua de cordas.

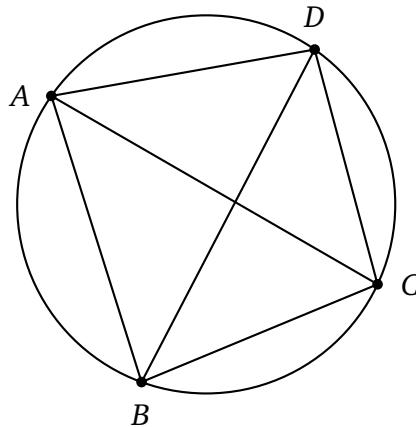
O *Almagesto* sobreviveu e, por isso, temos suas tabelas trigonométricas e também uma exposição dos métodos usados nas construções, o que é de grande importância para nós, visto que tanto daquela época se perdeu. Dos treze livros que compõem o *Almagesto*, o primeiro contém as informações matemáticas preliminares, indispensáveis na época para uma investigação dos fenômenos celestes, tais como proposições sobre geometria esférica, métodos de cálculo, uma tábua de cordas e explicações gerais sobre os diferentes corpos celestes. Os demais livros são dedicados à Astronomia. [8]

Em outro momento, o astrônomo alexandrino Ptolomeu propôs um teorema que recebeu seu nome. Além dessa importante contribuição geométrica, ele consolidou seus estudos no *Almagesto*. Na Fig. 1.2, é possível acompanhar a ideia do teorema, que enuncia: "Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo inscrito em um círculo, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais". A partir desse resultado, operando com as cordas dos arcos, Ptolomeu chegou a um equivalente das fórmulas de seno da soma Eq. (1.2) e da diferença de dois arcos Eq. (1.3), isto é, $\text{sen}(a+b)$

e $\sin(a - b)$. Especialmente a fórmula para a corda da diferença foi usada por ele para a construção da tabela trigonométrica. [8]

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a \quad (1.2)$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a \quad (1.3)$$



$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} = \overline{AC} \cdot \overline{DB}$$

Figura 1.2: Teorema de Ptolomeu para um quadrilátero cíclico.

Por outro lado, o relógio de sol construído pelos gregos — uma vareta vertical que, por meio de sua sombra, permitia identificar o período do ano — também é um exemplo dos vestígios primordiais da trigonometria na Grécia [8].

Na Fig. 1.3, é possível observar as sombras produzidas pela vareta $\overline{GN}$. As respectivas sombras indicam as diferentes fases climáticas: Solstício de Inverno, Equinócios de Primavera e Outono, e Solstício de Verão. Conhecido pelos gregos como gnômon, o relógio de sol foi introduzido por influência dos babilônios, embora existam vestígios de seu uso pelos egípcios antes de 1500 a.C. O gnômon consistia em uma vareta fixada no chão, formando um ângulo de 90° com a horizontal, cuja sombra projetada era observada ao meio-dia. Pela medição dos limites dessa sombra, era possível determinar a duração do ano ou do dia. O exemplar mais antigo que chegou aos nossos dias encontra-se no Museu de Berlim, reforçando a hipótese de que a trigonometria foi uma ferramenta essencial para a vida prática das civilizações antigas.

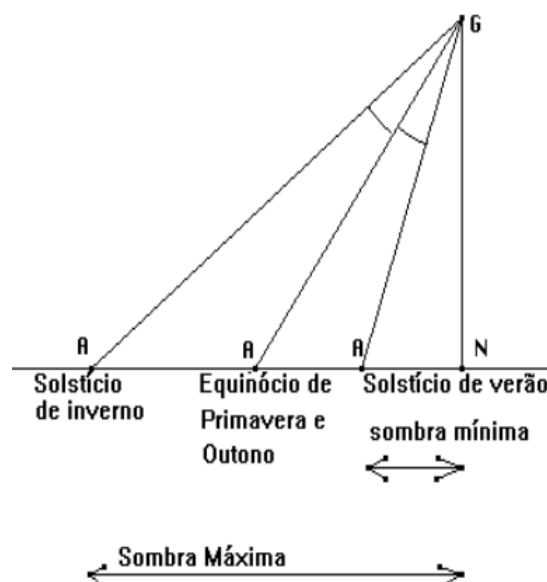


Figura 1.3: Relógio de sol criado pelo gregos

Fonte: Da Costa (2003)

1.1.3 A curiosidade hindu pela astronomia

Os hindus, assim como os gregos, tinham fascínio pela astronomia. Uma das contribuições mais relevantes para a trigonometria na história da matemática foram as tabelas dos Sidhantas e dos Aryabhatiya, equivalentes às tabelas de cordas criadas na Grécia Antiga.

O Surya Siddhanta que quer dizer Sistema do Sol é um conjunto de textos em sânscritos escritos aproximadamente em 400 d.C. por autor desconhecido. Eles acreditavam ter sido escritos por Surya, deus do sol, mas não existe nenhuma prova sobre esse fato.[6].

Diferente de Ptolomeu na Grécia que relacionava as cordas aos ângulos centrais, no Surya, a relação usada era entre a metade da corda e a metade do ângulo correspondente, chamada de Jiva, o que possibilitou a visão de um triângulo retângulo na circunferência. O Jiva era definido como a razão entre a metade da corda dividida pelo raio e o raio.

A importância do Surya, para nós, é que ele abriu novas perspectivas para a Trigonometria por não seguir o mesmo caminho de Ptolomeu, que relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes. Nas aplicações da função corda, na Astronomia, era necessário dobrar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas. Naturalmente, era mais conveniente ter uma tábua na qual o próprio arco fosse a variável independente. No Surya, a relação usada era entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, chamada por eles de jiva. [8]

Em outras palavras, observando Fig. 1.4 podemos verificar que O “Jiva” foi definido como a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, sendo assim entende-se que a corda era dividida pelo raio do

círculo, ou seja, pela Fig. 1.4 o seno da metade do arco é a razão entre a metade da corda e o raio do círculo.

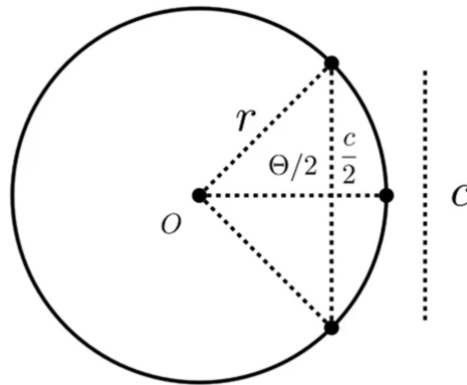


Figura 1.4: O "jiva" hindu

$$\text{jiva} \frac{\Theta}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r} = \sin \frac{\Theta}{2} \quad (1.4)$$

1.1.4 Os árabes e a Escola de Bagdá

Os árabes, por sua vez, sofreram grande influência da trigonometria grega e hindu. Exemplos disso são a geometria das cordas, detalhada no Almagesto, e a geometria das semicordas, proveniente da Índia.

Os matemáticos indianos utilizavam com frequência a meia-corda, que posteriormente veio a se tornar o seno indiano. No entanto, as funções trigonométricas para eles ainda eram definidas como o valor de um comprimento absoluto, e não como a razão entre dois comprimentos, como as conhecemos nos dias atuais [1].

Após a fundação da Escola de Bagdá, no século IX, os árabes difundiram várias obras para intelectuais muçulmanos, contribuindo significativamente para a história da matemática. Nesse período, Al-Battani (850 d.C. a 929 d.C.), conhecido como o "Ptolomeu de Bagdá", foi um dos pioneiros a direcionar estudos envolvendo cálculo e álgebra, em vez de focar apenas em geometria e trigonometria. Por influência deste matemático e astrônomo, a trigonometria hindu foi adotada pelos árabes, sendo introduzido o círculo de raio unitário, o que validou o jiva para qualquer triângulo retângulo. Na Fig. 1.5, é possível visualizar a representação do círculo trigonométrico e a validade atribuída ao jiva dos hindus [4].

$$\text{jiva} = \frac{BC}{1} \quad (1.5)$$

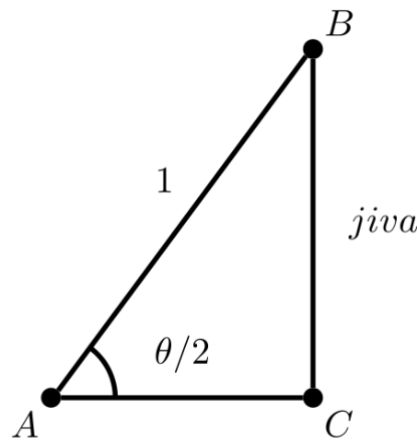


Figura 1.5: Representação do jiva pelo príncipe Al-Battani

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{BC}{1} \quad (1.6)$$

Al-Battani buscava calcular a altitude do Sol e, a partir das fórmulas obtidas em Eq. (1.4), poderia ter construído uma tabela de senos. Contudo, para isso, seriam necessárias outras razões trigonométricas e valores mais precisos do que os presentes nas tabelas antigas.

Por volta do ano 1000 d.C., foram calculadas as tábuas de tangente e cotangente, período em que também surgiram a secante e a cossecante como razões trigonométricas. Somente em 1250, entretanto, aparece a primeira obra de trigonometria sem vínculo direto com a astronomia, escrita pelo matemático persa Nasir al-Din al-Tusi.

Com o declínio da Escola de Bagdá, as atividades intelectuais concentraram-se no sul da Europa, especialmente na Península Ibérica. O século XII foi marcado por inúmeras traduções, destacando-se autores como Platão de Tivoli, Gerardo de Cremona, Adelardo de Bath e Roberto de Chester.

Por meio de relatos históricos, compreendemos a origem da palavra "seno", que deriva do latim sinus (baía, seio ou curva). O termo surgiu de uma tradução equivocada da palavra árabe jiba (escrita como jb), que os tradutores confundiram com jaib (dobra ou abertura de roupa), quando, na verdade, era uma transliteração do sânscrito jiva (corda de arco). Desde então, o termo seno passou a ser utilizado universalmente.

Bertoli discorre sobre essa transição:

Após a Escola de Bagdá entrar em declínio, as atividades desenvolvidas pelos intelectuais da época passaram a ser realizadas no sul da Europa, mais precisamente na Península Ibérica. Estudiosos ocidentais se deslocaram para Toledo, visando adquirir o saber muçulmano e, com ele, os estudos sobre trigonometria. Na história da matemática, o século XII foi dedicado a traduções; entre os tradutores podemos citar Platão de Tivoli, Gerardo de Cremona, Adelardo de Bath e Roberto de Chester. Desde então, a Europa teve acesso à matemática árabe e à herança grega que havia sido preservada por eles [4].

1.1.5 O início da trigonometria contemporânea

Em 1658, John Newton publicou o livro *Trigonometria Britânica*, que antecipava a tendência de introduzir divisões centesimais do ângulo nas tábuas trigonométricas. Além disso, ele apresentou a Leibniz a fórmula geral para $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$, destacando a perspectiva de tratar as funções como números, e não apenas como grandezas geométricas, como era comum até então. No entanto, foi somente em 1759 que Kästner tornou-se o primeiro matemático a definir as funções trigonométricas como números puros (razões adimensionais). É notório que a trigonometria, ao longo do tempo, não se desenvolveu desvinculada de seu contexto histórico; seus avanços e descobertas estão intimamente ligados às necessidades práticas da astronomia, da navegação, das construções civis e do estudo de fenômenos climáticos.

1.2 A trigonometria atual

1.2.1 Sistemas de coordenadas no plano

A ideia de sistemas de coordenadas no plano é um refinamento da necessidade de representar a localização de objetos, artefatos, lugares e outras coisas, presentes em mapas.

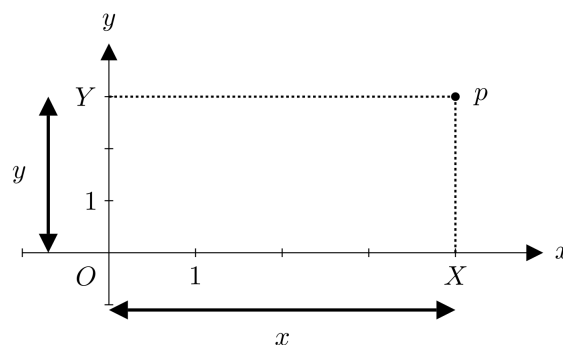


Figura 1.6: Eixos Coordenados

Na Fig. 1.6, acima, fixa-se um ponto O , chamado *origem*, em um plano, e por O traçam-se duas

retas perpendiculares, x e y , chamadas *eixos coordenados*. Sobre essas retas escolhem-se unidades de comprimento (em geral iguais) e sentidos positivos.

Dado um ponto P do plano, traçam-se por ele paralelas aos eixos y e x , que interceptam os eixos x e y nos pontos X e Y , respectivamente.

Os números x e y , dados por

$$x = \overline{OX}, \quad y = \overline{OY},$$

são chamados *coordenadas* de P no sistema xOy . É usual chamar x de *abscissa*, y de *ordenada*, e o par (x, y) de *coordenadas do ponto* P .

O sistema xOy é chamado *sistema retangular de coordenadas*.

Na [Fig. 1.7](#), a seguir, representamos alguns pontos de um plano por meio de coordenadas.

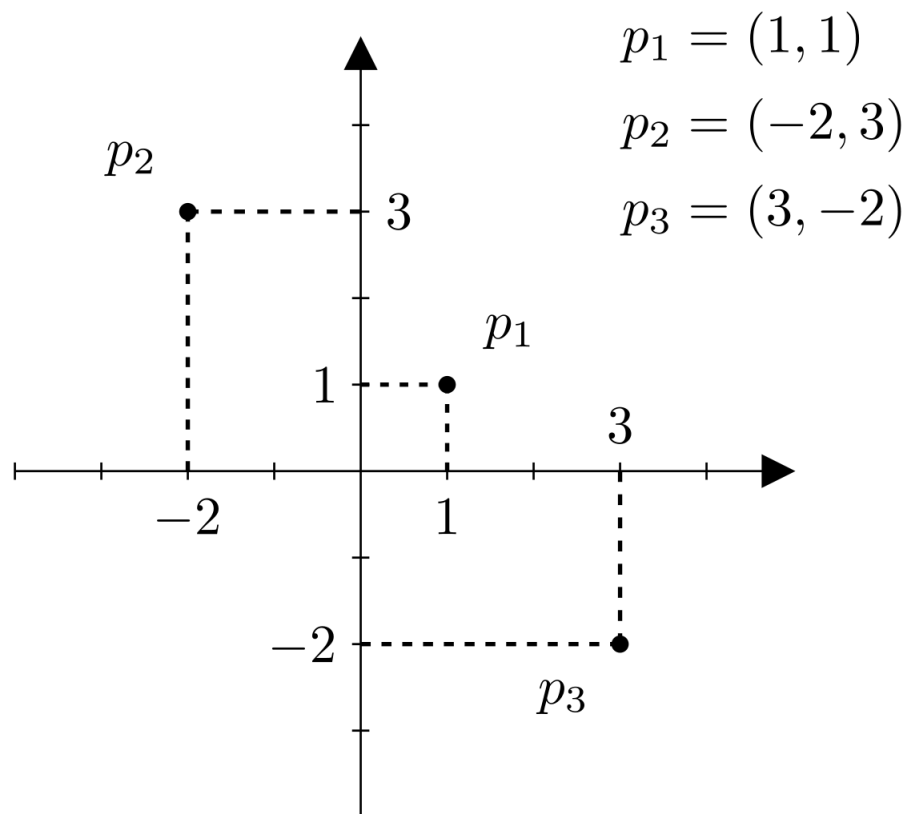
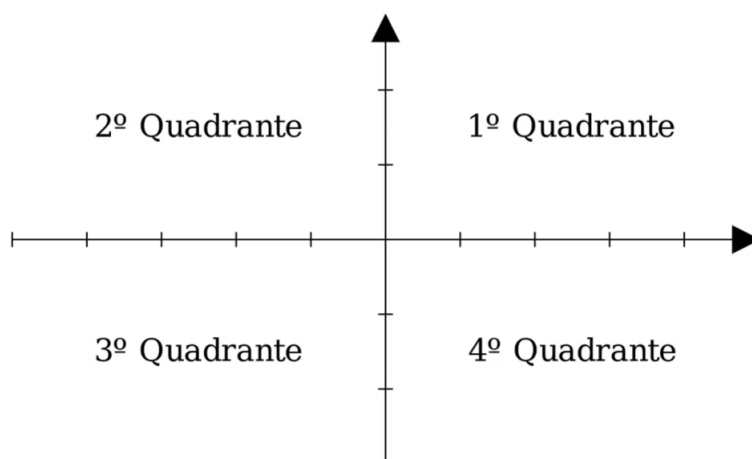
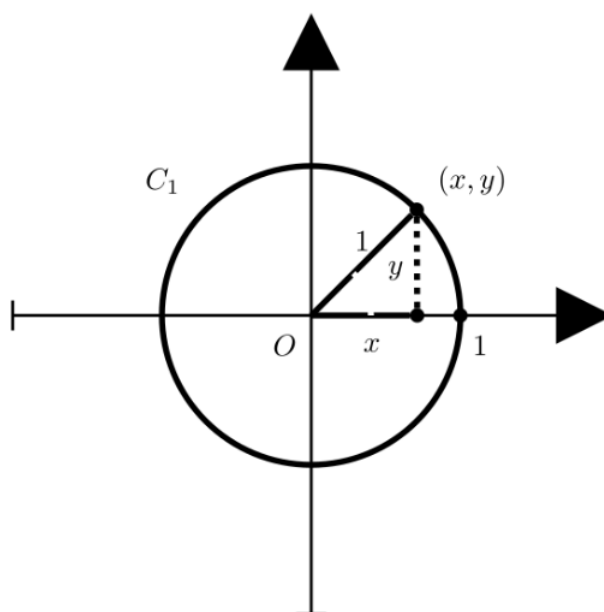


Figura 1.7: Coordenadas de P no sistema retângular xOy

É conveniente chamar de *quadrante* cada uma das quatro regiões do plano determinadas por x e y . Os quadrantes são denominados por **1º Quadrante**, **2º Quadrante**, **3º Quadrante** e **4º Quadrante**, de acordo, com a [Fig. 1.8](#).

**Figura 1.8:** Quadrantes

A ideia de representar pontos por pares de números é muito útil. Por exemplo, o conjunto de pontos que estão a uma mesma distância da origem do sistema de coordenadas, por exemplo, constitui um circunferência. Se adotarmos essa distância por 1, teremos um conjunto de pontos que constitui um círculo C_1 de raio 1 e centro O , como representado na [Fig. 1.9](#), abaixo.

**Figura 1.9:** Círculo Unitário

Por isso, todo ponto de C_1 terá coordenadas (x,y) , que pelo Teorema de Pitágoras, satisfazem a relação

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1.7)$$

1.2.2 Triângulo retângulo: razões trigonométricas

Definição 1.1: Razões trigonométricas

As razões trigonométricas surgem no contexto do estudo dos triângulos retângulos e estabelecem relações entre as medidas dos lados e os ângulos agudos desses triângulos. Dado um triângulo retângulo e considerando um de seus ângulos agudos, definem-se as razões trigonométricas como quocientes entre os comprimentos dos lados associados a esse ângulo. Em particular, o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo são definidos, respectivamente, como a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, entre o cateto adjacente e a hipotenusa, e entre o cateto oposto e o cateto adjacente.

$$\frac{op}{hip} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \text{sen } \theta$$

$$\frac{adj}{hip} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \text{cos } \theta$$

$$\frac{op}{adj} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \text{tg } \theta$$

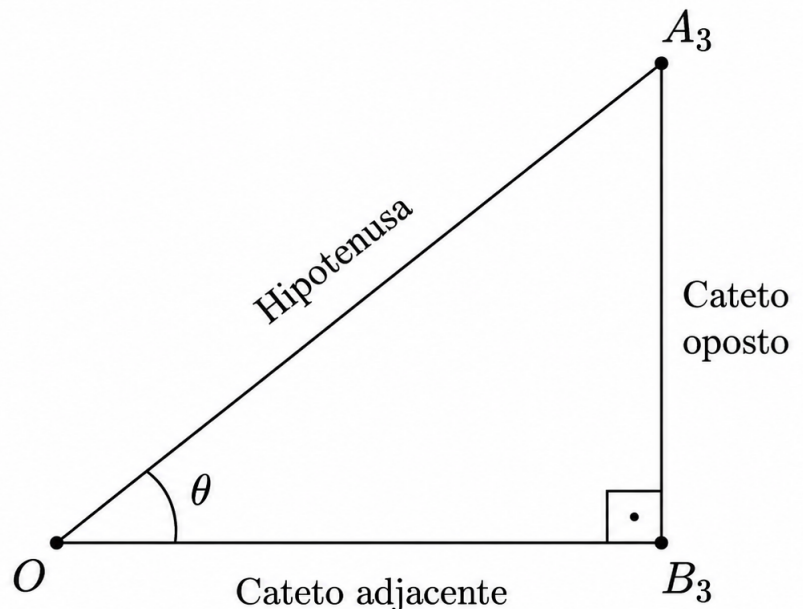


Figura 1.10: Razões trigonométricas em um triângulo retângulo

O triângulo retângulo aparece aqui nesta parte do texto como protagonista, peça destaque para a construção da máquina "Função Trigonométrica". Então, agora, iremos dar início a construção da ideia de seno, cosseno e tangente, razões trigonométricas essenciais a partir da semelhança entre triângulos retângulos.

Vamos iniciar com as funções trigonométricas do ângulo agudo. Consideremos agora um ângulo $\widehat{A_6OB_6} = \theta$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$ e tracemos, a partir dos pontos A_1, A_2, A_3 etc., da semi reta OA_6 , perpendiculares A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 etc., à semi reta OB_6 . Os triângulos $OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3$ etc., são

semelhantes por terem ângulos congruentes conforme observados na Fig. 1.11 abaixo. Podemos portanto escrever:

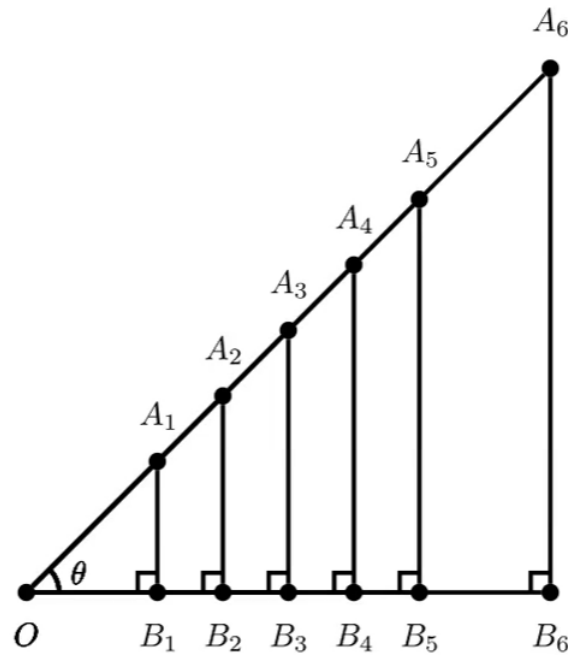


Figura 1.11: Semelhança de triângulos retângulos

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \dots$$

Esta relação depende apenas da medida do ângulo θ e não dos comprimentos envolvidos. Convém dar um nome a esta função de θ , assim construída e definida para $0^\circ < \theta < 90^\circ$:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \text{sen } \theta \quad (1.8)$$

que se lê "seno de θ ". Ainda, observando os triângulos semelhantes na Fig. 1.11, vemos que as relações

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \dots \quad (1.9)$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \dots \quad (1.10)$$

também dependem apenas do ângulo de medida θ . Definiremos, então, as funções para $0^\circ < \theta < 90^\circ$:

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \cos \theta \quad (1.11)$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \text{tg } \theta \quad (1.12)$$

que se leem “cosseno de θ ” e “tangente de θ ”. Estas funções são chamadas de funções trigonométricas e não são independentes. Duas relações aparecem naturalmente:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (1.13)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \quad (1.14)$$

Para demonstrá-las, consideremos um ângulo de medida θ de vértice O e um triângulo OAB , retângulo em B como mostra a [Fig. 1.12](#).

Fazendo, para facilitar, $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ e $\overline{AB} = c$ e lembrando o Teorema de Pitágoras, $a^2 = c^2 + b^2$, temos

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

e

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{b} = \operatorname{tg} \theta$$

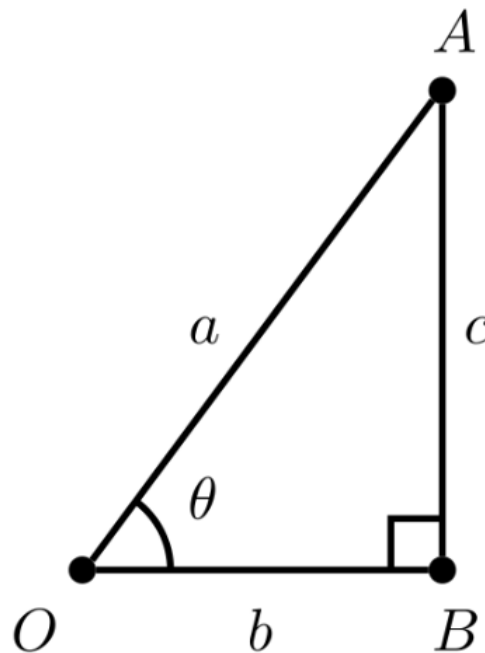


Figura 1.12: Triângulo Retângulo e seus elementos

1.2.3 Medida de arcos e o radiano

Para fazer referência a determinado arco de um círculo, costuma-se usar expressões do tipo “arco de 50° ”. Devemos entender esta expressão como arco que subtende um ângulo central de 50° . Assim, podemos nos referir aos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{A'B'}$ da Fig. 1.13 como arcos de 50° .

