

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**



**EFICIÊNCIA DE COMPRESSIVE
SENSING BASEADO EM MODELO
QUADTREE EM IMAGENS NA
PRESENÇA DE RUÍDO**

JÚLIO CÉSAR FERREIRA

UBERLÂNDIA

2010

JÚLIO CÉSAR FERREIRA

**EFICIÊNCIA DE COMPRESSIVE SENSING
BASEADO EM MODELO QUADTREE EM
IMAGENS NA PRESENÇA DE RUÍDO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Processamento da Informação

Orientador: Professor Dr. Gilberto Arantes Carrijo.

UBERLÂNDIA

2010

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

F383e Ferreira, Júlio César, 1972-
 Eficiência de compressive sensing baseado em modelo
 quadtree em imagens na presença de ruído [manuscrito] / Júlio
 César Ferreira. - 2010.
 134 f. : il.

 Orientador: Gilberto Arantes Carrijo.
 Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
 Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.
 Inclui bibliografia.

 1. Processamento de sinais - Teses. 2. Compressão de imagens -
 Teses. 3. Detecção de sinais - Teses. 4. Compressive sensing - Teses.
 I. Carrijo, Gilberto Arantes. II. Universidade Federal de Uberlândia.
 Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

CDU: 621.391

JÚLIO CÉSAR FERREIRA

**EFICIÊNCIA DE COMPRESSIVE SENSING
BASEADO EM MODELO QUADTREE EM
IMAGENS NA PRESENÇA DE RUÍDO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Processamento da Informação

Uberlândia, 17 de dezembro de 2010

Banca Examinadora

Prof. Dr. Gilberto Arantes Carrijo – FEELT/UFU

Prof. Dr. Antônio C. P. Veiga – FEELT/UFU

Profª. Dra. Edna Lúcia Flores – FEELT/UFU

Prof. Dr. Ed' Wilson Tavares Ferreira – IFMT

Aos meus pais, por tudo.

À Luísa, minha filha, pelos sorrisos
compartilhados.

À Lara, minha esposa, pelo amor, com-
preensão e companheirismo.

Agradecimentos

Agradeço a DEUS pela minha vida.

Ao meu orientador, Dr. Gilberto Arantes Carrijo, por ter dividido comigo seus conhecimentos, pelo empenho e por acreditar que este trabalho seria possível.

Aos professores Dr. Eduardo Antônio Barros da Silva da Coppe e Dr. Luiz Velho do Impa pela cordial atenção e pelas várias contribuições ao projeto.

Aos colegas de trabalho pela ajuda e companheirismo, em especial às professoras MSc. Eliane Fonseca Campos Mota, MSc. Cristiane de Fátima dos Santos Cardoso e ao professor Dr. Paulo Henrique Garcia Mansur pelas discussões.

Agradecimento singular é devido à professora Doutoranda Mônica Sakuray Pais pelas revisões realizadas nos meus textos.

Por fim, a toda equipe do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia pela atenção e cordialidade com a qual sempre fui tratado.

*“Somos todos aprendizes em um
ofício no qual ninguém nunca se
torna mestre.”*

ERNEST HEMINGWAY, 1961

Resumo

Esta pesquisa é do tipo quantitativa experimental e buscou investigar o quanto a eficiência do algoritmo CoSaMP modificado segundo a teoria de *Compressive Sensing* (CS) baseado em modelo QuadTree altera quando aplicado em imagens com ruído de quantização e esparsidade. O objetivo desta dissertação foi avaliar o impacto dos ruídos de quantização e de aproximação à esparsidade na eficiência da reconstrução de imagens, além de comparar a eficiência entre o CoSaMP baseado em modelo QuadTree e o CoSaMP tradicional. Para isso, foi necessária uma revisão literária aprofundada do estado da arte em compressão de imagens, da teoria de CS convencional e da teoria de CS baseado em modelo. Após a etapa de revisão, foram construídas rotinas no MatlabTM e realizados vários testes variando valores de medidas M , níveis de esparsidade S e passos de quantização Q em quatro imagens com diferentes esparsidades e resoluções. Resultados demonstraram que os erros de quantização não são percebidos quando o ruído de aproximação à esparsidade é grande. Por outro lado, quando os erros de esparsidade são baixos, foi possível verificar melhor desempenho para os passos 1, 2, 4 e 8. Os resultados mostraram ainda que a razão entre o número de medidas e o nível de aproximação à esparsidade segue o seguinte critério: $3,00 \leq M/S \leq 3,75$. Neste caso, os valores de M/S variaram do menor para o maior, à medida que as imagens variaram das mais esparsas para as menos esparsas. Foi possível observar que a eficiência do algoritmo não depende do tamanho da imagem empilhada N , mas sim do nível de aproximação à esparsidade S . Além disso, observou-se que o CoSaMP QuadTree tem desempenho melhor que o CoSaMP para todos os valores de medidas M e desempenho melhor que o CS convencional quando são tomadas poucas medidas.

Palavras-chave

Modelo QuadTree, Wavelet, Quantização, Esparsidade, Otimização.

Abstract

This work is an experimental quantitative research and it investigated how much the efficiency of the CoSaMP algorithm modified according to the theory that advocates the changes of the QuadTree model-based Compressive Sensing (CS) when applied to images with quantization and sparsity approximation noise. The aim of this study was to evaluate the impact of quantization and sparsity approximation noise to the efficiency of image reconstruction and to compare the efficiency between the Quadtree model-based CoSaMP and the traditional CoSaMP. For this, a thorough literature review of the state of the art in image compression, theory of conventional CS and theory of model-based CS was done. After the review stage, MatlabTM routines were built and several tests varying values of M measurements, S sparsity levels and Q quantization steps were applied to four images with different sparsity levels and resolutions. Results showed that the quantization errors are not perceived when the sparsity approximation error level is high. On the other hand, when the sparsity approximation error level is low we observed better performance for steps 1, 2, 4 and 8. The results also showed that the ratio between the number of measurements and the sparsity approximation level meets the following criteria: $3.00 \leq M/S \leq 3.75$. In this case, the values of M/S ranged from the lowest to highest, as the images varied from less to more sparsely scattered. It was observed that the efficiency of the algorithm does not depend on the N stacked image size, but rather the S sparsity approximation level. Furthermore, we observed that the Quadtree CoSaMP outperforms the CoSaMP for all M measurements and performs better than the conventional CS when we take less measurements.

Keywords

QuadTree Model, Wavelet, Quantization, Sparsity, Optimization.

Conteúdo

Conteúdo	x
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xvi
Lista de Algoritmos	xvii
Lista de Abreviaturas e Siglas	xviii
I O Cenário	1
1 Introdução	2
1.1 Justificativa e Motivação	2
1.2 Objetivos	4
1.3 Organização do Texto	5
1.4 Considerações Finais deste Capítulo	6
2 Aquisição e Compressão de Imagens	7
2.1 Aquisição de Imagens	8
2.2 Compressão de Imagens	10
2.2.1 Transformadas	11
2.2.2 Quantização	14
2.2.3 Codificação	16
2.2.4 Padrões	17
2.2.5 Classificação de Compressão	19
2.3 Considerações Finais deste Capítulo	21

II	A Teoria	22
3	Um Novo Paradigma: CS	23
3.1	O Nascimento de CS	24
3.2	Sensoriamento e Reconstrução	26
3.3	Esparso e Compressível	28
3.3.1	Sinais Esparsos	29
3.3.2	Sinais Compressíveis	29
3.4	Teoria da Aproximação	30
3.5	Propriedade da Isometria Restrita (RIP)	31
3.5.1	Coerência entre Bases	32
3.5.2	Princípio da Incerteza	35
3.5.3	Constante de Isometria Restrita	36
3.6	Matrizes e Número de Medidas	40
3.7	Algoritmos de Reconstrução	43
3.7.1	L1–Magic	44
3.7.2	CoSaMP	46
3.8	Um Exemplo Simples	50
3.9	Aplicações de CS	52
3.10	Considerações Finais deste Capítulo	56
4	CS Baseado em Modelo	58
4.1	Além do Esparso e do Compressível	59
4.1.1	Sinais Modelo–Esparsos	60
4.1.2	Sinais Modelo–Compressíveis	60
4.2	Correspondente à RIP	61
4.2.1	RIP Baseada em Modelo	62
4.2.2	Propriedade de Amplificação Restrita (RAmP)	63
4.3	Matrizes e Número de Medidas	65
4.4	CoSaMP Baseado em Modelo	67
4.5	O Modelo <i>Tree Wavelet</i>	70
4.5.1	Sinais <i>Tree</i> –Esparsos	71
4.5.2	Sinais <i>Tree</i> –Compressíveis	73
4.5.3	Um Exemplo Simples	76
4.6	Outros Modelos	79
4.7	Considerações Finais deste Capítulo	80
III	Experimentos e Discussões	82
5	Resultados Experimentais	83

5.1	Métricas de Qualidade em Imagens	85
5.2	Imagens Avaliadas e Matrizes de Medida	87
5.3	Sistema Computacional	91
5.4	Experimento I	93
5.5	Experimento II	102
5.6	Experimento III	109
5.7	Exemplos Específicos	115
5.8	Considerações Finais deste Capítulo	122
6	Conclusão	124
6.1	Contribuições do Trabalho	127
6.2	Trabalhos Futuros	127
	Referências Bibliográficas	129

Lista de Figuras

2.1	<i>Exemplo de imagem redundante Lena e não redundante Ruído Branco com resolução 256×256 pixels.</i>	12
2.2	<i>Exemplo da transformada Wavelet 2D em três estágios da imagem original Lena, cujos coeficientes são representados em escala de cinza desse modo: brancos – valores positivos; preto – valores negativos e cinza – zeros. (Extraído de [47].)</i>	14
2.3	<i>Exemplo de quantização escalar linear – quando os intervalos tem o mesmo tamanho.</i>	15
3.1	<i>Primeiro experimento utilizando CS. (a) Imagem de teste phantom Logan–Shepp de Ressonância Magnética. (b) Reconstrução obtida utilizando Filtered Backprojection. (c) Reconstrução obtida utilizando CS pela minimização da norma Total Variation. (Extraído de [47].)</i>	24
3.2	<i>O esquema de aquisição por sensoriamento. (a) Processo de medida utilizando matriz de medida Φ e matriz que leva à esparsidade Ψ. (b) Processo de medida com $\Theta = \Phi\Psi$. Existem quatro colunas que correspondem aos coeficientes s_i diferentes de zero. O vetor de medida y é a combinação linear dessas medidas. (Extraído de [1].)</i>	27
3.3	<i>Um exemplo simples de CS. Os componentes do vetor original x são representados pelos quadrados azuis e os componentes do vetor reconstruído $\hat{s}$ pelas circunferências vermelhas. (a) CS operando sem eficiência com 54 medidas e (b) CS com eficiência utilizando 64 medidas.</i>	52
4.1	<i>Um exemplo simples Baseado em modelo Tree Wavelet Binária. O sinal original com ruído gaussiano adicionado a x é representado pela linha de cor verde, o sinal original x sem ruído pela cor azul e o sinal reconstruído pela cor vermelha.</i>	79

5.1	<i>Lena, Cameraman, Phantom e Texto e seus respectivos espectros. Em (b), (d), (f) e (h), apenas os 10000 maiores coeficientes estão em preto.</i>	89
5.2	<i>Resultado da avaliação de 12 passos de quantização para Lena variando duas resoluções e 20 medidas. $PSNR \times BR$.</i>	96
5.3	<i>Resultado da avaliação de 12 passos de quantização para Cameraman variando duas resoluções e 20 medidas. $PSNR \times BR$.</i>	96
5.4	<i>Resultado da avaliação de 12 passos de quantização para Phantom variando duas resoluções e 20 medidas. $PSNR \times BR$.</i>	96
5.5	<i>Resultado da avaliação de 12 passos de quantização para Texto variando duas resoluções e 20 medidas. $PSNR \times BR$.</i>	97
5.6	<i>Resultado da avaliação de 12 passos de quantização para Lena variando duas resoluções e 20 medidas. $PSNR \times M$.</i>	97
5.7	<i>Resultado da avaliação de 12 passos de quantização para Cameraman variando duas resoluções e 20 medidas. $PSNR \times M$.</i>	97
5.8	<i>Resultado da avaliação de 12 passos de quantização para Phantom variando duas resoluções e 20 medidas. $PSNR \times M$.</i>	98
5.9	<i>Resultado da avaliação de 12 passos de quantização para Texto variando duas resoluções e 20 medidas. $PSNR \times M$.</i>	98
5.10	<i>Zoom aplicado sobre o gráfico $PSNR \times BR$ da imagem Lena 128×128 pixels.</i>	99
5.11	<i>Gráfico 3D $PSNR \times M \times Q$ da imagem Phantom 64×64 pixels.</i>	100
5.12	<i>Resultado da avaliação de 12 níveis de aproximação para a imagem Lena variando duas resoluções e 20 medidas. $NMSE \times M$.</i>	106
5.13	<i>Resultado da avaliação de 12 níveis de aproximação para a Cameraman variando duas resoluções e 20 medidas. $NMSE \times M$.</i>	106
5.14	<i>Resultado da avaliação de 12 níveis de aproximação para a Phantom variando duas resoluções e 20 medidas. $NMSE \times M$.</i>	106
5.15	<i>Resultado da avaliação de 12 níveis de aproximação para a Texto variando duas resoluções e 20 medidas. $NMSE \times M$.</i>	107
5.16	<i>Zoom aplicado sobre o gráfico $NMSE \times M$ para valores pequenos de $NMSE$ na imagem Lena 64×64 pixels. O mesmo comportamento acontece nas demais imagens e resoluções, alterando apenas os valores do $NMSE$.</i>	107
5.17	<i>Resultado da avaliação de 3 cenários na reconstrução da Lena e Cameraman com resolução 128×128 pixels. $PSNR \times M$.</i>	111
5.18	<i>Resultado da avaliação de 3 cenários na reconstrução da Texto e Phantom com resolução 128×128 pixels. $PSNR \times M$.</i>	111
5.19	<i>Resultado da avaliação de 3 cenários na reconstrução da Phantom e Texto com resolução 256×256 pixels. $PSNR \times M$.</i>	114

-
- 5.20 *Da esquerda para direita e de cima para baixo, quatro imagens com zoom: a Lena original e três imagens reconstruídas a partir de $M = 10000$ medidas utilizando, respectivamente, CoSaMP QuadTree, CoSaMP e TV. 117*
- 5.21 *Da esquerda para direita e de cima para baixo, três imagens: a imagem sintética Phantom utilizada como modelo em Ressonância Magnética e duas imagens reconstruídas a partir de apenas $M = 4000$ medidas utilizando CoSaMP QuadTree e TV, respectivamente. 121*

Lista de Tabelas

5.1	Configurações utilizadas no Experimento I para avaliação dos diferentes passos de quantização na eficiência do CoSaMP QuadTree.	94
5.2	Resultados do Experimento I avaliando passos de quantização em relação à eficiência de reconstrução ($PSNR$) e taxa de $bits$ (BR).	102
5.3	Configurações utilizadas no Experimento II para avaliação da relação entre medidas M e o nível de aproximação à esparsidade S	103
5.4	Resultados observados ao avaliar o efeito de diferentes razões M/S na eficiência de CoSaMP QuadTree.	108
5.5	Configuração dos três cenários utilizados na avaliação do Experimento III: CoSaMP QuadTree, CoSaMP e TV.	110
5.6	Resultados observados ao avaliar o CoSaMP QuadTree em relação ao CoSaMP e ao TV para as quatro imagens escolhidas.	114
5.7	Configuração dos quatro cenários para avaliação da <i>Lena</i> 256×256 pixels com apenas 10000 medidas: CoSaMP QuadTree, CoSaMP, TV e DWT-L1-N.	116
5.8	Resultados obtidos a partir da reconstrução da imagem <i>Lena</i> 256×256 pixels com 10000 medidas utilizando CoSaMP QuadTree, CoSaMP, TV e DWT-L1-N. $PSNR$ e $NMSE$ são métricas de eficiência na reconstrução, BR é a taxa de $bits$ e T é o tempo da reconstrução.	118
5.9	Configurações de quatro cenários de reconstrução da imagem <i>Pimentas</i> 128×128 pixels com $M = 5000$ e aproximação ao modelo QuadTree em $S = 1667$	119
5.10	Resultados para a imagem <i>Pimentas</i> 128×128 pixels com 5000 medidas avaliada em quatro cenários.	120

Lista de Algoritmos

1	Algoritmo de Reconstrução CoSaMP	48
2	Algoritmo de Reconstrução CoSaMP Baseado em Modelo . . .	68

Lista de Abreviaturas e Siglas

<i>BR</i> –	<i>Bitrate</i>
<i>bpp</i> –	<i>Bits Per Pixel</i>
<i>CCD</i> –	<i>Charge Coupled Device</i>
<i>CMOS</i> –	<i>Complementary Metal Oxide Semiconductor</i>
<i>CoSaMP</i> –	<i>Compressive Sampling Matching Pursuit</i>
<i>CS</i> –	<i>Compressive Sensing</i>
<i>CSSA</i> –	<i>Condensing Sort and Select Algorithm</i>
<i>CVX</i> –	<i>Disciplined Convex Programming</i>
<i>dB</i> –	<i>Decibel</i>
<i>DCT</i> –	<i>Discrete Cosine Transform</i>
<i>DFT</i> –	<i>Discrete Fourier Transform</i>
<i>DPCM</i> –	<i>Differential Pulse Code Modulation</i>
<i>DWT</i> –	<i>Discrete Wavelet Transform</i>
<i>EBCOT</i> –	<i>Embedded Block Coding with Optimal Truncation</i>
<i>EZW</i> –	<i>Embedded Zerotree Wavelet Coder</i>
<i>GB</i> –	<i>Giga byte (1073741824 bytes)</i>
<i>JPEG</i> –	<i>Joint Photographic Experts Group</i>
<i>KLT</i> –	<i>Karhunen-Loève Transform</i>
<i>NAP</i> –	<i>Nested Approximation Property</i>
<i>NMSE</i> –	<i>Normalized Mean Square Error</i>
<i>OMP</i> –	<i>Orthogonal Matching Pursuit</i>
<i>PGM</i> –	<i>Portable Gray Map</i>
<i>PSNR</i> –	<i>Peak Signal to Noise Ratio</i>
<i>RAmP</i> –	<i>Restricted Amplification Property</i>
<i>RMSE</i> –	<i>Root Mean Square Error</i>
<i>RIP</i> –	<i>Restricted Isometry Property</i>
<i>RLC</i> –	<i>Run Length Coding</i>
<i>StOMP</i> –	<i>Stagewise Orthogonal Matching Pursuit</i>
<i>SPIHT</i> –	<i>Set Partitioning in Hierarchical Trees</i>
<i>TV</i> –	<i>Total Variation</i>

Parte I

O Cenário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Justificativa e Motivação

A revolução digital pela qual a sociedade pós-moderna está passando tem lançado vários desafios quanto ao processamento, armazenamento e transmissão de sinais. A necessidade do homem e os consequentes avanços tecnológicos tem fornecido uma enorme quantidade de dados que devem ser comprimidos para ocupar menos espaço de armazenamento e facilitar a transmissão. Neste sentido, técnicas modernas de compressão de sinais fundamentadas no teorema de amostragem de *Shannon–Whittaker* têm desempenhado um papel bastante satisfatório para a maioria das aplicações práticas. Essas técnicas utilizam o modelo amostragem–compressão que consiste em amostrar a uma taxa de, no mínimo, duas vezes a frequência de *Nyquist* para sinais limitados em banda, aplicar técnicas de representação de sinais e, posteriormente, comprimi-los. Para alguns sinais que não são limitados em banda, como imagens, a taxa de amostragem não é ditada pelo teorema de *Shannon–Whittaker*, mas sim pela resolução espacial ou temporal. Porém, o teorema

desempenha papel implícito ao se utilizar filtros passa-baixa *antialiasing* para limitar a banda do sinal antes de amostrar.

Embora a teoria clássica seja eficiente, existem algumas aplicações com sinais ou imagens que não se comportam tão bem utilizando o consagrado modelo amostragem-compressão, ou porque o custo de aquisição do sinal é proibitivo ou porque os dispositivos amostradores não conseguem alcançar as altas taxas de amostragem exigidas pelo limite de *Nyquist*. Alguns exemplos dessas imagens são: imagens médicas, imagens de radar, imagens fora do comprimento de onda visível no espectro de frequência, etc.

Nesse contexto surge *Compressive Sensing* (CS)¹ – uma nova teoria matemática probabilística capaz de adquirir poucas medidas não adaptativas já na forma comprimida e reconstruir o sinal original com eficiência. Ela surge como uma alternativa ao modelo amostragem-compressão e é caracterizada pelas etapas simultâneas de aquisição e compressão. Assim, a aquisição é realizada como se fosse possível conhecer a localização dos coeficientes mais significativos e então, amostrar apenas esses coeficientes.

A etapa de reconstrução consiste em utilizar algoritmos de otimização para encontrar o sinal original. Entretanto, resultados comparáveis com o estado da arte em compressão, tal como o padrão JPEG2000, ainda não são alcançáveis.

É aqui que surge CS baseado em modelo, que consiste em utilizar o conhecimento prévio sobre imagens suaves e localmente suaves, que garante que elas pertencem a uma classe ou possuem uma certa estrutura, para melhorar a eficiência do algoritmo de reconstrução. Este procedimento é o mesmo utilizado na etapa de representação de sinais do padrão JPEG2000.

Ao invés de amostrar todos os elementos da cena, a etapa de aquisição

¹Por ser uma nova teoria, alguns pesquisadores a denominam de *Compressive Sensing* e outros, de *Compressive Sampling*. Devido a essa indefinição e à comodidade, optou-se por utilizar a sigla CS no lugar das denominações anteriores.

é realizada pelo produto de $M \ll N$ funções de medidas aleatórias com o sinal a ser adquirido x e a reconstrução é realizada utilizando técnicas de otimização convexa ou algoritmo guloso. A teoria de CS convencional garante a reconstrução com robustez para valores de

$$M = \mathcal{O}\left(S \log \frac{N}{S}\right) \quad (1.1)$$

medidas, desde que a matriz que leva à esparsidade e a matriz de medida tenham Propriedade de Isometria Restrita (RIP). Por outro lado, a teoria de CS baseado em modelo garante reconstrução com robustez para valores de

$$M = \mathcal{O}(S) \quad (1.2)$$

medidas, desde que tenham Propriedade de Amplificação Restrita (RAmP). Esta teoria aproveita a existência de modelos mais realísticos para imagens, que incluem a dependência entre os valores e a localização dos coeficientes da imagem.

1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é avaliar a eficiência do algoritmo de reconstrução CoSaMP baseado em modelo na reconstrução de imagens, quando estas são aproximadas por modelos realísticos baseado em transformada *Wavelet*.

Inicialmente, são avaliadas a eficiência do algoritmo na presença de dois tipos de ruído: aqueles gerados por diferentes passos de quantização e aqueles obtidos a partir da aproximação de distintos níveis de esparsidade. Deseja-

se mostrar que a teoria de CS baseado em modelo garante robustez para o algoritmo de reconstrução CoSaMP com um número reduzido de medidas, mesmo na presença de ruído.

Após a verificação de como o algoritmo se comporta na presença de ruído, é avaliada a eficiência para diferentes valores de medidas e realizada a comparação com dois outros algoritmos: CoSaMP tradicional e otimização convexa minimizando a norma *Total Variation* (TV)². Espera-se que o CoSaMP baseado em modelo tenha maior eficiência que o CoSaMP e seja um pouco melhor que o algoritmo TV, principalmente para valores menores de medidas.

1.3 Organização do Texto

No capítulo 2 é apresentado o estado da arte em aquisição e compressão de imagens. Alguns dispositivos modernos de aquisição, teorias e técnicas consagradas de compressão de imagens baseada em codificação por transformada são relatadas.

No capítulo 3 é mostrada uma revisão bibliográfica sobre o novo paradigma baseado em aquisição por sensoriamento e reconstrução, denominado CS convencional. Os dois principais tópicos abordados são: a etapa de **aquisição por sensoriamento** não adaptativa do sinal e a etapa de **reconstrução** a partir de algoritmos de otimização CoSaMP, que levam em consideração a representação esparsa dos sinais, a teoria de aproximação e propriedades que garantem robustez para certo número de medidas. Além disso, são apresentadas algumas aplicações e um exemplo simples.

No capítulo 4 pode-se observar como a teoria de CS convencional foi modificada para interagir com sinais que apresentam modelos mais realísticos.

²A norma *Total Variation* é interpretada como a norma l_1 do gradiente da função, apropriadamente discretizada, [47].

Trata-se da inserção de algumas técnicas consagradas do padrão JPEG2000 na teoria de CS apresentada no capítulo 3. São apresentadas as novas propriedades que garantem robustez para sinais suaves e localmente suaves e a modificação do algoritmo CoSaMP. No final do capítulo, pode-se verificar um exemplo simples e outros modelos que podem ser utilizados para modificar o CS convencional.

No capítulo 5 são apresentadas as metodologias e os resultados para cada um dos experimentos, visando inferir sobre a influência da variação de passos de quantização (Experimento I) e a influência da variação da razão entre o número de medidas e o número de esparsidade (Experimento II) na eficiência do algoritmo CoSaMP baseado em modelo. Além desses dois experimentos, a eficiência na reconstrução de imagens é comparada para três algoritmos (Experimento III): o CoSaMP, o CoSaMP baseado em modelo e o algoritmo com otimização convexa minimizando a norma TV. Por último, alguns testes específicos com imagens foram comparados com trabalhos relacionados.

No capítulo 6 são discutidas as conclusões obtidas dos resultados experimentais, as contribuições obtidas com a realização deste trabalho, bem como novos trabalhos que poderão ser desenvolvidos futuramente.

1.4 Considerações Finais deste Capítulo

Este capítulo apresentou a justificativa, motivação e os objetivos deste trabalho. Finalmente, ele mostrou como está organizado o texto desta dissertação. O próximo capítulo apresenta o estado da arte em aquisição e compressão de imagens. Alguns dispositivos de aquisição e teorias consagradas de compressão de imagens baseada em codificação por transformada são relatadas.

Capítulo 2

Aquisição e Compressão de Imagens

Este capítulo apresenta o estado da arte para as técnicas de aquisição e compressão de imagens. A seção de aquisição de imagens é reservada para a apresentação de alguns dos dispositivos sensores de intensidade luminosa mais utilizados. Também é descrito o procedimento de digitalização da imagem pela amostragem e quantização no domínio do espaço juntamente com a exibição do teorema que garante, ainda que de modo implícito, a quantidade mínima de medidas necessárias para a reconstrução exata da imagem. A seção de compressão de imagens relata as técnicas que constituem os dois padrões de compressão mais utilizados: o padrão de compressão JPEG e o padrão de compressão JPEG2000.

2.1 Aquisição de Imagens

Como pode ser observado em [26], dois elementos são necessários para a aquisição de imagens digitais: dispositivos físicos constituídos de sensores que sejam sensíveis às bandas do espectro eletromagnético e dispositivos que visam converter a saída elétrica gerada nos sensores para a forma digital. Os primeiros dispositivos podem operar em diversas bandas, tais como o infravermelho, o visível, o ultravioleta e o raio X. O produto obtido do segundo dispositivo já fica disponível para processamento computacional subsequente. Esses dois elementos que constituem a etapa de digitalização da imagem são denominados, respectivamente, amostragem e quantização. Como pode ser visto em [44], a amostragem consiste em discretizar o domínio de definição da imagem nas direções x e y , gerando uma matriz de m por n medidas amostradas, respectivamente. Já a quantização consiste em escolher o número inteiro L de níveis de cinza permitidos para cada ponto da imagem monocromática.

Existem diferentes dispositivos sensores especializados em diversas bandas do espectro eletromagnético. Dentre os principais, pode-se citar os microdensitômetros, analisadores de imagens, câmeras de tubo vidicon e matrizes de estado sólido fotossensível, [26]. Os dois últimos dispositivos são apresentados com mais detalhe devido a sua maior aplicação. Nos últimos anos, as câmeras vidicon foram substituídas pelas câmeras de estado sólido fotossensíveis, tanto as constituídas de sensores por varredura de linhas quanto as constituídas por sensores por varredura de área. A tecnologia utilizada neste último tipo de dispositivo é baseada em Dispositivos de Carga Aco-plada (CCD), que conseguem resoluções da ordem de milhões de *pixels*, [45]. Pode-se observar também em [45] que dispositivos físicos do tipo Semicondutor de Óxido Metálico Complementar (CMOS) compete proximamente com os dispositivos baseados em tecnologia CCD, com a vantagem de serem mais

baratos, compactos, portáteis, robustos e com flexibilidade de adicionar outros circuitos ao circuito CMOS. Por outro lado, [45] cita que não se espera que a tecnologia CMOS desafie a tecnologia CCD para aplicações técnicas e científicas que requeiram alta fidelidade, alta resolução e ausência de ruído. Assim, espera-se que novas técnicas sejam desenvolvidas com o propósito de melhoramento da tecnologia CMOS, [45].

Ainda que haja dispositivos físicos de qualidade, tais como os citados acima, a digitalização adequada de uma imagem requer cuidados com a etapa de amostragem para que não perca informações durante este processo ou para que a perda não seja significativa, [44]. Neste sentido, existem teoremas que fazem a ponte entre o caso contínuo e o discreto. Desse modo, estas abordagens para amostragem de sinais ou imagens seguem o famoso teorema de *Shannon–Whittaker*, [48], que estabelece o limite da taxa de amostragem para a reconstrução garantida do sinal. O teorema define que um sinal de banda limitada pode ser reconstruído completamente, desde que a taxa de amostragem seja, no mínimo, duas vezes maior do que a frequência máxima apresentada no domínio da frequência. Essa frequência máxima é chamada de limite de *Nyquist*, [41]. Para alguns sinais, tais como imagens, que não são naturalmente limitadas em banda, a taxa de amostragem é ditada não pelo teorema de *Shannon*, mas pela resolução temporal ou espacial. Contudo, é comum nesses sistemas a utilização de filtros passa-baixa *antialiasing* para limitar a banda do sinal antes de amostrar e assim o teorema de *Shannon* desempenha papel implícito, [16]. Nas áreas de conversão de dados, a tecnologia de conversor analógico–digital padrão implementa a representação de *Shannon* quantizada. Nesta representação, o sinal é uniformemente amostrado na taxa de *Nyquist* ou superior a ela, [16].

A segunda etapa do passo de digitalização é a quantização. O número de níveis de quantização da imagem pode ser de 2, 8, 32, 64, 128, 256 e 512 níveis

de cinza ou mais, dependendo da aplicação. Além disso, em [44], pode ser observado que o número de níveis de cinza é potência de 2, ou seja, $L = 2^b$, onde L é o número de níveis de cinza e b é a profundidade da imagem. Sensores utilizados em aplicações de sensoriamento remoto utilizam valores típicos de profundidade $b = 11$, ou seja, 2048 níveis de cinza. Informações mais detalhadas sobre as técnicas de quantização mais utilizadas serão apresentadas na seção 2.2.2 deste capítulo.

