

LILYANE GONZAGA FIGUEIREDO

**Reticulados em toros euclidianos
n-dimensionais e em g-toros planos hiperbólicos**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2011

LILYANE GONZAGA FIGUEIREDO

Reticulados em toros euclidianos n-dimensionais e em g-toros planos hiperbólicos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Edson Agustini.

UBERLÂNDIA - MG
2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU , MG, Brasil

- F475r Figueiredo, Lilyane Gonzaga, 1979-
 Reticulados em toros euclidianos n -dimensionais e em g -toros planos
hiperbólicos / Lilyane Gonzaga Figueiredo. - 2011.
 129 f. : il.
- Orientador: Edson Agustini.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
 Inclui bibliografia.
1. Matemática - Teses. 2. Teoria dos reticulados - Teses. 3. Geometria hiperbólica - Teses. 4. Isometria (Matemática) - Teses. I. Agustini, Edson. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 519.6



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 158
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Lilyane Gonzaga Figueiredo.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 100091.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Geometria Diferencial.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Reticulados em toros euclidianos n -dimensionais e em g -toros planos hiperbólicos.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Edson Agustini.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 02 de agosto de 2011, às 14h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME

ASSINATURA

Prof. Dr. Edson Donizete de Carvalho

UNESP - Universidade Estadual Paulista - Campus de Ilha Solteira

Edson D. Carvalho

Prof. Dr. Antônio Carlos Nogueira

UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Antônio Carlos Nogueira

Prof. Dr. Edson Agustini

UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Edson Agustini

Uberlândia-MG, 02 de agosto de 2011.

Dedicatória

A Admildo, pelo companherismo, e a Arthur, por existir.

Agradecimentos

A Deus por ter me dado força e coragem em tantos momentos difíceis durante este período.

A minha família, pelo apoio e a meus pais, que sempre lutaram para que eu pudesse estudar e que, mesmo distante, contribuíram de forma imprescindível para a conclusão deste curso.

Ao Prof. Dr. Edson Agustini, pela generosidade de sua orientação.

A Banca Examinadora pela valorosa contribuição dada a este trabalho.

Ao Governo do Estado de Minas Gerais, que através da Secretaria de Educação me concedeu licença para frequentar o curso.

Aos colegas de carona, em especial, Cecília, Adriano, Valeska, Anísio, que dividiram mais que combustível, dividiram alegrias, frustrações e se tornaram grandes amigos.

Aos professores Victor Gonzalo, Cícero, Sezimaria, Márcio, em especial, Geraldo e Antônio Carlos pela compreensão durante o período final de minha gestação.

A Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia.

Aos colegas de turma 2009, Karla, Daniela, Thiago e Carlos e, em particular, Túlio e Flávio, pela ajuda fundamental; e aos colegas da turma 2010.

A todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão deste trabalho.

FIGUEIREDO, L. G. *Reticulados em toros euclidianos n -dimensionais e em g -toros planos hiperbólicos*. 2011. 74 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho estudamos reticulados em espaços quocientes. Os espaços quocientes considerados foram: (1) toros euclidianos n -dimensionais, obtidos pelo quociente de $\mathbb{R}^n$ por grupos discretos de isometrias gerados por translações linearmente independentes e (2) g -toros planos hiperbólicos ($g \geq 2$), obtidos pelo quociente do plano hiperbólico por grupos fuchsianos. No caso euclidiano, os reticulados considerados foram provenientes de $\mathbb{Z}^2$, enquanto que no caso hiperbólico os reticulados estudados foram os geometricamente uniformes e os cíclicos.

Palavras-chave: reticulados, toros, grupos fuchsianos, geometria hiperbólica, isometrias.

FIGUEIREDO, L. G. *Lattices in n -dimensional euclidean tori and in hyperbolic flat g -tori*. 2011. 74 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this dissertation we study lattices in quotient spaces. The basic quotient spaces are: (1) n -dimensional euclidean tori, obtained from quotient of $\mathbb{R}^n$ by discrete groups of isometries generated by linearly independent translations and (2) hyperbolic flat g -tori (tori of genus $g \geq 2$), obtained from quotient of hyperbolic plane by fuchsian groups. In the euclidean environment, the considered lattices are provided of the additive group $\mathbb{Z}^2$, while in the hyperbolic case the studied lattices are the geometrically uniform and the cyclic ones.

Keywords: lattices, tori, fuchsian groups, hyperbolic geometry, isometries.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
1 Reticulados no Toro Euclidiano	2
1.1 Um Espaço Quociente Importante	2
1.2 Mergulho Isométrico do Toro Plano em uma Esfera de $\mathbb{R}^4$	3
1.3 Tesselações e Grafos sobre Toros Euclidianos	6
1.4 Tesselações Regulares por Quadrados e seus Rotulamentos	13
1.5 Métrica do Grafo Induzida sobre o Conjunto de Rótulos	16
1.6 Códigos Perfeitos	19
2 Alguns Tópicos Importantes de Geometria Hiperbólica	23
2.1 Grupos Fuchsianos no Modelo do Semiplano Superior de Poincaré	23
2.2 Grupos Fuchsianos no Modelo do Disco Unitário de Poincaré	26
2.3 Geodésicas, Distâncias e Trigonometria nos Modelos de Poincaré	27
3 Reticulados Geometricamente Uniformes em Espaços Quociente	31
3.1 Reticulados Geometricamente Uniformes	31
3.2 Círculos Isométricos	36
3.3 Encontrando Geradores do Grupo Fuchsiano F_2	38
3.4 Encontrando Geradores do Grupo Fuchsiano F_1	43
4 Reticulados Cíclicos em Espaços Quociente	45
4.1 Reticulado cíclico de 16 pontos gerado por eixos sobre o bitoro rotulado pelo grupo $\mathbb{Z}_{16}$	45
4.2 Reticulado cíclico de 48 pontos gerado por eixos sobre o tritoro rotulado pelo grupo $\mathbb{Z}_{48}$	50
4.3 Reticulado cíclico de 16 pontos gerado por geodésicas sobre o bitoro	57
4.4 Reticulado cíclico de 48 pontos gerado por geodésicas sobre o tritoro	60
Conclusões e Perspectivas Futuras	64
Referências Bibliográficas	65

Introdução

Nesta dissertação utilizamos principalmente as referências [2] e [7] para desenvolver um estudo detalhado de algumas classes de reticulados em dois espaços quocientes muito importantes: os toros euclidianos n -dimensionais e os g -toros planos hiperbólicos, $g \geq 2$. A divisão do trabalho é a seguinte:

Capítulo 1 (baseado em [2]): estudo de reticulados gerados por $\mathbb{Z}^n$ em superfícies quocientes n -dimensionais obtidas por meio de quociente entre o espaço $\mathbb{R}^n$ e um grupo discreto de isometrias gerado por um conjunto linearmente independente de translações. São os “flat tori” de [2], que chamamos de *toros euclidianos de dimensão n* , nos quais apenas ao de dimensão 2 atribuímos o nome *toro plano*.

Capítulo 2 (baseado principalmente em [7], além de [5], [4] e [9]): estudo de tópicos importantes de geometria hiperbólica para o estudo de reticulados. Neste capítulo introduzimos os grupos fuchsianos e os g -toros, $g \geq 2$, que são os espaços quocientes nos quais consideramos nossos reticulados. Também apresentamos os modelos de Poincaré para a geometria hiperbólica plana, além de alguns dos principais teoremas dessa geometria no que diz respeito a geodésicas, métricas e trigonometria.

Capítulo 3 (baseado principalmente em [7], inspirado em [3] e [6]): estudo de alguns reticulados geometricamente uniformes em bitoros e tritoros. Esses são reticulados associados a tesselações do plano hiperbólico e possuem uma estrutura algébrica bastante interessante, uma vez que todos os pontos dos mesmos são obtidos por meio de grupos de simetrias que agem de modo transitivo sobre os reticulados.

Capítulo 4: é a nossa principal contribuição. Estudamos dois tipos de reticulados cíclicos (isto é, reticulados cujos pontos podem ser rotulados naturalmente por $\mathbb{Z}_m$) sobre bitoros e tritoros. Os reticulados cíclicos que estamos considerando estão sobre curvas fechadas nesses espaços quociente, ou seja, estão sobre *nós*. Há dois tipos de reticulados cíclicos no nosso estudo: aqueles que estão sobre geodésicas invariantes denominadas de *eixos* de isometrias hiperbólicas; e os que estão sobre geodésicas que triseccionam os lados do polígono fundamental que origina o espaço quociente. A diferença entre esses dois tipos de reticulados cíclicos está no fato de que no primeiro caso, o nó que o contém é diferenciável, enquanto no outro, não.

Por fim, conclusões, perspectivas e referências bibliográficas são esboçadas.

Capítulo 1

Reticulados no Toro Euclidiano

Este capítulo é baseado no artigo [2] e introduz a noção de reticulados gerados por $\mathbb{Z}^n$ em toros euclidianos. Além das definições pertinentes, os principais resultados deste capítulo são as proposições 1.1, 1.2 e 1.5. Além do estudo de reticulados em ambiente euclidiano, também necessitamos desse capítulo para fazer uma analogia com os resultados dos próximos capítulos, nos quais faremos, até certo ponto, um estudo análogo para o caso hiperbólico.

1.1 Um Espaço Quociente Importante

Consideremos o conjunto das n -uplas ordenadas de números reais, $\mathbb{R}^n$, munido das operações de adição e multiplicação por escalar real usuais. Temos assim, o espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Dada uma base $\alpha = \{u_1, \dots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, consideremos o conjunto das translações geradas pelos vetores de α , que indicaremos por Λ_α , munido da operação de composição. Temos que Λ_α é um grupo e define uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^n$, ou seja, $x \sim_\alpha y \iff y = t_{\langle \alpha \rangle}(x)$ para alguma translação $t_{\langle \alpha \rangle}$ gerada pelos vetores de α . Desta forma, $\mathbb{R}^n$ pode ser particionado em classes de equivalência.

O conjunto das classes de equivalência de $\mathbb{R}^n$ pela relação de equivalência oriunda de Λ_α será definido como sendo o *toro euclidiano n -dimensional gerado por Λ_α* e será indicado por $T^\alpha = \mathbb{R}^n / \Lambda_\alpha$. Também nos referimos a T^α como sendo um *espaço quociente*. Além disso, dado $x \in \mathbb{R}^n$, a órbita de x por Λ_α , ou seja, $\Lambda_\alpha x = \{t_{\langle \alpha \rangle}(x)\}$, será chamada de *reticulado gerado por Λ_α a partir de x* . Se tomarmos $y \neq x$ em $\mathbb{R}^n$, existe uma isometria i de $\mathbb{R}^n$ que leva $\Lambda_\alpha x$ em $\Lambda_\alpha y$, ou seja, $\Lambda_\alpha y = i(\Lambda_\alpha x)$. Logo, a estrutura métrica do reticulado gerado por Λ_α não depende do ponto de partida. Desta forma, é natural chamar Λ_α simplesmente de *reticulado* e T^α pode ser considerado como sendo o quociente de $\mathbb{R}^n$ pelo reticulado Λ_α .

Quando $n = 2$ é usual chamar T^α de *toro plano*.

O toro euclidiano n -dimensional também pode ser definido como imagem de uma “função módulo” definida por

$$\begin{aligned} \mu_\alpha: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ x &\longmapsto x \bmod \Lambda_\alpha = x - \sum_{i=1}^n [x_i] u_i \end{aligned} \tag{1.1}$$

sendo $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ e $[x_i]$ denotando o maior inteiro menor do que ou igual a x_i .

Observemos que dois pontos x e y estão na mesma classe lateral se, e somente se, $\mu_\alpha(x) =$

$\mu_\alpha(\mathbf{y})$, o que equivale a dizer que $\mu_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$, uma vez que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{x} - \mathbf{y} - \sum_{i=1}^n ([x_i] - [y_i])\mathbf{u}_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i - \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{u}_i - \sum_{i=1}^n ([x_i] - [y_i])\mathbf{u}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - [x_i] - (y_i - [y_i]))\mathbf{u}_i \iff \\ 0 &= x_i - [x_i] - (y_i - [y_i]), \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Assim, $x_i - y_i = [x_i] - [y_i]$. Portanto, $x_i - y_i \in \mathbb{Z}$. Logo, $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)\mathbf{u}_i$ tem coordenadas inteiras e, então, $\mu_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$. Isto significa que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{x} - \mathbf{y} - \sum_{i=1}^n [x_i - y_i]\mathbf{u}_i \iff \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^n [x_i - y_i]\mathbf{u}_i \iff \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{u}_i, \text{ com } m_i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

A métrica euclidiana d em $\mathbb{R}^n$ induz uma métrica d_α sobre o toro euclidiano T^α de forma natural. Dados $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \in T^\alpha$, definimos

$$d_\alpha(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = \min\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in \bar{\mathbf{a}} \text{ e } \mathbf{y} \in \bar{\mathbf{b}}\}. \quad (1.2)$$

Geometricamente, para $n = 2$ e $\alpha = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, o toro plano T^α pode ser visto como um paralelogramo gerado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ com os lados opostos identificados (este paralelogramo contém todos os representantes das classes laterais com redundância na fronteira).

A FIGURA 1 ilustra um toro plano, que topologicamente é um toro usual do espaço, e mostra as distâncias $d_\alpha(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e $d_\alpha(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}}) = d(\mathbf{a}', \mathbf{c})$.

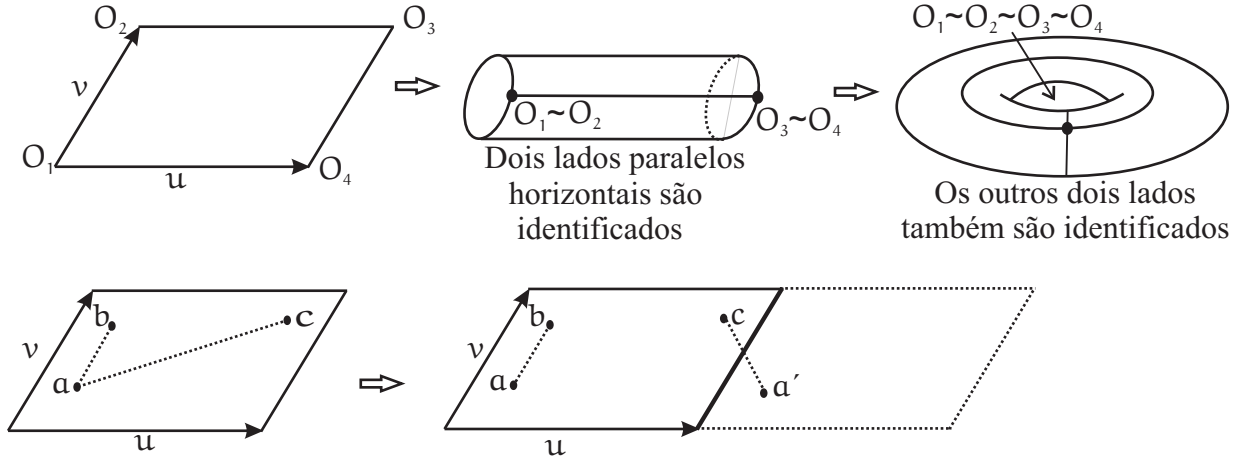


FIGURA 1: No topo, uma vista topológica do toro plano como toro usual no espaço, obtida por meio da identificação dos lados opostos de um paralelogramo em duas etapas. Abaixo, a distância d_α sobre o toro plano é vista como casos de distância euclidiana d em $\mathbb{R}^2$.

1.2 Mergulho Isométrico do Toro Plano em uma Esfera de $\mathbb{R}^4$

Vimos na seção acima que o toro plano também pode ser visto como um toro padrão no espaço euclidiano tridimensional (FIGURA 1). No entanto, o toro plano distingue-se deste último por

ser como um cilindro em $\mathbb{R}^3$, ou seja, é perfeitamente homogêneo e pode ser planificado em um paralelogramo, portanto, localmente isométrico ao plano. Diferentemente do cilindro, que é obtido a partir da identificação de apenas dois lados de um retângulo e pode ser mergulhado isometricamente no espaço euclidiano tridimensional, o toro plano, sendo compacto só pode ser mergulhado isometricamente como uma superfície diferenciável de $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 4$.

Descrevemos a seguir como um toro plano, construído a partir de um reticulado ortogonal (a base α é ortogonal) pode ser mergulhado isometricamente no $\mathbb{R}^4$.

Consideremos os vetores $\mathbf{u} = (r_1, 0)$ e $\mathbf{v} = (0, r_2)$ na base $\alpha = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a região retangular $[0, r_1] \times [0, r_2]$. O toro plano T^α pode ser inserido em $\mathbb{R}^4$ a partir da aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longmapsto \frac{1}{2\pi} \left(\|\mathbf{u}\| \cos\left(\frac{2\pi x}{\|\mathbf{u}\|}\right), \|\mathbf{u}\| \sin\left(\frac{2\pi x}{\|\mathbf{u}\|}\right), \|\mathbf{v}\| \cos\left(\frac{2\pi y}{\|\mathbf{v}\|}\right), \|\mathbf{v}\| \sin\left(\frac{2\pi y}{\|\mathbf{v}\|}\right) \right). \end{aligned}$$

Neste caso, temos

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \left(r_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{r_1}\right), r_1 \sin\left(\frac{2\pi x}{r_1}\right), r_2 \cos\left(\frac{2\pi y}{r_2}\right), r_2 \sin\left(\frac{2\pi y}{r_2}\right) \right).$$

Primeiramente, notamos que $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ se, e somente se, $\mu_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu_\alpha(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$, isto é, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = m\mathbf{u} + n\mathbf{v}$ com $m, n \in \mathbb{Z}$. De fato, se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left(r_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{r_1}\right), r_1 \sin\left(\frac{2\pi x}{r_1}\right), r_2 \cos\left(\frac{2\pi y}{r_2}\right), r_2 \sin\left(\frac{2\pi y}{r_2}\right) \right) = \\ \frac{1}{2\pi} \left(r_1 \cos\left(\frac{2\pi \tilde{x}}{r_1}\right), r_1 \sin\left(\frac{2\pi \tilde{x}}{r_1}\right), r_2 \cos\left(\frac{2\pi \tilde{y}}{r_2}\right), r_2 \sin\left(\frac{2\pi \tilde{y}}{r_2}\right) \right), \end{aligned}$$

então das igualdades envolvendo os cossenos temos

$$\begin{cases} \frac{2\pi \tilde{x}}{r_1} = \frac{2\pi x}{r_1} + 2k_1\pi & \text{e} \quad \frac{2\pi \tilde{y}}{r_2} = \frac{2\pi y}{r_2} + 2k_2\pi \\ \frac{2\pi \tilde{x}}{r_1} = -\frac{2\pi x}{r_1} + 2k_3\pi & \text{e} \quad \frac{2\pi \tilde{y}}{r_2} = -\frac{2\pi y}{r_2} + 2k_4\pi \end{cases}$$

e das igualdades envolvendo os senos temos

$$\begin{cases} \frac{2\pi \tilde{x}}{r_1} = \frac{2\pi x}{r_1} + 2k_1\pi & \text{e} \quad \frac{2\pi \tilde{y}}{r_2} = \frac{2\pi y}{r_2} + 2k_2\pi \\ \frac{2\pi \tilde{x}}{r_1} = \pi - \frac{2\pi x}{r_1} + 2k_5\pi & \text{e} \quad \frac{2\pi \tilde{y}}{r_2} = \pi - \frac{2\pi y}{r_2} + 2k_6\pi \end{cases},$$

sendo $k_1, \dots, k_6 \in \mathbb{Z}$. Logo, para que a igualdade entre as quádruplas ordenadas seja verdadeira, devemos trabalhar com as primeiras linhas das igualdades acima. Deste modo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \tilde{x} - x = k_1 r_1 \\ \tilde{y} - y = k_2 r_2 \end{cases} &\iff (\tilde{x} - x, \tilde{y} - y)_c = (k_1 r_1, k_2 r_2)_c \\ &= k_1 (r_1, 0) + k_2 (0, r_2) \\ &= k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v} \\ &= (k_1, k_2)_\alpha, \end{aligned}$$

sendo $(\cdot, \cdot)_c$ as coordenadas na base canônica e $(\cdot, \cdot)_\alpha$ na base α . Tomamos $k_1 = m$ e $k_2 = n$. Portanto, $\varphi(\mathbb{R}^2) = \varphi([0, r_1] \times [0, r_2])$ e desta forma, φ identifica com precisão os lados opostos do retângulo. Formalmente, podemos dizer que φ induz uma correspondência injetiva entre $T^\alpha = \mathbb{R}^2 / \Lambda_\alpha$ e a superfície $\varphi(\mathbb{R}^2)$ em $\mathbb{R}^4$.

Esta correspondência é, na verdade, uma isometria, ou seja, uma aplicação que preserva distância quando consideramos a distância geodésica em $\varphi(\mathbb{R}^2)$. Isto significa que se $p =$

$\varphi(x, y)$ e $q = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y})$, então $d_\alpha(\overline{(x, y)}, \overline{(\tilde{x}, \tilde{y})})$ é precisamente o comprimento do caminho mais curto, com a métrica euclidiana, em $\varphi(\mathbb{R}^2)$ conectando p e q . Essa última afirmação justifica-se pelo fato de que os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de $\varphi(\mathbb{R}^2)$ são $E = G = 1$ e $F = 0$, confirmando que a métrica em $\varphi(\mathbb{R}^2)$ é a euclidiana. De fato, temos

$$\begin{cases} \varphi_x(x, y) = \left(-\sin\left(\frac{2\pi x}{r_1}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{r_1}\right), 0, 0\right) \\ \varphi_y(x, y) = \left(0, 0, -\sin\left(\frac{2\pi y}{r_2}\right), \cos\left(\frac{2\pi y}{r_2}\right)\right) \end{cases},$$

logo,

$$\begin{cases} E(x, y) = \langle \varphi_x(x, y), \varphi_x(x, y) \rangle = -\sin^2\left(\frac{2\pi x}{r_1}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi x}{r_1}\right) = 1 \\ F(x, y) = \langle \varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y) \rangle = 0 \\ G(x, y) = \langle \varphi_y(x, y), \varphi_y(x, y) \rangle = \sin^2\left(\frac{2\pi y}{r_2}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi y}{r_2}\right) = 1 \end{cases}.$$

O toro plano gerado por $u = (a, b)$ e $v = t(-b, a)$, com $t \in \mathbb{R}^*$, pode ser inserido em $\mathbb{R}^4$ por meio de uma isometria local $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que é a composição de φ com uma rotação de ângulo $\theta = \angle(u, e_1)$, sentido horário, sendo $e_1 = (1, 0)$, isto é,

$$\Phi(x, y) = \varphi(R_\theta(x, y)),$$

sendo

$$R_\theta(x, y) = \frac{1}{\|u\|} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

já que θ é tomado no sentido horário, como observado na FIGURA 2. De fato, temos $\|u\| \cos(\theta) = a$ e $\|u\| \sin(\theta) = b$, logo,

$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \frac{1}{\|u\|} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

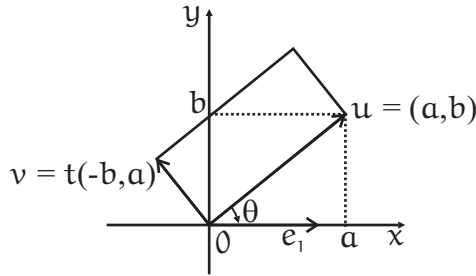


FIGURA 2: Rotação de ângulo $\theta = \angle(u, e_1)$ sentido horário.

Destacamos que a superfície $\Phi(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^4$ está contida em uma esfera tridimensional de raio $\frac{\sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}}{2\pi}$, pois

$$R_\theta(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{ay-bx}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \varphi(R_\theta(x, y)) \\ &= \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi} \left(\cos\left(\frac{2\pi(ax+by)}{a^2+b^2}\right), \sin\left(\frac{2\pi(ax+by)}{a^2+b^2}\right) \right), \frac{t\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi} \left(\cos\left(\frac{2\pi(ay-bx)}{t(a^2+b^2)}\right), \sin\left(\frac{2\pi(ay-bx)}{t(a^2+b^2)}\right) \right) \right). \end{aligned}$$

Seja $P = \Phi(x, y)$. Calculando a distância d de P até a origem, obtemos

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi} \right)^2 \left(\cos^2 \left(\frac{2\pi(ax+by)}{a^2+b^2} \right) + \sin^2 \left(\frac{2\pi(ax+by)}{a^2+b^2} \right) \right) \\ &+ \left(\frac{t\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi} \right)^2 \left(\cos^2 \left(\frac{2\pi(ay-bx)}{t(a^2+b^2)} \right) + \sin^2 \left(\frac{2\pi(ay-bx)}{t(a^2+b^2)} \right) \right) \Rightarrow \\ d^2 &= \frac{a^2+b^2}{4\pi^2} + \frac{t^2(a^2+b^2)}{4\pi^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4\pi^2} + \frac{t^2(a^2+b^2)}{4\pi^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+t^2(a^2+b^2)}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}}{2\pi}.$$

Se $t = 1$, o toro plano T^α é gerado por um quadrado e temos, $u = (a, b), v = (-b, a)$. Assim,

$$R_\theta(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{ay-bx}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\Phi(x, y) = \varphi(R_\theta(x, y)) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi} \left(\cos \frac{2\pi(ax+by)}{a^2+b^2}, \sin \frac{2\pi(ax+by)}{a^2+b^2}, \cos \frac{2\pi(ay-bx)}{a^2+b^2}, \sin \frac{2\pi(ay-bx)}{a^2+b^2} \right),$$

uma vez que $\|u\| = \|v\| = \sqrt{a^2+b^2}$.

O procedimento descrito acima, pode ser generalizado para dimensões maiores. O toro euclidiano n -dimensional T^α , $\alpha = \{u_1, \dots, u_n\}$, é, então, visto como o polítopo (poliedro n -dimensional) em $\mathbb{R}^n$ apoiado em α com faces paralelas identificadas. Se α é uma base ortogonal há um mergulho de T^α em uma esfera de $\mathbb{R}^{2n}$ que pode ser facilmente descrita em termos da base α . De fato, para $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ temos

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\|u_1\|}{2\pi} \cos \left(\frac{2\pi x_1}{\|u_1\|} \right), \frac{\|u_1\|}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi x_1}{\|u_1\|} \right), \dots, \frac{\|u_n\|}{2\pi} \cos \left(\frac{2\pi x_n}{\|u_n\|} \right), \frac{\|u_n\|}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi x_n}{\|u_n\|} \right) \right).$$

Na próxima seção iremos trabalhar com toros planos, reticulados e tesselações colocadas sobre os mesmos, considerando rotulamentos dos pontos desse reticulado por meio de isometrias do plano. A construção descrita acima mostra que os reticulados que podemos obter podem ser usados para projetar códigos esféricos com rotulamentos e procedimentos especiais de decodificação, como citado em [2].

1.3 Tesselações e Grafos sobre Toros Euclidianos

Uma *tesselação*, *pavimentação* ou *ladrilhamento* em $\mathbb{R}^n$ é uma família de conjuntos conexos não vazios de $\mathbb{R}^n$ de tal modo que:

- A reunião de tais conjuntos é $\mathbb{R}^n$;
- A intersecção de dois quaisquer conjuntos distintos desta família é vazia ou um conjunto cujo interior é vazio (na métrica euclidiana).

Com a definição acima, uma tesselação pode ser bastante estranha. Por exemplo, a família de todas as retas de $\mathbb{R}^2$ que passam pela origem é um ladrilhamento de $\mathbb{R}^2$.

Sendo assim, iremos sempre considerar tesselações em $\mathbb{R}^n$ por polítopos. Os vértices e arestas desses polítopos induzem grafos em $\mathbb{R}^n$ e, sob certas condições, esses polítopos induzem grafos e tesselações nos toros euclidianos.

Vamos considerar um toro euclidiano T^α gerado por uma base α de $\mathbb{R}^n$ e a aplicação quociente associada $\overline{\mu}_\alpha$ induzida por μ_α ,

$$\begin{aligned} \overline{\mu}_\alpha: \mathbb{R}^n &\longrightarrow T^\alpha \\ x &\longmapsto \overline{\mu_\alpha(x)} \end{aligned}$$

Um fato interessante a ser observado é que, quando restrita ao polítopo gerado por α , $\overline{\mu}_\alpha$ é injetiva e é uma isometria local (considerando a métrica definida em 1.2). Isto implica que qualquer comprimento, área, ou volume k -dimensional ($3 \leq k \leq n$) sobre o toro euclidiano pode ser medido em $\mathbb{R}^n$ sobre o polítopo gerado por α . Essa observação vem ao encontro do fato de dizermos que o toro plano, como um cilindro, pode ser planificado em $\mathbb{R}^2$ e suas medições podem ser feitas em um paralelogramo.

