

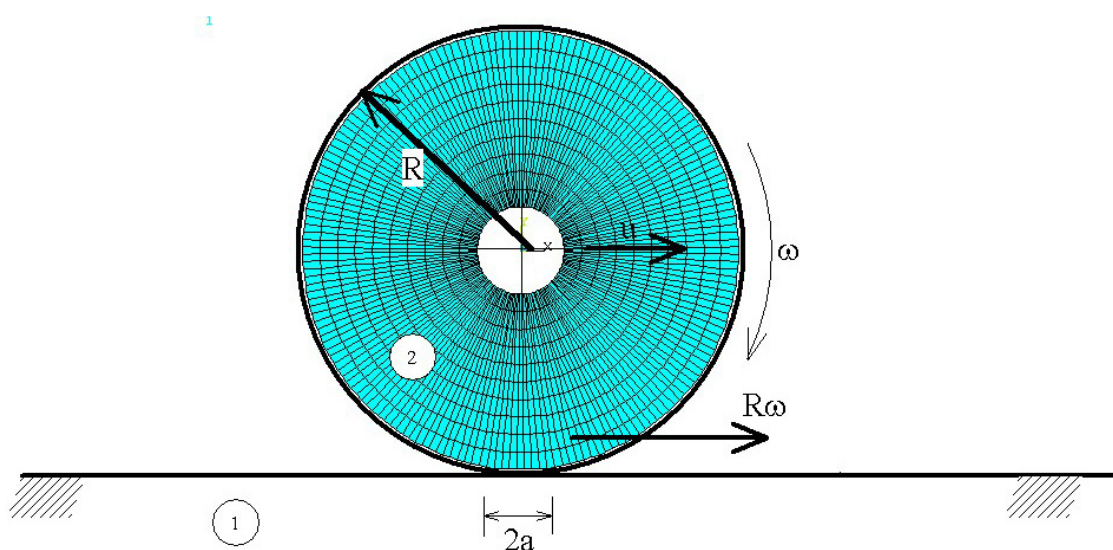


Figura 2.36 – Modelo de elementos finitos para simulação térmica do contato mecânico entre dois cilindros.

Na Figura 2.37 e na Figura 2.38 são mostrados os resultados após cinco rotações completas do cilindro e o envelope das temperaturas máximas na superfície do cilindro. Nota-se que após 15 revoluções do cilindro de trabalho, a temperatura da superfície atinge um regime que pode ser chamado de “regime quase estacionário”, isto é, a temperatura com que cada ponto fixo a superfície do cilindro entra na região de aquecimento em cada revolução é exatamente igual à temperatura da revolução anterior.

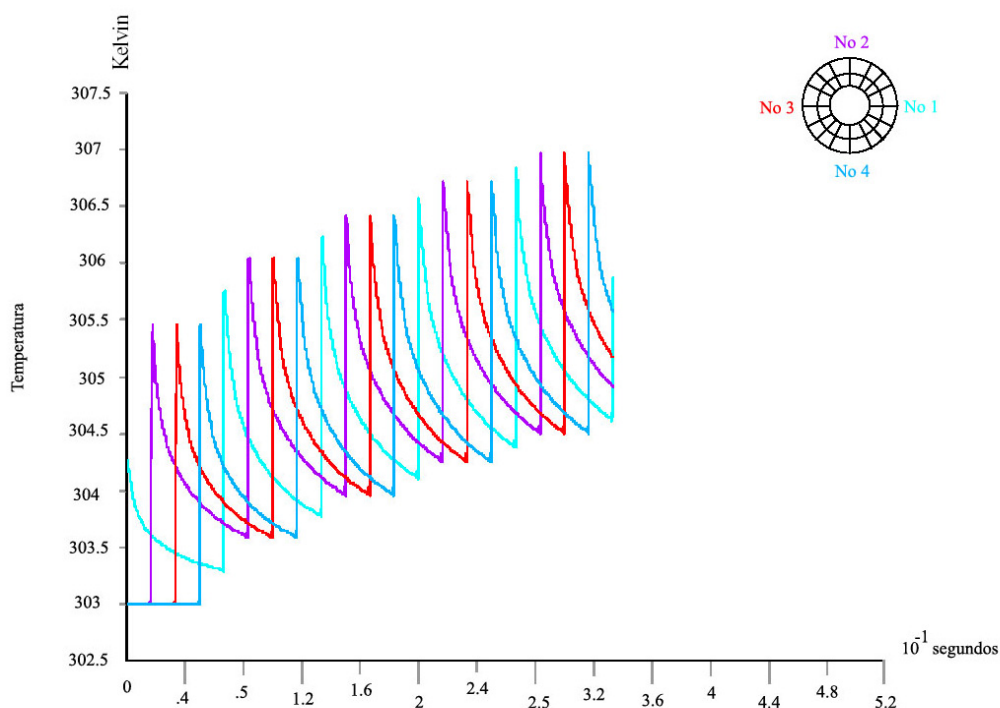


Figura 2.37 – Variação temporal da temperatura no cilindro após 5 revoluções.

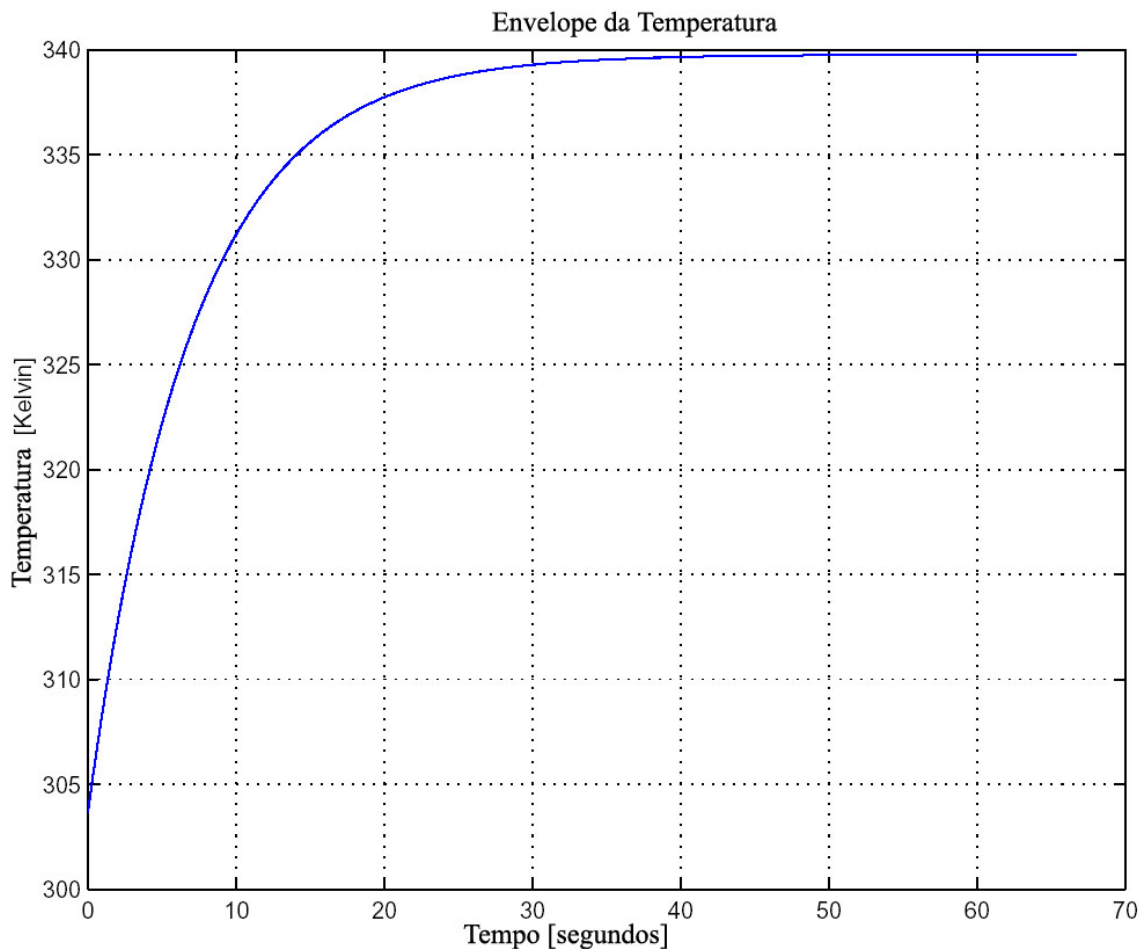


Figura 2.38 – Envelope das temperaturas na superfície do cilindro.

Outro fator importante a ser salientado é a condição cíclica de temperatura à qual o cilindro é submetido. Para estas condições poderão aparecer trincas de origem térmica que são perpendiculares a superfície. Se tal fenômeno ocorrer em grande intensidade pode provocar o descolamento de pequenas parcelas de material do cilindro quando as trincas de origem térmica encontrarem as trincas provenientes da fadiga de contato que são sub superficiais e paralelas à superfície do cilindro.

2.5.8 Resultado de Simulações Numéricas para o Contato entre um Corpo Esférico e um Corpo Plano.

Nesta etapa das simulações numéricas pretende-se mostrar que o comportamento do contato mecânico entre um corpo esférico e um corpo plano pode ser usado para representar o contato entre cilindros. O efeito de concentração da pressão de contato, que há no caso do contato de cilindros de comprimentos diferentes, não existe, em princípio, no contato entre uma esfera e um plano. Durante ensaios do tipo alternativo com uma esfera sobre um plano,

situações que provoquem efeitos de concentração de tensão podem ocorrer devido a modificações locais da geometria do contato. Para medir esta geometria do plano de contato em tempo real, o ensaio deveria prever, por exemplo, um mapeamento do plano localizado imediatamente à frente da esfera. Nesta situação deve-se assumir que a esfera mantém inalterada sua geometria. Outra possibilidade é efetuar o ensaio com uma primeira trajetória, mapear a superfície do plano e da esfera, para em seguida continuar o ensaio.

No entanto, medir os perfis das superfícies e posicioná-las como estavam durante o ensaio experimental é uma tarefa difícil de ser realizada. Outro fator que dificulta e em alguns casos pode inviabilizar a modelagem por elementos finitos destas condições de concentração do campo de tensões é o fato de não ser possível parar o experimento no exato momento em que as superfícies apresentam uma configuração propícia para a concentração do campo de pressão. Isto é, com a concentração do campo de pressões é de se esperar que ocorra um desgaste maior nas regiões de maior pressão de contato destruindo o perfil geométrico das superfícies antes que este possa ser medido.

Milan (2004) sugere que dentre os ensaios tribológicos utilizados para o estudo de desgaste em cilindros de laminação, aquele que tem sido capaz de representar com maior fidelidade os fenômenos tribológicos que ocorrem nos cilindros de laminação reais, é o ensaio de desgaste realizado com um par de contato tipo esfera sobre um plano com movimento alternativo.

Uma das condições para que a classe de ensaios tribológicos do tipo desgaste alternativo, denominado “*Reciprocating Tribological Test*”, é a semelhança do campo de tensões atuantes no par esfera sobre plano, com o do contato entre dois cilindros.

O modelo construído para esta classe de problemas utilizou como propriedades dos materiais as mesmas utilizadas por Milan (2004), desde que segundo o autor os resultados dos efeitos tribológicos foram muito semelhantes àqueles encontrados na análise de cilindros de laminação. As propriedades utilizadas foram:

- Diâmetro da Esfera : 9.525 mm
- Módulo de Elasticidade do material, Si_3N_4 , da esfera : 325.9 GPa
- Coeficiente de Poisson do material da esfera : 0.24
- Densidade do material da esfera : 3184 Kg/m³
- Material do Plano: HSS (*High Speed Steel*)
- Módulo de elasticidade do material do plano : 210 GPa
- Coeficiente de Poisson do material do plano : 0.3
- Carga Normal : 48 N

A carga tangencial é proveniente do atrito cinemático entre a esfera e o plano simulado através de deslocamentos sucessivos do plano em passos de $6 \cdot 10^{-5}$ m. O coeficiente de atrito foi medido no tribômetro PLINT por Milan (2004) e vale 0.43. Neste modelo a força normal é aplicada no centro da esfera que se encontra sobre o plano de simetria. Ambos os corpos, a esfera e o bloco, possuem os nós do plano de simetria com restrição de movimento no sentido do eixo z, perpendicular ao plano de simetria. Para garantir a estabilidade numérica assumiu-se no modelo que todos os nós da esfera vizinhos ao centro tem seus graus de liberdade no plano xz restritos. Este procedimento evita que pequenos momentos devido a erros numéricos no cálculo da pressão de contato fiquem sem um momento de reação em relação a um referencial inercial, o que provocaria movimentos de corpo rígido da esfera.