2.2 Compressão de Imagens

O desenvolvimento tecnológico ocorrido nas últimas décadas vem exigindo um aumento significativo de dados e, conseqüentemente, tem exigido melhor desempenho dos dispositivos de armazenamento e transmissão de informações. No caso específico de imagens, a representação compacta é procedimento precípua ante ao armazenamento ou transmissão de uma imagem ou vídeo. Como exemplo, [44] relata que um vídeo com duração de 1 minuto formado por imagens de 512 por 512 *pixels*, exibidas a uma taxa de 30 imagens por segundo, cada pixel representado por 24 *bits*, requer aproximadamente 1.4 GB para seu armazenamento. O alto custo de armazenamento é observado em [45] no exemplo de reconstrução de tomografia com $500 \times 500 \times 500$ *voxels* que requer 125 MB para armazenamento. Além desses exemplos pontuais, [44] e [45] apresentam algumas áreas que demandam alto índice de compressão, tais como: videoconferência, televisão digital, telemedicina, comunicação militar via satélite, sensoriamento remoto, imagens médicas e busca por conteúdo de imagem. Mesmo em face das recentes mudanças, tais como barateamento de dispositivos de armazenamento, serviços em nuvem gratuitas e elevação da taxa de transmissão de acesso à internet, algumas aplicações tem caracte-

terísticas peculiares que exigem alta compressão, poucas medidas adquiridas e baixo tempo de aquisição.

A compressão de dados objetiva reduzir o número de *bits* necessários para representar um sinal ou imagem explorando a estrutura dos dados e as características do usuário, [47]. Em relação à estrutura das imagens, a redundância e a esparsidade são exploradas, as quais têm significado para os seres humanos. Já em relação às características do usuário, são exploradas as limitações do sistema visual humano. Dois quesitos são avaliados quando se trata de compressão de imagens: o tempo necessário para comprimir e descomprimir a imagem e a fidelidade da reconstrução, [45]. Neste trabalho, o objetivo principal é avaliar a fidelidade, embora seja observada também a taxa média de *bits* para a imagem em estudo e o tempo de reconstrução. Deseja-se fazer a difícil escolha entre o ótimo para o número de *bits* usados para representar um sinal e a quantificação da diferença entre a imagem original e a imagem reconstruída.

2.2.1 Transformadas

A maioria das imagens naturais ou artificiais que tem significado para os seres humanos são redundantes e, por conseguinte, compressíveis. [44] cita três tipos de redundância: a redundância de codificação que explora a proporção desbalanceada de cada símbolo; a redundância interpixel que explora a característica de que *pixels* vizinhos em uma imagem normalmente possuem alguma relação ou similaridade e a redundância psicovisual que explora a imprecisão do sistema visual humano em perceber certos detalhes em uma imagem. Como pode ser visto na figura 2.1, a imagem redundante *Lena* apresenta *pixels* que não estão na região de fronteira muito similares aos seus adjacentes, enquanto que a imagem Ruído Branco não redundante

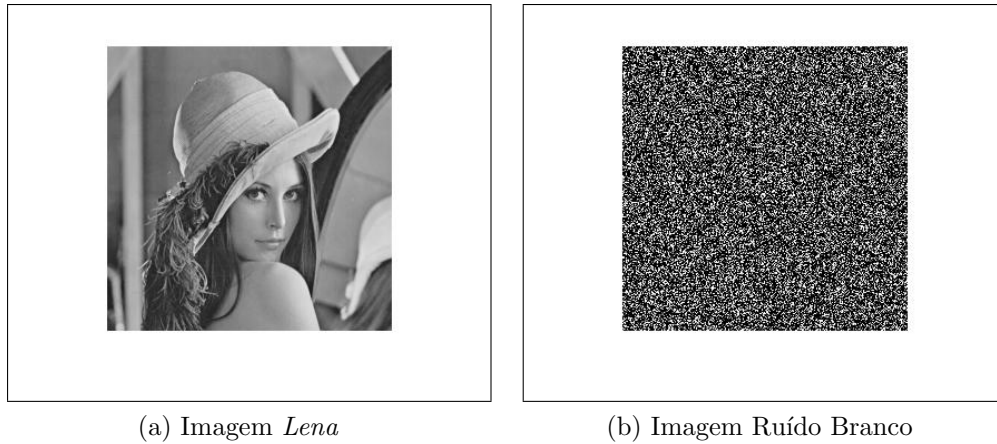


Figura 2.1: *Exemplo de imagem redundante Lena e não redundante Ruído Branco com resolução 256×256 pixels.*

possui comportamento muito diferente.

A existência de redundância indica que o procedimento de armazenamento da imagem utilizando todos os *pixels* é ineficiente, visto que a maioria dos *pixels* é redundante. Segundo [27], a solução é encontrar uma representação que faça as informações se concentrarem em poucos coeficientes significativos e, posteriormente, ajustar os demais coeficientes para zero. A codificação por transformada é o nome dado à técnica de compressão de dados que muda a representação da imagem com o propósito de minimizar a redundância dos dados e maximizar a concentração de energia, [27]. Entretanto, a obtenção de matrizes com muitos zeros não é suficiente para reduzir o número de medidas necessárias para a reconstrução da imagem. É necessário salientar que os valores dos *pixels* variam geralmente entre 0 e 255 para *pixels* representados com 8 *bits* e, depois de aplicada a transformada, os coeficientes podem assumir valores de pontos flutuantes arbitrários e apenas próximos de zero. Desse modo, a compressão não é eficiente sem a etapa de quantização, que visa representar um grande intervalo de valores por um conjunto relativamente pequeno de símbolos e sem a etapa de codificação, que leva

em consideração as características estatísticas dos símbolos e a posição dos dispositivos mais significativos para mapear em um fluxo menor de símbolos possíveis. Conforme foi visto, a codificação por transformada consiste em três etapas: a aplicação de uma transformada na imagem original; a utilização de uma técnica de quantização e a implementação de uma técnica de codificação.

A seguir, estuda-se duas transformadas mais comuns e suas aplicações em compressão de imagens.

Transformada Discreta *Cosseno*

A Transformada Discreta *Cosseno* (DCT) é muito similar à transformada de *Fourier*, uma vez que fornece uma análise espectral da imagem. Como pode ser observado em [27], a DCT possui algumas propriedades que a torna muito interessante para compressão de imagens. Ela é uma boa aproximação da Transformada ótima *Karhunen–Loève* (KLT) para dados com alta correlação e fornece excelente compactação de energia para dados altamente correlacionados. Trata-se de uma transformada real que pode ser implementada por um algoritmo rápido e a transformada independe da estrutura dos dados. O primeiro coeficiente corresponde ao nível médio do sinal e altas frequências são associadas com baixos coeficientes. Além disso, como muitos coeficientes ficam próximos de zero, a distorção é menor e resultados melhores podem ser obtidos aplicando a DCT em blocos $(B \times B)$.

Transformada Discreta *Wavelet*

A principal característica da Transformada Discreta *Wavelet* (DWT) é que ela extrai informações tanto no domínio do tempo quanto da frequência, [27]. O seu funcionamento é constituído da decomposição de um sinal ou

imagem sobre uma base composta de translações e escalonamentos de uma função mãe, o que equivale a filtrar o sinal em diferentes subbandas em um número pré-definido de estágios. Neste caso, o filtro passa-baixa faz a suavização do sinal e a remoção de detalhes e o filtro passa-alta corresponde às diferenças entre as escalas. Como pode ser observado na figura 2.2, a maioria dos coeficientes são próximos de zero e as bandas horizontal, vertical e diagonal são proximamente relacionadas. Estas características, aliadas à capacidade de dividir a informação em níveis de detalhes faz da DWT uma transformada interessante para aplicações em compressão, [47]. [27] cita que resultados melhores são obtidos aplicando a DWT em blocos $(B \times B)$.

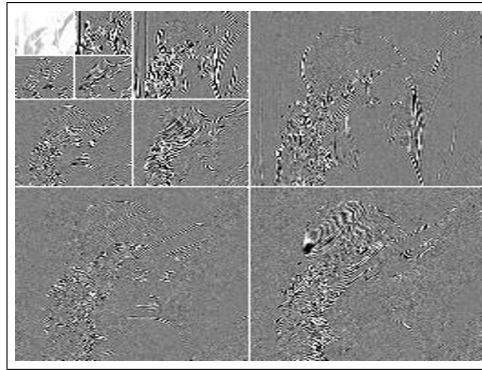


Figura 2.2: *Exemplo da transformada Wavelet 2D em três estágios da imagem original Lena, cujos coeficientes são representados em escala de cinza desse modo: brancos – valores positivos; preto – valores negativos e cinza – zeros. (Extraído de [47].)*

2.2.2 Quantização

A etapa de quantização procura representar a saída usando um número finito e pequeno de *codewords*. *Codeword* é definido como uma sequência de símbolos montados em conformidade com normas específicas do código e atribuído um significado único, [44]. Uma vez que o número de *codewords* e as características do quantizador são intimamente relacionados ao nível de

compressão e à perda de fidelidade, é imprescindível ter em mente um critério para combinar a taxa de *bits* média utilizada para armazenar a imagem e a eficiência na compressão, [47]. A seguir são apresentados dois tipos de quantizadores que diferem em termos das entradas e saídas, que podem ser escalar ou vetorial.

Quantização Escalar

Segundo [27], esta técnica consiste em dividir uma faixa de entrada em intervalos e atribuir a cada um, um *codeword* e um valor de saída. Quando todos os intervalos tem o mesmo tamanho, chamamos de quantização por passo linear, como pode ser visto na figura 2.3. Quando os intervalos variam, a quantização é denominada não linear. A quantização escalar não linear é pouco utilizada, pois a combinação de codificação por entropia com quantização linear é menos complexa para implementar e tem resultados similares, [47].

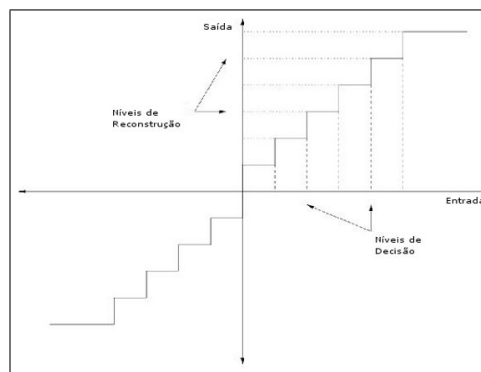


Figura 2.3: *Exemplo de quantização escalar linear – quando os intervalos tem o mesmo tamanho.*

Quantização Vetorial

Como pode ser observado em [27], codificar uma sequência é menos oneroso do que codificar amostras individuais. Na etapa denominada quantização vetorial, divide-se a imagem em blocos de $B \times B$ e associa-se a cada bloco o vetor mais próximo no *codebook* – conjunto finito de vetores – aplicando a norma¹ Euclidiana. Para que essa técnica seja eficiente, é necessário encontrar um *codebook* ótimo.

2.2.3 Codificação

Codificação consiste no processo de atribuição de representação binária à saída de uma fonte, que denomina-se neste trabalho de alfabeto. Esses códigos podem ser de comprimento fixo, como o código ASCII, ou variável, como o código de *Morse*. Neste último é utilizado menos *bits* para representar os símbolos que ocorrem com maior frequência. A seguir são apresentados dois procedimentos de codificação que são frequentemente utilizados em padrões de compressão, [47].

Codificação de *Huffman*

Esta técnica explora apenas a redundância da codificação, que consiste em tirar proveito da proporção desbalanceada dos símbolos. Trata-se do desenvolvimento de código instantâneo onde o comprimento do símbolo médio é muito próximo da entropia. Esta técnica é baseada em duas informações: os símbolos com maiores probabilidades de ocorrência devem ter menores *codewords* e os dois símbolos menos frequentes devem ter mesmo tamanho.

¹A norma é definida como $\|\vec{x}\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$. Para obter a norma Euclidiana, basta fazer $p = 2$, [26].

Segundo [44], são desvantagens dessa técnica: o fato de um número de símbolos muito elevado produzir alto custo computacional; a possibilidade de se produzir códigos muito longos para símbolos menos frequentes e a existência de símbolos com grande probabilidade de ocorrência que podem deixar a codificação ineficiente.

Codificação Aritmética

Segundo [26], na codificação aritmética o conjunto inteiro de símbolos é mapeado no intervalo $[0, 1)$. Entretanto, [26] apresenta duas limitações para a codificação aritmética. A primeira está relacionada com o fato de que não existem informações de quando o decodificador deve parar e a segunda é que a representação binária de um valor real com precisão pode ser muito longa. A primeira pode ser resolvida pela utilização de um símbolo para indicar final da transmissão e a segunda pode ser resolvida fazendo com que o codificador, quando alcançar um intervalo pequeno o suficiente, faça o enésimo dígito parar.

2.2.4 Padrões

Nesta seção são apresentados os dois padrões mais utilizados em compressão de imagens por transformada: o padrão JPEG e o JPEG2000.

Padrão JPEG

O padrão JPEG é aplicado na compressão de imagens estáticas monocromáticas e coloridas e utiliza uma técnica de compressão muito popular que utiliza a transformada DCT seguida da quantização escalar e da codificação de *huffman*, [45]. A compressão começa dividindo a imagem em blocos 8×8 ,

onde aplica-se a DCT organizando os coeficientes mais significativos no canto superior esquerdo de cada matriz. Durante a etapa de quantização escalar uniforme, o tamanho do passo varia à medida que se move do coeficiente DC² para os coeficientes de maiores frequências. Isto é devido ao sistema visual humano ser menos sensível para frequências espaciais altas, [26]. Nesta técnica, os valores DC são codificados separadamente pelo DPCM³ seguido do codificador de *huffman*, pois eles variam muito pouco entre blocos vizinhos. Devido à esparsidade, os demais coeficientes em cada bloco são codificados por RLC⁴ seguido do codificador *huffman*, percorrendo a imagem em zig-zag diagonal. Abaixo estão listados os quatro modos de operação do padrão JPEG, segundo [26]:

- o sequencial – a imagem é codificada em uma única varredura;
- o progressivo – a imagem é codificada em múltiplas varreduras, aumentando a qualidade e a definição a cada iteração;
- o reversível – a imagem é codificada sem perdas; e
- o hierárquico – a imagem é codificada em múltiplas resoluções, podendo manipular as versões de menor resolução sem a descompressão da imagem com resolução total.

Padrão JPEG2000

O padrão JPEG2000 também é aplicado na compressão de imagens estáticas monocromáticas e coloridas e utiliza uma técnica de compressão que

²Denominado como a componente contínua do sinal ou nível médio do sinal, [26].

³Definido como a diferença entre o valor do pixel da imagem original pelo valor predito do pixel, [26].

⁴Codificação por comprimento de corrida consiste em armazenar apenas o valor e a quantidade de ocorrência que ele possui nesta informação, [26].

usa transformada DWT, seguida da quantização escalar e da codificação aritmética, [45]. Segundo [27], esse padrão garante um ganho acima de 20% em relação ao padrão JPEG por basear-se na estrutura do sinal representada pela transformada *Wavelet*. Entretanto, ele possui alto custo computacional e demanda muita memória. Outra característica importante é que o padrão JPEG2000 utiliza quantização escalar uniforme dos coeficientes *wavelets* com passo variando entre sub-bandas considerando a sensibilidade visual humana para informações em diferentes escalas. Desse modo, cada plano de *bits*⁵ dos coeficientes de quantização são codificados utilizando o processo EBCOT⁶, [27]. É importante salientar que a transformada *Wavelet* divide a imagem em sub-bandas que representam a aproximação de escala. Note, contudo, que os mesmos coeficientes *wavelets* em diferentes sub-bandas preservam a localização espacial na imagem, [47]. Muitos algoritmos como EZW e SPIHT exploram a similaridade entre as bandas de mesma orientação com a finalidade de reduzir o tamanho da imagem codificada. O JPEG2000 não explora a redundância entre as sub-bandas. Ao invés disso, ele usa o EBCOT, que particiona cada sub-banda em pequenos blocos retangulares chamados *code-blocks* e codifica cada um independentemente. Após essa etapa é utilizado a codificação aritmética, [27].

2.2.5 Classificação de Compressão

Nesta seção são mostradas algumas distinções que alguns autores fazem em relação às técnicas de compressão. Inicialmente é mostrada a diferença entre compressão com perdas e sem perdas. Posteriormente, procura-se dife-

⁵Definido como o conjunto de *bits* com mesma posição nos respectivos números binários, [26].

⁶Conhecido como codificação progressiva em blocos de 32×32 ou 64×64 independentes com truncamento ótimo, [26].

reenciar compressão linear de não linear.

Em Relação a Perdas

As técnicas de compressão sem perdas visam reconstruir imagens iguais à original. Procuram a compactação das imagens livre de perdas e erros, explorando principalmente a redundância de codificação e a redundância entre os *pixels*. Alguns exemplos de aplicação são cenas onde os dados são de difícil aquisição ou a perda de dados influencia na interpretação, tais com imagens médicas, imagens de satélite, etc., [26].

Por outro lado, técnicas de compressão com perdas visam reconstruir a imagem resultante diferente da original, procurando elevar a taxa de compactação de imagens explorando, também, o limitado sistema de percepção visual humano. Alguns exemplos, são vídeo conferência e televisão digital, [26].

Em Relação à Linearidade

A classificação em compressão linear acontece quando a técnica de compressão não depende da imagem. Neste caso, não é necessário saber onde os coeficientes mais significativos estão. Em outras palavras, se A e B são imagens e $\hat{A}$ e $\hat{B}$ suas compressões, então a compressão de $A + B$ resulta $\widehat{A + B}$, [26].

Por outro lado, a classificação em compressão não linear acontece quando a técnica de compressão depende da localização dos coeficientes mais significativos antes da reconstrução. Neste caso, a técnica de compressão depende da imagem, [26].

2.3 Considerações Finais deste Capítulo

Neste capítulo foram apresentadas algumas técnicas que constituem o estado da arte em aquisição e compressão de imagens naturais a artificiais. Inicialmente foram abordados os principais dispositivos de aquisição de imagens. O estado da arte em compressão de imagens foi apresentado com abordagem realizada sobre os padrões JPEG e JPEG2000, assim como os conceitos sobre transformadas discreta *Cosseno* e *Wavelet*, quantização vetorial e escalar, codificação de *huffman* e aritmética e classificação linear e não linear. A proposta é mostrar as técnicas convencionais em aquisição e compressão de imagens, preparando o caminho para que no próximo capítulo possa ser introduzido um novo paradigma, que adquire e comprime concomitantemente imagens com um número muito menor de medidas.

O próximo capítulo é mostra uma revisão bibliográfica sobre o novo paradigma baseado em aquisição por sensoriamento e reconstrução, denominado CS convencional. Os dois principais tópicos abordados são: a etapa de **aquisição por sensoriamento** não adaptativa do sinal e a etapa de **reconstrução** a partir de algoritmos de otimização CoSaMP, que levam em consideração a representação esparsa dos sinais, a teoria de aproximação e propriedades que garantem robustez para certo número de medidas. Além disso, são apresentadas algumas aplicações e um exemplo simples.

Parte II

A Teoria

Capítulo 3

Um Novo Paradigma: CS

Este capítulo apresenta a descrição de uma nova teoria denominada CS. Esta nova teoria tem como característica principal a **aquisição por sensoriamento**, que consiste da aquisição já comprimida do sinal ou imagem e posterior **reconstrução**. Embora a abordagem amostragem-compressão seja a mais utilizada e consiga bons resultados, ela possui três deficiências: ela adquire uma quantidade grande de amostras para simplesmente descartar grande parte posteriormente; existe o custo de calcular todos os coeficientes da transformada e o sucesso da abordagem fica condicionado a encontrar a localização dos coeficientes mais significativos. Isto é o que acontece na maioria dos instrumentos de aquisição de imagens mais populares – amostra-se muitos dados e, posteriormente, desconsidera-se cerca de 90% dos coeficientes. Neste contexto, CS promete obter amostras não adaptativas do sinal a uma taxa muito menor do que o limite de *Nyquist* e reconstruí-lo por meio de um processo de otimização.

3.1 O Nascimento de CS

CS é um exemplo de teoria construída no sentido inverso ao usual: da matemática aplicada para a matemática pura. Neste contexto, a ciência experimental leva ao desenvolvimento de princípios teóricos. CS começou como um problema de reconstrução de imagens de Ressonância Magnética apresentado aos pesquisadores do grupo de processamento de imagens médicas do Instituto de Tecnologia da Califórnia – Caltech em 2006. O problema consistia em reconstruir imagens de Ressonância Magnética com apenas 5% das medidas. Este limiar é devido às características física do equipamento e à necessidade de garantir exposição mínima do paciente ao equipamento, conforme informa especialistas na área. Em 2006, o algoritmo mais comum utilizado para reconstruir as imagens após a coleta dos dados era baseado no procedimento de ajustar os coeficientes de *fourier* não amostrados para zero e se denominava *Filtered Backprojection*.

A solução proposta por [12] consiste em adivinhar os coeficientes de *fourier* faltantes por meio de otimização convexa baseada na minimização da norma TV. O resultado obtido pela técnica *Filtered Backprojection* e pela nova abordagem utilizando otimização pode ser observado na figura 3.1.

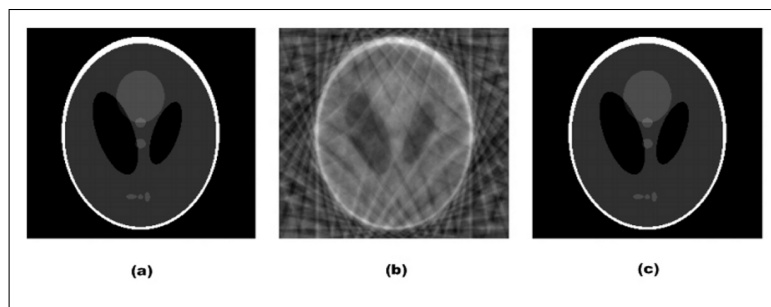


Figura 3.1: *Primeiro experimento utilizando CS. (a) Imagem de teste phantom Logan–Shepp de Ressonância Magnética. (b) Reconstrução obtida utilizando Filtered Backprojection. (c) Reconstrução obtida utilizando CS pela minimização da norma Total Variation. (Extraído de [47].)*

Para facilitar o entendimento das definições, teoremas, corolários e proposições apresentadas daqui em diante, observa-se as seguintes notações:

- utiliza-se x para representar o sinal original e s para denotar sua representação S esparsa;
- T é o conjunto que suporta s e é de tamanho $|T| = S$ e Ω é o subconjunto de medida aleatória de tamanho $|\Omega| = M$;
- Φ é a matriz que expande $\mathbb{R}^N$, onde cada linha é uma função de medida ϕ_m a ser aplicada no sinal x ;
- Φ_Ω é a denominada matriz gorda que consiste da seleção de M linhas aleatórias de Φ ;
- Ψ é a matriz que leva x à esparsidade e Ψ^* é sua transposta;
- $\Theta = \Phi\Psi^*$ e $\Theta_{\Omega T}$ é a submatriz criada pela extração de colunas de Θ_Ω que correspondem aos índices de T ; e
- Θ é uma matriz $N \times N$, Θ_Ω é uma matriz $M \times N$ e $\Theta_{\Omega T}$ é $M \times S$.

O teorema 1, denominado de Teorema de Amostragem de *Fourier*, garante a reconstrução exata desde que seja tomado o mínimo de M medidas, identificando um limite fundamental. Pode-se perceber também, pelo termo *ao acaso*, que o teorema possui um caráter probabilístico.

Teorema 1 (Amostragem de *Fourier*, [12])

Assuma que $x \in \mathbb{R}^N$ é S esparsa e que são dados M coeficientes de Fourier com frequências selecionadas uniformemente ao acaso. Suponha que o

número de medidas obedece

$$M \geq CS \log N \quad (3.1)$$

onde C é uma constante relativamente pequena. Então, minimizar

$$\min_s \|s\|_{l_1} \text{ sujeito a } \Theta_\Omega s = y \quad (3.2)$$

com alta probabilidade reconstrói x exatamente.

A partir do resultado surpreendente obtido com a reconstrução exata da imagem original com apenas 5% dos dados, pesquisadores começaram a formalizar uma nova teoria, estendendo sua aplicação a amostras que não fossem obrigatoriamente representadas na base de *fourier*.

3.2 Sensoriamento e Reconstrução

Como foi visto no capítulo 1, a abordagem amostragem–compressão encontra uma representação esparsa e então codifica os coeficientes mais significativos. Nesta nova abordagem, o conjunto de técnicas objetiva adquirir a imagem já na forma comprimida. Supõe-se que os coeficientes mais significativos de uma compressão não linear são conhecidos e toma-se apenas esses. Desse modo, o desejável é que funções bases de medidas¹ sejam não adaptativas, ou seja, que as mesmas funções utilizadas para adquirir um sinal possa ser utilizada para adquirir qualquer outro.

¹Por comodidade, desse ponto em diante estas funções são chamadas de funções de medidas.

O processo de aquisição por sensoriamento consiste em adquirir medidas y_m como o produto interno do sinal de interesse x com diferentes funções de medidas ϕ_m .

$$y_1 = \langle x, \phi_1 \rangle, \quad y_2 = \langle x, \phi_2 \rangle, \quad \dots \quad y_m = \langle x, \phi_m \rangle \quad (3.3)$$

onde $m = 1, \dots, M$ é o número de medidas, [16].

De posse dessas medidas y_m , a reconstrução consiste em encontrar x tal que o sistema de equações 3.4 deve ser resolvido por um problema de otimização.

$$y = \Phi_\Omega x \quad (3.4)$$

Infelizmente, a aquisição por sensoriamento direta de y_m utilizando as funções de medidas ϕ_m sobre o sinal x não é eficiente. Para que a teoria seja eficiente, o sinal x deve ser levado à esparsidade por uma transformação ψ de tal modo que $s = \psi x$, como pode ser visto de maneira mais ampla na figura 3.2.

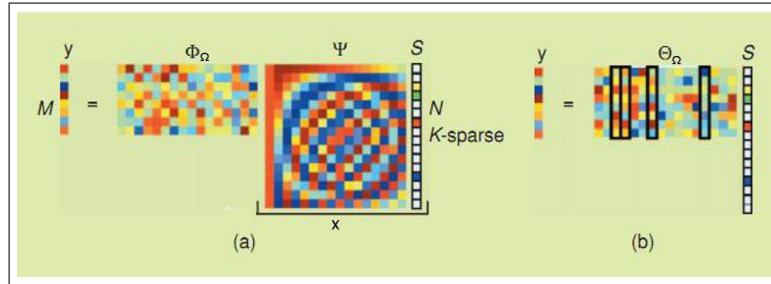


Figura 3.2: O esquema de aquisição por sensoriamento. (a) Processo de medida utilizando matriz de medida Φ e matriz que leva à esparsidade Ψ . (b) Processo de medida com $\Theta = \Phi\Psi$. Existem quatro colunas que correspondem aos coeficientes s_i diferentes de zero. O vetor de medida y é a combinação linear dessas medidas. (Extraído de [1].)

Assim, a reconstrução pode ocorrer sobre o sistema de equações 3.4 ou

sobre o sistema alternativo da equação 3.5.

$$y = \Theta_{\Omega} s \quad (3.5)$$

É importante evidenciar que $\Theta_{\Omega} = \Phi_{\Omega} \Psi^*$, Ψ^* é inversa da transformada que leva à esparsidade e Φ_{Ω} é uma matriz constituída da escolha aleatória de M linhas da matriz Φ denominada de matriz gorda².

3.3 Esparso e Compressível

A representação de sinais é um conceito muito importante em processamento de sinais. Ele se refere a descrever um sinal de modo único como uma sequência de coeficientes enumeráveis, [47]. Embora a representação de sinais esteja extremamente ligada à passagem do contínuo para o discreto, uma boa representação de sinais pode facilitar a utilização de técnicas como análise, filtragem de ruídos e compressão de sinais. No contexto de CS, uma boa representação de sinais pode facilitar a busca por algoritmos de otimização das informações de interesse dependendo de como o sinal é descrito. Um exemplo de representação de sinais é a transformada DCT que preserva muitas propriedades do sinal, tais como invertibilidade e ortogonalidade, [47].

Uma base é um conjunto de elementos linearmente independentes que expandem o espaço de *Hilbert*³. Por linearmente independente entende-se que nenhuma função pode ser expressa como combinação linear de outros elementos – isto implica que o conjunto possui representação mínima. Já o

²A denominação matriz gorda é utilizada para se referir a uma matriz onde o número de colunas excede o número de linhas, [47].

³O espaço de *Hilbert* é uma generalização do espaço Euclidiano que não precisa estar restrita a um número finito de dimensões. É um espaço vetorial dotado de produto interno, com noções de distância e ângulos, [38].

frame é uma generalização de uma base em um espaço linear. Um conjunto de elementos forma uma base em $\mathbb{R}^M$ se ele expande $\mathbb{R}^M$ e são linearmente independentes. Por outro lado, um conjunto de $M \leq N$ elementos forma um frame se ele expande $\mathbb{R}^M$. Bases e frames são utilizadas nas técnicas de compressão de sinais que procuram minimizar a relevância e reduzir a concentração de energia em poucos coeficientes. Além disso, as teorias de bases e frames estabelecem condições para uma representação estável e completa de sinais.

O ponto chave na decomposição ou representação de sinais é obter uma sequência de formas de ondas de dicionário e seus respectivos coeficientes utilizando bases ou frames. O conceito de sinais esparsos e compressíveis é de suma importância para o bom entendimento de CS. Em seguida, esses dois conceitos serão apresentados utilizando a decomposição ou a representação dos sinais por bases ortogonais.

3.3.1 Sinais Esparsos

Esparsidade expressa a idéia de que a taxa de informação de um sinal contínuo no tempo pode ser muito menor do que o sugerido por sua largura de banda ou que o sinal discreto no tempo depende de um grau de liberdade que é muito menor do que seu comprimento, [8]. CS explora o fato que muitos sinais suaves são esparsos no sentido em que eles têm uma representação concisa em uma base apropriada Ψ .

3.3.2 Sinais Compressíveis

Sinais compressíveis ocorrem quando os sinais não são exatamente esparsos, mas sim, aproximadamente esparsos. Neste caso, um sinal compressível

$s = \Psi x$ é constituído da melhor aproximação S -esparsa de s , isto é, s é a melhor aproximação obtida quando força-se os $N - S$ menores coeficientes para zero, [8]. CS explora o fato que muitos sinais localmente suaves são compressíveis no sentido em que eles têm uma representação concisa em uma base apropriada Ψ .

3.4 Teoria da Aproximação

A utilização de representação de sinais por bases ou frames é bastante útil no processamento de sinais devido ao fato de ser possível realizar boas aproximações de sinais usando poucos vetores. Existem duas aproximações possíveis: sobre base linear e sobre dicionários.

No caso de bases lineares, tem-se o seguinte: dado um sinal x e uma base ortogonal $B = (\phi_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$, uma aproximação projeta x sobre M vetores da base $x_M = \sum_{n \in I_M} \langle x, \phi_n \rangle \phi_n$, [21].

Se a escolha dos vetores M a serem utilizados for realizada antes do processo, trata-se de aproximação linear. Por outro lado, se a escolha for feita após o processo, trata-se de aproximação não linear. Embora a aproximação linear seja mais fácil de implementar, ela depende fortemente do sinal original. Já a aproximação não linear fornece condições de ajuste do vetor de projecção para minimização do erro de aproximação, [21]. Como visto na sub-seção 2.2.1, a transformada DCT consiste em projetar o sinal em uma base que o torna esparsa e a codificação por *run-length* consiste em escolher, dessa nova base, o vetor mais significativo. Neste procedimento não linear, deve-se salvar cada coeficiente e a posição dos vetores dessa nova base que são os mais importantes. Na compressão linear, os vetores mais significativos são conhecidos antes e é necessário armazenar apenas suas coordenadas.