Dada uma tesselação por polítopos em $\mathbb{R}^n$ surge de forma natural o seguinte questionamento: em que condições a aplicação $\overline{\mu}_\alpha$ induz uma tesselação por polítopos em T^α . Para $n = 2$, vamos considerar tesselações do plano por quadrados (reticulado $\mathbb{Z}^2$), hexágonos regulares e triângulos equiláteros, e discutir sob quais condições essas tesselações induzem grafos regulares e tesselações regulares em um toro plano. Como as tesselações que iremos considerar possuem uma estrutura de grupo associada, vamos definir região fundamental e G -tesselação.

Seja G um grupo discreto de isometrias em $\mathbb{R}^n$. Um subconjunto Π de $\mathbb{R}^n$ é chamado uma *região fundamental* associada a G quando:

- a) A reunião das órbitas de Π por G cobrem $\mathbb{R}^n$, ou seja, $\bigcup_{g \in G} g\Pi = \mathbb{R}^n$;
- b) $\text{int } \Pi \cap g(\text{int } \Pi) \neq \emptyset \iff g = \text{Id}$, ($\text{int } \Pi$ é o interior de Π na métrica euclidiana);
- c) $\text{int } \Pi \neq \emptyset$.

A cobertura de $\mathbb{R}^n$ pelas cópias de Π (que também podem ser chamados de *ladrilhos* ou *tesselas*) sob a ação de G é chamada de *tesselação de $\mathbb{R}^n$ associada a G* , ou G -tesselação.

Quando $G = \Lambda_\alpha$ dizemos que a tesselação é induzida por um reticulado de $\mathbb{R}^n$.

Uma *região de Voronoi* de um ponto x de um reticulado Λ_α em $\mathbb{R}^n$ é o fecho do subconjunto dos pontos de $\mathbb{R}^n$ mais próximos de x (na métrica euclidiana) do que qualquer outro ponto do reticulado.

Observemos que, dado um reticulado gerado por Λ_α a partir de x , uma região de Voronoi pode ser congruente a uma região fundamental de Λ_α .

Todas as tesselações que consideramos neste trabalho são induzidas por reticulados em $\mathbb{R}^n$. Um dado reticulado Λ_α pode induzir mais de uma tesselação em $\mathbb{R}^n$, dentre elas uma dada pelas regiões de Voronoi, outra por cópias da região fundamental e, ainda outra, por cópias dos ladrilhos formados pelos pontos do próprio reticulado. O grupo discreto G é o mesmo em todos os casos, $G \approx \Lambda_\alpha$.

Como exemplo, para $n = 2$, $\alpha = \{w_1, w_2\}$, $w_1 = (1, 0)$ e $w_2 = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$, Λ_α gera ladrilhamentos por hexágonos (região de Voronoi), losangos (região fundamental) ou triângulos (ladrilhos com vértices no reticulado). Por outro lado, quando $w_3 = (0, 1)$ e $\alpha = \{w_1, w_3\}$, Λ_α induz, em qualquer situação, apenas tesselações por quadrados congruentes.

A seguir daremos condições para obter uma tesselação em um toro euclidiano T^α induzida por $\overline{\mu}_\alpha$ aplicada a uma tesselação associada a um reticulado Λ_β em $\mathbb{R}^n$. Para tanto, iremos considerar os chamados grupos quocientes, cujos elementos são classes laterais, conforme definição abaixo.

Seja G um grupo e H um subgrupo de G . Sobre G , definimos a relação de equivalência $\sim_E$ da seguinte maneira :

$$y \sim_E x \iff \exists h \in H \text{ tal que } y = xh.$$

A classe de equivalência que contém x é definida com sendo o conjunto $\{y \in G \mid y \sim_E x\} = \{xh \mid h \in H\}$. Denotamos esse conjunto por xH e o chamamos de **classe lateral** à esquerda de H em G que contém x .

De forma análoga, podemos definir a próxima relação de equivalência:

$$y \sim_D x \iff \exists h \in H \text{ tal que } y = hx.$$

Obtemos então as classes laterais à direita de H em G . A classe lateral de x à direita seria $Hx = \{hx \mid h \in H\}$.

Vamos definir uma operação sobre o conjunto das classes laterais (à esquerda ou à direita) e mostrar que esse conjunto munido dessa operação possui a estrutura algébrica de grupo. Primeiramente, queremos saber se a operação de G induz de maneira natural uma operação sobre o conjunto das classes laterais à esquerda de H em G , isto é, se a operação

$$(gH, hH) \longmapsto ghH$$

é bem definida, no sentido de não depender da escolha dos representantes g e h .

Dados $g, h \in G$ e $f, k \in H$ arbitrários, então g e gf são representantes da mesma classe gH e, h e hk são representantes da mesma classe hH . Assim, a operação induzida sobre as classes laterais à esquerda é bem definida quando

$$ghH = gfhkH \iff h^{-1}g^{-1}ghH = h^{-1}g^{-1}gfhkH \iff H = h^{-1}fhH \iff \boxed{h^{-1}fh \in H}.$$

Nessas condições, dizemos que o grupo H é um **subgrupo normal** de G .

O conjunto das classes laterais gH , $g \in G$, munido da operação definida acima é, de fato, um grupo:

(i) $(g_1Hg_2H)g_3H = (g_1g_2)Hg_3H = ((g_1g_2)g_3)H = (g_1(g_2g_3))H = g_1H(g_2g_3)H = g_1H(g_2Hg_3H)$; (ou seja, o conjunto das classes laterais com a operação acima é associativo).

(ii) Seja $e \in G$ elemento neutro. Temos $gHeH = (ge)H = gH$, $\forall g \in G$; (ou seja, $eH = H$ é elemento neutro no conjunto das classes laterais).

(iii) Seja gH . Tomemos $g^{-1} \in G$. Logo, $gHg^{-1}H = (gg^{-1})H = eH$; (ou seja, gH é invertível no conjunto das classes laterais).

O conjunto das classes laterais gH com a operação definida acima recebe o nome de **grupo quociente**, e indicamos por $\frac{G}{H}$.

No caso do toro euclidiano n -dimensional, onde $H = \Lambda_\alpha$ e $G = \Lambda_\beta$ são grupos de translações e, portanto, são grupos comutativos, temos sempre que Λ_α é subgrupo normal de Λ_β . Além disso, um fato muito curioso é que o grupo de simetrias do toro euclidiano é o grupo quociente $\frac{\Lambda_\beta}{\Lambda_\alpha}$, conforme veremos a seguir nos Lemas 1.1 e 1.2.

Lema 1.1 Sejam $g \in \Lambda_\beta$ e $\bar{g}$ isometria induzida de Λ_β em T^α por $\bar{\mu}_\alpha$, ou seja, $\bar{g}(\bar{\mu}_\alpha(a)) = \bar{\mu}_\alpha(g(a))$. Então, $\bar{g} = \text{Id}$ se, e somente se, $g \in \Lambda_\alpha$.

Demonstração: $\Leftarrow$) Quando $g \in \Lambda_\alpha$ ($\Lambda_\alpha \subset \Lambda_\beta$), temos

$$\bar{\mu}_\alpha(g(a)) = \bar{\mu}_\alpha(a)$$

já que, neste caso, a e $g(a)$ estarão na mesma classe de equivalência (FIGURA 3). Logo,

$$\bar{g}(\bar{\mu}_\alpha(a)) = \bar{g}(\bar{\mu}_\alpha(g(a))) = \bar{\mu}_\alpha(g \circ g(a)) = \bar{\mu}_\alpha(a).$$

Portanto, $\bar{g} = \text{Id}$.

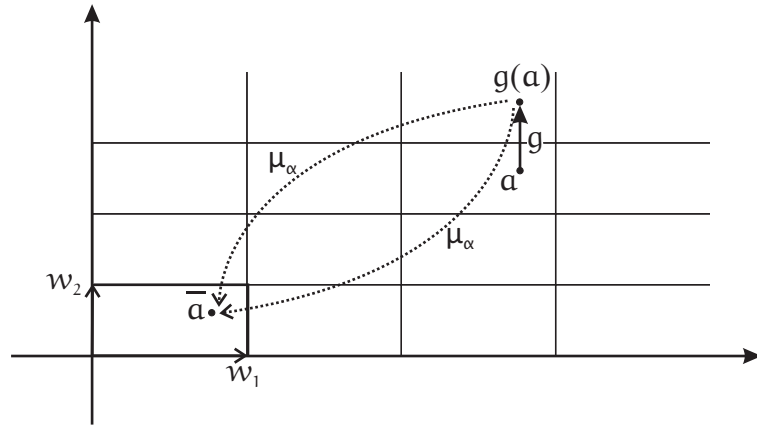


FIGURA 3: Para $n = 2$, $\alpha = \{w_1, w_2\}$, onde $w_1 = (1, 0)$ e $w_2 = (0, 1)$.

$\Rightarrow$) Sendo $\bar{g} = \text{Id}$, temos

$$\bar{\mu}_\alpha(a) = \bar{g}(\bar{\mu}_\alpha(a)) = \bar{\mu}_\alpha(g(a)),$$

ou seja, $g \in \Lambda_\alpha$. □

Lema 1.2 *O grupo de isometrias $\overline{\Lambda}_\beta$, induzido de Λ_β sobre T^α por $\bar{\mu}_\alpha$, é isomorfo ao grupo quociente $\Lambda_\beta/\Lambda_\alpha$.*

Demonstração: Devemos mostrar que existe $F : \overline{\Lambda}_\beta \longrightarrow \Lambda_\beta/\Lambda_\alpha$, tal que F é bijeção e

$$F(\overline{g_1 g_2}) = F(\overline{g_1})F(\overline{g_2}).$$

Definimos

$$F(\overline{g}) = g\Lambda_\alpha \text{ com } g \in \Lambda_\beta.$$

Logo,

$$F(\overline{g_1 g_2}) = g_1 g_2 \Lambda_\alpha = g_1 \Lambda_\alpha g_2 \Lambda_\alpha = F(\overline{g_1})F(\overline{g_2}).$$

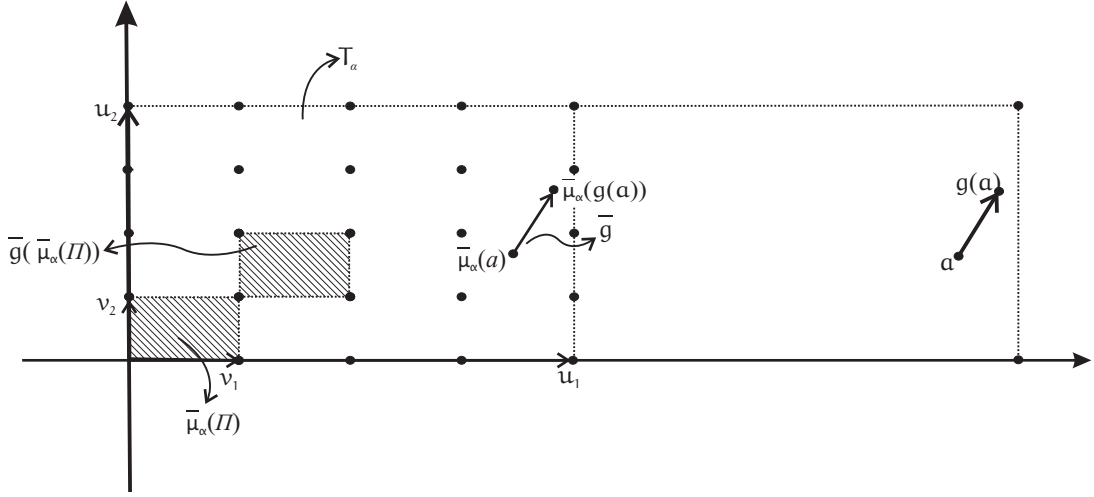
Para mostrar que F é sobrejetiva, seja $g\Lambda_\alpha$ elemento qualquer de $\Lambda_\beta/\Lambda_\alpha$. Logo, tomando $\bar{g}$, temos $F(\bar{g}) = g\Lambda_\alpha$.

Quanto a injetividade, sejam

$$\begin{aligned} F(\overline{g_1}) &= F(\overline{g_2}) \iff \\ g_1 \Lambda_\alpha &= g_2 \Lambda_\alpha \iff \\ g_2^{-1} g_1 \Lambda_\alpha &= \Lambda_\alpha \iff \\ g_2^{-1} g_1 &\in \Lambda_\alpha \xLeftrightarrow{\text{Lema 1.1}} \overline{g_2^{-1} g_1} = \text{Id}. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} \overline{g_2^{-1} g_1}(\bar{\mu}_\alpha(a)) &= \text{id}(\bar{\mu}_\alpha(a)) \iff \\ \bar{\mu}_\alpha(g_2^{-1} g_1(a)) &= \bar{\mu}_\alpha(a) \iff \\ \exists h \in \Lambda_\alpha \text{ tal que } g_2^{-1} g_1(a) &= h(a) \text{ (FIGURA 4)} \iff \\ g_1(a) &= g_2 h(a), \forall a \in \mathbb{R}^n \iff \\ g_1 &= g_2 h \iff \\ \overline{g_1} &= \overline{g_2 h} \iff \\ \overline{g_1}(\bar{\mu}_\alpha(a)) &= \overline{g_2 h}(\bar{\mu}_\alpha(a)) = \bar{\mu}_\alpha(g_2 h(a)) = \overline{g_2}(\bar{\mu}_\alpha(h(a))) = \overline{g_2}(\bar{\mu}_\alpha(a)) \iff \\ \overline{g_1} &= \overline{g_2}. \end{aligned}$$

FIGURA 4: Comportamento da aplicação $\bar{g}$.

Portanto, F é injetiva. $\square$

Com o que fizemos até aqui, temos condições de provar o principal resultado dessa seção, ou seja, sob quais condições uma determinada tesselação em $\mathbb{R}^n$ induz uma tesselação em um toro euclidiano n -dimensional.

Proposição 1.1 *Sejam $\alpha = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ bases de $\mathbb{R}^n$, e seja $\mathcal{L}_\beta$ a Λ_β -tesselação de $\mathbb{R}^n$ que tem como região fundamental o polígono Π gerado pela base β . Se Λ_α é um subreticulado de Λ_β , e se $\bar{\mu}_\alpha$ é a aplicação quociente do toro euclidiano T^α plano, podemos afirmar o seguinte:*

- a) $\mathcal{L}_\beta$ induz uma G -tesselação $\mathcal{L}_\beta^\alpha$ em T^α com região fundamental $\bar{\mu}_\alpha(\Pi)$, e $G = \Lambda_\beta/\Lambda_\alpha$.
- b) Λ_β induz um grafo homogêneo Γ_β^α sobre T^α por meio de $\bar{\mu}_\alpha$.

Demonstração:

(a) A prova decorre essencialmente do fato de que, nas condições exigidas, $\bar{\mu}_\alpha$, restrita a um ladrilho de $\mathcal{L}_\beta$, é uma isometria local (portanto, é contínua e leva aberto em aberto) e uma bijeção. Assim, $\bar{\mu}_\alpha(\Pi)$ tem a mesma área de Π e também todas as condições para a tesselação são cumpridas para $G = \Lambda_\beta/\Lambda_\alpha$, como mostramos a seguir.

Para ver que $G = \Lambda_\beta/\Lambda_\alpha$ atua como um grupo discreto de isometrias em T^α , podemos mostrar que cada isometria $g \in \Lambda_\beta$ induz uma isometria $\bar{g}$ no toro euclidiano T^α definida por $\bar{g}(\bar{\mu}_\alpha(a)) = \bar{\mu}_\alpha(g(a))$. De fato, desde que Λ_β é um grupo comutativo de translações, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 d_\alpha(\bar{g}(\bar{\mu}_\alpha(a)), \bar{g}(\bar{\mu}_\alpha(b))) &= d_\alpha(\bar{\mu}_\alpha(g(a)), \bar{\mu}_\alpha(g(b))) \\
 &= \min\{d(g_1 g(a), g_2 g(b)) : g_1, g_2 \in \Lambda_\alpha\} \\
 &= \min\{d(g g_1(a), g g_2(b)) : g_1, g_2 \in \Lambda_\alpha\} \\
 &= \min\{d(g_1(a), g_2(b)) : g_1, g_2 \in \Lambda_\alpha\} \\
 &= d_\alpha(\bar{\mu}_\alpha(a), \bar{\mu}_\alpha(b)) \implies \bar{g} \text{ é uma isometria.}
 \end{aligned}$$

Na expressão acima tomamos g_1 e g_2 isometrias que levam o mais próximo possível $g(a)$ e $g(b)$.

Recordemos que, pelo Lema 1.1, temos que $\bar{g} = \text{Id}$ se, e somente se, $g \in \Lambda_\alpha$ e para ver que o grupo das isometrias induzidas, $\bar{\Lambda}_\beta$ é isomorfo a $\Lambda_\beta/\Lambda_\alpha$, utilizamos o Lema 1.2.

As condições da definição de G -tesselação são deduzidas do seguinte modo:

$$(i) \bigcup_{\bar{g} \in \bar{\Lambda}_\beta/\bar{\Lambda}_\alpha} \bar{g}\bar{\mu}_\alpha(\Pi) = \bar{\mu}_\alpha\left(\bigcup_{g \in \Lambda_\beta} g(\Pi)\right) = \bar{\mu}_\alpha(\mathbb{R}^n) = T^\alpha.$$

(ii) se $\bar{y} \in \bar{g}(\bar{\mu}_\alpha(\text{int } \Pi)) \cap \bar{\mu}_\alpha(\text{int } \Pi) = \bar{\mu}_\alpha(g(\text{int } \Pi)) \cap \bar{\mu}_\alpha(\text{int } \Pi)$, então $\bar{y} = \bar{\mu}_\alpha(g(a))$ e $\bar{y} = \bar{\mu}_\alpha(b)$, onde

$$\begin{aligned} a, b \in \text{int } \Pi &\implies g(a) = g'(b) \in \text{int } \Pi \text{ para algum } g' \in \Lambda_\alpha \implies \\ (g')^{-1} g(a) &= b \text{ (e } a, b \in \text{int } \Pi) \implies \\ (g')^{-1} g &= 1 \implies \\ g &= g' \in \Lambda_\alpha, \end{aligned}$$

portanto, $\bar{g} = \text{Id}$.

(iii) Como μ_α é injetiva quando restrita a Π , temos $\text{int } \bar{\mu}_\alpha(\Pi) = \bar{\mu}_\alpha(\text{int } \Pi) \neq \emptyset$.

(b) Os vértices e arestas de Γ_β^α serão definidas como as imagens por $\bar{\mu}_\alpha$ de vértices e arestas de Λ_β . A homogeneidade de Γ_β^α (o mesmo número de arestas de polítopos n -dimensionais a partir de cada vértice) segue, uma vez que é construído por um grupo quociente de isometrias. A prova de que este grafo gera as arestas da tesselação sobre o toro euclidiano decorre de (a) e, novamente, pelo fato de que $\bar{\mu}_\alpha$ restrita ao interior de um ladrilho ser uma aplicação injetiva. $\square$

Para o reticulado $\Lambda_\beta = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, o resultado indicado pela última proposição diz que Λ_β induz uma tesselação no toro plano T^α (por quadrados unitários) se $\alpha = \{u, v\}$, onde $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ com a, b, c, d inteiros. Além disso, o grafo Γ_β associado com $\mathbb{Z}^2$ induz através de uma aplicação quociente $\bar{\mu}_\alpha$ um grafo Γ_β^α e uma tesselação por quadrados no toro plano T^α . Esta tesselação pode ser vista como o paralelogramo P_α apoiado em α tesselado por $\mathbb{Z}^2$ com os lados opostos colados um ao outro. A FIGURA 5 ilustra isto para $u = (3, 2)$ e $v = (-2, 3)$: temos 13 vértices e 13 quadrados na tesselação do toro plano T^α .

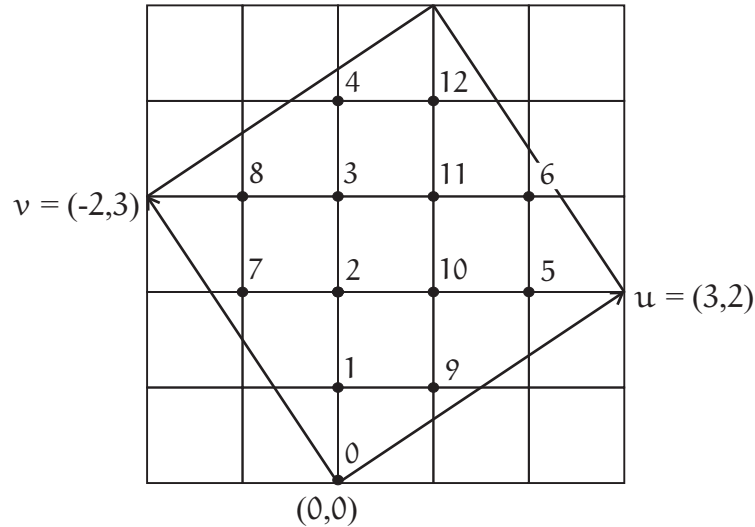


FIGURA 5: Tesselação e rotulamento cíclico para o grafo Γ_β^α no toro plano gerado por $u = (3, 2)$ e $v = (-2, 3)$.

Em geral, o conjunto de vértices do grafo induzido é dado por $\bar{\mu}_\alpha(\mathbb{Z}^2)$ e o número de vértices e quadrados no toro plano é $|\mathbf{ad} - \mathbf{bc}|$. Este resultado é provado em um contexto mais amplo na próxima proposição. No que se segue, denotaremos por $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ o i -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1.2 *Seja $\alpha = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e T^α o toro plano associado.*

a) Para $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$, base canônica de $\mathbb{R}^n$, o reticulado $\Lambda_\beta = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ induz (por meio de uma aplicação quociente $\bar{\mu}_\alpha$) um grafo regular Γ_β e uma tesselação no toro euclidiano T_α , $\alpha = \{u_1, \dots, u_n\}$ por hipercubos unitários, se $u_1, \dots, u_n$ tem coordenadas inteiras. Neste caso:

- b) $\overline{\mu_\alpha}(\mathbb{Z}^n)$ são os vértices de Γ_α^β .
- c) $\overline{\mu_\alpha}([i_1, i_1 + 1] \times \mathbb{Z}^{n-1}) \cup \overline{\mu_\alpha}(\mathbb{Z} \times [i_2, i_2 + 1] \times \mathbb{Z}^{n-2}) \cup \dots \cup \overline{\mu_\alpha}(\mathbb{Z}^{n-1} \times [i_n, i_n + 1])$, i_j inteiros, é a união das arestas.
- d) $\overline{\mu_\alpha}([i_1, i_1 + 1] \times [i_2, i_2 + 1] \times \dots \times [i_n, i_n + 1])$, i_j inteiros, são os ladrilhos hipercúbicos.
- e) O número de vértices, V , e o número de ladrilhos hipercúbicos, F , de Γ_β^α ambos são iguais a $|\det[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]|$.

Demonstração:

Os itens a) a d) são deduzidos da Proposição 1.1, para o reticulado $\mathbb{Z}^n$ associado ao grupo discreto de isometrias Λ_β , onde $\beta = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$, a região fundamental é o hipercubo unitário $\Pi = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ em $\mathbb{R}^n$ e Λ_α é um subreticulado de $\Lambda_\beta = \mathbb{Z}^n$, uma vez que os vetores de α tem coordenadas inteiras e desta forma as hipóteses da proposição são satisfeitas.

A prova do item e) baseia-se na homogeneidade da tesselação induzida. Como o grafo Γ_β^α é obtido através de um quociente de isometrias, não se pode distinguir de qualquer forma um vértice de um outro. Além disso, o grafo Γ_β^α herdará toda homogeneidade da tesselação associada com Λ_β (que pode ser visto como a tesselação por $\mathbb{Z}^n$ do politopo P_α , com seus lados identificados). Se temos um vértice de $\Lambda_\beta = \mathbb{Z}^n$ dentro do politopo P_α todos os vértices de Γ_β^α terão as mesmas características de um vértice no reticulado padrão $\mathbb{Z}^n$ (por exemplo, 2^n hipercubos se encontram em um dos vértices). Para esclarecer os argumentos geométricos a serem usados, vamos começar com os casos de baixa dimensão.

Seja $n = 2$, $\mathbf{u} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e $\mathbf{v} = (\mathbf{c}, \mathbf{d})$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ inteiros, $\alpha = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ e P_α o paralelogramo gerado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Como $\overline{\mu_\alpha}(P_\alpha) = T^\alpha$ e μ_α restrita ao interior de P_α é uma isometria local e é injetiva (um-para-um), preserva área, isto é, a área de T^α é igual a de P_α , que é $|\det[\mathbf{u}, \mathbf{v}]| = |\mathbf{ad} - \mathbf{bc}|$, já que a área de P_α é dada pela norma do vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, como vemos abaixo

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & 0 \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (\mathbf{ad} - \mathbf{bc})\mathbf{k} = (0, 0, \mathbf{ad} - \mathbf{bc})$$

e $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{ad} - \mathbf{bc}|$.

Por outro lado, como a tesselação de T^α é por quadrados unitários, isto implica que temos precisamente $F = |\mathbf{ad} - \mathbf{bc}|$ quadrados nesta tesselação. Para ver que isto é também o número V de vértices, ressaltamos que a tesselação no toro plano é perfeitamente homogênea, já que os lados do paralelogramo são identificados. Se μ_α restrita ao ladrilho é injetiva, cada face quadrado no toro plano terá também $2^2 = 4$ vértices e cada vértice pertence a quatro faces como nós temos em $\mathbb{Z}^2$. Isso implica que $V = \frac{4F}{4} = F$.

Prosseguindo com o mesmo raciocínio para $n = 3$, obtemos um número $F = |\det[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]|$ de cubos unitários para a tesselação, uma vez que o volume do toro plano é o volume do prisma gerado por $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e este volume é dado pelo valor absoluto do produto misto dos vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, que por definição é igual a $|\det[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]|$. O número de vértices de cada cubo nesta tesselação é $2^3 = 8$ mas, novamente, cada vértice pertence a oito cubos. Isto implica que $V = \frac{8F}{8} = F = |\det[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]|$.

A prova para n geral segue da mesma maneira. O toro plano é homogeneamente tesselados por hipercubos e $\overline{\mu_\alpha}$ uma isometria local, que é injetiva quando restrita ao interior do P_α , o que implica que o volume n -dimensional do P_α é igual ao volume n -dimensional de T^α , que é igual ao F número de hipercubos da tesselação. Como $\overline{\mu_\alpha}$ é injetiva dentro de uma região que contém um hipercubo de Λ_β , e como cada hipercubo de $\Lambda_\beta = \mathbb{Z}^n$ tem 2^n vértices e cada vértice do grafo Γ_β^α em T^α pertence a 2^n hipercubos, obtemos $V = F = |\det[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]|$. $\square$

1.4 Tesselações Regulares por Quadrados e seus Rotulamentos

Nesta seção iremos nos restringir a $n = 2$. O objetivo desta seção é construir grafos regulares em duas dimensões sobre toros planos com rotulamentos induzidos por isometrias planas que, em um contexto de Teoria da Informação e Codificação, podem ser utilizados para criar códigos corretores de erros.

Consideramos o grupo de translações planas $\Lambda_\beta \approx \mathbb{Z}^2$, o ladrilho $\Pi = [0, 1] \times [0, 1]$ e $\alpha = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ com $\mathbf{u} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e $\mathbf{v} = (\mathbf{c}, \mathbf{d})$, sendo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ inteiros. O grafo Γ_β^α no toro plano e sua tesselação dada pela Proposição 1.2 tem, então, $|\det[\mathbf{u}, \mathbf{v}]|$ vértices e o mesmo número de quadrados unitários.

Em um contexto de teoria dos códigos, os vértices de Γ_β^α correspondem às classes laterais de Λ/Λ' onde Λ é o reticulado $\mathbb{Z}^2$ e $\Lambda' = \theta\mathbb{Z}^2$ sendo θ um operador linear no plano cuja matriz é dada por

$$\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix}.$$

Translações horizontais e verticais por uma unidade no plano induzem um rotulamento natural em toros planos. Começamos com dois exemplos:

Exemplo (i) Para $\mathbf{u} = (4, 3)$ e $\mathbf{v} = (-5, 2)$, obtemos um toro plano tesselado por $M = |\det[\mathbf{u}, \mathbf{v}]| = |\mathbf{ad} - \mathbf{bc}| = 23$ quadrados, como ilustrado à direita na FIGURA 6. Notemos que neste caso, as arestas verticais do grafo estão conectadas ao identificar os lados opostos do paralelogramo e formam uma curva fechada (que é um nó) no toro plano. As translações verticais por uma unidade no plano induzem uma ação neste toro plano: se começarmos a partir de qualquer vértice do grafo e seguirmos para cima de uma em uma unidade (FIGURA 6 à esquerda), todos os vértices serão atingidos (todos eles se encontram no nó do toro). Isto significa que temos um grupo cíclico de isometrias, $\mathbb{Z}_{23} \approx \mathbb{Z}^2/\Lambda_\alpha$, que rotula o grafo completo e regular Γ_β^α .