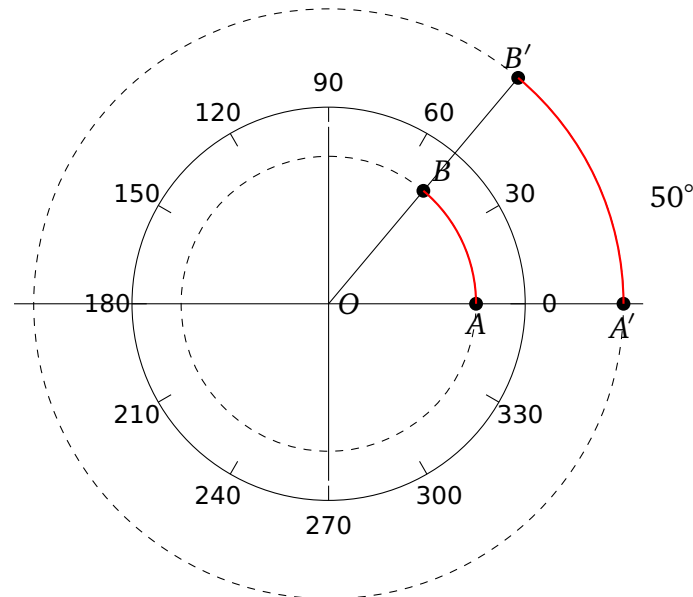


Figura 1.13: Representação de arcos em circunferências concêntricas

Introduziremos uma outra medida de ângulos. Sabemos que arcos de círculo que subtendem o mesmo ângulo central são semelhantes e que a razão de semelhança é a razão entre os raios.

Assim, na Fig. 1.14, se s e s' são respectivamente os comprimentos dos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{A'B'}$ dos círculos de centro O e raios R e R' , temos

$$\frac{s'}{R'} = \frac{s}{R}. \quad (1.15)$$

Em suma, dado o ângulo central, é constante a razão entre o comprimento do arco determinado e o raio. Dessa forma, define-se:

A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo.

Assim, na Fig. 1.14, $\widehat{AOB} = \frac{s}{R}$ radianos. Em particular, decorre da definição que se s é o compri-

mento do arco determinado por um ângulo central de α radianos em um círculo de raio R , então

$$\alpha = \frac{s}{R}, \quad (1.16)$$

ou seja,

$$s = \alpha R. \quad (1.17)$$

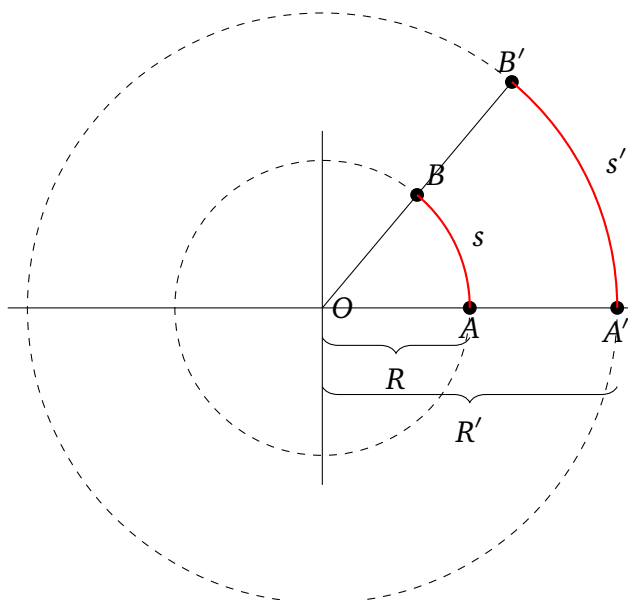


Figura 1.14: Nomenclatura de arcos e raios em circunferências concêntricas

Como o comprimento de um semi-círculo (que é um arco de 180°) é πR temos que $180^\circ = \frac{\pi R}{R} = \pi$ radianos. Assim, $1 \text{ radiano} = \left(\frac{180}{\pi}\right) \approx 57^\circ$ [Fig. 1.15](#)

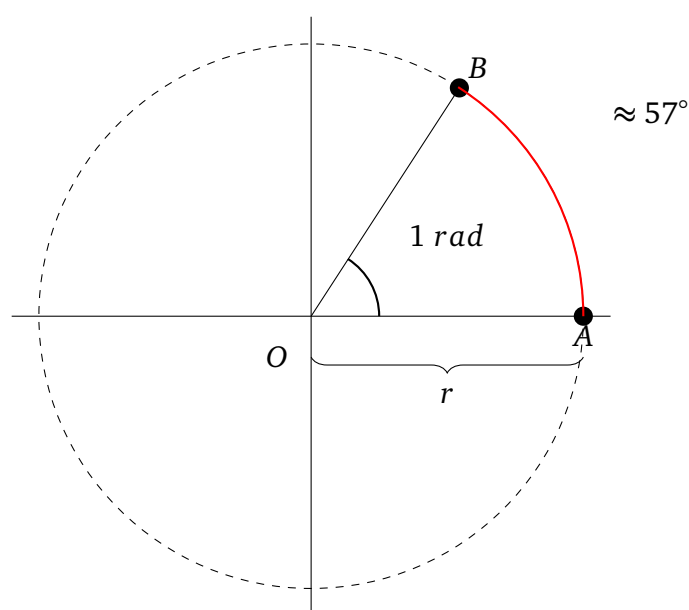


Figura 1.15: 1 radiano

Por conseguinte, se 1 radiano corresponde ao arco cujo comprimento é igual ao raio r do círculo, então a circunferência completa, cujo comprimento é $2\pi r$, possui medida igual a 2π radianos.

De fato, cada arco de comprimento r determina um ângulo central de medida 1 radiano. Assim, o arco de comprimento $2\pi r$ — correspondente à circunferência inteira — determina um ângulo central de medida 2π radianos.

Como uma volta completa corresponde a 360° , concluímos que

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \quad (1.18)$$

1.2.4 Círculo orientado

Um círculo pode ser percorrido em dois sentidos. Quando se escolhe um desses sentidos como positivo, dizemos que o círculo está orientado. Convencionalmente, adota-se como positivo o sentido anti-horário.

No círculo unitário orientado, isto é, no círculo de raio igual a 1, fixa-se um ponto A , denominado origem dos arcos (Fig. 1.16).

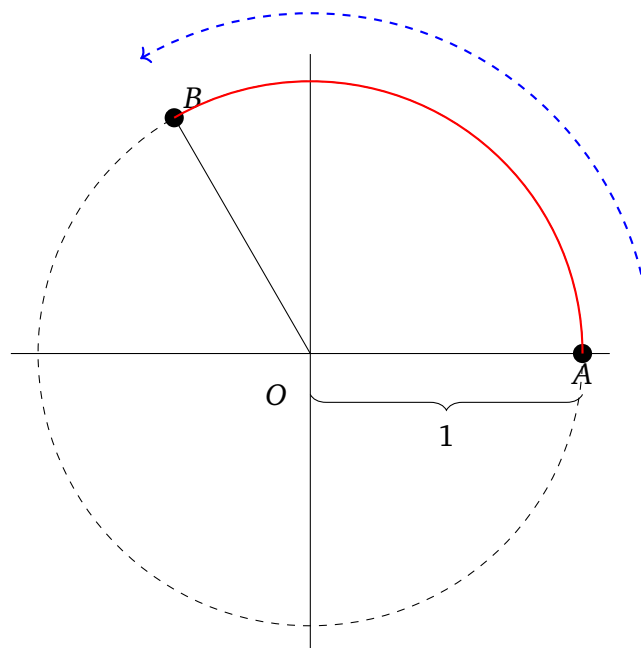


Figura 1.16: Arco $\widehat{AB}$

Define-se a medida algébrica de um arco $\widehat{AB}$ desse círculo como o comprimento do arco, munido de sinal positivo quando o percurso de A até B ocorre no sentido anti-horário, e de sinal negativo no caso contrário.

Essa medida será indicada por

$$\text{med}(\widehat{AB}).$$

Vejamos alguns exemplos:

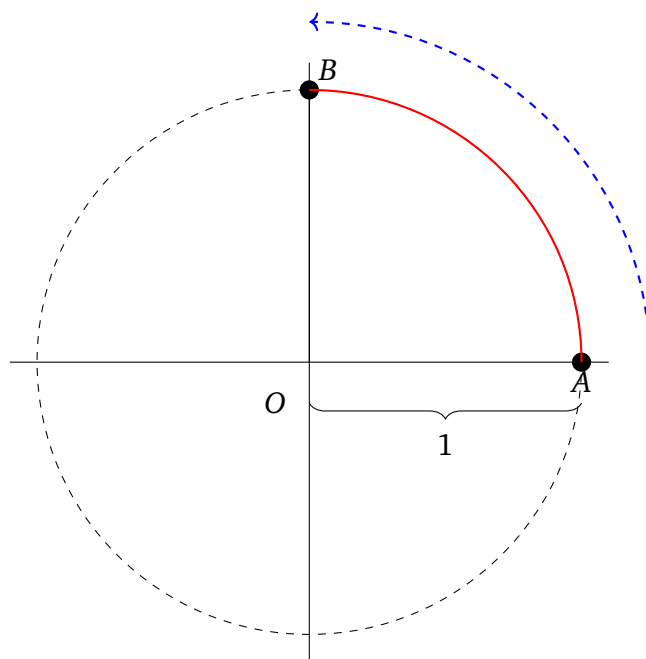


Figura 1.17: $\text{med}(\widehat{AB}) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ou $\text{med}(\widehat{AB}) = 90^\circ$

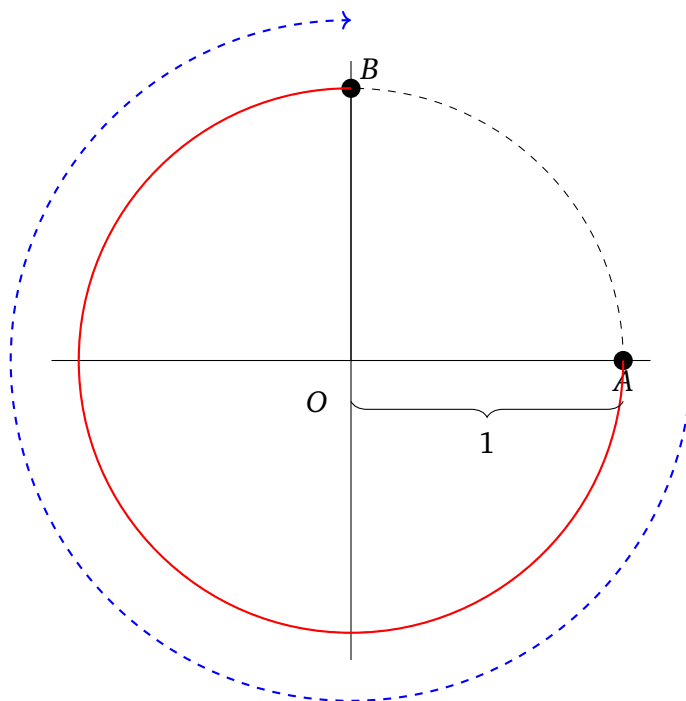


Figura 1.18: $\text{med}(\widehat{AB}) = -\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$ ou $\text{med}(\widehat{AB}) = -270^\circ$

Quando não ficar evidente a qual arco estamos nos referindo, podemos inserir um ponto P entre as extremidades A e B e utilizar a notação $\widehat{APB}$ para identificar cada arco (Fig. 1.19).

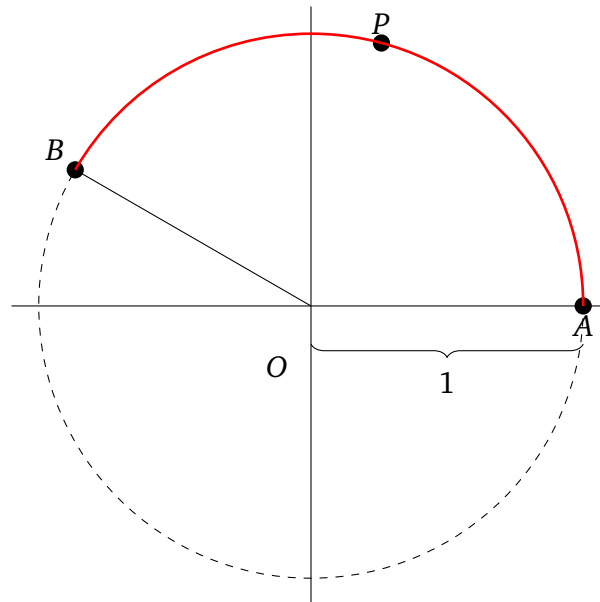


Figura 1.19: Ilustração do arco $\widehat{APB}$

1.2.5 Extensões das funções trigonométricas de qualquer ângulo.

Definimos anteriormente as noções de seno, cosseno e tangente no contexto de um triângulo retângulo. No entanto, ao estudar fenômenos periódicos, torna-se necessário estender esses conceitos para ângulos que não pertencem ao intervalo entre 0° e 90° .

Como tais ângulos podem ser medidos em radianos, é natural definir inicialmente seno, cosseno e tangente para números reais do intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ e, em seguida, estender essas funções de modo que fiquem definidas para todos — ou quase todos — os números reais, preservando-se as relações fundamentais

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1 \quad (1.19)$$

e

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}. \quad (1.20)$$

Para isso, vamos considerar a função

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$

definida do seguinte modo. Fixada uma origem A em S^1 , e dado um número real x , percorremos sobre S^1 , no sentido positivo se $x > 0$ e no sentido negativo se $x < 0$, um comprimento igual a x , por

definição, $F(x)$ é o ponto de S^1 assim atingido (Fig. 1.20).

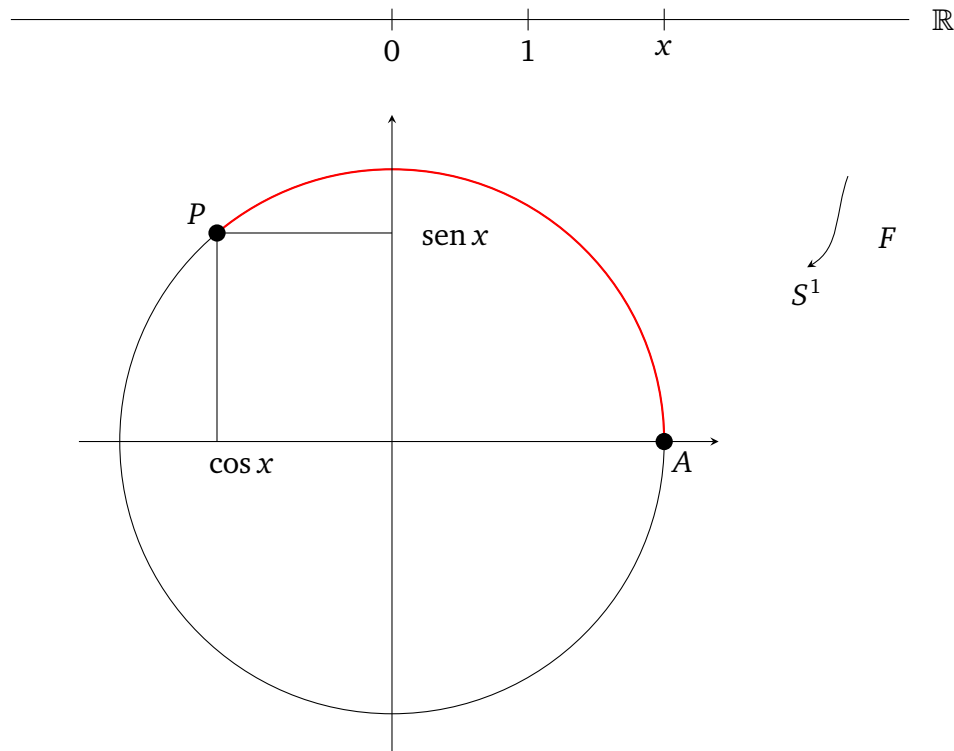


Figura 1.20: $F(x) = P$, $\text{med}(\widehat{AP}) = x$

Observe que se $x > 0$ e $x > 2\pi$, será necessário dar mais uma volta em S^1 , no sentido positivo, para atingir $F(x)$, uma observação semelhante vale para $x < 0$. Seja como for, $F(x)$ é um ponto bem definido por S^1 . Por outro lado, dado um ponto P de S^1 , ele é a imagem pela função F de uma infinidade de números reais (Fig. 1.21), todos eles da forma

$$x + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Dizemos que x e $x + 2k\pi$ são congruentes, ou seja, a diferença entre eles é um múltiplo inteiro de 2π .

No sistema de coordenadas cuja origem é o centro de S^1 e sendo $A = (1, 0)$, definimos

$$\cos x = \text{abscissa de } P,$$

$$\sin x = \text{ordenada de } P,$$

$$\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}, \text{ se } \cos x \neq 0.$$

Essa definição coincide com a anterior quando $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Além disso, ela permite escrever $\cos 0 = 1$ e $\sin 0 = 0$, quando $P = A$, e $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, quando $\widehat{AOP}$ é um ângulo reto.

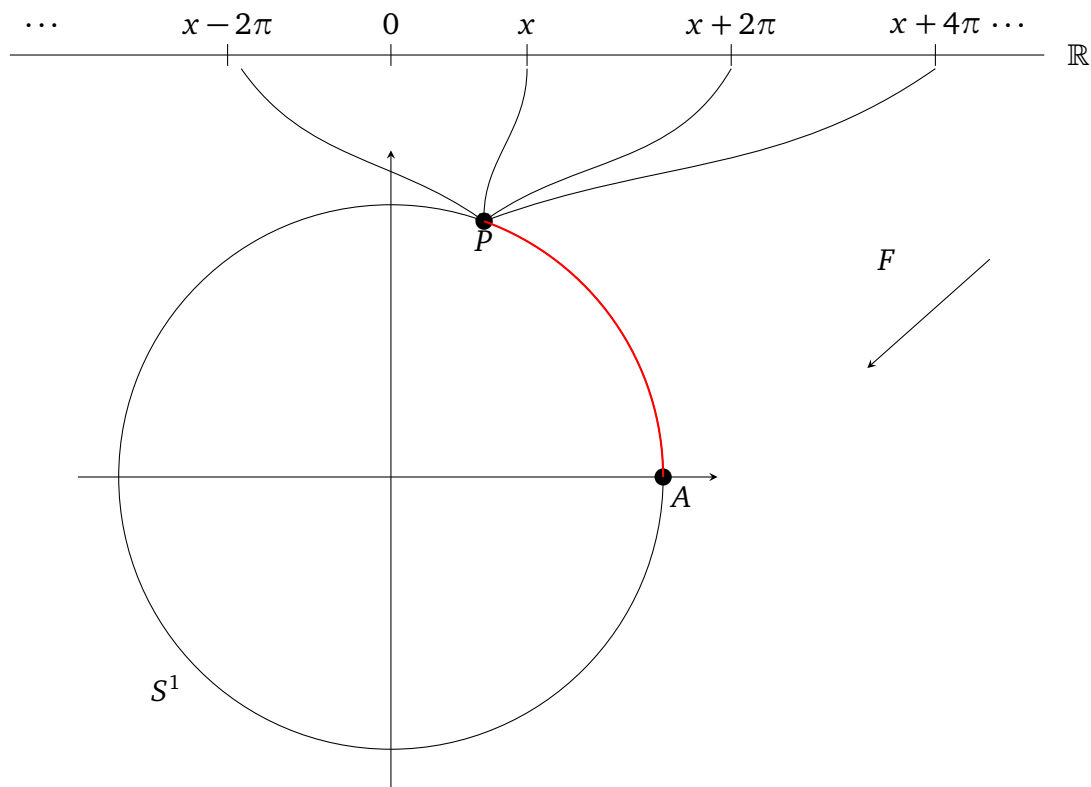


Figura 1.21: Círculo representando a $\text{med}(\widehat{AP}) = x + 2k\pi$

Além disso, como todo ponto $P = (\cos x, \sin x)$ de S^1 está a uma distância igual a 1 da origem, temos

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

A nova definição, portanto, estende a primeira e mantém as relações básicas.

Naturalmente, para k inteiro, e para todo x real,

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \text{ e } \cos(x + 2k\pi) = \cos x,$$

porque $F(x + 2k\pi) = F(x) = P$ (Fig. 1.21). Este fato significa que as funções seno e cosseno são periódicas com período 2π , isto é, se conhecemos o comportamento destas funções no intervalo $[0, 2\pi]$, passamos a conhecer imediatamente como estas funções se comportam em todos os intervalos seguintes (ou anteriores) de comprimento 2π . Em outras palavras, o gráfico da função

$$y = \sin x \quad x \in [0, 2\pi]$$

é exatamente o mesmo em qualquer intervalo da forma $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$. Podemos então restringir o

estudo destas funções ao intervalo $[0, 2\pi]$ que corresponde ao estudo das coordenadas de um ponto que dá exatamente um volta em S^1 .

As funções cosseno e seno, como coordenadas de um ponto, têm sinais que dependem do quadrante em que se encontram (Fig 1.22).

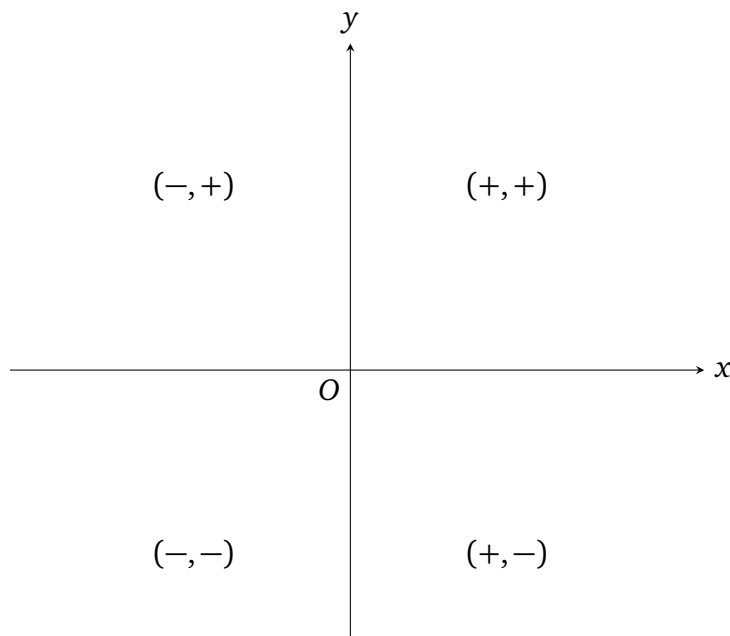


Figura 1.22: Sinal do par ordenado $(\sin x, \cos x)$

Vamos mostrar como é possível determinar o valor da função seno, por exemplo, em qualquer quadrante, conhecidos seus valores no primeiro quadrante. Consideremos separadamente os casos em que a extremidade de B do arco AB está no segundo, terceiro ou quarto quadrante.