A expansão linear em uma única base não é sempre eficiente porque a informação é diluída em toda a base. Em dicionários redundantes, é possível expressar o mesmo sinal utilizando um número pequeno de coeficientes. A dúvida está na seguinte escolha: representar o sinal por um conjunto de elementos menores que exige um número grande de valores para representá-lo, mas que demanda um número pequeno de *bits* para representar o vetor ou representar o sinal por um conjunto de elementos maiores que exige um número pequeno de valores para representar um sinal, mas demanda um número grande de *bits* para representar o vetor. Como existe redundância, existem várias formas de representar o sinal. O objetivo é encontrar representações que concentrem a energia em poucos coeficientes. Em notação matemática, tem-se um sinal x de dimensão N , um dicionário $D = \{g_1, g_2, \dots, g_P\}$ de tamanho P e um valor M de modo que $M < N < P$. A representação $x_M = \sum_{m=0}^{M-1} \alpha_{p_m} g_{p_m}$ que minimiza $\|x - x_M\|$ é uma boa representação desde que seja possível utilizar métodos de busca como *Basis Pursuits* e *Matching Pursuits* para encontrar a representação mais esparsa em dicionários redundantes, [21].

3.5 Propriedade da Isometria Restrita (RIP)

CS é apresentado como uma teoria que faz aquisição por sensoriamento e compressão simultaneamente. Nesta seção é fornecido o embasamento teórico que sustenta a teoria de CS. Aplica-se em sinais esparsos, em sinais compressíveis e em sinais corrompidos por ruído.

3.5.1 Coerência entre Bases

A seção 3.3 deste capítulo apresenta conceitos básicos de representação de sinais utilizando bases com o propósito de facilitar o entendimento de coerência entre bases. Suponha o par de bases ortonormais (Φ, Ψ) , a definição de coerência entre bases é a medida de correlação entre as formas de onda ϕ_k e as formas de onda que leva o sinal à esparsidade ψ_k , como pode ser visto na definição 1.

Definição 1 (Coerência entre Ψ e Φ , [16])

A coerência entre a base de sensoriamento Φ e a base de representação Ψ é

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \max_{1 \leq k, j \leq n} |\langle \phi_k, \psi_j \rangle| \quad (3.6)$$

Em outras palavras, se a Φ e a Ψ contém vetores correlacionados, a coerência é grande. De outra forma, a coerência é pequena. CS é interessado em bases que tem a propriedade de possuírem baixa coerência, o que significa que os vetores das bases são quase ortogonais. Para a completude da definição, segue da álgebra linear que $\mu(\Phi, \Psi)$ pertence ao intervalo $[1, \sqrt{n}]$, [16].

Um primeiro exemplo para explicitar a coerência mínima, ($\mu(\Phi, \Psi) = 1$), é utilizar a matriz de sensoriamento *Delta de Dirac* $\psi_k(t) = \delta(t - k)$ e a base *fourier* de representação $\psi_j(t) = n^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i2\pi jt}{n}}$, [16]. Observe que se trata das matrizes utilizadas no Teorema de *Shannon–Whittaker* com as respectivas representações no espaço e frequência. É fácil ver que a coerência para esse par de bases é $\mu(\Phi, \Psi) = 1$, ou seja, máxima incoerência. Outro exemplo de coerência baixa é a utilização de bases de sensoriamento Φ como *noiselet* e bases de representação esparsa Ψ como *wavelets*: entre *noiselets* e *wavelets*

haar é $\sqrt{2}$; entre *noiselets* e *daubechies* D4 é de 2.2; matrizes aleatória com qualquer base fixada Ψ , etc. Maiores detalhes são vistos na seção 3.6 deste capítulo. A principal vantagem em trabalhar com bases com baixa coerência está no fato de a cada medida realizada como combinação aleatória de entradas CS captura alguma informação, mesmo que o sinal seja bastante esparso. A definição 1 vale também para a matriz Θ , que segundo [15] pode ser expressa por

$$\mu(\Theta) = \sqrt{N} \max_{i,j} |\Theta_{i,j}| \quad (3.7)$$

Em relação à matriz Θ , μ pode ser interpretado como uma medida aproximada de quão concentradas são suas linhas. De modo que se existirem vetores coincidentes ϕ_i e ψ_i , a linha a qual eles pertencem será concentrada e a possibilidade de reconstrução é ruim. Por outro lado, se as linhas estão diluídas, ou seja, ϕ_i está espalhado fora do domínio de ψ_i , então a possibilidade de reconstrução é melhor.

O teorema 2 é apresentado como o teorema resultante da definição de incoerência e estende o Teorema de Amostragem de *Fourier* anterior, como pode ser observado para o caso particular de $\mu = 1$. Observa-se que o resultado apenas é garantido para quase toda sequência de sinal z com suporte fixado.

Teorema 2 (Extensão do Teorema de Amostragem de *Fourier*, [11])

Seja Θ uma matriz ortogonal $N \times N$ e $\mu(\Theta)$ como definido anteriormente.

Fixa-se um conjunto T do domínio do sinal. Escolha um subconjunto Ω do domínio de medida de tamanho M e uma sequência de sinal z sobre T

uniformemente aleatória. Suponha que

$$M \geq C_0 |T| \mu^2(\Theta) \log N \quad (3.8)$$

para alguma constante fixada C_0 . Então, para todo sinal s com suporte em T com sinais correspondentes z , a reconstrução de $y = \Theta_\Omega s$ resolvendo

$$\hat{s} = \min_{s^*} \|s^*\|_{l_1} \text{ sujeito a } \Theta_\Omega s^* = y \quad (3.9)$$

com alta probabilidade de ser exata ($\hat{s} = s$).

É importante salientar os três comentários apresentados por [16] em relação à coerência:

1. o papel da coerência é transparente: quanto menor a coerência, menos amostras são necessárias para conseguir um bom resultado;
2. é possível tomar bem menos medidas que aquela que o sinal normalmente exige. Se $\mu(\Phi, \Psi)$ é igual ou superior a 1, então o número de amostra suficiente é da ordem de $S \log N$ ao invés de N ; e
3. o sinal pode ser reconstruído exatamente do conjunto de dados condensados minimizando uma função convexa sem qualquer conhecimento sobre o número de coordenadas x diferentes de zero, sua localização ou amplitude. Simplesmente o algoritmo é rodado e a reconstrução exata ocorre se o sinal for suficientemente esparso.

A partir de uma teoria fundamentada matematicamente, faz-se uma amostragem não adaptativa em um domínio incoerente e utiliza-se de programação

linear para reconstrução dos dados. Na próxima seção, é apresentado o embasamento teórico para garantir a eficiência tanto para sinais esparsos quanto para sinais compressíveis na presença de ruídos.

3.5.2 Princípio da Incerteza

Nesta seção e na seguinte são definidas restrições à matriz Θ que garantem resultados eficientes e robustos. O teorema 3 é apresentado como o resultado intermediário que surge diretamente dos conceitos relacionados à coerência entre bases relatado no teorema 2.

Teorema 3 (Teorema Intermediário – Princípio da Incerteza, [11])

Seja Θ , T e Ω como no teorema 2. Suponha que o número de medidas M obedece

$$M \geq |T| \mu^2(\Theta) \max(C_1 \log |T|, C_2 \log \frac{3}{\delta}) \quad (3.10)$$

para alguma constante positiva C_1 e C_2 . Então,

$$P \left(\left\| \frac{N}{M} \Theta_{\Omega T}^* \Theta_{\Omega T} - I \right\| \geq \frac{1}{2} \right) \leq \delta \quad (3.11)$$

Partindo do teorema 3 e fazendo algumas contas, pode-se observar que

$$\frac{1}{2} \frac{M}{N} \|\bar{s}\|_{l_2}^2 \leq \|\bar{s}_\Omega\|_{l_2}^2 \leq \frac{3}{2} \frac{M}{N} \|\bar{s}\|_{l_2}^2 \quad (3.12)$$

onde $\bar{s} = \Theta s$ e $\bar{s}_\Omega$ é $\bar{s}$ restrito ao conjunto Ω , $\bar{s}_\Omega = \Theta_\Omega s$, [47]. Este último resultado explicita que a energia do sinal restrita ao conjunto Ω é muito menor do que a energia do sinal. Este é um princípio da incerteza pois pode

ser observado que se um sinal s é esparso, consequentemente concentrado em T , então ele não pode ser concentrado em Ω .

Este é um ponto crucial da teoria de CS: somente é possível tomar poucas medidas porque a energia é diluída em um domínio Φ , ou seja, a tomada de medidas aleatórias proporciona a obtenção de uma quantidade considerável de informações do sinal.

3.5.3 Constante de Isometria Restrita

Baseado no teorema intermediário 3, Candés e Tao definiram em [14] a Propriedade de Isometria Restrita (RIP), que mostrou ser muito útil para garantir eficiência e robustez ao CS para sinais esparsos.

Definição 2 (Propriedade de Isometria Restrita, [14])

Para cada inteiro $S = 1, 2, \dots, N$ define-se a constante de isometria restrita δ_S de uma matriz Θ_Ω como o menor número tal que

$$(1 - \delta_S) \|s\|_{l_2}^2 \leq \|\Theta_{\Omega T} s\|_{l_2}^2 \leq (1 + \delta_S) \|s\|_{l_2}^2 \quad (3.13)$$

vale para todos os vetores S -esparso s .

A definição 2 garante que Θ_Ω obedece RIP de ordem S se δ_S não for muito próximo de um. Observa-se que quando RIP vale, a aquisição por Θ_Ω preserva a distância Euclidiana de sinais S -esparsos não colocando os vetores no espaço nulo de Θ_Ω , o que torna possível a reconstrução. Uma descrição equivalente da definição 2 é dizer que todos os subconjuntos de S colunas tomadas de Θ_Ω são proximamente ortogonais. Desse modo, δ existe e é limitado. Além disso, a existência de colunas linearmente independentes na

matriz Θ_Ω garante robustez na reconstrução. Entretanto, isto não é possível pois Θ_Ω é uma matriz gorda. Neste momento, a esparsidade novamente vem ajudar e basta que as colunas de Θ_Ω se comportem como linearmente independentes. Isto RIP nos fornece. Ele diz que para todo T não maior do que S , Θ_Ω é aproximadamente ortogonal.

O teorema 4 apresentado não possui probabilidade de falhas e é universal no sentido em que todos os vetores suficientemente esparsos podem ser reconstruídos de $\Theta_\Omega s$.

Teorema 4 (Resultante para CS Básico, [9])

Seja s um sinal S -esparso com suporte em T e medido por Θ_Ω . Assuma que a constante de isometria restrita para a matriz $\Theta_{\Omega T}$ é tal que $\delta_{2S} \leq \sqrt{2} - 1$.

Então a solução $\hat{s}$ para

$$\hat{s} = \min_{s^*} \|s^*\|_{l_1} \text{ sujeito a } \Theta s^* = y \quad (3.14)$$

é exata, isto é, $\hat{s} = s$.

Entretanto, para que CS tenha aplicações reais é necessário que haja uma teoria que seja robusta a sinais que não são exatamente esparsos ou que possua uma esparsidade com decaimento exponencial e a sinais corrompidos por ruído.

Em um primeiro momento, é apresentado o teorema para garantir robustez para sinais não exatamente esparsos. Um bom exemplo são as imagens. Não pode-se assumir que imagens são esparsas em um domínio específico, mas sabe-se que elas são compressíveis, no sentido em que, após aplicada uma transformada DCT ou *Wavelet*, os coeficientes decaem rapidamente. Desse

modo, se x é uma imagem, $s = \psi x$ é somente aproximadamente esparsa e denota-se por s_S a melhor aproximação S -esparsa de s .

O teorema 5 apresentado garante robustez quando o sinal é apenas aproximadamente esparsos.

Teorema 5 (Resultante para CS Robusto a Sinais Compressíveis, [9])

Assuma que s é aproximadamente esparsos e seja s_S como definido acima.

Então se $\delta_{2S} \leq \sqrt{2} - 1$, a solução $\hat{s}$ para

$$\hat{s} = \min_{s^*} \|s^*\|_{l_1} \text{ sujeito a } \Theta s^* = y \quad (3.15)$$

obedece

$$\|\hat{s} - s\|_{l_1} \leq C_0 \|\hat{s} - s_S\|_{l_1} \text{ e } \|\hat{s} - s\|_{l_2} \leq C_0 s^{-\frac{1}{2}} \|\hat{s} - s_S\|_{l_2} \quad (3.16)$$

para valores razoáveis de constante C_0 . Em particular, se s é esparsos a reconstrução é exata.

Este resultado é uma afirmação determinística e não existe probabilidade de falha. Vale para todos os sinais e vale para uma amplo intervalo de valores de S .

Em um segundo momento, é apresentado o teorema 6 para garantir robustez para sinais corrompidos por ruídos, tanto ruídos obtidos durante o processo de sensoriamento quanto o ruído oriundo de quantização. Neste cenário, tem-se $y = \phi x + n$, onde n é um ruído desconhecido limitado por uma quantidade conhecida $\|n\|_{l_2} \leq \epsilon$.

A propriedade que permite o método de reconstrução ser aplicado em sinais ruidosos é chamada de estabilidade e consiste em esperar o melhor erro de reconstrução proporcional ao ruído n , [13]. Ou seja, pequenas mudanças na observação resultam em pequenas mudanças na reconstrução.

O teorema 6 estabelece CS como um mecanismo de sensoriamento prático e robusto que funciona com todos os tipos de sinais esparsos e ruidosos, quer seja ruído gerado pela aproximação à esparsidade, quer seja gerado pela etapa de quantização.

Teorema 6 (Resultante para CS Robusto a Sinais Ruidosos, [9])

Assuma que $y = \Theta_\Omega s + n$, onde $\|n\|_{l_2} \leq \epsilon$. Então, se $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$, a solução $\hat{s}$ para

$$\hat{s} = \min_s \|s\|_{l_1} \text{ sujeito a } \|\Theta_\Omega s - y\|_{l_2} \leq \epsilon \quad (3.17)$$

obedece

$$\|\hat{s} - s\|_{l_2} \leq C_0 S^{-\frac{1}{2}} \|\hat{s} - s_S\|_{l_1} + C_1 \epsilon \quad (3.18)$$

para valores razoáveis de constante C_0 e C_1 .

É fácil ver que o erro de reconstrução é uma soma dos erros da aproximação à esparsidade e do erro que resulta da adição de ruídos pelo passo de quantização. Na seção seguinte é apresentado como planejar matrizes de sensoriamento eficiente que obedece RIP.

3.6 Matrizes e Número de Medidas

É de suma importância planejar matrizes de sensoriamento para as quais vale a RIP. Entretanto, testar se RIP está presente em uma determinada matriz de medida é NP-difícil e inviável na prática. Por outro lado, sabe-se que para uma matriz possuir RIP basta que os vetores colunas tomados de subconjuntos arbitrários sejam aproximadamente ortogonais.

Definir um Θ_Ω determinístico é muito difícil, mas pode ser facilmente mostrado que estruturas aleatórias triviais realizam isso muito bem, [15]. Mais interessante ainda é que a alta dimensionalidade dos sinais manipulados fornece uma contribuição positiva para a obtenção de matrizes com RIP. Como pode ser observado em [8], se a dimensão N de uma matriz de medida é grande, um conjunto pequeno de vetores selecionados aleatoriamente em $\mathbb{R}^N$ é aproximadamente ortonormal e, conseqüentemente, a matriz de medida possui RIP. Com alta probabilidade, algumas matrizes obedecem a RIP como pode ser observado nos teoremas 7, 8, 9, 10, observados em [15] e [13].

Teorema 7 (Matrizes Gaussianas)

Sejam as entradas de Θ_Ω uma matriz gaussiana independente e identicamente distribuída com média zero e variância $\frac{1}{M}$. Então a RIP vale com altíssima probabilidade se

$$S \leq C \frac{M}{\log \frac{N}{M}} \quad (3.19)$$

para uma constante relativamente pequena C .

Teorema 8 (Projeções Aleatórias)

Sejam as entradas de Θ_Ω uma matriz gaussiana aleatória cujas linhas são

ortonormalizadas. Então a RIP vale com altíssima probabilidade se

$$S \leq C \frac{M}{\log \frac{N}{M}} \quad (3.20)$$

para uma constante relativamente pequena C .

Teorema 9 (Matrizes Binárias)

Sejam as entradas de Θ_Ω independentes tomando valores $\pm \frac{1}{\sqrt{M}}$ com probabilidades iguais. Então a RIP vale com altíssima probabilidade se

$$S \leq C \frac{M}{\log \frac{N}{M}} \quad (3.21)$$

para uma constante relativamente pequena C .

Os teoremas 7, 8 e 9 podem ser estendidos para outras distribuições de probabilidade.

Teorema 10 (Conjuntos de Medidas Ortogonal Geral)

Seja Θ uma matriz ortogonal e Θ_Ω obtida pela seleção de M linhas de Θ uniformemente ao acaso. Então a RIP vale com altíssima probabilidade se

$$S \leq C \frac{1}{\mu^2} \frac{M}{(\log N)^6} \quad (3.22)$$

para uma constante relativamente pequena C .

O teorema 10 é muito importante porque em muitas aplicações do mundo real o sinal não é esparso no domínio do tempo. Por outro lado, pode-se representar este sinal em uma base ortonormal fixada Ψ . Portanto, o teorema 10 garante que caso seja possível determinar uma matriz Φ tal que a coerência $\mu(\Phi, \Psi)$ é pequena, então a reconstrução é exata quando as medidas aleatórias são tomadas com Φ_Ω , [47]. Outro exemplo de matrizes de medidas bastante útil para problemas reais são as matrizes parciais de *Fourier*, cujo limiar para o número de medidas M é garantido pelo teorema 11.

Teorema 11 (Matrizes Parciais de *Fourier*, [40])

Se $\sqrt{M}\Phi$ é um conjunto uniformemente aleatório de M linhas obtidas da transformada discreta de Fourier unitária, então

$$M \geq \frac{Cr \log^5 N \log(\epsilon^{-1})}{\epsilon^2} \Rightarrow \delta_r \leq \epsilon \quad (3.23)$$

exceto com probabilidade N^{-1} .

Embora o teorema 11 exija um número adicional de medidas para alcançar uma constante de isometria restrita pequena, as matrizes parciais de *Fourier* possuem algumas vantagens importantes, tais como: existem tecnologias que adquirem medidas *fourier* aleatórias como os equipamentos de Ressonância Magnética. Essa tecnologia pode ser aplicada a vetores no tempo $\mathcal{O}(N \log N)$ e requer armazenamento de somente $\mathcal{O}(M \log N)$, [40].

3.7 Algoritmos de Reconstrução

Em termos gerais, a teoria CS consiste em subamostrar um sinal e então utilizar um algoritmo de reconstrução baseado em otimização para reconstruí-lo. Pode ser observado que a implementação da teoria de CS é assimétrica: o processo de aquisição é simples, basta tomar o produto de uma matriz pré-definida com o sinal, mas resolver o problema da reconstrução não é. Deste modo, o maior desafio de CS é reconstruir o sinal a partir de amostras ruidosas. A literatura descreve um grande número de abordagens para resolver esse problema. Segundo [40], essas abordagens podem ser agrupadas em três categorias:

- algoritmos de busca guloso – esta técnica faz a escolha que parece ser a melhor no momento, chamada de escolha ótima local, na esperança de que essa aproximação leve à solução ótima global;
- algoritmos de relaxamento convexo – este método resolve um problema convexo cujo minimizador para solucionar o problema é conhecido; e
- algoritmos combinatorial – esta técnica adquire amostras altamente estruturadas de sinais que suportam reconstrução rápida por meio de testes de grupo.

Os algoritmos da categoria combinatorial são extremamente rápidos, mas exigem um grande número de amostras, que pode ser de difícil aquisição. Por outro lado, o algoritmo de relaxamento convexo funciona bem com um número pequeno de medidas, mas é pesado computacionalmente. Já o algoritmo de busca gulosa ocupa uma posição intermediária aos dois anteriores, tanto no desempenho de tempo de execução, quanto na eficiência de amostragem, [40].

São apresentados dois métodos de reconstrução de sinais esparsos: um da categoria algoritmos de relaxamento convexo baseado na minimização da norma l_1 e o outro da categoria dos algoritmos de busca guloso.

3.7.1 L1–Magic

Deseja-se reconstruir um sinal x esparsos ou aproximadamente esparsos de $y = \Phi x$ medidas utilizando um problema de otimização convexa. Desse modo, busca-se o sinal x mais esparsos, que corresponde a

$$\min_x \# \{i : x(i) \neq 0\} \quad \text{sujeito a } \Phi x = y. \quad (3.24)$$

$\#$ denota o número de elementos do conjunto e $\# \{i : x(i) \neq 0\}$, denominado quasinorma l_0 , representa o número de coeficientes diferentes de zero no vetor candidato a ser o mais esparsos, [47]. O problema é que minimizar a equação 3.24 é um problema combinatorial NP–difícil e sua solução é inviável na prática. Felizmente existe um programa convexo que funciona quase tão bem e é conhecido como busca por bases, [20]. Esta abordagem consiste em reformular o problema baseado na quasinorma l_0 para a norma l_1 e

$$\min_x \|x\|_{l_1} \quad \text{sujeito a } \Phi x = y. \quad (3.25)$$

Pode-se observar, inclusive geometricamente, que normas l_1 são convexas e são de pequena magnitude para sinais esparsos. A diferença básica entre a equação 3.24 e a equação 3.25 é que a equação 3.25 é mais fácil de resolver, pois pode ser reformulada como um programa linear e resolvido utilizando um número razoável de técnicas modernas.

Uma alternativa à norma l_1 com o propósito de conseguir reconstrução

de imagem com melhor qualidade visual é a utilização da norma TV, [12]. A norma TV, que pode ser interpretada como a minimização da norma l_1 do gradiente do sinal devidamente discretizado, é definida por [12] como

$$\|g\|_{TV} = \sum_{t_1, t_2} \sqrt{D_1 g(t_1, t_2)^2 + D_2 g(t_1, t_2)^2} \quad (3.26)$$

onde $D_1 g(t_1, t_2) = g(t_1, t_2) - g(t_1 - 1, t_2)$ e $D_2 g(t_1, t_2) = g(t_1, t_2) - g(t_1, t_2 - 1)$.

Nesse contexto, a abordagem alternativa consiste em resolver a equação 3.27 baseada na norma TV.

$$\min_x \|x\|_{TV} \quad \text{sujeito a } \Phi x = y. \quad (3.27)$$

Outras normas e configurações de restrições podem ser implementadas, tais como: a norma TV *Dantzig* e as restrições Iguais, Aproximadas, Quadráticas e Correlação Residual Limitada. Outras técnicas, ver [10].

Finalmente, é observado em [40] que o *L1-Magic* apresenta as seguintes características em relação a seu funcionamento:

- funciona para uma variedade de esquemas de amostragem, para as quais existe um limite definido pela constante de isometria restrita, ou seja, vale a RIP;
- reconstrói sinais S -esparso de $\mathcal{O}(S \log N)$ medidas, não sendo necessário amostras maiores;
- reconstrói todos os sinais dada uma matriz de amostragem fixada, ou seja, seus resultados não exigem somente matrizes de amostragem coletada ao acaso para cada sinal;

- o algoritmo de reconstrução obtém sucesso tanto para sinais compressíveis e não esparsos, quanto para sinais corrompidos por ruído; e
- o pior custo para a reconstrução de sinal S -esparso com valores reais para uma precisão relativa fixada, dada uma matriz de amostragem com nenhuma estrutura especial é $LP(N, M)$. Ou seja, o custo de resolver um programa linear com N variáveis e M restrições, que é $O(M^2 N^{1.5})$ para o método de ponto interior⁴.

3.7.2 CoSaMP

Esta seção apresenta o algoritmo de busca guloso desenvolvido e nomeado por [40] como *Compressive Sampling Matching Pursuit* (CoSaMP). Como o nome sugere, o algoritmo é baseado em Busca por Correspondência Ortogonal (OMP), mas incorpora diversas outras idéias da literatura para acelerar e fornecer garantia de desempenho.

O teorema 12 estabelece que a cada iteração realizada pelo algoritmo reduz-se o erro de aproximação por um fator constante, enquanto adiciona um pequeno múltiplo de ruído. Desse modo, quando o erro de aproximação é grande em comparação com o ruído, o algoritmo faz progresso considerável.

Teorema 12 (CoSaMP, [40])

Suponha que Φ é uma matriz de amostragem $M \times N$ com constante de isometria restrita $\delta_{2S} \leq c$. Seja $y = \Phi x + n$ um vetor amostra de um sinal arbitrário, contaminado com ruído arbitrário. Para um dado parâmetro de precisão η , o algoritmo CoSaMP produz uma aproximação S -esparsa $\hat{x}$ que

⁴Método utilizado para resolver problemas de programação linear que explora a estrutura esparsa do sinal, [40].

satisfaz

$$\|x - \hat{x}\|_{l_2} \leq C \max \left\{ \eta, \frac{1}{\sqrt{s}} \|x - x_{\frac{s}{2}}\|_{l_1} + \|n\|_{l_2} \right\} \quad (3.28)$$

onde $x_{\frac{s}{2}}$ é uma melhor aproximação $\frac{s}{2}$ -esparsa para x . O tempo de execução total é $\mathcal{O}\left(\frac{\zeta \log \|x\|_{l_2}}{\eta}\right)$, onde ζ limita o custo da multiplicação da matriz-vetor com Φ e Φ^* . O armazenamento total é $\mathcal{O}(N)$.

Os teoremas 7, 8, 9 e 10 apresentados na seção 3.6 deste capítulo exibem que a RIP vale para um número de medidas $M = \mathcal{O}(s \log^\alpha N)$. Portanto, o teorema 12 garante a reconstrução para uma ampla classe de esquemas de amostragens quando o número de amostras é proporcional à esparsidade S do sinal e é logarítmica em relação à dimensão N .

Como pode ser observado em [40], o algoritmo 1 utiliza como entradas a matriz de medidas Φ , o vetor y com as amostras ruidosas do sinal desconhecido, o nível de esparsidade S da aproximação a ser produzida e o critério de parada. Conforme foi construído o algoritmo, pode-se observar que o operador de amostragem, também denominado de matriz de medida Φ , é definida pela teoria de CS. Já em relação ao nível de esparsidade S , existem duas abordagens para sua escolha: ele pode ser estimado de $S \approx \frac{M}{2 \log N}$ ou pode ser escolhido após executar o CoSaMP usando uma série de níveis de esparsidade seguindo uma progressão geométrica. O algoritmo é inicializado com uma aproximação do sinal trivial. Durante cada iteração, o CoSaMP realiza os seguintes passos principais:

- **identificação** – o algoritmo forma um *proxy*⁵ dos resíduos das amostras atuais e localiza os maiores coeficientes desse *proxy*;
- **fusão de suporte** – o conjunto de componentes recém identificados é

⁵Definido, sem muito rigor, como um sinal intermediário à próxima iteração, [40].

Algoritmo 1 Algoritmo de Reconstrução CoSaMP

Require: Matriz Φ , vetor de amostra y e nível de esparsidade S **Ensure:** Uma aproximação mais esparsa $\hat{x}$ do sinal verdadeiro x $\hat{x}_0 \leftarrow 0 \{ \text{Aproximação trivial inicial} \}$ $r \leftarrow y \{ \text{Amostras atuais iguais a amostra de entrada} \}$ $i \leftarrow 0 \{ \text{Aproximação trivial inicial} \}$ **repeat** $i \leftarrow i + 1$ $e \leftarrow \Phi^T r \{ \text{Forma o proxy – estimativa do sinal residual} \}$ $\Omega \leftarrow \text{supp}(e_{2S}) \{ \text{Identifica os maiores coeficientes} \}$ $T \leftarrow \Omega \cup \text{supp}(\hat{x}_{i-1}) \{ \text{Fusão dos suportes} \}$ $b|_T \leftarrow \Phi_T^\dagger y \{ \text{Estimação do sinal por mínimos quadrados} \}$ $b|_{T^c} \leftarrow 0$ $\hat{x}_i \leftarrow b_S \{ \text{Poda da estimativa do sinal para obter próxima aproximação} \}$ $r \leftarrow y - \Phi \hat{x}_i \{ \text{Atualiza medidas residuais} \}$ **until** critério de parada

unido com o conjunto de componentes que aparecem na aproximação atuais;

- **estimação** – o algoritmo resolve um problema de mínimos quadrados para aproximar o sinal alvo sobre o conjunto fundido de componentes;
- **poda** – o algoritmo produz uma nova aproximação, retendo somente as maiores entradas nessa aproximação do sinal por mínimos quadrados;
- e
- **atualização da amostra** – finalmente, as amostras são atualizadas, tal que elas reflitam o resíduo – a parte do sinal que não foi aproximada.

Esses passos são repetidos até que um número fixo de iterações ou um critério de parada pré-definido seja alcançado. Além dos parâmetros observados, existem alguns ajustes que podem melhorar o desempenho do algoritmo,

tais como o número de componentes selecionados na etapa de identificação e o número de componentes retidos na etapa da poda.

O desempenho do CoSaMP é garantido por vários teoremas, dos quais é apresentado apenas o teorema mais geral [12](#). Em relação a algoritmos lineares e superlineares, tais como os da categoria de relaxamento convexo, CoSaMP alcança melhor desempenho. Embora CoSaMP seja mais lento que os algoritmos sublineares, combinatoriais por natureza, ele compensa essa ineficiência por permitir matrizes de amostragens mais gerais e exigir poucas medidas. Em [\[32\]](#) pode-se obter maiores detalhes de comparação.

Finalmente, é observado em [\[40\]](#) que o CoSaMP apresenta as seguintes características em relação a seu funcionamento:

- funciona para uma variedade de esquemas de amostragem para as quais existe um limite definido pela constante de isometria restrita, ou seja, vale a RIP;
- reconstrói sinais S -esparso de $\mathcal{O}(S \log N)$ medidas, não sendo necessário amostras maiores;
- reconstrói todos os sinais dada uma matriz de amostragem fixa, ou seja, seus resultados não exigem somente matrizes de amostragem coletadas ao acaso para cada sinal;
- o algoritmo de reconstrução obtém sucesso tanto para sinais compressíveis e não esparsos, quanto para sinais corrompidos por ruído; e
- o pior custo para a reconstrução de sinal S -esparso com valores reais para uma precisão relativa fixa, dada uma matriz de amostragem com nenhuma estrutura especial é $\mathcal{O}(MN)$.

3.8 Um Exemplo Simples

A idéia central de CS é que o número de amostras necessárias para capturar e reconstruir um sinal com eficiência não depende da largura de banda, como preconiza o teorema de *Shannon–Whittaker*, [48], mas sim de seu conteúdo estrutural. Nesta seção, um exemplo simples é implementado para fixar os conceitos de CS apresentados até este momento. Para facilitar a visualização e o entendimento do procedimento, o sinal construído é conhecido e ele é consideravelmente pequeno.

Como exemplo é construído um sinal discreto original unidimensional x de tamanho $N = 512$ composto de 28 senóides complexas, cujas frequências, fases e amplitudes são desconhecidas. A transformada discreta de *Fourier* de x tem 28 componentes diferentes de zero e é apresentado através dos quadrados azuis na figura 3.3. Como não há restrições sobre a frequência em x , ela não é limitada em banda e qualquer dos 512 componentes podem ser diferentes de zero, ou seja, a escolha dos 28 componentes é aleatória. O teorema de *Shannon–Whittaker* exige a utilização de todas as 512 amostras no domínio do tempo para que a reconstrução seja exata utilizando interpolação com funções *Sinc* — teoria clássica de sinais, [42].

Entretanto, para exibir a diferença entre a teoria clássica de sinais e CS, deseja-se reconstruir o sinal com exatidão capturando apenas $M = 64$ amostras não adaptativas do sinal original x . Com o propósito de solucionar esse problema, é utilizado uma rotina em MatlabTM para Programação Convexa Disciplinada (CVX) disponibilizada por [28], que consiste em um sistema de modelagem com código fonte livre escrito para otimização convexa. Esse *software* faz parte da categoria de algoritmos de relaxamento convexo apresentado na seção 3.7 deste capítulo, especificamente, utilizando o minimizador baseado em pontos interiores para programação linear.