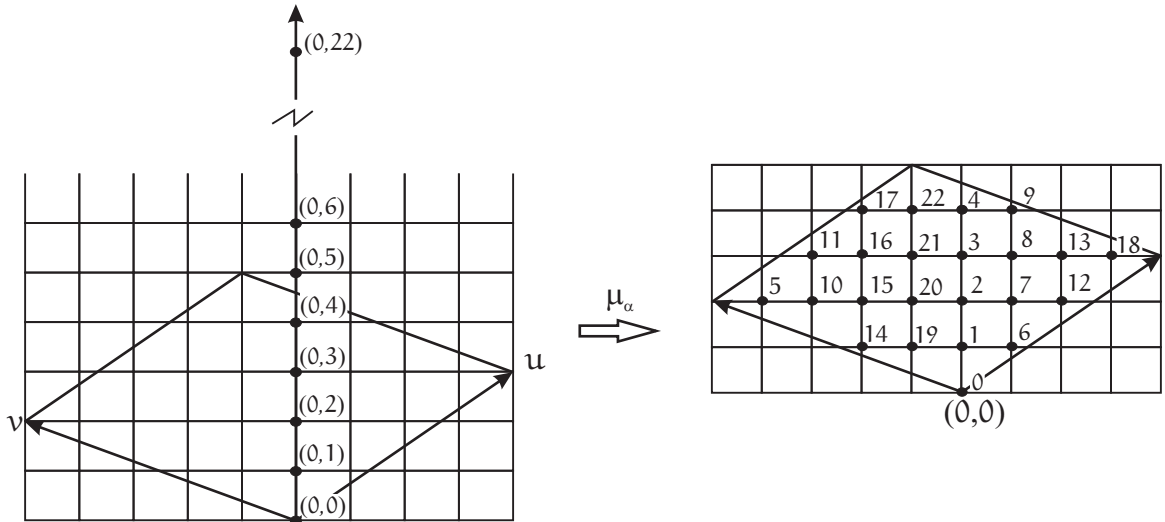


FIGURA 6: Rotulamento cíclico para o grafo Γ_β^α , $\alpha = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, $\mathbf{u} = (4, 3)$ e $\mathbf{v} = (-5, 2)$.

Exemplo (ii) Para $\alpha = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, $\mathbf{u} = (\mathbf{m}, 0)$ e $\mathbf{v} = (0, \mathbf{m})$, as arestas da $\mathbb{Z}^2$ -tesselação são paralelas aos lados do quadrado que gera o toro plano. Translações de uma unidade vertical (ou horizontal) a partir de qualquer vértice irá produzir um ciclo com $\mathbf{m}$ vértices, e há $\mathbf{m}$ tais ciclos. O grafo Γ_β^α é então naturalmente rotulado por $\mathbb{Z}_m^2/\Lambda_\alpha$. Ressaltamos que, neste caso, Γ_β^α é conhecido como o *espaço de Lee* e a métrica do grafo é a *métrica de Lee*. A ilustração da

FIGURA 7 refere-se ao espaço de Lee para $m = 4$ e Γ_β^α gerado por translações unitárias verticais e horizontais iniciadas no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

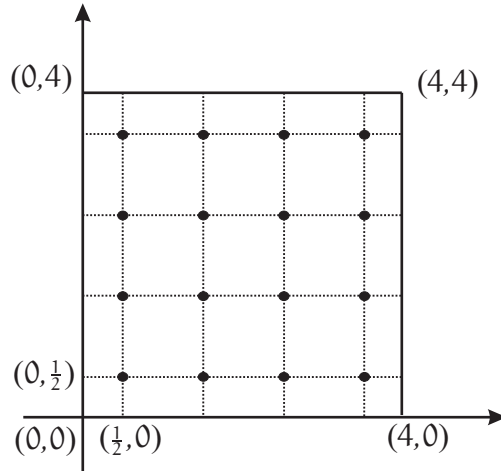


FIGURA 7: O grafo $\frac{\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\Lambda'} \equiv \bar{S}$ no toro plano $T^\alpha = \frac{\mathbb{R}^2}{G'}$ onde $G' = \langle T_{4e_1, 4e_2} \rangle \equiv \Lambda' = 4\mathbb{Z}^2$.

O rotulamento “vertical” proposto no Exemplo (i) pode ser estendido para o caso geral $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$. Do ponto de vista geométrico, este rotulamento pode ser feito da seguinte forma: se $\text{mdc}(a, c) = 1$, a imagem através da aplicação quociente de qualquer linha vertical $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$, é uma curva simples e fechada C no toro plano que contém todos os M vértices de Γ_β^α com $M = |ad - bc|$. O rotulamento por $\mathbb{Z}_{|ad-bc|}$ é feito percorrendo ciclicamente esta curva. Partimos de um vértice de Γ_β^α e, em seguida, vamos para cima a partir daí, de uma em uma unidade, até a fronteira do paralelogramo fundamental ser alcançada. Então, atravessando a fronteira, recomeçamos do ponto equivalente no paralelogramo e vamos para cima novamente. Repetimos esse procedimento até o último ponto da curva C ser atingido. Se $\text{mdc}(b, d) = 1$, um rotulamento cíclico de Γ_β^α pode ser feito da mesma maneira por meio de linhas horizontais. Se $\text{mdc}(a, c) = m \neq 1$, um rotulamento para cima indo em uma linha vertical irá atingir apenas $\frac{M}{m}$ vértices de Γ_β^α , como vemos no exemplo abaixo. Um argumento análogo é aplicável para $\text{mdc}(b, d) \neq 1$ e rotulamentos horizontais.

Exemplo (iii) Considere $u = (4, 3)$ e $v = (-2, 2)$. Assim, temos que $M = |ad - bc| = |4 \cdot 2 - 3 \cdot (-2)| = 14$ e $\text{mdc}(4, -2) = 2$. Então, um rotulamento para cima indo em uma linha vertical irá atingir 7 vértices do grafo, como podemos observar na FIGURA 8.

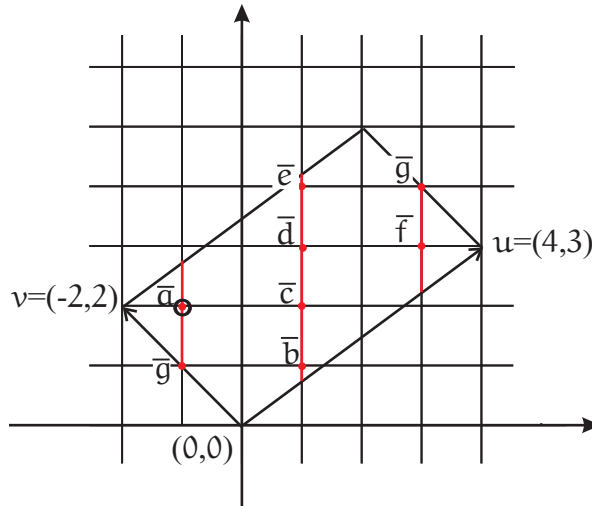


FIGURA 8: Rotulamento quando $\text{mdc}(a, c) \neq 1$.

Uma abordagem algébrica de um processo de rotulamento de um toro plano T^α gerado por $\mathbf{u} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e $\mathbf{v} = (\mathbf{c}, \mathbf{d})$ pode ser considerado de modo simples devido ao fato de que o grafo Γ_β^α é naturalmente rotulado pelo grupo quociente $\mathbb{Z}^2/\Lambda_\alpha$.

As próximas proposições, apresentam uma condição que garante um rotulamento cíclico.

No que se segue $\beta = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ e $\alpha = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ são bases para Λ_β e Λ_α , respectivamente; a matriz geradora de Λ_α sobre Λ_β é $A = (a_{ij})$, onde $\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{w}_i$, e $|A| = |\det A|$.

Proposição 1.3 *Sejam α e β duas bases de $\mathbb{R}^n$, Λ_α e Λ_β os reticulados gerados por α e β , respectivamente, e suponha que $\Lambda_\alpha \subset \Lambda_\beta$. Seja A a matriz geradora de Λ_α sobre Λ_β , $\mathbf{v}$ um vetor de Λ_β , e A_i a matriz obtida de A substituindo $\mathbf{v}^t$ na i -ésima coluna de A . Então, a ordem de $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \Lambda_\alpha$ em $\Lambda_\beta/\Lambda_\alpha$ é dada por $|A|/\text{mdc}\{|A|, |A_1|, \dots, |A_n|\}$.*

Demonstração:

Para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Lambda_\beta$, $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{v}} \in \Lambda_\alpha$ se, e somente se, $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \Lambda_\alpha$, isto é, se, e somente se, existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Entretanto, a ordem de um elemento $\bar{\mathbf{v}}$ é o menor inteiro positivo k tal que o sistema $A\mathbf{x} = k\mathbf{v}$ tem uma solução $\mathbf{x}$ com coordenadas inteiras (fórmulas de Cramer). Já que A é inversível, pelas fórmulas de Cramer, o sistema $A\mathbf{x} = k\mathbf{v}$ tem uma única solução dada por

$$\mathbf{x} = k|A|^{-1}(|A_1|, \dots, |A_n|).$$

Isto significa que $A\mathbf{x}_0 = |A|\mathbf{v}$ tem a solução

$$\mathbf{x}_0 = (|A_1|, \dots, |A_n|) \in \mathbb{Z}^n.$$

Já que $|A| = |\Lambda_\beta/\Lambda_\alpha|$, se $k\mathbf{v} + \Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha$ então k divide $|A|$. Agora, seja k a ordem de $\mathbf{v} + \Lambda_\alpha$. Temos $|A| = kl$, e a única solução de $A\mathbf{x} = k\mathbf{v}$ é dada por $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{l}\right) \mathbf{x}_0$. Portanto, l divide cada $|A_i|$. Agora, para outro inteiro l_1 tal que l_1 divide $|A|, |A_1|, \dots, |A_n|$, seja k_1 dado por $|A| = k_1 l_1$. Então $k|k|$, o que implica que $l_1|l|$. Isto mostra que $l = \text{mdc}\{|A|, |A_1|, \dots, |A_n|\}$, e que

$$|\mathbf{v} + \Lambda_\alpha| = k = |A|/\text{mdc}\{|A|, |A_1|, \dots, |A_n|\},$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Exemplo (iv) Aplicando a Proposição 1.3 para $\alpha = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ com $\mathbf{v}_1 = (4, 3)$ e $\mathbf{v}_2 = (-2, 2)$ e $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ com $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 1)$ temos que $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e o sistema $A\mathbf{x} = k\mathbf{v}$ será dado por

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, $\det A = 14$, $\det A_1 = 2$ e $\det A_2 = 4$. Logo, $\mathbf{x} = \frac{k}{14}(2, 4)$, o que implica que $k = 7$. o que equivale a $14/2 = \text{mdc}(A, A_1, A_2)$.

Particularizando o resultado da proposição anterior, para a tesselação por quadrados unitários e $n = 2$, onde β é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, e $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ obtemos a proposição seguinte.

Proposição 1.4 *Seja $\mathbf{u} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e $\mathbf{v} = (\mathbf{c}, \mathbf{d})$ e $M = |\mathbf{ad} - \mathbf{bc}|$. Se $\text{mdc}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = 1$, então o grupo $\mathbb{Z}^2/\Lambda_\alpha$ é isomorfo ao grupo cíclico $\mathbb{Z}_M$, a translação vertical unitária é um dos geradores e pode ser usada para rotular isometricamente Γ_β^α . Analogamente, o mesmo resultado vale se $\text{mdc}(\mathbf{b}, \mathbf{d}) = 1$ e a translação for a horizontal unitária.*

Nas condições da proposição acima vamos denotar por

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbf{v}}: \mathbb{Z}_M &\longrightarrow \Gamma_\beta^\alpha \\ \bar{k} &\longmapsto \overline{(0, k)} = \overline{\mu_\alpha}(0, k) \end{aligned}$$

um rotulamento de Γ_β^α por translações verticais.

1.5 Métrica do Grafo Induzida sobre o Conjunto de Rótulos

A distância no grafo entre dois vértices, indicada por $d_{\Gamma_\beta^\alpha}$, ou a métrica em Γ_β^α , é definida como de costume, ou seja, como sendo o número mínimo de arestas ligando os dois vértices. Esta distância é também induzida pela distância euclidiana no reticulado Λ_β . Para dois vértices $(\overline{\mathbf{m}_1}, \overline{\mathbf{n}_1})$ e $(\overline{\mathbf{m}_2}, \overline{\mathbf{n}_2})$ no grafo temos

$$d_{\Gamma_\beta^\alpha}(\overline{(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)}, \overline{(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2)}) = \min\{|\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2| + |\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2|\}$$

sendo $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) \in \overline{(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)}$ e $(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) \in \overline{(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2)}$.

Apresentaremos nessa seção uma forma sistemática de determinação, e também de visualização, do perfil de distâncias no grafo Γ_β^α para $\mathbf{u} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\mathbf{v} = (\mathbf{c}, \mathbf{d})$ e $\text{mdc}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = 1$ ou $\text{mdc}(\mathbf{b}, \mathbf{d}) = 1$, uma vez que, neste caso, podemos rotular Γ_β^α por um grupo cíclico $\mathbb{Z}_M$, $M = |\mathbf{ad} - \mathbf{bc}|$. Essa forma sistemática é equivalente a descobrir qual é a métrica $d_{\Gamma_\beta^\alpha}$ em $\mathbb{Z}_M$ que coincide com a distância do grafo Γ_β^α no toro plano.

Partimos de uma observação importante: dado que $\mathbb{Z}_M$ é induzido por translações (verticais) no plano euclidiano, e que essas translações são isometrias no toro plano via $\overline{\mu_\alpha}$, a métrica $d_{\Gamma_\beta^\alpha}$ que procuramos deve satisfazer

$$d_{\Gamma_\beta^\alpha}(\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{q}}) = d_{\Gamma_\beta^\alpha}(\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{q} - \mathbf{p}})$$

para quaisquer $\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{q}} \in \mathbb{Z}_M$.

A fim de obter expressões para o rotulamento e a distância no grafo, usamos a função módulo μ_α introduzida em 1.1 que associa ao vetor $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ o representante da mesma classe que está dentro do paralelogramo $\mathbf{P}_\alpha$ apoiado em $\alpha = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Expressando $\mathbf{w}$ em termos da base α , $\mathbf{w} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$ e calculando x e y pelas fórmulas de Cramer, temos

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = x(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + y(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \implies \begin{cases} \mathbf{ax} + \mathbf{cy} = \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{bx} + \mathbf{dy} = \mathbf{w}_2 \end{cases}.$$

Seja $D = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ \mathbf{b} & \mathbf{d} \end{vmatrix} = \mathbf{ad} - \mathbf{bc}$, $D_x = \begin{vmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{c} \\ \mathbf{w}_2 & \mathbf{d} \end{vmatrix} = \mathbf{w}_1\mathbf{d} - \mathbf{w}_2\mathbf{c}$ e $D_y = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{b} & \mathbf{w}_2 \end{vmatrix} = \mathbf{w}_2\mathbf{a} - \mathbf{w}_1\mathbf{b}$.

Assim, temos

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{\mathbf{w}_1\mathbf{d} - \mathbf{w}_2\mathbf{c}}{\mathbf{ad} - \mathbf{bc}} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{\mathbf{w}_2\mathbf{a} - \mathbf{w}_1\mathbf{b}}{\mathbf{ad} - \mathbf{bc}} \end{cases}$$

e a função módulo pode ser expressada como

$$\mu_\alpha(\mathbf{w}) = \mathbf{w} - \lfloor x \rfloor \mathbf{u} - \lfloor y \rfloor \mathbf{v},$$

onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota parte inteira. A imagem $\mu_\alpha(\mathbb{R}^2)$ é o paralelogramo fundamental que define o toro $\mathbb{T}^\alpha$ e, é claro, $\overline{\mu_\alpha(\mathbf{w})} = \overline{\mathbf{w}}$ uma vez que $\mathbf{w} - \mu_\alpha(\mathbf{w})$ é um inteiro combinação de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

A translação vertical λ_v que estabelece o rotulamento cíclico quando $\text{mdc}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = 1$ pode ser usada para rotular os vértices de Γ_β^α . Desta maneira, o rótulo $\overline{k} \in \mathbb{Z}_M$ do vértice $k(0, 1)$ é o mesmo que o do vértice $\lambda_v(\overline{k})$ definido como

$$\lambda_v(\overline{k}) = \mu_\alpha(k(0, 1)) = k(0, 1) - \left\lfloor \frac{-kc}{\mathbf{ad} - \mathbf{bc}} \right\rfloor (\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \left\lfloor \frac{k\mathbf{a}}{\mathbf{ad} - \mathbf{bc}} \right\rfloor (\mathbf{c}, \mathbf{d})$$

no paralelogramo fundamental, já que, neste caso, temos $w = (0, k)$ e, desta forma, substituímos na expressão acima $w_1 = 0$ e $w_2 = k$.

No Exemplo (i) ilustrado na FIGURA 6, foram considerados os rotulamentos dos 23 vértices dados por translações verticais, utilizando-se a função módulo $\bar{k} = \lambda_v(\bar{k}) = \mu_\alpha(k(0, 1))$, $0 \leq k \leq 22$. Notamos que, através deste rotulamento, os vizinhos a uma distância 1 para $\bar{0} \equiv \lambda_v(\bar{0}) = \mu_\alpha(0(0, 1)) = 0$ são

$$\begin{aligned}\bar{1} &\equiv \lambda_v(\bar{1}) = \mu_\alpha(1(0, 1)) = (0, 1) - \left\lfloor \frac{5}{23} \right\rfloor (4, 3) - \left\lfloor \frac{4}{23} \right\rfloor (-5, 2) = (0, 1) \\ \bar{22} &\equiv \lambda_v(\bar{22}) = \mu_\alpha(22(0, 1)) = (0, 22) - \left\lfloor \frac{110}{23} \right\rfloor (4, 3) - \left\lfloor \frac{88}{23} \right\rfloor (-5, 2) = (-1, 4) \\ \bar{5} &\equiv \lambda_v(\bar{5}) = \mu_\alpha(5(0, 1)) = (0, 5) - \left\lfloor \frac{25}{23} \right\rfloor (4, 3) - \left\lfloor \frac{20}{23} \right\rfloor (-5, 2) = (-4, 2) \\ \bar{18} &\equiv \lambda_v(\bar{18}) = \mu_\alpha(18(0, 1)) = (0, 18) - \left\lfloor \frac{90}{23} \right\rfloor (4, 3) - \left\lfloor \frac{72}{23} \right\rfloor (-5, 2) = (3, 3).\end{aligned}$$

Vamos agora considerar uma métrica em $\mathbb{Z}_M$ que coincide com a métrica do grafo no toro plano

$$d_{\Gamma_\beta^\alpha}(\bar{p}, \bar{q}) = d_{\Gamma_\beta^\alpha}(\lambda_v(\bar{p}), \lambda_v(\bar{q})) \text{ com } \bar{p}, \bar{q} \in \mathbb{Z}_M.$$

Devido à homogeneidade do grafo, para deduzir uma expressão analítica para a métrica $d_{\Gamma_\beta^\alpha}$ em $\mathbb{Z}_M$, que coincida com a métrica do grafo, precisamos saber quais são os vizinhos de $\lambda_v(\bar{0})$ em Γ_β^α . Além dos vizinhos $\lambda_v(\bar{1})$ e $\lambda_v(\overline{M-1})$, temos que encontrar os vizinhos $\lambda_v(\bar{s})$ e $\lambda_v(\overline{M-s})$, com $s \neq 1$, que são estabelecidos pela próxima proposição.

Proposição 1.5 *Sejam $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ com $\text{mdc}(a, c) = 1$. Então, Γ_β^α é rotulado por $\mathbb{Z}_M$, $M = |ad - bc|$, e, sendo $d_{\Gamma_\beta^\alpha}$ a métrica em $\mathbb{Z}_M$ que coincide com a distância do grafo Γ_β^α , temos que os quatro vizinhos à distância 1 de $\lambda_v(\bar{0})$ são $\lambda_v(\bar{1})$, $\lambda_v(\overline{M-1})$, $\lambda_v(\overline{M-s})$ e $\lambda_v(\bar{s})$, onde s é o menor inteiro tal que*

$$1 = ma + nc \text{ e } s = mb + nd$$

com $m, n \in \mathbb{Z}$.

Chamamos de s , o “fator soma módulo”. A solução s pode ser obtida a partir de qualquer solução s' do sistema acima via o algoritmo de Euclides.

Demonstração:

A primeira parte da afirmação é dada pela Proposição 1.4. Os vizinhos no grafo a uma distância um de $\bar{0}$ são $\bar{1}$, $\overline{M-1}$, $\bar{s}$ e $\overline{M-s}$ onde $(0, s) \approx (-1, 0)$. Para algum s' tal que $(0, s') \approx (-1, 0)$ obtemos a condição $(1, s') = m(a, b) + n(c, d)$ com $m, n \in \mathbb{Z}$, isto é,

$$\begin{aligned}1 &= ma + nc \\ s' &= mb + nd.\end{aligned}$$

A primeira equação tem sempre uma solução uma vez que $\text{mdc}(a, c) = 1$. Uma solução m, n pode ser determinada por meio do algoritmo de Euclides. Desta forma, podemos obter s' na segunda equação. E pode ser facilmente verificado que todas as soluções s' diferem-se por um múltiplo de M . Como o rótulo λ_v é definido em $\{0, 1, \dots, M-1\}$, estamos interessados na menor solução positiva s . Esta solução é dada por $s = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \{s' - kM\}$. $\square$

Podemos visualizar o grafo Γ_β^α por meio de seu rotulamento cíclico, definindo um diagrama circular para $\mathbb{Z}_M$, onde cada vértice $\bar{i}$ é conectado com os vértices $\overline{i+s}$, $\overline{M-(s-i)}$, $\overline{i+1}$ e $\overline{i-1}$, como podemos observar, considerando o exemplo da FIGURA 6 (onde $s = 5$ e $M = 23$), o vértice $\bar{3}$ está conectado aos vértices

$$\begin{aligned}\overline{i+s} &= \overline{3+5} = \overline{8} \\ \overline{M-(s-i)} &= \overline{23-(5-3)} = \overline{21} \\ \overline{i+1} &= \overline{3+1} = \overline{4} \\ \overline{i-1} &= \overline{3-1} = \overline{2}.\end{aligned}$$

A distância no grafo circular é precisamente a distância em $\mathbb{Z}_M$ induzida por Γ_β^α . Isto é garantido pela homogeneidade do toro plano e suas isometrias induzidas por translações unitárias verticais.

No exemplo da FIGURA 6, temos $s = 5$ (Proposição 1.5) e podemos construir o rotulamento λ_v e o diagrama ilustrado na FIGURA 9, onde os vértices à distância 1 estão ligados por um segmento de reta ou um arco.

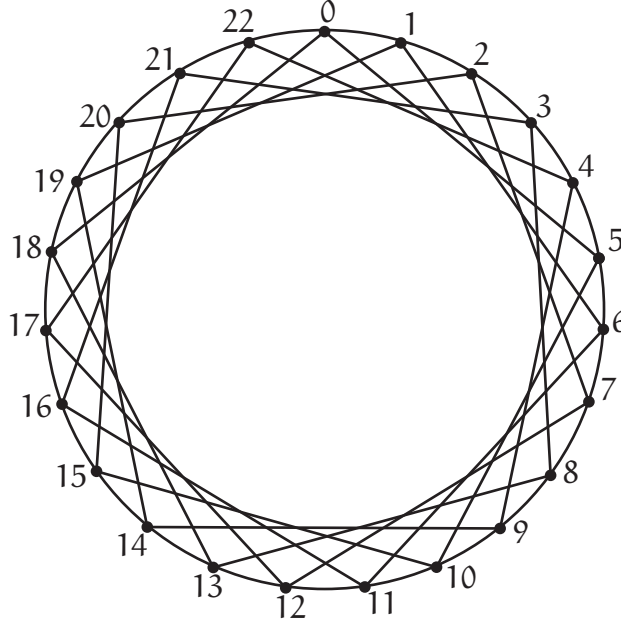


FIGURA 9: Diagrama circular de rótulos para o grafo Γ_β^α , $u = (4, 3)$ e $v = (-5, 2)$.

Na próxima proposição estabelecemos a expressão analítica para $d_{\Gamma_\beta^\alpha}(\overline{m}, \overline{n})$, que é simplesmente deduzida para tornar o grafo circular (com auto-intertsecção) equivalente a Γ_β^α .

Proposição 1.6 *Sejam $\alpha = \{u, v\}$, $u = (a, b)$, $v = (c, d)$ e $\text{mdc}(a, c) = 1$. Então, a métrica em $\mathbb{Z}_M$ que coincide com a distância no grafo Γ_β^α é dada por*

$$\begin{aligned}d_{\Gamma_\beta^\alpha}(\overline{0}, \overline{q}) &= \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \{k + |ks - q|, k + |(M - ks) - q|\} \\ d_{\Gamma_\beta^\alpha}(\overline{p}, \overline{q}) &= d_{\Gamma_\beta^\alpha}(\overline{0}, \overline{q - p}).\end{aligned}$$

Demonstração:

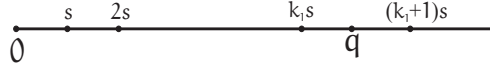
Seja $\overline{q}$ um vértice do grafo. Existem números inteiros positivos k_1 e k_2 tais que

$$k_1 s \leq q < (k_1 + 1)s \text{ e } M - (k_2 + 1)s < q \leq M - k_2 s.$$

Temos que

$$l_1 = \min \{k_1 + (q - k_1 s), (k_1 + 1) + ((k_1 + 1)s - q)\}$$

é o comprimento do menor caminho conectando $\overline{q}$ a $\overline{0}$ no sentido horário (FIGURA 10)

FIGURA 10: Caminho conectando $\bar{0}$ a $\bar{q}$ no sentido horário.

e que

$$l_2 = \min\{(k_2 + 1) + q - (M - (k_2 + 1))s, k_2 + (M - k_2s) - q\}$$

é o comprimento do caminho mais curto no sentido anti-horário (FIGURA 11).

FIGURA 11: Caminho conectando $\bar{0}$ a $\bar{q}$ no sentido anti-horário.

Por isso, temos

$$\begin{aligned} d_{\Gamma_\alpha}(\bar{0}, \bar{q}) &= \min\{l_1, l_2\} \\ &= \min_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+} \{k_1 + |q - k_1s|, (k_1 + 1) + |(k_1 + 1)s - q|, \\ &\quad (k_2 + 1) + |q - (M - (k_2 + 1))s|, k_2 + |(M - k_2s) - q|\} \\ &= \min_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+} \{k_1 + |q - k_1s|, k_2 + |(M - k_2s) - q|\} \\ &= \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \{k + |ks - q|, k + |(M - ks) - q|\}. \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. $\square$

1.6 Códigos Perfeitos

Seja Γ um grafo com vértices no conjunto X e d a distância usual definida sobre Γ , ou seja, a distância entre dois vértices é o número mínimo de arestas de Γ ligando-os.

Consideremos as seguintes definições:

- (i) Um *código* em Γ é um subconjunto não vazio C de X .
- (ii) A *bola* de raio r centrada em x em Γ é o conjunto $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$.
- (iii) O número $\delta(C) = \min\{d(x, y) : x, y \in C \text{ com } x \neq y\}$ é chamado de *distância mínima* de C .
- (iv) O código C é chamado de *código corretor* de e -erros quando $\delta(C) \geq 2e + 1$.
- (v) A *distância* de $x \in X$ a C é definida como sendo $d(x, C) = \min\{d(x, y) : y \in C\}$.
- (vi) A região de Voronoi V_c associada com $c \in C$ é o subconjunto formado pelos elementos de X para os quais c é o ponto mais próximo em C , isto é, $V_c = \{y \in X : d(y, c) = d(y, C)\}$.
- (vii) O número $t(C) = \max\{d(x, C) : x \in X\}$ é chamado *raio de cobertura* de C .

Claramente, o raio de cobertura é o menor número t tal que as bolas de raio t centrado em pontos de C cobrem X . Essas quantidades estão relacionadas pela desigualdade $\delta(C) \leq 2t(C) + 1$; e tem-se a igualdade quando as bolas de raio $t(C)$ em torno dos pontos de C formam uma partição de X . Um código com estas propriedades é chamado de **código perfeito** e dizemos que ele corrige $t(C) - 1$ erros.

Se considerarmos uma bola B de raio k na métrica do grafo associada a uma tesselação regular em $\mathbb{R}^2$, a condição para um código ser perfeito equivale a ter outra tesselação com o polígono de Voronoi cobrindo uma destas bolas (ou seja, a união de todas as regiões de Voronoi em $\mathbb{R}^2$ de vértices em B) como uma região fundamental.