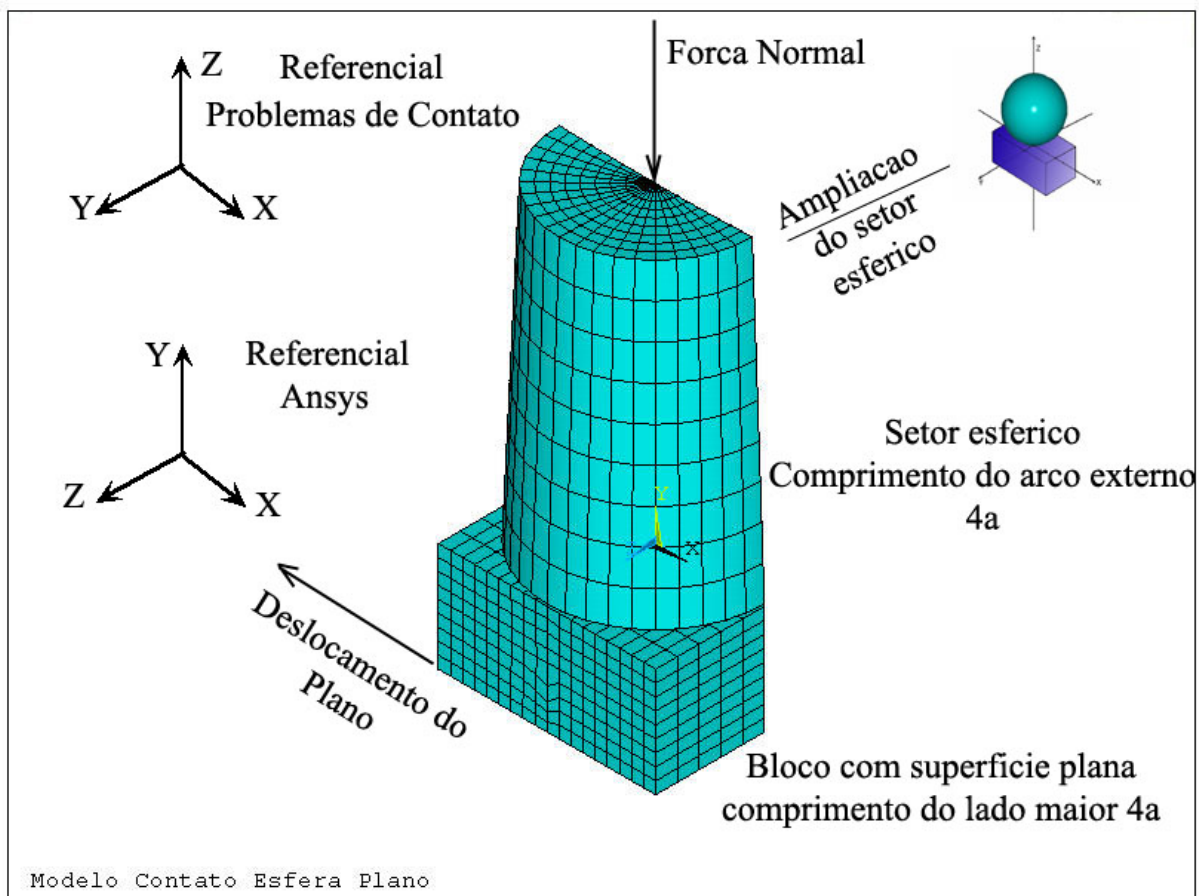


Figura 2.39 – Modelo para simulação do contato entre uma esfera e um plano.

Os resultados são mostrados apenas para três passos de integração. O primeiro passo de integração corresponde à condição estacionária, os demais passos de integração ao primeiro passo de deslocamento do bloco e ao último passo de deslocamento. Nos resultados são apresentados somente os campos de tensões para o bloco de superfície plana, isto se

deve ao fato de em ensaios tribológicos do tipo alternativo o bloco ser o objeto principal de estudo, a esfera em muitos casos tem seu material escolhido de forma a se reproduzir um determinado fenômeno na superfície do bloco de forma acelerada, o que pode conduzir a um material diferente daquele que ira formar o par de contato com o material do bloco em situações reais.

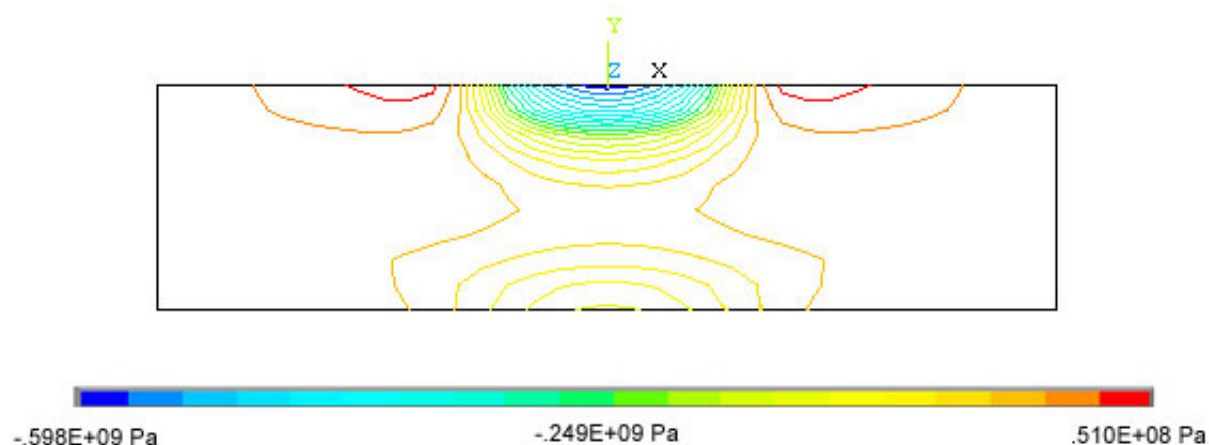


Figura 2.40 – Campo de tensão principal, σ_1 , no bloco sem deslocamento relativo à esfera.

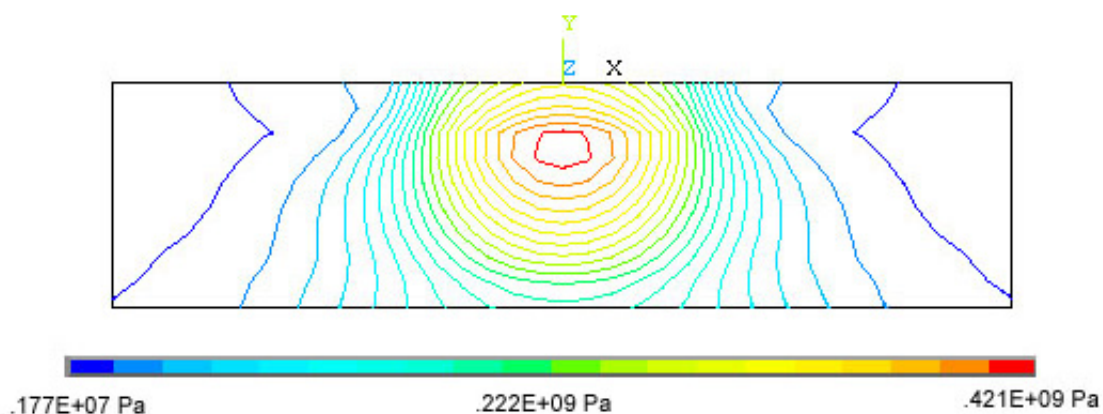


Figura 2.41 - Campo de tensão de cisalhamento máxima, $\tau_{\max}$, no bloco sem deslocamento relativo à esfera.

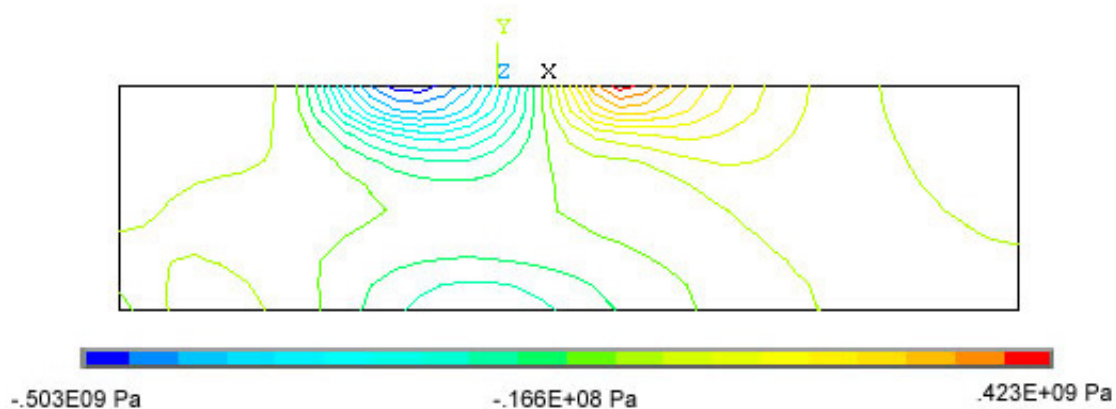


Figura 2.42 – Campo de tensão principal, σ_1 , no bloco no primeiro passo de deslocamento relativo à esfera.

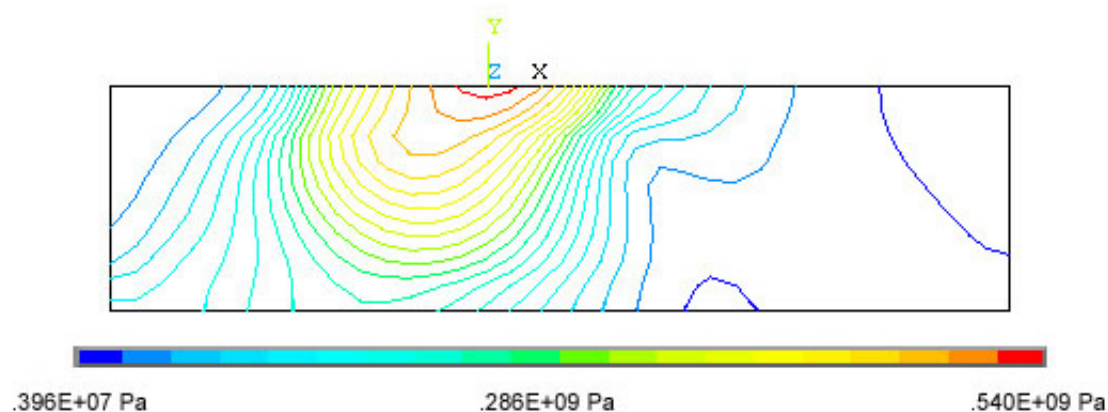


Figura 2.43 - Campo de tensão de cisalhamento máxima, τ_{max} , no bloco no bloco no primeiro passo de deslocamento relativo à esfera.

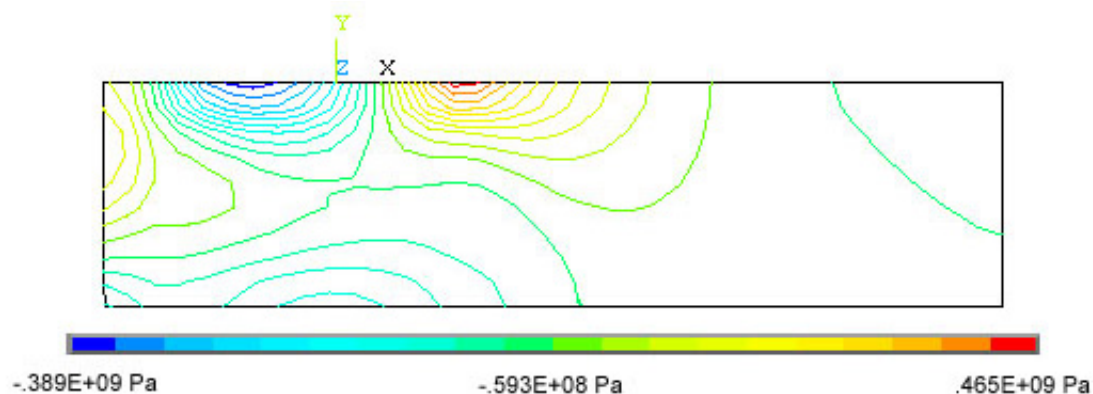


Figura 2.44 – Campo de tensão principal, σ_1 , no bloco no ultimo passo de deslocamento relativo à esfera.

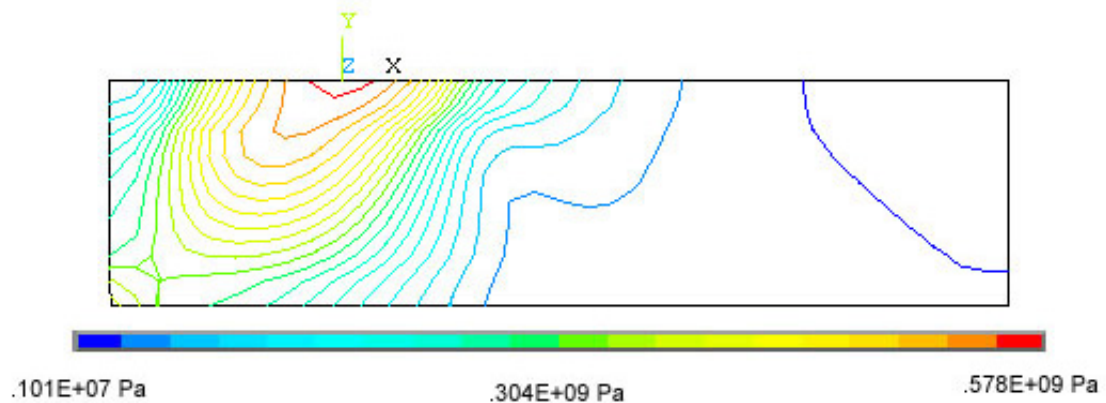


Figura 2.45 - Campo de tensão de cisalhamento máxima, $\tau_{\max}$, no bloco no ultimo passo de deslocamento relativo à esfera.

Pode-se comparar a Figura 2.28 com a Figura 2.40 e notar que existe o mesmo comportamento para tensão principal, e do eixo de maior amplitude, tanto no caso do contato entre cilindros como no contato entre a esfera e o plano. Deve-se notar também que os valores das tensões atuantes no bloco são superiores às atuantes no contato entre cilindros. Isto é intencional nesta classe de experimentos onde se utilizam tensões mais elevadas para acelerar a formação dos fenômenos tribológicos.

Através da comparação dos resultados onde há deslocamento imposto ao bloco, Figura 2.41 à Figura 2.45, pode-se notar que não existe alteração do campo de tensões atuantes no corpo com o aumento do deslocamentos relativos entre a esfera e o bloco. Tal fato, como previsto pela teoria de Coulomb, era esperado pois uma vez que há escorregamento entre as superfícies a força tangencial atuante não se altera com o aumento da distância de deslizamento, ou seja, é mantida a relação entre a força normal e a força tangencial correspondente ao coeficiente de atrito cinemático.