Procurando não exagerar no rigor para facilitar o entendimento, os passos da implementação são assim descritos:

- parâmetros de entrada – um vetor x original com 512 componentes, sendo que a posição e a magnitude de 28 deles é aleatória; o número de medidas M da ordem de $S \log N$;
- aquisição dos dados: monta-se uma matriz de *Fourier* Φ com tamanho 512×512 e sorteia-se $M = 64$ linhas dessa matriz. O valor de M é definido pelo teorema 11. A matriz resultante tem dimensão 64×512 e é denominada matriz de medida parcial de *Fourier* Φ_Ω , onde cada linha é uma função de medida ϕ ; posteriormente, faz-se o produto $y = \Phi_\Omega x$ para adquirir os 64 componentes amostrados do vetor esparso original x ; e
- reconstrução – é utilizado um algoritmo de reconstrução baseado em otimização convexa pela minimização da norma l_1 do sinal $\hat{s}$, sujeito a $\Phi \hat{x} = y$. Espera-se que $\hat{s} = x$, onde x é o sinal original.

A teoria de CS garante que nas condições citadas acima a reconstrução é exata, ou seja, o vetor $\hat{s}$ reconstruído é igual ao vetor original x definido inicialmente. Na figura 3.3b, pode-se observar que os teoremas que constroem a teoria de CS garantem a existência do número mínimo de medidas $M = 64$ necessárias para que ocorra a reconstrução exata do sinal. Como pode ser observado na figura 3.3a, abaixo de $M = 64$ não há reconstrução exata para sinais esparsos. Este resultado confirma o que a teoria de CS preconiza: que abaixo de certo M definido por teoremas não existe reconstrução robusta para sinais esparsos, compressíveis ou corrompidos por ruído.

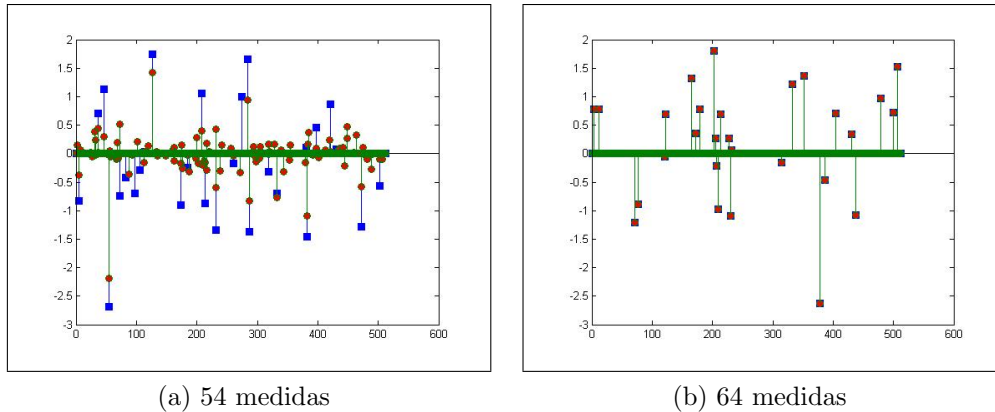


Figura 3.3: *Um exemplo simples de CS. Os componentes do vetor original x são representados pelos quadrados azuis e os componentes do vetor reconstruído $\hat{s}$ pelas circunferências vermelhas. (a) CS operando sem eficiência com 54 medidas e (b) CS com eficiência utilizando 64 medidas.*

3.9 Aplicações de CS

O novo paradigma proposto pela teoria de CS atrai o interesse da comunidade científica e da engenharia. À medida que os fundamentos teóricos foram se consolidando, pesquisadores desenvolveram aplicações em várias áreas da ciência e tecnologia, explorando as inovadoras características de CS, entre elas: a utilização de poucas medidas não adaptativas para reconstruir um sinal arbitrário.

É importante salientar que toda a teoria de CS construída para sinais vale para imagens, basta que cada coluna da imagem rasterizada seja empilhada construindo um vetor de várias linhas (alta dimensão) e uma coluna. Neste contexto, é possível apresentar as seguintes aplicações: Compressão e Aquisição de Imagens, Imagens Médicas, Processamento de Sinais Estatísticos, Aprendizagem de Máquina, Conversão Analógico–Informação, Biologia Computacional, Análise de Dados Geofísicos, Imagem Hiperespectral, Sensoriamento Remoto, Imagens de Radar, Astronomia, Planejamento de Código de Correções de Erro em Comunicações, Metrologia de Superfície, Acústica

e Análise no Tempo–frequência, Engenharia da Computação, Computação Gráfica, Controle e Robótica, Recuperação Baseada em Conteúdo, Holografia e Ótica, Física, entre outras.

Não faz parte do escopo desse trabalho apresentar detalhadamente aplicações de CS nas diversas áreas do conhecimento. Uma extensa lista é apresentada em [50]. Neste trabalho são apresentados detalhes relacionados a processamento de imagens e vídeos.

Câmera de 1 pixel

Existem sinais analógicos cuja coleta de N amostras é de difícil aquisição. Desse modo, CS pode ter impacto sobre dispositivos convencionais de hardware limitados. Os principais dispositivos convencionais de aquisição de imagens são limitados ao espectro visível, tais como as câmeras baseadas em tecnologia CCD ou CMOS. Estas câmeras convencionais, quando construídas para a faixa infravermelha do espectro geram um custo 100 vezes maior do que para a faixa visível. O trabalho de [23] propõe uma câmera mais simples, menor e mais barata que pode operar em uma faixa muito mais ampla do espectro eletromagnético que as câmeras baseadas em tecnologia CCD e CMOS convencionais. O protótipo desse dispositivo já existe. Ele é denominado de câmera de um pixel e é baseado na varredura de um único sensor no tempo, adquirindo diretamente projeções aleatórias da área da cena sem primeiro coletar os *pixels* ou *voxels*. Esta câmera emprega um arranjo de micro espelhos digitais para realizar o cálculo ótico das projeções lineares da imagem em um padrão binário aleatório e um único detector de fóton (sensor). Existem diversos trabalhos baseados na câmera de um pixel, entre eles o que desenvolve um operador de amostragem (matriz de medida) altamente esparsa e rápido e é implementado baseado em conjuntos *Hadamard* em blo-

cos misturados, [25]. Outro trabalho realiza a aquisição e reconstrução de imagens coloridas utilizando CS, [39]. Pode-se citar também o trabalho que faz a reconstrução com maior qualidade e velocidade utilizando CS baseado em informações de borda, [29], entre outros.

Compressão de Vídeo

No trabalho de aquisição e reconstrução de vídeos compressíveis apresentado em [46], desenvolveu-se uma nova estrutura baseada em CS para vídeo aplicadas em cenas texturizadas dinâmicas que modelam a evolução da cena como um sistema dinâmico linear. A abordagem é validada para experimentos de classificação de vídeos e permite diminuir a taxa de medição consideravelmente. Aplicação de CS para redução de taxa de amostragem em reconstrução de vídeo pode ser observada em [49, 43].

Imagens Hiperespectrais

A proposta apresentada em [37] trabalha com imagens hiperespectrais e com detecção de borda. A grande quantidade de canais nas imagens hiperespectrais justifica o uso de CS em cada canal, pois CS processa poucas medidas para reconstruir. Nesta proposta é discutido como o algoritmo de Busca por Correspondência Ortogonal Simultânea (StOMP) pode reconstruir imagens de múltiplos canais de medidas obtidas a partir da matriz de medidas parciais de *Fourier*. Além disso, é discutido a detecção de bordas de imagens esparsas e a extensão para reconstrução de imagens de múltiplos canais.

Imagens Médicas

Na proposta de [24] pode-se observar a reconstrução de imagens de dados altamente incompletos, substituindo a modelagem paramétrica utilizada na abordagem clássica pela modelagem não paramétrica. Os resultados observados apresentam eficiência para a reconstrução de alguns tipos de tomografias computadorizadas, quando a matriz de medida é desconhecida do codificador ou o número de medidas não pode ser muito alto devido ao procedimento ser danoso à saúde. Em particular, a imagem sintética *Phantom Logan–Shepp* foi reconstruída exatamente de um número muito pequeno de medidas. Outros trabalhos de aquisição de imagens *Terahertz* podem ser observados em [18, 19, 31].

Visão Computacional

No trabalho apresentado em [17], poucas medidas de CS são utilizadas explorando a esparsidade do primeiro plano da imagem para realizar a subtração do fundo utilizando CS. Nesse artigo é discutido a aplicação da técnica em visão computacional.

Sensoriamento Remoto

Em algumas aplicações é considerado o cenário de imagens *multi-view*, onde uma série de câmeras observam a sobreposição, interpretando subimagens de uma grande cena. Na proposta de [51] é apresentado um protocolo de CS não colaborativo baseado na estrutura da superfície geométrica para a reconstrução conjunta da imagem utilizando poucas medidas aleatórias. Outra aplicação pode ser observada em [36] que trata da reconstrução de imagens obtidas por sensoriamento remoto aeroespaciais baseada na teoria de CS. [22] apresentou técnicas baseadas em CS que reduzem a distorção es-

pectral das imagens fundidas e produz resultados superiores aos métodos de fusão convencionais. Trabalhos utilizando a tecnologia inovadora da câmera de 1 pixel para aplicações em sensoriamento remoto podem ser observados em [34, 35].

3.10 Considerações Finais deste Capítulo

Neste capítulo foram apresentados os conceitos, definições e teoremas que fornecem sustentação à teoria CS. Inicialmente foi apresentado o cenário e as circunstâncias onde nasceu a teoria CS. Em seguida foi apresentado uma visão geral das duas etapas principais de CS: a aquisição por sensoriamento e a reconstrução do sinal. A seção sobre representações de sinais apresentou os conceitos de esparsidade e compressibilidade, extremamente importantes para CS. Uma revisão sobre teoria de aproximação foi realizada devido a sua importância na aproximação de sinais compressíveis em sinais esparsos. Na seção da Propriedade de Isometria Restrita (RIP) foram apresentados os conceitos principais de CS que garantem eficiência e robustez: coerência entre bases e incoerência. Alguns teoremas foram apresentados exibindo o número de medidas M e algumas matrizes de medidas para as quais vale a RIP. Dois algoritmos de reconstrução foram apresentados: um baseado em otimização convexa (L1-Magic) e outro em busca gulosa (CoSaMP). Para facilitar o entendimento de CS foi apresentado um exemplo simples que engloba os passos de aquisição e reconstrução. Por último, foram apresentadas algumas aplicações de CS para imagem. Todas essas definições e teoremas procuram fundamentar que CS surge com a revelação que um grupo pequeno de projeções lineares não adaptativas de sinais esparsos ou compressíveis contém informações suficientes para a reconstrução e o processamento do sinal

ou da imagem.

No próximo capítulo, pode-se observar como a teoria de CS convencional foi modificada para interagir com sinais que apresentam modelos mais realísticos. Trata-se da inserção de algumas técnicas consagradas do padrão JPEG2000 na teoria de CS apresentada no capítulo 3. São apresentadas as novas propriedades que garantem robustez para sinais suaves e localmente suaves e a modificação do algoritmo CoSaMP. No final do capítulo, pode-se verificar um exemplo simples e outros modelos que podem ser utilizados para modificar o CS convencional.

Capítulo 4

CS Baseado em Modelo

A teoria de CS convencional é constituída basicamente de duas etapas essenciais: o **sensoriamento** de sinais esparsos e compressíveis com garantia de alto desempenho para $M = \mathcal{O}(K \log \frac{N}{K})$ medidas tomadas aleatoriamente a partir de matrizes que possuam a propriedade RIP e a **reconstrução** do sinal sensoriado utilizando algoritmos de reconstrução, tais como minimização de norma l_1 , norma TV e CoSaMP. Até o momento, grande parte das pesquisas se divide em duas áreas: o desenvolvimento de novos algoritmos de reconstrução para aumentar a robustez e reduzir o custo computacional e o planejamento de matrizes de sensoriamento mais eficientes para reduzir o valor de medidas M .

Um outro tipo de abordagem que também visa melhorar a eficiência de CS convencional é baseada na melhoria da representação de sinais que leva à esparsidade, como pode ser observado em [3]. Eles construíram modelos de representação de sinais baseados nas técnicas consagradas e utilizadas no padrão JPEG2000, as quais exibem a interdependência existente entre os valores e a localização dos maiores coeficientes. Desse modo, CS baseado em

modelos é constituído de representações de sinais que vão além do esparso e do compressível, com o propósito principal de melhorar o desempenho e o custo computacional da teoria de CS convencional vista no capítulo 3 deste trabalho. Observa-se que a partir desses modelos é possível reduzir o grau de liberdade dos sinais, permitindo um relaxamento dos algoritmos de reconstrução. Assim, a integração de representações baseadas em modelos que carregam a estrutura do sinal e diminuem a espaço de busca com algoritmos já consagrados em CS convencional garantem maior robustez na reconstrução de medidas ruidosas, além de fazer com que o número de medidas M seja independente de N , [3].

Para atender esse objetivo, [3] conceituou sinais modelo-esparsos fundamentado na RIP baseada em modelo, sinais modelo-compressíveis fundamentado na Propriedade de Amplificação Restrita (RAmP) e um algoritmo de reconstrução que é o CoSaMP modificado. O algoritmo CoSaMP foi escolhido para ser modificado devido a sua eficiência e a facilidade de manuseio.

4.1 Além do Esparso e do Compressível

Nesta seção são apresentadas as definições de sinais modelo-esparsos e modelo-compressíveis. É importante salientar que esparsidade e compressibilidade correspondem a modelos simples onde cada coeficiente é tratado independentemente, como definido na seção 3.3. Por outro lado, em sinais modelo-esparsos e modelo-compressíveis é levado em consideração a estrutura dos dados, ou seja, a dependência entre os valores e a localização dos maiores coeficientes. Os modelos definidos a seguir reduzem o grau de liberdade de um sinal esparso ou compressível, permitindo somente certas configurações de suporte para os maiores coeficientes.

4.1.1 Sinais Modelo–Esparsos

Um vetor x de um sinal S –esparso pertence ao conjunto $\sum_S \subset \mathbb{R}^N$, onde $\sum_S$ é a união de $\binom{N}{S}$ subespaços de dimensão S . Um modelo de sinal dota o modelo esparso de estruturas adicionais, além de sua esparsidade, com o propósito de permitir certos subespaços S dimensionais e não permitir outros.

Para a apresentação da definição 3, seja $x|_\Omega$ representando as entradas x correspondendo ao conjunto de índice $\Omega \subseteq \{1, \dots, N\}$, e seja Ω^C o complementar de Ω .

Definição 3 (Sinais Modelo–Esparsos, [3])

Um modelo de sinal $\mathcal{M}_S$ é definido como a união de m_S subespaços S dimensionais canônicos

$$\mathcal{M}_S = \bigcup_{m=1}^{m_S} \mathcal{X}_m, \text{ tal que } \mathcal{X}_m := \{x : x|_{\Omega_m} \in \mathbb{R}^S, x|_{\Omega_m^C} = 0\} \quad (4.1)$$

onde cada subespaço $\mathcal{X}_m$ contém todos os sinais x com $\text{supp}(x) \in \Omega_m$. Portanto, o modelo $\mathcal{M}_S$ é definido como o conjunto de suportes $\{\Omega_1, \dots, \Omega_{m_S}\}$.

Sinais de $\mathcal{M}_S$ são denominados de $\mathcal{M}_S$ –modelo–esparsos e é possível observar que existe uma redução no espaço de busca, ou seja, como $\mathcal{M}_S \subset \sum_S$ então existem apenas $m_S \leq \binom{N}{S}$ subespaços de busca.

4.1.2 Sinais Modelo–Compressíveis

Assim como sinais compressíveis são aproximadamente S –esparsos, sinais modelo–compressíveis são aproximadamente S –modelo–esparsos. Em outras palavras, um sinal modelo–compressível é constituído da melhor aproximação

S -modelo-esparsa de s , ou seja, é o resultado obtido quando forçamos os $N - S$ menores coeficientes de s a serem zero.

Definição 4 (Sinais Modelo-Compressíveis, [3])

O conjunto de sinais s -modelo-compressíveis com S termos é definido como

$$\mathfrak{M}_s = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sigma_{\mathcal{M}_S}(x) \leq SK^{-\frac{1}{s}}, 1 \leq K \leq N, S < \infty \right\} \quad (4.2)$$

onde $\sigma_{\mathcal{M}_S}(x)$ é o erro produzido pela aproximação de $x \in \mathbb{R}^N$ pela melhor aproximação em $\mathcal{M}_S$. Defina $|x|_{\mathfrak{M}_s}$ como o menor valor de S para o qual essa condição se mantém para x e s .

Como pode ser observado na definição 4, o decaimento do erro $\sigma_{\mathcal{M}_S}(x)$ define o modelo de um sinal. Desse modo, diz-se que $x \in \mathfrak{M}_s$ é um sinal s -modelo-compressível sob o modelo de sinal $\mathcal{M}_S$.

Na seção 4.5 deste capítulo é apresentado um modelo concreto para sinais modelo-esparsos e modelo-compressíveis que leva em consideração o fato que coeficientes *wavelets* de sinais e imagens localmente suaves possuem uma estrutura organizada em árvore, [3].

4.2 Correspondente à RIP

Nesta seção são apresentadas novas propriedades que correspondem à RIP da teoria de CS convencional. Semelhante à RIP, elas garantem que toda submatriz de Φ de tamanho $M \times S$ é próxima de uma isometria, ou seja, as distâncias e, conseqüentemente a informação, são preservadas após o sensoriamento do sinal.

4.2.1 RIP Baseada em Modelo

Sabe-se que o sinal x que está sendo adquirido faz parte de um modelo $\mathcal{M}_S$ -modelo-esparso, então é possível relaxar as restrições sobre a RIP para as matrizes de medida Φ e ainda assim, conseguir reconstrução estável a partir de medidas compressíveis $y = \Phi x$.

Definição 5 (RIP Baseada em Modelo, [33])

Uma matriz Φ com dimensão $M \times N$ tem a $\mathcal{M}_S$ -RIP com constante $\delta_{\mathcal{M}_S}$ se, para todo $x \in \mathcal{M}_S$, tem-se

$$(1 - \delta_{\mathcal{M}_S}) \|x\|_{l_2}^2 \leq \|\Theta_{\Omega T} x\|_{l_2}^2 \leq (1 + \delta_{\mathcal{M}_S}) \|x\|_{l_2}^2 \quad (4.3)$$

Quando os sinais são modelo-esparso, a RIP baseada em modelo apresentada na definição 5 produz condições de reconstrução eficiente. Entretanto, para garantir o desempenho durante o processo de reconstrução baseado em sinais modelo-esparso a partir de medidas ruidosas, deve-se fazer uma ampliação da união de subespaços, como é apresentado pela definição 6.

Definição 6 (Soma de Minkowski, [3])

A soma B -Minkowski para o conjunto $\mathcal{M}_S$, com $B > 1$ um inteiro, é definida como

$$\mathcal{M}_S^B = \left\{ x = \sum_{r=1}^B x^{(r)}, \text{ com } x^{(r)} \in \mathcal{M}_S \right\} \quad (4.4)$$

O algoritmo que obtém a melhor aproximação de x na união ampliada de subespaços $\mathcal{M}_S^B$ é obtido por

$$\mathbb{M}_B(x, S) = \min_{\bar{x} \in \mathcal{M}_S^B} \|x - \bar{x}\|_{l_2} \quad (4.5)$$

Assim, para que exista garantia de desempenho na reconstrução de sinais modelo-esparso, Φ deve possuir uma quase isometria para todos os subespaços $\mathcal{M}_S^B$ para algum $B > 1$. Esta exigência é uma generalização para $2S$ -RIP, $3S$ -RIP e RIPs superiores pertencentes à teoria de CS convencional.

4.2.2 Propriedade de Amplificação Restrita (RAmP)

Na teoria de CS convencional, a RIP garante reconstrução estável tanto para sinais esparsos quanto para sinais compressíveis. Entretanto, para CS baseado em modelo isto não acontece, pois a classe dos sinais compressíveis é muito maior do que a dos sinais esparsos. Neste contexto é apresentado o modelo $\mathcal{M}_S$ que gera a Propriedade de Aproximação Aninhada (NAP) e a Propriedade de Amplificação Restrita (RAmP).

Definição 7 (Propriedade de Aproximação Aninhada, [3])

Um modelo $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots\}$ tem a Propriedade de Aproximação Aninhada (NAP) se

$$\text{supp}(\mathbb{M}(x, S)) \subset \text{supp}(\mathbb{M}(x, S')) \quad (4.6)$$

para todo $S < S'$ e $x \in \mathbb{R}^N$.

Dito de outra forma, um modelo $\mathcal{M}$ gera aproximação aninhada se a melhor aproximação baseada em modelo em S termos estiver contida na melhor aproximação baseada em modelo em S' termos, para $S < S'$. Um exemplo de NAP são os sinais compressíveis da teoria CS convencional.

Definição 8 (Subespaços Residuais, [3])

O j -ésimo conjunto de subespaços residuais de tamanho S é definido como

$$\mathcal{R}_{j,S}(\mathcal{M}) = \{u \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } u = \mathbb{M}(x, jS) - \mathbb{M}(x, (j-1)S)\} \quad (4.7)$$

para algum $x \in \mathbb{R}^N$ e para cada $j = 1, \dots, \lceil \frac{N}{S} \rceil$.

Como pode ser observado na definição 8, quando um modelo $\mathcal{M}$ obedece NAP, o suporte da diferença entre a aproximação aninhada em modelo nos jS termos e a aproximação aninhada em modelo nos $(j-1)S$ termos encontra-se em uma pequena união de subespaços devido à estrutura imposta pelo modelo. Esta estrutura é capturada pelo conjunto de subespaços que são incluídos por cada aproximação j subsequente. Quando a NAP vale, cada partição x_{T_j} do sinal é um sinal S -esparso e $\mathcal{R}_{j,S}$ é a união de subespaços de dimensão S , [3]. É fácil ver que a norma l_2 das partições decai à medida que j aumenta para sinais compressíveis sob o modelo. Essas definições sobre aproximações são imprescindíveis para permitir o relaxamento das restrições de isometria sobre a matriz de medida Φ e limitar o erro de reconstrução para sinais s -modelo-compressíveis.

A definição 9 é utilizada para quantificar a robustez na reconstrução de sinais modelo-compressíveis e se baseia no controle da amplificação da aproximação residual baseada em modelo utilizando Φ . Trata-se da nova generalização para a RIP e a RIP baseada em modelo.

Definição 9 (Propriedade de Amplificação Restrita (RAmP), [3])

A matriz Φ tem a Propriedade de Amplificação Restrita com parâmetros (ϵ_S, r) para o subespaço residual $\mathcal{R}_{j,S}$ do modelo $\mathcal{M}$ se

$$\|\Phi u\|_{l_2}^2 \leq (1 + \epsilon_S) j^{2r} \|u\|_{l_2}^2 \quad (4.8)$$

para qualquer $u \in \mathcal{R}_{j,S}$ para cada $1 \leq j \leq \lceil \frac{N}{S} \rceil$.

O parâmetro de regularidade $r > 0$ tem a função de balancear a taxa de crescimento da amplificação de $u \in \mathcal{R}_{j,S}$ em função de j , de modo a balancear o decaimento da norma em cada subespaço residual $\mathcal{R}_{j,S}$. Munido da RAmP, a seção 4.3 deste capítulo apresenta os teoremas que garantem o número de medidas necessárias para que exista reconstrução robusta de sinais modelo-compressíveis.

4.3 Matrizes e Número de Medidas

A partir do exposto na subseção 4.2.1 deste capítulo, [6] quantificou o número de medidas M necessárias para que uma matriz de medidas aleatória tenha $\mathcal{M}_S$ -RIP com alta probabilidade, como pode ser observado no teorema 13.

Teorema 13 (Reconstrução Robusta para Modelo-Esparso, [6])

Seja $\mathcal{M}_S$ a união de m_S subespaços de S dimensões em $\mathbb{R}^N$. Então, para

qualquer $t > 0$ e qualquer

$$M \geq \frac{2}{c\delta_{\mathcal{M}_S}^2} \left(\ln(2m_S) + S \ln \frac{12}{\delta_{\mathcal{M}_S}} + t \right) \quad (4.9)$$

uma matriz aleatória subgaussiana¹ independente e identicamente distribuída $M \times N$ tem a $\mathcal{M}_S$ -RIP com constante $\delta_{\mathcal{M}_S}$ com probabilidade menor do que $1 - e^{-t}$.

Por outro lado, a partir do exposto na subseção 4.2.2 deste capítulo, é possível quantificar o número de medidas M necessárias para que a matriz Φ tenha RAmP com alta probabilidade.

Teorema 14 (Reconstrução Robusta para Modelo-Compressível, [3])

Seja Φ uma matriz $M \times N$ com entradas subgaussianas e seja o conjunto de subespaços residuais $\mathcal{R}_{j,S}$ de um modelo $\mathcal{M}$ contendo R_j subespaços de dimensão S para cada $1 \leq j \leq \lceil \frac{N}{S} \rceil$. Se

$$M \geq \max_{1 \leq j \leq \lceil \frac{N}{S} \rceil} \frac{1}{(j^r \sqrt{1 + \epsilon_S} - 1)^2} \left(2S + 4 \ln \frac{\mathcal{R}_j N}{S} + 2t \right) \quad (4.10)$$

então a matriz Φ tem o (ϵ_S, r) -RAmP com probabilidade $1 - e^{-t}$.

No teorema 14, é possível observar que a ordem do limite inferior para M é menor do que $\mathcal{O}(S \log(\frac{N}{S}))$, enquanto o número de subespaços $\mathcal{R}_j$ cresce mais lentamente que N^S .

¹Matrizes subgaussianas possuem curtose negativa, ou seja, distribuição achatada em relação à gaussiana, [6].

Teorema 15 (Resultante de CS Baseado em Modelo, [3])

Seja $x \in \mathfrak{M}_s$ um sinal s -modelo-compressível em S termos sob um modelo $\mathcal{M}$ que obedece a NAP. Se Φ tem o (ϵ_S, r) -RAmP e $r = s - 1$, então tem-se

$$\|\Phi(x - \mathbb{M}(x, S))\|_{l_2} \leq \sqrt{1 + \epsilon_S} S^{-s} \ln \frac{N}{S} |x|_{\mathfrak{M}_s} \quad (4.11)$$

Neste contexto, se uma matriz Φ tem RAmP, então o teorema 15 garante robustez para a reconstrução de sinais modelo-compressíveis e possibilita a integração de modelos de sinais com algoritmos de reconstrução, como é visto na seção 4.4 deste capítulo.

4.4 CoSaMP Baseado em Modelo

A partir do conjunto de definições e teoremas apresentados até este ponto do trabalho é possível fazer a integração de modelos de sinais com o algoritmo CoSaMP. Com a justificativa que o CoSaMP tradicional é mais fácil de manusear e alcança os mesmos resultados que o estado da arte em algoritmos de relaxamento convexo, CoSaMP foi escolhido para ser modificado em [3]. O pseudocódigo para o CoSaMP modificado é apresentado no algoritmo 2. A modificação realizada em [3] no algoritmo é muito simples: na etapa de aproximação do CoSaMP apresentado no algoritmo 1, subseção 3.7.2 do capítulo 3 desse trabalho, simplesmente é substituído o passo de aproximação que ordena os S coeficientes pela melhor aproximação baseada em modelo, também em S coeficientes. Assim feito, a cada iteração o CoSaMP faz a busca em m_S subespaços de $\mathcal{M}_S$ ao invés de $\binom{N}{S}$ subespaços de $\sum_S$. É natural então que menos medidas sejam necessárias para se obter o mesmo

Algoritmo 2 Algoritmo de Reconstrução CoSaMP Baseado em Modelo**Require:** Matriz Φ , vetor de amostra y e modelo $\mathcal{M}$ **Ensure:** Uma aproximação mais esparsa $\hat{x}$ do sinal verdadeiro x $\hat{x}_0 \leftarrow 0$ {Aproximação trivial inicial} $r \leftarrow y$ {Amostras atuais iguais a amostra de entrada} $i \leftarrow 0$ {Aproximação trivial inicial}**repeat** $i \leftarrow i + 1$ $e \leftarrow \Phi^T r$ {Forma o proxy – estimativa do sinal residual} $\Omega \leftarrow \text{supp}(\mathbb{M}_2(e, S))$ {Identifica os maiores coeficientes} $T \leftarrow \Omega \cup \text{supp}(\hat{x}_{i-1})$ {Fusão dos suportes} $b|_T \leftarrow \Phi_T^\dagger y$ {Estimação do sinal por mínimos quadrados} $b|_{T^c} \leftarrow 0$ $\hat{x}_i \leftarrow \mathbb{M}(b, S)$ {Poda da estimativa do sinal de acordo com modelo} $r \leftarrow y - \Phi \hat{x}_i$ {Atualiza medidas residuais}**until** critério de parada

grau de reconstrução robusta do sinal. Esta melhoria pode ser vista por outro ângulo, utilizando o mesmo número de medidas pode-se alcançar uma reconstrução mais precisa. Os teoremas 16 e 17 garantem uma reconstrução robusta para os dois tipos de sinais definidos: sinais modelo-esparsos e modelo-compressíveis.

Inicialmente pode-se verificar que a garantia de robustez no desempenho de reconstrução de sinais para medidas ruidosas em modelo-esparsos é obtida utilizando RIP baseada em modelo e pode ser verificada utilizando o teorema 16.

Teorema 16 (Robustez para Sinais Modelo-Esparsos, [3])

Seja $x \in \mathcal{M}$ e $y = \Phi x + n$ um conjunto de medidas CS ruidosas. Se Φ tem uma constante $\mathcal{M}_S^4$ -RIP de $\delta_{\mathcal{M}_S^4} \leq 0.1$, então o sinal estimado $\hat{x}_i$ obtido da

iteração i do algoritmo CoSaMP baseado em modelo satisfaz

$$\|x - \hat{x}_i\|_{l_2} \leq 2^{-i} \|x\|_{l_2} + 15 \|n\|_{l_2} \quad (4.12)$$

Em segundo lugar, a garantia de robustez no desempenho de reconstrução de sinais para medidas ruidosas em modelo-compressíveis é obtida utilizando RAmP e pode ser verificada utilizando teorema 17.

Teorema 17 (Robustez para Sinais Modelo-Compressíveis, [3])

Seja $x \in \mathfrak{M}_s$ um sinal s -modelo-compressível de um modelo $\mathcal{M}$ que obedece a NAP e $y = \Phi x + n$ um conjunto de medidas CS ruidosas. Se Φ tem uma constante $\mathcal{M}_S^4$ -RIP de $\delta_{\mathcal{M}_S^4} \leq 0.1$ e a (ϵ_S, r) -RAmP com $r \leq s - 1$, então o sinal estimado $\hat{x}_i$ obtido da iteração i do algoritmo CoSaMP baseado em modelo satisfaz

$$\|x - \hat{x}_i\|_{l_2} \leq 2^{-i} \|x\|_{l_2} + 35 \left(\|n\|_{l_2} + |x|_{\mathfrak{M}_s} S^{-s} \left(1 + \ln \left\lceil \frac{N}{S} \right\rceil \right) \right) \quad (4.13)$$

Infelizmente, alguns sinais não se adaptam exatamente ao modelo utilizado. Podem existir três casos: no primeiro, têm-se sinais que são próximos do modelo correspondente e a garantia de robustez obtida é próxima da apresentada no teorema 16. No segundo, seja um sinal que não é modelo-compressível como o algoritmo de reconstrução assume, mas sim, $(s - \epsilon)$ -modelo-compressível. Neste caso, a garantia de robustez obtida é próxima da apresentada no teorema 17. Por último, o pior caso, quando os sinais são arbitrariamente longe de serem representados por modelo-esparcos ou

modelo-compressíveis. Neste último caso, o CS baseado em modelo se comporta como o CS convencional.