Exemplo 1. Código não perfeito com $\delta(C) = 4$, $t(C) = 2$. O toro T^α é gerado pelos vetores $u = (12, 0)$ e $v = (0, 12)$ e o reticulado Λ_β é gerado pelos vetores $w_1 = (4, 0)$ e $w_2 = (2, 2)$ (FIGURA 12).

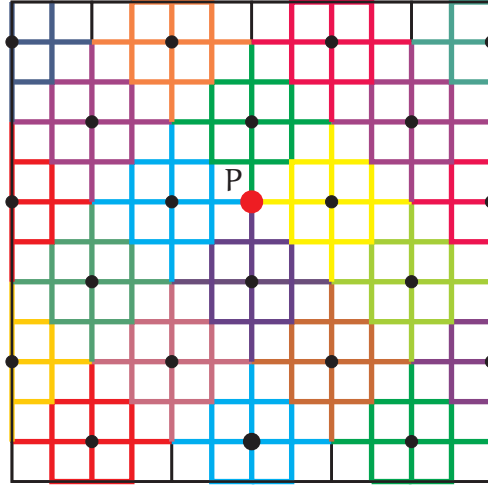


FIGURA 12: Código não perfeito sobre o grafo.

Exemplo 2. Na métrica do grafo dado pelo reticulado plano $\mathbb{Z}^2$, uma bola de raio $k = 3$ tem 25 vértices. O polígono de Voronoi que cobre esta bola é a região fundamental de uma tesselação pelo reticulado Λ_β , $\beta = \{w_1, w_2\}$, onde $w_1 = (4, 3)$ e $w_2 = (-3, 4)$. Esta tesselação induz uma outra no toro plano T^α gerado por $\alpha = \{u, v\}$, $u = (25, 0)$ e $v = (0, 25)$. A translação dada por w_1 induz (nos termos de uma ação cíclica) um código perfeito corretor de 3-erros $C = \{j(4, 3) : j = 0, 1, \dots, 24\}$ de ordem 25 no espaço de Lee $\mathbb{Z}_{25}^2$ (FIGURA 13).

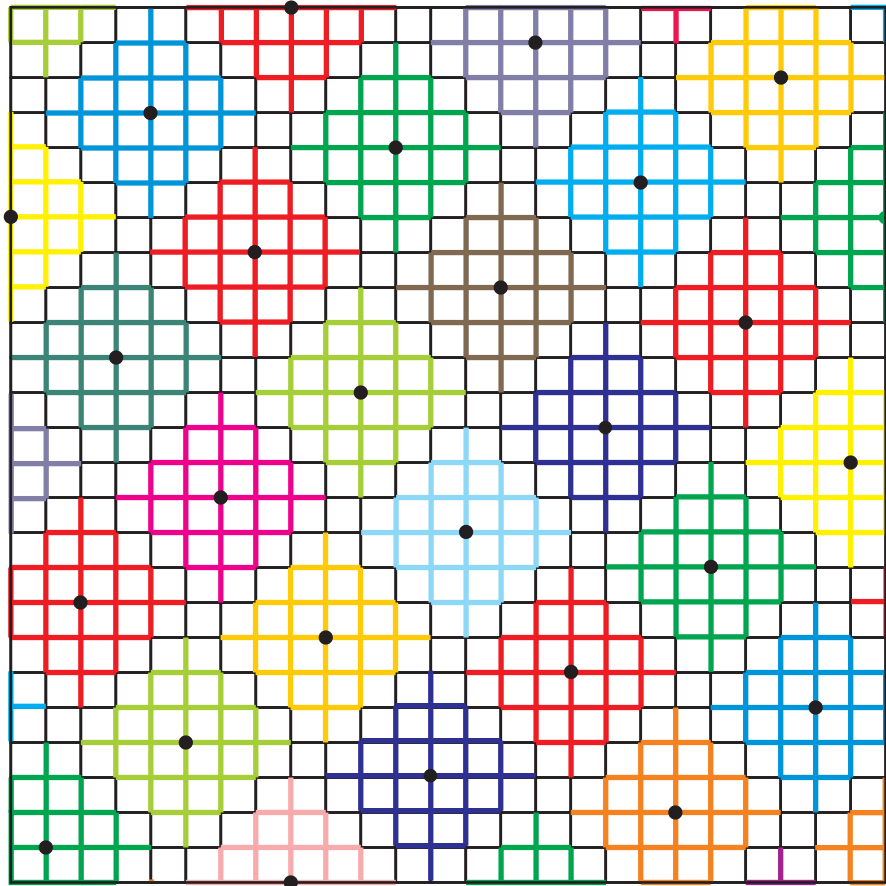


FIGURA 13: Tesselação que induz código perfeito sobre grafo.

Este último exemplo vem de um resultado mais geral que pode ser entendido como uma consequência da Proposição 1.1 cuja demonstração pode ser encontrada em [2].

Proposição 1.7 (*Uma receita para códigos perfeitos*) Seja Γ um grafo associado a uma tesselação regular em $\mathbb{R}^2$ por um reticulado Λ gerado por uma base de $\mathbb{R}^2$ e P o polígono de

Voronoi que cobre uma bola B de raio k na métrica do grafo. Se existe uma tesselação de $\mathbb{R}^2$ por P através de um reticulado Λ' e se Λ'' é um reticulado gerado por uma base de $\mathbb{R}^2$, $\Lambda'' \subset \Lambda' \subset \Lambda$, então Λ' induz um código perfeito corretor de k -erros no toro plano $\mathbb{R}^2/\Lambda''$ com rotulamento pelo grupo Λ'/Λ'' .

Como corolário, vamos considerar $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ e a tesselação associada de $\mathbb{R}^2$ por quadrados unitários.

Corolário 1.1 *Seja Γ um grafo associado a tesselação de $\mathbb{R}^2$ por $\Lambda = \mathbb{Z}^2$. Seja $w_1 = (k+1, k)$, $w_2 = (-k, k+1)$ (ou $w_1 = (k, k+1)$, $w_2 = (-k-1, k)$), $k \in \mathbb{N}$, e seja Λ_α , $\alpha = \{u, v\}$, o reticulado gerado por $u = a_1 w_1 + b_1 w_2$, $v = c_1 w_1 + d_1 w_2$, $a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{Z}$. Então, se $\text{mdc}(b_1, d_1) = 1$ (ou $\text{mdc}(a_1, c_1) = 1$), $C = \{jw_1 : j = 0, 1, \dots, M-1\}$ é um código k -perfeito de ordem*

$$N = \left| \det \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix} \right|.$$

Demonstração:

Uma bola B de raio k em $\mathbb{Z}^2$ com a métrica do grafo é um quadrado rotacionado com $1 + 4(1 + \dots + k) = (k+1)^2 + k^2$ vértices. De fato, temos

$$\begin{aligned} 1 + 4(1 + \dots + k) &= 1 + 4 \frac{k(k+1)}{2} \\ &= 1 + 2k(k+1) \\ &= 1 + 2k^2 + 2k \\ &= 1 + 2k + k^2 + k^2 \\ &= (k+1)^2 + k^2 \end{aligned}$$

O reticulado Λ' gerado por w_1, w_2 dá origem a uma tesselação plana com região fundamental P , o polígono de Voronoi que cobre B , que é um quadrado irregular. Para

$$N = \left| \det \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix} \right|.$$

Consideremos a equação $\bar{N}w_1 = xu + yv$, que é equivalente a

$$\begin{aligned} \bar{N}w_1 &= x(a_1 w_1 + b_1 w_2) + y(c_1 w_1 + d_1 w_2) \\ &= (xa_1 + yc_1)w_1 + (xb_1 + yd_1)w_2 \\ &\iff \frac{xa_1 + yc_1}{\bar{N}} = 1 \text{ e } \frac{xb_1 + yd_1}{\bar{N}} = 0 \\ &\iff x = d_1 \frac{\bar{N}}{N} \text{ e } y = -b_1 \frac{\bar{N}}{N} \end{aligned}$$

Assim, se $\text{mdc}(b_1, d_1) = 1$ com $x, y \in \mathbb{Z} \iff \bar{N} = mN$ para algum $m \in \mathbb{Z}$, pois supondo que

$$N = d_1 X \implies d_1 X = a_1 d_1 - c_1 b_1 \implies X = a_1 - c_1 \frac{b_1}{d_1}.$$

Mas X é um número inteiro e $\text{mdc}(b_1, d_1) = 1$, logo, $\bar{N} | N$. Portanto, $\bar{N} = M$ é o menor inteiro positivo tal que $\bar{N}w_1 = xu + yv$ para $x, y \in \mathbb{Z}$. $\square$

Sob as condições do corolário acima, exceto que $\text{mdc}(b_1, d_1) = 1 \neq 1$, vamos ter um código perfeito em Γ_β^α com um grupo não cíclico de rotulamento $\mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_M$.

Exemplo 3 (Códigos Perfeitos em Espaços de Lee) Se no corolário anterior considerarmos $\mathbf{a}_1 = \mathbf{d}_1 = \mathbf{k} + 1$, e $\mathbf{b}_1 = -\mathbf{c}_1 = -\mathbf{k}$, obtemos $\mathbf{u} = ((\mathbf{k} + 1)^2 + \mathbf{k}^2, 0)$ e $\mathbf{v} = (0, (\mathbf{k} + 1)^2 + \mathbf{k}^2)$. Então $C = \{j(\mathbf{k} + 1, \mathbf{k}) : j = 0, 1, \dots, (\mathbf{k} + 1)^2 + \mathbf{k}^2\}$ é um código $\mathbf{k}$ -perfeito no espaço de Lee $\mathbb{Z}_{(\mathbf{k}+1)^2+\mathbf{k}^2}^2$. Temos também códigos $\mathbf{k}$ -perfeitos em $\mathbb{Z}_{l((\mathbf{k}+1)^2+\mathbf{k}^2)}^2$ rotulados por $\mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_{(\mathbf{k}+1)^2+\mathbf{k}^2}$.

Exemplo 4 (a) Para $\mathbf{u} = (4, 3)$, $\mathbf{v} = (-3, 4)$ e considerando $\mathbf{w}_1 = (\mathbf{k}, \mathbf{k} + 1)$ e $\mathbf{w}_2 = (-\mathbf{k} - 1, \mathbf{k})$, com $\mathbf{k} = 1$ temos que $\mathbf{w}_1 = (1, 2)$ e $\mathbf{w}_2 = (-2, 1)$. Escrevendo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como combinação linear de $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$

$$\begin{aligned}(4, 3) &= 2(1, 2) - 1(-2, 1) \\ (-3, 4) &= 1(1, 2) + 2(-2, 1)\end{aligned}$$

Assim, aplicando o Corolário 1.1, temos que $N = \left| \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right| = 5$.

(b) Para $\mathbf{u} = (7, 6)$, $\mathbf{v} = (-6, 7)$ e considerando $\mathbf{w}_1 = (\mathbf{k} + 1, \mathbf{k})$ e $\mathbf{w}_2 = (-\mathbf{k}, \mathbf{k} + 1)$, com $\mathbf{k} = 1$ temos que $\mathbf{w}_1 = (2, 1)$ e $\mathbf{w}_2 = (-1, 2)$. Escrevendo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como combinação linear de $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$

$$\begin{aligned}(7, 6) &= 4(2, 1) + 1(-1, 2) \\ (-6, 7) &= -1(2, 1) + 4(-1, 2)\end{aligned}$$

Novamente, pelo Corolário 1.1, temos que $N = \left| \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right| = 17$.

(c) Para $\mathbf{u} = (7, 24)$, $\mathbf{v} = (-26, -7)$ e considerando $\mathbf{w}_1 = (\mathbf{k} + 1, \mathbf{k})$ e $\mathbf{w}_2 = (-\mathbf{k}, \mathbf{k} + 1)$, com $\mathbf{k} = 3$ temos que $\mathbf{w}_1 = (4, 3)$ e $\mathbf{w}_2 = (-3, 4)$. Escrevendo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como combinação linear de $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$

$$\begin{aligned}(7, 24) &= 4(4, 3) + 3(-3, 4) \\ (-26, -7) &= -5(4, 3) + 2(-3, 4)\end{aligned}$$

Novamente, pelo Corolário 1.1, temos que $N = \left| \det \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right| = 23$

Na tabela abaixo, organizamos os dados dos itens (a), (b) e (c)

Γ_{α}^{β}	Código Perfeito	Capacidade de correção de erros	Ordem
$\mathbf{u} = (4, 3), \mathbf{v} = (-3, 4), M = 25$	$\langle (1, 2) \rangle$	$\mathbf{k} = 1$	$N = 5$
$\mathbf{u} = (7, 6), \mathbf{v} = (-6, 7), M = 85$	$\langle (2, 1) \rangle$	$\mathbf{k} = 1$	$N = 17$
$\mathbf{u} = (7, 24), \mathbf{v} = (-26, -7), M = 575$	$\langle (-4, 3) \rangle$	$\mathbf{k} = 3$	$N = 23$

Capítulo 2

Alguns Tópicos Importantes de Geometria Hiperbólica

Com o objetivo de estudar reticulados em toros de gênero $g \geq 2$, que são modelados como espaços quocientes do plano hiperbólico por um grupo discreto de isometrias, vamos introduzir neste capítulo alguns resultados de geometria hiperbólica e teoria de grupos fuchsianos. Maiores detalhes sobre esse capítulo podem ser encontrados principalmente em [7], além de [4], [5] e [9].

2.1 Grupos Fuchsianos no Modelo do Semiplano Superior de Poincaré

Consideremos o grupo linear especial

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } \det M = 1 \right\}$$

no qual a operação considerada é a multiplicação usual de matrizes.

Consideremos o modelo do semiplano superior de Poincaré para a geometria hiperbólica contido no plano complexo, ou seja,

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

Logo, a métrica riemanniana considerada em H é dada por $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$, que corresponde aos coeficientes $E(x, y) = \frac{1}{y^2}$, $F(x, y) = 0$ e $G(x, y) = \frac{1}{y^2}$ na Primeira Forma Quadrática de H .

Consideremos o conjunto das transformações fracionais lineares (ou transformações de Möbius)

$$\mathcal{M} = \left\{ f : H \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ tal que } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1 \right\},$$

munido da operação de composição usual de aplicações (que está bem definida, pois $f(H) = H$). Também é possível mostrar facilmente que $f : H \rightarrow H$ é bijeção.

Observando que, dada $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ em $\mathcal{M}$ podemos correspondê-la à matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, verificamos facilmente que a composição de duas transformações de $\mathcal{M}$ corresponde ao produto usual de duas matrizes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ e a transformação inversa de f corresponde à matriz inversa de M . De fato, se $f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ e $f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$, então a composta

$$f_1(f_2(z)) = \frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z + a_1 b_2 + b_1 d_2}{(c_1 a_2 + c_2 d_1) z + b_2 c_1 + d_1 d_2}$$

corresponde ao produto $M_1 M_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$, que está em $SL_2(\mathbb{R})$ pois $\det M_1 M_2 = \det M_1 \det M_2 = 1.1 = 1$.

Também, calculando $f^{-1}(z)$, temos

$$\begin{aligned} z &= f(f^{-1}(z)) \Rightarrow \\ z &= \frac{af^{-1}(z) + b}{cf^{-1}(z) + d} \Rightarrow \\ af^{-1}(z) + b &= zcf^{-1}(z) + dz \Rightarrow \\ af^{-1}(z) - zcf^{-1}(z) &= dz - b \Rightarrow \\ f^{-1}(z)(-cz + a) &= dz - b \Rightarrow \\ f^{-1}(z) &= \frac{dz - b}{-cz + a}, \end{aligned}$$

que corresponde à matriz M^{-1} que, também, está em $SL_2(\mathbb{R})$ pois $\det M^{-1} = \frac{1}{\det M} = \frac{1}{1} = 1$.

Na verdade, $\mathcal{M}$ munido da operação de composição possui a estrutura de grupo, cujas propriedades são facilmente checadas por meio da associação que fizemos com $SL_2(\mathbb{R})$. Da fato:

(1) A composição é associativa: sejam $f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$, $f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$, $f_3(z) = \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3}$. Mostrar que $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$ equivale a mostrar que

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix},$$

o que sabemos ser verdade por propriedades de matrizes.

(2) $f(z) = z$ é o elemento neutro da composição, pois dada $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ temos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(3) Todo elemento do conjunto de Möbius é simetrizável: seja $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad-bc = 1$. A matriz, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ possui inversa $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ e portanto, $f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$.

Embora $SL_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{M}$ possuam a estrutura de grupo e cada elemento de $\mathcal{M}$ está associado a um elemento de $SL_2(\mathbb{R})$, não é verdade que esses grupos são isomorfos. De fato, cada transformação f de $\mathcal{M}$ pode ser representada por um par de matrizes $\pm M \in SL_2(\mathbb{R})$.

Para estabelecer um isomorfismo com $\mathcal{M}$, consideremos o grupo quociente $SL_2(\mathbb{R})/\{\pm Id_2\}$. A relação de equivalência $\sim$ considerada em $SL_2(\mathbb{R})$ é tal que $M \sim N \iff M = N$ ou $M = -N$.

Temos que $\sim$ é, de fato, uma relação de equivalência:

- é reflexiva pois $M = M$ para qualquer $M \in SL_2(\mathbb{R})$;
- é simétrica pois se $M \sim N$, então $M = N$ ou $M = -N \implies N = M$ ou $N = -M \implies N \sim M$;
- é transitiva pois se $M \sim N$ e $N \sim P$ então

$$\left\{ \begin{array}{l} M = N \text{ ou } M = -N \\ \text{e} \\ N = P \text{ ou } N = -P \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} M = P \text{ ou } M = -P \\ \text{e} \\ M = -P \text{ ou } M = P \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} M = P \\ \text{ou} \\ M = -P \end{array} \right\} \implies M \sim P.$$

Dessa forma, $SL_2(\mathbb{R})/\{\pm Id_2\} = \{\overline{M} = M\{\pm Id_2\} : M \in SL_2(\mathbb{R})\}$, sendo $\overline{M} = M\{\pm Id_2\}$ as classes de equivalência (classes laterais à esquerda) que $\sim$ determina em $SL_2(\mathbb{R})$. A operação

que torna $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}_2\}$ um grupo é tal que $\overline{M.N} = \overline{MN}$. Observemos que esta operação está, de fato, bem definida pois independe do representante escolhido na classe de equivalência, ou seja, $\{\pm \mathrm{Id}_2\}$ é subgrupo normal de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ pois $M^{-1} \mathrm{Id}_2 M, M^{-1} (-\mathrm{Id}_2) M \in \{\pm \mathrm{Id}_2\}$ para qualquer $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Finalmente, temos o isomorfismo entre $\mathcal{M}$ e $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}_2\}$ dado por

$$\begin{aligned} \xi: \quad \mathcal{M} &\longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}_2\} . \\ f(z) = \frac{az+b}{cz+d} &\longmapsto \phi(f) = \overline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

De fato, se $f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ e $f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$, então

$$\xi(f_1 \circ f_2) = \overline{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}} \cdot \overline{\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}} = \phi(f_1)\phi(f_2).$$

Além disso, ξ é injetiva, pois se

$$\begin{aligned} \xi(f_1) = \xi(f_2) &\implies \\ \overline{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}} &= \overline{\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}} \implies \\ \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, -\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \right\} &= \left\{ \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, -\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right\} \implies \\ \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} &\text{ ou } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 & -b_2 \\ -c_2 & -d_2 \end{bmatrix} \implies \\ f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} = f_2(z) &\text{ ou } f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} = \frac{-a_2 z - b_2}{-c_2 z - d_2} = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} = f_2(z) \implies \\ f_1 &= f_2. \end{aligned}$$

E, ξ é sobrejetiva, pois dada $\overline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}_2\}$, então $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{-az-b}{-cz-d} \in \mathcal{M}$ e $\xi(f) = \overline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$.

É comum utilizar a notação $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ no lugar de $\mathcal{M}$ e chamá-lo de *grupo linear especial projetivo*.

Notemos que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ contém todas as transformações fracionais lineares da forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\Delta = ad - bc > 0$.

De fato, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{\sqrt{\Delta}}z + \frac{b}{\sqrt{\Delta}}}{\frac{c}{\sqrt{\Delta}}z + \frac{d}{\sqrt{\Delta}}}$ e $\det \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{\Delta}} & \frac{b}{\sqrt{\Delta}} \\ \frac{c}{\sqrt{\Delta}} & \frac{d}{\sqrt{\Delta}} \end{bmatrix} = 1$. Em particular, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ contém todas as transformações da forma $f(z) = az + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, pois f está associada à matriz $\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a}} & \frac{b}{\sqrt{a}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. O mesmo ocorre com $f(z) = -\frac{1}{z}$ que está associada à matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Seja $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ matriz associada a $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Definimos a norma de f por

$$\|f\| = \|M\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Seja $N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ associada a $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Com a distância induzida $d(f, g) = \|M - N\|$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ é um *grupo topológico* e a topologia é a induzida pela norma definida acima (é a topologia do $\mathbb{R}^4$). Um subgrupo G de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ é discreto quando a topologia induzida de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sobre G é discreta. Portanto, um subgrupo discreto G de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ corresponde a um conjunto discreto de pontos de $\mathbb{R}^4$. Um subgrupo discreto G de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ é chamado de *fuchsiano*.

Os grupos fuchsianos desempenham papel importante na geometria hiperbólica, pois serão eles que irão gerar os reticulados de pontos hiperbólicos que iremos considerar nesse trabalho. Além disso, o resultado mais importante dessa seção é o fato de que transformações de Möbius são isometrias no modelo do semiplano de Poincaré. Esse é o conteúdo da proposição abaixo, cuja demonstração encontra-se em [7].

Teorema 2.1 *Seja $\mathrm{Iso}(H)$ o grupo de simetrias, munido da operação de composição, do modelo H do semiplano superior de Poincaré para a Geometria Hiperbólica com a métrica riemanniana $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Então, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ é subgrupo normal de índice 2 de $\mathrm{Iso}(H)$, composto por todas as isometrias próprias (que preservam orientação de ângulos) de H .*

Observação: é possível demonstrar que $\mathrm{Iso}(H)$ é o grupo gerado por $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ e $g(z) = -\bar{z}$.

2.2 Grupos Fuchsianos no Modelo do Disco Unitário de Poincaré

O estudo de grupos fuchsianos no modelo do disco de Poincaré é análogo ao que fizemos no modelo do semiplano superior de Poincaré na seção anterior. Faremos apenas um breve resumo.

Consideremos o modelo do disco unitário de Poincaré para a geometria hiperbólica contido no plano complexo, ou seja,

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Logo, a métrica riemanniana considerada em D é dada por $ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$, que corresponde aos coeficientes $E(x, y) = \frac{4}{1 - x^2 - y^2}$, $F(x, y) = 0$ e $G(x, y) = \frac{4}{1 - x^2 - y^2}$ na Primeira Forma Quadrática de D .

Consideremos grupo linear especial sobre $\mathbb{C}$, denotado $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, composto pelas matrizes complexas $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $\det A = ad - bc = 1$, no qual a operação considerada é a multiplicação usual de matrizes. Para que uma transformação de Möbius $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, tenha imagem em D , é necessário que $b = \bar{c}$ e $d = \bar{a}$ e, assim, temos

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow D \\ z &\longmapsto \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \end{aligned} \tag{2.1}$$

com $a\bar{a} - c\bar{c} = 1$.

O conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \right\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

é na verdade, um subgrupo de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ quando consideramos a operação de composição herdada de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Como no caso do semiplano, o conjunto de transformações de Möbius acima munido da operação de composição usual forma um grupo de tal modo que a composição de duas transformações corresponde ao produto de duas matrizes de $\mathcal{A}$ e a inversa corresponde à matriz inversa. Além disso, cada transformação f da forma acima pode ser representada por um par

de matrizes $\pm A \in \mathcal{A}$. Então, o grupo de todas as transformações f definidas em 2.1, chamado de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$, é isomorfo ao grupo quociente $\mathcal{A}/\{\pm \text{Id}_2\}$, sendo Id_2 a matriz identidade de ordem 2 e escrevemos $\text{PSL}_2(\mathbb{C}) \approx \mathcal{A}/\{\pm \text{Id}_2\}$.

Seja $A = \begin{bmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$ matriz associada a $f(z) = \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}} \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$. Definimos

$$\|f\| = \|A\| = \sqrt{|a|^2 + |\bar{c}|^2 + |c|^2 + |\bar{a}|^2} = \sqrt{2|a|^2 + 2|c|^2}.$$

Seja $N \in \mathcal{A}$ associada a $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$. Com a distância induzida $d(f, g) = \|M - N\|$, $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ é um *grupo topológico* e a topologia é a induzida pela norma definida acima. Na verdade, é a mesma topologia do $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Um subgrupo G de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ é discreto quando a topologia induzida de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ sobre G é discreta. Também chamamos um subgrupo discreto de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ de *fuchsiano*.

À semelhança do semiplano temos o seguinte, e importante, teorema, cuja demonstração também pode ser encontrada em [5].

Teorema 2.2 *Seja $\text{Iso}(D)$ o grupo de simetrias, munido da operação de composição, do modelo D do disco unitário de Poincaré para a Geometria Hiperbólica com a métrica riemanniana $ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)}$. Então, $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ é subgrupo normal de índice 2 de $\text{Iso}(D)$, composto por todas as isometrias próprias (que preservam orientação de ângulos) de D .*

Observação: é possível demonstrar que $\text{Iso}(D)$ é o grupo gerado por $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ e $g(z) = \bar{z}$.

Por fim, um importante teorema, que estabelece uma isometria entre os modelos de Poincaré é dado abaixo, e sua demonstração pode ser encontrada em [7].

Teorema 2.3 *Sejam H e D os modelos de Poincaré para a geometria hiperbólica munidos de suas respectivas métricas riemannianas. Então,*

$$\begin{aligned} f: H &\longrightarrow D \\ z &\longmapsto \frac{zi+1}{z+i} \end{aligned}$$

é isometria entre os modelos H e D .

Por fim, outro fato curioso interessante de ressaltar em nossos estudos é que os dois modelos de Poincaré são conformes, ou seja, a noção de medida de ângulos nesses modelos coincide com a noção euclidiana. Isto se deve ao fato de que o segundo coeficiente, F , nas Primeiras Formas Quadráticas são nulos em ambos os modelos.

2.3 Geodésicas, Distâncias e Trigonometria nos Modelos de Poincaré

Nosso objetivo nesta seção é apresentar os principais teoremas relacionados com o formato euclidiano das geodésicas (retas hiperbólicas) nos modelos de Poincaré, bem como apresentar expressões analíticas para o cálculo de distâncias (realizadas por segmentos hiperbólicos) nesses modelos. Também apresentamos as quatro principais fórmulas trigonométricas hiperbólicas para cálculos envolvendo comprimento de lados e ângulos em triângulos hiperbólicos.

Como esta seção será utilizada apenas como ferramenta matemática para o desenvolvimento dos próximos capítulos, não faremos as demonstrações dos diversos teoremas aqui apresentados. Essa demonstrações podem ser encontradas nas referências [7], para as geodésicas e distâncias e [5] para a trigonometria.

Consideremos os modelos de Poincaré de acordo com as seções anteriores.

Teorema 2.4 *As geodésicas em H são as semicircunferências e as semirretas euclidianas ortogonais ao eixo real $\mathbb{R}$, bordo de H .*

Observemos que, da geometria euclidiana, dados dois pontos em H , existe uma única semicircunferência ou semirreta em H , ortogonal ao bordo de H , passando pelos pontos dados. Como era de se esperar, esse fato e o teorema acima estão de acordo com o axioma da geometria hiperbólica que afirma que por dois pontos quaisquer passa uma única geodésica.

Com o teorema acima e a isometria $f(z) = \frac{zi+1}{z+i}$ de H em D é fácil deduzir o formato euclidiano das geodésicas em D , que é dado pelo teorema abaixo.

Teorema 2.5 *No modelo D as geodésicas são arcos de circunferência e diâmetros euclidianos ortogonais à circunferência unitária que é bordo de D .*

Observação análoga à que fizemos acima, sobre o axioma que diz que dois pontos determinam uma única reta, vale para o modelo do disco.

Para a introdução de uma fórmula para a distância hiperbólica, é útil, quando se trabalha com o modelo H , estender o plano complexo $\mathbb{C}$ com a introdução do símbolo ∞ para representar o infinito, ou seja, considerar $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. A *razão-cruzada* de pontos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ é definida pela fórmula

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)}.$$

Além disso, também é útil considerar a compactificação de H , ou seja, $\overline{H} = H \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Os pontos de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ são chamados de *pontos ideais* de H , enquanto que os pontos de H são chamados de *pontos ordinários*. Também é útil estender as transformações de Möbius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ a $\overline{H}$ definindo:

- (i) $T(\infty) = \infty$, no caso $c = 0$;
- (ii) $T(\infty) = \frac{a}{c}$, no caso $c \neq 0$;
- (iii) $T(-\frac{d}{c}) = \infty$, no caso $c \neq 0$;
- (iv) $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ nos demais pontos de $\mathbb{R}$.

