



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA**



Wesley Pereira Marcos

**PROGRAMAÇÃO LINEAR: O PROBLEMA DE
ALOCÇÃO DE CARGA DIDÁTICA**

Patos de Minas

2025

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

M321 2025	Marcos, Wesley Pereira, 1989- PROGRAMAÇÃO LINEAR: O PROBLEMA DE ALOCAÇÃO DE CARGA DIDÁTICA [recurso eletrônico] / Wesley Pereira Marcos. - 2025. Orientadora: Laís Bássame Rodrigues. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Uberlândia, Graduação em Matemática. Modo de acesso: Internet. Inclui bibliografia. 1. Matemática. I. Rodrigues, Laís Bássame, 1984-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Graduação em Matemática. III. Título. CDU: 51
--------------	--

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

Wesley Pereira Marcos

**PROGRAMAÇÃO LINEAR: O PROBLEMA DE
ALOCÇÃO DE CARGA DIDÁTICA**

Trabalho apresentado a Universidade Federal de
Uberlândia como exigência parcial para a conclusão do
curso de Licenciatura em Matemática. Orientadora
Laís Bássame Rodrigues.

Patos de Minas

2025

Wesley Pereira Marcos

**PROGRAMAÇÃO LINEAR: O PROBLEMA DE ALOCAÇÃO DE CARGA
DIDÁTICA**

Este exemplar corresponde à redação final do trabalho de conclusão de curso submetido à Universidade Federal de Uberlândia, tendo sido aprovado, em 11/07/2025, pela seguinte banca examinadora:

Profª. Dra. Laís Bássame Rodrigues (orientadora)

Prof. Dr. Edson Agustini

Prof. Dr. Germano Abud de Rezende

AGRADECIMENTOS

Gostaria, em primeiro lugar, de agradecer a Deus pelo fôlego de vida, pela capacidade de aprender, raciocinar e por me possibilitar executar esse trabalho, sempre colocando as pessoas certas, nos lugares certos, para fins específicos, contribuindo para que eu concluísse esse trabalho. Desde o apoio emocional, técnico, até mesmo as distrações, para que minha mente recuperasse, foram permitidas por Ele, para que o resultado acontecesse como aconteceu.

Agradeço à minha família, pelo apoio emocional e referência sempre, me apoiando nos momentos difíceis, consolando nas tristezas e dificuldades e sendo também os primeiros a vibrar e a torcerem pelo meu êxito e sucesso.

Gostaria de agradecer especialmente à professora Dra. Laís Bássame Rodrigues por aceitar me orientar e executar essa orientação com todos os desafios que o EAD exige. Obrigado pela paciência, por me auxiliar e completar o desenvolvimento do meu raciocínio matemático, por indicar a direção certa no desenvolvimento dele, e por permanecer firme até as madrugadas, mesmo com todas as responsabilidades que possui, revisando cada detalhe, me desafiando e extraíndo o meu melhor, para que o trabalho saísse bem-feito. Mesmo quando me senti sem saída, parou para refletir e conseguiu sempre me indicar um caminho a seguir, num trabalho aplicado, com boa fundamentação, atenção aos detalhes e firmeza na postura de trabalho, me motivando a prosseguir até o limite possível.

Finalizo esse curso com a sensação de dever cumprido, de que dei o meu melhor e que recebi o melhor das pessoas que Deus colocou no meu caminho.

RESUMO

Com o intuito de solucionar o problema de alocação de carga horária docente para o semestre 2025/1 do curso de Estatística da Universidade Federal de Uberlândia, o presente trabalho propôs o uso da Programação Linear Inteira com o Método *Branch-and-Bound* para modelar o problema. A implementação foi realizada no Google Colaboratory, por meio de uma aplicação em Python utilizando a biblioteca Pyomo e o solver CBC. O modelo desenvolvido teve como objetivo maximizar a função de satisfação da alocação de carga horária docente, considerando dois esquemas distintos de ponderação: um baseado em decaimento hiperbólico e outro em decaimento exponencial. Com a aplicação dos dois casos observou-se importância da escolha adequada da função peso na maximização da satisfação da alocação da carga horária aos docentes.

Palavras-chave: Programação Linear Inteira, Alocação de carga horária docente; Colaboratory; Python, Método *Branch-and-Bound*.