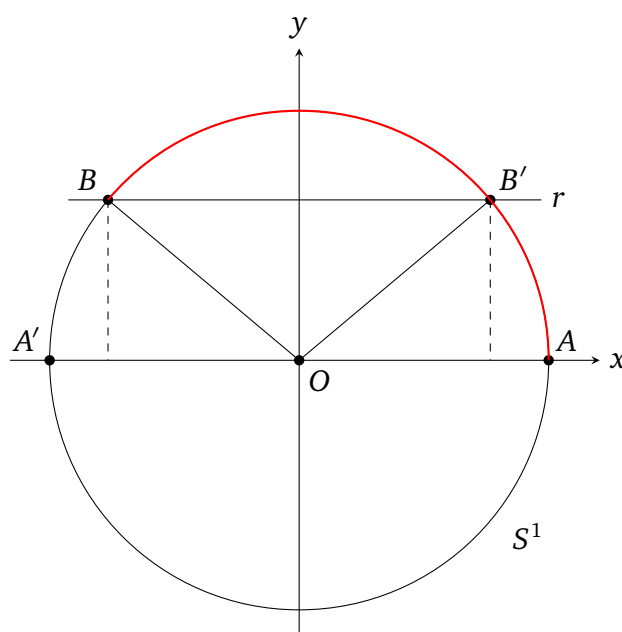


Figura 1.23: $\text{med}(\widehat{AB}) = x$, no 2º quadrante

(i) x está no segundo quadrante, isto é, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Traçamos por B uma reta r paralela ao eixo das abscissas que intercepta novamente S^1 em B' (Fig. 1.23). É claro que $\text{med}(\widehat{AB'}) = \text{med}(\widehat{BA'}) = \pi - x$ e portanto,

$$\boxed{\text{sen } x = \text{sen}(\pi - x)}$$

(ii) x está no terceiro quadrante, isto é, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Traçamos novamente a reta r que liga O a B , intercepta novamente S^1 em B' (Fig. 1.24). É claro que

$$\text{med}(\widehat{AB'}) = x - \pi.$$

Como B está no terceiro quadrante, sua ordenada é negativa. Portanto,

$$\boxed{\text{sen } x = -\text{sen}(x - \pi)}.$$

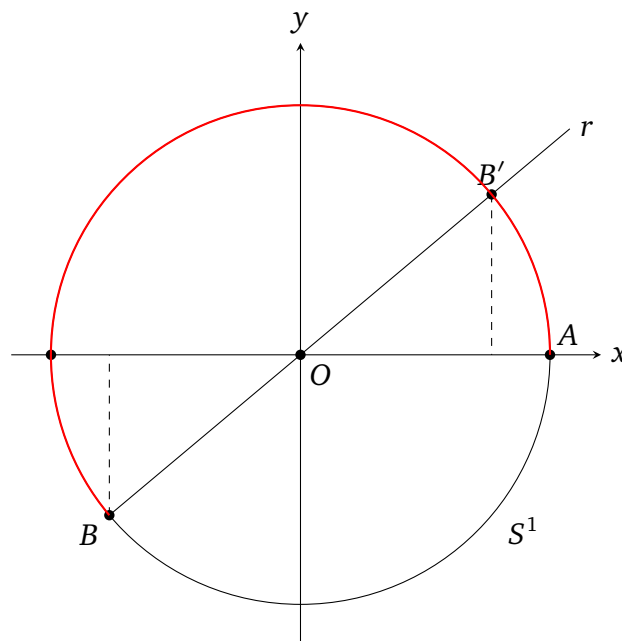


Figura 1.24: $\text{med}(\widehat{AB}) = x$, no 3º quadrante

(iii) x está no quarto quadrante, isto é, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

Neste caso, refletimos o ponto B em relação ao eixo das abscissas, obtendo o ponto B' no primeiro quadrante (Fig. 1.25). É claro que

$$\text{med}(\widehat{AB'}) = 2\pi - x.$$

Como B está no quarto quadrante, sua ordenada é negativa. Portanto,

$$\boxed{\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x)}.$$

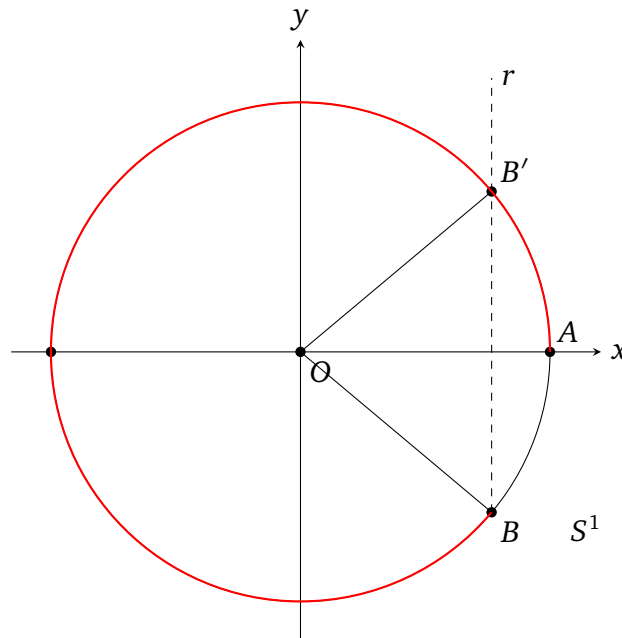


Figura 1.25: $\operatorname{med}(\widehat{AB}) = x$, no 4º quadrante

O mesmo processo (chamado de "redução do seno ao primeiro quadrante") pode ser aplicado ao cosseno. Assim os valores absolutos das funções trigonométricas estão determinados pelos valores destas funções no primeiro quadrante.

Para melhor compreensão de uma função trigonométrica é conveniente construir o seu gráfico. Por exemplo, o gráfico da função **seno**, ou seja, o conjunto dos pontos do plano de coordenadas $(x, \operatorname{sen} x)$, reúne em uma figura todas as informações que obtivemos sobre a função seno. Em um primeiro momento, seria necessário conhecer todos os pontos $(x, \operatorname{sen} x)$ para poder construir o gráfico. Porém, o conjunto de pontos que já dispomos permite traçar uma figura bem próxima do gráfico que apresentamos abaixo na [Fig. 1.26](#)

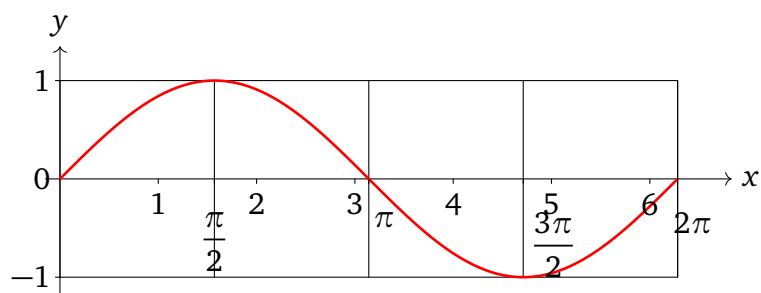


Figura 1.26: Gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.

De forma semelhante, obtemos o gráfico da função cosseno, isto é, o conjunto dos pontos do plano de coordenadas $(x, \cos x)$ (Fig. 1.27)

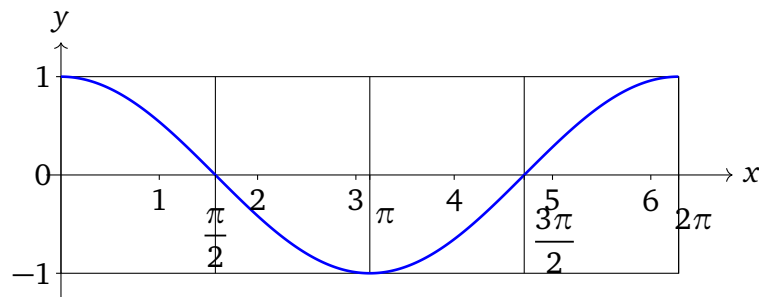


Figura 1.27: Gráfico da função $y = \cos x$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.

Observe que o seno e o cosseno variam entre -1 e 1 . Para traçarmos os gráficos completos destas funções, repetimos os gráficos anteriores uma infinidade de vezes como se pode ver nas imagens representadas na Fig. 1.28

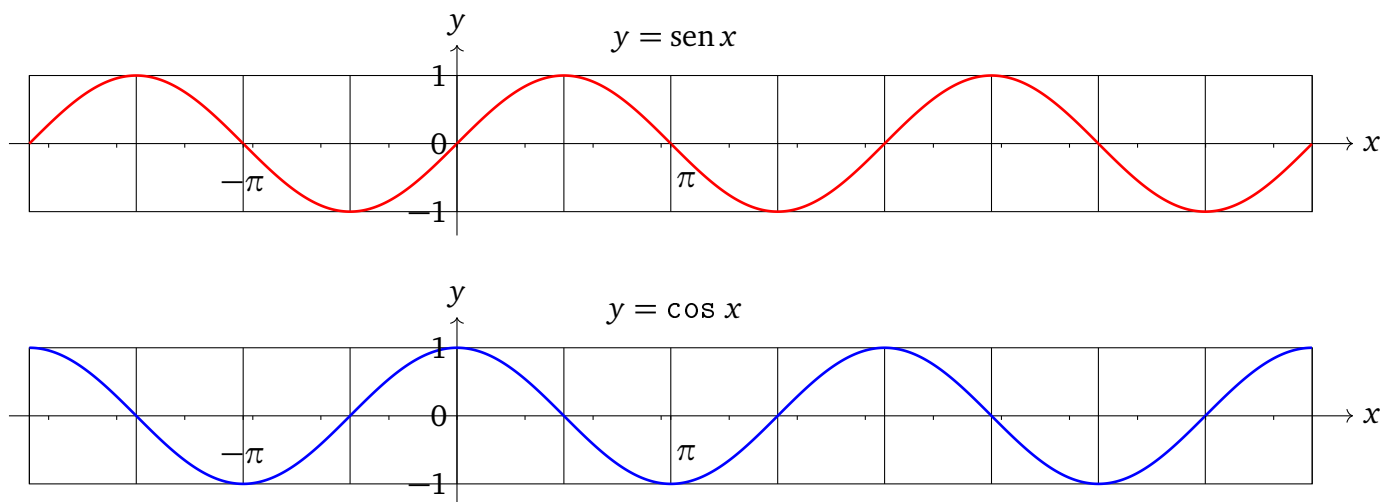


Figura 1.28: Gráficos das funções seno e cosseno.

Observando a Fig. 1.28, percebemos uma grande semelhança entre as duas curvas. Na realidade, os gráficos das funções seno e cosseno têm a mesma forma; a diferença entre eles é apenas uma translação horizontal. O gráfico da função cosseno é obtido pela translação de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda do gráfico da função seno. Portanto,

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Assim como fizemos com o seno e o cosseno, vamos ver o comportamento da tangente no círculo trigonométrico.

A função tangente foi definida por $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Vamos mostrar que $\operatorname{tg} x$ pode ser vista como medida algébrica de um segmento. Consideremos uma reta orientada tangente em A a S^1 como na Fig. 1.29 e seja AB um arco de medida x . A reta r que contém O e B determina B' em S^1 e T no novo eixo. Mostremos que $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{med}(AT)$, ou seja, $\operatorname{tg} x$ é a medida algébrica do segmento AT .

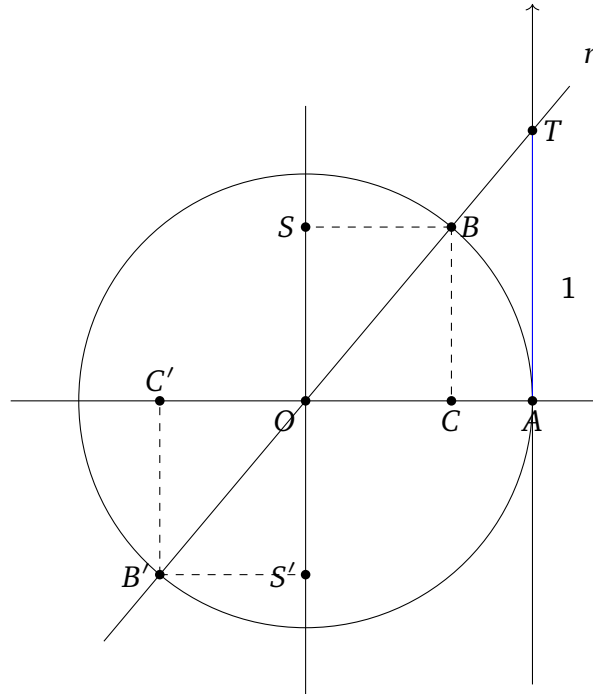


Figura 1.29: Representação geométrica função tangente.

a) B está no primeiro ou terceiro quadrante

Os triângulos OCB , OSB , $OC'B'$ e $OS'B'$ da Fig. 1.29 são congruentes e semelhantes ao triângulo OAT . Portanto,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = \operatorname{med}(AT),$$

$$\text{e} \quad \operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\overline{OS'}}{-\overline{OC'}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \operatorname{med}(AT).$$

b) B está no segundo ou quarto quadrante

As relações de semelhança entre os triângulos da figura Fig. 1.30 são análogos. Obtermos, neste caso,

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x(x + \pi) = -\overline{AT} = \operatorname{med}(AT).$$

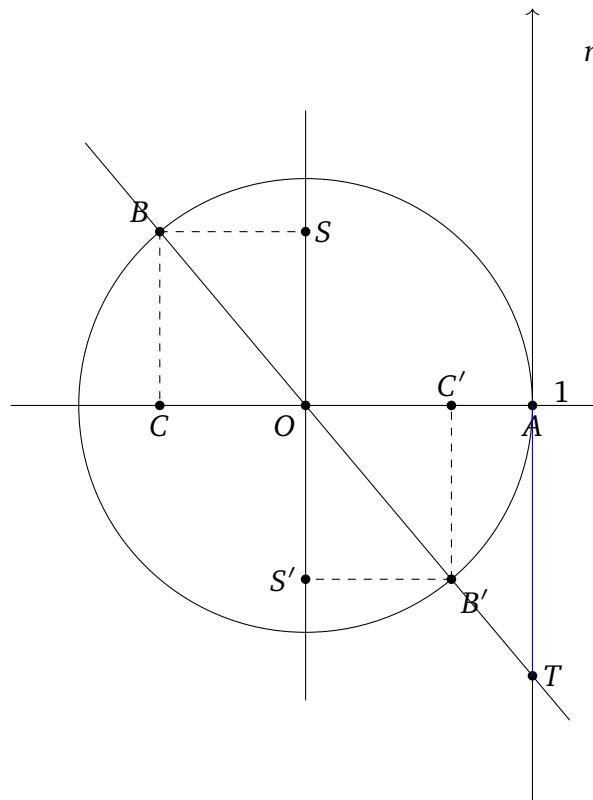


Figura 1.30: Representação geométrica das funções seno e cosseno.

Observe que, em qualquer caso, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$, o que mostra que a tangente é uma função periódica com período π . Para valores próximos e menores que $\frac{\pi}{2}$ a tangente torna-se maior que qualquer número positivo dado, e para valores próximos e maiores que $\frac{\pi}{2}$ a tangente torna-se menor que qualquer número negativo dado. Podemos então esboçar o gráfico da função tangente no intervalo $[0, \pi]$ e repeti-lo em todos os intervalos da forma $[k\pi, (k+1)\pi]$. (Fig. 1.31)

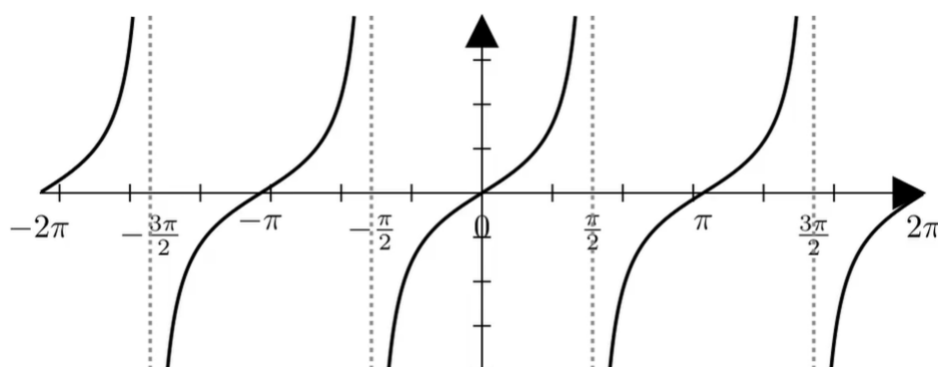


Figura 1.31: Gráfico da função tangente $y = \operatorname{tg}(x)$.

Apresentamos, a seguir, os valores do seno e do cosseno desses arcos que são bastante utilizados.

Assim como fizemos com o seno e o cosseno, vamos apresentar o valor da tangente para alguns arcos notáveis da circunferência trigonométrica.

Medidas do arco (rad)	(0)	$(\frac{\pi}{6})$	$(\frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{3})$	$(\frac{\pi}{2})$	π	$(\frac{3\pi}{2})$	2π
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Tabela 1.1: Tabela do seno e cosseno dos arcos notáveis

Medidas do arco (rad)	(0)	$(\frac{\pi}{6})$	$(\frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{3})$	$(\frac{\pi}{2})$	π	$(\frac{3\pi}{2})$	2π
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Não definida	0	Não definida	0

Tabela 1.2: Tabela da tangente para arcos notáveis

1.3 Manim e Notion como recursos para o ensino de Matemática

No contexto das tecnologias digitais aplicadas à educação, diferentes recursos computacionais podem contribuir para a elaboração de estratégias de ensino que favoreçam a compreensão de conceitos matemáticos. Nesse sentido, a utilização de ferramentas de programação e de ambientes digitais de organização e compartilhamento de conteúdos pode ampliar as possibilidades de representação e exploração dos objetos matemáticos, tornando o processo de aprendizagem mais dinâmico e visual.

Para o desenvolvimento das animações matemáticas apresentadas neste trabalho, foi utilizada a biblioteca Manim (Mathematical Animation Engine), desenvolvida em Python e destinada à criação de animações voltadas à representação de conceitos matemáticos. Por meio de recursos de programação, a biblioteca possibilita construir e manipular elementos geométricos, gráficos, expressões algébricas, pontos, retas, circunferências e outros objetos matemáticos, permitindo representar, de forma dinâmica, diferentes etapas de um determinado conceito. Dessa maneira, o Manim constitui um recurso didático que pode favorecer a visualização de características, relações e propriedades matemáticas, especialmente em conteúdos cuja compreensão pode ser dificultada por uma representação exclusivamente estática.

Neste trabalho, o uso do Manim está relacionado ao ensino de funções trigonométricas, possibilitando a construção de animações que exploram conceitos como seno, cosseno, tangente e suas representações gráficas. A movimentação dos elementos matemáticos permite ao estudante acompanhar as transformações e as relações existentes entre diferentes representações, contribuindo para uma abordagem mais visual e dinâmica desses conceitos. Assim, as animações desenvolvidas procuram complementar as representações tradicionalmente utilizadas em sala de aula, favorecendo a observação e a interpretação dos conceitos e das relações matemáticas apresentados.

Além do Manim, foi utilizada a plataforma digital Notion como ambiente de organização e apresentação das aulas elaboradas ao longo deste trabalho. Nesse ambiente, as animações produzidas, juntamente com textos explicativos e demais materiais didáticos, podem ser organizadas de maneira integrada, permitindo o acesso ao conteúdo de forma sequencial e sistematizada. Dessa forma, o Notion atua como espaço de apresentação e organização do material desenvolvido, enquanto o Manim constitui a principal ferramenta utilizada na produção das animações matemáticas.

A articulação entre esses dois recursos possibilitou a elaboração do produto educacional desta pesquisa, constituído por aulas envolvendo funções trigonométricas, acompanhadas de animações matemáticas desenvolvidas em Python utilizando o Manim. A organização desse material no Notion permite reunir as diferentes etapas das aulas em um único ambiente digital, contribuindo para sua utilização como recurso de apoio ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

A seguir, apresentamos uma breve descrição dessas duas ferramentas utilizadas na construção e apresentação das aulas que constituem o produto educacional desta dissertação de mestrado.

1.3.1 Manim (Mathematical Animation Engine)

A biblioteca Manim (Mathematical Animation Engine), desenvolvida em Python, foi criada por Grant Sanderson, idealizador do canal 3Blue1Brown, no qual são disponibilizados vídeos que utilizam animações matemáticas para apresentar e explorar diferentes conceitos. A biblioteca foi desenvolvida inicialmente como uma ferramenta para a produção dessas animações e, posteriormente, passou a ser utilizada por outros desenvolvedores e pesquisadores na criação de representações matemáticas animadas.



Figura 1.32: Logo do Manim

Bibliotecas são conjuntos de códigos prontos que podemos usar para facilitar a programação em Python. Elas contêm funções e ferramentas que ajudam a desenvolver programas de forma mais fácil

e rápida, sem precisar escrever tudo do zero.

1.3.2 O Google Colab

Para tornar o uso do Manim mais simples, utilizaremos o Google Colab, uma plataforma gratuita que permite criar e executar códigos em Python. Nessa plataforma, cada arquivo é denominado notebook. Um notebook é dividido em células, que podem conter tanto textos quanto códigos.



Figura 1.33: Logo do Google Colab

Para utilizar a biblioteca Manim em Python, emprega-se a palavra-chave *import*. Por meio desse comando, a biblioteca é carregada no ambiente de programação, permitindo o acesso às suas funções, classes e demais elementos.

1.3.3 Instalação do Manim

Para instalar o Manim no Google Colab, basta executar o código apresentado na [Fig. 1.34](#). Para isso, pressione *Shift + Enter*.

```
from IPython.display import clear_output
!sudo apt update
!sudo apt install libcairo2-dev ffmpeg \
    texlive texlive-latex-extra texlive-fonts-extra \
    texlive-latex-recommended texlive-science \
    tipa libpango1.0-dev
!pip install manim
!pip install IPython --upgrade
clear_output()
```

Figura 1.34: Código de instalação do Manim no Google Colab

Para que o Manim funcione corretamente, é necessário reiniciar o ambiente de execução após a

instalação. Para isso, acesse, no Google Colab, o menu *Ambiente de execução* e selecione a opção *Reiniciar ambiente de execução*.

É importante observar que, sempre que um notebook salvo for aberto ou um novo notebook for iniciado, será necessário executar novamente o código de instalação do Manim antes de utilizá-lo. Após a instalação, para verificar se a biblioteca está funcionando corretamente, execute o código apresentado na Fig. 1.35.

```
from manim import *
```

Manim Community v0.11.0

Figura 1.35: Código de verificação da instalação do Manim

Após a instalação do Manim no Google Colab, podemos iniciar a criação das animações. Para isso, é importante compreender, inicialmente, como a biblioteca funciona. O usuário escreve um código em Python que descreve os elementos matemáticos e as transformações que deseja representar. O Manim executa esse código e realiza a renderização da animação, gerando, ao final, um arquivo de vídeo.

1.3.4 Passo a passo para criação de uma animação no Colab

Criamos uma *class* que herda todos os comportamentos da *Scene* (ou de outra cena específica) e utilizamos o método *construct()* para definir o que será animado. A renderização das animações é feita com o comando *play()*.

No código da Fig. 1.36 criamos uma *class* teste, na qual foi definido um fundo branco pelo comando *backgroundcolor*, cujo texto **Profmat** aparece em preto e de forma animada pelo comando *self.play*.

No manim, tudo o que aparece na cena, como textos, fórmulas matemáticas, formas geométricas, gráficos ou imagens, é chamado de *mobject* que do inglês "Objeto Matemático".

Esses elementos são os **blocos de construção** da animação. Vejamos alguns Mobjects frequentemente utilizados para a criação de animações matemáticas, como textos, eixos coordenados que permitem, por exemplo, deslocar outros objetos na tela com ótima precisão através das coordenadas de localização no plano, polígonos, círculos, etc.

1.3.5 Texto no Colab

```
%%manim -qm -v WARNING Teste

# Criando a classe - nome(Scene)
class Teste(Scene):
    # Definindo o método construct
    def construct(self):
        self.camera.background_color = WHITE

|

textoIME = Text('PROFMAT').scale(0.8).set_color(BLACK)
#TextoIME = Guarda este texto na variável "TextoIME" para depois usá-lo em animações
# Chamando animações usando o método play
self.play(Write(textoIME))
```

Figura 1.36: Código animação em texto

No Google Colab o texto aparece animado em vídeo, aqui ficaremos com o print da [Fig. 1.36](#)

PROFMAT

Figura 1.37: Print da animação em texto

1.3.6 Eixos coordenados no Colab

Para eixos coordenados temos o código base apresentada na [Fig. 1.38](#) abaixo:

```
%%manim -qm PlanoComPonto

class PlanoComPonto(Scene):
    def construct(self):
        # Fundo branco
        self.camera.background_color = WHITE
        # Eixos simples (pretos)
        eixos = Axes(
            x_range=[-4, 5, 1],
            y_range=[-4, 5, 1],
            x_length=5,
            y_length=5,
            axis_config={"color": BLACK},
        )
        self.play(Create(eixos))
        self.wait(5)
```

Figura 1.38: Código Eixos Coordenados

Que ao ser executado gera a [Fig. 1.39](#) com um eixo um por um de acordo com as entradas do código.

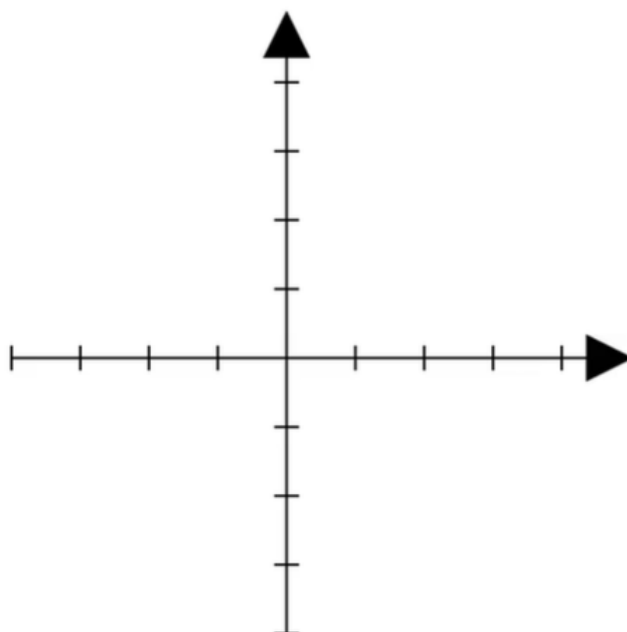


Figura 1.39: Eixos Coordenados

1.3.7 Círculos no Colab

Para círculos, pontos e linhas existe um código base como o mostrado abaixo a [Fig. 1.40](#).

```
%%manim -qm circulo
class circulo(Scene):
    def construct(self):
        self.camera.background_color = WHITE

        ax=Axes(
            x_range=[-4, 4, 1],
            y_range=[-3, 3, 1],
            x_length=8,
            y_length=6,
        )
        self.add(ax)
        self.wait(2)
        C=Circle(radius=2, color=BLACK).move_to(ax.c2p(0,0))
        self.add(C)
        self.wait(2)
        P1=Dot(ax.c2p(0,0))
        P1.set_color(BLACK)
        self.add(P1)
        self.wait()
        P2=Dot().move_to(C.point_at_angle(PI/4))
        P2.set_color(BLACK)
        self.add(P2)
        self.wait()
        L=DashedLine(P1,P2).set_color(BLACK)
        self.add(L)
        self.wait(5)
```

Figura 1.40: Código do Círculo com pontos e linha

Que ao ser executado nos mostra a [Fig. 1.41](#) com o círculo base um ponto no centro e outro sobre a circunferência, qual e uma linha tracejada com extremidades nesses dois pontos.