Segundo [3], as complexidades computacionais de algoritmos de reconstrução de sinais baseado em modelos se diferem dos algoritmos padrões em CS convencional por dois fatores: o primeiro fator é que a diminuição do número de medidas M necessárias para a reconstrução reduz a complexidade computacional, uma vez que a maioria dos algoritmos de reconstrução tem complexidade computacional linear no número de medidas e o segundo está relacionado com o custo computacional relativamente baixo da aproximação, que é de $\mathcal{O}(N \ln N)$.

4.5 O Modelo *Tree Wavelet*

Sinais ou imagens suaves e localmente suaves são classificados como compressíveis em bases *fourier* e *wavelet*, respectivamente. Para esses tipos de sinais, a decomposição *wavelet* tem fornecido excelentes resultados pela representação de sinais originais em modo esparsos e compressível para uso no padrão JPEG2000. Um breve comentário sobre transformadas *Wavelet* foi feito na subseção 2.2.1 do capítulo 2 desse trabalho. Além do que foi apresentado, pode-se observar que coeficientes *wavelets* de imagens naturais podem ser organizados em uma estrutura de árvore, de modo que os maiores coeficientes se agrupam ao longo dos galhos da árvore.

Nesta seção é apresentado um exemplo específico de CS baseado em modelos desenvolvidos por [3]: Modelo *Tree Wavelet*. Trata-se simplesmente da integração das definições, teoremas e algoritmos apresentados nas seções anteriores desta dissertação com o estado da arte em processamento e compressão de sinais e imagens baseado em transformada *Wavelet*.

4.5.1 Sinais *Tree*–Esparsos

Deve-se entender bem o que representa esparsidade em árvore, ou *tree*–esparsidade, no que diz respeito à decomposição *wavelet*. A descrição abaixo é talhada sobre sinais de uma dimensão e *Tree Wavelet* binárias, mas pode ser estendida para sinais de dimensões D e *Tree Wavelet* superiores.

Considere um sinal x de tamanho $N = 2^I$, para um valor inteiro I . A equação 4.14 mostra a representação *wavelet* de x , onde ν é a função de escala e $\psi_{i,j}$ é a função *wavelet* na escala i e deslocamento j . Desse modo, os coeficientes *wavelet* são constituídos de coeficientes de escala v_0 e coeficientes *wavelets* $\omega_{i,j}$.

$$x = v_0\nu + \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} \omega_{i,j} \psi_{i,j} \quad (4.14)$$

Utilizando-se a notação de matrizes, tem-se que $x = \Psi s$, onde Ψ é composto pelas funções de escala e *wavelets*. Além disso, no vetor coluna $\alpha = [v_0 \ \omega_{0,0} \ \omega_{1,0} \ \omega_{1,1} \ \omega_{2,0} \ \dots]^T$ tem-se o coeficiente de escala v_0 e os coeficientes *wavelets* ω . A decomposição em diversas escalas utilizando *wavelet* cria uma relação de parentesco entre os coeficientes. É possível dizer que $\omega_{i-1, \lfloor \frac{j}{2} \rfloor}$ é pai de $\omega_{i,j}$ e que $\omega_{i+1,2j}$ e $\omega_{i+1,2j+1}$ são filhos de $\omega_{i,j}$, [3].

Além disso, funções *wavelets* agem como detectoras de descontinuidades locais e possuem suporte aninhado em diferentes escalas, o que garante a existência de cadeias de coeficientes *wavelets* maiores ao longo dos galhos da árvore, diminuindo à medida que se aproxima da raiz. Esta propriedade em árvore conectada é a principal justificativa para o amplo uso da transformada *Wavelet* no estado da arte de processamento e compressão, [3]. O propósito é utilizar as propriedades da transformada *Wavelet* com a teoria apresentada nas seções anteriores deste capítulo. Desse modo, um conjunto de coeficientes *wavelets* Ω forma uma subárvore conectada se, quando um coeficiente $\omega_{i,j} \in$

Ω então seu pai $\omega_{i-1, \lfloor \frac{j}{2} \rfloor}$ também pertence. Cada um desses Ω define um subespaço do sinal cujo suporte está contido em Ω , isto é, todos os coeficientes não pertencentes a Ω são nulos.

Como o objetivo de iniciar a construção do modelo *Tree*-esparso, o modelo $\mathcal{T}_S$ é apresentado na definição 10 como a união de todos os subespaços S -dimensional correspondentes ao suporte Ω que forma a subárvore conectada.

Definição 10 (Modelo *Tree*-Esparsos, [3])

Define-se o conjunto de sinais S -Tree Esparsos como

$$\mathcal{T}_S = \left\{ x = v_0\nu + \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^{2^i} \omega_{i,j} \psi_{i,j} : \omega|_{\Omega_C} = 0, |\Omega| = S \right\} \quad (4.15)$$

onde Ω forma uma subárvore conectada.

Assim, para contar o número de subespaços $\mathcal{T}_S$, basta contar o número de subárvores conectadas distintas de tamanho S em uma árvore binária de tamanho N . Do que foi apresentado até aqui, surge a proposição 1.

Proposição 1 (Número de Subespaços no Modelo *Tree* Esparsos, [3])

O número de subespaços no modelo $\mathcal{T}_S$ obedece

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{T}_S \leq \frac{4^{S+4}}{Se^2} & \text{para } S \geq \log_2 N; \\ \mathcal{T}_S \leq \frac{(2e)^S}{S+1} & \text{para } S < \log_2 N \end{array} \right\} \quad (4.16)$$

Portanto, para sinais *Tree*-esparsos, aplicando o teorema 13 e a proposição 1 obtém-se o corolário 1 que define o número de medidas para o modelo *Tree*-esparso.

Corolário 1 (Número de Medidas para o Modelo *Tree* Esparso, [3])

Uma matriz aleatória subgaussiana Φ tem a propriedade $\mathcal{T}_S$ -RIP com constante $\delta_{\mathcal{T}_S}$ e probabilidade $1 - e^{-t}$ se o número de medidas M obedece

$$M \geq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{c\delta_{\mathcal{T}_S}^2} \left(S \ln \frac{48}{\delta_{\mathcal{T}_S}} + \ln \frac{512}{Se^2} + t \right) & \text{se } S < \log_2 N \\ \frac{2}{c\delta_{\mathcal{T}_S}^2} \left(S \ln \frac{24e}{\delta_{\mathcal{T}_S}} + \ln \frac{2}{S+1} + t \right) & \text{se } S \geq \log_2 N \end{array} \right\} \quad (4.17)$$

Observa-se que o número de medidas M necessário para a reconstrução estável de sinais *Tree*-esparso é linear em S , ou seja, não depende de N como a teoria de CS convencional.

4.5.2 Sinais *Tree*-Compressíveis

Infelizmente, o conceito de esparsidade não é suficiente para a elaboração de um sistema robusto, pois a maioria dos sinais possui a característica de serem compressíveis, mas não totalmente esparsos. Desse modo, faz-se necessário aproximar o sinal original modelo-compressível para um sinal aproximadamente modelo-esparso. Portanto, para reconstruir um sinal natural ou artificial com robustez é necessário um algoritmo de aproximação eficiente $\mathbb{T}(x, S)$ para resolver a aproximação ótima

$$x_S^T = \min_{\bar{x} \in \mathcal{T}_S} \|x - \bar{x}\|_{l_2} \quad (4.18)$$

Felizmente, existe um algoritmo eficiente que desempenha esse papel, chamado *Condensing Sort and Select Algorithm* (CSSA), [5]. Quando os coeficientes *wavelets* decrescem monotonicamente ao longo dos galhos da árvore na direção da raiz, a aproximação em subárvore coincide com aproximação

em S termos utilizada na teoria de CS convencional pela simples ordenação dos coeficientes. Por outro lado, quando os coeficientes são gerais, o CSSA resolve pela aproximação dos coeficientes não monotônicos com a condensação dos segmentos dos galhos da árvore utilizando uma rotina iterativa de classificação e cálculo de média. Os nós condensados são chamados de supernós. Assim, o CSSA pode ser interpretado como um algoritmo guloso entre os nós. Para cada nó da árvore o algoritmo calcula a média da magnitude dos coeficientes *wavelets* para cada subárvore enraizada naquele nó e grava as maiores médias entre todas as subárvores como a energia para aquele nó. A partir disso, o CSSA pesquisa o nó não selecionado com a maior energia e adiciona a subárvore correspondendo à energia do nó para o suporte estimado como supernó. Da forma como está explicado, o custo computacional global é $\mathcal{O}(N \log N)$. Entretanto, transformando o problema de otimização com restrição apresentado na equação 4.18 no problema de otimização sem restrição $\min_{\bar{x} \in \bar{\mathcal{T}}} \|x - \bar{x}\|_{l_2}^2 + \lambda (\|\bar{s}\|_{l_0} - S)$ pela introdução do multiplicador de lagrange λ é possível diminuir o custo computacional da etapa de aproximação para $\mathcal{O}(N)$ utilizando programação dinâmica², [3].

Com o objetivo de construir o modelo *Tree*-compressível e particularizando a definição 3 é apresentada a definição 11.

Definição 11 (Modelo *Tree*-Compressível, [3])

Define-se o conjunto de sinais s -Tree-compressíveis como

$$\mathcal{I}_s = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - \mathbb{T}(x, S)\|_{l_2} \leq KS^{-s}, 1 \leq S \leq N, K < \infty\} \quad (4.19)$$

²É um método para elaboração de algoritmos para a resolução de problemas computacionais, tais como problemas combinatoriais. Consiste em calcular a solução ótima global a partir da solução ótima local previamente calculada e memorizada de subproblemas que compõem o problema original, evitando cálculos repetidos, [40].

onde $|x|_{\mathcal{I}_s}$ define como o menor valor de K para o qual essa condição é satisfeita para x e s .

Classes de aproximação $\mathcal{I}_s$ em árvore contém sinais cujos coeficientes *wavelets* têm um decaimento amplo da escala grossa para a fina. Tais classes são bem caracterizadas para sinais *wavelet* esparsos e são bem implementados utilizando espaços *Besov*³.

Quando um sinal x_a no espaço *Besov* com $s > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ é amostrado uniformemente e convertido em um vetor x de tamanho N , seus coeficientes *wavelets* pertencem ao espaço de aproximação $\mathcal{I}_s$, com

$$|x_N| \asymp \|x_a\|_{L_p([0,1])} + \|x_a\|_{B_q^s(L_p([0,1]))} \quad (4.20)$$

onde $\asymp$ denota uma norma equivalente. O mesmo resultado vale se $s = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ e $q \leq p$. Antes de apresentar o número de medidas para sinais *Tree*-compressíveis, deve-se quantificar o número de subespaços R_j em cada conjunto residual $R_{j,S}$ para a classe de aproximação aplicando o teorema 17 e a proposição 1.

Proposição 2 (Número de Subespaços no Modelo *Tree* Compressível, [3])

O número de subespaços S -dimensional de cada conjunto residual $R_{j,S}$ obedece

$$R_j \leq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(2e)^{S(2j+1)}}{(Sj+S+1)(Sj+1)} & \text{se } 1 \leq j < \left\lfloor \frac{\log_2 N}{S} \right\rfloor \\ \frac{2^{(3j+2)S+8} e^{jS}}{(Sj+1)S(j+1)e^2} & \text{se } j = \left\lfloor \frac{\log_2 N}{S} \right\rfloor \\ \frac{4^{(2j+1)S+8}}{S^2 j(j+1)e^4} & \text{se } j > \left\lfloor \frac{\log_2 N}{S} \right\rfloor \end{array} \right\} \quad (4.21)$$

³Espaços *Besov* $B_q^s(L_p([0,1]))$ contém funções de uma ou mais variáveis contínuas que tem s derivadas em $L_p([0,1])$, [3].

Finalmente, utilizando o teorema 17 e a proposição 2 pode-se verificar as condições do corolário 2 para as quais a matriz Φ tem a RAmP.

Corolário 2 (Número de Medidas para Modelo *Tree*-Compressível, [3])

Seja Φ uma matriz $M \times N$ subgaussiana independente e identicamente distribuída. Se

$$M \geq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{(\sqrt{1+\epsilon_S}-1)^2} \left(10S + 2 \ln \frac{N}{S(S+1)(2S+1)} + t \right) & \text{se } S \leq \log_2 N \\ \frac{2}{(\sqrt{1+\epsilon_S}-1)^2} \left(10S + 2 \ln \frac{601N}{S^3} + t \right) & \text{se } S > \log_2 N \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

então a matriz Φ tem a (ϵ_K, s) -RAmP para o modelo $\mathcal{T}$ e todo $s > 0.5$ com probabilidade $1 - e^{-t}$.

O limite simplificado para ambos os casos é $M = \mathcal{O}(S)$, cujo resultado é consideravelmente melhor do que $M = \mathcal{O}\left(S \log\left(\frac{N}{S}\right)\right)$ medidas necessárias observadas utilizando a teoria de CS convencional.

4.5.3 Um Exemplo Simples

A idéia central de CS baseado em modelo é que o número de amostras necessárias para capturar e reconstruir um sinal com eficiência não depende da largura de banda, como observado em [48], nem do tamanho do sinal N , como definido pela teoria de CS convencional, mas sim da esparsidade S do sinal. Complementando, quando é possível explorar a estrutura inerente ao sinal utilizando uma aproximação baseada em modelo, o algoritmo de busca obtém melhor desempenho na reconstrução e menor custo computacional. Nesta seção, um exemplo simples utilizando o modelo *Tree Wavelet* descrito

na seção 4.5 deste capítulo e seu resultado são apresentados com o objetivo de fixar os conceitos apreendidos até aqui. Para facilitar a visualização e o entendimento do exemplo, o sinal compressível reconstruído é conhecido e consideravelmente pequeno.

Seja um sinal discreto original unidimensional x com $N = 1024$ componentes seguindo uma lei de formação polinomial cúbica localmente suave, de modo que exista 5 pontos de mudança de suavidade (picos de descontinuidade) gerados aleatoriamente. É acrescentado um ruído gaussiano com média 0 e variância 0,01 para que seja possível verificar sua robustez a ruído. Como pode ser observado, o sinal não é estritamente esparso, mas sim, compressível e ruidoso.

O que se deseja é reconstruir o sinal com eficiência próxima da exatidão capturando apenas $M = 96$ medidas não adaptativas do sinal original x . Com o propósito de solucionar esse problema, é utilizada uma rotina em MatlabTM para efetuar a aquisição e a reconstrução do sinal. A aquisição é realizada utilizando uma matriz aleatória subgaussiana e a reconstrução utiliza o algoritmo de busca cujo pseudocódigo é apresentado no algoritmo 2. Neste exemplo, o CoSaMP utiliza o modelo *Tree Wavelet* binária, ambos, disponibilizados por [2]. A rotina para a implementação desse exemplo utiliza uma coleção de arquivos *m* e *mex* para transformadas *Wavelets* em 1D com bancos de filtros *daubechies* denominada *Rice Wavelet Toolbox* (RWT) e disponibilizada para acesso e cópia em [4].

Procurando não exagerar no rigor para facilitar o entendimento, os passos da implementação são:

- parâmetros de entrada – como parâmetro de entrada é criado um vetor x original ruidoso com 1024 componentes seguindo uma lei de formação polinomial cúbica com 5 picos e localmente suave entre os picos. Além disso, é informado ao algoritmo de reconstrução o nível de esparsidade

$S = 32$ do sinal e o modelo $\mathcal{T}_S$ do tipo *Tree Wavelet* binária;

- decomposição *wavelet* – para que seja realizada a decomposição *wavelet* do sinal é estimada a banda como sendo $\log_2 N$ e calculado os coeficientes de escala e os coeficientes *wavelets* para os filtros *daubechies*, normalizados para $\sqrt{2}$;
- aproximação do sinal – a aproximação do sinal dentro do algoritmo CoSaMP é realizada pelo algoritmo CSSA utilizando $S = 32$ como o nível de aproximação desejada do sinal a partir de um modelo *Tree Wavelet* binária. O número de medidas $M = 96$ é encontrado fazendo $M/S = 3$;
- aquisição dos dados – a etapa de aquisição das medidas utiliza a matriz de sensoriamento subgaussiana independente e identicamente distribuída, denominada matriz de medida Φ_Ω para obter o vetor de medidas $y = \Phi_\Omega x$; e
- reconstrução do sinal – para a reconstrução do sinal é utilizado o CoSaMP modificado para sinais esparsos unidimensionais. Os parâmetros de entradas são: vetor de medidas y , matriz de medidas Φ_Ω , os parâmetros para o cálculo da decomposição *wavelet* com filtros *daubechies*; o modelo *Tree Wavelet* binário; o nível de esparsidade S do sinal e o número de iterações. O parâmetro de saída é o sinal estimado. Após ser calculada a transformada inversa *Wavelet* com filtros *daubechies*, é mostrado o gráfico do sinal.

A figura 4.1 mostra o resultado da reconstrução do sinal citado acima utilizando apenas 96 medidas ruidosas. Juntamente com o sinal original ruidoso e o sinal reconstruído é apresentado o sinal original antes de ser adicionado o ruído, em azul, para comparação com resultado obtido. Pode ser observada

a robustez da teoria de CS em relação ao ruído e alta redução de dimensionalidade do sinal.

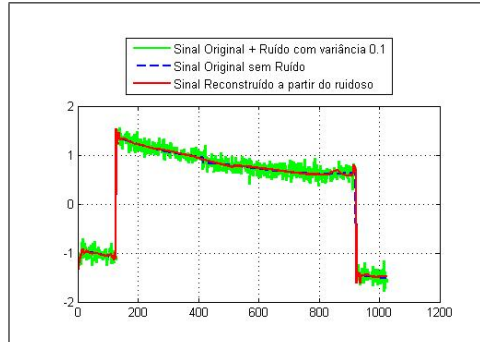


Figura 4.1: *Um exemplo simples Baseado em modelo Tree Wavelet Binária. O sinal original com ruído gaussiano adicionado a x é representado pela linha de cor verde, o sinal original x sem ruído pela cor azul e o sinal reconstruído pela cor vermelha.*

A teoria de CS baseado em modelo garante que com um valor bem determinado para a razão M/S e características específicas para a matriz de medidas Φ , a exploração do conhecimento prévio do sinal pela aproximação baseado em modelo possui desempenho consideravelmente melhor do que o CS convencional. Baraniuk e outros em [3], demonstraram esse resultado de modo teórico e experimental apenas para sinais unidimensionais. No exemplo mostrado acima, é possível ter uma idéia da possibilidade de reconstrução exata para o caso de sinais esparsos e reconstrução robusta para o caso de sinais não exatamente esparsos ou corrompidos por ruído.

4.6 Outros Modelos

Pesquisadores tem trabalhado na criação de modelos com o objetivo de melhorar o desempenho de CS e, ao mesmo tempo, diminuir o número de medidas e o custo computacional. Mais informações podem ser encontra-

das no site [50]. Alguns modelos disponibilizados são: Esparsidade em Blocos; Árvores Ocultas de *Markov*; Campos Aleatórios de *Markov*; Trem de Pulso Neuronal; Superposição Esparsa de Pulso e outros modelos baseados em união de subespaços.

4.7 Considerações Finais deste Capítulo

Neste capítulo foram definidas as propriedades RIP modificada que garante robustez para CS baseado em modelo-esparso e a propriedade RaMP para CS baseado em modelo-compressível. Posteriormente, foram apresentadas as seguintes características para o CoSaMP baseado em modelo: as especificações que Φ deve ter para possuir RaMP; M para que seja possível uma reconstrução robusta do sinal original e como criar um algoritmo CoSaMP modificado para reconstruir sinais com eficiência para poucas medidas.

A teoria apresentada até a seção 4.5 deste capítulo foi desenvolvida para modelos genéricos. A partir desse ponto, foi apresentado o modelo *Tree Wavelet*, que consiste em um exemplo de aplicação da teoria desenvolvida por [3] utilizando decomposição de sinais fundamentados na transformada *Wavelet*. Como pode ser observado, CS baseado em modelo reduz o número M de medidas de $M = \mathcal{O}\left(S \log\left(\frac{N}{S}\right)\right)$ para $M = \mathcal{O}(S)$, além de possibilitar diferenciar entre informações reais e informações falsas geradas durante o processo de reconstrução.

No próximo capítulo são apresentadas as metodologias e os resultados experimentais para cada um dos experimentos, visando inferir sobre a influência da variação de passos de quantização (Experimento I) e a influência da variação da razão entre o número de medidas e o número de esparsidade (Experimento II) na eficiência do algoritmo CoSaMP baseado em modelo.

Além desses dois experimentos, a eficiência na reconstrução de imagens é comparada para três algoritmos (Experimento III): o CoSaMP, o CoSaMP baseado em modelo e o algoritmo com otimização convexa minimizando a norma TV. Por último, alguns testes específicos com imagens foram comparados com trabalhos relacionados.

Parte III

Experimentos e Discussões

Capítulo 5

Resultados Experimentais

A teoria de CS baseado em modelo apresentado no capítulo 4 deste trabalho mantém as principais características de CS convencional. Dentre essas características, é possível citar o caráter não adaptativo¹ da etapa de aquisição e a capacidade de reconstrução da imagem com um número de medidas muito menor do que o exigido pelo teorema de *Nyquist*, [41]. Além das características de CS convencional, a teoria que possibilita a reconstrução baseada em modelo *Tree Wavelet* para imagens, a partir desse ponto chamado de modelo QuadTree, garante que o número de medidas necessárias para a reconstrução com robustez de imagens localmente suaves é da ordem da esparsidade S .

Neste capítulo, é apresentado o detalhamento técnico e os resultados da simulação de aquisição e reconstrução de quatro imagens com características diferentes. Além das imagens, outros parâmetros são avaliados, tais como resoluções, número de medidas M , passos de quantização Q e os níveis de

¹Entende-se por caráter não adaptativo a propriedade que a teoria de CS tem em não se preocupar com a cena que está sendo adquirida. Utiliza-se uma matriz de medida incoerente com a base de representação para qualquer tipo de imagem, [16].

aproximação S para o modelo QuadTree. A comparação com o estado da arte do algoritmo guloso CoSaMP e do algoritmo de otimização convexa que utiliza a minimização da norma TV é realizada posteriormente. Devido ao fato de existir uma grande variação de dados e prezando pela clareza, os experimentos estão divididos em três:

- o experimento I procura avaliar a relação de diferentes passos de quantização com a eficiência do algoritmo CoSaMP QuadTree.
- o experimento II busca a melhor razão M/S que produza o menor erro entre a imagem original e a imagem reconstruída utilizando CoSaMP QuadTree.
- o experimento III faz a comparação entre três algoritmos de reconstrução: o CoSaMP baseado em modelo QuadTree, obviamente utilizando os melhores parâmetros dos experimentos I e II; o CoSaMP convencional e o algoritmo de otimização convexa utilizando minimização da norma TV.

A preocupação com as etapas de quantização e esparsidade descritas nos experimentos I e II é devido ao fato delas inserirem erros no processo de aquisição das imagens. No experimento III, a comparação CoSaMP convencional com o modelo CoSaMP QuadTree é natural, visto que o segundo algoritmo é obtido a partir da alteração da etapa de aproximação trivial utilizada no primeiro algoritmo para uma etapa de aproximação baseada em modelo QuadTree. O algoritmo CoSaMP baseado em modelo foi proposto por [3] e foi apresentado no capítulo 4 desta dissertação. A diferença entre eles é que no CoSaMP a etapa de aproximação utiliza ordenação decrescente simples e no CoSaMP baseado em modelo QuadTree esta etapa de ordenação é substituída por uma aproximação baseada em modelo mais realístico

da imagem. Por outro lado, a comparação com o algoritmo que utiliza a minimização da norma TV é justificada pelo fato do estado da arte em algoritmos de reconstrução em CS convencional apresentá-lo como o que obtém melhor desempenho para imagens naturais, [30].

Desse modo, com o objetivo de verificar a eficiência e a robustez dos algoritmos de reconstrução, os resultados teóricos obtidos nos capítulos 3 e 4 são aplicados em sinais bidimensionais, especificamente, imagens. A metodologia utilizada em cada um dos experimentos é exibida em suas respectivas seções. Além disso, os resultados obtidos são apresentados utilizando representações gráficas e tabelas. Espera-se que os resultados nos experimentos concordem com os resultados teóricos, ou seja, que a reconstrução de imagens utilizando o algoritmo CoSaMP baseado em modelo QuadTree seja mais eficiente do que a reconstrução utilizando CoSaMP convencional – tanto em relação à reconstrução utilizando um número muito pequeno de medidas, quanto em relação à robustez a ruído gerado por erro de esparsidade e quantização.

5.1 Métricas de Qualidade em Imagens

As abordagens de aquisição por sensoriamento e reconstrução das diferentes imagens são avaliadas em relação à Taxa Sinal Ruído de Pico ($PSNR$) e ao Erro Médio Quadrático Normalizado ($NMSE$), [44]. $PSNR$ é definida como

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{MNL_{max}^2}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) - g(x, y)]^2} \quad (5.1)$$

onde M e N são o número de linhas e colunas da imagem, L_{max} é a intensidade máxima de nível de cinza da imagem, $f(x, y)$ é a imagem original e $g(x, y)$ é

a imagem reconstruída. $NMSE$ é definido como

$$NMSE = \frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) - g(x, y)]^2}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y)]^2} \quad (5.2)$$

onde $f(x, y)$ é a imagem original e $g(x, y)$ é a imagem reconstruída. A primeira métrica é expressa em decibel (dB) e a segunda é um número puro. Valores típicos de $PSNR$ variam entre 20 e 40 e quanto maior esse valor, mais a imagem reconstruída se aproxima da original. Já $NMSE$ possui como principal característica permitir comparações de mesmas imagens com resoluções diferentes, visto que sua lei de formação não depende da resolução da imagem. Seus valores variam entre 0 e 1 e quanto menor esse erro, melhor.

Ao ser realizada a abordagem da etapa de quantização no experimento I, faz-se necessário uma métrica adicional. Esta métrica quantifica o número médio de *bits* por coeficientes (ou *pixels*) e é denominada de Taxa de *Bits* (BR), [47]. Esta métrica é definida como

$$BR = \frac{M}{N} H_i \quad (5.3)$$

onde M é número de coeficientes do vetor de medidas, N é o número de coeficientes total e H_i é a entropia da medida y calculada sobre a distribuição de probabilidade dos níveis de cinza. Valores de BR menores do que 8 caracterizam compressão.

Na seção 5.2 deste capítulo são apresentadas as imagens que serão avaliadas, as matrizes de medida utilizadas, a base que leva à esparsidade e os critérios para simulação de aquisição de imagens.

5.2 Imagens Avaliadas e Matrizes de Medida

Este trabalho utiliza conceitos de amostragem não probabilística intencional para definir as imagens a serem avaliadas. A partir dos critérios descritos nos próximos parágrafos, as imagens escolhidas são *Lena*, *Cameraman*, *Phantom* e *Text*. Embora não seja utilizada nos experimentos I, II e III, a imagem *Pimentas* é utilizada na seção 5.7 para permitir comparação específica com o resultado encontrado por [3].

O custo computacional para a reconstrução de imagens com dimensão 256×256 *pixels* utilizando CS é alto. No experimento I são realizados 1920 testes para a avaliação do impacto de diferentes passos de quantização na eficiência do algoritmo CoSaMP QuadTree. No experimento II também são realizados 1920 testes para avaliação da razão M/S . No primeiro caso, são variados o número de medidas M , os passos de quantização Q , as quatro imagens e duas resoluções. No segundo, são variados os níveis de aproximação S baseado em modelo QuadTree e os parâmetros do primeiro, menos o passo de quantização. Portanto, para diminuir o tempo de processamento nos experimentos I e II são utilizadas imagens com resoluções 64×64 *pixels* e 128×128 *pixels*, mesmo sendo menos compressíveis que as imagens de maior resolução devido a sua menor redundância. Deseja-se encontrar similaridade no comportamento de CoSaMP QuadTree entre a resolução 64×64 *pixels* e a resolução 128×128 *pixels*. A intenção é estender os resultados obtidos nos experimentos I e II para resoluções maiores. A função *imresize* do MatlabTM com interpolação bicúbica é utilizada para a obtenção das imagens 64×64 *pixels* e 128×128 *pixels* a partir da imagem 256×256 *pixels*.

O critério utilizado para a definição das imagens a serem avaliadas é a diversidade em relação à esparsidade e à distribuição dos coeficientes de maior energia no domínio da frequência. Como pode ser observado na figura 5.1,

a imagem sintética para testes em ressonância magnética *Phantom* é uma imagem artificial constante por partes, consequentemente, muito esparsa. A imagem *Lena* é uma imagem natural localmente suave, ou seja, a energia é mais concentrada nos coeficientes de baixa frequência, porém existem alguns componentes espalhados ao longo do espectro. Em situação oposta a essas duas imagens, a imagem *Text* é caracterizada por variações abruptas de intensidade de níveis de cinza, de modo que sua energia é espalhada ao longo de todo o domínio da frequência. A imagem *Cameraman* representa um meio termo entre a suavidade da *Lena* e as variações abruptas da imagem *Text*.

O processo de aquisição de uma cena utilizando CS deve ser realizado por hardware específico, como a câmera de 1 pixel citada na seção 3.9. Entretanto, para a realização deste trabalho não foi possível ter acesso a esse tipo de equipamento. A solução alternativa utilizada foi fazer a simulação da aquisição da cena pela combinação linear com os valores de uma imagem no formato PGM P5 e, em seguida, realizar a quantização. O formato PGM P5 é constituído de uma tabela de valores binários, onde cada byte representa a intensidade de cada pixel.

Como pode ser observado nos capítulos 3 e 4, a etapa de aquisição pode ser representada pela expressão algébrica $y = \Phi x$, onde x é um vetor de N linhas e 1 coluna. Entretanto, sabe-se que imagens são representadas por matrizes com m linhas e n colunas, cujos valores endereçados por essas linhas e colunas representam a intensidade de cada nível de cinza. Em imagens, para utilizar a expressão algébrica acima é necessário fazer o empilhamento das colunas da matriz. Desse modo, uma imagem com resolução 256×256 pixels transforma-se em um vetor x com 65536 linhas e 1 coluna. Após o passo de simulação de aquisição, é realizada a quantização das medidas adquiridas utilizando a técnica de quantização escalar uniforme apresentada na subseção 2.2.2 do capítulo 2 desta dissertação.