Ao se comparar os resultados referentes aos campos de tensões, na Tabela 2.3 verifica-se ainda outra compatibilidade do modelo de elementos finitos com a teoria de Hertz. Esta congruência entre os resultados é indicada pela constância do comprimento da área de contato que se mantém em $1.44 \cdot 10^{-4} m$ durante toda a integração do modelo de elementos finitos. Na teoria de Hertz é definido que quando a força tangencial é proveniente do atrito entre dois corpos não há alteração da área de contato, desde que ela é definida pela força normal entre as superfícies. Esta mesma condição é verificada no modelo de elementos finitos.

Na Tabela 2.3 verifica-se ainda que após iniciado o movimento relativo entre a esfera e o bloco a máxima tensão de cisalhamento se aproxima da superfície com a superposição dos efeitos dos carregamentos normais e tangenciais. Novamente é verificada a congruência dos

resultados com a teoria de Hertz, desde que a posição da máxima tensão de cisalhamento não se altera com o aumento da distância de deslizamento entre as superfícies.

Tabela 2.3 – Comparativo entre a teoria de Hertz e o modelo de elementos finitos (MEF) para o contato entre uma esfera e um plano.

Método de obtenção dos resultados	Pressão Máxima [MPa]	Comprimento da área de contato [$10^{-4} m$]	Tensão de cisalhamento máxima $\tau_{\max}$ [MPa]	Posição de $\tau_{\max}$ [$10^{-3} m$]
Teoria de Hertz	1970.0	1.0671	611.44	0.0510
MEF Estacionário	1247.5	1.4400	421.90	0.0517
MEF 1 passo de deslocamento	1267.5	1.4400	541.90	0.0103
MEF 2 passos de deslocamento	1263.5	1.4400	552.42	0.0103
MEF 3 passos de deslocamento	1259.4	1.4400	581.25	0.0103

Pode-se agora comparar o campo de tensões para o contato entre dois cilindros, item 2.5.6, com os resultados obtidos para o contato entre a esfera e o bloco de superfície plana. Ao se comparar as tensões principais da Figura 2.32 e da Figura 2.34 com a Figura 2.42 ou a Figura 2.44 nota-se que em ambos os casos ocorre uma tensão de tração na superfície dos corpos, sendo que esta tensão está sempre situada na região de contato imediatamente antes do centro da área de contato, quando se toma como referência o sentido do deslocamento entre os corpos. Podem-se verificar ainda nos campos de pressões referentes à tensão principal máxima o comportamento elíptico das curvas de iso-tensão como na teoria de Hertz.

Verifica-se também a semelhança entre os campos de tensões cisalhantes máximas para o contato entre dois cilindros e o contato entre a esfera e o plano. No entanto, devido ao coeficiente de atrito no contato entre a esfera e o bloco de superfície plana tem-se a máxima tensão de cisalhamento muita mais próxima à superfície, indicando uma predominância do carregamento tangencial sobre o carregamento normal.

2.6 Conclusões

Os tipos de elementos finitos apresentados foram capazes de fornecer resultados satisfatórios para os problemas de contato de casos onde não existem soluções analíticas para as equações potenciais de Boussinesq. No entanto foram notadas duas limitações no método de elementos finitos que devem ser consideradas a cada novo problema modelado. A primeira consiste do correto ajuste dos parâmetros de integração que podem conduzir a instabilidades numéricas ou a resultados errôneos. A segunda limitação consiste do elevado custo computacional envolvido na solução de problemas de contato mecânico, que foi reduzido com a representação apenas das regiões de interesse dos corpos em contato e o dimensionamento adequado da malha de elementos finitos.

As soluções obtidas permitiram a correta visualização dos campos de tensões resultantes do contato entre dois cilindros e entre uma esfera e um plano. Tal propriedade permite em uma análise conjunta com a análise dos corpos de prova após os ensaios tribológicos determinar quais os mecanismos de desgaste envolvidos no contato.

Como citado anteriormente o cálculo dos campos de tensões decorrentes do contato mecânico é uma das etapas necessárias para o correto dimensionamento de um ensaio tribológico, de tal maneira que com o uso de modelos de elementos finitos pode-se obter o campo de tensões, envolvidos em um tribosistema real, para o projeto adequado de um ensaio tribológico.

Deve-se ter um correto dimensionamento da malha de elementos finitos do modelo a fim de se evitar erros grosseiros no cálculo da área de contato. Estes erros em geral não afetam a natureza do campo de pressões do contato, porém podem causar erros na determinação de suas amplitudes.

Foi mostrada em uma análise térmica a viabilidade em se calcular o comportamento global dos corpos em contato em vista ao calor gerado pela força de atrito. Pode-se portanto acoplar os efeitos de temperatura ao modelo de mecânica do contato tornando este mais completo. Tal propriedade promove o método de elementos finitos para a solução de problemas termo-mecânico que não possuem soluções analíticas.

Através da simulação de elementos finitos mostrou-se que é possível representar o campo de tensões atuantes em cilindros de laminação através de duas configurações de contato mecânico: Contato entre cilindros e o contato entre uma esfera e um plano. Nestas simulações verificou-se que os campos de tensões são elípticos e que a maior tensão de cisalhamento ocorre abaixo da superfície para ambas as configurações de contato. Pode-se portanto afirmar que em vistas à natureza do campo de tensões atuantes ambas as soluções são úteis para representar o tribosistema da laminação.

Capítulo III

Fundamentos de Analise de Sinais Aplicados à identificação de Sistemas Não Lineares

A maioria dos problemas de identificação do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos é realizada a partir da medição dos sinais provenientes das suas entradas e saídas. É sempre tentador aplicar as técnicas desenvolvidas para sistemas lineares, considerando a formalização, a clareza e a facilidade de implementação das técnicas disponíveis, tanto para análise no domínio do tempo como no da frequência. Em particular, destaca-se a modelagem no domínio da frequência apresentada por Bendat & Piersol (1986) para sistemas lineares causais, operando em regime estacionário, com múltiplas entradas e múltiplas saídas. Para sistemas que não operam em regime estacionário, as técnicas de análise multi-resolução, por exemplo, as que usam a transformada Wavelet, produzem excelentes resultados. (Lépore e Santos , 1999). Estas metodologias também são importantes para a solução de problemas inversos, no sentido de se determinar entradas a partir da medição de saídas do sistema.

Estas metodologias não podem ser aplicadas com segurança em sistemas que apresentam comportamento não linear como consequência de grandes deformações e ou deslocamentos, da presença de dispositivos de fim de curso e com folgas, do uso de materiais com propriedades não lineares, ou ainda quando o atrito entre componentes seja significativo.

É importante destacar que em muitas aplicações da Engenharia, as não linearidades podem estar concentradas em regiões particulares do sistema. Tal fato pode permitir a construção de modelos compostos por partes lineares associadas a outras que destacam o comportamento não linear.

Um sistema não linear exhibe comportamento mais complexo que os lineares e diferentes teorias têm sido aplicadas na identificação e na análise de seu comportamento. Em estudos relacionados à identificação de sistemas não lineares uma das formulações mais

utilizadas é aquela que emprega as séries de Volterra. Tal formulação assume que a resposta a uma entrada pode ser expandida em uma série de funções com memória com N-integrais destas funções, associadas com N-funções espectrais. (Bendat et al, 1992)

Bendat et al (1992) indica que o método baseado em séries de Volterra possui as desvantagens enumeradas abaixo:

- grande custo computacional;
- grande sensibilidade à função densidade probabilidade da entrada do sistema não linear;
- dificuldade em se interpretar fisicamente os resultados obtidos pelos termos de ordem elevada da série;
- elevado erro aleatório, requerendo grande quantidade de dados para se realizar médias.

Bendat et al (1992) sugere que um procedimento adequado para análise de sistemas não lineares aplicadas a problemas de engenharia instrumentados deve ser capaz de:

- Fornecer resultados fisicamente interpretáveis, utilizando procedimentos de cálculo que demandam baixo esforço computacional;
- Ser Independente do tipo das funções densidade probabilidade das entradas e das saídas;
- Determinar as funções de correlação entre as entradas e as saídas do sistema, assim como suas funções auto densidade espectral;
- Permitir a identificação ótima dos parâmetros do sistema linear e não linear a partir dos dados de entrada e saída;
- Promover a decomposição dos espectros das saídas em parcelas lineares e não lineares;
- Calcular as funções de coerência parciais e cumulativas;
- Calcular a saída de um sistema não-linear dada uma entrada e com o conhecimento prévio das propriedades físicas deste sistema.

Considerando tais requisitos, o autor propõe uma metodologia denominada “Reverse Non-linear MIMO Signal Analysis”, que procura separar partes lineares das não lineares na construção do modelo global do sistema, permitindo sua identificação.

Esta metodologia é aplicada, neste trabalho, para analisar o comportamento não linear do tribômetro alternativo objetivando a determinação da força de atrito entre a esfera e a amostra, a partir das medições das entradas e saídas do sistema.

Os fundamentos da técnica e uma classificação de tipos de modelos de sistemas não lineares com e sem memória são apresentados a seguir.

3.1 Sistema não linear sem memória

Como sistemas não lineares sem memória entende-se todo sistema não linear que responde instantaneamente a uma entrada. Tais sistemas não ponderam eventos passados como os sistemas lineares com parâmetros constantes o fazem através da integral de convolução, onde o valor presente da saída é função das respostas às excitações passadas e às presentes. Para sistemas não lineares sem memória a resposta é função apenas da excitação instantânea.(Bendat, 1998)

Um sistema não linear típico pode ser representado pela Figura 3.1, onde a entrada é uma variável $x(t)$ que é alterada instantaneamente para produzir uma saída $y(t) = g(x(t))$, sendo $g(x)$ é uma função unívoca de $x(t)$. Deve-se salientar que o valor de x é dependente de t , porém a função $g(x)$ não é uma função explícita de t .

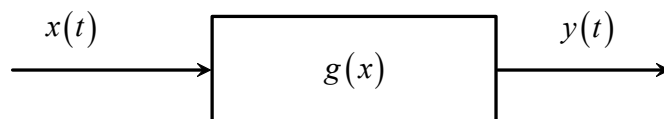


Figura 3.1 - Diagrama esquemático de um modelo não linear sem memória.

Tal sistema não linear deve respeitar as seguintes condições:

- Quando $x(t)$ é trasladado para $x(t+\tau)$ a função $g(x)$ é trasladada também para $g(x(t+\tau))$, representando a ausência de memória;
- quando $x(t)$ é um sinal estacionário a saída $y(t) = g(x(t))$ é também um sinal estacionário.

Respeitadas as condições acima, pode-se calcular as funções correlação cruzada entre a entrada e a saída e a função auto correlação da saída dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}
 R_{xy} &= E[x(t)g(x(t+\tau))] \\
 R_{yy} &= E[g(x(t))g(x(t+\tau))]
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

3.2 Sistemas não lineares com memória finita com as variáveis não lineares conhecidas

Sistemas não lineares com memória finita podem ser modelados conforme a Figura 3.2 onde foram inseridos sistemas lineares de parâmetros constantes antes e após o componente não linear. As partes lineares representam o efeito de memória. Uma grande quantidade de sistemas mecânicos reais pode ser representada por este modelo: A escolha das funções lineares $A(f)$ ou $B(f)$ fazem esta representação ser versátil, permitindo inclusive representar um sistema sem memória, caso ambas tenham valor unitário.

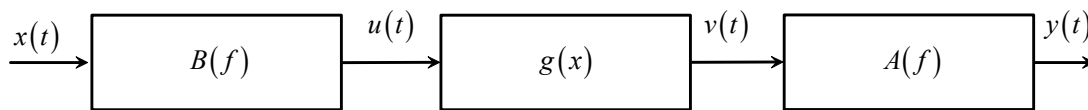


Figura 3.2 - Diagrama esquemático para sistemas não lineares com memória finita.

Deve-se notar que para a análise das funções de correlação e transferência, nos sistemas lineares $A(f)$ e $B(f)$, conhecidas as variáveis $u(t)$ e $v(t)$, não é requerido nenhum cálculo adicional aos utilizados em sistemas lineares. Na Figura 3.3 e na Figura 3.4 são apresentados os diagramas para sistemas não lineares onde as funções $A(f)$ e $B(f)$ podem assumir um valor unitário. Para estes sistemas, mesmo quando $A(f)=B(f)$, uma entrada $x(t)$ produzirá saídas diferentes em ambos os sistemas representados na Figura 3.3 e na Figura 3.4.

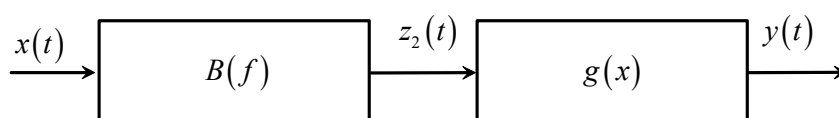


Figura 3.3 - Modelo para um sistema não linear precedido por um sistema linear com parâmetros constantes.

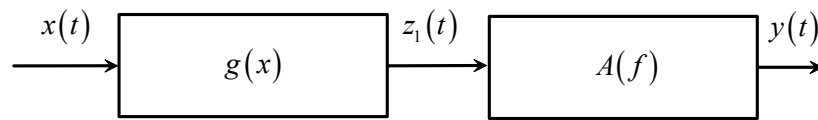


Figura 3.4 - Modelo para um sistema não linear antes de um sistema linear com parâmetros constantes.

Assumindo que as quantidades $X(f)$, $U(f)$, $V(f)$, $Z(f)$ e $Y(f)$ são as transformadas de Fourier de $x(t)$, $u(t)$, $v(t)$, $z(t)$ e $y(t)$ respectivamente e que:

$$V(f) = g[U(f)] \quad (3.2)$$

onde $g[\]$ é uma função não linear, a saída $Y(f)$ respeita as seguinte relação para o sistema da Figura 3.2 :

$$Y(f) = A(f)V(f) = A(f)g[U(f)] = A(f)g[B(f)X(f)] \quad (3.3)$$

A mesma análise pode ser feita para a Figura 3.3 e para a Figura 3.4 onde as saídas $Y_1(f)$ e $Y_2(f)$ respeitam as seguintes relações:

$$\begin{aligned} Y_1(f) &= A(f)Z_1(f) = A(f)g_1[X(f)] \\ Y_2(f) &= g_2[B(f)X(f)] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Deve-se notar que estas relações somente podem ser calculadas quando se tem acesso às variáveis não lineares. No entanto, na grande maioria dos sistemas mecânicos, não se conhece a priori as variáveis não lineares ou estas não podem ser obtidas diretamente por sensores apropriados. Pode-se citar como exemplo sistemas lineares submetidos à força de atrito, sistemas excitados por forças magnéticas entre outros. Para tais sistemas pode-se empregar a técnica a ser detalhada a seguir.