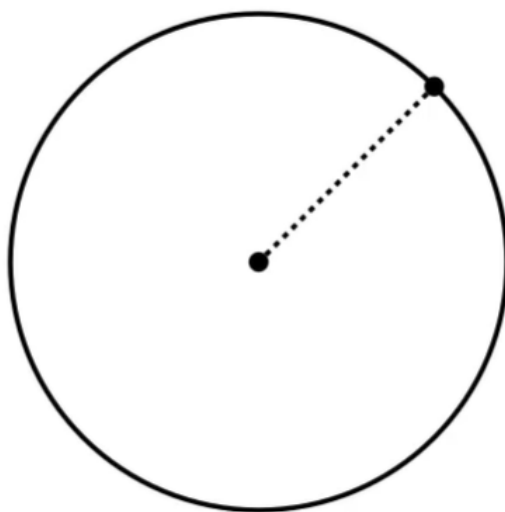


Figura 1.41: Círculo com pontos e linha

A biblioteca Manim dispõe de uma ampla variedade de comandos e recursos capazes de produzir animações simples ou altamente elaboradas por meio da linguagem Python. Esses comandos permitem a construção precisa de objetos geométricos, a manipulação de elementos gráficos e o controle detalhado de movimentos e transformações, o que torna essa ferramenta particularmente adequada para aplicações no ensino de Matemática. Embora a biblioteca ofereça inúmeras possibilidades, neste trabalho optou-se por utilizar apenas alguns de seus principais comandos, selecionados de acordo com os objetivos pedagógicos propostos.

Entre os recursos empregados, destacam-se os eixos cartesianos (Axes), indispensáveis na construção de qualquer animação que envolva representações gráficas, uma vez que permitem a localização precisa de objetos no plano por meio de coordenadas cartesianas. Além disso, foram utilizados comandos para a criação de pontos (Dots), linhas (Lines), linhas tracejadas (DashedLines) e círculos (Circles), elementos fundamentais para a representação geométrica e analítica dos conceitos abordados. Tais objetos possibilitam a visualização clara de relações entre grandezas, bem como a construção de figuras auxiliares necessárias à interpretação das funções trigonométricas.

A utilização desses recursos teve como principal objetivo dinamizar o ensino das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, favorecendo a análise de seus comportamentos e de suas características visuais por meio de animações. Dessa forma, a biblioteca Manim mostrou-se uma ferramenta eficiente no apoio à compreensão conceitual, permitindo explorar aspectos gráficos e geométricos que, muitas vezes, não são plenamente evidenciados em abordagens exclusivamente

estáticas.

1.3.8 Notion

O Notion foi utilizado neste trabalho como um ambiente digital destinado à organização, apresentação e disponibilização das aulas que compõem o produto educacional. Trata-se de uma ferramenta que possibilita a criação e a organização de páginas e subpáginas de forma integrada, permitindo reunir, em um único ambiente, diferentes tipos de conteúdos e recursos didáticos. Essa característica possibilitou estruturar as aulas de maneira sistematizada, integrando textos explicativos, imagens, vídeos, links, tabelas e outros elementos utilizados no desenvolvimento das atividades.

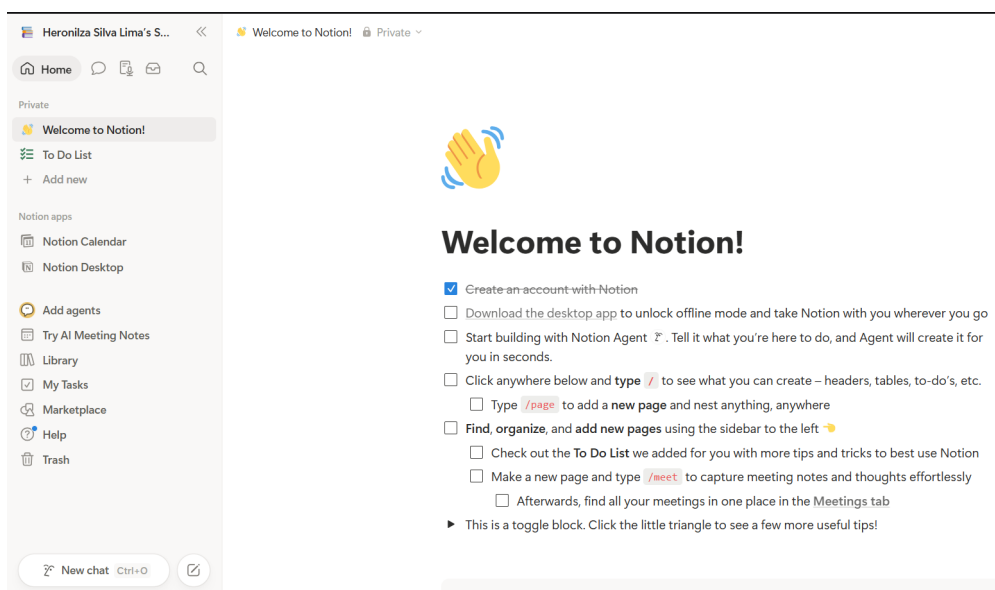


Figura 1.42: Ambiente inicial do Notion.

No desenvolvimento do produto educacional, cada aula foi organizada em uma página específica, permitindo apresentar os conteúdos de forma sequencial e facilitar a navegação entre as diferentes etapas. Além disso, o ambiente possibilita a criação de páginas e subpáginas de forma integrada, recurso que contribuiu para a organização dos materiais complementares e das atividades relacionadas a cada aula.

Outro recurso explorado foi a possibilidade de incorporar vídeos e imagens diretamente às páginas, permitindo disponibilizar as animações matemáticas desenvolvidas com o Manim juntamente com as explicações dos conceitos abordados. Dessa forma, o estudante pode acessar, em um único ambiente, as explicações teóricas, as representações visuais e as animações relacionadas ao conteúdo estudado.

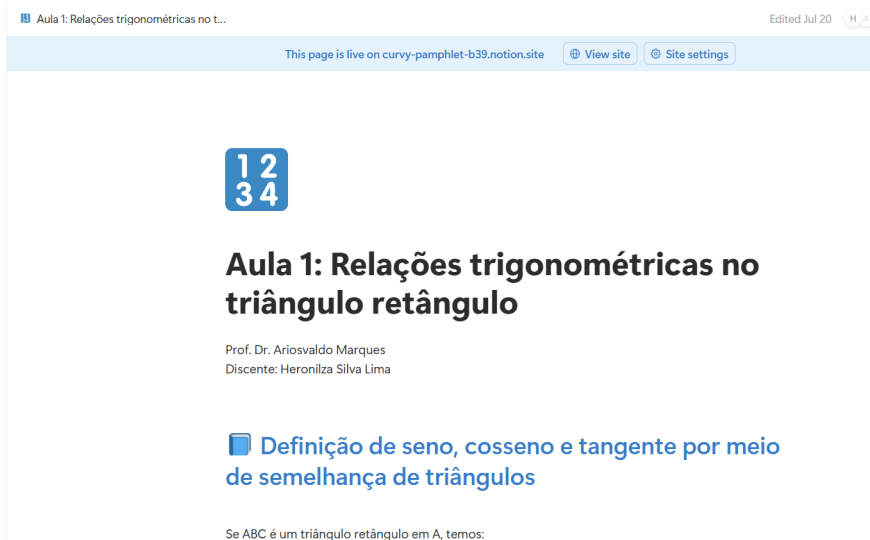


Figura 1.43: Página da Aula 1: Relações trigonométricas.

A utilização de tabelas e de outros elementos de organização também contribuiu para estruturar as informações e apresentar os conteúdos de maneira mais visual. Além disso, o compartilhamento das páginas por meio de um endereço eletrônico possibilita o acesso ao material em diferentes dispositivos, ampliando as possibilidades de utilização do produto educacional.

Podemos organizar as razões trigonométricas dos ângulos de 30° , de 45° e de 60° em um quadro, como o apresentado abaixo. Elas serão bastante utilizadas nas resoluções das atividades, evitando a necessidade de fazer cálculos com valores aproximados.

 Tabela

	30°	45°	60°
SENO	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COSSENO	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
TANGENTE	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Figura 1.44: Organização de informações em tabela no ambiente Notion.

Nesse sentido, o Notion não foi empregado como ferramenta para a produção das animações matemáticas, função desempenhada pelo Manim, mas como ambiente de organização, integração e disponibilização dos materiais produzidos. A articulação entre as duas ferramentas permitiu, portanto, integrar a produção das animações matemáticas à organização das aulas em um ambiente digital, constituindo parte do produto educacional desenvolvido nesta pesquisa.

Metodologia

A metodologia adotada nesta pesquisa fundamenta-se na articulação entre os referenciais teóricos da Educação Matemática, os procedimentos metodológicos empregados e o desenvolvimento de um produto educacional digital voltado ao ensino e à aprendizagem de funções trigonométricas. As aulas apresentadas sofreram adaptações ao longo da sua elaboração como a inclusão das animações e imagens em relação aos documentos pesquisados, entre os materiais consultados e utilizados estão os livros [5], [9], [7].

2.1 Caracterização do produto educacional

O produto educacional desenvolvido nesta pesquisa consiste em um conjunto de animações matemáticas didáticas elaboradas em Python, utilizando a biblioteca Manim (Mathematical Animation Engine). O material foi concebido como recurso de apoio ao ensino e à aprendizagem de funções trigonométricas, explorando, de forma visual e dinâmica, diferentes conceitos e relações matemáticas.

As animações abordam conceitos relacionados às funções seno, cosseno e tangente, bem como suas representações gráficas e relações com o círculo trigonométrico. Por meio da movimentação dos elementos matemáticos, busca-se possibilitar a visualização das transformações e relações entre diferentes representações, contribuindo para a compreensão dos conceitos trigonométricos.

2.1.1 Caracterização da pesquisa: pesquisa aplicada e bibliográfica

Esta pesquisa caracteriza-se como aplicada em razão de sua finalidade prática, uma vez que busca desenvolver um produto educacional digital voltado ao ensino e à aprendizagem de funções trigonométricas. A pesquisa aplicada está relacionada à produção de conhecimentos direcionados à aplicação prática e à busca de soluções para questões concretas da realidade.

Barros e Lehfeld (2014) apresentam a seguinte definição para pesquisa aplicada:

A pesquisa aplicada é aquela em que o pesquisador é movido pela necessidade de conhecer para a aplicação imediata dos resultados. Contribui para fins práticos, visando à solução mais ou menos imediata do problema encontrado na realidade. Na pesquisa aplicada, o pesquisador busca orientação prática à solução imediata de problemas concretos do cotidiano. [3].

Neste trabalho são apresentadas propostas de aulas dinâmicas envolvendo o conteúdo de “Funções trigonométricas” utilizando as animações da biblioteca Manim. Essa ferramenta em Python contribui significativamente com a visualização do comportamento das funções no gráfico quanto aos intervalos de crescimento e decrescimento, amplitude, período, imagem, domínio.

A pesquisa bibliográfica realizada neste trabalho contemplou aspectos históricos da trigonometria, a partir da consulta a fontes que abordam sua evolução histórica, desde os conhecimentos desenvolvidos pelos egípcios até a publicação da obra *Trigonometria Britânica*, de John Newton.

Além dos aspectos históricos, a pesquisa bibliográfica também contemplou uma breve descrição da abordagem da trigonometria no contexto escolar, considerando a introdução do triângulo retângulo e das razões trigonométricas, inicialmente para ângulos menores que 90° . Posteriormente, essas razões são estendidas para ângulos quaisquer por meio do círculo trigonométrico, possibilitando a definição das funções trigonométricas, bem como o estudo de seus gráficos, características e comportamentos.

Gil (2002) apresenta a seguinte definição de pesquisa bibliográfica em seu livro *Como elaborar projetos de pesquisa*:

A pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho dessa natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. Boa parte dos estudos exploratórios pode ser definida como pesquisas bibliográficas. As pesquisas sobre ideologias, bem como aquelas que se propõem à análise das diversas posições acerca de um problema, também costumam ser desenvolvidas quase exclusivamente mediante fontes bibliográficas. [10].

2.1.2 Público-alvo e contexto educacional

O produto educacional foi concebido principalmente para estudantes do Ensino Médio, podendo também ser utilizado em contextos de formação inicial de professores de Matemática, especialmente em atividades relacionadas ao ensino de funções trigonométricas e ao uso de tecnologias digitais na Educação Matemática. As animações buscam favorecer a compreensão conceitual dos conteúdos, articulando diferentes representações matemáticas, como as representações geométrica, algébrica e gráfica.

Além disso, dentro dessa temática, foi essencial a utilização da Inteligência Artificial que constituiu-se como um importante recurso de apoio ao desenvolvimento das animações apresentadas neste trabalho. A plataforma Google Colab, utilizada para a elaboração e execução dos códigos, dispõe de recursos de Inteligência Artificial capazes de auxiliar na identificação de erros de programação, sugerir correções e indicar possibilidades alternativas para a construção e o aprimoramento das animações. Nesse sentido, a IA foi empregada como ferramenta auxiliar no processo de desenvolvimento, contribuindo para a resolução de dificuldades encontradas durante a implementação dos códigos e para a exploração de diferentes estratégias de construção das representações propostas. Ressalta-se, contudo, que as decisões relacionadas à concepção, à finalidade pedagógica e à organização das animações foram realizadas a partir dos objetivos estabelecidos para este trabalho. A contribuição da Inteligência Artificial, somada aos conhecimentos previamente adquiridos, aos códigos de referência disponíveis e às adaptações realizadas ao longo do processo de elaboração, proporcionou subsídios importantes para o desenvolvimento e o aperfeiçoamento do produto final. Dessa forma, a incorporação desse recurso tecnológico ao processo de produção mostrou-se relevante não apenas para a construção das animações, mas também para a experimentação e o refinamento das possibilidades de representação dos conceitos abordados nesta dissertação.

2.1.3 Desenvolvimento das animações e recursos tecnológicos

A escolha pelo uso de animações computacionais fundamenta-se na possibilidade de tornar visíveis aspectos dinâmicos dos conceitos trigonométricos, que, em abordagens tradicionais, costumam ser apresentados de forma estática. Por meio do movimento e da sincronização entre elementos visuais, o produto educacional permite ao estudante observar, por exemplo, a variação dos valores das funções trigonométricas em função do deslocamento angular, contribuindo para uma compreensão mais integrada dos conceitos envolvidos.

As animações foram desenvolvidas com intencionalidade pedagógica, respeitando uma sequência didática que parte de conceitos introdutórios, como o círculo trigonométrico, e avança para a construção e análise dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente. Cada animação foi planejada de modo a destacar elementos essenciais do conteúdo, como os eixos cartesianos, os ângulos expressos em radianos, os pontos associados aos ângulos notáveis e os valores correspondentes das funções, além das assíntotas, no caso da função tangente.

O produto educacional caracteriza-se como um recurso digital aberto, uma vez que os códigos-fonte das animações são disponibilizados de modo a possibilitar sua adaptação, modificação e reutilização por outros professores, de acordo com suas necessidades e contextos pedagógicos. Essa possibilidade amplia as formas de utilização do material e favorece a apropriação das tecnologias digitais pelos docentes, permitindo que as animações sejam modificadas e incorporadas a diferentes propostas de ensino.

Do ponto de vista metodológico, o produto não se limita à apresentação dos conteúdos, mas busca oferecer uma abordagem visual e dinâmica para o ensino da trigonometria. Nesse contexto, o professor atua como mediador do processo de ensino e aprendizagem, utilizando as animações como recursos de apoio à explicação, à problematização e à discussão dos conceitos matemáticos. Dessa forma, o material pode ser integrado a diferentes estratégias de ensino, como aulas expositivas, atividades investigativas e momentos de revisão conceitual.

Assim, o produto educacional desenvolvido nesta pesquisa constitui uma proposta didática que articula conteúdos curriculares, tecnologias digitais e fundamentos teórico-pedagógicos, ampliando as possibilidades de abordagem dos conceitos relacionados às funções trigonométricas no ensino de Matemática.

2.1.4 Utilização da Inteligência Artificial no desenvolvimento das animações

Durante o processo de desenvolvimento das animações propostas neste trabalho, a Inteligência Artificial foi utilizada como recurso de apoio à programação, à resolução de problemas e ao aprimoramento dos códigos empregados na construção das representações. A plataforma Google Colab, utilizada para a elaboração e execução dos programas, dispõe de recursos baseados em Inteligência Artificial que possibilitam a identificação de erros no código, a sugestão de correções e a indicação de diferentes estratégias para sua implementação.

A utilização desse recurso mostrou-se particularmente relevante diante dos desafios encontrados ao longo da construção das animações, uma vez que possibilitou testar diferentes possibilidades de programação, compreender erros de implementação e aperfeiçoar códigos previamente elaborados. Além disso, códigos e estruturas de algumas animações já disponíveis serviram como ponto de partida para o desenvolvimento de novas representações, sendo posteriormente adaptados e modificados de acordo com os objetivos específicos deste trabalho.

É importante destacar que a Inteligência Artificial foi empregada como ferramenta auxiliar e não como substituta das decisões tomadas durante o processo de elaboração. A definição dos conteúdos a serem representados, a escolha das estratégias de animação, a organização dos elementos visuais e as adaptações necessárias aos códigos foram orientadas pelos objetivos estabelecidos para esta pesquisa. As sugestões e soluções apresentadas pela ferramenta foram, portanto, analisadas, testadas e modificadas conforme as necessidades identificadas durante o desenvolvimento.

Nesse sentido, a incorporação da Inteligência Artificial ao processo de produção das animações contribuiu significativamente para a construção e o aperfeiçoamento do produto final. Sua utilização, articulada aos conhecimentos adquiridos ao longo da pesquisa, aos códigos utilizados como referência e às intervenções realizadas durante o processo de programação, possibilitou explorar diferentes alternativas para a representação dos conceitos abordados. Dessa forma, a Inteligência Artificial constituiu-se como um recurso tecnológico complementar, que favoreceu tanto a resolução de dificuldades técnicas quanto o processo de experimentação e refinamento das animações desenvolvidas nesta dissertação.

2.1.5 Fundamentação pedagógica e aprendizagem significativa

A elaboração do produto educacional fundamenta-se também nos princípios da aprendizagem significativa, conforme a perspectiva de Ausubel. Nessa abordagem, a aprendizagem ocorre de maneira mais significativa quando novos conhecimentos são relacionados de forma não arbitrária aos conhecimentos que o estudante já possui. Nesse sentido, os conhecimentos prévios assumem papel fundamental no processo de aprendizagem, constituindo a base para a construção e a integração de novos conceitos.

Se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. [2].

No ensino das funções trigonométricas, essa perspectiva permite considerar conhecimentos prévios relacionados a ângulos, triângulos, razões trigonométricas, sistema de coordenadas cartesianas,

círculos e representações gráficas. A partir desses conhecimentos, novos conceitos podem ser introduzidos e relacionados progressivamente, possibilitando ao estudante estabelecer conexões entre diferentes ideias matemáticas.

Nesse contexto, as animações desenvolvidas neste trabalho são utilizadas como recursos de apoio à construção dessas relações. A representação dinâmica dos objetos matemáticos permite explorar visualmente transformações e correspondências que, em uma representação exclusivamente estática, podem ser menos evidentes. Por meio do movimento dos elementos, é possível relacionar, por exemplo, o deslocamento angular no círculo trigonométrico aos valores das funções seno e cosseno e, posteriormente, às suas respectivas representações gráficas. Dessa forma, as animações foram concebidas com a intenção de favorecer a articulação entre conhecimentos prévios e novos conceitos matemáticos.

A utilização das animações, entretanto, não é considerada isoladamente como garantia de uma aprendizagem significativa. Seu potencial pedagógico está relacionado à forma como são integradas às atividades de ensino e mediadas pelo professor. Nesse sentido, o docente pode utilizar os recursos visuais para propor questionamentos, retomar conhecimentos prévios, explorar relações entre diferentes representações e promover discussões acerca dos conceitos matemáticos abordados.

O produto educacional foi, portanto, concebido com intencionalidade pedagógica, considerando o contexto do Ensino Médio e as possibilidades de utilização em diferentes situações de ensino e aprendizagem, incluindo aulas, atividades investigativas, momentos de revisão conceitual e espaços formativos voltados à formação de professores. A elaboração das animações buscou articular representações geométricas, algébricas e gráficas, favorecendo a exploração das relações existentes entre diferentes formas de representar os conceitos trigonométricos.

Assim, o percurso metodológico apresentado neste capítulo fundamenta as escolhas realizadas no desenvolvimento do produto educacional e estabelece as bases para a apresentação dos materiais produzidos. No capítulo seguinte, serão apresentados e discutidos os materiais desenvolvidos, bem como suas possibilidades de utilização no ensino e na aprendizagem de funções trigonométricas.

Desenvolvimento

3.1 Aula 1: Relações trigonométricas no triângulo retângulo

Link do Notion: [Aula 1: Relações trigonométricas no triângulo retângulo.](#)

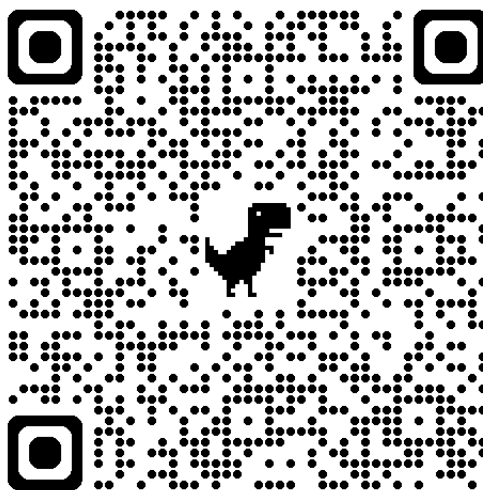


Figura 3.1: Aula 1: Relações trigonométricas no triângulo retângulo

3.1.1 Definição de seno, cosseno e tangente por meio de semelhança de triângulos.

Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em A :

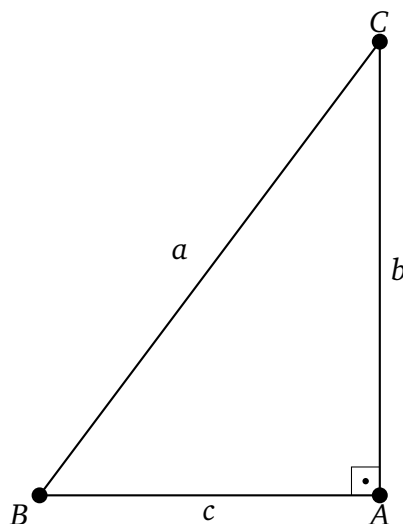


Figura 3.2: Triângulo retângulo $\triangle ABC$.

Nesse triângulo:

- a é a medida da hipotenusa;
- b e c são as medidas dos catetos;
- $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são os ângulos agudos;
- $\overline{AC}$ (de medida b) é o cateto oposto ao ângulo $\widehat{B}$;
- $\overline{AB}$ (de medida c) é o cateto adjacente ao ângulo $\widehat{B}$.

Consideremos agora um ângulo agudo $\widehat{AOB} = \theta$, com $0^\circ < \theta < 90^\circ$. A partir de pontos arbitrários $C, E, G, \dots$ sobre a semirreta OA , traçamos as perpendiculares $CD, EF, GH, \dots$ à semirreta OB , determinando os pontos $D, F, H, \dots$ sobre OB , conforme ilustrado na [Fig. 3.3](#).

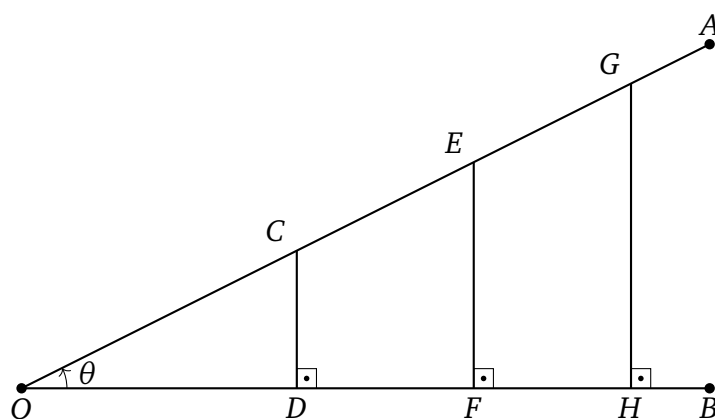


Figura 3.3: Semelhança de triângulos retângulos.

Pelo caso de semelhança ângulo-ângulo (AA), os triângulos retângulos $\triangle OCD$, $\triangle OEF$, $\triangle OGH, \dots$ são todos semelhantes entre si. Portanto, as razões entre os comprimentos de lados correspondentes são constantes:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{OG}} = \dots = k_1.$$

Essa razão independe do triângulo retângulo particular escolhido, dependendo exclusivamente da medida do ângulo agudo θ . Denomina-se essa razão **seno do ângulo θ** , expressa por:

$$\text{sen } \theta = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \theta}{\text{medida da hipotenusa}} \quad (0^\circ < \theta < 90^\circ).$$

De modo análogo, da proporcionalidade decorrente da semelhança desses triângulos, obtêm-se as razões constantes:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OG}} = \dots = k_2,$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{OH}} = \dots = k_3,$$

as quais também dependem exclusivamente de θ . Definem-se, respectivamente, como o **cosseno do ângulo θ** e a **tangente do ângulo θ** :

$$\cos \theta = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \theta}{\text{medida da hipotenusa}} \quad (0^\circ < \theta < 90^\circ),$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \theta}{\text{medida do cateto adjacente a } \theta} \quad (0^\circ < \theta < 90^\circ).$$

As razões $\text{sen } \theta$, $\cos \theta$ e $\text{tg } \theta$ são denominadas **razões trigonométricas** do ângulo agudo θ .

3.1.2 Seno, cosseno e tangente só dependem do ângulo

É importante salientar que $\text{sen } \widehat{B}$, $\cos \widehat{B}$ e $\text{tg } \widehat{B}$ dependem apenas do B , mas não do tamanho do triângulo do qual $\widehat{B}$ é um dos ângulos agudos. Vamos provar isso.