Com essas definições, temos a seguinte proposição, que é um espécie de lema para o teorema que estabelece a fórmula da distância.

Proposição 2.1 *Sejam $z, w \in H$, $z \neq w$, e seja a geodésica unindo z e w que tem pontos finais z^*, w^* em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, escolhidos de forma que z fique entre z^* e w . Então, a distância hiperbólica ρ entre z e w é dada por $\rho(z, w) = \ln(w, z^*; z, w^*)$.*

A FIGURA 14 ilustra a posição dos pontos considerados na proposição acima

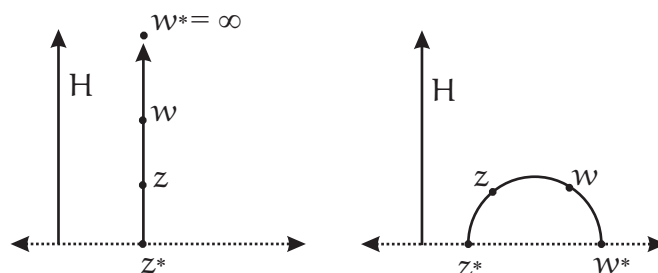


FIGURA 14: Razão cruzada.

Abaixo seguem as fórmulas explícitas para a distância hiperbólica em H , sendo ρ a distância nesse modelo e $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Teorema 2.6 Para $z, w \in \mathbb{H}$:

- (i) $\rho(z, w) = \ln \left(\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|} \right)$;
- (ii) $\cosh(\rho(z, w)) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}$;
- (iii) $\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z, w)\right) = \frac{|z-w|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}}$;
- (iv) $\cosh\left(\frac{1}{2}\rho(z, w)\right) = \frac{|z-\bar{w}|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}}$;
- (v) $\tanh\left(\frac{1}{2}\rho(z, w)\right) = \left| \frac{z-w}{z-\bar{w}} \right|$.

Mais uma vez, com o auxílio da isometria $f(z) = \frac{zi+1}{z+i}$ de $\mathbb{H}$ em $\mathbb{D}$ é fácil deduzir, a partir do teorema acima, as fórmulas da distância hiperbólica ρ^* no modelo $\mathbb{D}$. Este é o conteúdo do seguinte teorema.

Teorema 2.7 Para $z, w \in \mathbb{D}$

- (i) $\rho^*(z, w) = \ln \left(\frac{|1-z\bar{w}|+|z-w|}{|1-z\bar{w}|-|z-w|} \right)$;
- (ii) $\cosh^2\left(\frac{1}{2}\rho^*(z, w)\right) = \frac{|1-z\bar{w}|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}$;
- (iii) $\sinh^2\left(\frac{1}{2}\rho^*(z, w)\right) = \frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}$;
- (iv) $\tanh\left(\frac{1}{2}\rho^*(z, w)\right) = \left| \frac{z-w}{1-z\bar{w}} \right|$.

Os próximos teoremas são de trigonometria hiperbólica e, o fato mais interessante envolvendo-os é que, por incrível que pareça, eles não dependem do modelo escolhido para modelar a geometria hiperbólica plana. Este fato se deve a uma característica muito peculiar da geometria hiperbólica, ausente na geometria euclidiana, que é a existência de uma unidade de medida de comprimento universal hiperbólica. Sendo essa unidade uma das constantes que surgem de modo natural no estudo abstrato da geometria hiperbólica, ela não depende, evidentemente, do modelo escolhido para as construções geométricas.

Teorema 2.8 (Teorema de Pitágoras Hiperbólico) *Em um triângulo retângulo hiperbólico de hipotenusa medindo c e catetos medindo a e b vale*

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b).$$

Teorema 2.9 (Primeira Lei dos Cossenos) *Em um triângulo hiperbólico com lados medindo a , b e c e, sendo α a medida do ângulo interno oposto ao lado de medida a , então vale*

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \cos(\alpha).$$

Quanto estamos trabalhando nos modelos de Poincaré, a medida dos ângulos são euclidianas, pois trata-se de modelos conformes.

Teorema 2.10 (Lei dos Senos) *Em um triângulo hiperbólico com lados medindo a , b e c e, sendo α , β e γ a medida dos ângulos internos opostos aos lados de medida a , b e c , respectivamente, então vale*

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}.$$

Por fim, uma segunda Lei dos Cossenos, que não possui fórmula análoga na Geometria Euclidiana.

Teorema 2.11 (Segunda Lei dos Cossenos) *Em um triângulo hiperbólico com lados medindo a , b e c e, sendo α , β e γ a medida dos ângulos internos opostos aos lados de medida a , b e c , respectivamente, então vale*

$$\cosh (c) = \frac{\cos (\alpha) \cos (\beta) + \cos (\gamma)}{\operatorname{sen} (\alpha) \operatorname{sen} (\beta)}.$$

Observemos que esta segunda Lei dos Cossenos segue do fato de que na Geometria Hiperbólica não existe semelhança, ou seja, dados três valores de ângulos internos de um triângulo hiperbólico (portanto, com soma menor do que dois retos), os comprimentos dos lados do triângulo ficam univocamente determinados.

Capítulo 3

Reticulados Geometricamente Uniformes em Espaços Quociente

Neste capítulo, vamos introduzir um reticulado que será objeto de nossos estudos, bem como o espaço no qual ele está inserido: o bitoro, que é um toro de gênero 2 obtido por quociente do plano hiperbólico por grupos fuchsianos. Este capítulo é baseado na referencia [7].

Começemos com o conceito de reticulados geometricamente uniformes.

3.1 Reticulados Geometricamente Uniformes

Vamos estender o conceito de reticulado definido no primeiro capítulo para espaços mais gerais.

Sejam $\mathbb{E}$ um espaço n -dimensional com curvatura gaussiana constante, $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}$ um conjunto finito de pontos e J um grupo discreto de isometrias de $\mathbb{E}$. À órbita $R = J\mathcal{P} = \{h(P) : h \in J \text{ e } P \in \mathcal{P}\}$ de $\mathcal{P}$ por J em $\mathbb{E}$ chamaremos de *reticulado* em $\mathbb{E}$.

Um reticulado R em $\mathbb{E}$ é dito *geometricamente uniforme* quando o grupo de simetrias G de R é transitivo, ou seja, dados dois pontos P e Q de R , existe uma simetria $g \in G$ tal que $g(P) = Q$.

Observemos que se $\mathcal{P}$ for um conjunto unitário, então R será necessariamente, geometricamente uniforme, pois nesse caso, J é um subgrupo do grupo de simetrias G , como podemos observar no exemplo seguinte.

Exemplo 1. Seja $\mathcal{P} = \{P\}$ e $J = \langle \rho_{\frac{\pi}{2}} \rangle$, sendo $\rho_{\frac{\pi}{2}}$ rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos em torno da origem. Então, temos $J = \{Id, \rho_{\frac{\pi}{2}}, \rho_{\pi}, \rho_{\frac{3\pi}{2}}\}$ e $G = \{Id, \rho_{\frac{\pi}{2}}, \rho_{\pi}, \rho_{\frac{3\pi}{2}}, R_1, R_2, R_3, R_4\}$, sendo R_i , $i = 1, \dots, 4$, reflexões em torno dos eixos coordenados e bissetrizes dos quadrantes. Logo, $R = \{P, P_1, P_2, P_3\}$ é geometricamente uniforme (FIGURA 15).

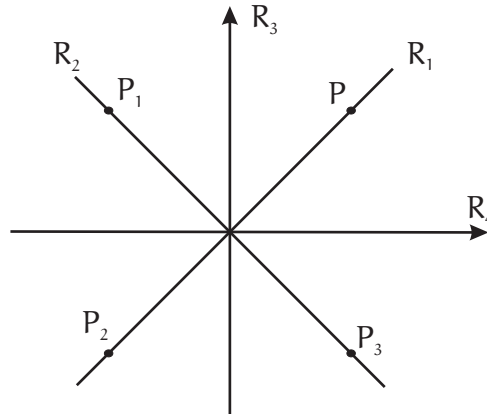


FIGURA 15: Reticulado geometricamente uniforme gerado a partir de $\mathcal{P} = \{P\}$ por $J = \langle \rho_{\frac{\pi}{2}} \rangle$.

Os reticulados no espaço $\mathbb{R}^n$ obtidos a partir da origem pela ação de um grupo de translações por n vetores linearmente independentes são os reticulados Λ_α tratados no Capítulo 1. Conforme observado acima, esses reticulados (que têm uma quantidade infinita de pontos) são geometricamente uniformes. Entretanto, subconjuntos finitos de tais reticulados podem não ser geometricamente uniformes. Por exemplo, se $\mathcal{P} = \{(1,0), (2,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ e $J = \langle \rho_{\frac{\pi}{4}} \rangle$, sendo $\rho_{\frac{\pi}{4}}$ rotação de $\frac{\pi}{4}$ em torno da origem, o grupo G de simetrias de $\mathcal{P}$ não é transitivo, pois considerando os pontos P e Q , conforme FIGURA 16 abaixo, não existe simetria g de $R = J\mathcal{P}$ tal que $P = g(Q)$.

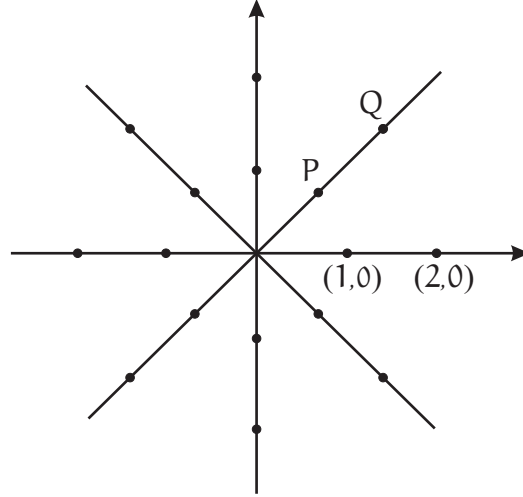


FIGURA 16: Reticulado não geometricamente uniforme gerado a partir de $\mathcal{P} = \{(1,0), (2,0)\}$ por $J = \langle \rho_{\frac{\pi}{4}} \rangle$.

Outro exemplo importante de reticulado que não é geometricamente uniforme é dado no Exemplo 2 abaixo.

Exemplo 2. Consideremos um reticulado R de 16 pontos em forma de quadrado 4×4 no plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Em Teoria da Informação e Codificação, tal reticulado é conhecido como **16-QAM** (quadrature amplitude modulation) e é gerado pela órbita de $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_6\}$ (FIGURA 17) pelo grupo de simetrias $J = \langle R_1, R_2 \rangle$, gerado pelas reflexões R_1 pela reta que passa por P_1 e P_6 e R_2 pela mediatriz do segmento P_5P_9 . Esse reticulado não é geometricamente uniforme. De fato, o grupo de simetrias J é composto pelos elementos Id , R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , $\rho_{\frac{\pi}{2}}$, ρ_{π} , $\rho_{\frac{3\pi}{2}}$, sendo R_i reflexões e ρ_θ rotações de giro θ e centro O . Observemos que translações não podem fazer parte de J pois elas não fixam o reticulado, bem como qualquer outra isometria que não as listadas no grupo J . Assim, fixados os pontos P_1 e P_2 , não temos uma simetria σ de R tal que $\sigma(P_1) = P_2$, o que permite concluir a afirmação.

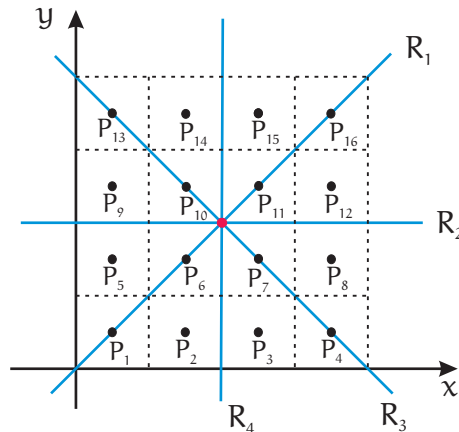


FIGURA 17: Reticulado 16-QAM.

Existem reticulados de pontos no plano euclidiano bastante utilizados em modulação de sinais e códigos corretores de erros em canais de transmissão ruidosos que não são geometricamente uniformes, como o do Exemplo 2 acima, mas possuem estrutura interessante do ponto de vista de codificação. Para “torná-los” geometricamente uniformes, fazemos uso de espaços quociente, à semelhança do que fizemos no Capítulo 1.

Sejam $\mathbb{E}$ um espaço n -dimensional com curvatura gaussiana constante, J um grupo discreto de isometrias de $\mathbb{E}$ e a relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{E}$ definida por

$$P_1 \sim P_2 \iff P_2 = h(P_1), h \in J.$$

Denotamos a classe de equivalência de um ponto P por $\bar{P}$. Ao conjunto

$$E = \mathbb{E}/J = \{\bar{P} : P \in \mathbb{E}\}$$

chamamos de *espaço quociente* de $\mathbb{E}$ por J .

Abaixo, consideramos o reticulado 16-QAM sobre um espaço quociente.

Consideremos:

- (i) o grupo discreto de isometrias $G_1 = \langle T_{e_1}, T_{e_2} \rangle$, gerado pelas translações T_{e_1} e T_{e_2} , sendo $\{e_1, e_2\}$ base canônica do espaço vetorial usual $\mathbb{R}^2$.
- (ii) o ponto $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ em $\mathcal{P} = \{P\}$ e sua órbita $G_1\mathcal{P} = \{\varphi(P) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in G_1\}$.
- (iii) o grupo discreto de isometrias $G_2 = \langle T_{4e_1}, T_{4e_2} \rangle$ gerado pelas translações T_{4e_1} e T_{4e_2} .
- (iv) o espaço quociente $E = \mathbb{R}^2/G_2$ (FIGURA 18).

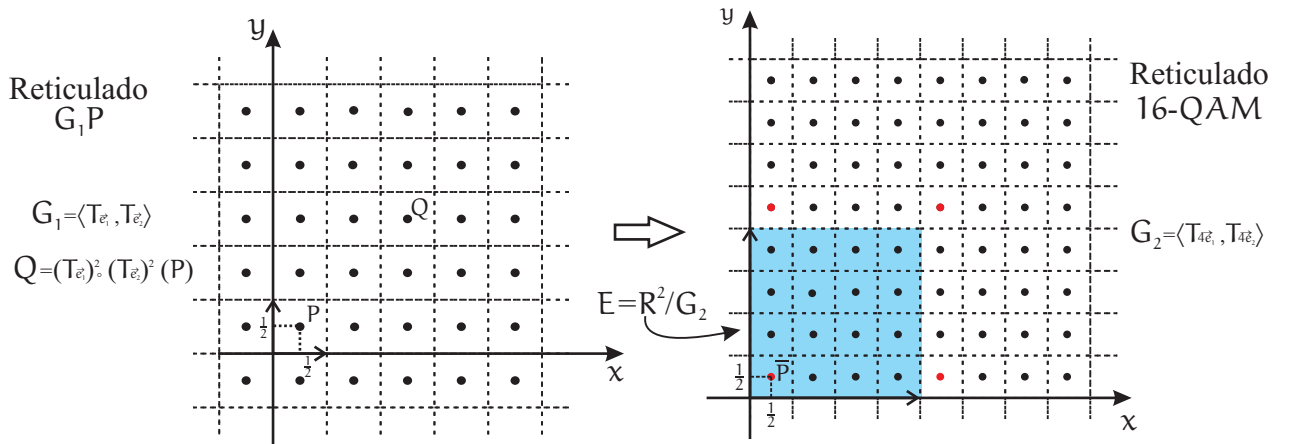


FIGURA 18: O reticulado 16-QAM obtido por quociente.

Logo, sobre E temos o conjunto das classes de equivalência de 16 pontos da órbita de P , que definimos como sendo o reticulado 16-QAM obtido por quociente. O grupo de simetrias $\bar{S}$ desse reticulado quociente possui translações pelos vetores $e_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$ e $e_2 = \overrightarrow{P_1P_5}$ (ver FIGURA 17). Assim, dados dois pontos $\bar{P}_i$ e $\bar{P}_j$, existe uma simetria $\bar{\sigma} \in \bar{S}$ composta de translações tal que $\bar{\sigma}(\bar{P}_i) = \bar{P}_j$, ou seja, sobre E , o reticulado obtido é geometricamente uniforme.

Observemos que quando “quocientamos” o reticulado $G_1\mathcal{P}$ pelo grupo G_2 , estamos identificando os lados opostos do quadrado azul da FIGURA 18 de tal modo que, do ponto de vista topológico, os pontos do 16-QAM podem ser vistos sobre o toro plano. Como vimos no Capítulo 1, este toro pode ser mergulhado em uma esfera de raio $\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$ no $\mathbb{R}^4$, por meio do mergulho $\Phi(x, y) = (\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x), \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x), \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi y), \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi y))$.

No Exemplo 3 abaixo consideramos um reticulado de 16 pontos em um bitoro, que pode ser obtido como espaço quociente do plano hiperbólico por um grupo fuchsiano. Trata-se, portanto, de um reticulado “genuinamente hiperbólico”.

Exemplo 3. Consideremos:

(a) o grupo discreto de isometrias $F_1 = \langle \delta_0, \delta_1, \delta_2 \rangle$, no disco D , gerado pelas reflexões hiperbólicas do tipo $f(z) = \frac{a\bar{z}+c}{c\bar{z}+a}$ nos lados de um triângulo hiperbólico equilátero OBE de ângulos internos $\frac{\pi}{4}$, com o lado OB no eixo das abscissas e o vértice O na origem. (FIGURA 19).

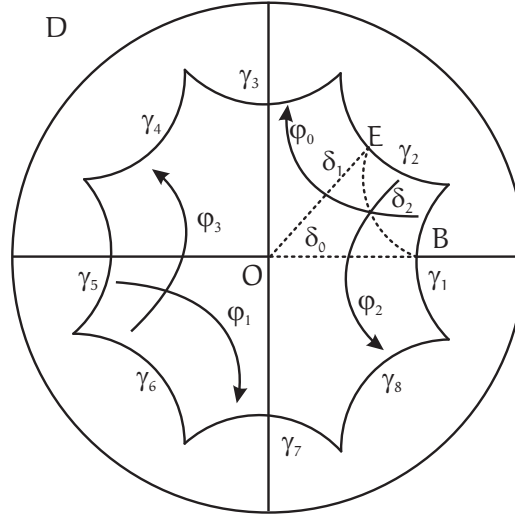


FIGURA 19: As isometrias δ_i representam as reflexões nos lados de um triângulo hiperbólico equilátero e as isometrias φ_i as que identificam lados opostos do octógono hiperbólico regular.

(b) o ponto Q , centro do triângulo OBE como pode ser visto na FIGURA 19, e o reticulado R gerado pela sua órbita $F_1Q = \{\delta(Q) \in D : \delta \in F_1\}$, onde $Q = (a \cos(\frac{\pi}{8}), a \sin(\frac{\pi}{8})) \equiv ae^{i\frac{\pi}{8}}$ com $a \cong 0,405$. Para o cálculo do valor de a , consideremos a FIGURA 20. Se fizermos $y = \overline{OA}$, então, aplicando a Segunda Lei dos Cossenos (hiperbólica) no triângulo OAB , temos

$$\cosh(y) = \frac{\cos(\frac{\pi}{8}) \cos(\frac{\pi}{8}) + \cos(\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{8}) \sin(\frac{\pi}{8})} = \frac{\cos^2(\frac{\pi}{8}) + \cos(\frac{\pi}{2})}{\sin^2(\frac{\pi}{8})} \cong 5,828.$$

Assim,

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} \cong 5,828 \implies e^y + e^{-y} \cong 11,656 \implies (e^y)^2 - 11,656e^y + 1 \cong 0.$$

Logo,

$$e^y \cong 11,570 \implies y \cong 2,448.$$

Agora, observando que o triângulo OBA é isóceles, fazendo $\overline{OB} = \overline{AB} = x$ e aplicando o Teorema de Pitágoras Hiperbólico a esse triângulo temos,

$$\cosh(y) = \cosh(x) \cosh(x) = \cosh^2(x).$$

Assim,

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \cong 5,828 \implies \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cong 2,414 \implies e^x + e^{-x} \cong 4,828 \implies (e^x)^2 - 4,828e^x + 1 \cong 0.$$

Logo,

$$e^x \cong 4,611 \implies x \cong 1,528.$$

Dáí, fazendo $\overline{OC} = z$ e usando a Lei dos Senos (hiperbólica) no triângulo OCB, temos

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(z)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} &= \frac{\sinh(x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow \frac{\sinh(z)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sinh(x) \Rightarrow \sinh(z) \cong 1,553 \\ \Rightarrow \frac{e^z - e^{-z}}{2} &\cong 1,553 \Rightarrow e^z - e^{-z} \cong 3,107 \Rightarrow (e^z)^2 - 3,107e^z - 1 \cong 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$e^z \cong 3,401 \Rightarrow z \cong 1,224.$$

Fazendo $\overline{QC} = w$, temos, no triângulo OQD, novamente pela Lei dos Senos,

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(z-w)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} &= \frac{\sinh(w)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} \Rightarrow 0,382 \sinh(z-w) \cong \sinh(w) \Rightarrow \\ 0,382 \left(\frac{e^{z-w} - e^{-z+w}}{2} \right) &\cong \frac{e^w - e^{-w}}{2} \Rightarrow 0,382 \left(\frac{e^z}{e^w} - \frac{e^w}{e^z} \right) \cong e^w - e^{-w} \Rightarrow \\ 0,382 \left[\frac{(e^z)^2 - (e^w)^2}{e^w e^z} \right] &\cong e^w - e^{-w} \Rightarrow \\ 0,382 \left(\frac{11,570 - (e^w)^2}{3,401 e^w} \right) &\cong e^w - e^{-w} \Rightarrow 3,784(e^w)^2 \cong 7,829 \Rightarrow \\ e^w &\cong 1,438 \Rightarrow w \cong 0,363. \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{OQ} = z - w \cong 0,860$.

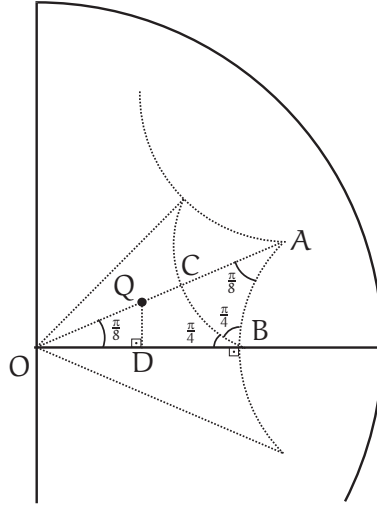


FIGURA 20: Encontrando o centro do triângulo equilátero hiperbólico.

Agora, considerando a fórmula da distância ρ^* no disco entre os pontos $O = 0 + 0i$ e $Q = a \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + ia \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ com $a > 0$ temos

$$\begin{aligned} 0,860 &\cong \ln \left(\frac{|1 - (0 + 0i)(a \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - ia \sin\left(\frac{\pi}{8}\right))| + |0 + 0i - (a \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + ia \sin\left(\frac{\pi}{8}\right))|}{|1 - (0 + 0i)(a \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - ia \sin\left(\frac{\pi}{8}\right))| - |0 + 0i - (a \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + ia \sin\left(\frac{\pi}{8}\right))|} \right) \Rightarrow \\ 0,860 &\cong \ln \left(\frac{1+a}{1-a} \right) \Rightarrow \\ a &\cong 0,405. \end{aligned}$$

(c) o grupo discreto de isometrias fuchsiano $F_2 = \langle \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle$ gerado pelas isometrias hiperbólicas $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ do tipo $f(z) = \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}}$ que identificam pares de lados do octógono

hiperbólico regular com centro na origem composto de 16 triângulos equiláteros congruentes ao triângulo descrito no Item (a) (FIGURA 19).

(d) a relação de equivalência $\sim$ em D definida por $Q_1 \sim Q_2 \iff Q_2 = \varphi(Q_1)$, sendo $\varphi \in F_2$. Denotamos a classe de equivalência de um ponto Q por $\overline{Q}$.

(e) o espaço quociente $F = D/F_2 = \{\overline{Q} : Q \in D\}$.

Logo, sobre F temos o conjunto das classes de equivalência de 16 pontos da órbita de Q , que definimos como sendo o reticulado **16–HQAM** (FIGURA 21). O grupo de simetrias desse reticulado quociente contém todas as isometrias do grupo F_1 . Esse reticulado quociente é geometricamente uniforme, pois dados $\overline{Q}_i$ e $\overline{Q}_j$, que são centros de triângulos hiperbólicos, sempre haverá uma composição δ de reflexões em lados desses triângulos tais que $\delta(\overline{Q}_i) = \overline{Q}_j$.

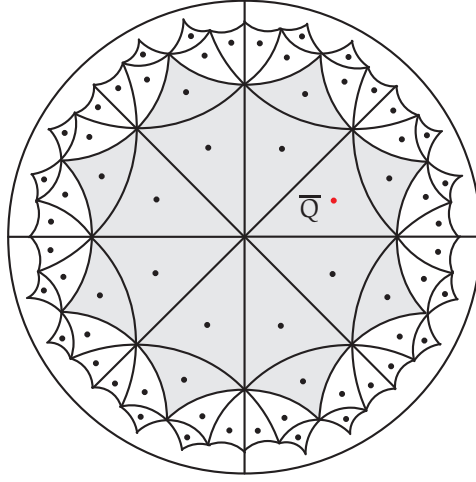


FIGURA 21: O reticulado hiperbólico **16–HQAM**.

Para uma efetiva implementação do reticulado do Exemplo 3 acima, é necessário encontrar as expressões para as isometrias dos grupos F_1 e F_2 . Para tanto, precisamos do conceito de círculos isométricos, que é objeto de nossa próxima seção.

3.2 Círculos Isométricos

Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, com $c \neq 0$, estendida a $\mathbb{C}$. O círculo

$$I(T) = \{z \in \mathbb{C} : |cz + d| = 1\},$$

que é o lugar geométrico completo de pontos onde a transformação T age como uma isometria euclidiana, é chamado *círculo isométrico* da transformação T .

De forma análoga, quando $T(z) = \frac{az+\overline{c}}{cz+\overline{a}} \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$, com $c \neq 0$, estendida a $\mathbb{C}$, o círculo isométrico com relação a T é

$$I(T) = \{z \in \mathbb{C} : |cz + \overline{a}| = 1\}.$$

A afirmação de que T da forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$ e $|cz + d| = 1$ age como uma

isometria euclidiana deve-se ao fato de que, se tomarmos dois pontos z_1 e z_2 em $I(T)$, então

$$\begin{aligned}
 |T(z_1) - T(z_2)| &= \left| \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \right| \\
 &= \left| \frac{(az_1 + b)(cz_2 + d) - (az_2 + b)(cz_1 + d)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} \right| \\
 &= \frac{|acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd - acz_1z_2 - adz_2 - bcz_1 - bd|}{|cz_1 + d| \cdot |cz_2 + d|} \\
 &= |(\mathbf{ad} - \mathbf{bc})z_1 - (\mathbf{ad} - \mathbf{bc})z_2| \\
 &= |z_1 - z_2|.
 \end{aligned}$$

Analogamente, para $T(z) = \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}}$ com $a\bar{a} - c\bar{c} = 1$ e $|cz + \bar{a}| = 1$ e, considerando dois pontos z_1 e z_2 em $I(T)$, então

$$\begin{aligned}
 |T(z_1) - T(z_2)| &= \left| \frac{az_1 + \bar{c}}{cz_1 + \bar{a}} - \frac{az_2 + \bar{c}}{cz_2 + \bar{a}} \right| \\
 &= \left| \frac{(az_1 + \bar{c})(cz_2 + \bar{a}) - (az_2 + \bar{c})(cz_1 + \bar{a})}{(cz_1 + \bar{a})(cz_2 + \bar{a})} \right| \\
 &= \frac{|acz_1z_2 + a\bar{a}z_1 + \bar{c}cz_2 + \bar{c}\bar{a} - acz_1z_2 - a\bar{a}z_2 - \bar{c}cz_1 - \bar{c}\bar{a}|}{|cz_1 + \bar{a}| \cdot |cz_2 + \bar{a}|} \\
 &= |(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{c}}\mathbf{c})z_1 - (\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{c}}\mathbf{c})z_2| \\
 &= |z_1 - z_2|.
 \end{aligned}$$

Para as demonstrações dos próximos teoremas recordemos que se temos uma curva parametrizada em $\mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ com $t \in [a, b]$, então o comprimento l_γ é dado por $l_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$. No nosso caso, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$ e

$$T'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{acz + ad - acz - bc}{(cz + d)^2} = (cz + d)^{-2}.$$

Logo, os comprimentos euclidianos são multiplicados por $|T'(z)| = |cz + d|^{-2}$, pois

$$l_{T(\gamma)} = \int_{T(a)}^{T(b)} |T'(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt = \int_{T(a)}^{T(b)} |\gamma'(t)| \cdot |c(\gamma(t)) + d|^{-2} dt.$$

Uma região infinitesimal é levado em uma região similar com comprimentos multiplicados por $|cz + d|^{-2}$. A área euclidiana, portanto, é multiplicada por $|cz + d|^{-4}$. Os comprimentos e áreas euclidianos são inalterados em magnitude se, e somente se, $|cz + d| = 1$.