3.3 Funções densidade probabilidade para sistemas não lineares sem memória

Os teoremas e cálculos desenvolvidos na análise de sinais aplicada em sistemas lineares são baseados em relações e definições estatísticas. Desta forma para análise de sistemas não lineares deve-se considerar também tais definições estatísticas. (Bendat, 1998)

Considerando-se $x=x(t)$ e que $x(t)$ é um sinal estacionário, gaussiano com média zero, a função densidade probabilidade de x é dada por:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma_x^2}} \quad (3.5)$$

com:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] \quad (3.6)$$

Considerando-se ainda duas variáveis $x_1 = x(t)$ e $x_2 = x(t + \tau)$ a função densidade probabilidade conjunta é dada por:

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}} \quad (3.7)$$

com:

$$\rho = \frac{E[x_1 x_2]}{\sqrt{E[x_1^2] E[x_2^2]}} = \frac{E[x_1 x_2]}{\sigma_x^2} \quad (3.8)$$

sendo ρ denominado como a correlação estatística entre as variáveis x_1 e x_2 . Nota-se que para $\rho = 0$ a função densidade probabilidade conjunta entre x_1 e x_2 é dada por:

$$p(x_1, x_2) = p(x_1) p(x_2) \quad (3.9)$$

A função autocorrelação $R_{xx}(\tau)$ é dada por:

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = E[x_1x_2] \quad (3.10)$$

para $\tau = 0$ tem-se:

$$R_{xx}(0) = E[x(t)x(t)] = \sigma_x^2 \quad (3.11)$$

o que permite escrever a função de correlação estatística como:

$$\rho = \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \quad (3.12)$$

Os momentos estatísticos da saída $y(t)$ derivam das equações descritas anteriormente e podem ser calculados por:

$$\begin{aligned} E[y] &= E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p(x) dx \\ E[y^n] &= E[g(x)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^n p(x) dx \end{aligned} \quad (3.13)$$

Considerando-se a função $g(x)$ como uma função bijetora e que se conhece a função densidade probabilidade da variável x pode-se derivar dois teoremas úteis na análise de sinais não lineares.(Bendat, 1998)

- Teorema da relação entre as funções densidade probabilidade da entrada e da saída;
- Teorema da identificação de sistemas não lineares sem memória.

Tais teoremas são úteis na detecção da presença de uma função não linear e de sua identificação respectivamente.

3.3.1 Teorema da relação entre as funções densidade probabilidade da entrada e da saída.

Para uma entrada $x(t)$, com uma função densidade probabilidade arbitrária $p(x)$, que passa através de um sistema não linear $y=g(x)$ e produz uma saída $y=g(x)$ temos:

$$p(y) = \frac{p(x)}{|dy/dx|} = \frac{p(x)}{|g'(x)|} \quad (3.14)$$

onde a função módulo é necessária desde que a função $p(y)$ assume somente valores positivos.

Um corolário derivado deste teorema para funções injetoras é:

$$p(y) = \frac{np(x)}{|dy/dx|} \quad (3.15)$$

onde a variável n é definida como o número de valores distintos de x para os quais a função $g(x)$ assume valores iguais.

Utilizando a equação (3.14) e a equação (3.15) tem-se:

- Quando $p(x)$ é gaussiana e $g(x)$ é uma função linear a função $p(y)$ será gaussiana;
- quando $p(x)$ é gaussiana e $g(x)$ é uma função não linear a função $p(y)$ não será gaussiana.

Tais definições, como dito anteriormente, são úteis para definir se um sistema é linear ou não linear, uma vez que se pode detectar a não linearidade do sistema através da comparação direta das funções densidade probabilidade.

3.3.2 Teorema da identificação de sistemas não lineares sem memória

Quando $y = g(x)$ é uma função bijetora é possível, a partir das funções $p(x)$ e $p(y)$, determinar a função $g(x)$ fazendo-se com que a probabilidade de $y(t) \leq g(x_0)$ igual a probabilidade de $x(t) \leq x_0$ como se segue:

$$P(y_0) = \int_{-\infty}^{y_0} p(y) dy = \int_{-\infty}^{x_0} p(x) dx = P(x_0) \quad (3.16)$$

Deve-se notar que não existe restrição quanto as variáveis $x(t)$ e $y(t)$ serem variáveis gaussianas.

3.4 Funções de autocorrelação e correlação cruzada para sistemas não lineares sem memória

Supondo ser conhecida a relação $y=g(x)$ pode-se calcular:

$$R_{yy}(\tau) = E[y(t)y(t+\tau)] = E[g(x(t))g(x(t+\tau))] \quad (3.17)$$

fazendo $x_1 = x(t)$, $x_2 = x(t+\tau)$, $y_1 = y(t)$ e $y_2 = y(t+\tau)$ resulta:

$$R_{yy}(\tau) = E[y_1 y_2] = \iint g(x_1)g(x_2)p(x_1 x_2) dx_1 dx_2 \quad (3.18)$$

para a expressão da auto correlação da saída de uma função não linear arbitrária $g(x)$ e uma função densidade probabilidade conjunta $p(x_1 x_2)$ também arbitrária.

Quando é possível, de alguma forma, medir-se $y(t)$, pode-se obter a função $R_{yy}(\tau)$ diretamente da equação seguinte:

$$R_{yy}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_{yy}(f)] = \int S_{yy}(f) e^{i2\pi ft} df \quad (3.19)$$

com $\mathcal{F}$ sendo a transformada de Fourier e $S_{yy}(f)$ sendo a função auto densidade espectral de $y(t)$. Bendat (1998) sugere ainda duas relações matemáticas para definir a função $R_{yy}(\tau)$ descritas abaixo:

$$\frac{\delta R_{yy}(\tau)}{\delta R_{xx}(\tau)} = E[g(x_1)g(x_2)] \quad (3.20)$$

para funções que possuem somente a primeira derivada não nula e:

$$\frac{\delta^n R_{yy}(\tau)}{\delta R_{xx}(\tau)^n} = E[g^n(x_1)g^n(x_2)] \quad (3.21)$$

para funções com até a n-ésima derivada não nula.

De maneira semelhante pode-se determinar a função de correlação cruzada entre a entrada $x(t)$ e a saída $y(t)$ de um sistema não linear sem memória:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = E[x(t)g(x(t+\tau))] \quad (3.22)$$

fazendo $x_1 = x(t)$, $x_2 = x(t+\tau)$ e $y_2 = g(x_2)$ resulta:

$$R_{xy}(\tau) = E[x_1 y_2] = \iint x_1 g(x_2) p(x_1 x_2) dx_1 dx_2 \quad (3.23)$$

para a expressão da correlação cruzada entre a entrada e a saída de uma função não linear arbitrária $g(x)$ e uma função densidade probabilidade conjunta $p(x_1 x_2)$ também arbitrária.

Quando é possível, de alguma forma, medir-se $x(t)$ e $y(t)$ pode se obter a função $R_{xy}(\tau)$ diretamente da equação seguinte :

$$R_{xy}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_{xy}(f)] = \int S_{xy}(f) e^{i2\pi f\tau} df \quad (3.24)$$

com $S_{xy}(f)$ a função densidade espectral cruzada. Novamente Bendat (1998) propõe a uma outra formulação para o cálculo da função $R_{xy}(\tau)$, que é apresentada abaixo:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \int x g(x) p(x) dx \quad (3.25)$$

reorganizando a equação tem-se:

$$R_{xy}(\tau) = \left(\frac{E[xg(x)]}{\sigma_x^2} \right) R_{xx}(\tau) \quad (3.26)$$

A análise das equações (3.25) e (3.26) permite concluir que:

- A função $R_{xy}(\tau)$ é diretamente proporcional à $R_{xx}(\tau)$ com a constante de proporcionalidade dada por $(E[xg(x)]/\sigma_x^2)$;
- sempre que $g(x)$ for uma função par, desde que $E[xg(x)]$ é uma integral de uma função ímpar entre limites simétricos, o valor de $R_{xy}(\tau)$ será nulo;
- a função $S_{xy}(f)$ será sempre uma função real quando $g(x)$ for uma função real desde que $S_{xx}(f)$ é uma função real.

O fator de proporcionalidade entre $R_{xy}(\tau)$ e $R_{xx}(\tau)$ mostrado na equação (3.25) pode ser interpretado como um sistema linear ótimo porém dependente da entrada $x(t)$. Isto é, a estimativa do sistema linear ótimo, equivalente ao sistema não linear, somente tem validade para a entrada com a qual foi estimado.

3.5 Funções não lineares sem memória

Pode-se encontrar diversos problemas em engenharia onde podem ser aplicadas funções não lineares sem memória. Elementos que apresentam rigidez variável com o deslocamento podem ser representados por funções bi-lineares, cúbicas ou quadráticas. As folgas mecânicas podem ser representadas por funções do tipo “DEAD ZONE”. O contato entre duas superfícies pode ser representado por funções “CLIPPED” ou “HARD CLIPPED”. (Bendat, 1998)

A função bi-linear, por ser uma função bijetora, será utilizada para demonstrar o uso dos teoremas descritos nos itens 3.3.1 e 3.3.2, através dos quais pode-se determinar a existência da não linearidade em uma função de transferência e identificar suas características.

A equação que descreve uma função bi-linear é dada por:

$$g(x) = \begin{cases} kx, & |x| \leq A \\ A + kb(x - A), & x \geq A \\ -A + kb(x + A), & x \leq -A \end{cases} \quad (3.27)$$

Para $0 < kb < 1$ resulta a Figura 3.5 e para $kb > 1$ resulta o comportamento da Figura 3.6.

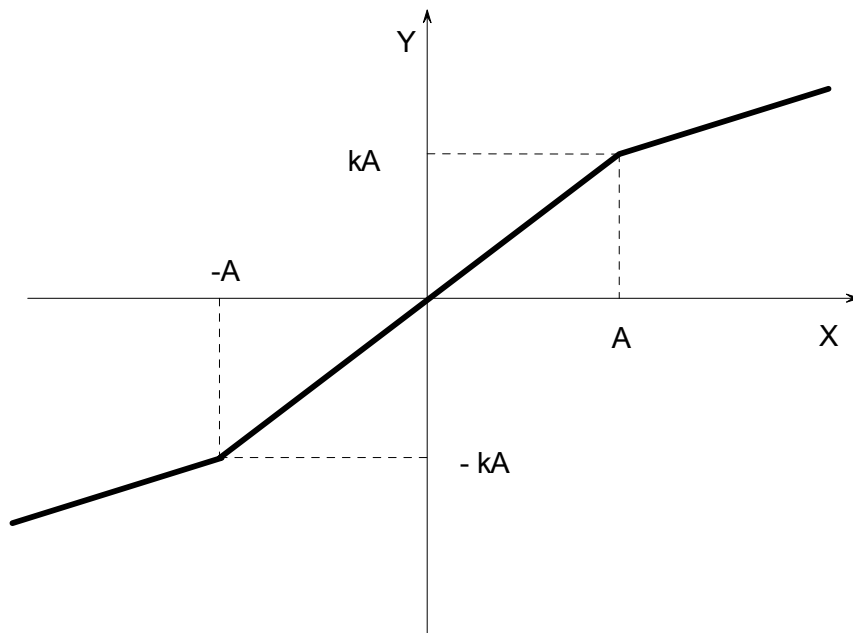


Figura 3.5- Função bi-linear para $0 < kb < 1$

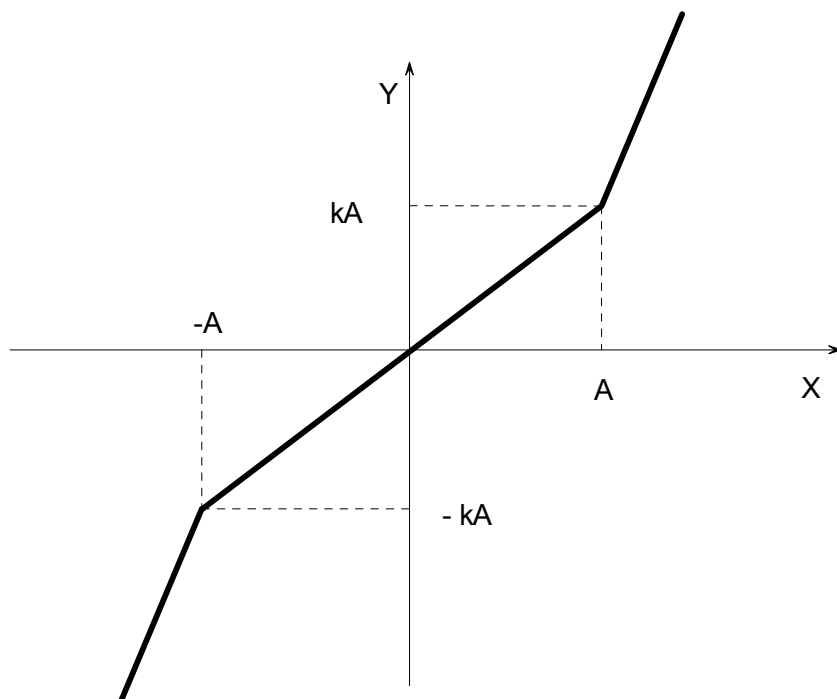


Figura 3.6- Função bi-linear para $kb > 1$

Considerando uma variável aleatória com função densidade probabilidade gaussiana dada por:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \quad (3.28)$$

como a entrada de uma função não linear $g(x)$, bi-linear, como aquela descrita na equação (3.27), cuja saída é $y(t)$, pode-se obter a função densidade probabilidade da saída $y(t)$ através da equação (3.14) como se segue:

$$y = g^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{y}{k}, & |x| \leq A \\ \frac{y-A}{bk} + A, & x \geq A \\ \frac{y+A}{bk} - A, & x \leq -A \end{cases} \quad (3.29)$$

Devido à descontinuidade da derivada de $g(x)$ em relação à variável x , obtêm-se:

$$p(y) = \frac{p(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} = \begin{cases} \frac{p(x)}{k}, & |x| \leq A \\ \frac{p(x)}{kb}, & x \geq A \\ \frac{p(x)}{kb}, & x \leq -A \end{cases} \quad (3.30)$$

Substituindo-se a equação (3.28) na equação (3.30) resulta a função densidade probabilidade de y ..

$$\begin{aligned} p(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y/k)^2}{2}}, & |y| \leq A \\ p(y) &= \frac{1}{bk\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(A+(y-A)/bk)^2}{2}}, & y > A \\ p(y) &= \frac{1}{bk\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(A-(y+A)/bk)^2}{2}}, & y < -A \end{aligned} \quad (3.31)$$

Pode-se notar na equação (3.31) a presença da não linearidade da função $g(x)$ conforme descrito no item 3.3.1 através da descontinuidade de $g'(x)$. Conclui-se portanto que para uma entrada aleatória com função densidade probabilidade gaussiana, se $g(x)$ é não linear, a função densidade probabilidade da saída $y(t)$ não será gaussiana. Isto é, para uma variável aleatória com função densidade probabilidade gaussiana definida na equação (3.28) que é transformada pela função $g(x)$ não linear, definida na equação (3.27), a função densidade probabilidade da saída, da equação (3.31), é não gaussiana, devido a descontinuidade da derivada $\frac{dy}{dx}$.