Consideremos dois triângulos retângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, que tenham um ângulo agudo de mesma medida ($\widehat{B} = \widehat{B'}$). Nesse caso, eles são semelhantes, pois têm dois ângulos correspondentes, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\widehat{A} = \widehat{A'}$ (retos):

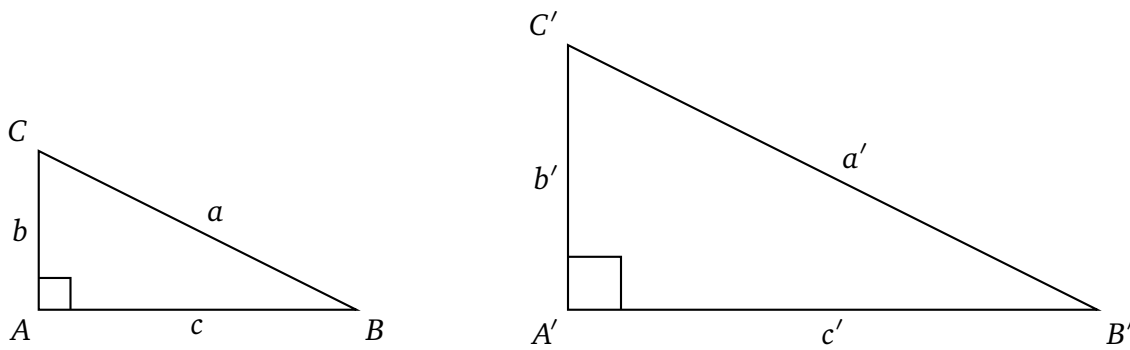


Figura 3.4: Triângulos retângulos semelhantes.

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}$$

ou seja, $\widehat{\text{sen}} \widehat{B'} = \widehat{\text{sen}} \widehat{B}$; $\widehat{\text{cos}} \widehat{B'} = \widehat{\text{cos}} \widehat{B}$; $\widehat{\text{tg}} \widehat{B'} = \widehat{\text{tg}} \widehat{B}$. Portanto, o seno, o cosseno e a tangente dizem respeito apenas ao ângulo, e não ao triângulo que os contém.

3.1.3 Relações entre seno, cosseno e tangente

As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente se relacionam de várias formas, como veremos a seguir:

1ª) Relação fundamental do triângulo retângulo

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

Demonstração:

Consideremos um ângulo α de vértice C e um triângulo CAB , retângulo em A , como mostra a [Fig. 3.5](#) abaixo:

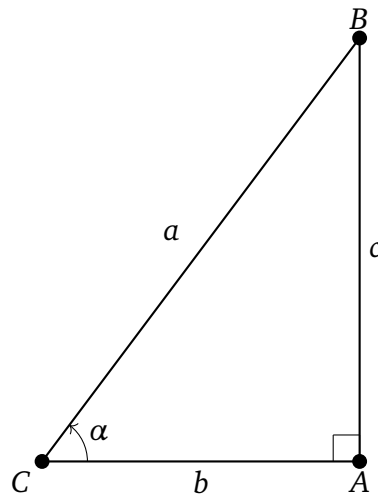


Figura 3.5: Relação fundamental.

Lembrando o teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Assim,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ).$$

2ª)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

Demonstração:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg} \alpha$$

ou

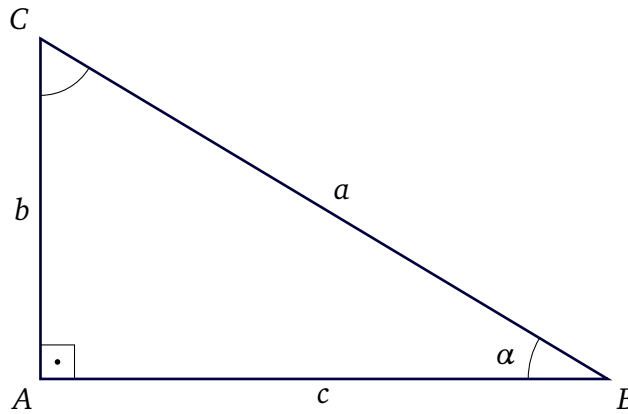


Figura 3.6: Triângulo retângulo com ângulo α .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \text{ (dividimos ambos os termos da razão por } a \neq 0 \text{)}$$

Portanto, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

3ª) **Se dois ângulos, α e β , são complementares ($\alpha + \beta = 90^\circ$), então $\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$ (o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complementar, e vice-versa).**

Demonstração:

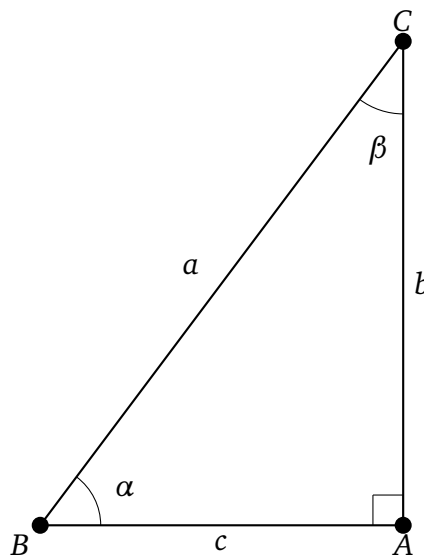


Figura 3.7: Triângulo retângulo com ângulos α e β .

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente nesse triângulo anterior, temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{a} = \cos \beta; \text{ portanto } \operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{a} = \operatorname{sen} \beta; \text{ portanto } \cos \alpha = \operatorname{sen} \beta$$

3.1.4 Ângulos de 30° , 45° e 60°

Os ângulos de 30° , de 45° e 60° podem ser destacados especialmente, porque as razões trigonométricas relacionadas a eles podem ser obtidas por meio de cálculos usando as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo equilátero e de um triângulo retângulo isósceles, como mostrado a seguir.

1ª) Seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° e 60°

Considere um triângulo equilátero ABC , no qual l é a medida dos lados e h é a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$, conforme mostra a Fig. 3.8

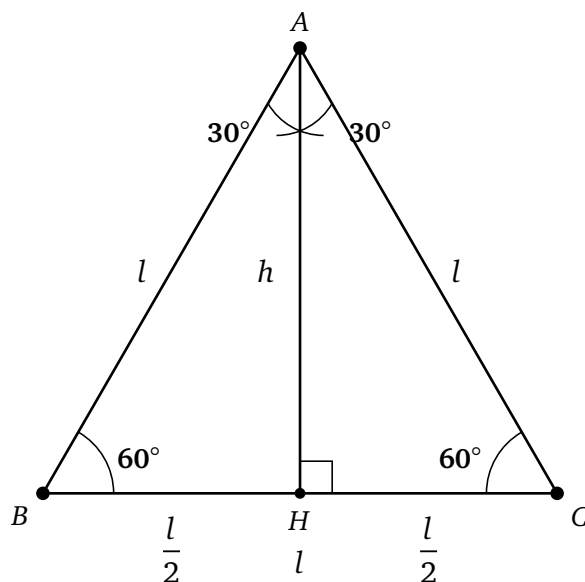


Figura 3.8: Triângulo equilátero ABC e sua altura relativa ao lado BC .

No triângulo retângulo $\triangle AHC$, reto em H , Fig. 3.9, aplicamos o teorema de Pitágoras para calcular a altura h :

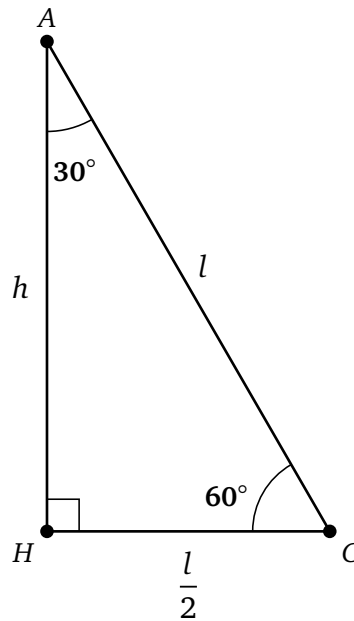


Figura 3.9: Cálculo da altura em um triângulo equilátero.

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

E obtemos as seguintes razões:

- $\sin 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$
- $\cos 30^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sin 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$
- $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{l} = \sqrt{3}$

2ª) Seno, cosseno e tangente do ângulo de 45°

Considere um triângulo retângulo e isósceles $\triangle ABC$, no qual l é a medida dos catetos e $l\sqrt{2}$ é a medida da hipotenusa, conforme mostra a [Fig. 3.10](#) a seguir.

A partir desse triângulo $\triangle ABC$, obtemos as seguintes razões:

- $\sin 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

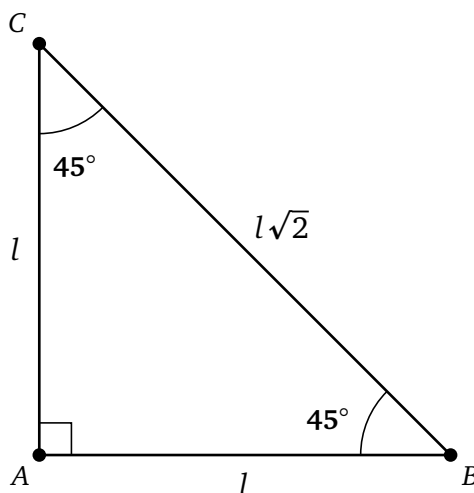


Figura 3.10: Triângulo retângulo isósceles.

- $\cos 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{l}{l} = 1$

Podemos organizar as razões trigonométricas dos ângulos de 30° , de 45° e de 60° em um quadro, como o apresentado abaixo. Elas serão bastante utilizadas nas resoluções das atividades, evitando a necessidade de fazer cálculos com valores aproximados.

Ângulos	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 3.1: Tabela das razões trigonométricas dos ângulos notáveis.

Os arcos notáveis constituem uma importante ferramenta para o estudo das razões trigonométricas, uma vez que permitem determinar, de maneira exata, os valores do seno, cosseno e tangente de determinados ângulos. Entre os arcos mais utilizados destacam-se os correspondentes aos ângulos de 30° , 45° e 60° , cujos valores podem ser obtidos a partir de relações geométricas em triângulos retângulos. O conhecimento desses valores facilita a resolução de diferentes situações-problema e contribui para a compreensão das relações trigonométricas na circunferência.

Além de sua utilização nos cálculos, os arcos notáveis possibilitam estabelecer uma relação entre a representação geométrica e os valores das razões trigonométricas. A partir da circunferência trigonométrica, é possível visualizar como esses valores se comportam à medida que o ângulo varia, permitindo ampliar o estudo iniciado com os triângulos retângulos. Dessa forma, a representação dos

arcos na circunferência será utilizada como recurso para aprofundar a compreensão dos conceitos apresentados nas atividades propostas.

3.2 Aula 2: Razões trigonométricas na circunferência

Link do Notion: [Aula 2: Razões trigonométricas na circunferência](#)

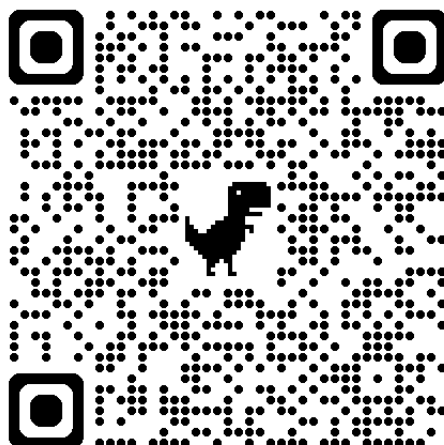


Figura 3.11: Aula 2: Razões trigonométricas na circunferência

3.2.1 Arcos de circunferência

Ao marcarmos dois pontos A e B sobre uma circunferência de centro O , ela fica dividida em duas partes denominadas **arcos de circunferência** ou, simplesmente, **arcos**. Os pontos A e B são as extremidades dos arcos e, portanto, pertencem a ambos.

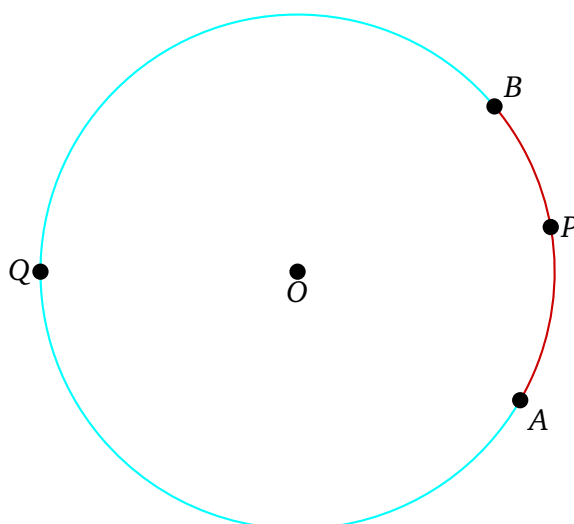


Figura 3.12: Arcos $\widehat{AB}$.

Os pontos A e B determinam dois arcos de circunferência que podem ser indicados por $\widehat{AB}$. Quando não ficar evidente a qual arco estamos nos referindo, podemos inserir um ponto entre as extremidades A e B e utilizar a notação $\widehat{APB}$ ou $\widehat{AQB}$ para identificar cada arco.

Se as extremidades A e B coincidem, um dos arcos fica reduzido a um ponto e o outro é a própria circunferência. Eles são chamados, respectivamente, de **arco nulo** e de **arco de uma volta**.

Quando as extremidades correspondem às extremidades de um diâmetro, teremos duas **semicircunferências** ou **arcos de meia-volta**.

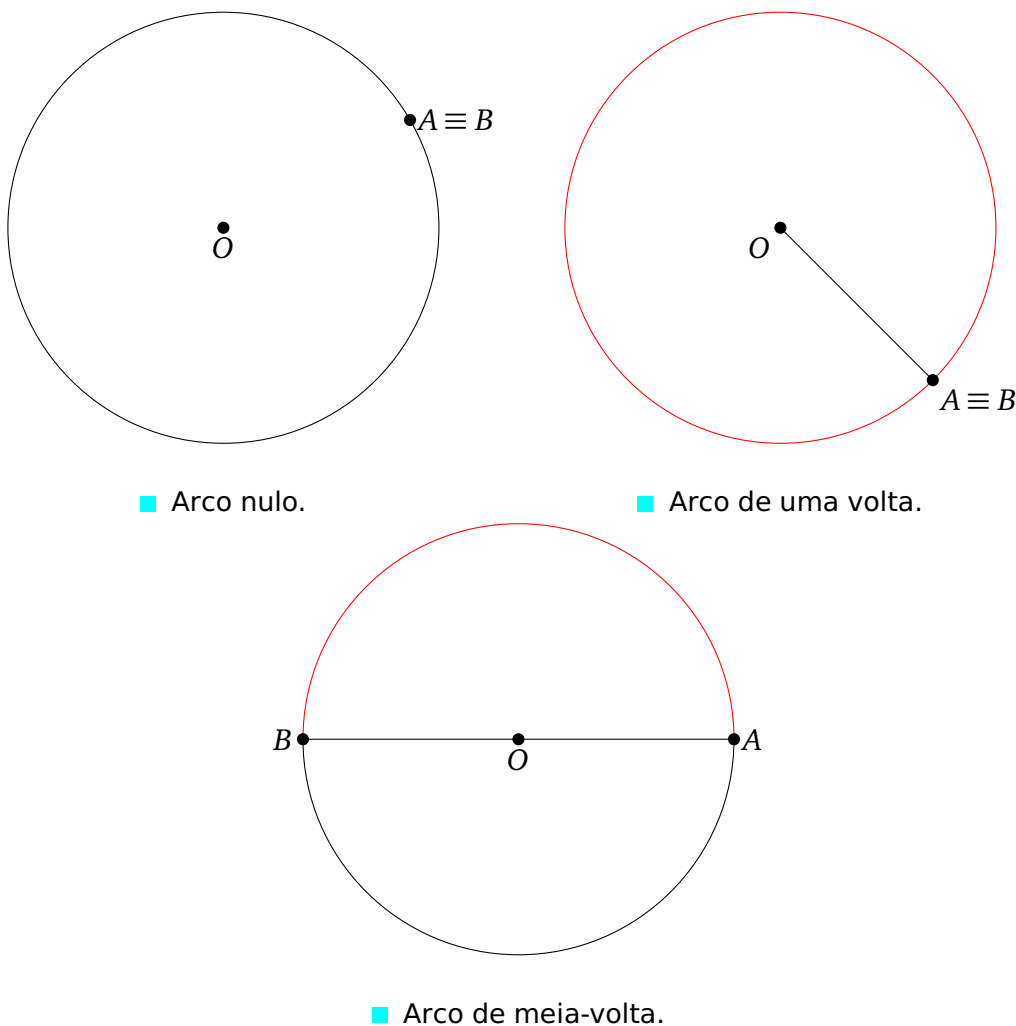


Figura 3.13: Classificação dos arcos de circunferência.

3.2.2 Ângulo central

Todo ângulo que têm vértices no centro da circunferência é chamado de **ângulo central**. Assim, todo arco de circunferência tem um ângulo central que o subtende.

Na Fig. 3.14 abaixo, $\widehat{AOB}$ é o ângulo central correspondente ao arco $\widehat{AB}$. Além disso, $\text{med}(\widehat{AOB}) = \alpha$.

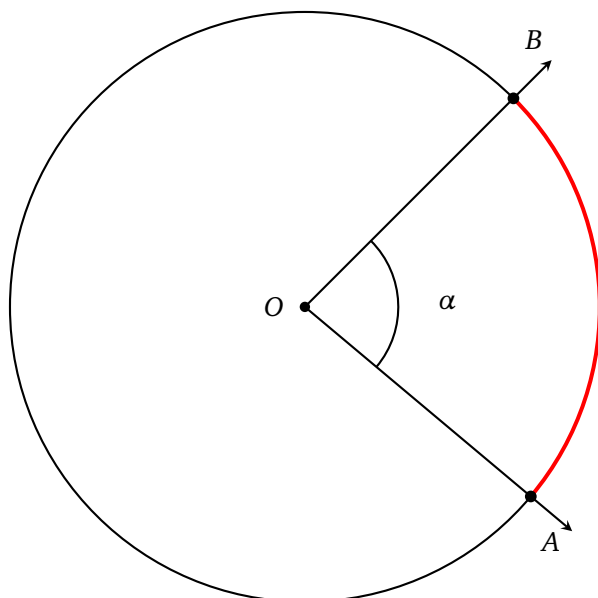
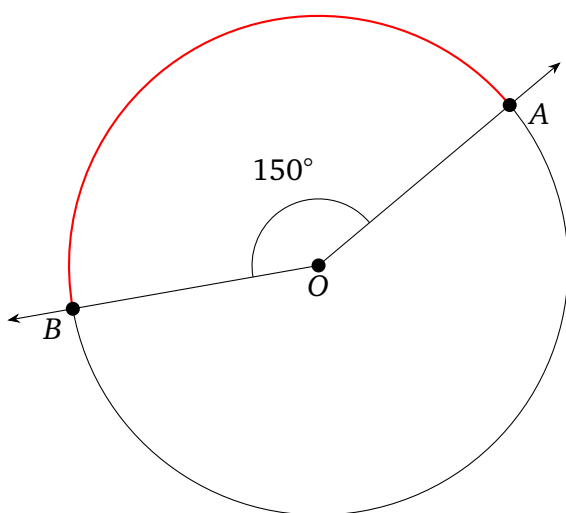
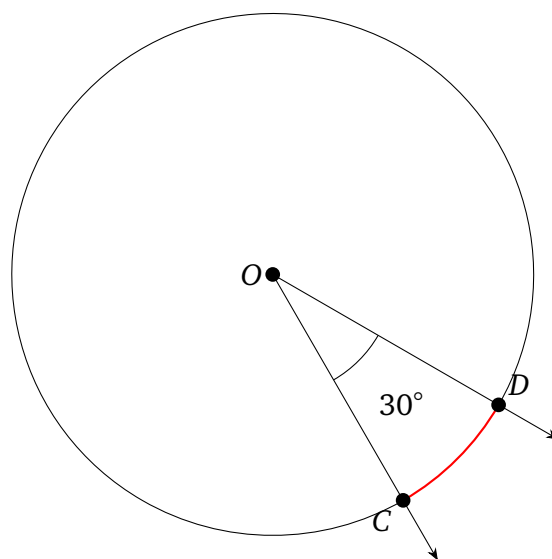


Figura 3.14: Ângulo central e arco correspondente em uma circunferência.

Veja alguns exemplos a seguir na [Fig. 3.15](#).



■ $\text{med}(\widehat{AOB}) = 150^\circ$



■ $\text{med}(\widehat{COD}) = 30^\circ$

Figura 3.15: Exemplos de medidas de ângulos centrais e arcos correspondentes.

3.2.3 Medida e comprimento de arcos de circunferência

A medida angular de um arco é a medida do ângulo central correspondente.

Por exemplo, na figura a seguir, a medida angular do arco $\widehat{AB}$ é igual a α , a qual também podemos representar por $\text{med}(\widehat{AB})$. Observe que a medida angular do arco $\widehat{CD}$ também é α .

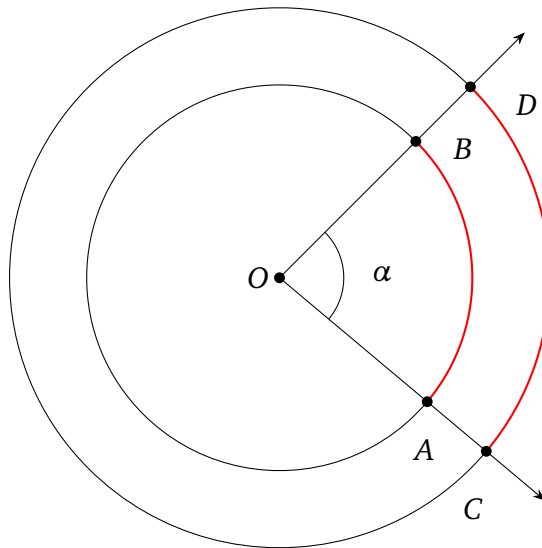


Figura 3.16: Arcos de circunferências concêntricas de mesmo ângulo central α .

A medida linear de um arco é o comprimento ao longo do arco, ou seja, a medida de uma extremidade à outra.

3.2.4 Unidades de medida de arcos de circunferência

A medida de um arco de circunferência pode ser expressa em graus ou em radianos.

Grau

Ao dividirmos uma circunferência em 360 partes congruentes (de mesmo comprimento), cada uma dessas partes constitui um arco que corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência e possui medida angular igual a **1 grau**, indicado por 1° . Assim, a circunferência completa mede 360° .

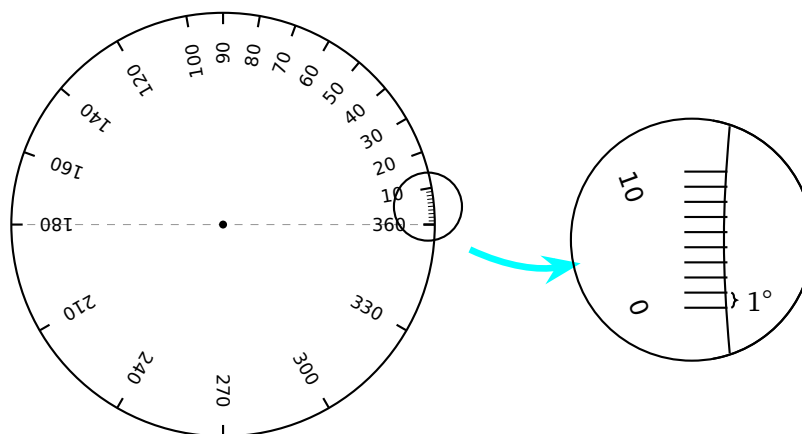


Figura 3.17: Divisão da circunferência em 360° e detalhe da unidade de 1° .