Teorema 3.1 *Seja $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, com $c \neq 0$, estendida a $\mathbb{C}$. A transformação T aumenta os comprimentos e áreas euclidianas dentro do círculo isométrico $I(T)$, e os diminui fora do círculo isométrico $I(T)$.*

Demonstração:

Seja z pertencente ao interior de $I(T)$. Daí, $|z + \frac{d}{c}| < \frac{1}{|c|}$, isto é, $|cz + d| < 1$, o que implica que $|T'(z)| > 1$, ou seja, a transformação T aumenta os comprimentos euclidianos de curvas dentro de $I(T)$. De forma análoga, se z pertence ao exterior de $I(T)$ então $|T'(z)| < 1$. Como

$$|T'(z)| > 1 \implies |T'(z)|^2 > 1$$

e

$$|T'(z)| < 1 \implies |T'(z)|^2 < 1$$

a afirmação segue com relação às áreas euclidianas. □

Teorema 3.2 *Seja $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, com $c \neq 0$, estendida a $\mathbb{C}$. Os círculos isométricos $I(T)$ e $I(T^{-1})$ têm o mesmo raio, e $I(T)$ é levado em $I(T^{-1})$ pela transformação T .*

Demonstração:

Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$. Daí, $T^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$, $I(T) = \{z \in \mathbb{C} : |cz + d| = 1\}$ e $I(T^{-1}) = \{z \in \mathbb{C} : |cz - a| = 1\}$. Fazendo $z = x + iy \in I(T)$, então

$$|cz + d| = 1 \implies |c(x + iy) + d| = 1 \implies \left| x + \frac{d}{c} + iy \right| = \frac{1}{|c|} \implies \left(x + \frac{d}{c} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{|c|} \right)^2,$$

ou seja, $I(T)$ é um círculo euclidiano de centro $(-\frac{d}{c}, 0)$ e raio $\frac{1}{|c|}$. Agora, se $z = x + iy \in I(T^{-1})$, então

$$|cz - a| = 1 \implies |c(x + iy) - a| = 1 \implies \left| x - \frac{a}{c} + iy \right| = \frac{1}{|c|} \implies \left(x - \frac{a}{c} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{|c|} \right)^2,$$

ou seja, $I(T^{-1})$ é um círculo euclidiano de centro $(\frac{a}{c}, 0)$ e raio $\frac{1}{|c|}$. Portanto, $I(T)$ e $I(T^{-1})$ têm o mesmo raio. Suponha agora que $z \in I(T)$, então $z = -\frac{d}{c} + \frac{1}{|c|}e^{i\theta}$, com $\theta \in [0, 2\pi[$, e

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{a\left(-\frac{d}{c} + \frac{1}{|c|}e^{i\theta}\right) + b}{c\left(-\frac{d}{c} + \frac{1}{|c|}e^{i\theta}\right) + d} = \frac{\frac{-ad+bc}{c} + \frac{a}{|c|}e^{i\theta}}{-d + \frac{c}{|c|}e^{i\theta} + d} = \frac{-\frac{1}{c} + \frac{a}{|c|}e^{i\theta}}{\frac{c}{|c|}e^{i\theta}} \\ &= \left(-\frac{1}{c} + \frac{a}{|c|}e^{i\theta}\right) \frac{|c|}{ce^{i\theta}} = -\frac{|c|}{c^2}e^{i(-\theta)} + \frac{a}{c} = -\frac{1}{|c|}(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) + \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Vejamos que $T(z) \in I(T^{-1})$. De fato,

$$|c(T(z)) - a| = \left| -\frac{c}{|c|}(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) + a - a \right| = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

Logo, $T(I(T)) \subset I(T^{-1})$, ou seja, $I(T)$ é levado em $I(T^{-1})$ por T . □

Teorema 3.3 *Seja $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, com $c \neq 0$. A restrição do círculo isométrico $I(T)$ a H é geodésica em H .*

Demonstração:

Como vimos no teorema anterior, se $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$ então $I(T)$ é um círculo euclidiano de centro $(-\frac{d}{c}, 0)$ e raio $\frac{1}{|c|}$. Logo, o eixo x contém um dos diâmetros de $I(T)$. Logo, $I(T)$ é um círculo ortogonal ao eixo x , portanto, geodésica em H . □

Resultados análogos valem para círculos isométricos no modelo do disco de Poincaré.

3.3 Encontrando Geradores do Grupo Fuchsiano F_2

Para encontrar as isometrias $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, que geram F_2 no Exemplo 3 (reticulado 16-HQAM), primeiramente observamos que a rotação $T(z) = e^{i\omega}z$ pode ser escrita na forma $T(z) = \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}}$ com $a\bar{a} - c\bar{c} = 1$, ou seja, como elemento de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$. De fato, tomemos $a = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$

e $c = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
 \frac{(\cos(\frac{\omega}{2}) + i \sin(\frac{\omega}{2}))z + 0}{0z + (\cos(\frac{\omega}{2}) - i \sin(\frac{\omega}{2}))} &= \frac{(\cos(\frac{\omega}{2}) + i \sin(\frac{\omega}{2}))z}{\cos(\frac{\omega}{2}) - i \sin(\frac{\omega}{2})} \cdot \frac{\cos(\frac{\omega}{2}) + i \sin(\frac{\omega}{2})}{\cos(\frac{\omega}{2}) + i \sin(\frac{\omega}{2})} \\
 &= \frac{(\cos^2(\frac{\omega}{2}) + i \cos(\frac{\omega}{2}) \sin(\frac{\omega}{2}) + i \cos(\frac{\omega}{2}) \sin(\frac{\omega}{2}) - \sin^2(\frac{\omega}{2}))z}{\cos^2(\frac{\omega}{2}) + \sin^2(\frac{\omega}{2})} \\
 &= \left(\cos^2(\frac{\omega}{2}) + i \left(2 \cos(\frac{\omega}{2}) \sin(\frac{\omega}{2}) \right) - \sin^2(\frac{\omega}{2}) \right) z \\
 &= \left(\cos\left(2\frac{\omega}{2}\right) + i \sin\left(2\frac{\omega}{2}\right) \right) z \\
 &= (\cos(\omega) + i \sin(\omega))z \\
 &= e^{i\omega}z.
 \end{aligned}$$

Além disso,

$$a\bar{a} - c\bar{c} = \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1.$$

Consideremos a FIGURA 22 abaixo.

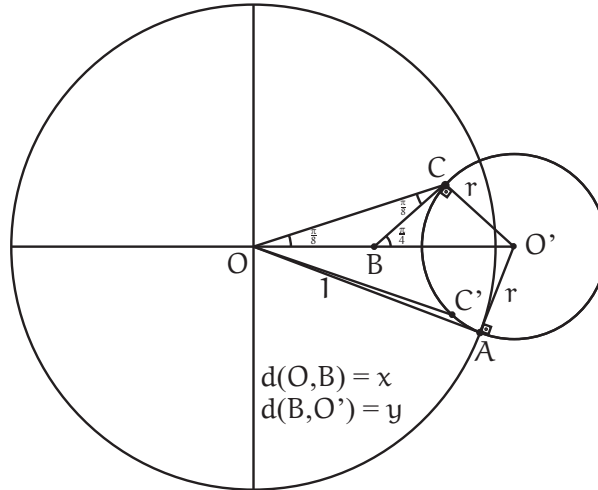


FIGURA 22: Encontrando expressões para isometrias.

O círculo de centro O' contém a curva γ_1 (um dos lados do octógono hiperbólico regular de ângulos $\frac{\pi}{4}$) representada na FIGURA 19.

Observemos que $OA O'$ é reto em A e $BC O'$ é reto em C . Além disso, $\hat{B} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. No triângulo BCO' temos

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{r}{y} \implies y = \frac{2r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}$$

e

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{x}{y} \implies x = \frac{\sqrt{2}}{2} r \sqrt{2} = r.$$

No triângulo $OO'A$ temos

$$\begin{aligned}
 (x + y)^2 &= r^2 + 1 \implies (r + r\sqrt{2})^2 = r^2 + 1 \implies r^2 (1 + \sqrt{2})^2 = r^2 + 1 \implies \\
 r^2 \left((1 + \sqrt{2})^2 - 1 \right) &= 1 \implies r^2 = \frac{1}{2 + 2\sqrt{2}} \implies r = \frac{1}{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}.
 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 |x + y| &= \sqrt{r^2 (1 + \sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2 + 2\sqrt{2}} (1 + 2\sqrt{2} + 2)} = \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}} \\
 &= \frac{\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})(2 + 2\sqrt{2})}}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6 + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 8}}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14 + 10\sqrt{2}}}{2 + 2\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Queremos mostrar que o círculo de centro O' na FIGURA 22 é o círculo isométrico da transformação φ_0 e, mais ainda, que $I(\varphi_0^{-1})$ é o círculo que contém a curva γ_3 da FIGURA 19. Para isso, precisamos descobrir os valores de a e c complexos tais que

$$\begin{cases} -\frac{\bar{a}}{c} = \frac{\sqrt{14 + 10\sqrt{2}}}{2 + 2\sqrt{2}} \\ \frac{a}{c} = \left(\frac{\sqrt{14 + 10\sqrt{2}}}{2 + 2\sqrt{2}} \right) i \end{cases}.$$

Para justificar as igualdades acima, utilizamos argumentos geométricos descritos a seguir. Temos que $|cz + \bar{a}| = 1$. Fazendo $z = re^{i\theta} + d$ temos

$$\begin{aligned}
 |c(re^{i\theta} + d) + \bar{a}| &= 1 \\
 |cre^{i\theta} + cd + \bar{a}| &= 1 \\
 \left| re^{i\theta} + d + \frac{\bar{a}}{c} \right| &= \frac{1}{|c|}.
 \end{aligned}$$

Observando a expressão acima, temos uma circunferência de centro $d + \frac{\bar{a}}{c}$ e raio $\frac{1}{|c|}$. Assim, tomando dois pontos p_1 e p_2 nesta circunferência temos que $|p_1| = |p_2| = \frac{1}{|c|}$, o que só é possível se esta circunferência estiver centrada na origem, como podemos observar na FIGURA 23 abaixo.

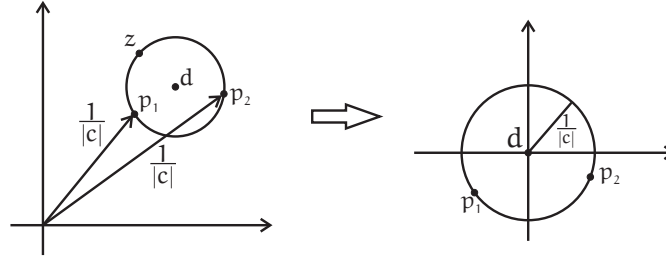


FIGURA 23: Encontrando os centros e raios de círculos isométricos.

Logo, $I(T)$ é um círculo euclidiano de raio $\frac{1}{|c|}$ e centro $-\frac{\bar{a}}{c}$. Analogamente, para $T^{-1}(z) = \frac{\bar{a}z - \bar{c}}{-cz + a}$, temos que $I(T^{-1})$ é um círculo euclidiano de raio $\frac{1}{|c|}$ e centro $\frac{a}{c}$. Mas, observando a FIGURA 19, temos que o centro de $I(\varphi_0)$ é dado por $(x + y, 0) = (x + y) + 0i$, portanto,

$$-\frac{\bar{a}}{c} = \frac{\sqrt{14 + 10\sqrt{2}}}{2 + 2\sqrt{2}}.$$

Por outro lado, $I(\varphi_0^{-1})$ tem centro em $(0, x + y) = 0 + (x + y)i$, portanto,

$$\frac{a}{c} = \left(\frac{\sqrt{14 + 10\sqrt{2}}}{2 + 2\sqrt{2}} \right) i.$$

Façamos $\mathbf{a} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ e $\mathbf{c} = \mathbf{z} + i\mathbf{w}$. Sabemos que $z^2 + w^2 = 2 + 2\sqrt{2}$, já que $|\mathbf{c}| = \sqrt{z^2 + w^2}$ e $r = \frac{1}{|\mathbf{c}|}$ e, portanto, $\sqrt{z^2 + w^2} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$. Logo,

$$\begin{aligned} -\frac{\bar{\mathbf{a}}}{\mathbf{c}} &= -\frac{\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{c}}}{\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{c}}} = -\frac{(\mathbf{x} - i\mathbf{y})(\mathbf{z} - i\mathbf{w})}{(\mathbf{z} + i\mathbf{w})(\mathbf{z} - i\mathbf{w})} = \frac{-\mathbf{x}\mathbf{z} + i\mathbf{x}\mathbf{w} + i\mathbf{y}\mathbf{z} + \mathbf{y}\mathbf{w}}{z^2 + w^2} \\ &= \frac{-\mathbf{x}\mathbf{z} + \mathbf{y}\mathbf{w} + i(\mathbf{x}\mathbf{w} + \mathbf{y}\mathbf{z})}{z^2 + w^2} = \frac{-\mathbf{x}\mathbf{z} + \mathbf{y}\mathbf{w} + i(\mathbf{x}\mathbf{w} + \mathbf{y}\mathbf{z})}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14 + 10\sqrt{2}}}{2 + 2\sqrt{2}} \Rightarrow \\ &\quad \begin{cases} -\mathbf{x}\mathbf{z} + \mathbf{y}\mathbf{w} = \sqrt{14 + 10\sqrt{2}} \\ \mathbf{x}\mathbf{w} + \mathbf{y}\mathbf{z} = 0 \end{cases} . \end{aligned} \quad (\text{I})$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} &= \frac{\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{c}}}{\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{c}}} = \frac{(\mathbf{x} + i\mathbf{y})(\mathbf{z} - i\mathbf{w})}{z^2 + w^2} = \frac{\mathbf{x}\mathbf{z} - i\mathbf{x}\mathbf{w} + i\mathbf{y}\mathbf{z} + \mathbf{y}\mathbf{w}}{z^2 + w^2} \\ &= \frac{\mathbf{x}\mathbf{z} + \mathbf{y}\mathbf{w} + i(-\mathbf{x}\mathbf{w} + \mathbf{y}\mathbf{z})}{2 + 2\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{14 + 10\sqrt{2}}}{2 + 2\sqrt{2}} \right) i \Rightarrow \\ &\quad \begin{cases} \mathbf{x}\mathbf{z} + \mathbf{y}\mathbf{w} = 0 \\ \mathbf{y}\mathbf{z} - \mathbf{x}\mathbf{w} = \sqrt{14 + 10\sqrt{2}} \end{cases} . \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Os sistemas (I) e (II) nos fornecem as equações

$$\begin{cases} 2\mathbf{y}\mathbf{w} = \sqrt{14 + 10\sqrt{2}} \\ 2\mathbf{y}\mathbf{z} = \sqrt{14 + 10\sqrt{2}} \\ 2\mathbf{x}\mathbf{z} = -\sqrt{14 + 10\sqrt{2}} \\ 2\mathbf{x}\mathbf{w} = -\sqrt{14 + 10\sqrt{2}} \end{cases} .$$

Logo,

$$4\mathbf{y}^2\mathbf{w}^2 + 4\mathbf{y}^2\mathbf{z}^2 = 2(14 + 10\sqrt{2}) \Rightarrow \mathbf{y}^2 = \frac{2(3 + 2\sqrt{2})(2 + 2\sqrt{2})}{4(2 + 2\sqrt{2})} \Rightarrow \mathbf{y} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} .$$

Além disso,

$$4\mathbf{x}^2\mathbf{z}^2 + 4\mathbf{x}^2\mathbf{w}^2 = 2(14 + 10\sqrt{2}) \Rightarrow \mathbf{x}^2 = \frac{2(3 + 2\sqrt{2})(2 + 2\sqrt{2})}{4(2 + 2\sqrt{2})} \Rightarrow \mathbf{x} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} .$$

Daí,

$$\mathbf{z} = \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{\pm\sqrt{2}\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$$

e

$$\mathbf{w} = \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{\pm\sqrt{2}\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} .$$

Se escolhermos $\mathbf{x} < 0$, $\mathbf{y} > 0$, $\mathbf{z} > 0$ e $\mathbf{w} > 0$ as equações que os sistemas (I) e (II) fornecem

ficam satisfeitas. Dessa forma, temos a transformação

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \\ &= \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)z + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)z + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)} \\ &= \frac{\left(-\sqrt{3+2\sqrt{2}} + i\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)z + \left(\sqrt{2+2\sqrt{2}} - i\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)}{\left(\sqrt{2+2\sqrt{2}} + i\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)z + \left(-\sqrt{3+2\sqrt{2}} - i\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)}. \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} a\bar{a} - c\bar{c} &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right) \\ &\quad - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{2}{4} \left(3+2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}\right) - \frac{2}{4} \left(2+2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}\right) \\ &= \frac{2}{4} \left(6+4\sqrt{2}-4-4\sqrt{2}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Mostremos que se $T(z)$ é a transformação encontrada acima, então $|cz + \bar{a}| = 1$ para $z = \frac{\sqrt{14+10\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}e^{i\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi[$. De fato:

$$\begin{aligned} |cz + \bar{a}|^2 &= \left| \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} (1+i) \left(\frac{\sqrt{14+10\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}} + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \right) - \frac{\sqrt{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2} (1+i) \right|^2 \\ &= \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{2+2\sqrt{2}} (1+i) \left(\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} + \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \right) - \sqrt{3+2\sqrt{2}} (1+i) \right) \right|^2 \\ &= \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \cos(\theta) + i\sin(\theta) + i\sqrt{3+2\sqrt{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + i\cos(\theta) - \sin(\theta) - \sqrt{3+2\sqrt{2}} - i\sqrt{3+2\sqrt{2}} \right|^2 \\ &= \left| \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(\theta) + i\sin(\theta) + i\cos(\theta) - \sin(\theta)) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\cos^2(\theta) - 2\cos(\theta)\sin(\theta) + \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta) + \sin^2(\theta)) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, para essa T o conjunto $I(T)$ é um círculo isométrico. Temos

$$T^{-1}(z) = \frac{\left(-\sqrt{3+2\sqrt{2}} - i\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)z - \left(\sqrt{2+2\sqrt{2}} - i\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)}{-\left(\sqrt{2+2\sqrt{2}} + i\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)z + \left(-\sqrt{3+2\sqrt{2}} + i\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)}.$$

Tomando

$$\begin{aligned}\varphi_0(z) &= T(z) = \frac{(-\sqrt{3+2\sqrt{2}}+i\sqrt{3+2\sqrt{2}})z + (\sqrt{2+2\sqrt{2}}-i\sqrt{2+2\sqrt{2}})}{(\sqrt{2+2\sqrt{2}}+i\sqrt{2+2\sqrt{2}})z + (-\sqrt{3+2\sqrt{2}}-i\sqrt{3+2\sqrt{2}})}; \\ \varphi_1(z) &= e^{i\pi} (T(e^{-i\pi}(z))) = \frac{(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-i\sqrt{3+2\sqrt{2}})z + (\sqrt{2+2\sqrt{2}}-i\sqrt{2+2\sqrt{2}})}{(\sqrt{2+2\sqrt{2}}+i\sqrt{2+2\sqrt{2}})z + (\sqrt{3+2\sqrt{2}}+i\sqrt{3+2\sqrt{2}})}; \\ \varphi_2(z) &= e^{-i\frac{\pi}{4}} (T^{-1}(e^{i\frac{\pi}{4}}(z))) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{(-\sqrt{3+2\sqrt{2}}-i\sqrt{3+2\sqrt{2}})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z(1+i)\right) - (\sqrt{2+2\sqrt{2}}-i\sqrt{2+2\sqrt{2}})}{-\left(\sqrt{2+2\sqrt{2}}+i\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z(1+i)\right) + (-\sqrt{3+2\sqrt{2}}+i\sqrt{3+2\sqrt{2}})} \right); \\ \varphi_3(z) &= e^{i\pi} (\varphi_2(e^{i\pi}(z))) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+i\sqrt{3+2\sqrt{2}})\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}z(1+i)\right) + (\sqrt{2+2\sqrt{2}}-i\sqrt{2+2\sqrt{2}})}{-\left(\sqrt{2+2\sqrt{2}}+i\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}z(1+i)\right) + (-\sqrt{3+2\sqrt{2}}+i\sqrt{3+2\sqrt{2}})} \right);\end{aligned}$$

temos o grupo discreto de isometrias $F_2 = \langle \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle$ gerado pelas isometrias hiperbólicas $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ que identificam os lados do octógono regular com centro na origem compostos por 16 triângulos equiláteros gerados por F_1 .

Temos que $\varphi_0(\gamma_1) = \gamma_3$, $\varphi_1(\gamma_5) = \gamma_7$, $\varphi_2(\gamma_2) = \gamma_8$ e $\varphi_3(\gamma_6) = \gamma_4$.

3.4 Encontrando Geradores do Grupo Fuchsiano F_1

Para encontrar as isometrias $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ que geram F_1 no Exemplo 3 do reticulado 16-HQAM, devemos desenvolver um pouco as inversões em círculos.

Seja Q um círculo em $\mathbb{R}^2$ com centro k e raio r . Dado um ponto qualquer $p \neq k$ em $\mathbb{R}^2$, um ponto p_1 é chamado inverso de p quando

- (i) p_1 encontra-se no raio que vai de k a p ,
- (ii) $\overline{kp_1} \cdot \overline{kp} = r^2$.

A relação é recíproca: se p_1 é o inverso de p , p é o inverso de p_1 . Dizemos que p e p_1 são inversos em relação a Q .

Façamos p, p_1 e k serem os pontos z, z_1 e k em $\mathbb{C}$. As condições da definição acima podem ser reescritas como

$$|(z_1 - k)(z - k)| = r^2, \quad \arg(z_1 - k) = \arg(z - k).$$

Como $\arg(z - k) = -\arg(\bar{z} - \bar{k})$ (FIGURA 24), as duas equações são satisfeitas se, e somente se,

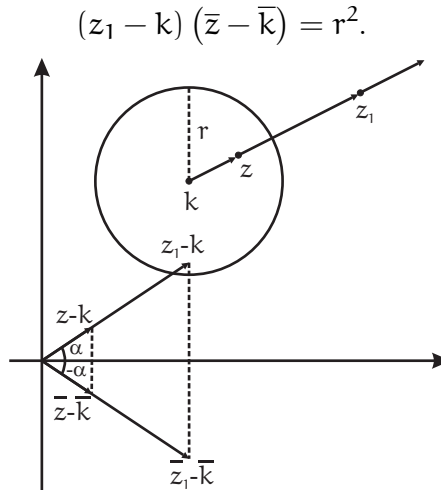


FIGURA 24: Inversões em círculos.

De fato:

$\implies$) Lembremos que $z\bar{z} = |z|^2$ e ainda que, se temos $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ e $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, então $z_1z_2 = |z_1| \cdot |z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. Chamemos $\arg(\bar{z}_1 - \bar{k}) = -\alpha$ e, portanto, $\arg(z - k) = \alpha$. Logo,

$$\begin{aligned} (\bar{z}_1 - \bar{k})(z - k) &= |\bar{z}_1 - \bar{k}| \cdot |z - k| \cdot e^{i(\alpha - \alpha)} = \\ |\bar{z}_1 - \bar{k}| \cdot |z - k| &= |z_1 - k| \cdot |z - k| = |(z_1 - k)(z - k)| = r^2. \end{aligned} \quad (\text{III})$$

Temos ainda que

$$(z_1 - k)(\bar{z}_1 - \bar{k})(z - k)(\bar{z} - \bar{k}) = |z_1 - k|^2 |\bar{z} - \bar{k}|^2 = |(z_1 - k)(\bar{z} - \bar{k})|^2 = r^4.$$

Substituindo (III) na equação anterior temos

$$(z_1 - k)(\bar{z}_1 - \bar{k})(z - k)(\bar{z} - \bar{k}) = (z_1 - k)r^2(\bar{z} - \bar{k}) = r^4 \implies (z_1 - k)(\bar{z} - \bar{k}) = r^2.$$

$\Longleftarrow$) Como $(z_1 - k), (\bar{z} - \bar{k}) \in \mathbb{C}$ e, por outro lado, $(z_1 - k)(\bar{z} - \bar{k}) \in \mathbb{R}$, então

$$\arg(z_1 - k) + \arg(\bar{z} - \bar{k}) = 0 \implies \arg(z_1 - k) = -\arg(\bar{z} - \bar{k}) = \arg(z - k).$$

Agora,

$$\begin{aligned} r^2 &= (z_1 - k)(\bar{z} - \bar{k}) = |z_1 - k| \cdot |\bar{z} - \bar{k}| \cdot e^{i(\arg(z_1 - k) + \arg(\bar{z} - \bar{k}))} \\ &= |z_1 - k| \cdot |\bar{z} - \bar{k}| = |z_1 - k| \cdot |z - k| = |(z_1 - k)(z - k)|. \end{aligned}$$

Então, temos uma fórmula para a inversão em círculo pois,

$$(z_1 - k)(\bar{z} - \bar{k}) = r^2 \implies z_1 = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{k}} + k \implies z_1 = \frac{k\bar{z} + r^2 - |k|^2}{\bar{z} - \bar{k}}.$$

No nosso Exemplo 3 do 16-QAM temos três isometrias (FIGURA 19):

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \bar{z} \\ \delta_1 &= \bar{z}i \\ \delta_2 &= \frac{\bar{z}\sqrt{1 + \frac{1}{2+2\sqrt{2}}}(\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8})) - 1}{\bar{z} - \sqrt{1 + \frac{1}{2+2\sqrt{2}}}(\cos(\frac{\pi}{8}) - i\sin(\frac{\pi}{8}))} \end{aligned}$$

Para a isometria δ_2 temos que $k = \sqrt{1 + \frac{1}{2+2\sqrt{2}}}(\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8}))$ e, portanto, $|k|^2 = 1 + \frac{1}{2+2\sqrt{2}}$. Desta forma, $r^2 - |k|^2 = \frac{1}{2+2\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{2+2\sqrt{2}} = -1$.

Então, o grupo discreto de isometrias procurado é $F_1 = \langle \delta_0, \delta_1, \delta_2 \rangle$ sendo o ponto $Q = (a \cos(\frac{\pi}{8}), a \sin(\frac{\pi}{8}))$ com $a \cong 0,405$.

Capítulo 4

Reticulados Cíclicos em Espaços Quociente

Neste capítulo apresentamos nossa principal contribuição: o estudo de uma classe de reticulados cíclicos sobre g -toros, ou seja, toros planos de gênero $g \geq 2$, que são obtidos como espaço quociente entre o plano hiperbólico e grupos fuchsianos gerados por isometrias hiperbólicas.

Apresentamos dois tipos distintos de reticulados chamados *cíclicos*:

(a) proveniente das auto-intersecções de uma curva diferenciável e fechada sobre o g -toro plano (nó) originada a partir dos chamados *eixos* de isometrias hiperbólicas.

(b) proveniente de intersecções de geodésicas que triseccionam os lados do polígono fundamental que origina o g -toro.

Neste capítulo, estamos entendendo por reticulado cíclico aquele cujos pontos estão sobre uma única curva fechada sobre o g -toro plano. Esta curva também é designada de *nó*. Isto significa que os pontos desse reticulado podem ser associados de modo natural aos elementos do grupo aditivo $\mathbb{Z}_n$, bastando para tal, percorrermos uma única vez o nó. A associação de $\mathbb{Z}_n$ a pontos de reticulado já foi abordada no Capítulo 1, no caso dos toros euclidianos, e será resgatada nesse capítulo. Essa associação é o que estamos designando por *rotulamento*.

Para trabalharmos com um reticulado proveniente do item (a) acima, precisamos encontrar as geodésicas que ficam invariantes por uma dada isometria hiperbólica. Partindo de uma dada isometria em H ou D , nem sempre existem geodésicas invariantes pela isometria. Mas, no caso das isometrias hiperbólicas que identificam lados de um polígono hiperbólico regular (como por exemplo, as que geram o grupo fuchsiano que dá origem ao g -toro), essas geodésicas sempre existem e são perpendiculares aos lados do polígono que são identificados pela isometria. Uma isometria como as que estamos descrevendo, possui no máximo, uma geodésica invariante, que é chamada de *eixo da isometria*.

Do ponto de vista computacional, para encontrar o eixo de uma isometria que identifica dois lados de um polígono regular, basta impor as condições de perpendicularismo do eixo com os lados.

Neste capítulo temos duas seções com reticulados cíclicos construídos a partir de eixos, uma seção com reticulados cíclicos construídos a partir de geodésicas e uma generalização.