ABSTRACT

In order to solve the problem of teaching assignment for the Statistics course 2025/1 semester at the Federal University of Uberlândia, this work proposed the use of Integer Linear Programming with the Branch-and-Bound Method to model the problem. The implementation was carried out in Google Colaboratory, through a Python application using the Pyomo library and the CBC solver. The model developed aimed to maximize the satisfaction function of the teaching hours allocation, considering two different weighting schemes: one based on hyperbolic decay and the other on exponential decay. With the application of the two recommended cases, it is important to choose the appropriate function to maximize the satisfaction of the teaching hours allocation to teachers.

Keywords: Integer Linear Programming, teaching assignment; Colaboratory; Python, Branch-and-Bound Method.

SUMÁRIO

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract.....	iv
1. Introdução	1
2. Fundamentação Teórica.....	3
2.1. Programação Linear.....	3
2.2. Modelo.....	4
2.3. Exemplos de Modelagem	5
2.4. Algumas definições	8
2.5. Solução gráfica	8
2.6. O modelo na forma padrão	13
2.7. O Método Simplex	17
2.8. O Algoritmo SIMPLEX	22
2.9. O método das duas fases.....	28
2.10. Método M-grande	29
2.11. Degeneração	37
2.12. Programação Linear Inteira	41
2.13. Relaxação linear	43
2.14. Método Branch-and-Bound	44
3. Aplicação do problema.....	53
3.1. Descrição do curso:	54
3.2. Modelagem	56
4. Metodologia.....	58
4.1. Formulação algoritmo	59
5. Descrição e Análises dos resultados.....	63
Caso 1: $w(p) = 1 \text{rank}(p)$	63

Caso 2: $w_2(p) = 10,94e - 0,0225\text{rank}(p)$	65
6. Considerações Finais.....	69
Referências	70
Anexos.....	74
Anexo I – Descrição das disciplinas analisadas	74
Anexo II – Preferências de cada professor efetivo.....	77
Anexo III – Apelido das disciplinas.....	79
Anexo IV – Horários alocados para o caso 1	81
Anexo V – Horários alocados para o caso 2	83

1. INTRODUÇÃO

A matemática frequentemente apresenta problemas que, além de admitirem múltiplas soluções, possuem uma resolução intrinsecamente complexa. Com o objetivo de encontrar uma solução ótima que satisfaça um conjunto de requisitos e restrições, diversas abordagens são propostas. Dentre elas, destaca-se a Programação Linear (PL).

Desenvolvida no século XX para fins de aplicação militar, a PL permite otimizar problemas modelados através de equações lineares com múltiplos requisitos (também lineares), estabelecendo uma solução ótima dentro de uma gama de soluções possíveis. Através do desenvolvimento do Método Simplex, George Dantzig potencializou a resolução dos Problemas de Programação Linear (PPL).

O método está entre os algoritmos mais potentes e utilizados do mundo segundo a IEEE e tem aplicações em diversos segmentos. No estudo [19], o método foi aplicado à minimização do custo de transporte de uma rede de farmácias. Já no trabalho [24], os custos de produção de uma confecção de moda íntima do município de Cordeiro-RJ foram otimizados. No trabalho [4] foi proposto um algoritmo para enumeração dos vértices de um poliedro baseado no Método Simplex. O auxílio no apoio à decisão de um microempreendedor individual, maximizando a receita de sua barraca foi realizado em [25]. O trabalho [6] consistiu em desenvolver um aplicativo que otimizam os custos da lista de compras escolhida com uso do Método Simplex, minimizando seu valor. O Método Simplex também foi aplicado em [3] na otimização do lucro de uma empresa de doces, maximizando a renda.

As aplicações são diversas, inclusive no ramo da educação. Em seu trabalho, [20] relataram uma experiência com uma sequência didática no ensino-aprendizagem de resolução de PPL com o Método Simplex. Um material pedagógico-computacional foi apresentado em [15] para o ensino do Método Simplex.

A distribuição da carga didática em instituições de ensino superior constitui um problema de otimização combinatória de alta complexidade. O objetivo é designar professores a disciplinas de modo a satisfazer um conjunto de restrições, que incluem as competências e regime de trabalho dos docentes, bem como as necessidades pedagógicas da instituição. Uma solução eficiente para este problema não apenas garante a totalidade da oferta de disciplinas, mas também previne a sobrecarga docente e eleva o potencial da qualidade acadêmica.