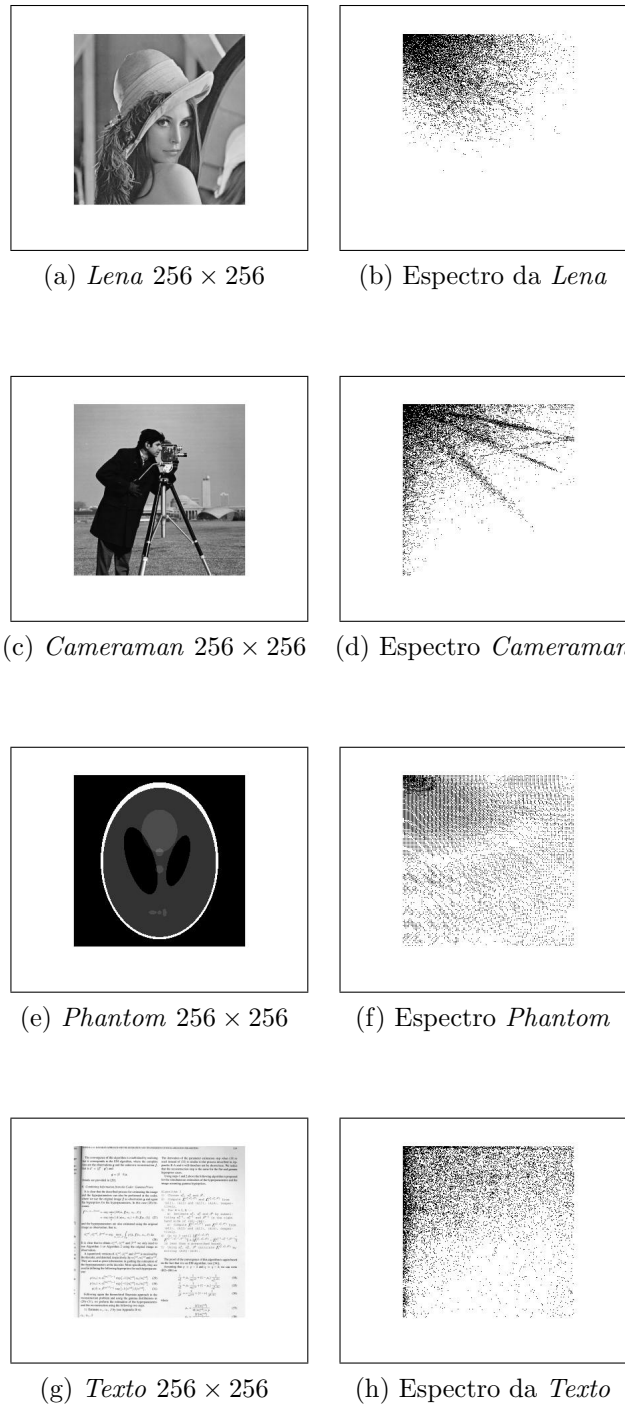


Figura 5.1: *Lena*, *Cameraman*, *Phantom* e *Texto* e seus respectivos espectros. Em (b), (d), (f) e (h), apenas os 10000 maiores coeficientes estão em preto.

A base que leva o sinal original à esparsidade utilizada neste trabalho é a *wavelet daubechies* implementada e integrada ao CoSaMP convencional em [3]. Os coeficientes de escala e *wavelet* de *daubechies* são calculados e fornecidos ao algoritmo CSSA para serem condensados de acordo com o modelo QuadTree. O modelo QuadTree foi escolhido entre os dois modelos apresentados em [3] devido à facilidade de obtenção de ferramentas para implementação e ao fato do padrão JPEG2000 utilizá-lo.

Trabalhos anteriores que avaliaram CoSaMP QuadTree e CoSaMP utilizaram matrizes de aquisição subgaussianas independentes e identicamente distribuídas fundamentados na teoria desenvolvida em [3]. Diferentemente desses autores, neste trabalho é utilizado a matriz parcial de *Fourier* para CoSaMP QuadTree e CoSaMP. Esta matriz consiste de um conjunto uniformemente aleatório de M linhas obtidas da Transformada Discreta de *Fourier* (DFT), [40]. As duas matrizes citadas anteriormente são exemplos clássicos em CS. Optou-se por escolher a matriz parcial de *Fourier*, pois, apesar de ser necessário o uso de um número um pouco maior de medidas que as matrizes subgaussianas e gaussianas, seu uso tem algumas vantagens, tais como: existem tecnologias que adquirem medidas de *fourier* aleatórias com pouco custo por amostra; a matriz de amostragem pode ser aplicada a um vetor com tempo de execução $\mathcal{O}(N \log N)$ e a matriz de armazenamento requer somente $\mathcal{O}(M \log N)$ de capacidade. Além disso, escolhendo essa matriz é possível fazer uma comparação com os resultados obtidos em [3].

Paralelo a essa abordagem, a matriz aleatória *Noiselet* é utilizada na obtenção de medidas para avaliação do algoritmo de otimização convexa baseado na minimização da norma TV. Tal matriz é escolhida por possuir incoerência muito alta com a base de representação esparsa e, portanto, a RIP vale para vários valores de M . Além disso, é uma matriz de fácil manejo, pois é ortogonal e autoadjunta.

A quantização é outra etapa que deve ser levada em consideração na aquisição de imagens. Neste contexto, aquisição de imagens não pode ser realizada utilizando uma precisão arbitrariamente grande para representar a intensidade de cada pixel. A etapa de aquisição insere erros provenientes da discretização. A dualidade é a seguinte: tomar menor passo deixa a reconstrução mais precisa, por outro lado, tomar maior passo deixa a imagem com menos *bits*. Desse modo, a etapa de quantização é extremamente importante na compressão e, conseqüentemente, influencia na etapa de reconstrução de imagens adquiridas utilizando CS. Trabalhos anteriores que abordaram Co-SaMP baseado em modelo não implementaram passos de quantização, o que pode ser verificado em [3, 25, 30]. Diferentemente desses autores, este trabalho leva em consideração os erros relativos à quantização durante a etapa de simulação da aquisição da cena.

Outra etapa que deve ser levada em consideração é a codificação. Como é observado na teoria de CS, tanto a convencional quanto a baseada em modelo, existe grande incoerência entre as bases e é difícil prever qual é o símbolo que mais acontece. Diante desta constatação, assume-se a equiprobabilidade de ocorrência dos níveis de cinza e define-se a banda igual $\log_2 N$. Desse modo, o passo de codificação é de difícil implementação, o que prejudica a aplicação de algoritmos de codificação eficientes. Nesta dissertação não foi implementada a etapa de codificação.

5.3 Sistema Computacional

Todos os experimentos apresentados neste trabalho foram realizados em um computador desktop com processador AMD Sempron E-1200 2.1GHz, memória cache 512Kb e 2GB de memória RAM. O sistema operacional Mi-

Microsoft Windows XP ProfessionalTM service pack 2 e versão 2002, o MatlabTM versão 2008b, juntamente com alguns pacotes específicos, constitui os *softwares* utilizados nesta dissertação. Os pacotes utilizados e cada fim específico foram:

- pacote constituído de várias rotinas de processamento digital de imagens que acompanha o livro *Digital Image Processing using MatlabTM*, [27], denominado *Toolbox Dipum pCode 2.0*;
- pacote de transformadas *Wavelet* fornecido gratuitamente pela Universidade de *Rice*, [4], denominado *Toolbox Wavelet Rice 2.4*;
- rotinas desenvolvidas por Emmanuel Candès e Justin Romberg e disponibilizadas gratuitamente na divisão de Matemática Aplicada e Computacional da Caltech, [7], denominada L1–Magic. Elas fornecem opções de otimização utilizando programação convexa com minimização de diversas normas, inclusive a norma TV;
- implementações gratuitas desenvolvidas pela Universidade de *Rice* para reconstruir imagens utilizando algoritmo guloso, disponibilizados em [2] e denominada de CoSaMP; e
- implementações gratuitas de algoritmos de reconstrução baseado em modelo desenvolvidos pela Universidade de *Rice*, denominado de CoSaMP baseado em modelo e disponibilizado em [2].

A metodologia, os resultados obtidos e as discussões são apresentadas nas três próximas seções deste capítulo. São três experimentos que procuram avaliar a reconstrução de imagens utilizando CS baseado em modelo abordando os erros oriundos da quantização Q e do nível S de aproximação da imagem. O primeiro experimento consiste na avaliação da relação do passo

de quantização com a eficiência do algoritmo de reconstrução baseado em modelo QuadTree. O segundo, consiste da avaliação da razão M/S e seu impacto sobre o algoritmo de reconstrução. Já o terceiro experimento compara o CoSaMP baseado em modelo QuadTree com o CoSaMP convencional e com o estado da arte em algoritmo convencional para imagens naturais – a otimização convexa utilizando minimização da norma TV. A metodologia aplicada em cada experimento e os comentários locais são apresentados individualmente em cada seção. Adicionalmente é apresentada a seção 5.7 com testes de desempenho específicos, ora para comparar resultados com outros trabalhos, ora para mostrar eficiência do algoritmo utilizando poucas medidas.

5.4 Experimento I

Para que uma determinada abordagem de reconstrução de imagens seja relevante na prática é necessário levar em consideração erros adicionados pela etapa de quantização. Neste contexto, esta etapa pode ser considerada como uma forma de adicionar ruído ao conjunto de medidas adquiridas. Assim, antes de realizar o experimento II e III, é necessário desenvolver um estudo aprofundado sobre alguns passos de quantização com o propósito de definir a relação desses passos com a eficiência do algoritmo de reconstrução. Em outras palavras, deseja-se encontrar a lei de formação sobre os passos de quantização que produz maior $PSNR$ e menor BR utilizando reconstrução baseada em modelo QuadTree. A técnica de quantização utilizada neste trabalho é a quantização escalar uniforme apresentada na seção 2.2.2 do capítulo 2 desta dissertação.

Com o objetivo de avaliar os efeitos de ruídos adicionados pela etapa

de quantização em relação à $PSNR$ e BR , são realizadas as configurações apresentadas na tabela 5.1, constituindo 1920 testes. A quantização é im-

Tabela 5.1: Configurações utilizadas no Experimento I para avaliação dos diferentes passos de quantização na eficiência do CoSaMP QuadTree.

Configurações para o Experimento I
Quatro imagens com resoluções 64×64 <i>pixels</i> e 128×128 <i>pixels</i>
Variação de 20 valores de medidas
Aquisição pela matriz parcial de <i>Fourier</i>
Variação de 12 passos de quantização uniforme
Método CSSA para aproximação ao modelo QuadTree com $S = M/3, 50$
Parada CoSaMP <i>QuadTree</i> igual a 50 iterações ou $\ \hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}\ _{l_2} < 10^{-2}$

plementada após a aquisição do vetor de medidas y . É observado a partir de qual passo de quantização não existem mais diferença entre os resultados. Os resultados são apresentados por meio de dois gráficos: $PSNR \times BR$ e $PSNR \times M$. Nos gráficos $PSNR \times BR$, o desejável é que BR seja baixa e $PSNR$, alta.

Analisando o gráfico e fixando BR , existe um passo de quantização mais eficaz que os demais. Por outro lado, fixando $PSNR$, existe uma taxa de quantização que gera menor BR . Do primeiro comentário desse parágrafo, é desejável que o gráfico esteja o mais por cima possível. Do segundo comentário, deseja-se que o gráfico fique o mais a esquerda possível. Portanto, para definir o melhor passo de quantização em um algoritmo CoSaMP baseado em modelo QuadTree deve-se combinar o número de medidas M com os passos de quantização Q de modo a obter menor BR desejado para maior $PSNR$ permitido.

Já para o gráfico $PSNR \times M$, o desejável é encontrar um determinado passo de quantização que forneça maior $PSNR$ para um número de medidas

consideravelmente pequeno. Visualmente, basta tomar o gráfico ou as partes de cada gráfico que geram uma casca superior às demais.

As figuras 5.2 a 5.5 apresentam a relação entre $PSNR$ e BR para as imagens *Lena*, *Cameraman*, *Phantom* e *Texto*, todas com resolução de 64×64 *pixels* e 128×128 *pixels*. A variação na resolução das quatro imagens testadas é realizada com o objetivo de verificar o desempenho de CS baseado em modelo QuadTree quanto aos passos de quantização quando os testes foram de uma resolução menor para uma resolução maior. Deseja-se encontrar a relação dos passos de quantização e da taxa de *bits* com a eficiência do algoritmo e estendê-la para imagens com resoluções superiores a 128×128 *pixels*. Pode-se observar nas figuras 5.2, 5.3 e 5.4 que à medida que a resolução aumenta, a $PSNR$ aumenta, o que é justificável naturalmente pela maior esparsidade de imagens com resoluções maiores. Entretanto, o aumento de eficiência depende significativamente do nível de aproximação à esparsidade, o que é facilitado pelo fato da imagem em estudo ser mais compressível. Esta consideração pode ser melhor observada nos gráficos apresentados nas figuras 5.4 e 5.5, justificada pela maior e menor aproximação à esparsidade pelo modelo QuadTree da *Phantom* e da *Texto*, respectivamente.

É importante salientar que BR depende do número de medidas M e do passo de quantização Q utilizado. Como o número de medidas M depende do nível de aproximação à esparsidade S , BR depende de S . Além disso, o ruído gerado pela etapa de quantização é um ruído determinístico e o ruído oriundo do erro da aproximação à esparsidade é probabilístico. Quando o sinal é muito esparsa, os ruídos gerados pela etapa de quantização são perceptíveis e é possível visualizar que o aumento da taxa de *bits* BR e a diminuição do passo de quantização Q atua fortemente no aumento da eficiência da $PSNR$, como pode ser observado na figura 5.8b. Por outro lado, quando o ruído de esparsidade é maior do que o ruído de quantização, o que ocorre quando a

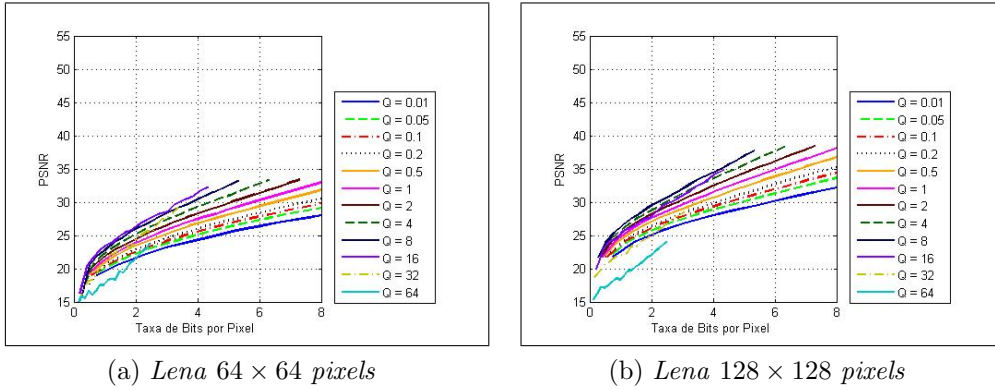


Figura 5.2: Resultado da avaliação de 12 passos de quantização para Lena variando duas resoluções e 20 medidas. $PSNR \times BR$.

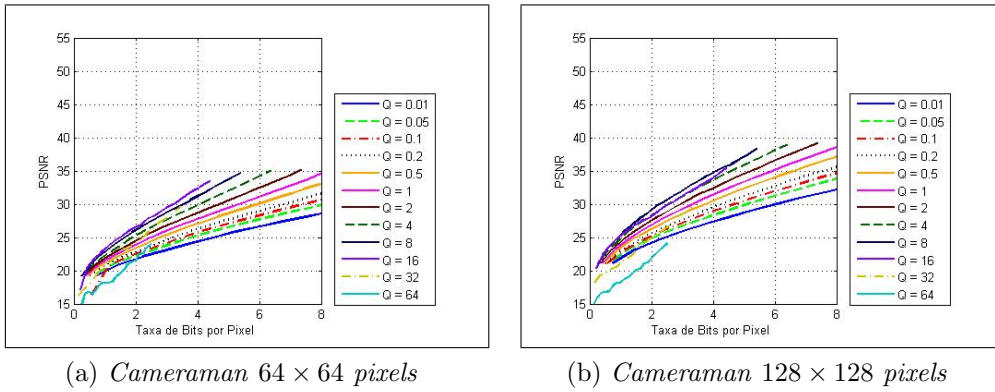


Figura 5.3: Resultado da avaliação de 12 passos de quantização para Cameraman variando duas resoluções e 20 medidas. $PSNR \times BR$.

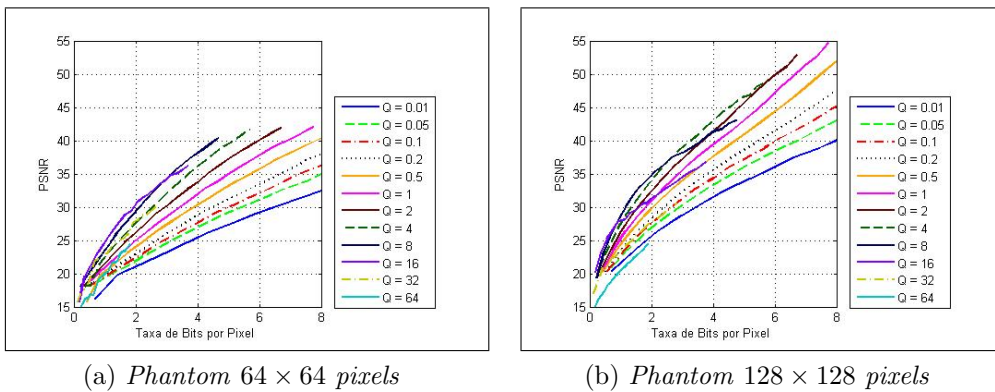


Figura 5.4: Resultado da avaliação de 12 passos de quantização para Phantom variando duas resoluções e 20 medidas. $PSNR \times BR$.

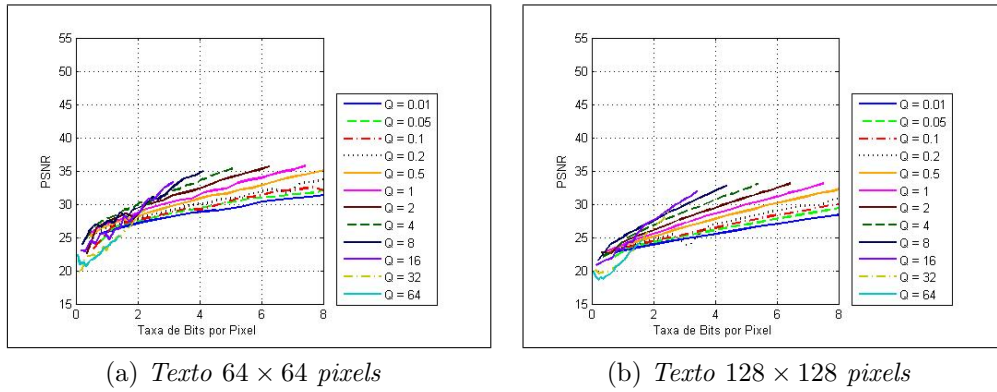


Figura 5.5: Resultado da avaliação de 12 passos de quantização para *Texto* variando duas resoluções e 20 medidas. $PSNR \times BR$.

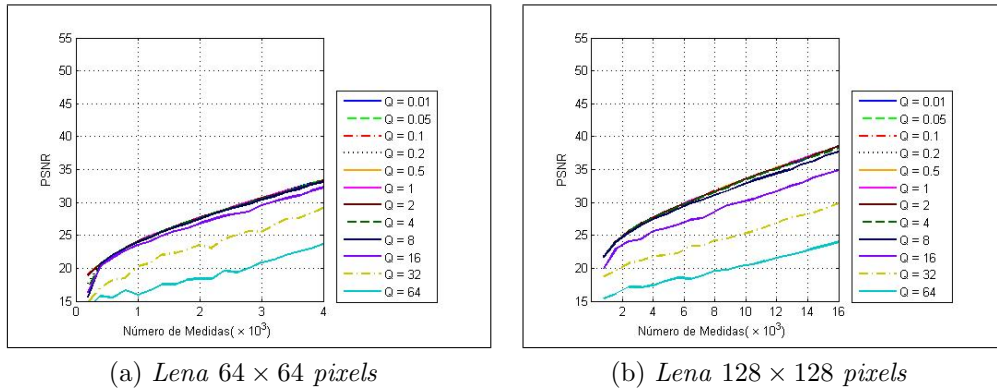


Figura 5.6: Resultado da avaliação de 12 passos de quantização para *Lena* variando duas resoluções e 20 medidas. $PSNR \times M$.

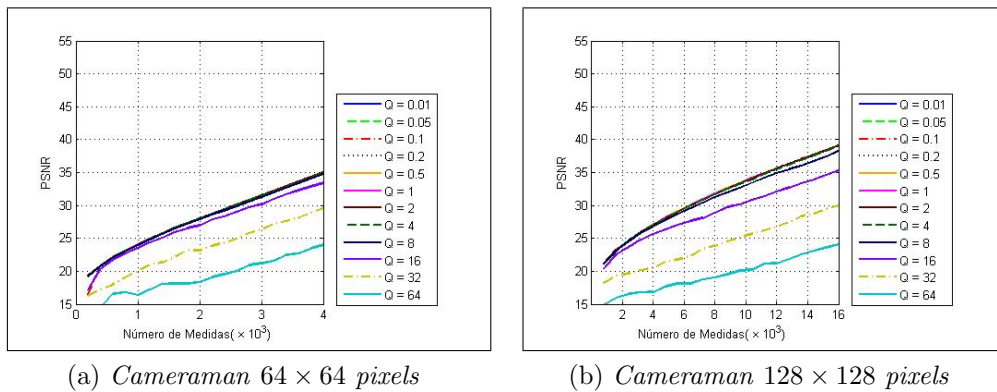


Figura 5.7: Resultado da avaliação de 12 passos de quantização para *Cameraman* variando duas resoluções e 20 medidas. $PSNR \times M$.

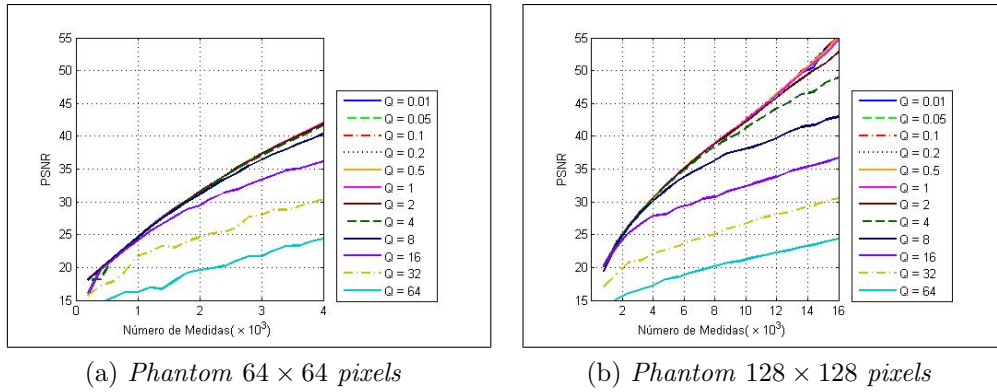


Figura 5.8: Resultado da avaliação de 12 passos de quantização para *Phantom* variando duas resoluções e 20 medidas. $PSNR \times M$.

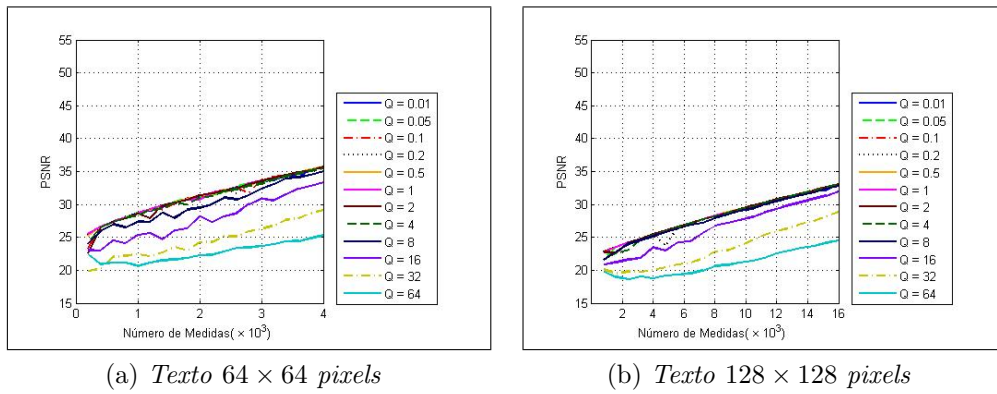


Figura 5.9: Resultado da avaliação de 12 passos de quantização para *Texto* variando duas resoluções e 20 medidas. $PSNR \times M$.

imagem é pouco compressível, não é possível perceber o ruído de quantização e possíveis alterações nos passos de quantização e taxas de *bits* podem não representar melhoria da $PSNR$. A interação desses dois ruídos, quantização e esparsidade, podem justificar a obtenção de resultados meio estranhos, principalmente quando a imagem avaliada não pode ser bem aproximada à esparsidade pelo modelo QuadTree.

Antes de continuar a análise dos resultados apresentados nos gráficos de $PSNR \times BR$ é importante fazer alguns comentários sobre como interpretá-

los. Para um melhor entendimento é apresentado um exemplo baseado no resultado obtido a partir da imagem *Lena* 128×128 pixels.

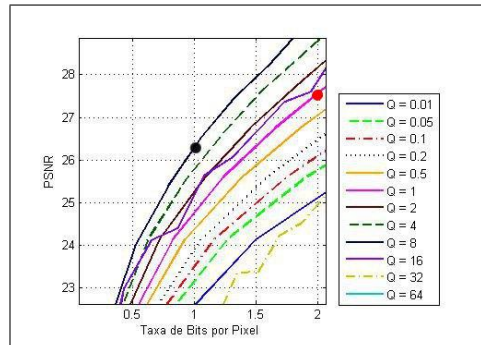


Figura 5.10: Zoom aplicado sobre o gráfico $PSNR \times BR$ da imagem *Lena* 128×128 pixels.

A figura 5.10 apresenta um zoom aplicado sobre o gráfico $PSNR \times BR$ da imagem *Lena* 128×128 pixels apresentado na figura 5.2b. Seja o número de medidas M fixo que gera $BR = 1$ e $PSNR \approx 26.25$ para o passo de quantização 8. Caso exista intenção de aumentar a $PSNR$, pode-se diminuir o passo de quantização para 1, de modo a gerar $BR = 2$ e $PSNR \approx 27.5$. Uma outra abordagem é fixar $BR = 1$. Neste caso, o passo de quantização 8 é sempre melhor, mas com o aumento significativo do número de medidas M . Portanto, da combinação do número de medidas M e do passo de quantização Q surgem os valores desejados de BR e $PSNR$. É possível observar no gráfico 3D apresentado na figura 5.11 que a interpretação realizada a partir dos gráficos $PSNR \times BR$ e $PSNR \times M$ está correta para M ou BR fixos.

A partir de uma análise detalhada nos gráficos das figuras 5.2 a 5.5, os passos de quantização que permitem uma boa variabilidade de BR e M são 1, 2, 4 e 8. É possível observar ainda que o gráfico 5.5a referente à imagem *Texto* 64×64 pixels não apresenta suavidade nas curvas que representam cada passo de quantização e o gráfico 5.9b referente à imagem *Texto* 128×128 pixels apresenta variação brusca no passo de quantização igual a 0.2. Isto se

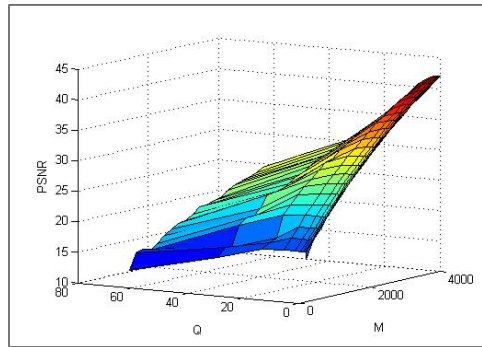


Figura 5.11: Gráfico 3D $PSNR \times M \times Q$ da imagem *Phantom* 64×64 pixels.

deve ao fato de a imagem *Texto* não ser muito esparsa e possuir variações abruptas de níveis de cinza.

Segundo [27], para que exista compressão é necessário que BR seja menor do que 8. Deste modo, é importante observar que para os passos de quantização iguais a 1, 2, 4 e 8 temos $BR \leq 8$ *bpp*, o que caracteriza compressão. A não ser no gráfico da imagem *Phantom* apresentado na figura 5.8b, todos os quatro passos de quantização citados acima podem gerar os mesmos valores de $PSNR$ para valores combinados de M e Q .

As figuras 5.6 a 5.9 apresentam a relação entre a $PSNR$ e o número de medidas M utilizadas na reconstrução das imagens *Lena*, *Camerman*, *Phantom* e *Texto*, todas com resoluções iguais a 64×64 pixels e 128×128 pixels. Da análise dessas figuras é possível perceber que existe um limiar a partir do qual a teoria de CS baseado em modelo opera. Este limiar é uma espécie de joelho apresentado em cada curva que representa os passos de quantização. Esta observação já é um indício de que o número de medidas independe da resolução da imagem.

Como pode ser observado nos oito gráficos das figuras 5.6, 5.7, 5.8 e 5.9, as nove primeiras curvas que representam os passos de quantização 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 4 e 8 se sobrepõem para diferentes números de medidas, principalmente para M menores. Já os demais passos, 16, 32 e 64, possuem

valores de *PSNR* muito inferiores. As imagens *Texto* com resoluções 64×64 *pixels* e 128×128 *pixels* apresentam quatro passos de quantização com valores de *PSNR* consideravelmente abaixo dos demais e uma variação brusca no passo de quantização igual a 0.2, respectivamente.

Alguns comentários sobre o nível de esparsidade das imagens avaliadas foram feitos na seção 5.2 deste capítulo. Como foi relatado, a *Phantom* é muito esparsa, a *Lena* é razoavelmente esparsa, a *Cameraman* é intermediariamente esparsa e a *Texto* é nada esparsa. Desse modo, o ruído devido a aproximação à esparsidade para *Texto* é muito grande, para as imagens *Lena* e *Cameraman* é razoavelmente grande e para a imagem *Phantom* é pequeno. Percebe-se pelos resultados apresentados na figura 5.9 que erros grandes devido à esparsidade não permitem o aumento de *PSNR* quando o passo de quantização é reduzido. Este erro não afeta tanto a imagem *Phantom* apresentada na figura 5.8, embora afete pouco as imagens *Lena* e *Cameraman* apresentadas nas figuras 5.6 e 5.7. Portanto, para estas três imagens, o erro de esparsidade é menor e a redução do passo de quantização gera aumento de *PSNR*. Assim, todas as curvas se sobrepõem até que o número de medidas M seja grande o suficiente para que o ruído de esparsidade não exceda o ruído de quantização.

Uma das principais características da teoria de CS baseado em modelo é gerar bons resultados em reconstrução de sinais para pequenos valores de M . Além disso, deseja-se que a imagem seja adquirida em formato comprimido. Neste contexto, considerando o melhor caso em termos de eficiência e considerando combinações de BR e Q para valores pequenos de M é possível escolher o passo de quantização a ser utilizado no experimento III como sendo 1. Os outros três valores de quantização viáveis apresentados acima também podem ser escolhidos, porém, a eficiência diminui. O resumo dos resultados mais importantes observados no Experimento I são apresentados

na tabela 5.2.

Tabela 5.2: Resultados do Experimento I avaliando passos de quantização em relação à eficiência de reconstrução ($PSNR$) e taxa de *bits* (BR).

Características avaliadas	Resultados observados
Imagens compressíveis	Possível perceber erros de Q
Imagens não compressíveis	Não é possível perceber erros de Q
M que faça erros $S < Q$	Alteração de Q , melhora eficiência
Alto erro de S , $S > Q$	Alteração de Q , não melhora eficiência
Passos 1, 2, 4 e 8	Boa eficiência para M e BR

Nesta seção foi feita uma avaliação sobre o impacto do ruído de quantização no processo de aquisição e reconstrução de imagens utilizando CS baseado em modelo QuadTree. Após vários testes foi definido o passo de quantização que será utilizado no experimento III. Desse modo, a próxima seção apresenta um estudo detalhado da razão entre o número de medidas M e o nível de aproximação à esparsidade S e seus reflexos na eficiência de CS baseado em modelo QuadTree.