Os arcos de 90° , 180° e 270° , orientados no sentido anti-horário nas figuras a seguir, representam um quarto, metade e três quartos da circunferência, respectivamente, pois:

$$\frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}, \quad \frac{180^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{270^\circ}{360^\circ} = \frac{3}{4}$$

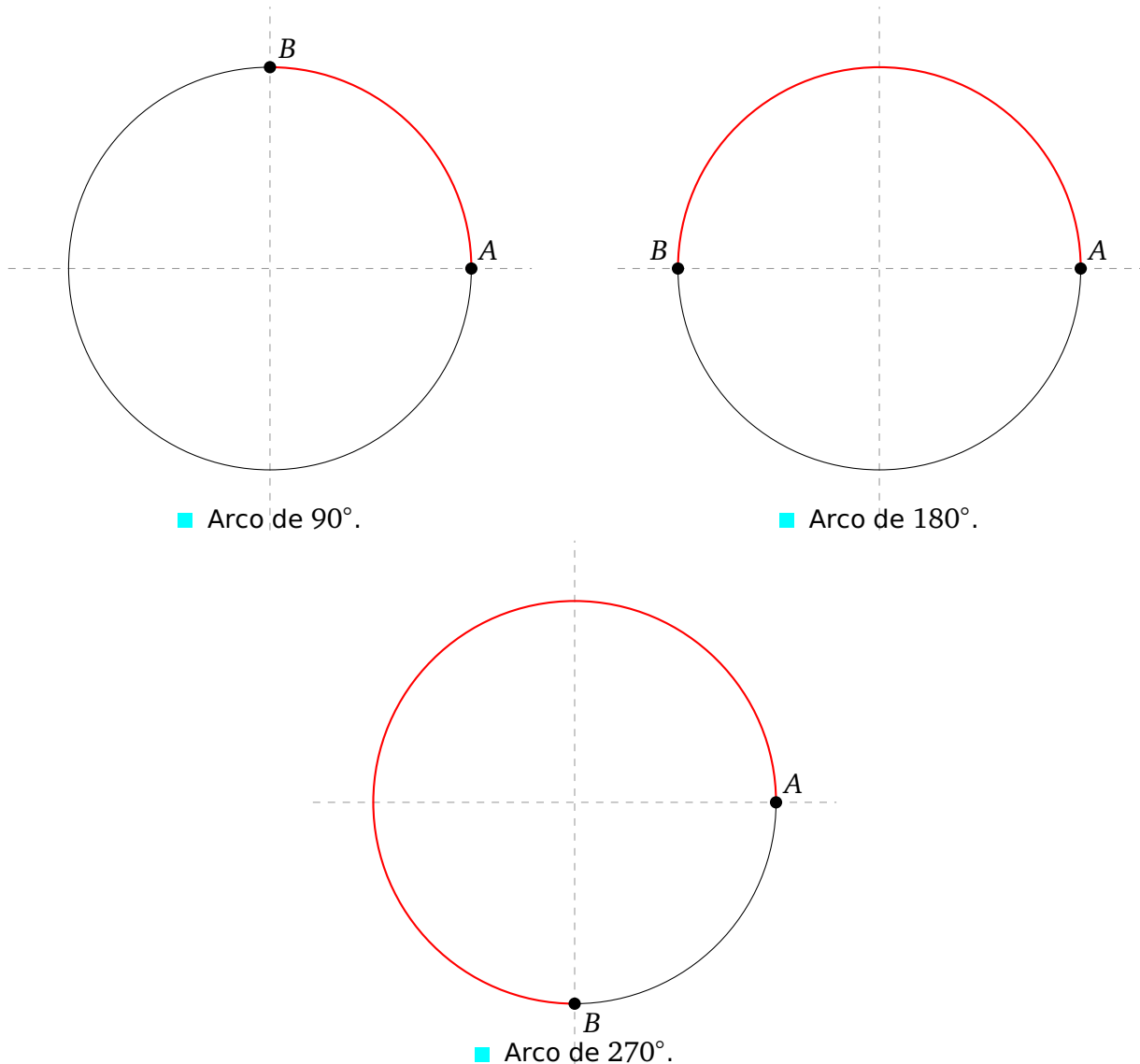


Figura 3.18: Representação dos arcos notáveis na circunferência.

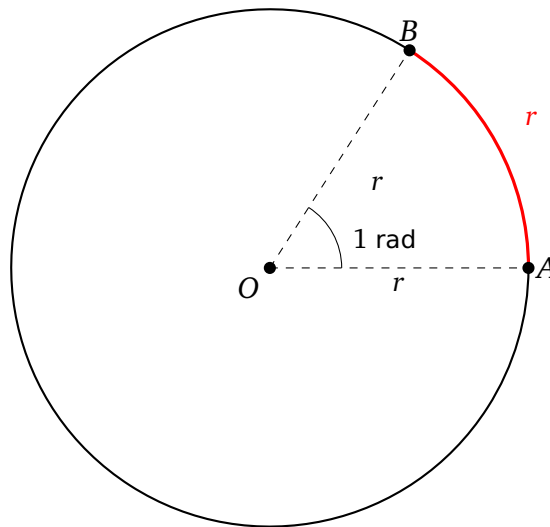
Os submúltiplos do grau são o **minuto** e o **segundo**, sendo que:

- um minuto ($1'$) é igual a $\frac{1}{60}$ do grau;
- um segundo ($1''$) é igual a $\frac{1}{60}$ do minuto.

Radiano

Outra unidade fundamental de medida angular é o **radiano**. Essa unidade é amplamente utilizada no estudo das funções trigonométricas e em diversas áreas científicas e tecnológicas, como a Física e a Engenharia.

Quando o comprimento de um arco (sua medida linear) é igual ao raio da circunferência que o contém, a medida angular desse arco é definida como **1 radiano** (1 rad).



- Comprimento do arco
 $\widehat{AB}$ = comprimento do
raio $OA = r$.
- $\text{med}(\widehat{AB}) = 1 \text{ rad}$.

Figura 3.19: Definição de 1 radiano.

Relação entre grau e radiano

Para converter a medida de um ângulo de graus para radianos (ou vice-versa), utiliza-se a relação fundamental entre essas duas unidades de medida angular.

Dada uma circunferência de raio r , seu comprimento é $C = 2\pi r$. Geometricamente, isso significa que o raio r cabe exatamente 2π vezes (aproximadamente 6,28 vezes) ao longo do comprimento da circunferência.

Visto que um arco de comprimento igual a r subentende um ângulo central de 1 rad, o comprimento total de $2\pi r$ corresponde a um ângulo central de 2π rad. Como a volta completa na circunfe-

rência mede 360° , estabelece-se a equivalência:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \quad \text{ou} \quad \pi \text{ rad} = 180^\circ$$

3.2.5 Circunferência orientada

A figura a seguir ilustra que, sobre a circunferência, o deslocamento do ponto A para o ponto B pode ser realizado no sentido anti-horário, ao longo do arco vermelho $\widehat{AB}$, ou no sentido horário, ao longo do arco verde $\widehat{AB}$.

Ao fixar o sentido anti-horário como positivo e o sentido horário como negativo, obtém-se uma **circunferência orientada**.

Dessa forma, para o trajeto de A até B apresentado na Fig. 3.20, podemos associar as seguintes medidas angulares:

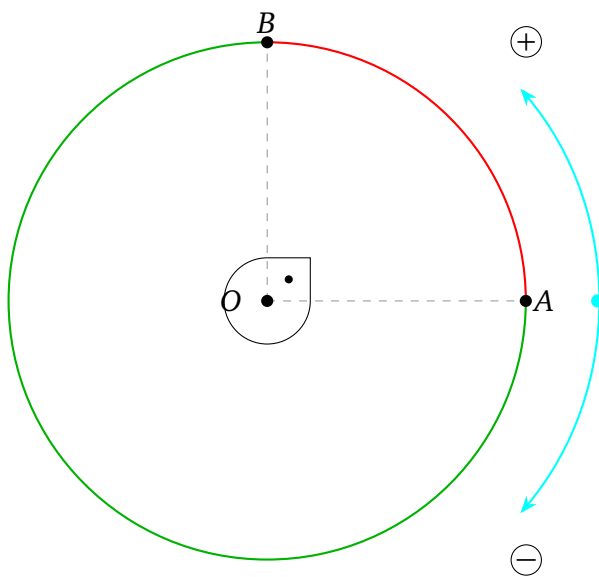
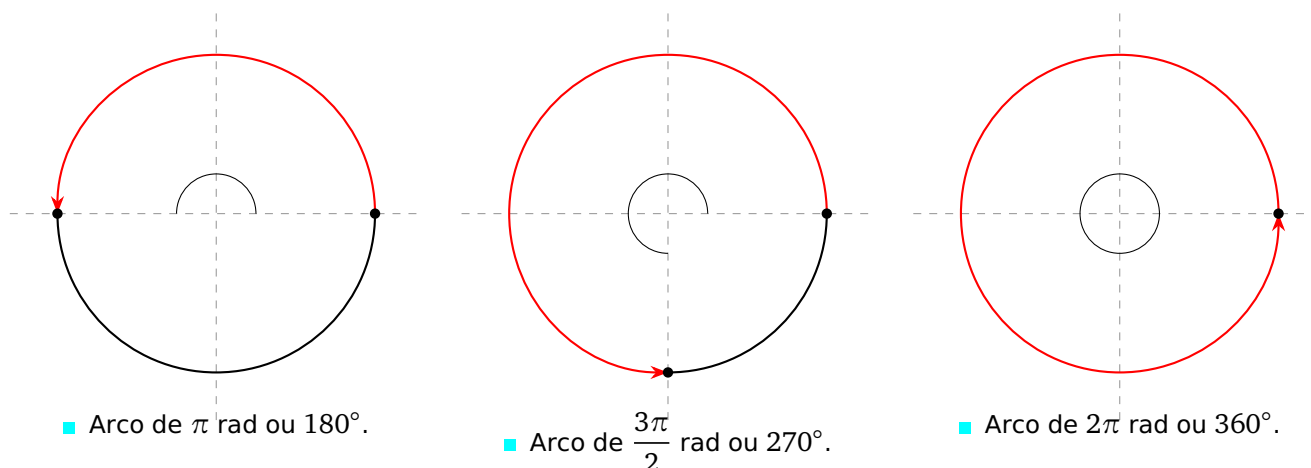


Figura 3.20: Circunferência orientada indicando sentidos positivo e negativo.

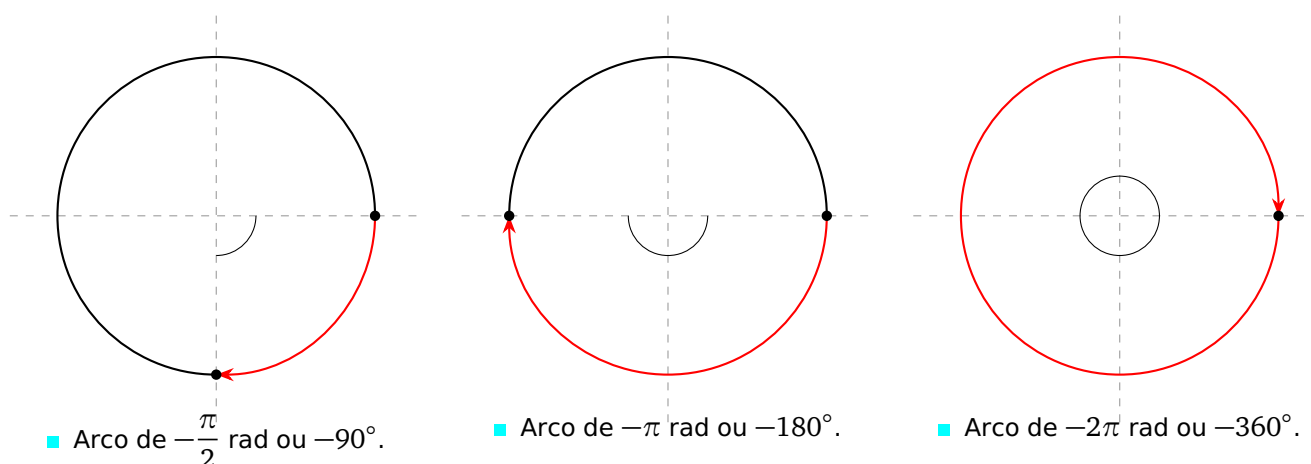
- arco vermelho: $\text{med}(\widehat{AB}) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ou $\text{med}(\widehat{AB}) = 90^\circ$
- arco verde: $\text{med}(\widehat{AB}) = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$ ou $\text{med}(\widehat{AB}) = -270^\circ$

Veja outros exemplos de arcos na circunferência orientada:

• no sentido anti-horário



• no sentido horário



3.2.6 Circunferência trigonométrica

Vamos, agora, fixar um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy no plano.

A circunferência orientada de centro na origem do sistema e raio unitário ($r = 1$) é denominada **circunferência trigonométrica** ou **ciclo trigonométrico**. Os arcos dessa circunferência têm origem no ponto $A(1, 0)$, denominado **origem dos arcos**.

Os eixos x e y do sistema de coordenadas determinam, no plano, quatro regiões denominadas **quadrantes**, numeradas no sentido anti-horário a partir do ponto A , conforme ilustra a [Fig. 3.21](#). Os pontos A , B , C e D pertencem aos eixos coordenados e, portanto, não pertence a nenhum quadrante.

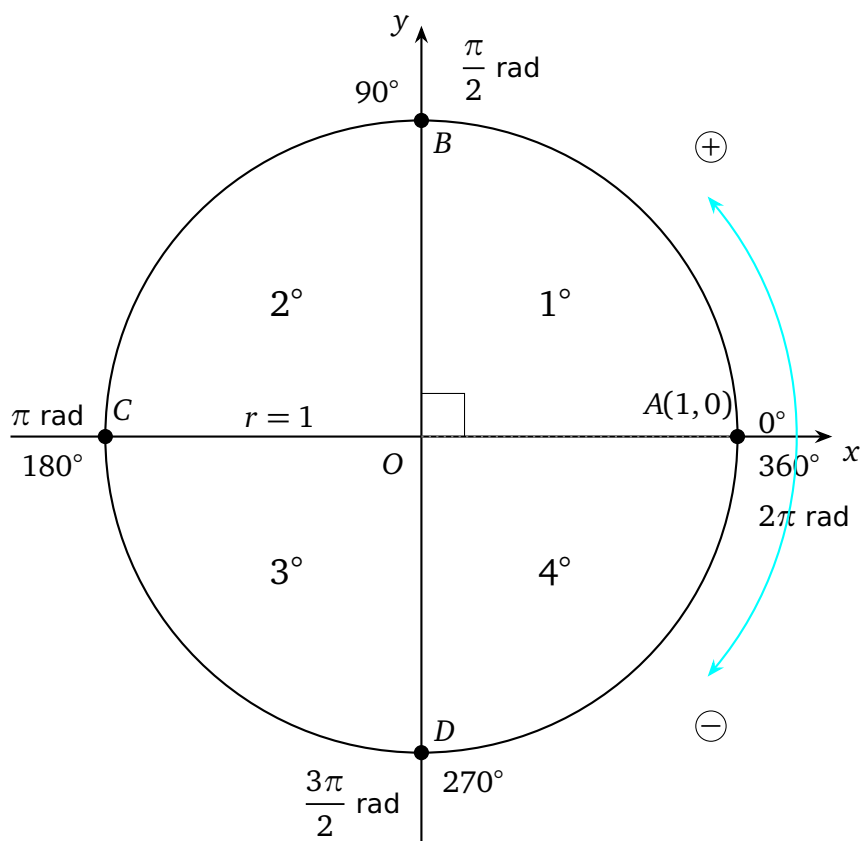


Figura 3.21: Círculo trigonométrico.

3.2.7 Arcos côngruos

As razões trigonométricas estendem-se a qualquer ângulo. No entanto, para isso, é fundamental compreender como localizá-los na circunferência trigonométrica. Por exemplo, como representar um arco de 450° na circunferência trigonométrica? É o que analisaremos a seguir.

Seja P um ponto da circunferência trigonométrica. É possível verificar que existe uma infinidade de arcos com origem em A e extremidade em P . Para percorrê-los, basta, a partir de P , realizar voltas completas na circunferência — isto é, adicionar ou subtrair arcos cujas medidas sejam múltiplos de 2π rad (ou 360°), em qualquer sentido.

Considerando o exemplo do arco $\widehat{AP}$, a primeira determinação positiva associada a ele é a medida $\frac{\pi}{3}$ rad, conforme ilustrado na Fig. 3.22. Contudo, o ponto P também é a extremidade de infinitos outros arcos, os quais podem ser obtidos adicionando-se (ou subtraindo-se) múltiplos inteiros de 2π a $\frac{\pi}{3}$. Veja:

Os arcos que têm a mesma extremidade P são chamados de **arcos côngruos** ou **congruentes**. De modo geral, um arco $\widehat{AP}$ que mede α radianos tem como expressão geral para arcos côngruos a

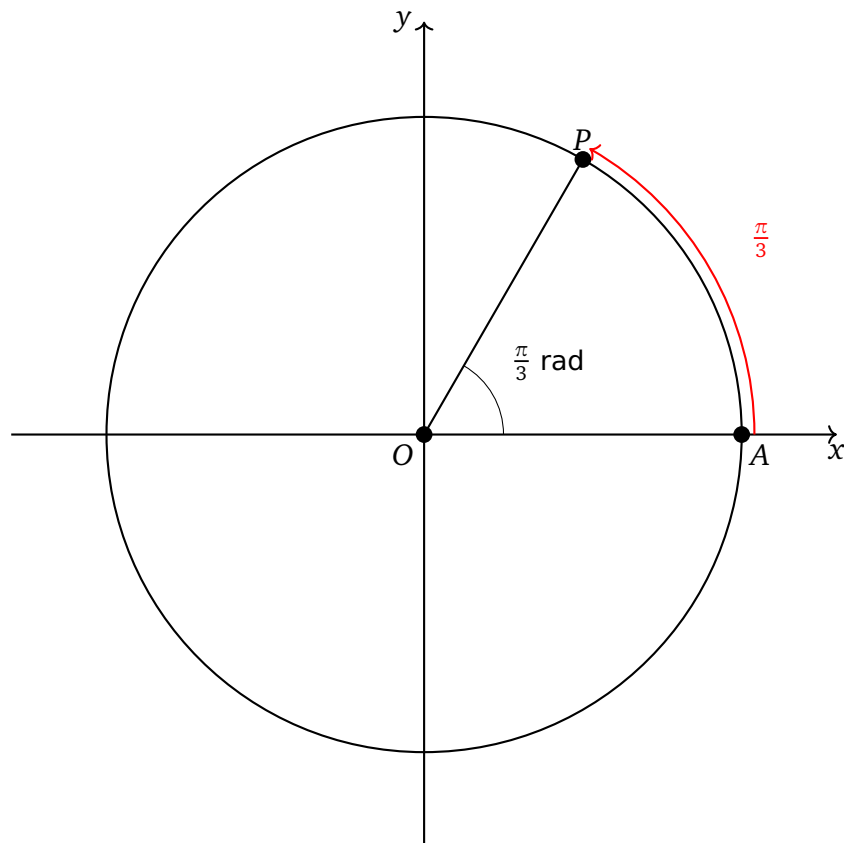


Figura 3.22: Circunferência trigonométrica com o arco $\frac{\pi}{3}$.

ele:

$$\alpha + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \alpha + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Caso a medida α do arco seja dada em grau, e como a circunferência tem 360° , teremos:

$$\alpha + k \cdot 360^\circ, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

3.2.8 Seno e cosseno de um arco

Após o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, estenderemos esses conceitos para a circunferência trigonométrica, ampliando sua definição para arcos e ângulos quaisquer.

Seja M o ponto da circunferência trigonométrica associado ao número real α . Vimos que M é a extremidade do arco $\widehat{AM}$, cuja medida é α rad. Define-se:

O **seno** de α é a ordenada do ponto M .

O **cosseno** de α é a abscissa do ponto M .

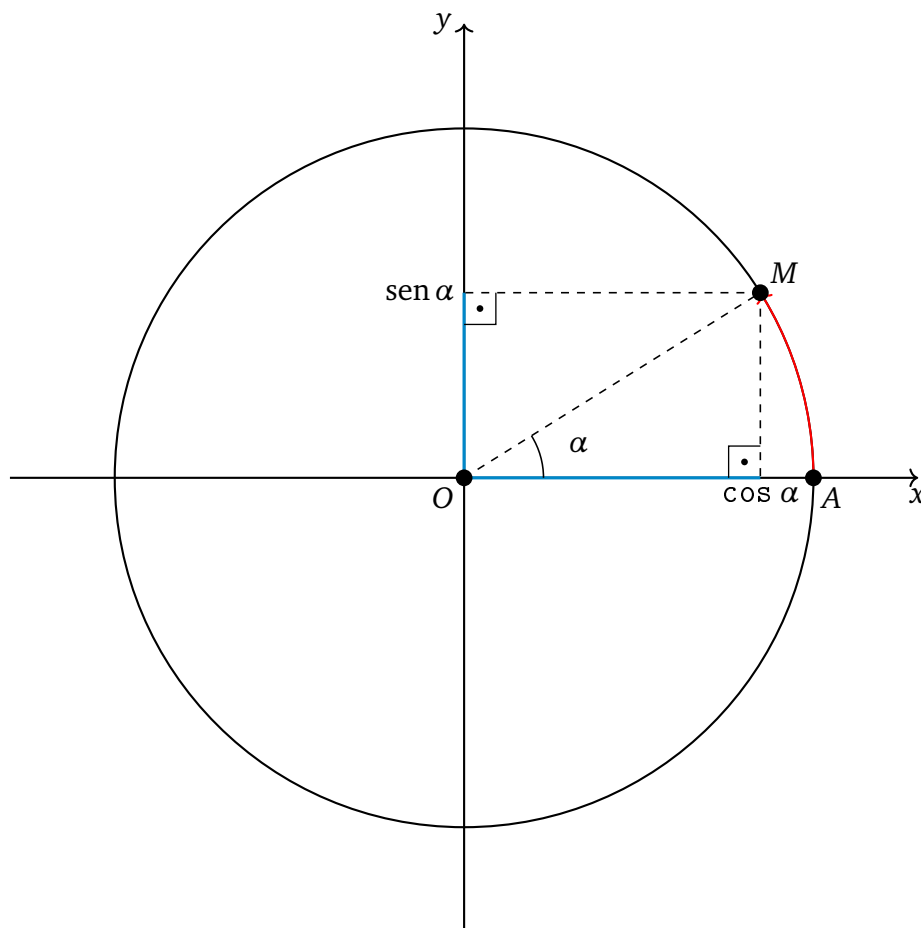


Figura 3.23: Eixo dos Senos e Cossenos

O eixo vertical é denominado **eixo dos senos**, enquanto o eixo horizontal é denominado **eixo dos cossenos**.

Dessa forma, a cada número real α associa-se um único ponto M na circunferência trigonométrica, cujas coordenadas cartesianas são dadas por $(\cos \alpha, \sin \alpha)$.

Tais definições estendem-se ao ponto M situado em qualquer quadrante ou sobre os eixos coordenados, com a variação dos sinais do seno e do cosseno apresentada na [Fig. 3.24](#).

Alguns valores do seno e do cosseno

Apresentaremos, a seguir, os valores de seno e cosseno para os arcos notáveis e de eixos que serão frequentemente utilizados.

- **Alguns valores do seno e do cosseno**

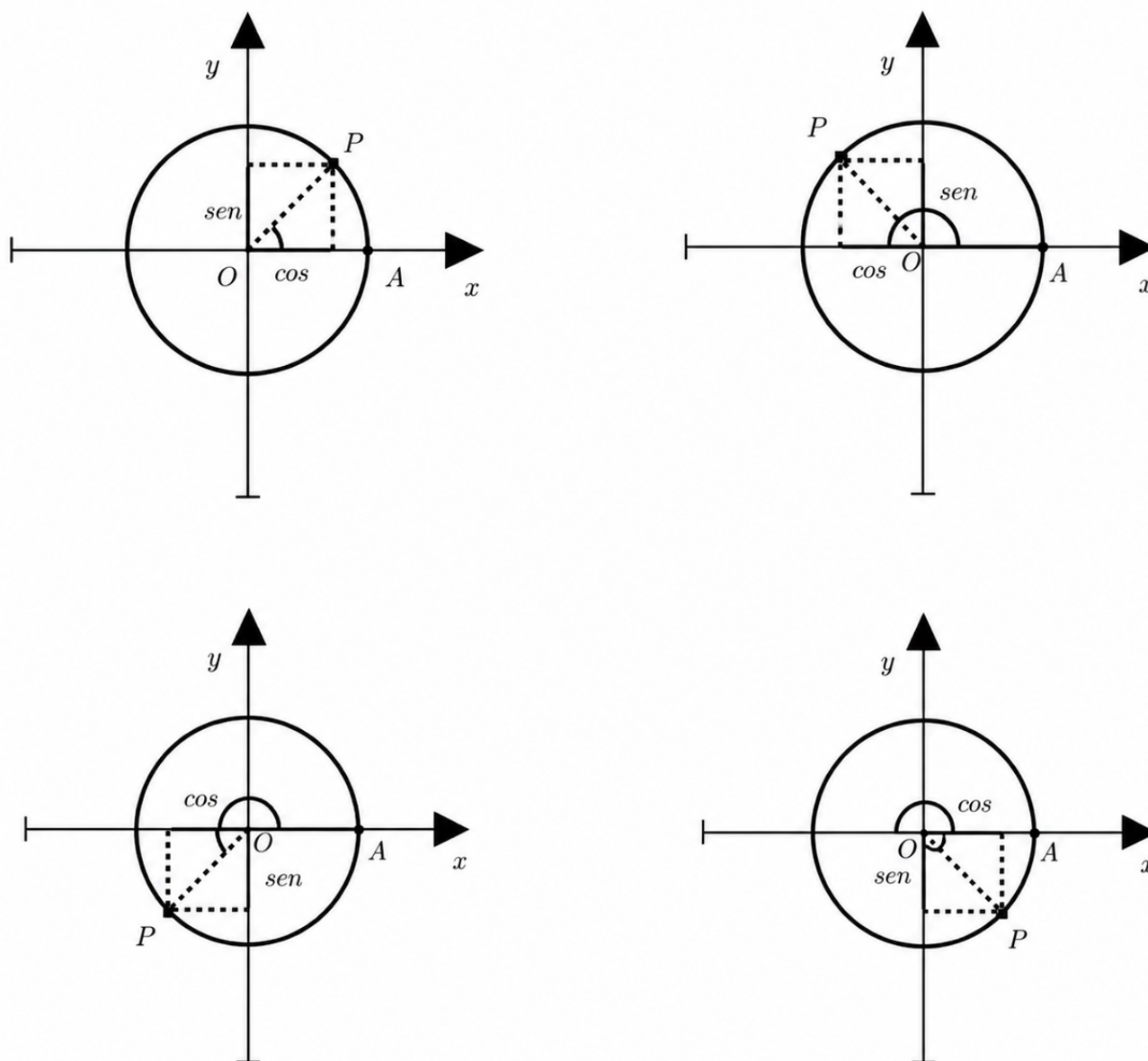


Figura 3.24: Sinais do seno e cosseno nos quatro quadrantes.