4.1 Reticulado cíclico de 16 pontos gerado por eixos sobre o bitoro rotulado pelo grupo $\mathbb{Z}_{16}$

Consideremos o bitoro obtido como quociente de D por F_2 conforme estudado no Capítulo 3.

Já temos as isometrias $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ que identificam os lados do octógono hiperbólico fundamental de F_2 gerando o bitoro, conforme ilustrado na FIGURA 25.

Consideremos as isometrias $\varphi_4, \dots, \varphi_{11}$ que identificam os lados especificados na tabela abaixo, cujos eixos também estão ilustrados na FIGURA 25.

Isometria	Lados Identificados
φ_0	$\gamma_1 \rightarrow \gamma_3$
φ_1	$\gamma_5 \rightarrow \gamma_7$
φ_2	$\gamma_2 \rightarrow \gamma_8$
φ_3	$\gamma_6 \rightarrow \gamma_4$
φ_4	$\gamma_1 \rightarrow \gamma_4$
φ_5	$\gamma_2 \rightarrow \gamma_5$
φ_6	$\gamma_3 \rightarrow \gamma_6$
φ_7	$\gamma_4 \rightarrow \gamma_7$
φ_8	$\gamma_5 \rightarrow \gamma_8$
φ_9	$\gamma_6 \rightarrow \gamma_1$
φ_{10}	$\gamma_7 \rightarrow \gamma_2$
φ_{11}	$\gamma_8 \rightarrow \gamma_3$

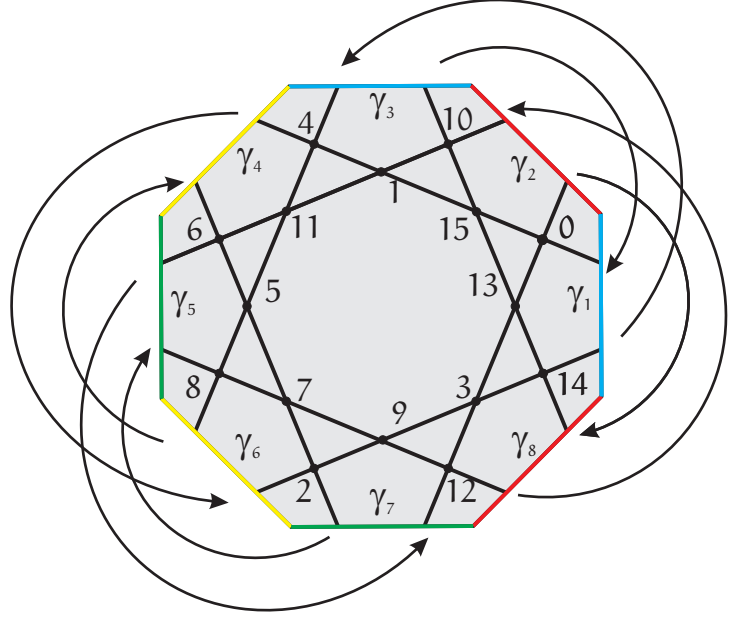


FIGURA 25: Eixos e rótulos de reticulado cíclico.

Precisamos das expressões das isometrias φ_4 a φ_{11} . Para encontrá-las impomos que o círculo de centro O' que contém o lado γ_1 seja $I(\varphi_4)$, ou seja, o círculo isométrico da transformação φ_4 e, mais ainda, que $I(\varphi_4^{-1})$ seja o círculo que contém o lado γ_4 . Para isso, precisamos encontrar os valores de a e c complexos tais que:

$$\begin{cases} -\frac{\bar{a}}{c} = \sqrt{1 + \frac{1}{2+2\sqrt{2}}} \\ \frac{a}{c} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{1}{2+2\sqrt{2}}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{1}{2+2\sqrt{2}}} \end{cases}.$$

Façamos $a = x + iy$ e $c = z + iw$. Sabemos que $z^2 + w^2 = 2 + 2\sqrt{2}$, pois $|c| = \sqrt{z^2 + w^2}$ e $r = \frac{1}{|c|} = \frac{1}{2+2\sqrt{2}}$. Logo,

$$\begin{aligned} -\frac{\bar{a}}{c} &= \frac{\bar{a} \cdot \bar{c}}{c \cdot \bar{c}} = \frac{-(x - iy)(z - iw)}{z^2 + w^2} = \frac{(-xz + yw) + i(xw + yz)}{z^2 + w^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{2+2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{14 + 10\sqrt{2}}}{2 + 2\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} -xz + yw = \sqrt{14 + 10\sqrt{2}} \\ xw + yz = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (a)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{a \cdot \bar{c}}{c \cdot \bar{c}} = \frac{(x + iy)(z - iw)}{z^2 + w^2} = \frac{(xz + yw) + i(-xw + yz)}{2 + 2\sqrt{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{14 + 10\sqrt{2}}}{2 + 2\sqrt{2}} \right) + i\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{14 + 10\sqrt{2}}}{2 + 2\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \begin{cases} xz + yw = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{14 + 10\sqrt{2}}}{2 + 2\sqrt{2}} \right) \\ -xw + yz = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{14 + 10\sqrt{2}}}{2 + 2\sqrt{2}} \right) \end{cases} \end{aligned} \quad (b)$$

Os sistemas (a) e (b) nos fornecem as equações

$$\begin{cases} 2yw = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \left(\sqrt{14+10\sqrt{2}}\right) \\ 2yz = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{14+10\sqrt{2}}\right) \\ 2xz = \left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right) \left(\sqrt{14+10\sqrt{2}}\right) \\ 2xw = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{14+10\sqrt{2}}\right) \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 4y^2w^2 + 4y^2z^2 &= \frac{(14+10\sqrt{2})(6-4\sqrt{2}) + 2(14+10\sqrt{2})}{4} \Rightarrow \\ y^2 &= \frac{(14+10\sqrt{2})(6-4\sqrt{2}+2)}{16(2+2\sqrt{2})} \Rightarrow \\ y^2 &= \frac{(3+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})(8-4\sqrt{2})}{16(2+2\sqrt{2})} \Rightarrow \\ y^2 &= \frac{(3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{4} \Rightarrow \\ y^2 &= \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \\ y &= \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 4x^2w^2 + 4x^2z^2 &= \frac{(14+10\sqrt{2})(6+4\sqrt{2}) + 2(14+10\sqrt{2})}{4} \Rightarrow \\ x^2 &= \frac{(14+10\sqrt{2})(6+4\sqrt{2}+2)}{16(2+2\sqrt{2})} \Rightarrow \\ x^2 &= \frac{(3+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})(8+4\sqrt{2})}{16(2+2\sqrt{2})} \Rightarrow \\ x^2 &= \frac{(3+2\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{4} \Rightarrow \\ x^2 &= \frac{10+7\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \\ x &= \pm \frac{\sqrt{10+7\sqrt{2}}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$z = \pm \sqrt{\frac{4+3\sqrt{2}}{2}}$$

e

$$w = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Se escolhermos $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$ e $w > 0$, as equações que os sistemas (a) e (b) fornecem ficam satisfeitas. Desta forma, temos a transformação

$$T(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{10+7\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)z + \left(\sqrt{\frac{4+3\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{4+3\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)z + \left(-\frac{\sqrt{10+7\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)}$$

com

$$\begin{aligned} a\bar{a} - c\bar{c} &= \left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4} + \frac{2+\sqrt{2}}{4}\right) - \left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{12+8\sqrt{2}}{4}\right) - \left(\frac{4+4\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{12+8\sqrt{2}-8-8\sqrt{2}}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Tomemos $\varphi_4(z) = T(z)$.

As outras isometria são obtidas por composição da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varphi_5(z) &= e^{i\frac{\pi}{4}}(\varphi_4(e^{-i\frac{\pi}{4}}(z))) \\ \varphi_6(z) &= e^{i\frac{\pi}{2}}(\varphi_4(e^{-i\frac{\pi}{2}}(z))) \\ \varphi_7(z) &= e^{i\frac{\pi}{2}}(\varphi_5(e^{-i\frac{\pi}{2}}(z))) \\ \varphi_8(z) &= e^{i\pi}(\varphi_4(e^{-i\pi}(z))) \\ \varphi_9(z) &= \varphi_4^{-1}(e^{-i\frac{\pi}{2}}(z)) \\ \varphi_{10}(z) &= \varphi_5^{-1}(e^{-i\frac{\pi}{2}}(z)) \\ \varphi_{11}(z) &= \varphi_4^{-1}(e^{-i\frac{3\pi}{4}}(z)). \end{aligned}$$

Agora, vamos encontrar os eixos das isometrias $\varphi_4, \dots, \varphi_{11}$.

Para encontrar o eixo da isometria φ_4 , impomos as seguintes condições

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad d((a, b), (0, 0))^2 &= R^2 + 1 \\ \text{(ii)} \quad d((a, b), (a_1, b_1))^2 &= R^2 + r^2 \\ \text{(iii)} \quad d((a, b), (a_2, b_2))^2 &= R^2 + r^2 \end{aligned}$$

sendo (a_1, b_1) e (a_2, b_2) os centros dos círculos isométricos de raio r das isometrias φ_4 e φ_4^{-1} , respectivamente, e (a, b) e R são o centro e o raio da circunferência que contém o eixo de φ_4 . Com isso temos o sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = R^2 + 1 \\ \left(a - \sqrt{1 + \frac{1}{2+2\sqrt{2}}}\right)^2 + b^2 = R^2 + \frac{1}{2+2\sqrt{2}} \\ \left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{1}{2+2\sqrt{2}}}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{1}{2+2\sqrt{2}}}\right)^2 = R^2 + \frac{1}{2+2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, encontramos $\mathbf{a} = \sqrt{2\sqrt{2}-2}$, $\mathbf{b} = \sqrt{2\sqrt{2}+2}$ e $\mathbf{R} = \sqrt{4\sqrt{2}-1}$. Assim, o eixo E_{φ_4} da isometria φ_4 é dado pela equação euclidiana

$$\left(x - \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)^2 = 4\sqrt{2}-1.$$

Os eixos $E_{\varphi_5}, \dots, E_{\varphi_{11}}$ são encontrados girando E_{φ_4} por múltiplos de 45° . Ou seja,

$$E_{\varphi_5} : \left(x + \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)^2 = 4\sqrt{2}-1$$

$$E_{\varphi_6} : \left(x + \sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)^2 = 4\sqrt{2}-1$$

$$E_{\varphi_7} : \left(x + \sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)^2 + \left(y + \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)^2 = 4\sqrt{2}-1$$

$$E_{\varphi_8} : \left(x + \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)^2 + \left(y + \sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)^2 = 4\sqrt{2}-1$$

$$E_{\varphi_9} : \left(x - \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)^2 + \left(y + \sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)^2 = 4\sqrt{2}-1$$

$$E_{\varphi_{10}} : \left(x - \sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)^2 + \left(y + \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)^2 = 4\sqrt{2}-1$$

$$E_{\varphi_{11}} : \left(x - \sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)^2 = 4\sqrt{2}-1.$$

Para encontrar os pontos do reticulado, determinamos a intersecção entre E_{φ_4} e E_{φ_5} e, em seguida, de $E_{\varphi_{11}}$ e E_{φ_5} e, também por rotação múltiplas de 45° , encontramos os demais pontos. Assim, para a intersecção entre E_{φ_4} e E_{φ_5} temos o sistema

$$\begin{cases} \left(x - \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)^2 = 4\sqrt{2}-1 \\ \left(x + \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)^2 = 4\sqrt{2}-1 \end{cases} \quad (c)$$

e, para a intersecção entre $E_{\varphi_{11}}$ e E_{φ_5} temos o sistema

$$\begin{cases} \left(x + \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)^2 = 4\sqrt{2}-1 \\ \left(x - \sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)^2 = 4\sqrt{2}-1 \end{cases} \quad (d)$$

A solução do sistema (c) é $(0, 0.240)$ e do sistema (d) é $(0.126, 0.304)$.

Observemos que, sobre o bitoro e do ponto de vista topológico, todos os eixos considerados formam uma única curva fechada (nó sobre o bitoro) e diferenciável, sendo os 16 pontos do reticulado as auto-intersecções dessa curva.

Do ponto de vista local, cada ponto do reticulado fica determinado pelo cruzamento de dois pedaços do nó. Assim, o rotulamento desses pontos por $\mathbb{Z}_{16}$ pode ser feito de modo alternado, à medida que o nó é percorrido. A FIGURA 25 ilustra esse rotulamento.

Abaixo, temos uma tabela com as coordenadas dos 16 pontos do reticulado cíclico e seus rótulos. Podemos perceber, pelas coordenadas a disposição simétrica dos pontos do reticulado.

(coord. x , coord. y)	Rótulo
(0 , 0.141)	1
(-0.170 , 0.1170)	11
(-0.240 , 0)	5
(-0.170 , 0.170)	7
(0 , -0.240)	9
(0.170 , -0.170)	3
(0.240 , 0)	13
(0.170 , 0.170)	15
(0.126 , 0.304)	10
(-0.126 , 0.304)	4
(-0.304 , 0.126)	6
(-0.304 , -0.122)	8
(-0.126 , -0.304)	2
(0.126 , -0.304)	12
(0.304 , -0.126)	14
(0.304 , 0.126)	0

Por fim, observemos que este reticulado cíclico possui 16 simetrias (σ), sendo 8 reflexões e 8 rotações (a identidade está sendo considerada nas rotações). Além disso, ele não é geometricamente uniforme, pois não há, por exemplo, simetria tal que $\sigma(1) = 15$.

4.2 Reticulado cíclico de 48 pontos gerado por eixos sobre o tritoro rotulado pelo grupo $\mathbb{Z}_{48}$

O tritoro plano pode ser concebido a partir do quociente entre o plano hiperbólico e um grupo fuchsiano, gerado por seis isometrias, cuja região fundamental é um dodecágono hiperbólico regular (FIGURA 26).

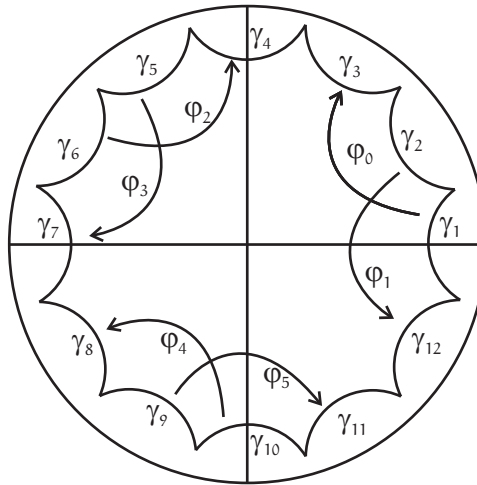


FIGURA 26: Dodecágono hiperbólico regular.

À semelhança do que foi feito no Capítulo 3, precisamos das isometrias $\varphi_0, \dots, \varphi_5$ que geram o tritoro.

Consideremos a FIGURA 27.

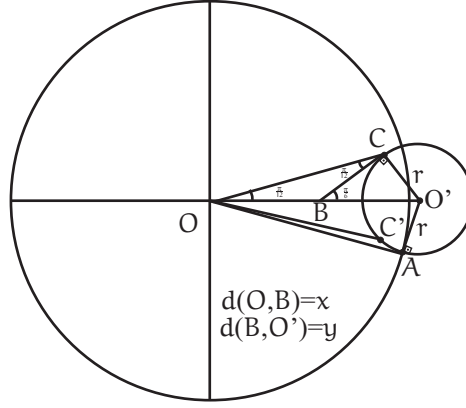


FIGURA 27: Encontrando as isometrias que geram o grupo fuchsiano do tritoro.

O círculo de centro O' contém a curva γ_1 (um dos lados do dodecágono hiperbólico regular de ângulos $\frac{\pi}{6}$) representada na FIGURA 26.

Observemos que OAO' é reto em A e BCO' é reto em C . Além disso, $\widehat{B} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$. No triângulo BCO' temos

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{r}{y} \implies \frac{r}{y} = \frac{1}{2} \implies y = 2r$$

e

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{x}{y} \implies \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies x = r\sqrt{3}.$$

No triângulo $OO'A$ temos

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= r^2 + 1 \implies (r\sqrt{3} + 2r)^2 = r^2 + 1 \implies 7r^2 + 4r^2\sqrt{3} = r^2 + 1 \implies \\ 6r^2 + 4r^2\sqrt{3} &= 1 \implies r^2 = \frac{1}{6 + 4\sqrt{3}} \implies r = \frac{1}{\sqrt{6 + 4\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$|x + y| = \sqrt{r^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{6 + 4\sqrt{3}} + 1} = \sqrt{\frac{1 + 6 + 4\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{7 + 4\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{90 + 52\sqrt{3}}}{6 + 4\sqrt{3}}.$$

Queremos mostrar que o círculo de centro O' na FIGURA 27 seja o círculo isométrico da transformação φ_0 e, mais ainda, que $I(\varphi_0^{-1})$ seja o círculo que contém a curva γ_3 da FIGURA 26. Para isso, precisamos descobrir os valores de a e c complexos tais que

$$\begin{cases} -\frac{\bar{a}}{c} = \frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{6+4\sqrt{3}} \\ \frac{a}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{6+4\sqrt{3}} \right) + i\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{6+4\sqrt{3}} \right) \end{cases}$$

Façamos $a = x + iy$ e $c = z + iw$. Sabemos que $z^2 + w^2 = 6 + 4\sqrt{3}$, já que $|c| = \sqrt{z^2 + w^2}$ e $r = \frac{1}{|c|}$. Logo,

$$\begin{aligned} -\frac{\bar{a}}{c} &= -\frac{\bar{a}}{c} \cdot \frac{\bar{c}}{\bar{c}} = -\frac{(x - iy)(z - iw)}{(z + iw)(z - iw)} = \frac{-xz + yw + i(xw + yz)}{z^2 + w^2} = \frac{-xz + yw + i(xw + yz)}{6 + 4\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{90 + 52\sqrt{3}}}{6 + 4\sqrt{3}} \implies \begin{cases} -xz + yw = \sqrt{90 + 52\sqrt{3}} \\ xw + yz = 0 \end{cases} \quad (e) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{a}{c} \cdot \frac{\bar{c}}{\bar{c}} = \frac{(x + iy)(z - iw)}{z^2 + w^2} = \frac{xz - ixw + iyz + yw}{z^2 + w^2} = \frac{xz + yw + i(-xw + yz)}{6 + 4\sqrt{3}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{90 + 52\sqrt{3}}}{6 + 4\sqrt{3}} \right) + i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{90 + 52\sqrt{3}}}{6 + 4\sqrt{3}} \right) \right) \Rightarrow \begin{cases} xz + yw = \frac{\sqrt{90 + 52\sqrt{3}}}{2} \\ yz - xw = \frac{\sqrt{3}\sqrt{90 + 52\sqrt{3}}}{2} \end{cases} \quad (f) \end{aligned}$$

Os sistemas (e) e (f) nos fornecem as equações

$$\begin{cases} 2yw = \frac{3\sqrt{90 + 52\sqrt{3}}}{2} \\ 2yz = \frac{\sqrt{3}\sqrt{90 + 52\sqrt{3}}}{2} \\ 2xz = -\frac{\sqrt{90 + 52\sqrt{3}}}{2} \\ 2xw = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{90 + 52\sqrt{3}}}{2} \end{cases}.$$

Logo,

$$4y^2w^2 + 4y^2z^2 = 3(90 + 52\sqrt{3}) \Rightarrow y^2 = \frac{3(90 + 52\sqrt{3})}{4(6 + 4\sqrt{3})} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{135 + 78\sqrt{3}}{12 + 8\sqrt{3}}}.$$

Além disso,

$$4x^2z^2 + 4x^2w^2 = 90 + 52\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = \frac{90 + 52\sqrt{3}}{4(6 + 4\sqrt{3})} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{45 + 26\sqrt{3}}{12 + 8\sqrt{3}}}.$$

Portanto,

$$z = \pm \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}}$$

e

$$w = \pm \sqrt{\frac{9 + 6\sqrt{3}}{2}}.$$

Se escolhermos $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$ e $w > 0$, as equações que os Sistemas (e) e (f) fornecem ficam satisfeitas. Dessa forma, temos a transformação

$$T(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} = \frac{\left(-\sqrt{\frac{45 + 26\sqrt{3}}{12 + 8\sqrt{3}}} + i\sqrt{\frac{135 + 78\sqrt{3}}{12 + 8\sqrt{3}}}\right)z + \left(\sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{9 + 6\sqrt{3}}{2}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{9 + 6\sqrt{3}}{2}}\right)z + \left(-\sqrt{\frac{45 + 26\sqrt{3}}{12 + 8\sqrt{3}}} + i\sqrt{\frac{135 + 78\sqrt{3}}{12 + 8\sqrt{3}}}\right)}$$

com

$$\begin{aligned} a\bar{a} - c\bar{c} &= \left(\frac{45 + 26\sqrt{3}}{12 + 8\sqrt{3}} + \frac{135 + 78\sqrt{3}}{12 + 8\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} + \frac{9 + 6\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{180 + 104\sqrt{3}}{12 + 8\sqrt{3}} - \frac{12 + 8\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{360 + 208\sqrt{3} - 144 - 192\sqrt{3} - 192}{24 + 16\sqrt{3}} \\ &= \frac{24 + 16\sqrt{3}}{24 + 16\sqrt{3}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Tomemos $\varphi_0(z) = T(z)$.

As outras isometrias são encontradas por composição da seguinte forma

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= e^{\frac{-i\pi}{2}}(\varphi_0(e^{\frac{-i\pi}{6}}(z))) \\ \varphi_2(z) &= e^{\frac{i\pi}{2}}(\varphi_0(e^{\frac{-i\pi}{2}}(z))) \\ \varphi_3(z) &= e^{\frac{2i\pi}{3}}(\varphi_0(e^{\frac{-2i\pi}{3}}(z))) \\ \varphi_4(z) &= e^{-\frac{i\pi}{3}}(\varphi_1(e^{-i\pi}(z))) \\ \varphi_5(z) &= e^{-\frac{i\pi}{3}}(\varphi_0^{-1}(e^{-i\pi}(z))).\end{aligned}$$

Consideremos a isometria φ_6 que identifica os lados γ_1 e γ_6 do dodecágono, conforme a FIGURA 28.

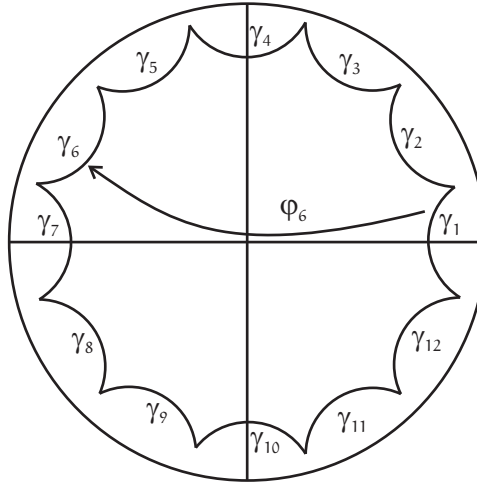


FIGURA 28: Isometria φ_6 .

Vamos encontrar a expressão de φ_6 , bem como as isometrias $\varphi_7, \dots, \varphi_{17}$, que identificam os lados $\gamma_2 - \gamma_7, \gamma_3 - \gamma_8, \dots, \gamma_{12} - \gamma_5$, respectivamente.

Para encontrar a isometria φ_6 , queremos que o círculo de centro O' que contém a curva γ_1 seja o círculo isométrico da transformação φ_6 e, mais ainda, que $I(\varphi_6^{-1})$ seja o círculo que contém a curva γ_6 da FIGURA 26. Para isso, precisamos encontrar os valores de a e c complexos tais que

$$\begin{cases} -\frac{\bar{a}}{c} = \frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{6+4\sqrt{3}} \\ \frac{a}{c} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{6+4\sqrt{3}} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{6+4\sqrt{3}} \right) \end{cases}.$$

Façamos $a = x + iy$ e $c = z + iw$. Sabemos que $z^2 + w^2 = 6 + 4\sqrt{3}$, já que $|c| = \sqrt{z^2 + w^2}$ e $r = \frac{1}{|c|}$. Logo,

$$\begin{aligned}-\frac{\bar{a}}{c} &= -\frac{\bar{a}}{c} \cdot \frac{\bar{c}}{\bar{c}} = -\frac{(x - iy)(z - iw)}{(z + iw)(z - iw)} = \frac{-xz + yw + i(xw + yz)}{z^2 + w^2} = \frac{-xz + yw + i(xw + yz)}{6 + 4\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{90 + 52\sqrt{3}}}{6 + 4\sqrt{3}} \implies \begin{cases} -xz + yw = \sqrt{90 + 52\sqrt{3}} \\ xw + yz = 0 \end{cases} \quad (g)\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{a}{c} \cdot \frac{\bar{c}}{\bar{c}} = \frac{(x + iy)(z - iw)}{z^2 + w^2} = \frac{xz - ixw + iyz + yw}{z^2 + w^2} = \frac{xz + yw + i(-xw + yz)}{6 + 4\sqrt{3}} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{90 + 52\sqrt{3}}}{6 + 4\sqrt{3}} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\sqrt{90 + 52\sqrt{3}}}{6 + 4\sqrt{3}} \right) \right) \Rightarrow \begin{cases} xz + yw = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{2} \\ yz - xw = \frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{2} \end{cases} \quad (h) \end{aligned}$$

Os sistemas (g) e (h) nos fornecem as equações

$$\begin{cases} 2yw = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt{90 + 52\sqrt{3}} \\ 2yz = \frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{2} \\ 2xz = \left(\frac{-2-\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt{90 + 52\sqrt{3}} \\ 2xw = -\frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{2} \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 4y^2w^2 + 4y^2z^2 &= \left(\frac{7 - 4\sqrt{3} + 1}{4} \right) (90 + 52\sqrt{3}) \Rightarrow \\ y^2 &= \frac{(2 - \sqrt{3})(90 + 52\sqrt{3})}{4(6 + 4\sqrt{3})} \Rightarrow \\ y &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})(90 + 52\sqrt{3})}{(6 + 4\sqrt{3})}}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 4x^2z^2 + 4x^2w^2 &= \left(\frac{7 - 4\sqrt{3} + 1}{4} \right) (90 + 52\sqrt{3}) \Rightarrow \\ x^2 &\Rightarrow \frac{(2 + \sqrt{3})(90 + 52\sqrt{3})}{4(6 + 4\sqrt{3})} \\ x &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{3})(90 + 52\sqrt{3})}{(6 + 4\sqrt{3})}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$z = \pm \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}}}$$

e

$$w = \pm \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}}}.$$

Se escolhermos $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$ e $w > 0$ as equações que os sistemas (g) e (h) fornecem ficam satisfeitas. Dessa forma, temos a transformação

$$T(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} = \frac{\left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})(90+52\sqrt{3})}{(6+4\sqrt{3})}} + i\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})(90+52\sqrt{3})}{(6+4\sqrt{3})}} \right) z + \left(\sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}} - i\sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}} \right)}{\left(\sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}} + i\sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}} \right) z + \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})(90+52\sqrt{3})}{(6+4\sqrt{3})}} - i\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})(90+52\sqrt{3})}{(6+4\sqrt{3})}} \right)}$$

com

$$\begin{aligned}
 a\bar{a} - c\bar{c} &= \left(\frac{(2 + \sqrt{3})(90 + 52\sqrt{3})}{4(6 + 4\sqrt{3})} + \frac{(2 - \sqrt{3})(90 + 52\sqrt{3})}{(6 + 4\sqrt{3})} \right) - \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}} + \frac{3 + 2\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}} \right) \\
 &= \frac{90 + 52\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}} - 2(3 + 2\sqrt{3}) \\
 &= \frac{90 + 52\sqrt{3} - 36 - 48\sqrt{3} - 48}{6 + 4\sqrt{3}} \\
 &= \frac{6 + 4\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Tomemos $\varphi_6 = T(z)$.

As outras isometrias podem ser encontradas por composição com rotações múltiplas de $\frac{\pi}{6}$.

Agora vamos aos eixos de $\varphi_6, \dots, \varphi_{17}$.