Conforme estudos analisados em [9] uma das formas de resolver o problema é utilizando programação linear inteira. Resoluções similares foram feitas utilizando a programação linear

inteira e relaxação linear em [22], que otimizou um problema de corte de estoque em sua tese, mostrando ganhos efetivos obtidos comparados com a solução tipicamente utilizada. Desta forma, o presente trabalho propõe o uso do Método Simplex com programação inteira e relaxação linear para otimizar a alocação de carga didática de um curso de Estatística da Universidade Federal de Uberlândia.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. PROGRAMAÇÃO LINEAR

O problema geral de Programação Linear (PL) foi primeiramente desenvolvido e aplicado em 1947 por Dantzig, Wood e seus associados no Departamento da Força Aérea dos Estados Unidos. Este grupo foi designado para pesquisar a viabilidade de aplicar a Matemática e técnicas relacionadas para os problemas de planejamento e programação militar.

A otimização pode ser vista como uma área da Matemática Aplicada, em Matemática; ou uma área da Pesquisa Operacional, em Engenharias; ou uma área da Matemática Computacional, em Computação. Independentemente da área, notamos que a Otimização é uma subárea interdisciplinar e importante.

Um problema de otimização consiste em encontrar uma solução que forneça o valor extremo (mínimo ou máximo) de uma **função objetivo**, por meio da identificação de seus **pontos ótimos** (minimizadores ou maximizadores) dentro de um **conjunto de soluções viáveis**. Esse conjunto é definido por um sistema de **restrições** (expressas como igualdades ou desigualdades) que a solução deve satisfazer.

A formulação do problema a ser resolvido por programação linear segue alguns passos básicos:

- Deve ser definido o objetivo básico do problema, ou seja, a otimização a ser alcançada. Por exemplo, maximização de lucros, ou de desempenhos, ou de bem-estar social; minimização de custos, de perdas, de tempo. Tal objetivo será representado por uma função objetivo, a ser maximizada ou minimizada;
- Para que esta função objetivo seja matematicamente especificada, devem ser definidas as variáveis de decisão envolvidas. Por exemplo, número de máquinas, a área a ser explorada, as classes de investimento à disposição etc. Normalmente, assume-se que todas estas variáveis possam assumir somente valores positivos;
- Estas variáveis normalmente estão sujeitas a uma série de restrições, normalmente representadas por inequações. Por exemplo, quantidade de equipamento disponível, tamanho da área a ser explorada, capacidade de um reservatório, exigências nutricionais para determinada dieta etc.

2.2. MODELO

Antes de introduzir a PL, é necessário introduzir alguns conceitos importantes: função linear, desigualdade linear e igualdade linear conforme [10].

Uma função f é dita **função linear** quando, para algum conjunto de constantes $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$.

Para qualquer função linear $f(x_1, \dots, x_n)$ e qualquer número b , as desigualdades $f(x_1, \dots, x_n) \geq b$ e $f(x_1, \dots, x_n) \leq b$ são **desigualdades lineares**.

Da mesma forma, é uma $f(x_1, \dots, x_n) = b$ **igualdade linear**.

A resolução de um Problema de Programação Linear (PPL) compreende duas fases fundamentais: a modelagem matemática e a subsequente solução do modelo. A primeira fase, a modelagem, não se resume a um roteiro prescritivo; trata-se de um processo intelectual que depende substancialmente da experiência e da acuidade do analista. Habilidades como a capacidade de análise e síntese são determinantes para traduzir um problema real em um sistema de equações e inequações lineares. A segunda fase consiste na aplicação de um algoritmo para encontrar a solução ótima do modelo formulado, sendo o Método Simplex a abordagem canônica e mais difundida para essa finalidade.

O problema geral da PL pode ser definido como:

Maximizar (ou minimizar):

$$Z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

sujeito a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \text{ (ou } \geq, \text{ ou } =)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \text{ (ou } \geq, \text{ ou } =)$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \text{ (ou } \geq, \text{ ou } =)$$

Condição de não-negatividade:

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

Ou ainda, em notação matricial:

$$\max \text{ (ou } \min) Z = c^T x$$

$$Ax \leq b \text{ (ou } \geq, \text{ ou } =)$$

$$x_j \geq 0$$

Onde A é matriz $m \times n$ dos coeficientes a_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$), b é a matriz $m \times 1$ dos $b_i \geq 0$ e x é a matriz $n \times 1$ das variáveis.