Uma vez obtida a função densidade probabilidade de y pode-se demonstrar aplicabilidade do teorema descrito no item 3.3.2 através do exemplo mostrado na Figura 3.7, onde é aplicada uma entrada aleatória gaussiana no sistema. Para calcular as funções de densidade de probabilidade adotou-se os valores de $k = 1$ e $b = 2$ na equação (3.31), e um valor de A igual a 10.

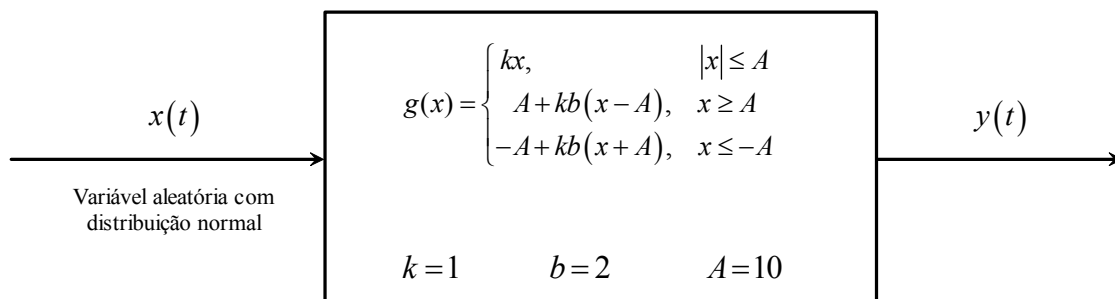


Figura 3.7- Sistema bi-linear com entrada $x(t)$ gaussiana.

Para o sistema mostrado na Figura 3.7 resultam os seguintes gráficos das funções densidade probabilidade da entrada e da saída:

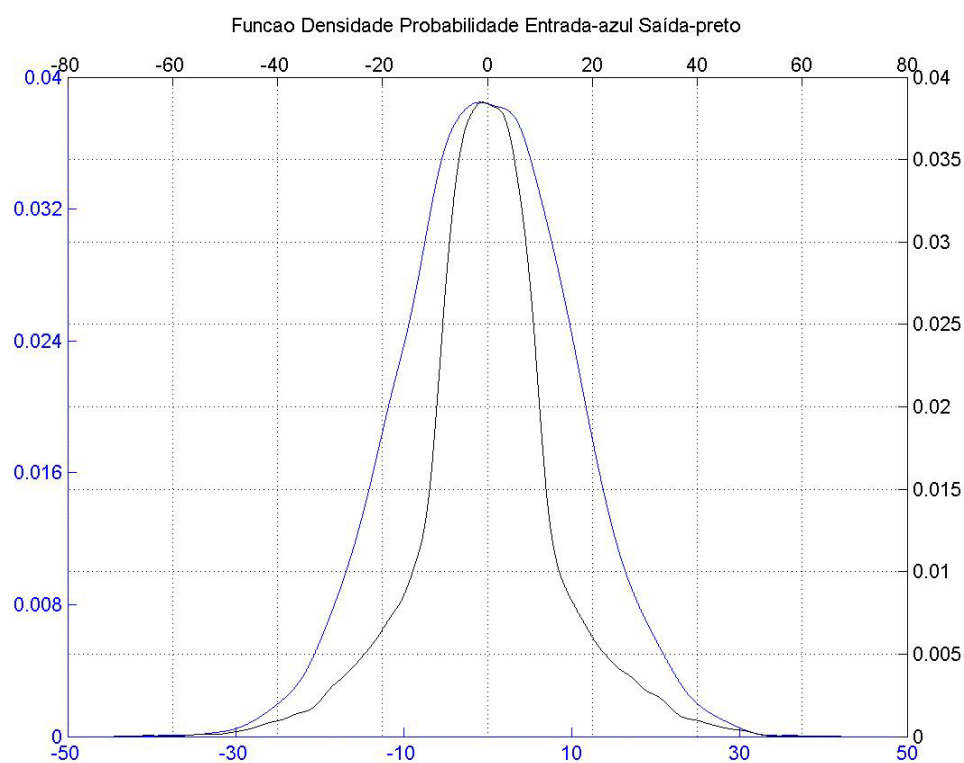


Figura 3.8- Funções densidade probabilidade das variáveis x e y .

e de suas respectivas funções densidade probabilidade acumulada:

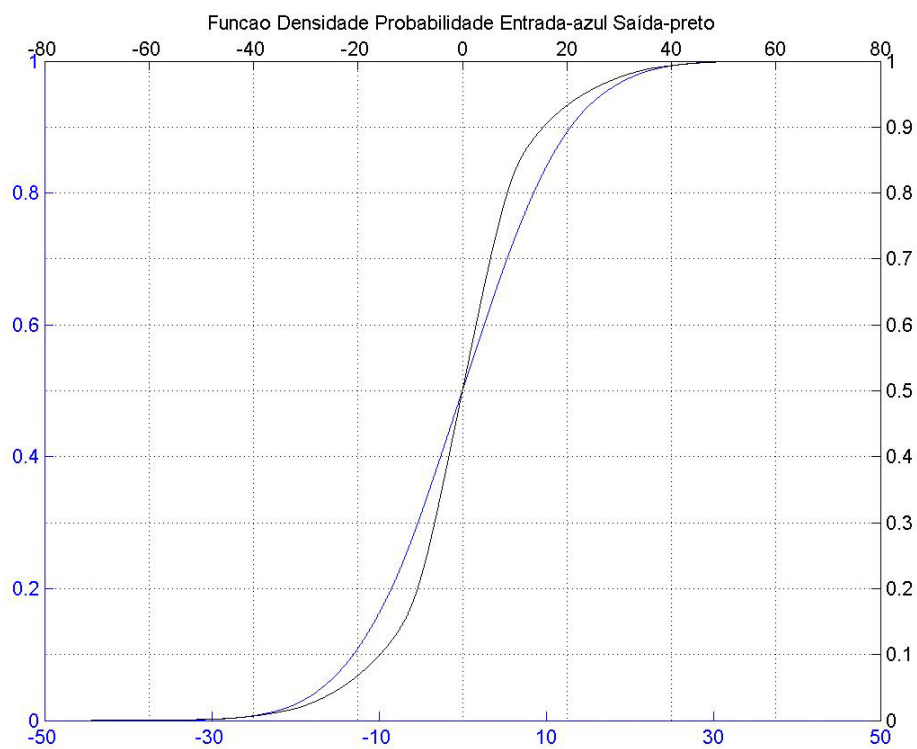


Figura 3.9- Funções densidade probabilidade acumulada das variáveis x e y .

O teorema descrito no item 3.3.2 pode ser representado graficamente na Figura 3.10 . Neste procedimento é escolhido um valor para as funções densidade probabilidades acumuladas, representadas pela linha horizontal na figura, simultaneamente determinam-se os valores de x e y que possuem aquela probabilidade acumulada de ocorrer, procedimento representado pelas linhas verticais. Através deste passo gera-se um par de valores para as variáveis x e y de tal forma que $x = g(y)$, o procedimento se repete até que se atinja o valor da densidade probabilidade acumulada igual a 1.

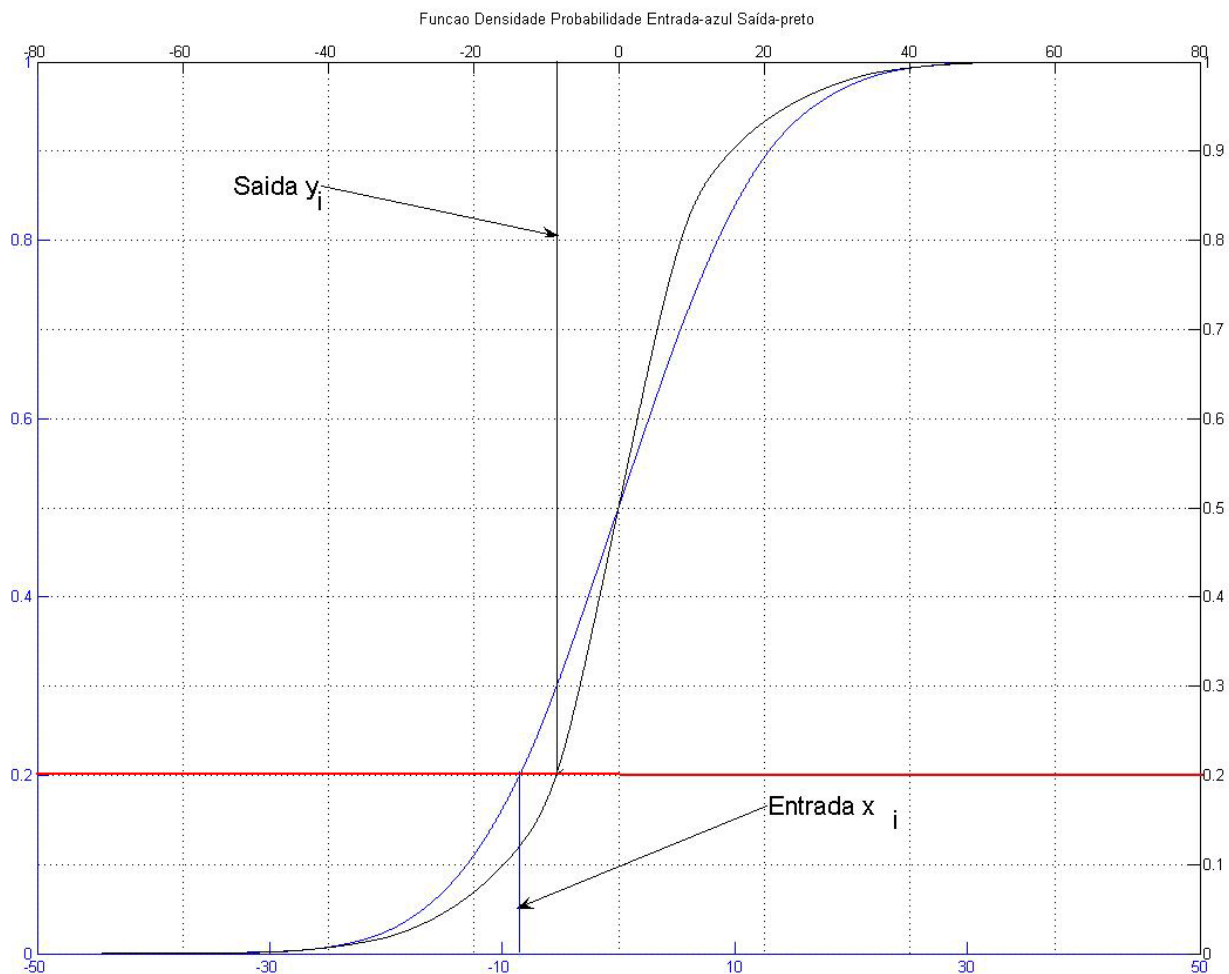


Figura 3.10- Diagrama esquemático de aplicação do teorema do item 3.3.2

Após a aplicação do teorema de identificação de sistemas não lineares pode-se comparar a função identificada e a função não linear, representada na equação (3.29) e na Figura 3.7. Isto é feito na Figura 3.11. Verifica-se também que o erro encontrado é pequeno, demonstrando a validade do teorema descrito no item 3.3.1. Alguns pontos próximos aos limites da função estimada têm um erro maior devido à proximidade de 0 e 1 dos valores da função densidade probabilidade acumulada mostrada na Figura 3.9.