Apresentamos, a seguir, os valores de seno e cosseno para os arcos notáveis e de eixos que serão frequentemente utilizados ao longo deste trabalho.

Graus	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Tabela 3.2: Valores de seno e cosseno para arcos notáveis e arcos de eixos.

• Redução ao primeiro quadrante

Assim como fizemos para o seno e o cosseno, podemos utilizar as simetrias na circunferência trigonométrica e os valores da tangente no primeiro quadrante para determinar a tangente de arcos nos demais quadrantes. Esse procedimento é denominado **redução ao primeiro quadrante**.

Apresentamos, a seguir, como realizar essa redução a partir de cada um dos demais quadrantes para $\alpha \in \mathbb{R}$, com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$.

1º Caso: Redução do segundo para o primeiro quadrante Seja M o ponto da circunferência trigonométrica correspondente ao arco de medida α . O ponto N , indicado na Fig. 3.25, é simétrico ao ponto M em relação ao eixo dos senos (eixo vertical).

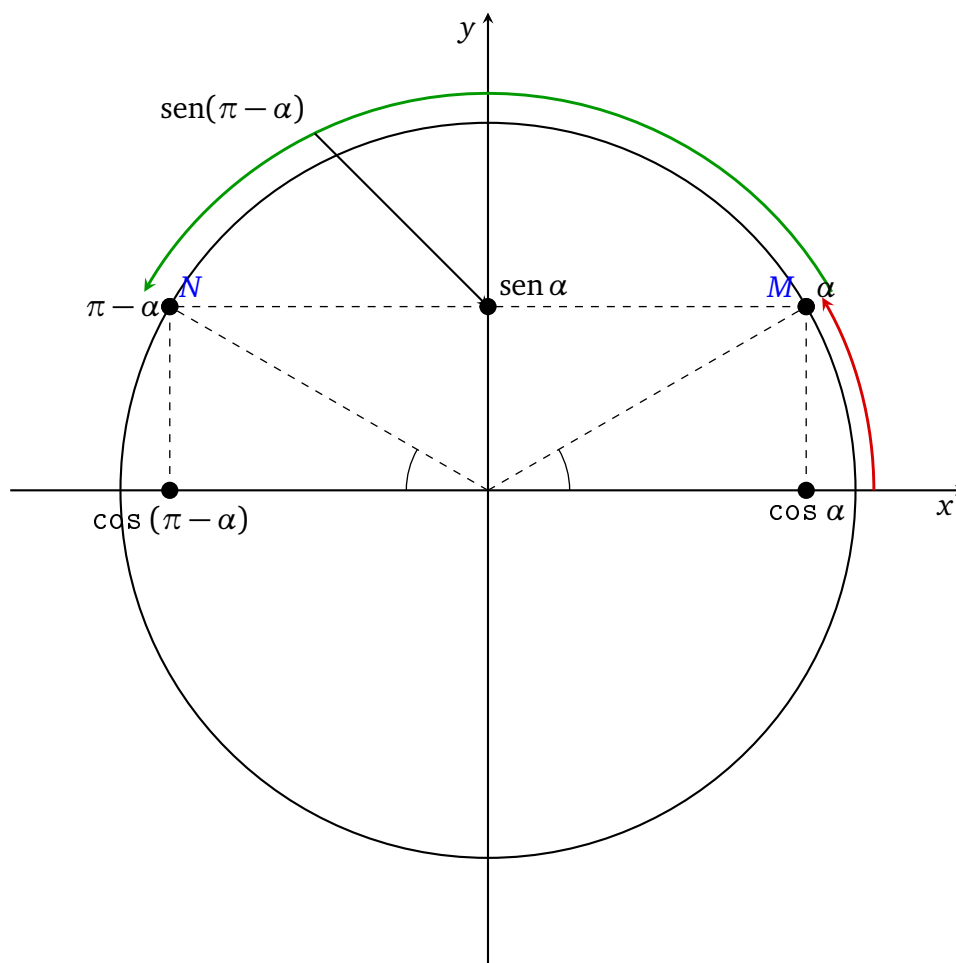


Figura 3.25: Redução ao 1º quadrante para arcos suplementares.

Note que N é o ponto correspondente ao arco de medida $\pi - \alpha$, sendo os arcos α e $\pi - \alpha$ denominados **suplementares**. O seno de $\pi - \alpha$ é igual ao seno de α , enquanto o cosseno de $\pi - \alpha$ é igual ao oposto do cosseno de α . Em outros termos, dois arcos suplementares possuem senos iguais e cossenos opostos.

Dessa forma, podemos escrever:

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

2º Caso: Redução do terceiro para o primeiro quadrante Seja M o ponto da circunferência trigonométrica correspondente ao arco de medida α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). O ponto P , indicado na Fig. 3.26, é simétrico ao ponto M em relação à origem O do sistema de coordenadas.

Note que P é o ponto correspondente ao arco de medida $\pi + \alpha$. O seno de $\pi + \alpha$ é igual ao oposto do seno de α , e o cosseno de $\pi + \alpha$ é igual ao oposto do cosseno de α . Em outros termos, os arcos α e $\pi + \alpha$ possuem senos opostos e cossenos opostos.

Dessa forma, podemos escrever:

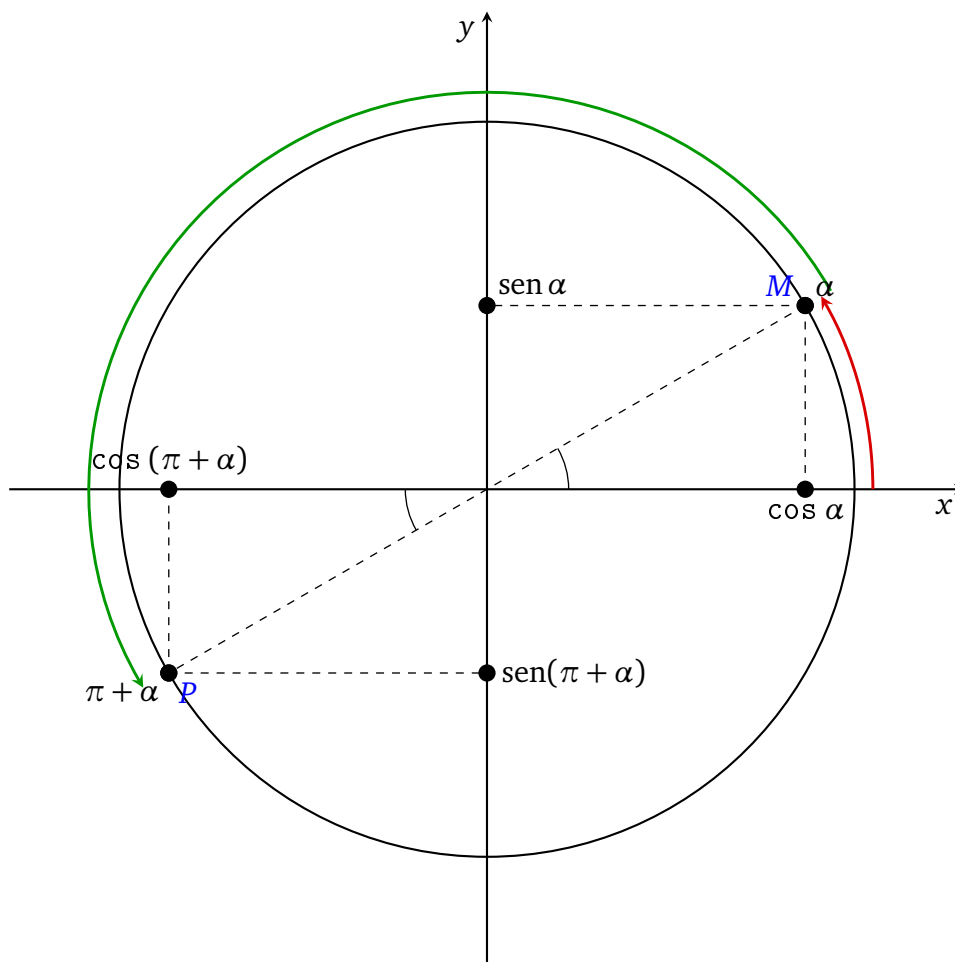


Figura 3.26: Redução ao 1º quadrante para arcos que diferem de π .

3º Caso: Redução do quarto para o primeiro quadrante Seja M o ponto da circunferência trigonométrica correspondente ao arco de medida α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). O ponto Q , indicado na Fig. 3.27, é

simétrico ao ponto M em relação ao eixo dos cossenos (eixo horizontal).

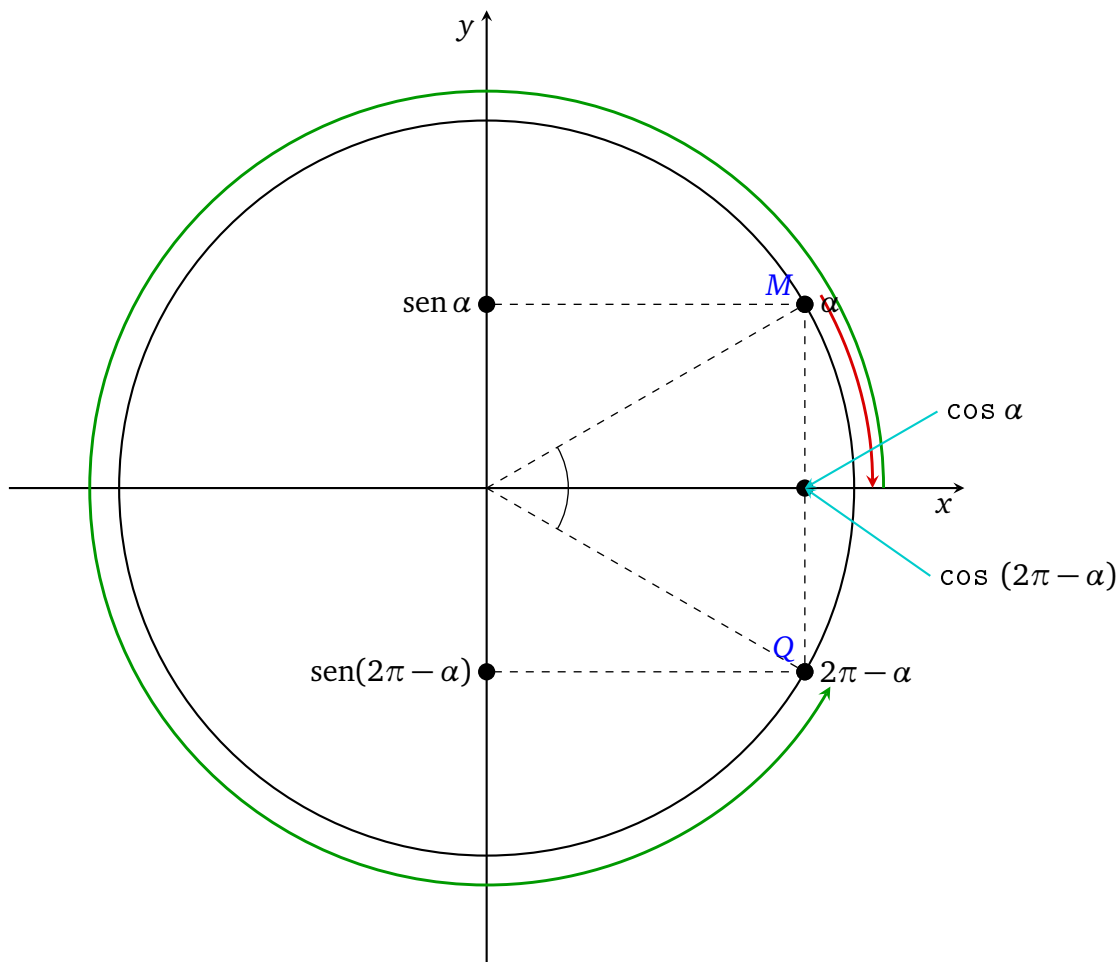


Figura 3.27: Redução ao 1º quadrante para arcos replementares ($2\pi - \alpha$).

Note que Q é o ponto correspondente ao arco de medida $2\pi - \alpha$, sendo os arcos α e $2\pi - \alpha$ denominados **replementares**. O seno de $2\pi - \alpha$ é igual ao oposto do seno de α , enquanto o cosseno de $2\pi - \alpha$ é igual ao cosseno de α . Em outros termos, dois arcos replementares possuem senos opostos e cossenos iguais.

Dessa forma, obtemos as seguintes relações:

$$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha.$$

A partir das relações de redução do quarto quadrante, podemos deduzir as relações para arcos negativos, isto é, aqueles percorridos no sentido horário [Fig. 3.28](#).

- $(2\pi - \alpha)$ e $-\alpha$ são arcos côngruos
- $\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$

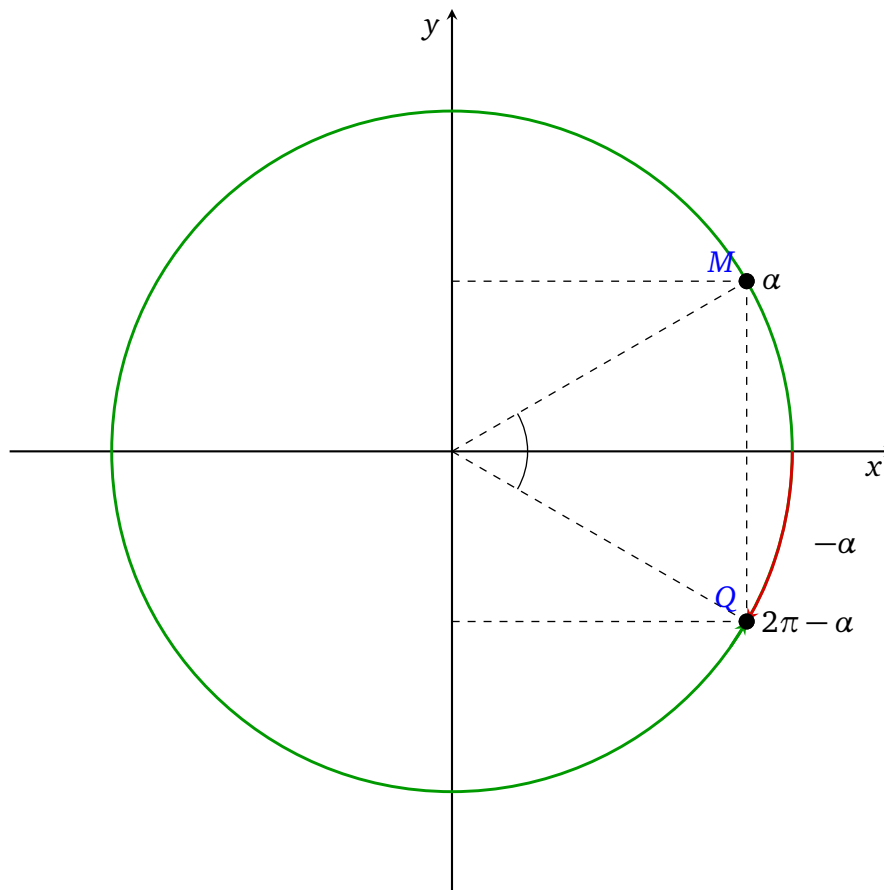


Figura 3.28: Redução ao 1º quadrante para arcos replementares ($2\pi - \alpha$ e $-\alpha$).

- $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$

3.2.9 Tangente de um arco

Já analisamos como as razões seno e cosseno se comportam na circunferência trigonométrica. A seguir, investigaremos a representação geométrica da tangente.

Seja M o ponto da circunferência trigonométrica associado ao número real α . Vimos que M é a extremidade do arco $\widehat{AM}$, cuja medida é α rad.

Consideremos o eixo t , paralelo ao eixo dos senos, com a mesma orientação deste e tangente à circunferência no ponto $A(1, 0)$. Esse eixo é denominado **eixo das tangentes**, tendo o ponto A como sua origem ($t = 0$).

Seja T o ponto de interseção entre a reta suporte do segmento OM (a reta que contém a origem O e o ponto M) e o eixo t , com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Define-se:

A **tangente** de α é a ordenada do ponto T no eixo das tangentes.

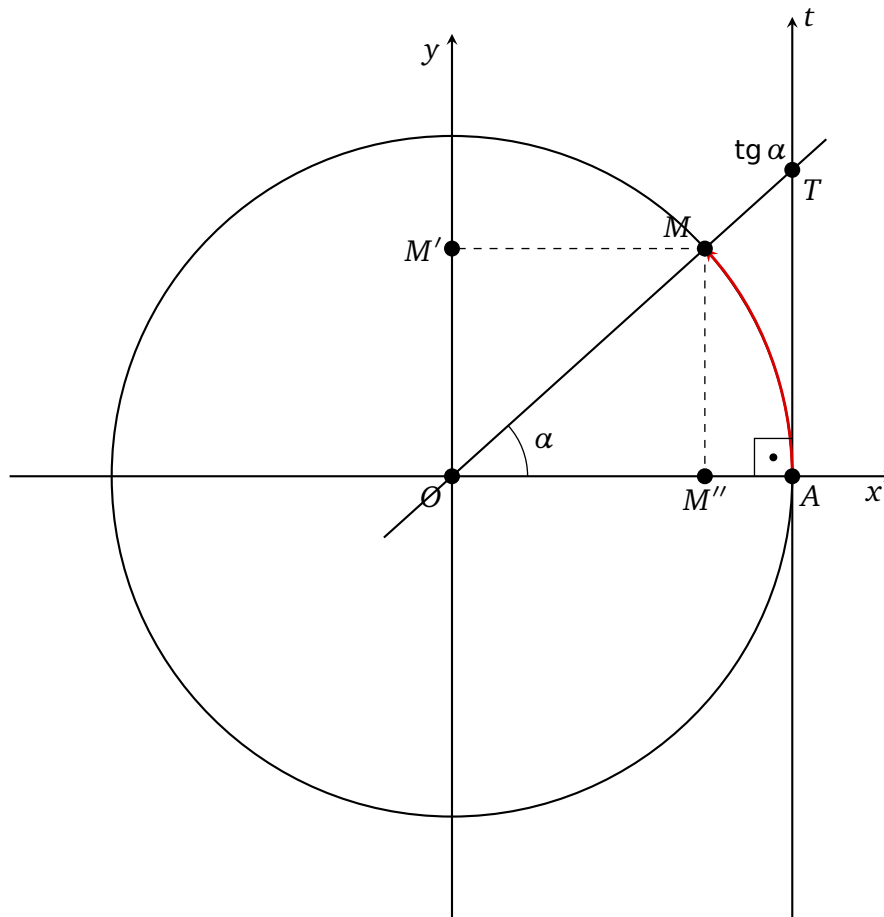


Figura 3.29: Ciclo trigonométrico e a representação da tangente no ponto T .

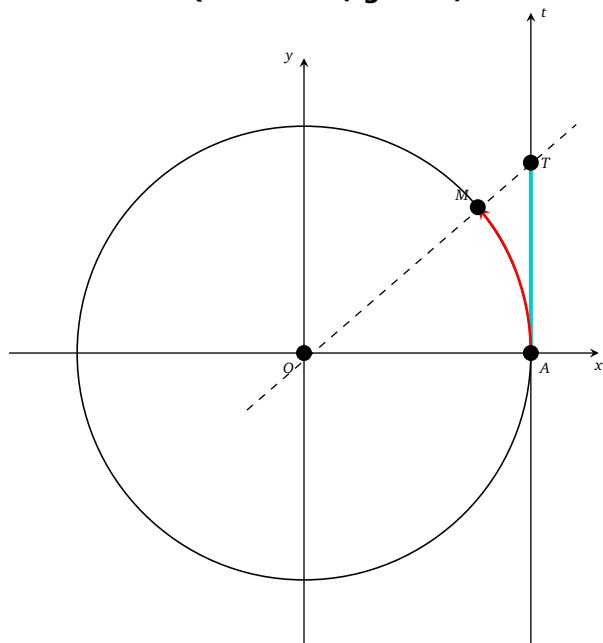
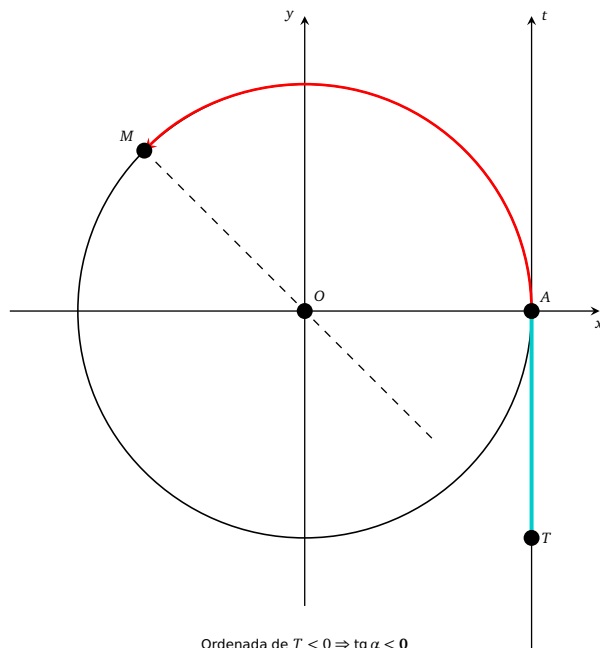
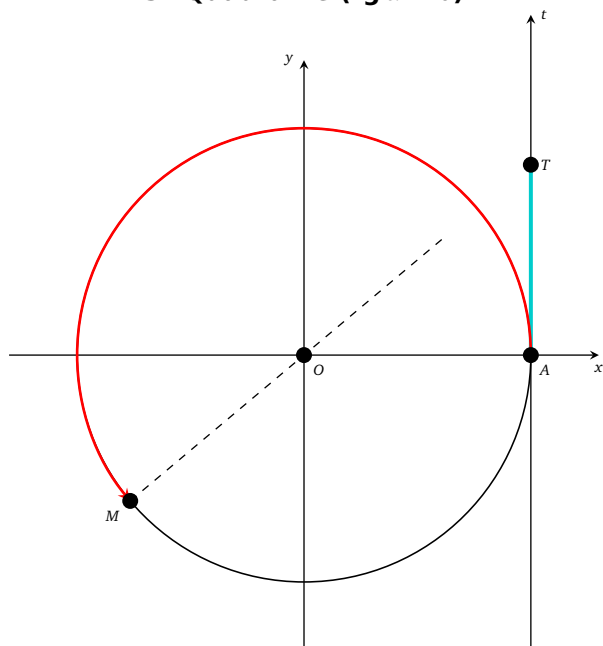
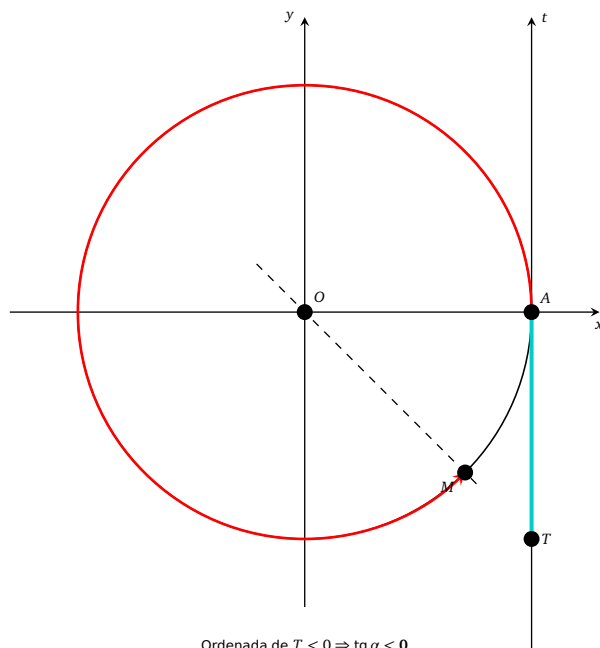
Como o eixo das tangentes é orientado para cima, a tangente é positiva quando α pertence ao primeiro ou ao terceiro quadrante, e negativa quando α pertence ao segundo ou ao quarto quadrante, conforme ilustrado nas figuras a seguir.

Alguns valores da tangente

De modo análogo ao realizado para o seno e o cosseno, determinaremos os valores da tangente para os arcos notáveis na circunferência trigonométrica. Para isso, utilizaremos a relação fundamental $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$ (com $\operatorname{cos} \alpha \neq 0$) e os valores obtidos anteriormente:

- $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{cos} 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{cos} 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$
- $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{cos} 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Dessa forma, sintetizamos os valores na [Tabela 3.3](#):

1º Quadrante ($\operatorname{tg} \alpha > 0$)Ordenada de $T > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > 0$ **2º Quadrante ($\operatorname{tg} \alpha < 0$)**Ordenada de $T < 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < 0$ **3º Quadrante ($\operatorname{tg} \alpha > 0$)**Ordenada de $T > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > 0$ **4º Quadrante ($\operatorname{tg} \alpha < 0$)**Ordenada de $T < 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < 0$ **Figura 3.30:** Sinais da tangente nos quatro quadrantes do ciclo trigonométrico.

Graus	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Tabela 3.3: Valores da tangente para arcos notáveis e arcos de eixos.