A função $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ é chamada de função objetivo, o conjunto das m equações $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ (ou $\geq$, ou $=$) é chamado de conjunto de restrições e $x_1, \dots, x_n$ são chamadas de variáveis do PPL.

O objetivo é minimizar a função objetivo, sujeita a um domínio contínuo, representado pelo conjunto de restrições.

Num problema típico de PPL temos:

- i) Um número finito de variáveis x_j ;
- ii) Um número finito de restrições do tipo desigualdades (lineares), a que as variáveis devem satisfazer;
- iii) Procura-se minimizar uma certa função real do tipo linear nas variáveis x_j .

Para que um problema possa ser modelado como um PPL, quatro pressupostos devem ser atendidos:

Proporcionalidade: A contribuição de cada variável é diretamente proporcional ao seu valor;

Aditividade: A contribuição total das variáveis é igual à soma direta das contribuições individuais de cada uma;

Fracionamento: As variáveis podem assumir valores fracionários;

Certeza: Todos os dados são determinísticos.

Vejamos alguns exemplos de problemas de Programação Linear.

2.3. EXEMPLOS DE MODELAGEM

Um problema bastante comum que muitas vezes pode ser modelado como um problema de programação linear é o Problema de Transporte. Este problema envolve o transporte de alguma carga de diversas fontes a diversos pontos de destino. Dados o custo da distribuição entre cada fonte e destino, as produções das fontes e as capacidades dos destinos, pretende-se minimizar o custo total do transporte.

Um exemplo do problema de transporte foi desenvolvido em [23] para determinar a otimização dos custos das linhas de ônibus da cidade de Uberlândia-MG. Através de um modelo de programação linear, analisando as linhas de duas empresas em diferentes grupos de dias da semana, os autores encontraram expressivos valores de economia de custos diários com a

redistribuição das linhas, conseguindo valores próximos de 20% de economia da quilometragem morta.

Outro problema que pode ser citado é o problema de redes [14]. Um problema de rede usual consiste na determinação do fluxo máximo entre dois pontos em uma rede conforme realizado em [29]. Os modelos de fluxo de redes têm várias aplicações, o que permite o desenvolvimento de algoritmos especializados com grandes vantagens computacionais. A geometria das redes, a relação entre as entidades, pode ser desenhada no plano, conforme a Figura 1, permitindo fácil compreensão do problema.

Geralmente um problema de Fluxo em Redes consiste em minimizar os custos associados a cada arco, garantindo o equilíbrio de fluxo em cada nó da rede, dadas as restrições que asseguram que o fluxo não ultrapasse o limite de cada arco [13]. Por exemplo na Figura 1, os custos de cada arco (20, 15, 10, 10, 5 e 15) precisam ser minimizados, dadas as demandas no nós (representadas entre chaves: 4, 2, -2, -4), respeitados os limites de capacidade de fluxo para cada arco (10, 40, 15, 10, 15, 10).

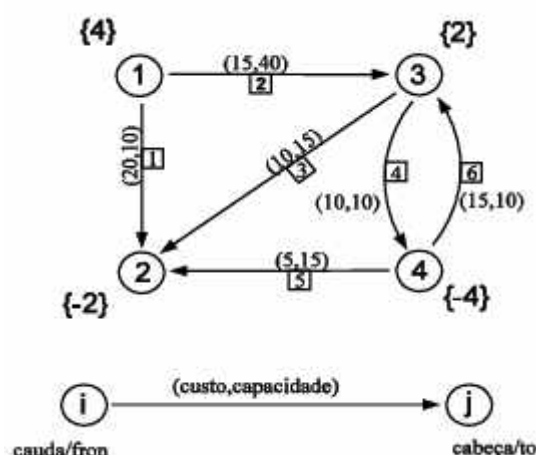


Figura 1 - Rede de tubulação de gás [13].

Na teoria de jogos, dois jogadores e soma zero é o tipo de jogo mais estudado pela teoria dos jogos. De modo simplificado, neste tipo de jogo cada um dos dois jogadores escolhe uma entre suas estratégias possíveis. Uma vez que ambos os jogadores tenham tomado suas decisões, elas são anunciadas e uma tabela de pagamentos (conhecida anteriormente pelos dois jogadores) é utilizada para determinar o pagamento de um jogador ao outro. A otimização desse tipo de problema consiste em maximizar o ganho ou minimizar a perda. A estratégia a ser definida depende da abordagem e do objetivo que se pretende alcançar.