5.5 Experimento II

Baraniuk e outros [3], definiram dois modelos de sinais: sinais modelo-esparsos e sinais modelo-compressíveis. O primeiro é relacionado a sinais e imagens suaves e o segundo a sinais e imagens localmente suaves. Ainda em [3], Baraniuk e outros da Universidade de *Rice* apresentaram vários experimentos que mostram a eficiência do algoritmo 2 na reconstrução de sinais localmente polinomiais de grau 3 utilizando simulação de Monte Carlo². Eles

²Utilizado para gerar aproximações numéricas de funções complexas a partir de alguma distribuição de probabilidade.

utilizaram o método CSSA para fazer a aproximação ao modelo *wavelet* 1D e 2D e a matriz de medidas subgaussiana independente e identicamente distribuída para adquirir os sinais. Os resultados apresentados por eles mostram eficiência principalmente quando foram utilizadas poucas medidas. Eles obtiveram a razão $M/S = 3,50$ como fator determinante da relação que deve existir entre o número de medidas M e o nível de aproximação S do modelo para que o algoritmo consiga reconstruir o sinal com eficiência próxima do perfeito quando os sinais são livres de ruídos. Embora a equipe de *Rice* tenha apresentado um teste para a imagem *Pimentas* com resolução 128×128 *pixels* e 5000 medidas, não foram realizados testes mais elaborados avaliando outras matrizes de medidas, resoluções maiores e imagens com distribuições de coeficientes e esparsidade diferentes. Além disso, eles não consideraram a adição de ruídos gerados pela aproximação à esparsidade e pela etapa de quantização durante o processo de aquisição.

Com o objetivo de avaliar a relação entre o Número de Medidas M e o Nível de aproximação à Esparsidade S (M/S), são avaliadas as configurações apresentadas na tabela 5.3, constituindo 1920 testes. Espera-se estender

Tabela 5.3: Configurações utilizadas no Experimento II para avaliação da relação entre medidas M e o nível de aproximação à esparsidade S .

Configurações para o Experimento II
Quatro imagens com resoluções 64×64 <i>pixels</i> e 128×128 <i>pixels</i>
Variação de 20 valores de medidas
Aquisição pela matriz parcial de <i>Fourier</i>
Passo de quantização uniforme $Q = 8$
Variação de 12 níveis de aproximação
Método CSSA para aproximação ao modelo QuadTree
Parada para CoSaMP <i>QuadTree</i> em 50 iterações ou $\ \hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}\ _{l_2} < 10^{-2}$

a razão M/S encontrada nesta seção para um conjunto de imagens com

resoluções maiores que 128×128 *pixels* e com esparsidade similares às quatro imagens avaliadas.

Os valores dos níveis de aproximação S avaliados são escolhidos seguindo o seguinte procedimento: calcula-se a redundância³ da imagem para uma taxa de compressão pré-definida igual a 88 : 1 utilizando o padrão JPEG2000. Esta redundância representa a quantidade de coeficientes da imagem que foram mantidos durante a compressão. O valor encontrado para a redundância é colocado na posição 7 de um vetor S . Os demais elementos do vetor são encontrados utilizando uma progressão geométrica com razão igual a 1.2, como sugerido por [40]. Desse modo, uma sequência de $S = 12$ elementos é construída para ser testada como níveis de aproximação à esparsidade para o modelo QuadTree. A escolha dos 20 números de medidas M segue o procedimento semelhante ao utilizado para S . É escolhido um número de medida inicial tomando 5 por cento da dimensão da imagem já transformada em vetor pelo empilhamento das colunas em $N = mn$ componentes e é utilizada uma progressão aritmética com razão $0.05N$ para encontrar os demais valores.

Após a definição das 20 medidas, dos 12 níveis de aproximação à esparsidade para o modelo QuadTree e do passo de quantização 8 é realizado a simulação de aquisição da imagem utilizando a matriz de medida parcial de *Fourier*. O passo de quantização é implementado sobre o conjunto de medidas y , depois de serem adquiridas. Posteriormente é utilizado o algoritmo CoSaMP baseado em modelo QuadTree para reconstruir a imagem. O algoritmo CoSaMP necessita do conjunto de medidas adquiridas, do modelo QuadTree e do nível de aproximação ao modelo. Finalmente, é observada a razão entre o número de medidas M e o nível de aproximação do modelo que consegue obter menor $NMSE$. É importante ressaltar que não é possível

³A redundância é definida como 1 menos o inverso da taxa de compressão da imagem, [26].

comparar os erros $NMSE$ entre imagens diferentes. Entretanto, ele possibilita a comparação entre imagens iguais, mas com resoluções diferentes. Para o objetivo desse trabalho ele funciona muito bem, visto que se deseja verificar a razão M/S e como ela se comporta ao aumentar a resolução da imagem.

Como pode ser verificado nas figuras 5.12 a 5.15, para cada nível de aproximação S do modelo QuadTree existe um limiar a partir do qual o CS QuadTree passa a operar. Este número de medidas é representado pelos joelhos observados nos gráficos. Sabe-se que uma mesma imagem, mas com resoluções diferentes, apresenta diferença no grau de compressibilidade e, conseqüentemente, na esparsidade. Assim, imagens com maiores resoluções são mais compressíveis em relação a sua dimensão. Comparando os resultados apresentados nos gráficos das imagens na resolução 64×64 *pixels* com as imagens na resolução 128×128 *pixels*, pode-se observar que o número de medidas M não depende do tamanho N da imagem, mas sim, da esparsidade S para cada resolução. Este resultado pode ser melhor observado pelas posições dos joelhos aproximadamente em torno das mesmas medidas para imagens iguais com resoluções diferentes, a menos da esparsidade S dessa imagem.

Observando os valores de M , S e $NMSE$, pode-se verificar que a partir de um limiar é possível reconstruir a imagem com um pequeno $NMSE$. Embora o resultado para a imagem *Phantom* apresentado na figura 5.14a e 5.14b apresente um ponto de $PSNR$ muito baixo e, conseqüentemente, $NMSE$ acima da escala assumida no gráfico, este ponto ainda está antes do limiar de operação do CS baseado em modelo QuadTree. Mantendo a razão M/S fixa, o erro $NMSE$ pode ser gradativamente diminuído com o aumento do número de medidas e do nível de aproximação à esparsidade da imagem, como pode ser melhor observado na figura 5.16 que apresenta um zoom na região para valores de $NMSE$ pequenos.

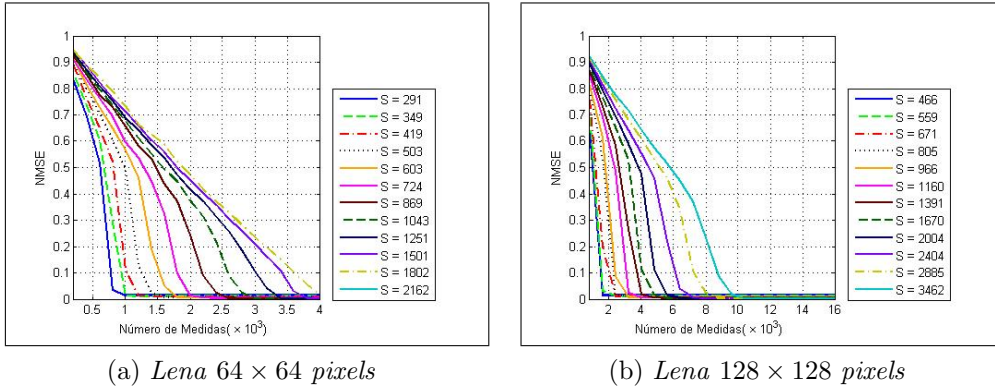


Figura 5.12: Resultado da avaliação de 12 níveis de aproximação para a imagem *Lena* variando duas resoluções e 20 medidas. $NMSE \times M$.

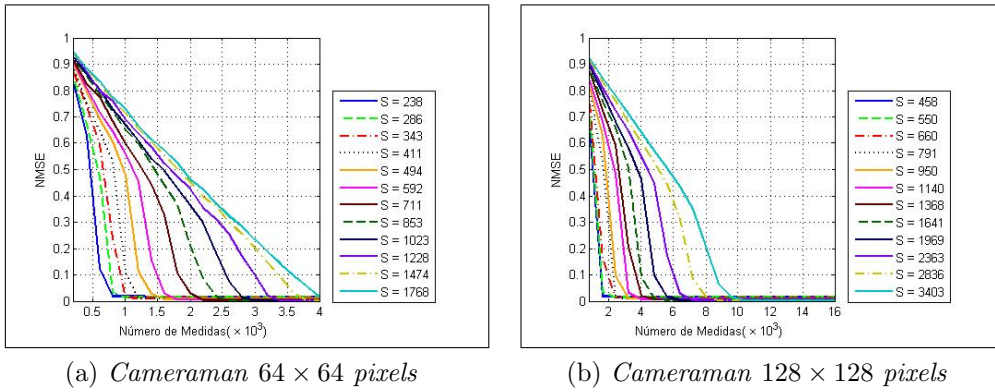


Figura 5.13: Resultado da avaliação de 12 níveis de aproximação para a *Cameraman* variando duas resoluções e 20 medidas. $NMSE \times M$.

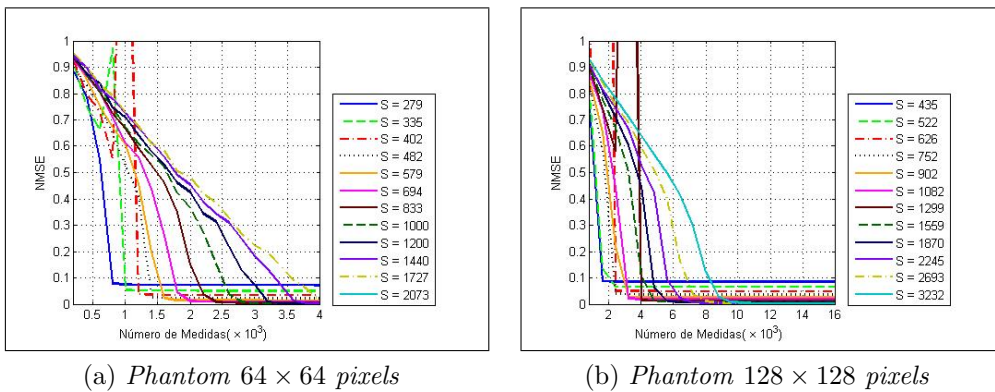


Figura 5.14: Resultado da avaliação de 12 níveis de aproximação para a *Phantom* variando duas resoluções e 20 medidas. $NMSE \times M$.

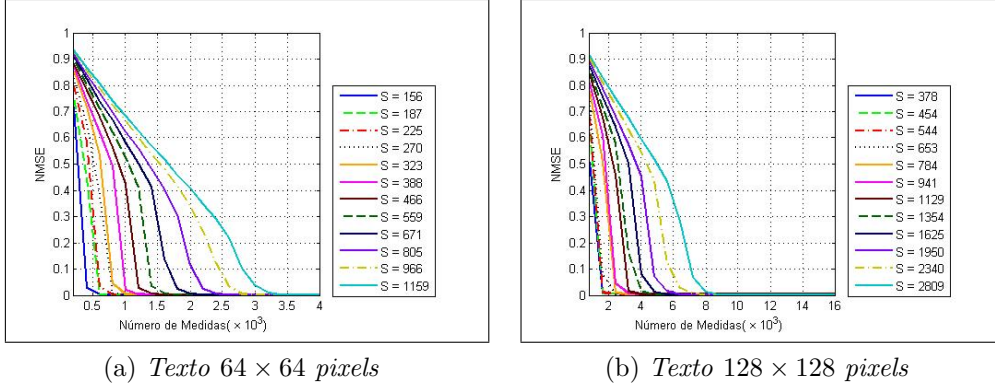


Figura 5.15: Resultado da avaliação de 12 níveis de aproximação para a *Texto* variando duas resoluções e 20 medidas. $NMSE \times M$.

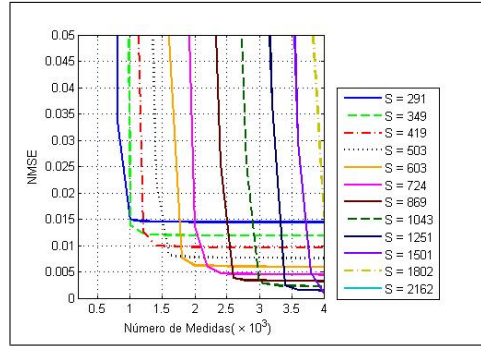


Figura 5.16: Zoom aplicado sobre o gráfico $NMSE \times M$ para valores pequenos de $NMSE$ na imagem *Lena* 64×64 pixels. O mesmo comportamento acontece nas demais imagens e resoluções, alterando apenas os valores do $NMSE$.

Os resultados de M/S obtidos nestes experimentos variam entre 3,00 e 3,75 para valores pequenos de $NMSE$ que representam os joelhos das curvas. Imagens mais esparsas como *Lena*, *Camerman* e *Phantom* apresentam menores $NMSE$ para valores de $M/S = 3,00$. Valores intermediários diminuem o tempo de reconstrução, porém, aumenta $NMSE$. Por outro lado, a imagem nada esparsa *Texto* apresenta valores mais baixo de $NMSE$ para $M/S = 3,75$. É possível observar que a partir de valores pequenos de M o algoritmo de reconstrução opera com eficiência razoável, tanto para reso-

lução 64×64 *pixels* quanto para 128×128 *pixels*. Pode-se verificar ainda que M depende necessariamente de S e é sabido que S representa a esparsidade da imagem aproximada pelo modelo QuadTree. Assim, quanto melhor a representação da imagem utilizando o modelo QuadTree, menos medidas são necessárias para fazer a reconstrução e menor são os valores de $NMSE$. Sem perda de generalidade, essas considerações podem ser estendidas para imagens com resoluções maiores que 128×128 *pixels*. O resumo dos resultados mais importantes observados no Experimento II são apresentados na tabela 5.4.

Tabela 5.4: Resultados observados ao avaliar o efeito de diferentes razões M/S na eficiência de CoSaMP QuadTree.

Características avaliadas	Resultados observados
Limiar de operação de CS	$3,00 \leq M/S \leq 3,75$
Para imagens mais compressíveis	M/S próximos de 3,00
Para imagens menos compressíveis	M/S próximos de 3,75
Eficiência	Depende de S e não de N

Portanto, para os experimentos realizados na seção 5.6 deste capítulo, é escolhida a razão entre o número de medidas M e o nível de aproximação à esparsidade S como definido anteriormente: *Lena*, *Camerman* e *Phantom* com $M/S = 3,00$ e *Text* com $M/S = 3,75$. Este resultado confirma o corolário 2, mesmo que a matriz de aquisição não seja a matriz $M \times N$ subgaussiana independente e identicamente distribuída, mas sim a matriz parcial de *Fourier* utilizada neste trabalho.

5.6 Experimento III

Os dois experimentos apresentados nas seções 5.4 e 5.5 deste capítulo proporcionaram um amplo conhecimento sobre o impacto dos ruídos gerados por passos de quantização e por aproximação à esparsidade na eficiência do algoritmo de reconstrução CoSaMP baseado em modelo QuadTree. Nesta seção são apresentados os resultados originados da comparação entre três cenários baseados nos algoritmos CoSaMP QuadTree, CoSaMP e L1-Magic minimizando a norma TV. Para facilitar o entendimento, os três cenários são denominados de CoSaMP QuadTree, CoSaMP e TV, respectivamente.

Para todos os cenários são avaliadas as imagens *Lena*, *Cameraman*, *Phantom* e *Texto* com resoluções 128×128 pixels. Para maior completude dos testes, 500, 1000, 1500, 2000, 3000, 4000, 6000, 8000, 12000, 16000 medidas são adquiridas, quantizadas com passo de quantização linear igual a 1 e reconstruídas utilizando cada um dos três algoritmos. Os resultados são apresentados em gráficos e a *PSNR* é a métrica utilizada para avaliação e comparação global das imagens.

No cenário CoSaMP QuadTree é utilizado o algoritmo CoSaMP baseado em modelo QuadTree com aproximação à esparsidade obtida pelo algoritmo CSSA, que consiste na aproximação à esparsidade baseada na estrutura hierárquica das imagens naturais. Além disso, é utilizado a razão $M/S = 3,75$ para a imagem *Texto* e $M/S = 3,00$ para as outras três imagens – *Lena*, *Cameraman* e *Phantom*. A matriz de medidas utilizada é a matriz parcial de *Fourier* e os critérios de paradas são ao atingir 100 iterações ou alcançar $\|\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}\|_{l_2} < 10^{-2}$.

No cenário CoSaMP é implementado o algoritmo de reconstrução CoSaMP tradicional, cuja etapa de aproximação consiste na simples ordenação decrescente dos S maiores coeficientes. Neste cenário, a matriz de medi-

das é a matriz parcial de *Fourier* e o nível de esparsidade é definido como $S = \frac{M}{2 \log_{10} N}$, conforme sugestão de [40]. Os critérios de paradas são os mesmos para CoSaMP QuadTree.

O cenário TV consiste do estado da arte em CS convencional para reconstrução de imagens naturais. Este cenário utiliza um algoritmo de reconstrução pela otimização convexa minimizando a norma TV. A matriz de medidas utilizada é a matriz *Noiselet* e a reconstrução é realizada resolvendo o seguinte problema de otimização convexa

$$\hat{x} = \min_x \|x\|_{TV} \text{ sujeito a } \|y - \Phi_{\Omega}x\|_{l_2} \leq 10^{-3} \quad (5.4)$$

Resumindo os três cenários avaliados na tabela 5.5 e nomeando CoSaMP QuadTree por CQT, tem-se:

Tabela 5.5: Configuração dos três cenários utilizados na avaliação do Experimento III: CoSaMP QuadTree, CoSaMP e TV.

Cenários avaliados	Configurações dos Cenários
CoSaMP QuadTree	Aquisição pela matriz parcial de <i>Fourier</i> $M/S = 3,75$ para <i>Texto</i> e $M/S = 3,00$, outras Critério de parada: 100 ou $\ \hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}\ _{l_2} < 10^{-2}$
CoSaMP	Aquisição pela Matriz Parcial de <i>Fourier</i> Aproximação à esparsidade $S = \frac{M}{2 \log_{10} N}$ Critério de parada 100 ou $\ \hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}\ _{l_2} < 10^{-2}$
TV	Aquisição pela Matriz <i>Noiselet</i> Restrição: $\ y - \Phi_{\Omega}x\ _{l_2} \leq 10^{-3}$

As figuras 5.17 e 5.18 mostram os resultados obtidos para os cenários CoSaMP QuadTree, CoSaMP e TV. É possível observar que o cenário CoSaMP QuadTree é melhor do que o cenário baseado no algoritmo CoSaMP tradicional para todos os valores de medidas e todas as imagens. Este resul-

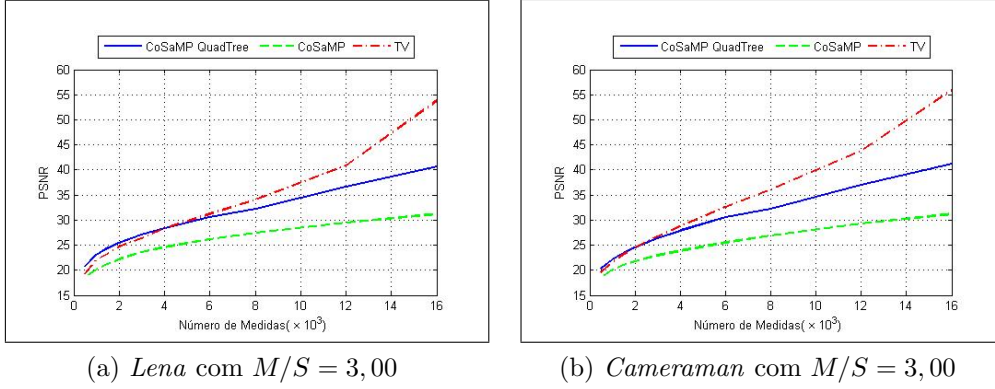


Figura 5.17: Resultado da avaliação de 3 cenários na reconstrução da *Lena* e *Cameraman* com resolução 128×128 pixels. $PSNR \times M$.

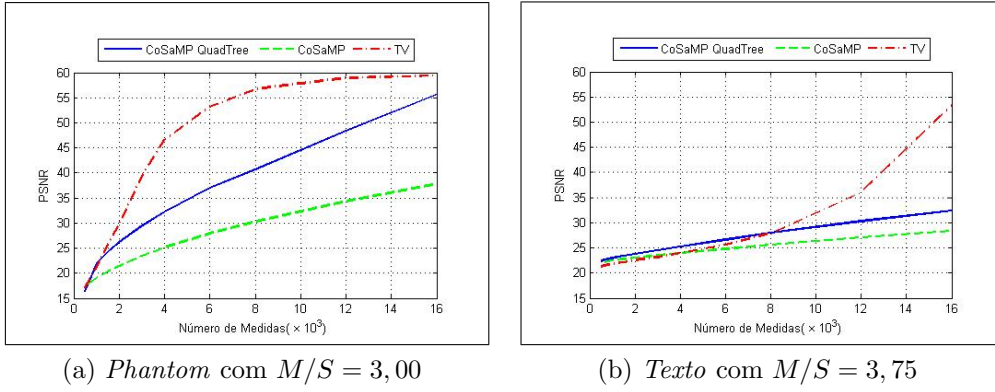


Figura 5.18: Resultado da avaliação de 3 cenários na reconstrução da *Texto* e *Phantom* com resolução 128×128 pixels. $PSNR \times M$.

tado é muito importante pois exibe uma melhora significativa ao substituir a aproximação baseada em modelo QuadTree no algoritmo CoSaMP convencional. Além disso, observa-se ainda que a diferença no desempenho entre os cenários CoSaMP QuadTree e CoSaMP aumenta à medida que aumenta a esparsidade da imagem. Este comentário pode ser confirmado verificando as $PSNR$'s apresentadas nas figuras na seguinte ordem de esparsidade, do menos esperso para o mais esperso: 5.18b, 5.17a, 5.17b e 5.18a. Embora o cenário TV possa ser comparado com os outros dois cenários, o algoritmo

TV não pode, visto que a matriz de medidas é diferente. O cenário TV é implementado neste trabalho pois trata do estado da arte em CS convencional para imagens naturais. Observando seu desempenho, verifica-se que TV é melhor para imagens mais esparsas e a partir de um certo número de medidas.

Avaliando apenas as figuras 5.17a e 5.17b, pode-se verificar que para imagens com níveis de esparsidade próximo, o desempenho de CoSaMP QuadTree é semelhante. Colocando de modo mais explícito: a eficiência de CS baseado em modelo QuadTree não depende da distribuição dos coeficientes. Os resultados obtidos na figura 5.17a para a imagem *Lena* mostram que CoSaMP QuadTree é melhor ou igual a TV para valores de M menores do que 4000 com $PSNR$ próximos de 28 dB . Já os resultados obtidos na figura 5.17b para a imagem *Cameraman* mostram que o CoSaMP QuadTree é melhor ou igual a TV para valores de M menores do que 2000 com $PSNR$ próximos de 22 dB . Pode ser observado na seção 5.2 deste capítulo que a imagem *Cameraman* possui esparsidade um pouco menor e espalhamento um pouco maior na direção das diagonais do que a imagem *Lena*. Portanto, o melhor desempenho do CoSaMP QuadTree para a imagem *Lena* em relação à *Cameraman* pode ser justificado pelo fato da imagem *Lena* possuir maior esparsidade do que a imagem *Cameraman*.

A mesma avaliação é realizada para as figuras 5.18b e 5.18a, onde pode ser observado que imagens com níveis de esparsidade muito distintos geram desempenho muito diferentes para o cenário CoSaMP QuadTree. Os resultados obtidos para a imagem *Texto*, mostrados na figura 5.18b, mostram que CoSaMP QuadTree é melhor ou igual a TV para valores de M menores do que 8000 com $PSNR$ próximos de 28 dB . Já os resultados obtidos para a imagem *Phantom*, ilustrados na figura 5.18a, mostram que CoSaMP QuadTree é melhor ou igual a TV para valores de M menores do que 1000, mas

com $PSNR$ muito baixo e próximo de 21 dB . Entretanto, o CoSaMP QuadTree para a imagem *Phantom* possui melhor desempenho entre as quatro imagens. Para efeito de comparação com a imagem *Texto*, com as mesmas 8000 medidas é possível alcançar $PSNR$ igual a 38 dB . O melhor desempenho do CoSaMP QuadTree para a imagem *Phantom* em relação à *Texto* e às outras duas imagens pode ser justificado pelo fato da imagem *Phantom* ser muito esparsa.

Outro comportamento que pode ser observado na figura 5.18 é o excelente desempenho do cenário TV para a imagem *Phantom*. Como o algoritmo baseado na minimização da norma TV procura minimizar a norma l_1 do gradiente da imagem, que tende a suavizar as transições entre os níveis de cinza, isto é bom para a imagem *Phantom* que possui níveis de cinza constante por partes e ruim para a imagem *Texto* que possui variações abruptas de níveis de cinza. Portanto, a suavidade favorece o cenário TV. Além disso, o melhor desempenho ocorre pelo fato da matriz de medida *Noiselet* utilizada ser bastante incoerente com a base *wavelet* que leva a imagem à esparsidade.

Resultados similares são verificados quando os cenários CoSaMP QuadTree, CoSaMP e TV são avaliados nas imagens *Phantom* e *Texto*, porém com resolução 256×256 *pixels*. Estas duas imagens foram escolhidas devido possuírem características completamente diferentes. A figura 5.19 apresenta o comportamento de cada cenário evidenciando os valores a partir dos quais CoSaMP QuadTree possui melhor desempenho do que o cenário CoSaMP TV. O resumo dos resultados mais importantes observados no Experimento III são apresentados na tabela 5.6.

Portanto, mesmo levando em consideração os erros de aproximação à esparsidade e os erros de quantização, é possível verificar que à medida que diminui o número de medidas M para os três cenários, o cenário baseado no algoritmo modificado CoSaMP QuadTree mostra-se mais eficiente que o

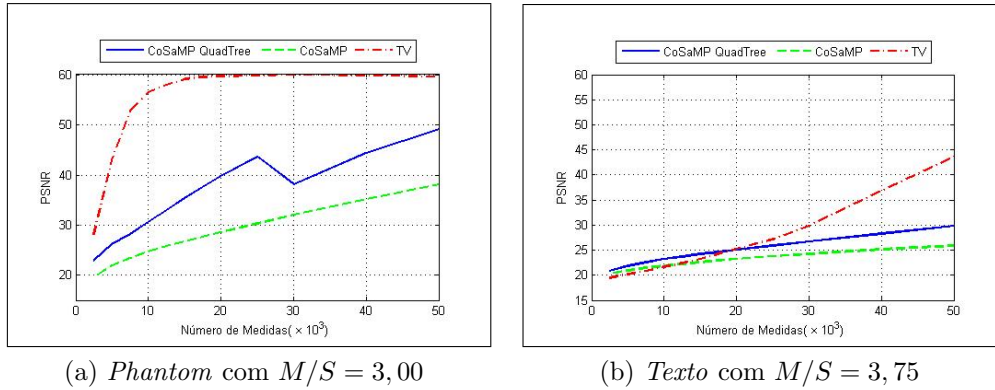


Figura 5.19: Resultado da avaliação de 3 cenários na reconstrução da *Phantom* e *Texto* com resolução 256×256 pixels. $PSNR \times M$.

Tabela 5.6: Resultados observados ao avaliar o CoSaMP QuadTree em relação ao CoSaMP e ao TV para as quatro imagens escolhidas.

Características avaliadas	Resultados observados
Esparsidade Próxima	Eficiência próxima
Esparsidade muito diferente	Eficiência muito diferente
Distribuição de coeficientes	Eficiência Invariante
Eficiência CQT / CoSaMP	CQT melhor que CoSaMP para todo M
Eficiência CQT / TV	CQT melhor que TV para M pequeno
Eficiência geral	Depende de S e do modelo utilizado

CoSaMP tradicional. Uma maior ou menor eficiência depende do nível de aproximação à esparsidade fornecido ao algoritmo, do modelo utilizado para aproximar, do passo de quantização utilizado e da incoerência entre a matriz de medida e a base que leva à esparsidade. Na seção seguinte são apresentados alguns resultados referentes à reconstrução de imagens específicas utilizando os cenários CoSaMP QuadTree, CoSaMP e TV.

5.7 Exemplos Específicos

Nos exemplos específicos, as imagens e os valores de medidas M são tendenciosamente escolhidos, ora para permitir comparação com os trabalhos de [3] e [47], ora para verificar a eficiência de CS baseado em modelo QuadTree utilizando poucas medidas M . Não ocorre perda de generalidade na escolha tendenciosa desses valores, visto que os experimentos I, II e III apresentam o comportamento de CS baseado em modelo QuadTree para diferentes passos de quantização, esparsidade e medidas em quatro imagens distintas com duas resoluções diferentes.

Os mesmos parâmetros utilizados no experimento III são implementados nesta seção, tais como o passo de quantização, a matriz de medida, o número de iterações e a razão M/S para cada tipo de imagem. Além da análise visual das imagens, a métrica utilizada para verificar a eficiência dos algoritmos é a $PSNR$. Por outro lado, para os resultados apresentados através das tabelas são utilizadas as seguintes métricas: $PSNR$, $NMSE$, BR e o tempo de reconstrução T . Comentários sobre a eficiência dos algoritmos são exibidos para cada imagem reconstruída.

Para facilitar o entendimento, os quatro cenários avaliados são resumidos e apresentados na tabela 5.7.

Inicialmente são apresentados os resultados obtidos com a reconstrução da imagem *Lena* 256×256 pixels com apenas 10000 medidas. Na figura 5.20 pode-se observar nos testes de reconstrução as quatro imagens com zoom utilizando $M = 10000$ medidas: a *Lena* original com resolução 256×256 pixels e as imagens *Lena* reconstruídas utilizando CoSaMP QuadTree, CoSaMP e minimização da norma TV, respectivamente.

Comparando visualmente as imagens reconstruídas e apresentadas nas figuras 5.20b, 5.20c e 5.20d, pode-se verificar que o cenário baseado no algo-

Tabela 5.7: Configuração dos quatro cenários para avaliação da *Lena* 256×256 pixels com apenas 10000 medidas: CoSaMP QuadTree, CoSaMP, TV e DWT-L1-N.

Cenários avaliados	Configurações dos Cenários
CoSaMP QuadTree	Aquisição pela matriz parcial de <i>Fourier</i> $Q = 1$, $M/S = 3,00$ e modelo QuadTree Critério 100 ou $\ \hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}\ _{l_2} < 10^{-2}$
CoSaMP	Aquisição pela matriz parcial de <i>Fourier</i> $Q = 1$, $S = \frac{M}{2 \log_{10} N}$ Critério 100 ou $\ \hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}\ _{l_2} < 10^{-2}$
TV	Aquisição pela matriz <i>Noiselet</i> $Q = 1$ e $\ y - \Phi_{\Omega} x\ _{l_2} \leq 10^{-3}$
DWT-L1-N	Aquisição pela matriz <i>Noiselet</i> Base que leva à esparsidade <i>Wavelet</i> Sem Q e $\ y - \Phi_{\Omega} x\ _{l_2} \leq 10^{-3}$

ritmo de reconstrução CoSaMP QuadTree possui desempenho bem melhor do que o cenário CoSaMP e um pouco melhor do que o cenário TV.