3.3 Aula 3: Funções trigonométricas

Link do Notion: [Aula 3: Funções trigonométricas](#)

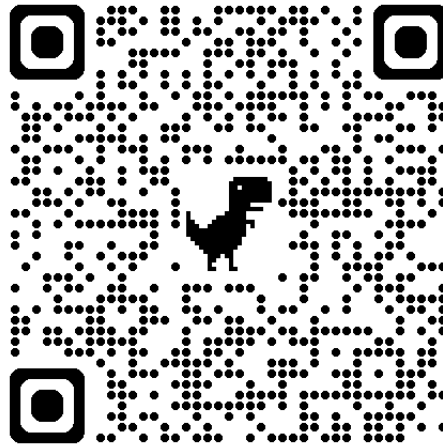


Figura 3.31: Aula 3: Funções trigonométricas

3.3.1 Função Seno

Definição 3.1: Função Seno

Dado um número real x , seja P a sua imagem no ciclo trigonométrico. Denominamos **seno de x** (e indicamos por $\text{sen } x$) a ordenada do ponto P em relação ao sistema uOv . Denominamos **função seno** a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\text{sen } x$, isto é:

$$f(x) = \text{sen } x$$

Propriedades: As propriedades fundamentais da função seno, decorrentes de sua definição no ciclo trigonométrico, são apresentadas a seguir:

- (a) Se x pertence ao primeiro ou ao segundo quadrante, então $\text{sen } x \geq 0$;
- (b) Se x pertence ao terceiro ou ao quarto quadrante, então $\text{sen } x \leq 0$;
- (c) Se x percorre o quarto ou o primeiro quadrante (isto é, de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$), a função $\text{sen } x$ é estritamente crescente;
- (d) Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante (isto é, de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$), a função $\text{sen } x$ é estritamente decrescente.

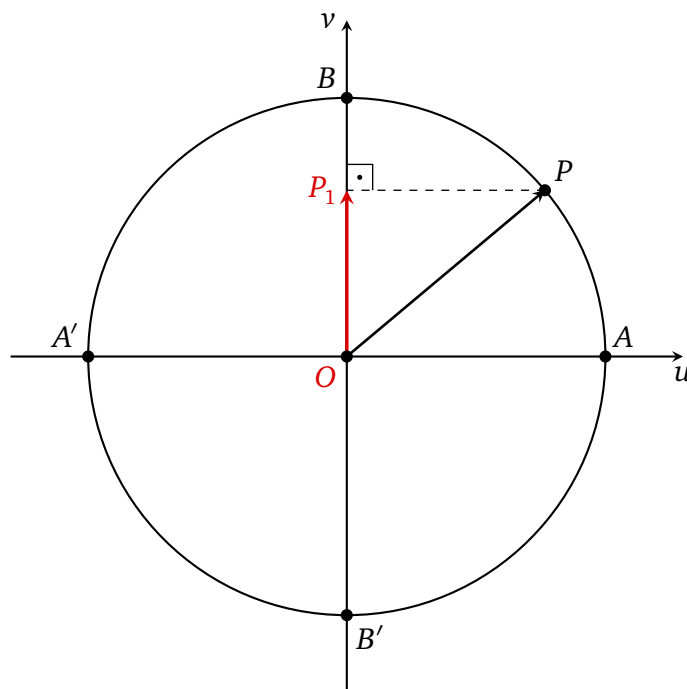


Figura 3.32: Representação do seno do arco AP no eixo vertical v .

Além dessas propriedades, destacam-se:

- **Conjunto imagem:** O conjunto imagem da função seno é o intervalo fechado $[-1, 1]$, ou seja:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Essa propriedade decorre do fato de que qualquer ponto P pertencente à circunferência trigonométrica unitária possui ordenada restrita ao intervalo $[-1, 1]$.

- **Periodicidade:** A função seno é periódica de período fundamental $T = 2\pi$.

De fato, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$, os arcos x e $x + 2k\pi$ possuem a mesma imagem P na circunferência trigonométrica, de modo que:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

O período fundamental corresponde ao menor valor positivo não nulo de $2k\pi$, isto é, 2π rad.

Gráfico: Representando no plano cartesiano a variável independente x no eixo das abscissas e $\sin x$ no eixo das ordenadas, obtemos a curva denominada **senoide**, que descreve o comportamento da função $f(x) = \sin x$, conforme ilustrado na [Fig. 3.34](#). Em paralelo, no ciclo trigonométrico da [Fig. 3.33](#), abaixo, apresentamos os arcos notáveis em radiano e seus equivalentes nos demais quadrantes, utilizados em sua grande maioria nos livros didáticos para a construção do gráfico da senoide.

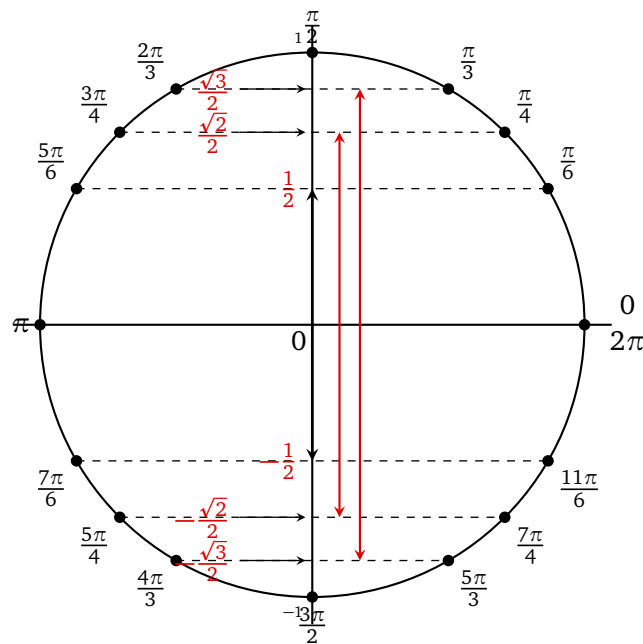


Figura 3.33: Simetria do seno dos arcos notáveis.

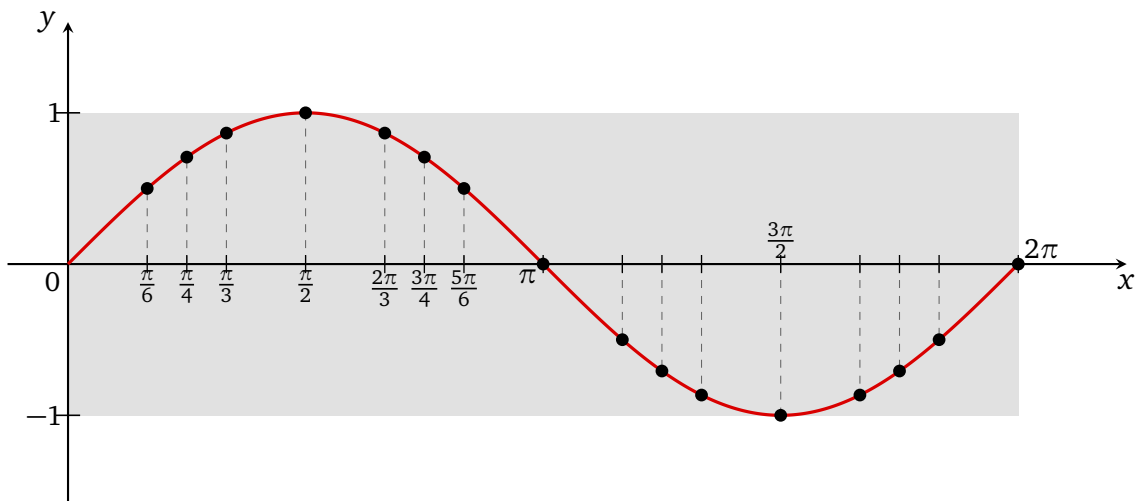


Figura 3.34: Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$.

3.3.2 Função cosseno

Definição 3.2: Função Cosseno

Dado um número real x , seja P a sua imagem no ciclo trigonométrico. Denominamos **cosseno de x** (e indicamos por $\cos x$) a abscissa do ponto P em relação ao sistema cartesiano uOv . Denominamos **função cosseno** a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\cos x$, isto é:

$$f(x) = \cos x$$

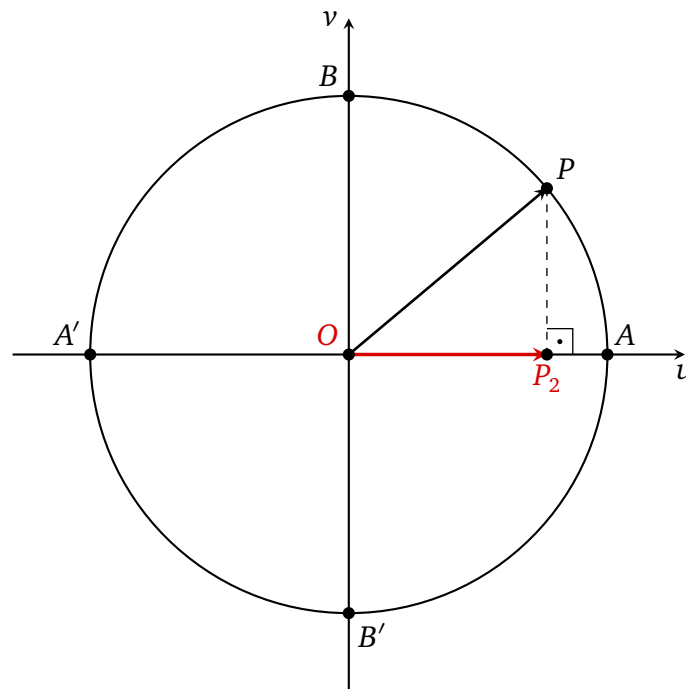


Figura 3.35: Representação do cosseno do arco $\widehat{AP}$ no eixo horizontal u .

Propriedades: As propriedades fundamentais da função cosseno, decorrentes de sua definição na circunferência trigonométrica, são apresentadas a seguir:

- (a) Se x pertence ao primeiro ou ao quarto quadrante, então $\cos x \geq 0$;
- (b) Se x pertence ao segundo ou ao terceiro quadrante, então $\cos x \leq 0$;
- (c) Se x varia no primeiro ou no segundo quadrante (isto é, no intervalo $[0, \pi]$), a função $\cos x$ é estritamente decrescente;
- (d) Se x varia no terceiro ou no quarto quadrante (isto é, no intervalo $[\pi, 2\pi]$), a função $\cos x$ é estritamente crescente.

Além dessas propriedades, destacam-se:

- A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo x real.
- A função cosseno é periódica e seu período é 2π .

Gráfico: Representando no plano cartesiano a variável independente x no eixo das abscissas e $\cos x$ no eixo das ordenadas, obtemos a curva denominada **cossenoide**, que ilustra o comportamento da função $f(x) = \cos x$, conforme apresentada na [Fig. 3.36](#).

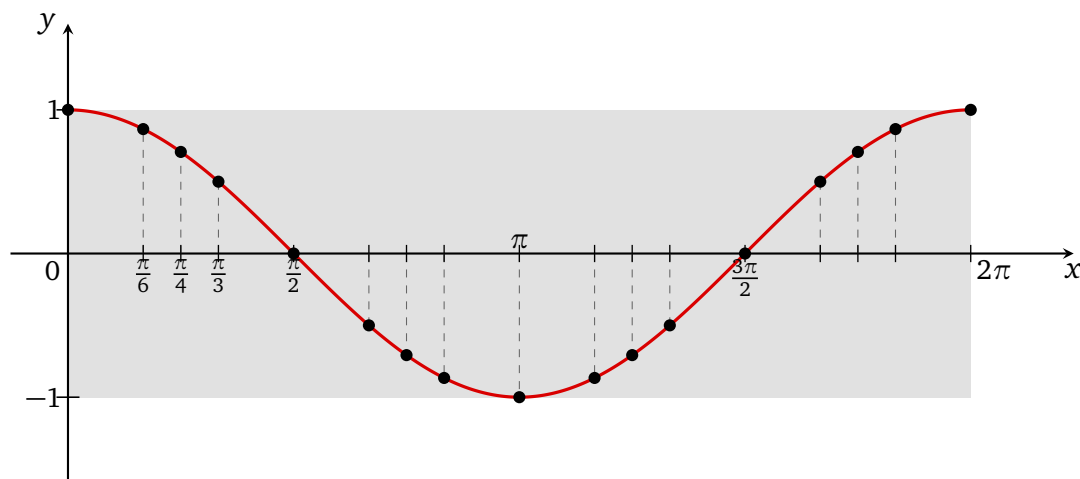


Figura 3.36: Gráfico da função $f(x) = \cos x$.

3.3.3 Função tangente

Definição Dado um número real x , com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), seja P a sua imagem na circunferência trigonométrica, conforme ilustrado na Fig. 3.37. Consideremos a reta suporte do segmento OP (reta OP) e seja T a sua interseção com o eixo das tangentes t . Denominamos **tangente** de x (indicada por $\operatorname{tg} x$ a medida algébrica do segmento AT).

Denomina-se **função tangente** a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real $x \in D$ o valor real $f(x) = \operatorname{tg} x$, em que o domínio é dado por:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Note na Fig. 3.37 que, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, o ponto P coincide com $B(0, 1)$ ou $B'(0, -1)$. Nesses casos, a reta OP coincide com o eixo vertical, tornando-se paralela ao eixo das tangentes t . Como não há ponto de interseção T , a tangente não é definida para esses valores de x .

Propriedades As propriedades da função tangente, decorrentes de sua definição geométrica, são apresentadas a seguir:

- (a) Se x pertence ao primeiro ou ao terceiro quadrante, então $\operatorname{tg} x > 0$;
- (b) Se x pertence ao segundo ou ao quarto quadrante, então $\operatorname{tg} x < 0$;
- (c) Em cada intervalo aberto de seu domínio da forma $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, a função $\operatorname{tg} x$ é estritamente crescente.

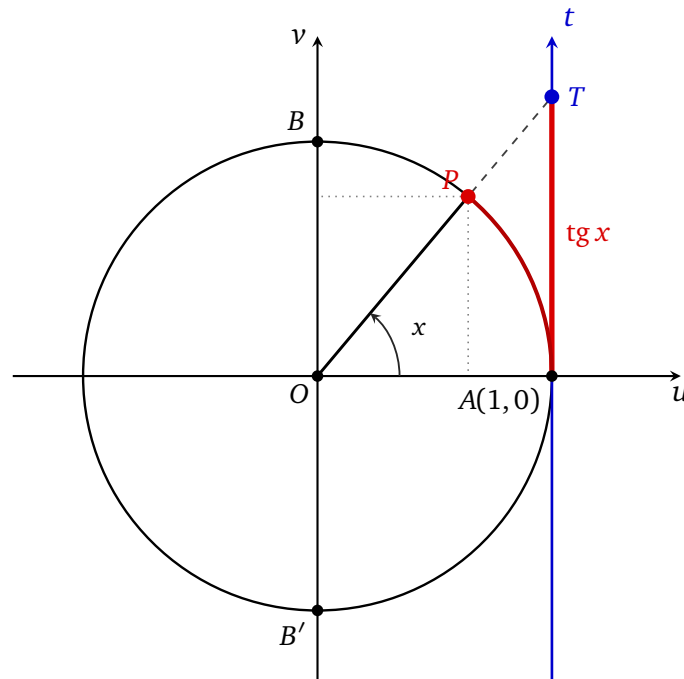


Figura 3.37: Representação geométrica da tangente do arco $\widehat{AP}$ no eixo das tangentes t .

Além dessas propriedades, destacam-se:

- **Conjunto imagem:** O conjunto imagem da função tangente é todo o conjunto dos números reais, isto é, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$. Para qualquer $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in D$ tal que $\text{tg } x = y$.
- **Periodicidade:** A função tangente é periódica de período fundamental $T = \pi$ rad.

De fato, como os arcos x e $x + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) determinam pontos na circunferência trigonométrica que são coincidentes ou diametralmente opostos, as retas OP correspondentes coincidem. Logo, interceptam o eixo das tangentes no mesmo ponto T , de modo que:

$$\text{tg}(x + k\pi) = \text{tg } x, \quad \forall x \in D.$$

O período fundamental corresponde ao menor valor positivo obtido para $k = 1$, isto é, $T = \pi$ rad.

Gráfico Representando no plano cartesiano a variável independente x no eixo das abscissas e $\text{tg } x$ no eixo das ordenadas, obtemos a curva denominada **tangente**, que descreve o comportamento da função $f(x) = \text{tg } x$, conforme ilustrado na [Fig. 3.38](#).

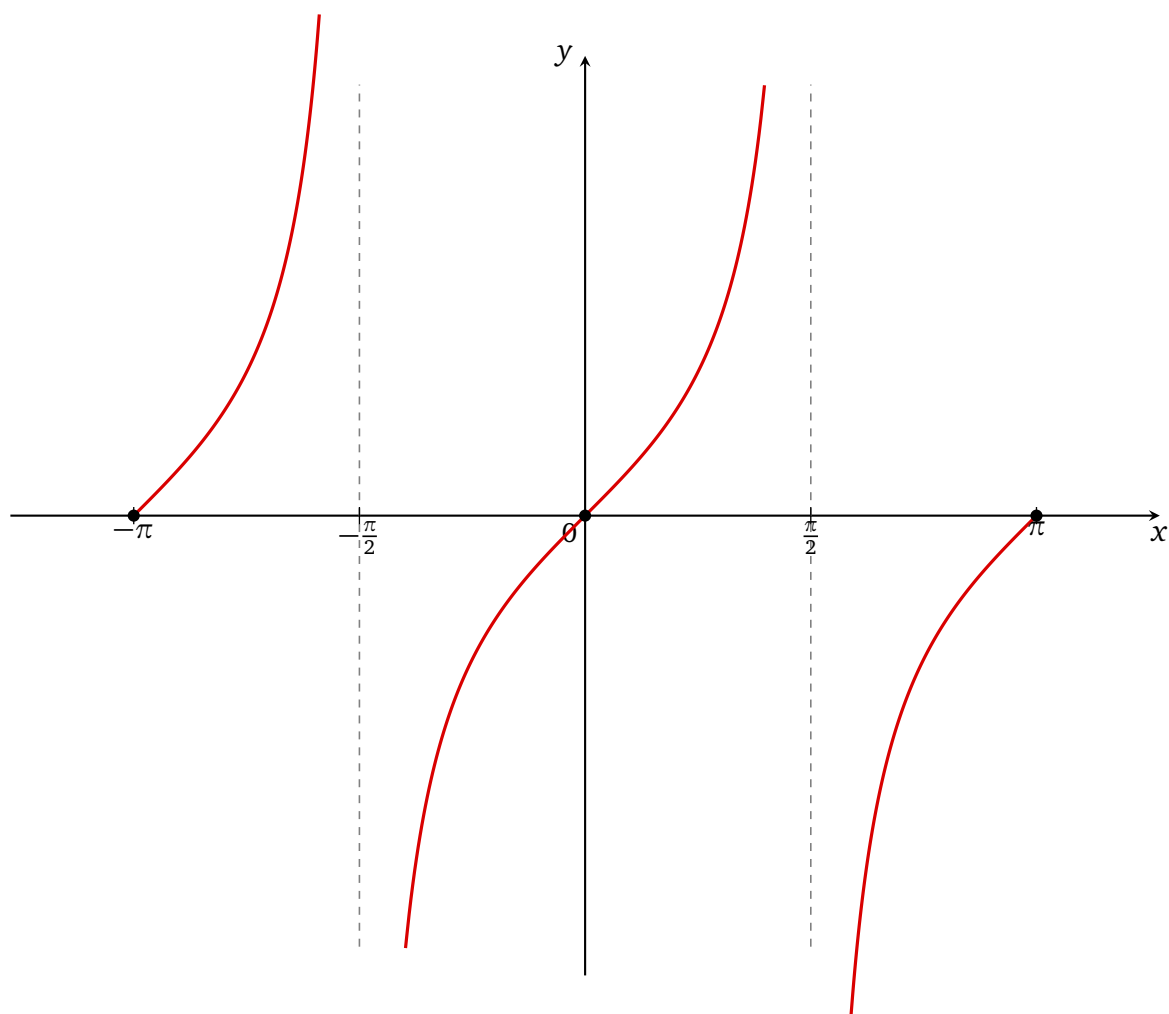


Figura 3.38: Gráfico da função $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Considerações Finais

O presente trabalho teve como objetivo investigar e propor o ensino de funções trigonométricas por meio de animações matemáticas desenvolvidas com a biblioteca Manim, utilizando a linguagem Python no ambiente Google Colab, com o apoio da inteligência artificial presente na plataforma de programação. Ao longo da dissertação, buscou-se articular aspectos históricos, teóricos e metodológicos, evidenciando que a trigonometria, desde seus primeiros vestígios na Antiguidade, esteve intimamente ligada às necessidades humanas, como a astronomia, a construção de monumentos e a resolução de problemas práticos da época, mantendo até hoje um papel fundamental na formação matemática dos estudantes.

Na fundamentação teórica, além do resgate histórico da trigonometria, foi realizada uma pesquisa da abordagem desse conteúdo nos livros didáticos atuais, bem como uma apresentação do Google Colab como ambiente computacional acessível, da biblioteca Manim como ferramenta potente para a criação de animações matemáticas e do Notion como aplicativo de produtividade e organização das aulas propostas. Esses elementos, atrelados à inteligência artificial, forneceram suporte teórico e tecnológico para o desenvolvimento da proposta didática apresentada neste trabalho.

Do ponto de vista metodológico, a pesquisa caracteriza-se como aplicada, com abordagem bibliográfica, fundamentada em autores que defendem a utilização de recursos tecnológicos como instrumentos de apoio ao processo de ensino e aprendizagem. No desenvolvimento do produto educacional, foram elaboradas três aulas que contemplam conceitos essenciais para a compreensão do conteúdo de funções trigonométricas, nas quais as animações criadas em Python por meio da biblioteca Manim deram suporte à explicação e foram integradas à exposição teórica do conteúdo, possibilitando uma visualização dinâmica e significativa dos conceitos abordados.

Cabe destacar que a construção dessas animações representou um desafio pessoal, uma vez que exigiu o aprendizado de uma linguagem de programação até então desconhecida. A biblioteca Manim mostrou-se extremamente versátil e capaz de produzir animações matemáticas de alta qualidade; entretanto, a falta de familiaridade inicial com sua estrutura e sintaxe pode dificultar a criação rápida das animações. Com o tempo, a prática e a experiência, a leitura e a compreensão dos códigos tornam-se mais acessíveis, reforçando a ideia de que o domínio dessa ferramenta é um processo gradual.

Um aspecto relevante do uso do Manim é o fato de as animações serem geradas em formato de vídeo, o que amplia suas possibilidades pedagógicas. Esses vídeos podem ser pausados, retomados ou adaptados conforme a necessidade do professor e dos alunos, além de permitirem modificações no código para adequações a diferentes contextos de ensino. Dessa forma, o recurso não se apresenta como algo engessado, mas como um material flexível e em constante construção.

Por fim, acredita-se que o uso de animações matemáticas, como as desenvolvidas neste trabalho, pode contribuir para tornar as aulas mais dinâmicas, visuais e inclusivas, favorecendo a compreensão de conceitos abstratos da trigonometria. Apesar das dificuldades iniciais, é gratificante observar as animações funcionando conforme idealizado teoricamente, reforçando o potencial do Manim como uma ferramenta inovadora no ensino de Matemática. Espera-se que esta proposta possa inspirar outros professores a explorarem recursos computacionais em suas práticas pedagógicas, ampliando as possibilidades de aprendizagem e transformando positivamente a experiência dos estudantes em sala de aula.

Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, Daniele Leite et al. “**A História da trigonometria e uma aproximação com a sala de aula**”. Em: **Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - IFPE** (2024) (citado nas páginas [5](#), [9](#)).
- [2] AUSUBEL, David P. **A aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. São Paulo: Moraes, 1982 (citado na página [43](#)).
- [3] BARROS, Aidil Jesus da Silveira e LEHFELD, Neide Aparecida de Souza. **Fundamentos de metodologia científica**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2014 (citado na página [40](#)).
- [4] BERTOLI, Vaneila e SCHUHMACHER, Elcio. “**Retrospectiva histórica sobre a trigonometria: considerações importantes no ensino da matemática**”. Em: **Anais do VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática (CIEM)**. Canoas, 2013 (citado nas páginas [9](#), [11](#)).
- [5] BONJORNO, José Roberto, GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy e SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma Matemática: Geometria**. São Paulo: Editora FTD, 2020 (citado na página [39](#)).
- [6] BOYER, Carl B. e MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. São Paulo: Editora Blucher, 2019 (citado nas páginas [4](#), [8](#)).
- [7] CARMO, Manfredo Perdigão do, MORGADO, Augusto César e WAGNER, Eduardo. **Trigonometria e números complexos**. Rio de Janeiro: IMPA, 1993 (citado na página [39](#)).
- [8] COSTA, Nielce M. Lobo da. “**A história da trigonometria**”. Em: **Educação Matemática em Revista** 10.14 (2003), pp. 60–68 (citado nas páginas [5–8](#)).
- [9] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Vol. 1–3. São Paulo: Ática, 2016 (citado na página [39](#)).
- [10] GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4ª ed. São Paulo: Atlas, 2002 (citado na página [40](#)).

- [11] SANTOS SILVA, Bruno Henrique Macêdo dos et al. **“Jogos Matemáticos como Ferramenta Educacional Lúdica no Processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática na Educação Básica”**. Em: ***Rebena - Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem*** 4 (2022), pp. 246–254 (citado na página [2](#)).
- [12] SILVA, Ana Gisnayane Sousa, SOUSA, Francisco Jucivânio Félix de e MEDEIROS, Jarles Lopes de. **“O ensino da matemática: aspectos históricos”**. Em: ***Research, Society and Development*** 9.8 (2020), e488985850 (citado na página [1](#)).
- [13] SILVA, Josyleine Aparecida Bento da. **“Objetos de aprendizagem aplicados ao ensino da trigonometria: revelando elementos a partir do movimento histórico e lógico”**. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018 (citado na página [5](#)).
- [14] SILVA, Maria Thaywana Valença et al. **“Trigonometria: uma discussão histórica”**. Em: ***Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - IFPE*** (2021) (citado na página [5](#)).