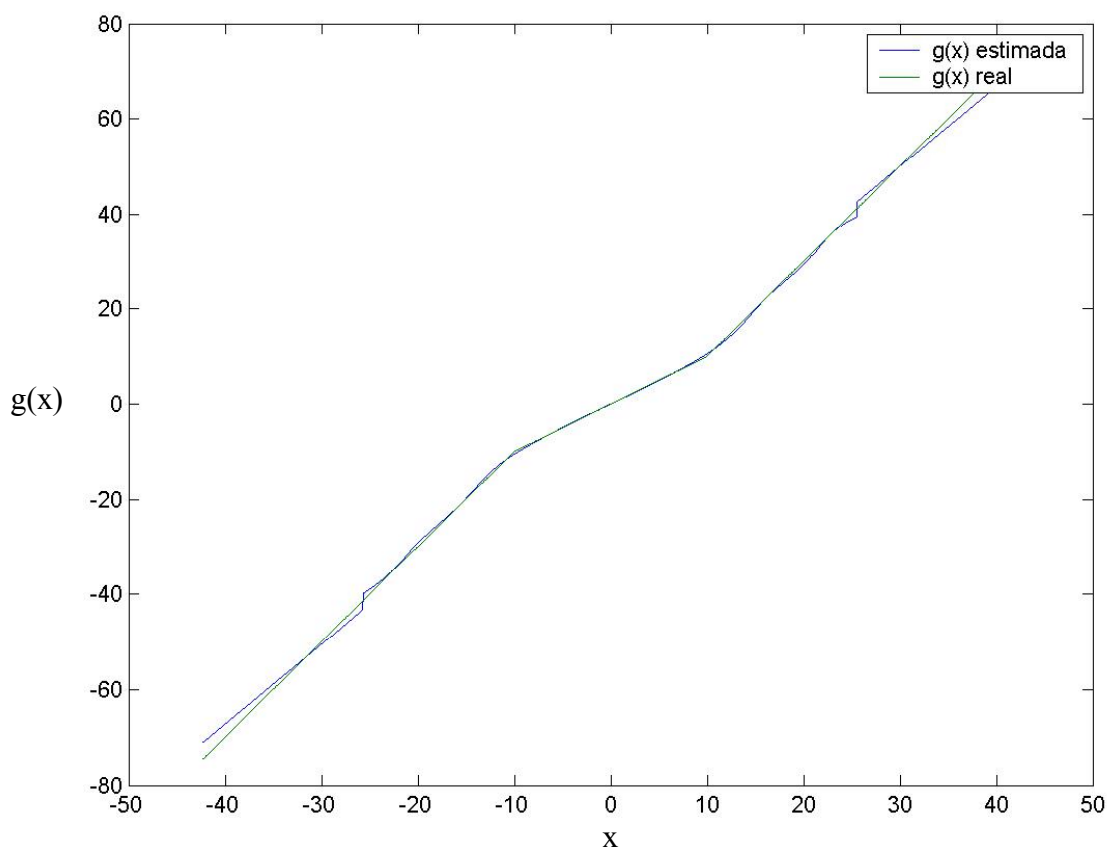


Figura 3.11- Comparação entre o sistema linear identificado e o imposto.

3.5.2 Momentos estatísticos das variáveis de entrada e saída

Podem-se utilizar os momentos estatísticos como a média, a variância, a skewness e a kurtosis para se caracterizar uma variável aleatória ou ainda para caracterizar uma transformação sobre esta variável. (Papoulis, 1977)

A média pode ser utilizada na análise de sistemas não lineares para se determinar quando a transformação não linear provocada pela função $g(x)$ introduz um nível DC no sinal de saída. A variância por sua vez representa a dispersão dos valores em torno da média e pode ser utilizada como um fator de avaliação do ganho em amplitude provocado pela função $g(x)$. A skewness caracteriza a simetria em torno da média e pode representar assimetrias da variável y em relação a média, provocada pela função não linear $g(x)$. A kurtosis por sua vez pode indicar a proximidade de comportamento da variável y em relação a um comportamento padrão, isto é, para uma entrada no sistema não linear $x(t)$ com função densidade

probabilidade gaussiana a kurtosis tem valor 3 se o valor da kurtosis da variável de saída $y(t)$ for 1 existe um indicativo que a função não linear transforma a entrada em uma onda quadrada.

Os momentos estatísticos são obtidos a partir da equação 1.13 sendo a média definida como:

$$\mu_x = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \quad (3.32)$$

ou obtida através do seguinte estimador:

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3.33)$$

A variância é definida como:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \quad (3.34)$$

ou obtida através do estimador:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (3.35)$$

Da variância pode se obter o desvio padrão como se segue:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \quad (3.36)$$

A skewness é definida como:

$$a_3 = E\left[\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma}\right)^3\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma}\right)^3 p(x) dx \quad (3.37)$$

ou obtida pelo estimador:

$$\hat{a}_3 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \hat{x}}{\sigma}\right)^3 \quad (3.38)$$

A kurtosis é definida como:

$$a_4 = E \left[\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma} \right)^4 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma} \right)^4 p(x) dx \quad (3.39)$$

ou obtida pelo estimador:

$$\hat{a}_4 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \hat{x}}{\sigma} \right)^4 \quad (3.40)$$

Tais estimadores podem ser calculados para as variáveis x e y do sistema não linear apresentado na Figura 3.7 . Inicialmente pode-se afirmar devido a imposição da função densidade probabilidade de x que esta variável possui os seguintes valores para os momentos estatísticos enumerados:

- Média nula;
- desvio padrão e variância unitária;
- skewness nula, indicando uma simetria da função densidade probabilidade perfeita em relação a média;
- kurtosis igual a três devido a função densidade probabilidade ser gaussiana e normal.

Para a variável y a média é obtida por:

$$\begin{aligned} \mu_y &= \int_{-\infty}^{\infty} yp(y) dy = I + II + III \\ I &= \int_{-\infty}^{-A} \left(\frac{y+A}{bk} - A \right) \left(\frac{1}{bk\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(A-(y+A)/bk)^2}{2}} \right) dy \\ II &= \int_{-A}^A \left(\frac{y}{k} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y/k)^2}{2}} \right) dy \\ III &= \int_A^{\infty} \left(\frac{y-A}{bk} + A \right) \left(\frac{1}{bk\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(A+(y-A)/bk)^2}{2}} \right) dy \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde o termo II da equação (3.41) tem valor nulo desde que a integral de uma função par multiplicada por outra função ímpar entre limites simétricos tem valor nulo.

As parcelas I e III , quando resolvidas as integrais, têm os seguintes valores:

$$I = \frac{1}{bk\sqrt{2\pi}} \left(e^{\frac{-\infty}{2b^2k^2}} - e^{\frac{-A^2}{2}} \right)$$

$$III = \frac{1}{bk\sqrt{2\pi}} \left(-e^{\frac{-\infty}{2b^2k^2}} + e^{\frac{-A^2}{2}} \right) \quad (3.42)$$

onde se nota que ambas as integrais possuem o mesmo módulo porém com sinais diferentes, isto é, ambas as parcelas se anulam resultando em:

$$\mu_y = 0 \quad (3.43)$$

Esta análise da média também pode ser feita através da simetria da função $g(x)$ em torno do eixo $y=0$, ou seja, se a função $g(x)$ é simétrica em relação ao eixo das ordenadas e a variável de entrada no sistema não linear possui média nula a saída também possuirá média nula.

A mesma análise literal das equações que definem os demais momentos estatísticos da variável y não é possível desde que não se pode obter uma solução analítica para as equações (3.34), (3.37) e (3.39) como se obteve para a média. Tais análises são feitas na Tabela 3.1 através do exemplo numérico mostrado na Figura 3.7.

Tabela 3.1 – Valores numéricos para os momentos estatísticos do sistema apresentado na Figura 3.7.

	Entrada $x(t)$	Saída $y(t)$
Média	-0.0022	-0.0085
Desvio Padrão	10.0169	13.4040
Skewness	-0.0057	-0.0139
Kurtosis	3.0079	4.8687

A análise dos valores da Tabela 3.1 permite visualizar o comportamento da média previsto nas equações (3.41) à (3.43), isto é, a saída manteve-se com média nula, salvo erros

do gerador de números aleatórios. O desvio padrão mostra um pequeno aumento da amplitude dos valores de y em relação aos valores de x . A skewness manteve-se relativamente constante mostrando uma pequena assimetria da função densidade probabilidade em relação a média, tal comportamento também é notado na Figura 3.8. A variação da kurtosis é atribuída ao alongamento da função densidade probabilidade também verificada na Figura 3.8. Isto é, a entrada possui uma função densidade probabilidade normal, enquanto a saída por sua vez possui uma função densidade probabilidade diferente da normal.

3.6 Sistemas com múltiplas entradas/uma saída, diretos e inversos, aplicados à análise de sistemas não lineares.

O método denominado como sistemas múltiplas entradas/uma saída (MISO) apresenta diversas vantagens sobre métodos de mínimos quadrados aplicados em sinais no domínio do tempo e nos métodos de séries de VOLTERRA, utilizados para de análise de sistemas não lineares. (Bendat, 1997)

As vantagens do sistema MISO direto e inverso propostas por Bendat (1997) são:

- Sistemas de uma entrada/uma saída (SISO) não lineares sem realimentação podem ser convertidos em sistemas MISO lineares sem realimentação;
- Sistemas SISO não lineares com realimentação podem ser convertidos em um sistema MISO linear e reverso equivalente sem realimentação;
- Uma representação não linear exata é obtida utilizando-se uma função de resposta em frequência para cada componente não linear do sistema;
- É possível determinar as amplitudes não lineares do sistema assim como os parâmetros físicos do sistema com coeficientes dependentes da frequência;
- Não existe restrição sobre a natureza da função densidade probabilidade do sinal de entrada no sistema como no método que aplica séries de VOLTERRA;
- Todos os resultados demandam um baixo esforço computacional, são fisicamente interpretáveis e podem ser avaliados em qualquer frequência desejada utilizando as funções apropriadas que maximizam a coerência.

O método de análise de sistemas não lineares através de sistemas MISO diretos ou reversos baseia-se na hipótese de que um sistema como o da Figura 3.12 pode ser representado como um modelo da Figura 3.13, onde o sistemas de ordem superior são seguidos por funções lineares.

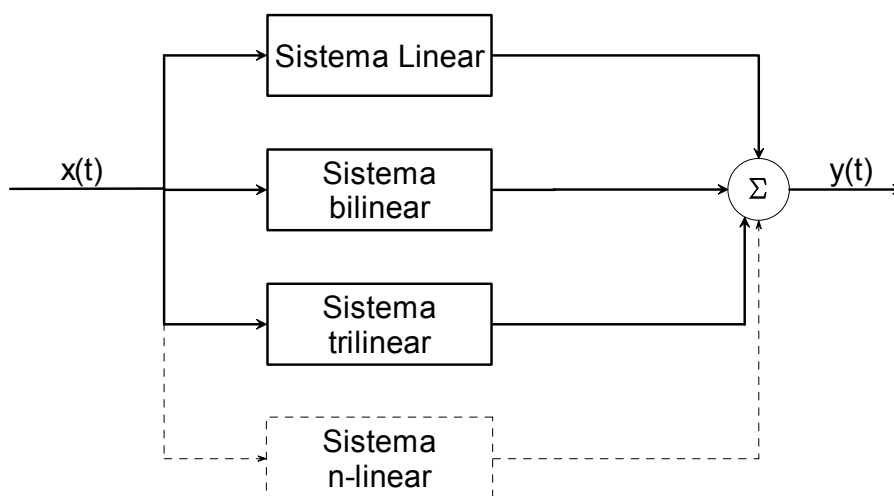


Figura 3.12- Sistema não linear representado por séries de Volterra.

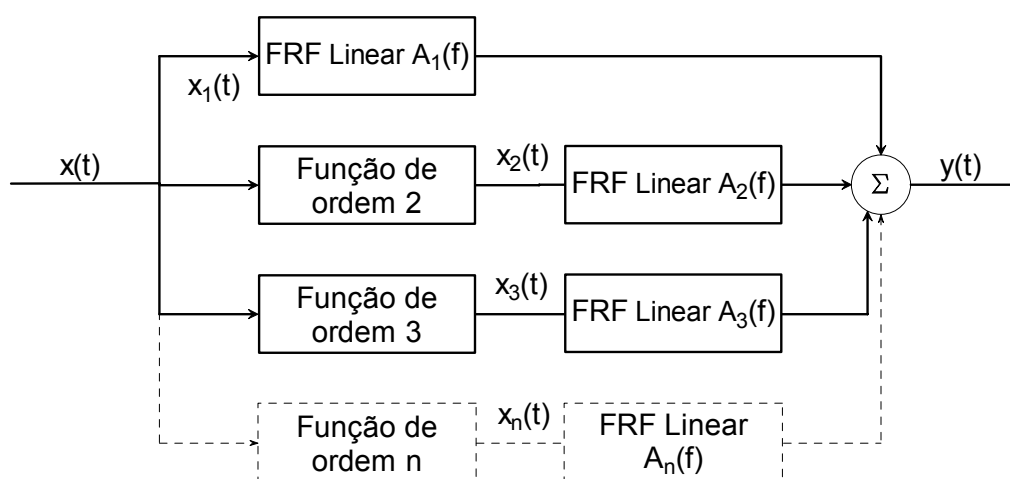


Figura 3.13- Sistema não linear, representação alternativa a séries de Volterra.

O sistema da Figura 3.13 pode então ser utilizado para representar qualquer sistema não linear substituindo-se as funções de ordem superior por qualquer uma função não linear como mostrado na Figura 3.14. O sistema da Figura 3.14 é capaz de representar a grande maioria dos sistemas não lineares desde que não há restrições sobre o comportamento das funções não lineares $g(x)$. (Bendat, 1997)

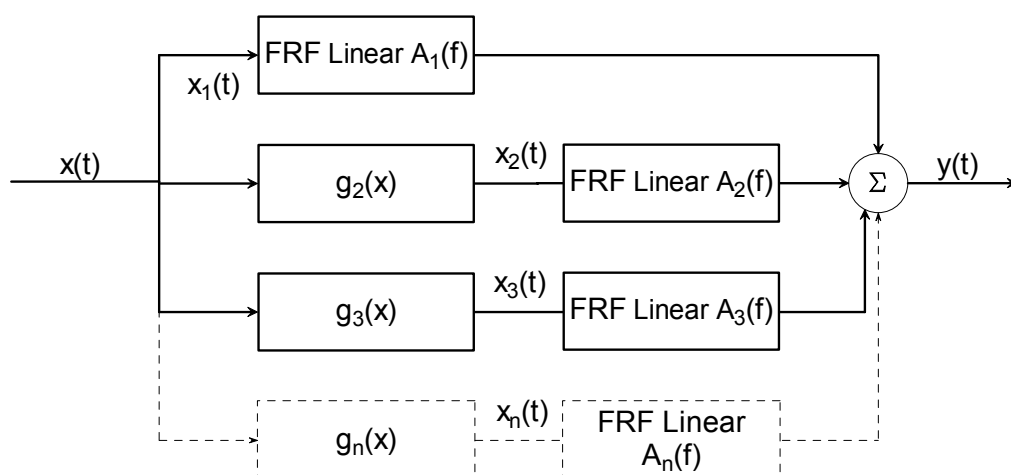


Figura 3.14- Sistema MISO não linear.