A tabela 5.8 apresenta as métricas *PSNR*, *NMSE*, *BR* e tempo de reconstrução T calculadas após a avaliação da etapa de reconstrução utilizando os cenários CoSaMP QuadTree, CoSaMP, TV e DWT-L1-N adquirindo apenas 1000 medidas. Pode-se verificar nesta tabela o alto custo computacional do cenário CoSaMP QuadTree para o passo de quantização 1. Embora não tenha sido apresentados nesta dissertação, outros testes mostraram que a utilização de razões $M/S \geq 3,50$ diminuem drasticamente o valor de T .

Para efeito de comparação, é necessário relatar o experimento apresentado por Schulz, [47]. Neste trabalho, Schulz fez vários testes com a imagem *Lena* 256×256 pixels. O cenário baseado em CS convencional que obteve maior eficiência foi a DWT-L1-N, obtendo $PSNR \approx 22.5$ dB ao se tomar 10000 medidas corrompidas por ruído de aproximação à esparsidade, mas não por

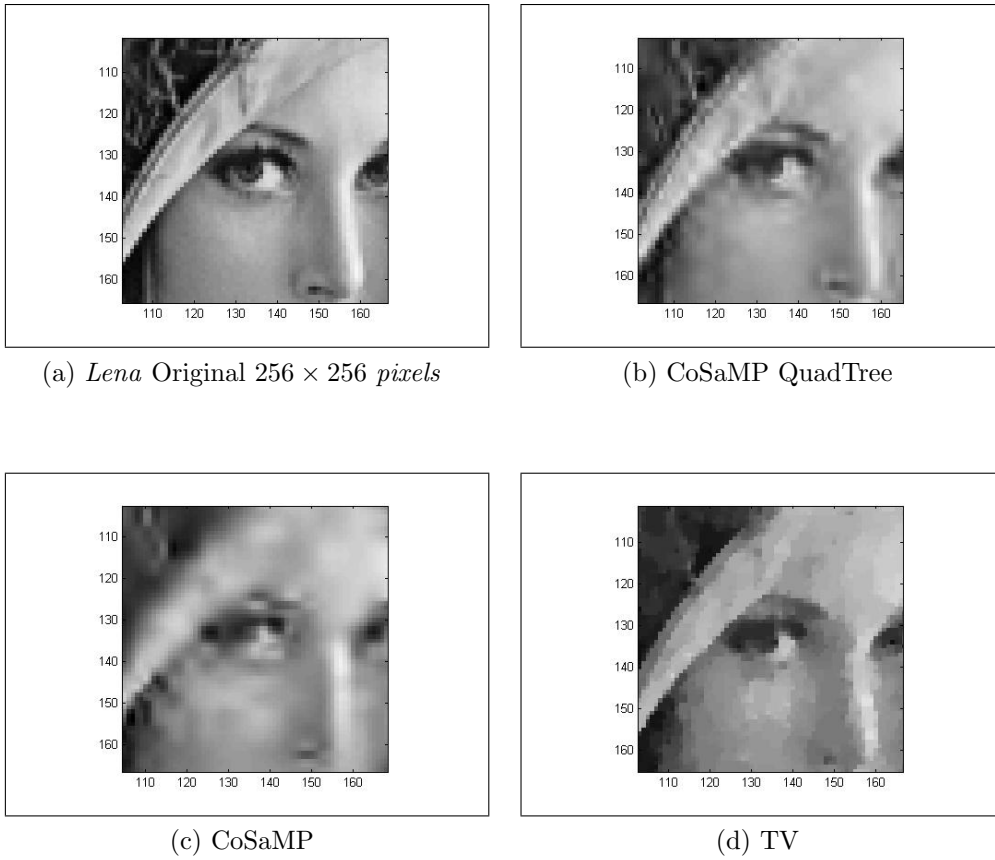


Figura 5.20: Da esquerda para direita e de cima para baixo, quatro imagens com zoom: a *Lena* original e três imagens reconstruídas a partir de $M = 10000$ medidas utilizando, respectivamente, CoSaMP QuadTree, CoSaMP e TV.

ruído de quantização. Segundo [47], DWT-11-N consiste em utilizar a matriz de medidas Noiselet aleatória seguida pela minimização da norma l_1 da transformada *Wavelet* da imagem. Pode-se observar que a $PSNR = 29.55$ dB obtida neste trabalho é significativamente melhor do que o melhor valor encontrado por Schulz para a teoria de CS convencional. Neste contexto, o resultado apresentado pelo cenário CoSaMP baseado em modelo QuadTree é significativamente melhor do que o resultado obtido por Schulz para valores pequenos de M .

Tabela 5.8: Resultados obtidos a partir da reconstrução da imagem *Lena* 256×256 pixels com 10000 medidas utilizando CoSaMP QuadTree, CoSaMP, TV e DWT-L1-N. *PSNR* e *NMSE* são métricas de eficiência na reconstrução, *BR* é a taxa de bits e *T* é o tempo da reconstrução.

	<i>PSNR</i> (dB)	<i>NMSE</i>	<i>BR</i> (bpp)	<i>T</i> (s)
CoSaMP QuadTree	29,55	0,0041	1,30	63400
CoSaMP	25,64	0,0101	1,30	3
TV	28,72	0,0050	1,30	644
DWT-L1-N, [47]	22,5	...	...	...

O objetivo do próximo exemplo é avaliar o desempenho do cenário CoSaMP QuadTree em relação ao resultado apresentado por Baraniuk e outros, [3]. A comparação é realizada entre quatro situações, todas avaliando CoSaMP QuadTree em diferentes cenários. Para facilitar o entendimento, os quatro cenários avaliados nesta seção são resumidos e apresentados na tabela 5.9. Baraniuk e outros, [3], apresentaram o resultado de um experimento de aquisição e reconstrução com a imagem *Pimentas* com resolução 128×128 pixels utilizando matriz de aquisição aleatória gaussiana tomando 5000 medidas. O algoritmo de reconstrução foi o CoSaMP baseado em modelo QuadTree. A Raiz do Erro Médio Quadrático (RMSE) obtido por eles foi de 11.1, que convertida para *PSNR* pela fórmula $PSNR = 20 \log_{10} \frac{L_{max}}{RMSE}$ é 27.22 dB.

Como pode ser observado nas duas primeiras linhas da tabela 5.10, a *PSNR* obtida em CQTFerQ1C é um pouco maior do que a obtida em CQT-BarC porém, com dois diferenciais. O primeiro, é que em CQTFerQ1C é levado em consideração o ruído gerado por quantização, que neste caso é $BR = 2.61bpp$. O segundo, é que a matriz parcial de *Fourier* utilizada em CQTFerQ1C tem grande vantagem em termos de armazenamento em relação à matriz aleatória gaussiana, principalmente quando a resolução é maior.

Tabela 5.9: Configurações de quatro cenários de reconstrução da imagem *Pimentas* 128×128 pixels com $M = 5000$ e aproximação ao modelo QuadTree em $S = 1667$.

Cenários avaliados	Configurações dos Cenários
CQTBarC, em [3]	Sem passo de Quantização Q Matriz de medida aleatória Gaussiana Imagem $S = 1667$ –QuadTree–compressível
CQTFerQ1C	Passo de quantização $Q = 1$ Matriz de medidas parciais de <i>Fourier</i> Imagem $S = 1667$ –QuadTree–compressível
CQTFerQ1E	Passo de quantização $Q = 1$ Matriz de medidas parciais de <i>Fourier</i> Imagem forçada esparsidade antes da aquisição Imagem $S = 1667$ –QuadTree–esparsa
CQTFerQ8E	Passos de quantização $Q = 8$ Matriz de medidas parciais de <i>Fourier</i> Imagem forçada esparsidade antes da aquisição Imagem $S = 1667$ –QuadTree–esparsa

Por outro lado, CQTFerQ1E apresenta eficiência próxima do perfeito. Neste caso, a esparsidade é forçada em apenas 1667 componentes, como definido modelo-esparsa na seção 4.1.1. Além disso, o fato da imagem forçada ser extremamente esparsa permite exibir o resultado obtido na seção 5.4, que revela que à medida que se aumenta o passo de quantização de 1 para 8, a *PSNR* diminui, desde que o ruído de esparsidade não seja maior que o ruído de quantização.

Por último, para verificar a eficiência de CS em problemas reais e a importância da alta incoerência entre a matriz de aquisição e a matriz que leva à esparsidade, são apresentados na figura 5.21 os resultados com a imagem *Phantom* 128×128 pixels.

Tabela 5.10: Resultados para a imagem *Pimentas* 128×128 pixels com 5000 medidas avaliada em quatro cenários.

	$PSNR$ (dB)	$NMSE$	BR (bpp)	T (s)
CQTBarC, em [3]	27,22	...	...	...
CQTFerQ1C	28,67	0,0051	2,61	575
CQTFerQ1E	44,08	0,0051	2,61	824
CQTFerQ8E	33,34	0,0067	1,68	4771

A imagem *Phantom* é uma imagem de ressonância magnética adquirida por medidas em um espaço como se fosse uma transformada discreta de *Fourier*. Devido à necessidade de não expor o paciente ao equipamento de ressonância magnética por muito tempo são amostrados poucos coeficientes ao longo de linhas radiais.

São avaliadas duas situações: o primeiro teste consiste em simular uma aquisição com apenas 4000 medidas na imagem *Phantom* utilizando a matriz parcial de *Fourier* e reconstruí-la com o algoritmos CoSaMP QuadTree e o segundo consiste em tomar também 4000 medidas utilizando a matriz Noiselet e reconstruí-la com o algoritmo baseado na minimização da norma TV. Principal atenção deve ser considerada para a alta incoerência que existe entre a matriz Noiselet e o conjunto de dados da imagem *Phantom*, que se comporta como uma base de *fourier*, [16].

É possível observar que a reconstrução é exata para o algoritmo baseado na minimização da norma TV utilizando matriz de medidas Noiselet. Isto se deve ao fato de existir alta incoerência entre a matriz Noiselet e as bases de *fourier*. Infelizmente, neste trabalho não foi abordado a aquisição dos dados utilizando a matriz Noiselet para o algoritmo CoSaMP e CoSaMP QuadTree devido ao alto custo de armazenamento quando utilizado em conjunto com o algoritmo guloso CoSaMP. Entretanto, o resultado apresentado acima

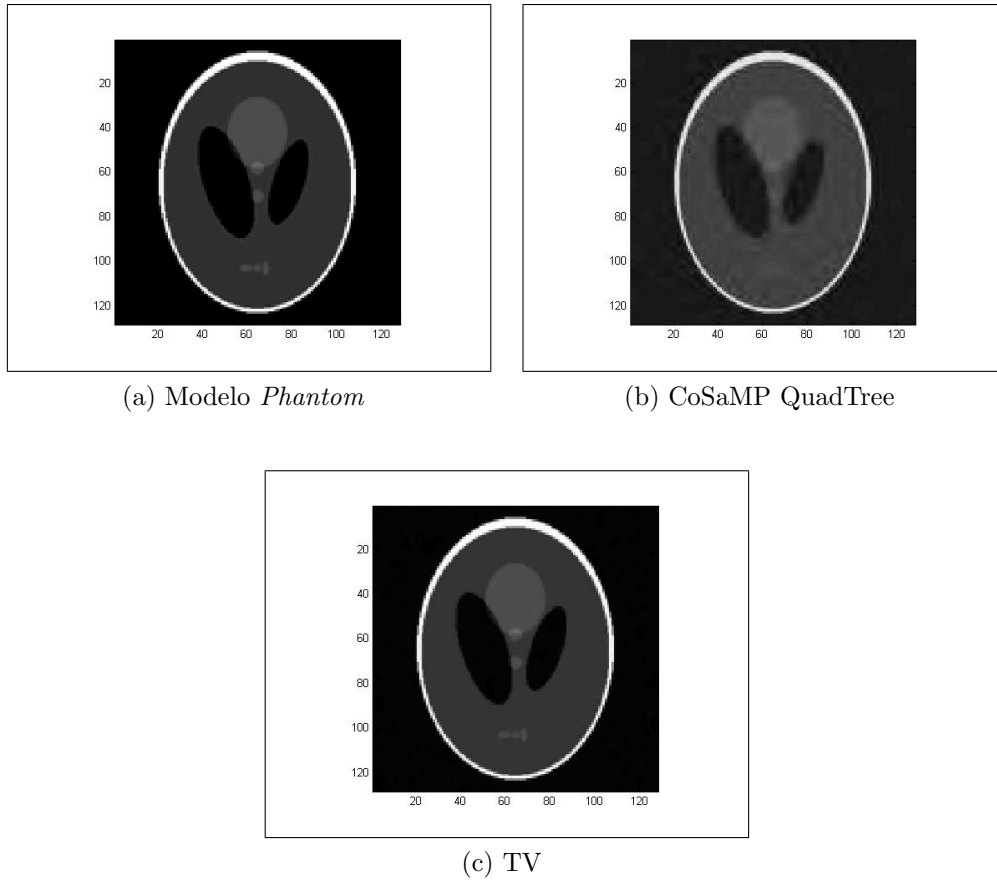


Figura 5.21: *Da esquerda para direita e de cima para baixo, três imagens: a imagem sintética Phantom utilizada como modelo em Ressonância Magnética e duas imagens reconstruídas a partir de apenas $M = 4000$ medidas utilizando CoSaMP QuadTree e TV, respectivamente.*

mostra o potencial da teoria CS e sugere novas abordagens, tais como: o planejamento de uma matriz de medida mais incoerente com a base que leva à esparsidade para CoSaMP baseado em modelo e a modificação do algoritmo convexo com minimização da norma TV para integrar modelos mais realísticos.

5.8 Considerações Finais deste Capítulo

Neste capítulo foram apresentados os resultados experimentais das etapas de aquisição e reconstrução utilizando os algoritmos CoSaMP baseado em modelo QuadTree, CoSaMP tradicional e otimização convexa minimizando a norma TV. Em todos os experimentos foram levado em consideração os ruídos gerados pelos erros de aproximação à esparsidade e de quantização.

Vários experimentos utilizando as imagens *Lena*, *Cameraman*, *Phantom* e *Text* em diferentes resoluções foram realizados. O experimento I apresentou os resultados de várias combinações de passos de quantização com números de medidas. No experimento II foram discutidos os resultados referentes à variação de níveis de aproximação à esparsidade com números de medidas. No experimento III foram utilizados os melhores parâmetros obtidos nos experimentos I e II para avaliar três algoritmos de reconstrução nas quatro imagens em diferentes números de medidas. Finalmente, com o propósito de comparar os resultados obtidos neste trabalho com outros, a seção 5.7 apresentou a reconstrução de algumas imagens específicas e mostrou os resultados.

Analisando os resultados obtidos no Experimento I, pode-se concluir que os passos de quantização influenciam significativamente na eficiência do algoritmo baseado em modelo QuadTree, desde que o ruído gerado pelo erro de esparsidade não seja superior ao ruído gerado pela quantização.

Levando em conta o ruído gerado pelo erro de aproximação à esparsidade apresentado no Experimento II, pode-se verificar que existe um limiar a partir do qual o CS consegue operar para um determinado passo de quantização fixo. Esse limiar é diferente para cada nível de esparsidade, mas existe uma lei de formação entre o nível de esparsidade e o número de medidas: $3,00 \leq M/S \leq 3,75$. Os valores de M/S variam do menor para o maior, à medida que as imagens variam das mais compressíveis para as menos compressíveis.

Além disso, é possível observar que a eficiência do algoritmo não depende do tamanho da imagem empilhada N , nem da distribuição dos coeficientes mais significativos, mas sim do nível de aproximação à esparsidade S .

Inferindo sobre os resultados obtidos no Experimento III para os cenários CoSaMP QuadTree, CoSaMP e TV, é possível verificar que o CoSaMP QuadTree é sempre melhor do que o CoSaMP e melhor do que o TV para determinado limiar M . Além disso, possui melhor desempenho para imagens mais compressíveis, não depende da resolução da imagem e é invariante à distribuição dos coeficientes mais significativos. As mesmas considerações são verificadas para imagens com resoluções maiores.

Por último, a seção dos exemplos específicos mostrou que os resultados obtidos do algoritmo CoSaMP QuadTree são significativamente melhores do que os resultados utilizando CS convencional, [47] e CoSaMP para valor de medida pequeno (Exemplo 1). O CoSaMP QuadTree apresentou resultados melhores que CoSaMP QuadTree implementado por Baraniuk e outros, mesmo utilizando a matriz parcial de *Fourier* na aquisição das medidas na imagem *Pimentas* (Exemplo 2). O algoritmo que utiliza otimização convexa por minimização da norma TV possui alta eficiência na reconstrução de imagens, principalmente quando essas são bem aproximadas à esparsidade (Exemplo 3).

No próximo capítulo são discutidas as conclusões obtidas dos resultados experimentais, as contribuições obtidas com a realização deste trabalho, bem como novos trabalhos que poderão ser desenvolvidos futuramente.

Capítulo 6

Conclusão

Algumas aplicações com sinais ou imagens exigem alta redução de dimensionalidade para que possam ser viáveis. Neste contexto, CS aparece como uma alternativa ao teorema de *Shannon–Whittaker*. Nesta nova teoria, ao invés de amostrar todos os elementos da cena, a etapa de aquisição é realizada pelo produto interno de $M \ll N$ funções de medidas aleatórias com o sinal x e a reconstrução é feita utilizando técnicas de otimização convexa ou algoritmo guloso.

CS convencional garante a reconstrução com robustez para valores de $M = \mathcal{O}\left(S \log \frac{N}{S}\right)$ medidas, desde que a matriz que leva à esparsidade e a matriz de medida tenham Propriedade de Isometria Restrita (RIP). Trata-se de uma técnica assimétrica: a aquisição é muito simples, mas a otimização é de alto custo computacional. Desse modo, o custo computacional da etapa de reconstrução caracteriza a principal deficiência de CS. Com o propósito de melhorar a eficiência de CS e diminuir o custo computacional, foi apresentado no capítulo 4 deste trabalho a teoria CS baseado em modelo. Este CS garante a reconstrução com robustez para valores de $M = \mathcal{O}(S)$ medidas, desde que

tenham Propriedade de Amplificação Restrita (RAmP). Esta teoria aproveita a existência de modelos mais realísticos para imagens, que incluem a dependência entre valores e a localização dos coeficientes da imagem. Entretanto, os experimentos realizados até esta data utilizando a nova teoria não levam em conta as etapas de quantização e aproximação à esparsidade em imagens.

Neste trabalho foram apresentados resultados que demonstram como ruídos oriundos da etapa de quantização e da aproximação à esparsidade influenciam na eficiência do algoritmo CoSaMP baseado em modelo (Experimentos I e II). Além disso, baseado nos melhores valores para a razão entre o número de medidas e o nível de esparsidade, testes com diferentes algoritmos foram implementados utilizando quatro imagens com resolução 128×128 *pixels* e duas com 256×256 *pixels* (Experimento III). Por último, alguns exemplos específicos foram realizados com o intuito de fornecer dados para serem comparados com outros trabalhos.

Analisando os resultados obtidos no Experimento I, pode-se concluir que os passos de quantização influenciam significativamente na eficiência do algoritmo baseado em modelo QuadTree, desde que o ruído gerado pelo erro de esparsidade não seja superior ao ruído gerado pela quantização.

Levando em conta o ruído gerado pelo erro de aproximação à esparsidade apresentado no Experimento II, pode-se verificar que existe um limiar a partir do qual o CS consegue operar para um determinado passo de quantização fixo. Esse limiar é diferente para cada nível de esparsidade, mas existe uma lei de formação entre o nível de esparsidade e o número de medidas: $3,00 \leq M/S \leq 3,75$. Os valores de M/S variam do menor para o maior, à medida que as imagens variam das mais compressíveis para as menos compressíveis. Além disso, é possível observar que a eficiência do algoritmo não depende do tamanho da imagem empilhada N , nem da distribuição dos coeficientes mais significativos, mas sim do nível de aproximação à esparsidade S .

Inferindo sobre os resultados obtidos no Experimento III para os cenários CoSaMP QuadTree, CoSaMP e TV, é possível verificar que o CoSaMP QuadTree é sempre melhor do que o CoSaMP e melhor do que o TV para determinado limiar M . Além disso, possui melhor desempenho para imagens mais compressíveis, não depende da resolução da imagem e é invariante à distribuição dos coeficientes mais significativos. As mesmas considerações são verificadas para imagens com resoluções maiores.

Por último, a seção dos exemplos específicos mostrou que os resultados obtidos do algoritmo CoSaMP QuadTree são significativamente melhores do que os resultados utilizando CS convencional, [47] e CoSaMP para valor de medida pequeno (Exemplo 1). O CoSaMP QuadTree apresentou resultados melhores que CoSaMP QuadTree implementado por Baraniuk e outros, mesmo utilizando a matriz parcial de *Fourier* na aquisição das medidas na imagem Pimentas (Exemplo 2). O algoritmo que utiliza otimização convexa por minimização da norma TV possui alta eficiência na reconstrução de imagens, principalmente quando essas são bem aproximadas à esparsidade (Exemplo 3).

Baseado na teoria apresentada nesta dissertação e nos resultados obtidos por meio dos diversos experimentos realizados, pode-se apresentar as seguintes vantagens da teoria de CS: é uma teoria que ainda está em desenvolvimento e tem muito o que avançar; viabiliza aplicações que possuem alto grau de dificuldade ou alto custo de aquisição de informação e possui comportamento robusto e estável a ruído. Como desvantagens, pode-se citar: o fato de não ser possível desenvolver aplicações em tempo real devido ao caráter assimétrico das etapas de aquisição por sensoriamento e reconstrução e ao fato de serem necessários dispositivos especiais para aquisição.

6.1 Contribuições do Trabalho

A principal contribuição deste trabalho foi a avaliação da eficiência do algoritmo CoSaMP baseado em modelo QuadTree na presença de ruído nas etapas de quantização e de aproximação à esparsidade. Outras contribuições obtidas ao longo do desenvolvimento desta dissertação são:

- a verificação da eficiência do algoritmo CoSaMP baseado em modelo QuadTree quando as medidas são adquiridas utilizando a matriz parcial de *Fourier*;
- a quantidade e a diversidade de testes realizados para vários valores de medidas em imagens com características diferentes em relação à esparsidade e distribuição dos coeficientes mais significativos; e
- a comparação do CoSaMP baseado em modelo QuadTree com o estado da arte em algoritmo de otimização convexa minimizando a norma TV para CS convencional.

6.2 Trabalhos Futuros

A complexidade do assunto associada ao curto espaço de tempo para implementação de testes com alto custo computacional, possibilita que diversas outras abordagens possam ser desenvolvidas:

- a utilização de uma abordagem para a etapa de codificação. A proposta consiste em gerar um histograma do sinal original, calcular algumas estatísticas e procurar a relação com alguma distribuição de probabilidade. Caso seja uma distribuição gaussiana, por exemplo, é possível implementar codificação com símbolos variáveis;

- implementar a teoria de CS baseado em modelo apresentada no capítulo 4 deste trabalho para modificar o algoritmo de otimização convexa por minimização da norma TV. Levanta-se a hipótese que integrar modelos realísticos na etapa de representação de imagens com o algoritmo de otimização convexa por minimização da norma TV pode melhorar significativamente a eficiência;
- implementar os experimentos I, II e III utilizando matrizes de medidas subgaussianas independentes e identicamente distribuídas, porém, com custo de armazenamento suficientemente baixo; e
- desenvolver algoritmos utilizando programação paralela para diminuir o custo computacional da etapa de reconstrução.

Bibliografia

- [1] BARANIUK, R. G. Compressive sensing. *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 24, no. 4, July 2007.
- [2] BARANIUK, R. G.; CEVHER, V.; DUARTE, M. F. & HEGDE, C. CoSaMP Tree: Model-based compressive sensing toolbox. <http://dsp.rice.edu/software/model-based-compressive-sensing-toolbox>, Outubro 2010.
- [3] BARANIUK, R. G.; CEVHER, V.; DUARTE, M. F. & HEGDE, C. Model-based compressive sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 56, no. 4, April 2010.
- [4] BARANIUK, R. G.; CHOI, H.; NEELAMANI, R.; RIBEIRO, V.; ROMBERG, J.; GUO, H.; FERNANDES, F.; HENDRICKS, B.; GOPINATH, R.; LANG, M.; ODEGARD, J. E. & WEI, D. RWT: Rice wavelet toolbox, version 2.4 open source code. <http://dsp.rice.edu/software/rice-wavelet-toolbox>, Outubro 2010.
- [5] BARANIUK, R. G.; DEVORE, A.; KYRIAZIS, G. & YU, X. M. Near best tree approximation. *Advances in Computational Mathematics*, vol. 16, no. 4, May 2002.

- [6] BLUMENSATH, T. & DAVIES, M. E. Sampling theorems for signals from the union of linear subspaces. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 55, no. 4, April 2009.
- [7] CANDÈS, E. & ROMBERG, J. L1-Magic: Recovery of sparse signals via convex programming. <http://www.acm.caltech.edu/l1magic/>, Outubro 2010.
- [8] CANDÈS, E. J. Compressive sampling. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Madrid, Spain, 2006, vol. 3, European Mathematical Society, p. 1433–1452.
- [9] CANDÈS, E. J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. In: *Compte Rendus de l'Academie des Sciences*, Paris, France, 2008, vol. 346 of *I*, p. 589–592.
- [10] CANDÈS, E. J. & ROMBERG, J. l1-magic: Recovery of sparse signals via convex programming. *Manuscript*, October 2005.
- [11] CANDÈS, E. J. & ROMBERG, J. Sparsity and incoherence in compressive sampling. *Inverse Problems*, vol. 23, no. 3, 2007.
- [12] CANDÈS, E. J.; ROMBERG, J. & TAO, T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 52, no. 2, February 2006.
- [13] CANDÈS, E. J.; ROMBERG, J. & TAO, T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 59, no. 8, August 2006.
- [14] CANDÈS, E. J. & TAO, T. Decoding by linear programming. *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 51, no. 12, December 2005.

- [15] CANDÈS, E. J. & TAO, T. Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies? *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 52, no. 12, December 2006.
- [16] CANDÈS, E. J. & WAKIN, M. B. An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 2, March 2008.
- [17] CEVHER, V.; SANKARANARAYANAN, A.; DUARTE, M.; REDDY, D.; BARANIUK, R. & CHELLAPPA, R. Compressive sensing for background subtraction. In: *European Conf. on Computer Vision (ECCV)*, Marseille, France, October 2008.
- [18] CHAN, W. L.; CHARAN, K.; TAKHAR, D.; KELLY, K. F.; BARANIUK, R. G. & MITTLEMAN, D. M. A single-pixel terahertz imaging system based on compressive sensing. *Applied Physics Letters*, vol. 93, no. 121105, 2008.
- [19] CHAN, W. L.; MORAVEC, M.; BARANIUK, R. & MITTLEMAN, D. Terahertz imaging with compressed sensing and phase retrieval. *Optics Letters*, vol. 33, no. 9, May 2008.
- [20] CHEN, S. S.; DONOHO, D. L. & SAUNDERS, M. A. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 20, no. 1, 1998.
- [21] DAUBECHIES, I. *Ten lectures on wavelets*. Philadelphia, PA : SIAM, 1992.
- [22] DIVEKAR, A. & ERSOY, O. Image fusion by compressive sensing. In: *IEEE Conference on Geoinformatics, Fairfax, Virginia*, August 2009.
- [23] DUARTE, M.; DAVENPORT, M.; TAKHAR, D.; LASKA, J.; SUN, T.; KELLY, K. & BARANIUK, R. Single-pixel imaging via compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 2, March 2008.

- [24] EGBIAZARIAN, K.; FOI, A. & KATKOVNIK, V. Compressed sensing image reconstruction via recursive spatially adaptive filtering. In: *IEEE Conf. on Image Processing (ICIP), San Antonio, Texas*, September 2007.
- [25] GAN, L.; DO, T. & TRAN, T. D. Fast compressive imaging using scrambled block hadamard ensemble. In: *16th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lausanne, Switzerland*, August 2008.
- [26] GONZALEZ, R. C. & WOODS, R. E. *Digital image processing*. California, NY : Prentice Hall, 3th ed., 2007.
- [27] GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. & EDDINS, S. L. *Digital image processing using Matlab*. Natick, MA : Gatesmark Publishing, 2th ed., 2009.
- [28] GRANT, M. & BOYD, S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 1.21. <http://cvxr.com/cvx>, Outubro 2010.
- [29] GUO, W. & YIN, W. Edgects: an edge guided compressive sensing reconstruction. Technical report, CAAM, Rice University, February 2010.
- [30] HE, L. & CARIN, L. Exploiting structure in wavelet-based bayesian compressive sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 9, September 2009.
- [31] HEIDARI, A. & SAEEDKIA, D. A 2d camera design with a single-pixel detector. In: *Int. Conf. on Infrared, Millimeter and Terahertz Waves, Busan, South Korea*, September 2009.
- [32] INDYK, P. & BERINDE, R. Sparse recovery using sparse matrices. Technical report, CSAIL, Massachusetts Institute of Technology, January 2008.

- [33] LU, Y. M. & DO, M. N. Sampling signals from a union of subspaces. *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 2, March 2008.
- [34] MA, J. Single-pixel remote sensing. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 6, no. 2, 2009.
- [35] MA, J. Improved iterative curvelet thresholding for compressed sensing and measurement. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 59, no. 10, May 2010.
- [36] MA, J. & DIMET, F.-X. L. Deblurring from highly incomplete measurements for remote sensing. *IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing*, vol. 47, no. 3, 2009.
- [37] MALEH, R. & GILBERT, A. Multichannel image estimation via simultaneous orthogonal matching pursuit. In: *IEEE Workshop on Statistical Signal Processing (SSP)*, Madison, Wisconsin, August 2007.
- [38] MALLAT, S. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1998.
- [39] NAGESH, P. & LI, B. Compressive imaging of color images. In: *IEEE Intl. Conf. on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Taipei, Taiwan, April 2009.
- [40] NEEDELL, D. & TROPP, J. Cosamp: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 26, no. 3, May 2009.
- [41] NYQUIST, H. Certain topics in telegraph transmission theory. *Transactions of the American Institute of Electrical Enginners*, April 1928.
- [42] OF TECHNOLOGY, C. I. L1 - magic (página da web), December 2010. <http://www.acm.caltech.edu/l1magic/examples.html>.

- [43] PARK, J. & WAKIN, M. A multiscale framework for compressive sensing of video. In: *Picture Coding Symposium (PCS), Chicago, Illinois*, May 2009.
- [44] PEDRINI, H. & SCHWARTZ, W. R. *Análise de imagens digitais: princípios, algoritmos e aplicações*. São Paulo, SP : Thomson Learning, 1^a ed., 2008.
- [45] RUSS, J. C. *The image processing handbook*. Boca Raton, FL : CRC Press, 5th ed., 2006.
- [46] SANKARANARAYANAN, A. C.; TURAGA, P. K.; BARANIUK, R. G. & CHELLAPPA, R. Compressive acquisition of dynamic scenes. In: *European Conference on Computer Vision, Crete, Greece*, September 2010.
- [47] SCHULZ, A.; SILVA, E. A. B. & VELHO, L. *Compressive sensing*. Publicações Matemáticas - 27º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro, RJ : IMPA, 2009.
- [48] SHANNON, C. E. Communications in the presence of noise. In: *Proc. of the IRE*, 1949, vol. 37, p. 10–21.
- [49] STANKOVIC, V.; STANKOVIC, L. & CHENG, S. Compressive video sampling. In: *16th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lausanne, Switzerland*, August 2008.
- [50] UNIVERSITY, R. Compressive sensing resources (página da web), September 2010. <http://dsp.rice.edu/cs>.
- [51] WAKIN, M. A manifold lifting algorithm for multi-view compressive imaging. In: *Picture Coding Symposium (PCS), Chicago, Illinois*, May 2009.