Para encontrar o eixo da isometria φ_6 , impomos as seguintes condições

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad d((a, b), (0, 0))^2 &= R^2 + 1 \\
 \text{(ii)} \quad d((a, b), (a_1, b_1))^2 &= R^2 + r^2 \\
 \text{(iii)} \quad d((a, b), (a_2, b_2))^2 &= R^2 + r^2,
 \end{aligned}$$

sendo (a_1, b_1) e (a_2, b_2) os centros dos círculos isométricos de raio r das isometrias φ_6 e φ_6^{-1} , respectivamente, e (a, b) e R são o centro e o raio da circunferência procurada. Com isso temos o sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = R^2 + 1 \\ \left(a - \frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{6+4\sqrt{3}} \right)^2 + b^2 = R^2 + \frac{1}{6+4\sqrt{3}} \\ \left(a + \frac{\sqrt{3}\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{2(6+4\sqrt{3})} \right)^2 + \left(b - \frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{2(6+4\sqrt{3})} \right)^2 = R^2 + \frac{1}{6+4\sqrt{3}} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, encontramos $a = 0.96343$, $b = 3.5956$ e $R = 3.5856$. Assim, o eixo E_{φ_6} da isometria φ_6 é dado pela equação cartesiana

$$(x - 0.963)^2 + (y - 3.595)^2 = (3.585)^2.$$

Os eixos $E_{\varphi_7}, \dots, E_{\varphi_{17}}$ são encontrados girando E_{φ_6} por rotações múltiplas de $\frac{\pi}{6}$ radianos. Ou seja,

$$\begin{aligned}
 E_{\varphi_7} &= (x + 0.963)^2 + (y - 3.595)^2 = (3.585)^2 \\
 E_{\varphi_8} &= (x + 2.632)^2 + (y - 2.632)^2 = (3.585)^2 \\
 E_{\varphi_9} &= (x + 3.595)^2 + (y - 0.9634)^2 = (3.585)^2 \\
 E_{\varphi_{10}} &= (x + 3.595)^2 + (y + 0.963)^2 = (3.585)^2 \\
 E_{\varphi_{11}} &= (x + 2.632)^2 + (y + 2.632)^2 = (3.585)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\varphi_{12}} &= (x + 0.963)^2 + (y + 3.595)^2 = (3.585)^2 \\
E_{\varphi_{13}} &= (x - 0.963)^2 + (y + 3.595)^2 = (3.585)^2 \\
E_{\varphi_{14}} &= (x - 2.632)^2 + (y + 2.632)^2 = (3.585)^2 \\
E_{\varphi_{15}} &= (x - 3.595)^2 + (y + 0.963)^2 = (3.585)^2 \\
E_{\varphi_{16}} &= (x - 3.595)^2 + (y - 0.963)^2 = (3.585)^2 \\
E_{\varphi_{17}} &= (x - 2.632)^2 + (y - 2.632)^2 = (3.585)^2
\end{aligned}$$

Para encontrar os pontos do reticulado, faremos a interseção de E_{φ_6} com E_{φ_7} , E_{φ_6} com E_{φ_8} , E_{φ_6} com E_{φ_9} e E_{φ_6} com $E_{\varphi_{10}}$, e também por rotações, encontramos os demais pontos. Assim, teremos os quatro seguintes sistemas

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} (x - 0.963)^2 + (y - 3.595)^2 = (3.585)^2 \\ (x + 0.963)^2 + (y - 3.595)^2 = (3.585)^2 \end{cases} \\
&\begin{cases} (x - 0.963)^2 + (y - 3.595)^2 = (3.585)^2 \\ (x + 2.632)^2 + (y - 2.632)^2 = (3.585)^2 \end{cases} \\
&\begin{cases} (x - 0.963)^2 + (y - 3.595)^2 = (3.585)^2 \\ (x + 3.595)^2 + (y - 0.963)^2 = (3.585)^2 \end{cases} \\
&\begin{cases} (x - 0.96343)^2 + (y - 3.5956)^2 = (3.585)^2 \\ (x + 3.595)^2 + (y + 0.963)^2 = (3.585)^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

com soluções $(0, 0.141)$, $(-0.041, 0.153)$, $(-0.098, 0.170)$ e $(-0.206, 0.206)$, respectivamente. Os outros pontos serão obtidos por rotação e estão reunidos na tabela abaixo com seus respectivos rótulos, conforme a FIGURA 29.

(coord. x , coord. y)	Rótulo
(0 , 0.141)	2
(-0.07 , 0.122)	30
(-0.122 , 0.07)	42
(-0.141 , 0)	6
(-0.122 , -0.07)	34
(-0.07 , -0.122)	14
(0 , -0.141)	26
(0.07 , -0.122)	38
(0.122 , -0.07)	18
(0.141 , 0)	46
(0.122 , 0.07)	10
(0.07 , 0.122)	22

(coord. x , coord. y)	Rótulo
(-0.041 , 0.153)	41
(-0.112 , 0.112)	5
(-0.153 , 0.041)	33
(-0.153 , -0.041)	13
(-0.112 , -0.112)	25
(-0.041 , -0.153)	37
(0.041 , -0.153)	17
(0.112 , -0.112)	45
(0.153 , -0.041)	9
(0.153 , 0.041)	21
(0.112 , 0.112)	1
(0.041 , 0.1531)	29

(coord. x , coord. y)	Rótulo
(-0.098 , 0.17)	3
(-0.17 , 0.098)	31
(-0.197 , 0)	43
(-0.17 , -0.098)	7
(-0.098 , -0.17)	35
(0 , -0.197)	15
(0.098 , -0.17)	27
(0.17 , -0.098)	39
(0.197 , 0)	19
(0.17 , 0.098)	47
(0.098 , 0.17)	11
(0 , 0.197)	23

(coord. x , coord. y)	Rótulo
(-0.206 , 0.206)	32
(-0.281 , 0.075)	12
(-0.281 , -0.075)	24
(-0.206 , -0.206)	36
(-0.075 , -0.281)	16
(0.075 , -0.281)	44
(0.206 , -0.206)	8
(0.281 , -0.075)	20
(0.281 , 0.075)	0
(0.206 , 0.206)	28
(0.075 , 0.281)	40
(-0.075 , 0.281)	4

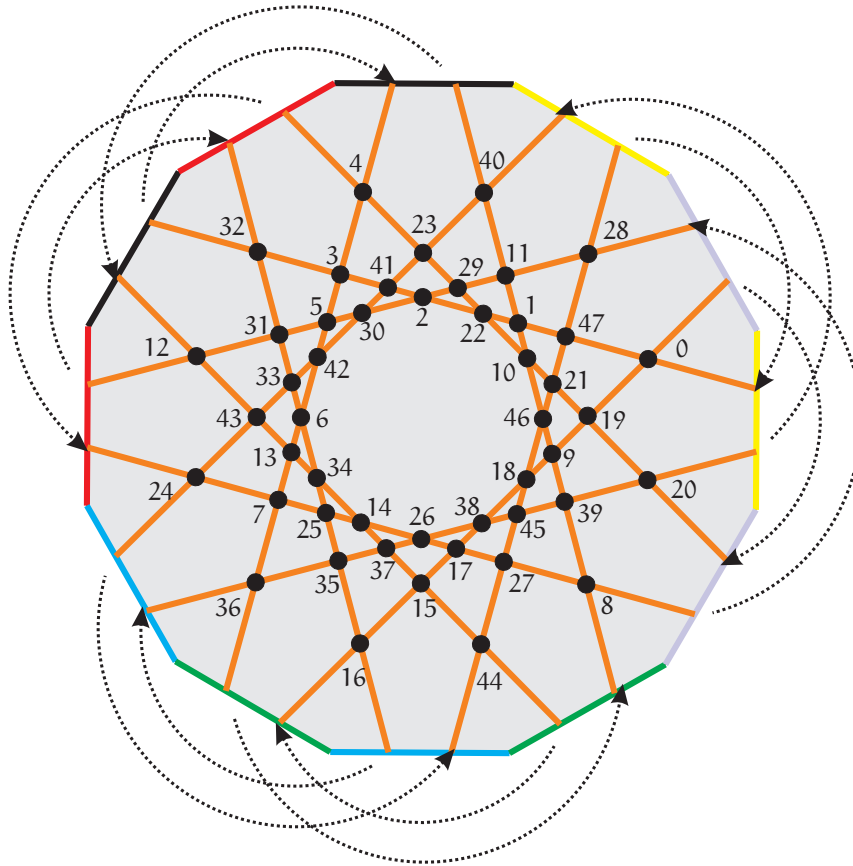


FIGURA 29: Reticulado cíclico sobre o tritoro rotulado pelo grupo $\mathbb{Z}_{48}$.

4.3 Reticulado cíclico de 16 pontos gerado por geodésicas sobre o bitoro

O reticulado que tratamos a seguir é gerado por geodésicas que ligam pontos que trisectam cada lado do octógono hiperbólico regular que gera o bitoro. O procedimento é bastante semelhante ao que fizemos nas seções anteriores, mas neste caso, o nó que iremos obter sobre o bitoro não é diferenciável. A vantagem de considerarmos a técnica que descrevemos a seguir é a de que os pontos do reticulado são mais distantes uns dos outros, o que significa uma melhor distância

mínima do reticulado com a métrica hiperbólica, o que pode ser de grande valia em uma possível implementação do reticulado em Teoria da Informação e Codificação.

Consideremos, na FIGURA 19, C_1 o círculo isométrico que contém a curva γ_1 , C_2 o círculo isométrico que contém a curva γ_2 e C_3 o círculo isométrico que contém a curva γ_8 . Desta forma, temos as equações

$$\left(x - \frac{\sqrt{14+10\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2+2\sqrt{2}} \quad (C_1)$$

$$\left(x - \frac{\left(\frac{\sqrt{14+10\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\left(\frac{\sqrt{14+10\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2+2\sqrt{2}} \quad (C_2)$$

$$\left(x - \frac{\left(\frac{\sqrt{14+10\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\left(\frac{\sqrt{14+10\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2+2\sqrt{2}} \quad (C_3)$$

Fazendo a intersecção entre C_1 e C_2 encontramos o ponto P_1 e da intersecção entre C_1 e C_3 temos o ponto P_2 . Para isso temos os seguintes sistemas

$$\begin{cases} \left(x - \frac{\sqrt{14+10\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2+2\sqrt{2}} \\ \left(x - \frac{\left(\frac{\sqrt{14+10\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\left(\frac{\sqrt{14+10\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2+2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x - \frac{\sqrt{14+10\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2+2\sqrt{2}} \\ \left(x - \frac{\left(\frac{\sqrt{14+10\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\left(\frac{\sqrt{14+10\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2+2\sqrt{2}} \end{cases}$$

cujas soluções são,

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7} - \frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7}, \frac{3}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7} - \sqrt{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)$$

e

$$P_2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7} - \frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7}, \sqrt{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7} - \frac{3}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right).$$

Para calcular a distância hiperbólica d entre P_1 e P_2 , calculemos inicialmente $P_1\overline{P_2}$ e $P_1 - P_2$. Então,

$$\begin{aligned} P_1\overline{P_2} &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7} - \frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7} + i\left(\frac{3}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7} - \sqrt{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)\right) \\ &\quad \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7} - \frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7} + i\left(-\sqrt{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7} + \frac{3}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

e

$$P_1 - P_2 = 2i\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right) = i\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right).$$

Logo, d será dada por:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{|1 - P_1 \overline{P_2}| + |P_1 - P_2|}{|1 - P_1 \overline{P_2}| - |P_1 - P_2|} \right) &= \ln \left(\frac{\left| 1 - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right| + \left| i(3 - 2\sqrt{2}) \left(\sqrt{5\sqrt{2} + 7} \right) \right|}{\left| 1 - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right| - \left| i(3 - 2\sqrt{2}) \left(\sqrt{5\sqrt{2} + 7} \right) \right|} \right) \\ &= \ln \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + (3 - 2\sqrt{2}) \left(\sqrt{5\sqrt{2} + 7} \right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} - (3 - 2\sqrt{2}) \left(\sqrt{5\sqrt{2} + 7} \right)} \right) \\ &= 3.057. \end{aligned}$$

Seja $s = \frac{d}{3} = 1.019$.

Consideremos a FIGURA 30.

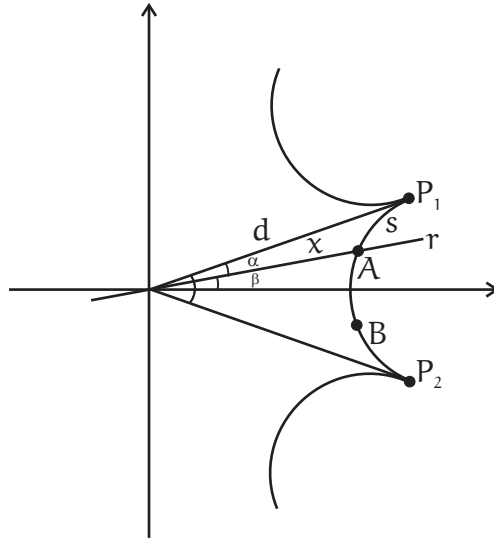


FIGURA 30: Intersecção entre C_1 e r .

Vamos encontrar o valor de x , usando a Primeira Lei dos Cossenos Hiperbólica; o ângulo α por meio da Lei dos Senos Hiperbólica; e finalmente, a reta r , que intersecta o círculo C_1 . Portanto,

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \cosh(d) \cosh(s) - \sinh(d) \sinh(s) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &= \cosh(3.057) \cosh(1.019) - \sinh(3.057) \sinh(1.019) (0.923) \\ &= 4.8758 \implies x = 2.266 \end{aligned}$$

e

$$\frac{\sinh(x)}{\sinh\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\sinh(s)}{\sinh(\alpha)} \implies \sinh(\alpha) = \frac{\sinh(1.019) (0.38)}{\sinh(2.266)} \implies \sinh(\alpha) = 0.096 \implies \alpha = 5.544^\circ$$

e o ângulo $\beta = 22.5^\circ - 5.544^\circ = 16.955^\circ$.

Logo, a equação da reta r é dada por

$$y = (\tan(16.955^\circ)) x \implies y = 0.304x.$$

Fazendo a intersecção da reta r com C_1 temos o ponto $A = (0.696, 0.212)$. E a intersecção da reta $y = -0.304x$ com C_1 nos dá o ponto $B = (0.696, -0.212)$. Estamos interessados na geodésica que passa por A e $\bar{B}$ (obtido rotacionando B de 135°). Com isso, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = r^2 + 1 \\ (0.696 - a)^2 + (0.212 - b)^2 = r^2 \\ (-0.342 - a)^2 + (0.642 - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

que tem como solução $a = 0.632$, $b = 1.527$ e $r = 1.317$, ou seja, a circunferência procurada é dada pela equação

$$G_1 : (x - 0.632)^2 + (y - 1.527)^2 = (1.317)^2$$

As outras circunferências são obtidas por rotações múltiplas de 45° .

$$G_2 : (x + 0.632)^2 + (y - 1.527)^2 = (1.317)^2$$

$$G_3 : (x + 1.527)^2 + (y - 0.632)^2 = (1.317)^2$$

$$G_4 : (x + 1.527)^2 + (y + 0.632)^2 = (1.317)^2$$

$$G_5 : (x + 0.632)^2 + (y + 1.527)^2 = (1.317)^2$$

$$G_6 : (x - 0.632)^2 + (y + 1.527)^2 = (1.317)^2$$

$$G_7 : (x - 1.527)^2 + (y + 0.632)^2 = (1.317)^2$$

$$G_8 : (x - 1.527)^2 + (y - 0.632)^2 = (1.317)^2$$

Fazendo a intersecção entre G_1 e G_2 obtemos o ponto P_1 do reticulado e por rotação de 45° deste ponto obtemos os demais, num total de 8 pontos. Em seguida, fazemos a intersecção entre G_2 e G_8 , e encontramos o ponto P_2 e, novamente por rotação de 45° , obtemos os demais, num total, também, de 8 pontos. Assim, temos um reticulado de 16 pontos sobre o bitoro, como mostra a FIGURA 31.

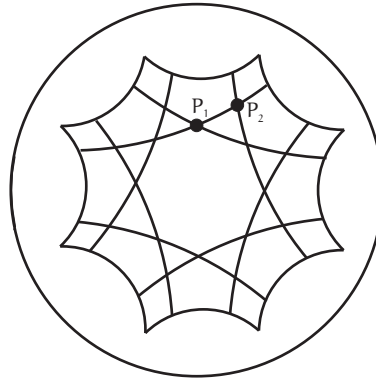


FIGURA 31: Reticulado hiperbólico.

4.4 Reticulado cíclico de 48 pontos gerado por geodésicas sobre o tritoro

Passaremos agora ao reticulado gerado por geodésicas que ligam os pontos que trisectam os lados do dodecágono hiperbólico regular que gera o tritoro.

Para isso, considere C_1 o círculo isométrico que contém a curva γ_1 , C_2 o círculo isométrico que contém a curva γ_2 e C_3 o círculo isométrico que contém a curva γ_{12} , da FIGURA 26. Desta

forma, temos

$$\left(x - \frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{6+4\sqrt{3}}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{6+4\sqrt{3}} \quad (C_1)$$

$$\left(x - \frac{\left(\frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{6+4\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{(6+4\sqrt{3})2}\right)^2 = \frac{1}{6+4\sqrt{3}} \quad (C_2)$$

$$\left(x - \frac{\left(\frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{6+4\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{(6+4\sqrt{3})2}\right)^2 = \frac{1}{6+4\sqrt{3}} \quad (C_3)$$

Fazendo a intersecção entre C_1 e C_2 encontramos o ponto P_1 e da intersecção entre C_1 e C_3 temos o ponto P_2 . Para isso temos os seguintes sistemas

$$\begin{cases} \left(x - \frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{6+4\sqrt{3}}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{6+4\sqrt{3}} \\ \left(x - \frac{\left(\frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{6+4\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{(6+4\sqrt{3})2}\right)^2 = \frac{1}{6+4\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x - \frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{6+4\sqrt{3}}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{6+4\sqrt{3}} \\ \left(x - \frac{\left(\frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{6+4\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{90+52\sqrt{3}}}{(6+4\sqrt{3})2}\right)^2 = \frac{1}{6+4\sqrt{3}} \end{cases}$$

cujas soluções são, $P_1 = (0.898, 0.24)$ e $P_2 = (0.898, -0.24)$

Para calcular a distância hiperbólica d entre P_1 e P_2 , calcularemos inicialmente $P_1\overline{P_2}$ e $P_1 - P_2$. Então,

$$P_1\overline{P_2} = (0.898 + i0.24)(0.898 + i0.24) = \frac{3}{4} + i\frac{7\sqrt{3}+12}{16\sqrt{3}+28}$$

$$P_1 - P_2 = i\left(\frac{7\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{2}\right)\left(\sqrt{26\sqrt{3}+45}\right).$$

Logo, d será dada por:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{|1 - P_1\overline{P_2}| + |P_1 - P_2|}{|1 - P_1\overline{P_2}| - |P_1 - P_2|}\right) &= \ln\left(\frac{\left|1 - \frac{3}{4} - i\frac{7\sqrt{3}+12}{16\sqrt{3}+28}\right| + \left|i\left(\frac{7\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{2}\right)\left(\sqrt{26\sqrt{3}+45}\right)\right|}{\left|1 - \frac{3}{4} - i\frac{7\sqrt{3}+12}{16\sqrt{3}+28}\right| - \left|i\left(\frac{7\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{2}\right)\left(\sqrt{26\sqrt{3}+45}\right)\right|}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\left|\frac{1}{4} - i\frac{7\sqrt{3}+12}{16\sqrt{3}+28}\right| + \left(\frac{7\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{2}\right)\left(\sqrt{26\sqrt{3}+45}\right)}{\left|\frac{1}{4} - i\frac{7\sqrt{3}+12}{16\sqrt{3}+28}\right| - \left(\frac{7\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{2}\right)\left(\sqrt{26\sqrt{3}+45}\right)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{7\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{2}\right)\left(\sqrt{26\sqrt{3}+45}\right)}{\frac{1}{2} + \left(\frac{7\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{2}\right)\left(\sqrt{26\sqrt{3}+45}\right)}\right) \\ &= 3.983 \end{aligned}$$

Seja $s = \frac{d}{3} = 1.327$

Aproveitando a FIGURA 30, vamos encontrar o valor de x , usando a Primeira Lei do Cossenos Hiperbólica; o ângulo α por meio da Lei dos Senos Hiperbólica; e finalmente, a reta r , que intersecta o círculo C_1 . Portanto,

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \cosh(d) \cosh(s) - \sinh(d) \sinh(s) \cos(15^\circ) \\ &= \cosh(3.983) \cosh(1.327) - \sinh(3.983) \sinh(1.327) (0.923) \\ &= 8.760 \implies x = 2.860\end{aligned}$$

$$\frac{\sinh(x)}{\sinh(15^\circ)} = \frac{\sinh(s)}{\sinh(\alpha)} \implies \sin \alpha = \frac{\sinh(1.327) (0.258)}{\sinh(2.860)} \implies \sin \alpha = 0.052 \implies \alpha = 2.989^\circ$$

e o ângulo $\beta = 15^\circ - 2.989^\circ = 12.011^\circ$.

Logo a equação da reta r é dada por

$$y = (\tan(12.011^\circ)) x \implies y = 0.212x.$$

Fazendo a intersecção de r com C_1 temos o ponto $A = (0.821, 0.174)$. E a intersecção da reta $y = -0.212x$ com C_1 nos dá o ponto $B = (0.821, -0.174)$. Estamos interessados na geodésica que passa por A e $\bar{B}$ (obtido rotacionando B de 150°). Com isso temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = r^2 + 1 \\ (0.821 - a)^2 + (0.174 - b)^2 = r^2 \\ (-0.624 - a)^2 + (0.561 - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

que tem como solução $a = 0.579$, $b = 2.162$ e $r = 2.003$, ou seja, a circunferência procurada é dada pela equação

$$H_1 : (x - 0.579)^2 + (y - 2.162)^2 = (2.003)^2$$

As outras circunferências são obtidas por rotações múltiplas de 30° .

$$\begin{aligned}H_2 : (x + 0.818)^2 + (y - 2.023)^2 &= (2.003)^2 \\ H_3 : (x + 1.720)^2 + (y - 1.343)^2 &= (2.003)^2 \\ H_4 : (x + 2.162)^2 + (y - 0.579)^2 &= (2.003)^2 \\ H_5 : (x + 1.638)^2 + (y + 0.818)^2 &= (2.003)^2 \\ H_6 : (x + 1.058)^2 + (y + 1.720)^2 &= (2.003)^2 \\ H_7 : (x + 0.579)^2 + (y + 2.162)^2 &= (2.003)^2 \\ H_8 : (x - 1.103)^2 + (y + 1.638)^2 &= (2.003)^2 \\ H_9 : (x - 1.582)^2 + (y + 1.582)^2 &= (2.003)^2 \\ H_{10} : (x - 2.162)^2 + (y + 0.579)^2 &= (2.003)^2 \\ H_{11} : (x - 2.162)^2 + (y - 0.579)^2 &= (2.003)^2 \\ H_{12} : (x - 1.582)^2 + (y - 1.582)^2 &= (2.003)^2\end{aligned}$$

Fazendo a intersecção entre H_1 e H_2 obtemos o ponto P_1 do reticulado e por rotações múltiplas de 30° deste ponto obtemos os demais, num total de 12 pontos. Em seguida, fazemos a intersecção entre H_2 e H_{12} , e encontramos o ponto P_2 e, novamente por rotações múltiplas de 30° , obtemos os demais, num total também de 12 pontos. Analogamente, para a intersecção de H_2 e H_{11} , ponto P_3 , e H_2 e H_{10} , ponto P_4 . Assim, temos um reticulado de 48 pontos sobre o tritoro, parte deles mostrados na FIGURA 32.

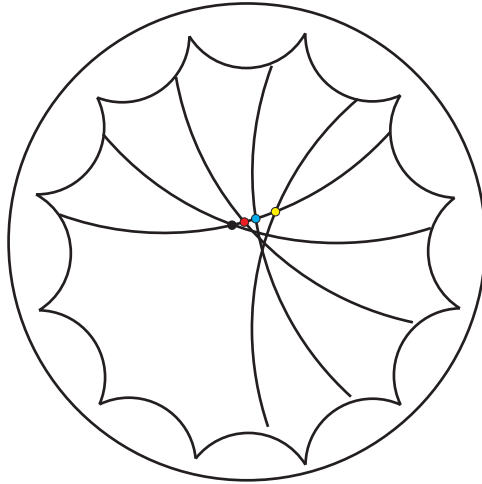


FIGURA 32: Reticulado hiperbólico sobre o tritoro. De preto temos o ponto P_1 , vermelho o ponto P_2 , azul o ponto P_3 e amarelo o ponto P_4 .

Baseados nos exemplos que consideramos, é possível conjecturar, tanto com eixos, quanto com geodésicas que trisectam os lados do polígono fundamental, a seguinte generalização:

Teorema 4.1 (*conjectura*) *Seja um g -toro plano $g \geq 2$ gerado por um grupo fuchsiano com polígono hiperbólico regular fundamental de $4n$ lados. Então, o reticulado cíclico gerado por eixos ou geodésicas que trisectam os lados do polígono fundamental considerado conforme as construções descritas nos exemplos acima, possui $(2n - 2)4n = 8n^2 - 8n$ pontos.*

Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste trabalho estudamos algumas classes de reticulados em dois ambientes distintos:

(1) em superfícies quocientes n -dimensionais obtidas por meio de quociente entre o espaço $\mathbb{R}^n$ e um grupo discreto de isometrias gerado por um conjunto linearmente independentes de translações. São os toros euclidianos de dimensão n , nos quais o de dimensão 2 recebe o nome de toro plano. Os reticulados sobre os toros euclidianos n -dimensionais considerados nesse estudo foram os provenientes de $\mathbb{Z}^2$.

(2) em superfícies quocientes bidimensionais obtidas por meio de quociente entre o plano hiperbólico e um grupo discreto gerado por isometrias hiperbólicas, chamado de grupo fuchsiano. Essas superfícies quocientes são os g -toros planos, ou seja, toros que do ponto de vista topológico possuem gênero $g \geq 2$. Estudamos, mais especificamente, bitoros e tritoros, considerando reticulados geometricamente uniformes provenientes de tesselações e reticulados cíclicos provenientes de eixos de isometrias ou geodésicas que triseccionam lados de polígono fundamental que origina o g -toro.

Com relação aos estudos do item (1), concluímos que a abordagem geométrica de reticulados canônicos (gerados por $\mathbb{Z}^2$) em toros euclidianos apresenta, devido às suas inúmeras simetrias, uma simplicidade que possivelmente é superior a uma abordagem puramente algébrica. Isso sem dizer que qualquer reticulado em toros euclidianos podem ser imersos em espaços esféricos, o que é muito interessante para a Teoria da Informação e Codificação. Prova da simplicidade geométrica do qual estamos falando são os grafos circulares provenientes desses reticulados, cujas simetrias tornam seu estudo e visualização muito simples. Além disso, há um campo gigante de estudos futuros em reticulados em toros euclidianos quando consideramos outro grupo gerador, diferente de $\mathbb{Z}^2$. Além disso, o estudo de códigos perfeitos com a abordagem geométrica é apenas incipiente em ambientes euclidianos com reticulados gerais.

Com relação aos estudos do item (2), há muito o que fazer. Começando pelo fato de que o espaço hiperbólico não possui estrutura vetorial normada compatível a métrica hiperbólica usual, temos o problema da não existência de tesselações no plano hiperbólico vinculadas ao grupo $\mathbb{Z}^2$, o que impossibilita, no ambiente hiperbólico, um estudo totalmente análogo ao que foi feito no ambiente euclidiano. Desta forma, o campo de estudos recai basicamente sobre dois tipos de reticulados: os geometricamente uniformes (provenientes de tesselações) e os cíclicos (sobre nós nos g -toros planos). Os estudos em dimensão maior do que 2 no ambiente hiperbólico estão, também, todos por fazer. Além disso, há a questão dos códigos perfeitos, que não abordamos nos g -toros. Por fim, há o estudo de distâncias mínimas em reticulados hiperbólicos, que é a porta de entrada para comparações e possíveis aplicações em Teoria da Informação e Codificação.

Referências Bibliográficas

- [1] Cavalcante, R. G., Lazari, H. Lima, J. D. & Palazzo Jr., R. A New Approach to the Design of Digital Communication Systems. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science- AMS. Vol. 68, 2005. (33 p.)
- [2] Costa, S. I. R., Muniz, M. Agustini, E. & Palazzo, R. Graphs, Tessellations, and Perfect Codes on Flat Tori. IEEE Transactions on Information Theory. Vol. 50, n. 10, oct. 2004, pp. 2363-2377.
- [3] Forney, D. Geometrically Uniform Codes. IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 37, Sept. 1991, pp. 1241-1260.
- [4] Gallot, S, Hulin, D. & Lafontaine, J. Riemannian Geometry. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [5] Katok, S. Fuchsian Groups. Chicago: The University of Chicago Press. 1992.
- [6] Lazari, H. & Palazzo Jr. R. Geometrically uniform hyperbolic codes. Computational and Applied Mathematics. Vol. 24, No. 2, 2005, pp. 173-192
- [7] Rodrigues, L. B. Reticulados Hiperbólicos em Espaços Quocientes Mergulhados Isometricamente em Espaços Euclidianos. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Uberlândia-MG, 2010.
- [8] Silva, E. B., Firer, M., Costa, S. R. & Palazzo Jr., R. Signal constellations in the hyperbolic plane: A proposal for new communication systems. Journal of the Franklin Institute, no. 343, 2006, pp. 69-82.
- [9] Stillwell, J. Geometry and Surfaces. New York: Springer-Verlag, 1992.