Um fator que pode complicar bastante a solução de um problema de pesquisa operacional é a incerteza. Grande parte das decisões são tomadas baseando-se em algum tipo

de previsão. Mesmo em casos nos quais não sejam necessárias previsões, outro fator complicador é a insuficiência de informações. Desta forma, torna-se importante uma análise do grau de incerteza existente no processo de decisão, que gera riscos.

O risco pode ser definido como "uma estimativa do grau de incerteza que se tem com respeito à realização de resultados futuros desejados" [1]. Desta forma, se a faixa de valores previsíveis para um determinado investimento for muito grande, o grau de risco do investimento também será elevado. A otimização desse problema se concentra em dois critérios: um pessimista e outro otimista. Em uma visão pessimista do problema, busca-se determinar o lucro mínimo para cada alternativa e, em seguida, escolher a alternativa com o maior lucro mínimo. Por outro lado, se a decisão for tomada em cima de custos (ao invés de lucros), deve-se minimizar o custo máximo.

O exemplo abaixo, retirado de [17] é um caso de Problema de Mistura comum em PPL.

Exemplo (das ligas metálicas): Uma metalúrgica produz dois tipos de ligas metálicas. Cada liga é composta de proporções diferentes de cobre, zinco e chumbo, os quais estão disponíveis em quantidades limitadas em estoque. Deseja-se determinar quanto produzir de cada liga metálica, de modo a maximizar a receita bruta, satisfazendo-se as seguintes composições das ligas e a disponibilidade de matéria-prima em estoque:

Matéria-prima	Liga 1	Liga 2	Estoque
Cobre	50%	30%	3 ton
Zinco	10%	20%	1 ton
Chumbo	40%	50%	3 ton
Preço venda	3 mil	2 mil	(R\$ por ton)

Para modelá-lo, seja x_i a quantidade a ser produzida da liga i para $i = 1, 2$. Logo, temos a seguinte formulação matemática:

$$\begin{aligned}
 &\max 3x_1 + 2x_2 \\
 &0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 &0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 &0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

A seção a seguir traz algumas definições úteis ao desenvolvimento teórico da PL.

2.4. ALGUMAS DEFINIÇÕES

Considerando a formulação de um PPL, definem-se seus componentes matemáticos [2]. Denomina-se **solução factível** o conjunto de valores das variáveis que atende a todas as restrições, incluindo a de não negatividade ($x_j \geq 0$). O conjunto de todas as soluções factíveis forma a **região factível**.

Um PPL pode ser classificado de três formas quanto à sua solução:

- **Factível com solução ótima:** Existe uma solução que otimiza a função objetivo.
- **Factível e ilimitado:** A função objetivo pode ser otimizada infinitamente.
- **Infactível:** Não existe solução que satisfaça as restrições.

A próxima sessão apresenta um exemplo de solução gráfica de um PPL.

2.5. SOLUÇÃO GRÁFICA

Um PPL pode ser resolvido graficamente, mas essa abordagem é possível apenas para problemas muito pequenos (até três variáveis). Mesmo assim, sua aplicação é importante para entender melhor os conceitos fundamentais de PPL e a interpretar as respostas dos softwares [16].

Funções lineares com duas variáveis do tipo $z = f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ são geometricamente planos em $\mathbb{R}^3$, e somente admitem máximo e/ou mínimo se estiverem sujeitas a restrições, como no caso do PPL. As curvas de nível desse tipo são retas paralelas que crescem monotonicamente na direção do gradiente:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)$$

Considerando cada ponto do conjunto solução, este está associado a apenas uma reta da família de retas paralelas correspondente à função objetivo. Isso indica que, solucionar graficamente um PPL consiste em determinar quais pontos retornam o melhor valor para a função objetivo dentro das restrições consideradas.