O sistema MISO representado na Figura 3.14, ao contrário do sistema não linear representado por séries de Volterra, não possui restrições quanto à função densidade probabilidade da entrada. O sistema MISO não linear demanda um esforço de cálculo reduzido, uma vez que conhecidas ou adotadas as funções não lineares $g(x)$ pode se tratar este sistema como se segue:

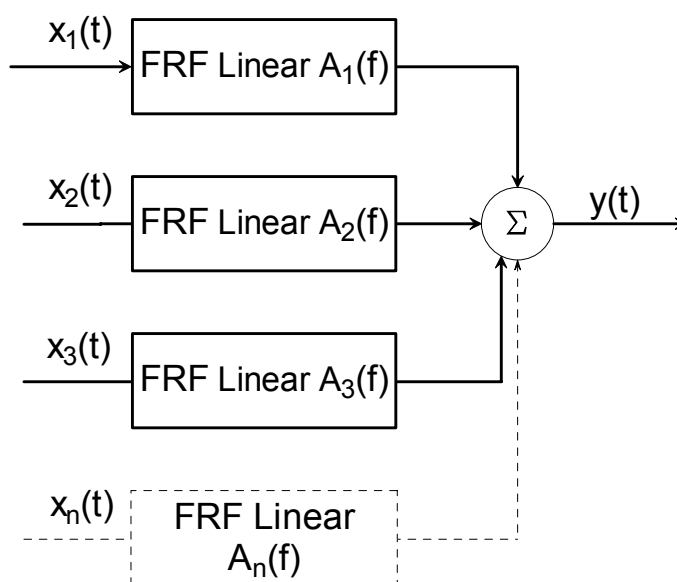


Figura 3.15- Sistema MISO genérico.

Para este sistema, as técnicas desenvolvidas para análise de sinais em sistemas lineares são suficientes para sua solução. (Bendat, 1997)

3.6.2 Métodos de análise de um sistema não linear genérico

Um sistema genérico capaz de representar a grande maioria dos sistemas não lineares encontrados em problemas de engenharia é mostrado na Figura 3.16 onde as saídas podem ser correlacionadas. Como mostrado, a saída total $y(t)$ é a soma da parcela linear $y_h(t)$, da parcela não linear $y_v(t)$ e do ruído não correlacionado com ambas as parcelas $n(t)$. Para este sistema a entrada, como dito anteriormente, pode ser gaussiana ou não gaussiana. A parcela não linear pode ser resultado de qualquer transformação não linear como no sistema da Figura 3.1.

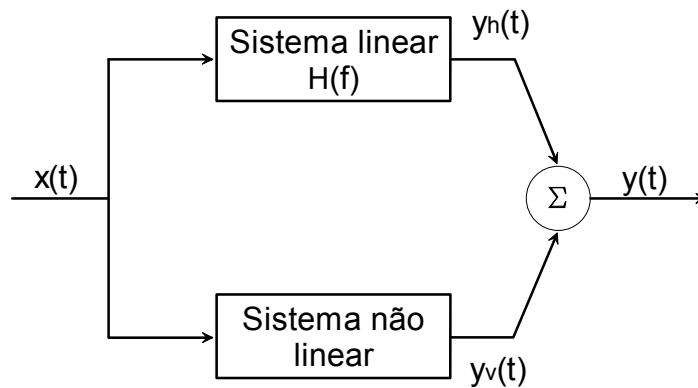


Figura 3.16- Sistema não linear com saídas correlacionadas.

Para este sistema tem-se:

$$y(t) = y_h(t) + y_v(t) + n(t) \quad (3.44)$$

Conseqüentemente, a função auto densidade espectral da saída dada por:

$$S_{yy}(f) = S_{y_h y_h}(f) + S_{y_v y_v}(f) + S_{y_h y_v}(f) + S_{y_h y_v}^*(f) + S_{nn}(f) \quad (3.45)$$

onde os termos cruzados entre y_h e y_v não podem ser considerados nulos pois não há restrição para que as saídas sejam não correlacionadas.

Em sistemas reais normalmente é possível instrumentar somente as variáveis $x(t)$ e $y(t)$, o que não permite a decomposição de $y(t)$ em suas parcelas linear e não linear. Em um processo semelhante ao desenvolvido para o cálculo de sistemas MISO linear onde se obtêm as parcelas coerentes e não correlacionadas entre si da saída pode-se alterar o sistema da

Figura 3.16 para um sistema como o da Figura 3.17 onde as saídas são obrigatoriamente não correlacionadas.

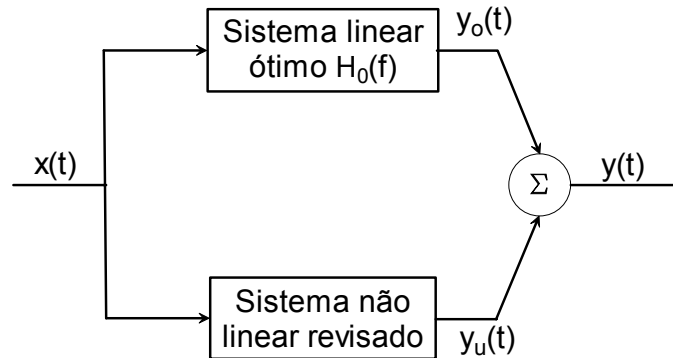


Figura 3.17- Sistema não linear com saídas não correlacionadas.

Para este sistema tem-se:

$$y(t) = y_o(t) + y_u(t) + n(t) \quad (3.46)$$

com $y_o(t)$ e $y_u(t)$ sendo respectivamente as saídas não correlacionadas do sistema linear ótimo e do sistema não linear revisado. Tal propriedade conduz a uma auto densidade espectral da saída dada por:

$$S_{yy}(f) = S_{y_o y_o}(f) + S_{y_u y_u}(f) + S_{nn}(f) \quad (3.47)$$

Deve-se notar que nos dois modelos a saída $y(t)$, mostrada nas equações (3.44) e (3.46), é a mesma, o quê conduz a:

$$\begin{aligned} y_h(t) + y_v(t) &= y_o(t) + y_u(t) \\ Y_h(f) + Y_v(f) &= Y_o(f) + Y_u(f) \end{aligned} \quad (3.48)$$

O sistema linear ótimo, aquele que maximiza a função coerência entre $Y(f)$ e $X(f)$, mostrado na Figura 3.17 pode ser ou não o mesmo sistema mostrado na Figura 3.16, dependendo do nível de correlação entre a saída $Y_v(f)$ e a entrada $X(f)$. Isto é, considerando-se a equação (3.44) e tomando sua transformada de Fourier resulta:

$$Y(f) = Y_h(f) + Y_v(f) + N(f) \quad (3.49)$$

A teoria desenvolvida para a análise de sinais em sistemas lineares conduz a:

$$Y_h(f) = H(f)X(f) \quad (3.50)$$

Considerando-se as funções densidades espectral cruzada entre a entrada e as saídas têm-se:

$$S_{xy}(f) = S_{xy_h}(f) + S_{xy_v}(f) \quad (3.51)$$

onde é considerada a hipótese inicial de que não existe correlação entre o ruído $n(t)$ e a entrada $x(t)$. Novamente utilizando a teoria de análise de sinais linear tem-se:

$$S_{xy}(f) = H(f)S_{xx}(f) \quad (3.52)$$

Deve-se notar que para saídas não correlacionadas, como no modelo da Figura 3.17, a função transferência ótima $H_o(f)$ é dada por:

$$H_o(f) = \frac{S_{xy}(f)}{S_{xx}(f)} \quad (3.53)$$

Portanto, combinando-se as equações (3.51) à (3.53) tem-se:

$$H_o(f) = H(f) + \frac{S_{xy_v}(f)}{S_{xx}(f)} \quad (3.54)$$

Isto comprova a afirmação anterior que $H_o(f)$ e $H(f)$ somente serão iguais se

$\frac{S_{xy_v}(f)}{S_{xx}(f)} \neq 0$. Deve-se notar que não existe restrição em substituir um sistema como o

apresentado na Figura 3.16 por um sistema como aquele da Figura 3.17 como já foi mostrado na equação (3.48). Esta substituição permite a separação da saída $Y(f)$ em suas parcelas linear e não linear, também permitindo que a equação (3.46) seja escrita no domínio da frequência:

$$Y(f) = Y_o(f) + Y_u(f) + N(f) \quad (3.55)$$

onde $Y(f)$ é a mesma saída escrita na equação (3.49). Analogamente, a equação (3.50) resulta:

$$Y_o(f) = H_o(f) X(f) \quad (3.56)$$

Fazendo uma análise da equação (3.48) na representação no domínio da frequência tem-se:

$$Y_u(f) = Y_h(f) + Y_v(f) - Y_o(f) \quad (3.57)$$

Combinando-se as equações (3.50), (3.54) e (3.56) obtêm-se:

$$Y_o(f) = Y_h(f) + \left[\frac{S_{xy_v}(f)}{S_{xx}(f)} \right] X(f) \quad (3.58)$$

substituindo-se a equação (3.58) na equação (3.57) tem-se:

$$Y_u(f) = Y_v(f) - \left[\frac{S_{xy_v}(f)}{S_{xx}(f)} \right] X(f) \quad (3.59)$$

Combinando-se a equação (3.59) com a definição da função correlação cruzada entre duas variáveis resultam:

$$\begin{aligned} S_{xy_u}(f) &= \frac{1}{T} E[X^*(f) Y_u(f)] = \frac{1}{T} E \left[X^*(f) \left(Y_v(f) - \left[\frac{S_{xy_v}(f)}{S_{xx}(f)} \right] X(f) \right) \right] \\ S_{xy_u}(f) &= \frac{1}{T} E[X^*(f) Y_v(f) - S_{xy_v}(f)] = \frac{1}{T} E[S_{xy_v}(f) - S_{xy_v}(f)] \\ S_{xy_u}(f) &= 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Esta equação prova a inexistência de correlação entre a entrada $x(t)$ e a parcela não linear da saída, $y_u(t)$, sendo portanto o modelo apresentado na Figura 3.17 útil na separação da parcela linear e da não linear da saída $y(t)$. Isto é, Uma vez determinado o valor de $H_0(f)$ obtêm-se o valor de $Y_o(f)$ através da equação (3.56) e o valor de sua auto correlação através de:

$$S_{y_0 y_0}(f) = |H_0(f)|^2 S_{xx}(f) \quad (3.61)$$

Esta última relação e a hipótese feita na mudança da Figura 3.16 para Figura 3.17 de que as saídas dos sistemas são as mesmas, demonstram a validade da transformação de variáveis correlacionadas entre para variáveis não correlacionadas.

3.6.3 Sistemas não lineares de duas entradas e uma saída

Os procedimentos de cálculo a serem detalhados neste item são desenvolvidos para sistemas não lineares com apenas uma função não linear $g(x)$. Isto é, serão desenvolvidos procedimentos para determinação da parcela não linear, da parcela linear da saída e da entrada assim como para o cálculo das funções de transferência dos caminhos linear e não linear. Os sistemas não lineares de duas entradas e uma saída discutidos a seguir são derivados dos sistemas não lineares genéricos mostrados na Figura 3.16 e Figura 3.17. As equações derivadas para tais sistemas podem ser estendidas para sistemas mais complexos que apresentam mais de uma função não linear, ou seja, mais de duas entradas onde uma é proveniente do caminho linear e as demais correspondentes aos caminhos não lineares. (Bendat, 1997)

Supondo o sistema da Figura 3.16, um sistema não linear genérico, onde a variável não linear de entrada, $v(t) = g(x(t))$, é seguida por uma função de transferência linear $A(f)$ pode ser representado da seguinte maneira:

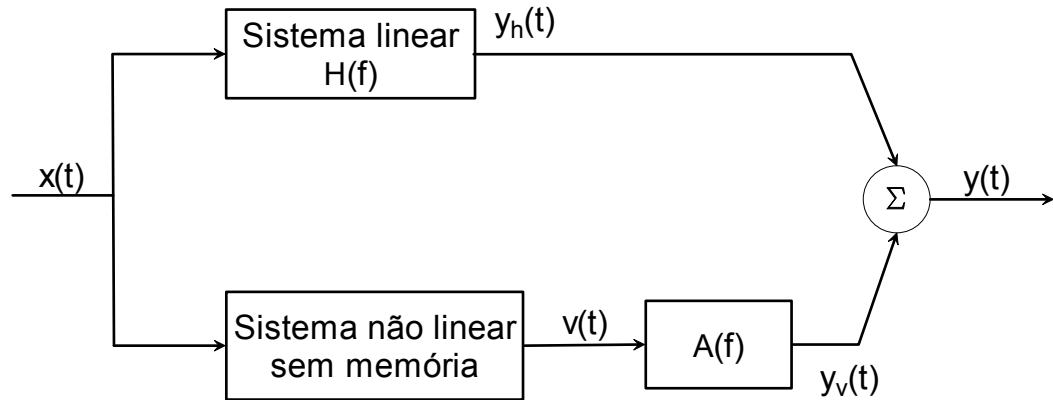


Figura 3.18- Sistema de uma entrada e uma saída com um caminho linear em paralelo com um caminho não linear com saídas correlacionadas entre si.

Aplicando-se o mesmo procedimento para conversão do sistema da Figura 3.16 no sistema da Figura 3.17 podemos representar o sistema da Figura 3.18 como se segue:

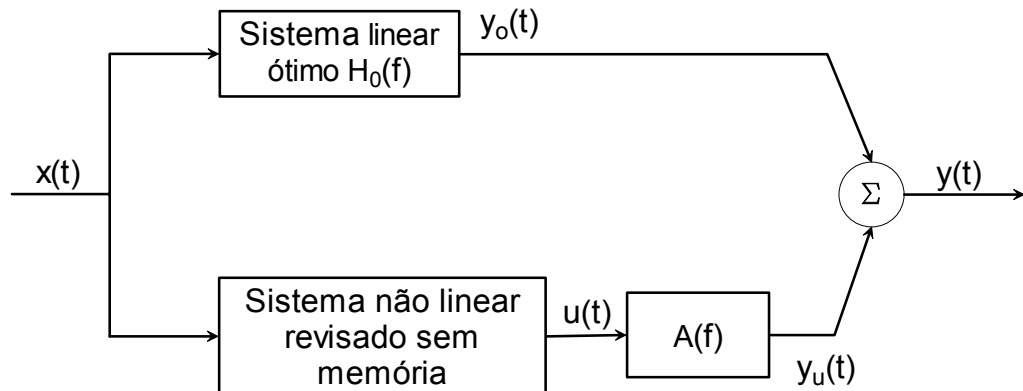


Figura 3.19- Sistema de uma entrada e uma saída com um caminho linear em paralelo com um caminho não linear com saídas não correlacionadas entre si.

Deve-se notar que para ambos os sistemas a função de transferência linear, $A(f)$, que segue a função não linear, $g(x)$, é a mesma. As relações entre as variáveis mostradas na Figura 3.18 e Figura 3.19 são derivadas das relações definidas no item 3.6.2 desde que os sistemas mostrados agora também foram definidos a partir daqueles mostrados anteriormente. Tais relações são apresentadas abaixo: (Bendat, 1987)

$$C(f) = S_{xy_v}(f) / S_{xx}(f) = [S_{xv}(f) / S_{xx}(f)] A(f) \quad (3.62)$$

$$H_0(f) = S_{xy}(f)/S_{xx}(f) = H(f) + C(f) \quad (3.63)$$

$$Y_0(f) = Y_h(f) + C(f)X(f) \quad (3.64)$$

$$Y_u(f) = Y_v(f) - C(f)X(f) \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} Y_0(f) &= H_0(f)X(f) \\ Y_h(f) &= H(f)X(f) \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} Y_u(f) &= A(f)U(f) \\ Y_v(f) &= A(f)V(f) \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$U(f) = V(f) - C(f)X(f) \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^2(f) &= \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)} \\ q_{xy}^2 &= \frac{S_{y_u y_u}(f)}{S_{yy}(f)} \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$S_{xu}(f) = 0 \quad (3.70)$$

$$S_{uu}(f) = S_{vv}(f)[1 - \gamma_{xv}^2] \quad (3.71)$$

$$S_{uy}(f) = S_{vy}(f) - C(f)S_{xy}(f) \quad (3.72)$$

Para os sistemas da Figura 3.18 e Figura 3.19 pode-se assumir que:

- $x(t)$ e $y(t)$ são medidas por meio de algum sensor;
- $v(t)$ pode ser calculado a partir do conhecimento de $g(x)$ e $x(t)$.

Considerando-se válidas as duas hipóteses, os sistemas não lineares podem ser representados por um sistema MISO linear equivalente. A partir destes sistemas MISO pode-se então calcular as funções auto correlação e correlação cruzada entre cada uma das variáveis. Deve-se sempre calcular o valor de $C(f)$ dado na equação (3.62) uma vez que este parâmetro determina o nível de correlação entre a parcela linear e não linear da saída total. Nas figuras seguintes são apresentados os sistemas MISO equivalentes ao sistema não linear:

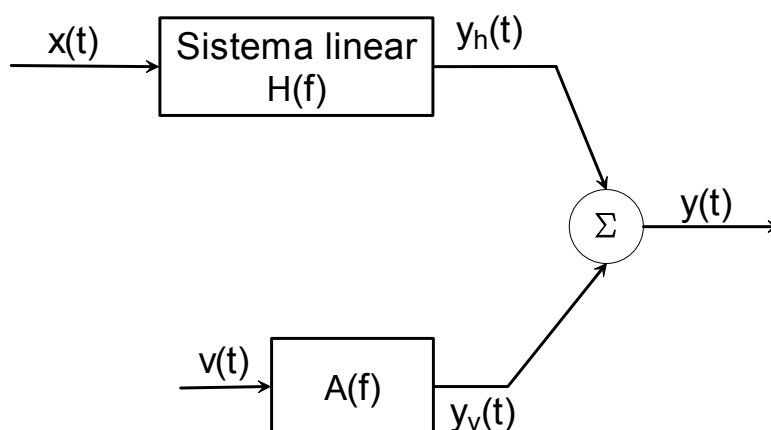


Figura 3.20- Sistema de duas entradas e uma saída (MISO) linear equivalente ao sistema não linear com saídas correlacionadas entre si.

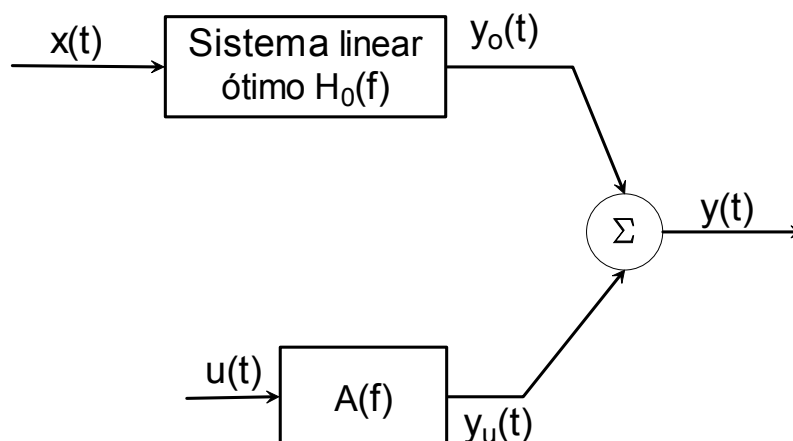


Figura 3.21- Sistema de duas entradas e uma saída (MISO) linear equivalente ao sistema não linear com saídas não correlacionadas entre si.

Para tais sistemas derivam-se as seguintes equações, a partir da teoria de análise de sinais linear:

$$S_{yy}(f) = S_{y_0y_0}(f) + S_{y_uy_u}(f) + S_{nn}(f) \quad (3.73)$$

$$H_0(f) = \frac{S_{xy}(f)}{S_{xx}(f)} = |H_0(f)| e^{-i\phi_0 f} \quad (3.74)$$

$$S_{y_0y_0}(f) = |H_0(f)|^2 S_{xx}(f) = \gamma_{xy}^2(f) S_{yy}(f) \quad (3.75)$$

$$A(f) = \frac{S_{uy}(f)}{S_{uu}(f)} = |A(f)| e^{-j\phi_a f} \quad (3.76)$$

$$S_{y_uy_u}(f) = |A(f)|^2 S_{uu}(f) = q_{xy}^2(f) S_{yy}(f) \quad (3.77)$$

$$H(f) = H_0(f) - [S_{xy}(f)/S_{xx}(f)] A(f) \quad (3.78)$$

$$S_{y_hy_h}(f) = |H(f)|^2 S_{xx}(f) \quad (3.79)$$

$$S_{y_vy_v}(f) = |A(f)|^2 S_{vv}(f) \quad (3.80)$$

$$S_{y_hy_v}(f) = H^*(f) A(f) S_{xv}(f) \quad (3.81)$$

Todos os problemas relacionados a sistemas não lineares, quando se conhece qual é o comportamento da função não linear, podem ser resolvidos através das equações (3.62) à (3.81) ou através da expansão destas equações para sistemas com mais de duas entradas (Bendat, 1997). Tais problemas pertencem a uma das classificações abaixo:

- Problemas de cálculo da resposta de um sistema não linear a uma dada entrada conhecida: Nesta classe de problemas conhecem-se a priori as funções transferência $H(f)$ e $A(f)$. A partir da entrada medida $x(t)$ pode se calcular, através da função $g(x)$, os valores de $v(t)$. Baseados nestes dados podem-se obter a parcela linear, $y_h(t)$, e a parcela não linear, $y_v(t)$, da saída total.

- Problema de identificação da função resposta em frequência: A partir da aquisição simultânea dos sinais $x(t)$ e $y(t)$, por meio de instrumentação adequada, e do cálculo, através da função $g(x)$, dos valores de $v(t)$, obtêm-se os valores das funções de transferência dos caminhos linear e não linear. Com estas funções de transferência estimam-se então os parâmetros físicos do sistema.

3.6.4 Erros estatísticos nos estimadores e planejamento dos experimentos

Os estimadores devem ser obtidos sem erros sistemáticos e consistentes. Isto é, o estimador de uma determinada função deve ter sua média convergente para o valor real da função e sua variância tendendo a zero, quando o número de amostras tende ao infinito. (Bendat & Piersol, 1986)

Devido às equações derivadas anteriormente serem equações aplicadas a amostras finitas dos sinais de entrada e saída é razoável o estudo dos erros estatísticos envolvidos.

As equações derivadas para cálculos dos erros estatísticos de um estimador qualquer assumem que a variável tenha função densidade probabilidade gaussiana. Isto pode ser assumido em algumas circunstâncias para a entrada $x(t)$, porém a hipótese não é válida para a variável $u(t)$, desde que esta é resultado de uma transformação não linear, como mencionado no item 3.3.

Portanto, as equações para os erros dos estimadores das funções $A(f)$, $S_{yuyy}(f)$ e q_{xy}^2 devem ser interpretadas não como um valor exato para o erro do estimador e sim como um guia para a programação da aquisição dos sinais.

Os erros aleatórios normalizados para as funções auto densidade espectral $S_{y_0y_0}(f)$ e $S_{y_uy_u}(f)$ são dados por: (Bendat, 1997)

$$\varepsilon \left[\hat{S}_{y_0y_0}(f) \right] \approx \frac{\left\{ 2[1 - \hat{q}_{xy}^2(f)] - \hat{q}_{xy}^2(f) \right\}^{1/2}}{|\hat{q}_{xy}^2(f)| \sqrt{n_d}} \quad (3.82)$$

$$\varepsilon \left[\hat{S}_{y_uy_u}(f) \right] \approx \frac{\left\{ 2[1 - \hat{q}_{xy}^2(f)] - \hat{q}_{xy}^2(f) \right\}^{1/2}}{|\hat{q}_{xy}^2(f)| \sqrt{n_d}} \quad (3.83)$$

onde n_d é o número de amostras independentes adquiridas e utilizadas para o cálculo da média do estimador. O erro sistemático será sempre menor quanto maior for a resolução em frequência utilizada nos cálculos dos espectros. (Bendat, 1997)

Os erros aleatórios normalizados para as funções de coerência são:

$$\varepsilon[\hat{\gamma}_{xy}^2] \approx \frac{\sqrt{2} \{ [1 - 2\hat{\gamma}_{xy}^2(f)] [1 - \hat{q}_{xy}^2(f)] + \hat{\gamma}_{xy}^4 \}}{|\hat{\gamma}_{xy}^2| \sqrt{n_d}} \quad (3.84)$$

$$\varepsilon[\hat{q}_{xy}^2] \approx \frac{\sqrt{2} \{ [1 - 2\hat{q}_{xy}^2(f)] [1 - \hat{\gamma}_{xy}^2(f)] + \hat{q}_{xy}^4 \}}{|\hat{q}_{xy}^2| \sqrt{n_d}} \quad (3.85)$$

O erro sistemático para as funções de coerência não é função da resolução em frequência utilizada nos cálculos dos espectros. Tal erro sistemático é calculado como se segue:

$$b[\hat{\gamma}_{xy}^2] \approx \frac{[1 - \hat{\gamma}_{xy}^2(f)]^2}{n_d} \quad (3.86)$$

$$b[\hat{q}_{xy}^2] \approx \frac{[1 - \hat{q}_{xy}^2(f)]^2}{n_d - 1} \quad (3.87)$$

Os erros aleatórios normalizados para as funções de transferência são divididos em erros de amplitude e erros de fase e são definidos como segue:

$$\varepsilon[|\hat{H}_0(f)|] \approx \frac{[1 - \hat{\gamma}_{xy}^2(f)]^{1/2}}{|\hat{\gamma}_{xy}(f)| \sqrt{2n_d}} \quad (3.88)$$

$$\varepsilon[|\hat{A}(f)|] \approx \frac{[1 - \hat{\gamma}_{xy}^2(f) - \hat{q}_{xy}^2(f)]^{1/2}}{|\hat{q}_{xy}(f)| \sqrt{2(n_d - 1)}} \quad (3.89)$$

$$\sigma[\hat{\phi}_0(f)] \approx \text{sen}^{-1} \left\{ \varepsilon[|\hat{H}_0(f)|] \right\} \quad (3.90)$$

$$\sigma[\hat{\phi}_A(f)] \approx \text{sen}^{-1} \left\{ \varepsilon[|\hat{A}(f)|] \right\} \quad (3.91)$$

onde para os ângulos de fase o erro é definido como o desvio padrão do estimador.

Tais formulações derivadas para os erros aleatórios dos estimadores são úteis na determinação do comprimento total de amostragem do sinal. Isto é, uma vez definido o erro mínimo necessário para um determinado ensaio de estimativa das funções obtidas no item 3.6.3 pode-se determinar o número de amostras independentes necessárias para o cálculo da média dos estimadores (n_d). Tal número de amostras pode ser atingido através de uma única amostra de comprimento $T = T_a * n_d$, que posteriormente será dividida em n_d amostras de comprimento T_a .

Deve-se salientar que o número de médias sempre deve ser aumentado para casos em que as funções coerência parciais assumem valores pequenos. Podendo-se relaxar a necessidade de um elevado número de médias quando as funções coerência parciais assumirem valores próximos a um.