Seja o exemplo a seguir:

Maximizar

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

sujeito a:

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Cada restrição determina um semiplano dado pela desigualdade. A interseção dos semiplanos determina a região factível, conforme a Figura 2 a seguir:

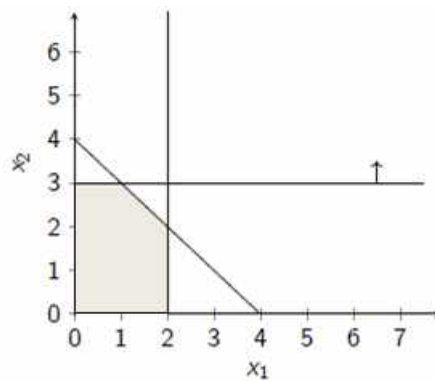


Figura 2: representação da região factível [21].

A fim de determinar a solução ótima, traça-se agora o gradiente da função objetivo para determinar o sentido de crescimento da função. Sabe-se que a função, sendo linear, possui um gradiente constante. Consequentemente, no caso das retas, tem-se um valor constante perpendicular às mesmas. Para a função objetivo dada temos:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial(x_1 + 2x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial(x_1 + 2x_2)}{\partial x_2} \right) = (1, 2)$$

Indicando o vetor no gráfico temos:

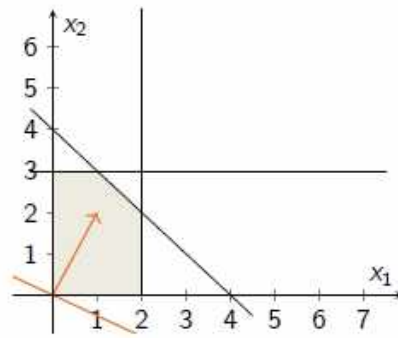


Figura 3: Representação do vetor gradiente [21].

Para **maximizar** a função objetivo f em sua região factível, a abordagem gráfica explora a direção de seu vetor gradiente (∇f), que aponta para o máximo crescimento da função. As curvas de nível, que são perpendiculares ao gradiente, são então deslocadas nesta direção até atingirem o ponto mais extremo da região factível. Este último ponto de contato corresponde à solução ótima do problema, pois representa a curva de nível de maior valor que ainda satisfaz as restrições do modelo.

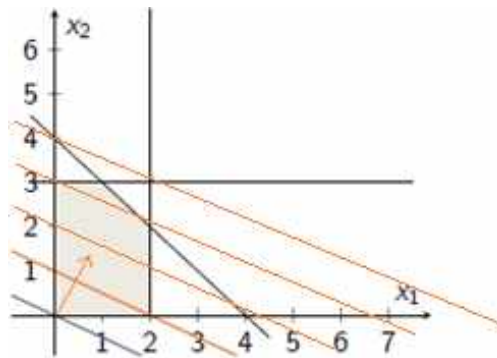


Figura 4: Representação das curvas de nível [21] – Adaptado.



Figura 5: Representação da solução ótima [21] – Adaptado.

Solução ótima obtida $f(x_1, x_2) = 7$. Portanto, a solução do problema existe e é única: $(x_1, x_2) = (1, 3)$ – maximiza f , respeitando as restrições.

No exemplo executado, foi possível encontrar uma solução ótima única. Entretanto, há outros tipos de soluções. A Figura 6 ilustra um caso com infinitas soluções ótimas, todas sobre o segmento de reta realçado AB.

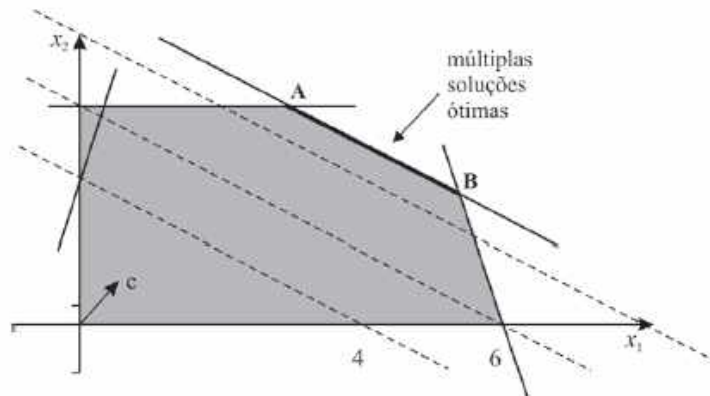


Figura 6: Múltiplas soluções ótimas [2].

Pode-se ter, também, um conjunto ilimitado de soluções ótimas, como a semirreta indicada na Figura 7.

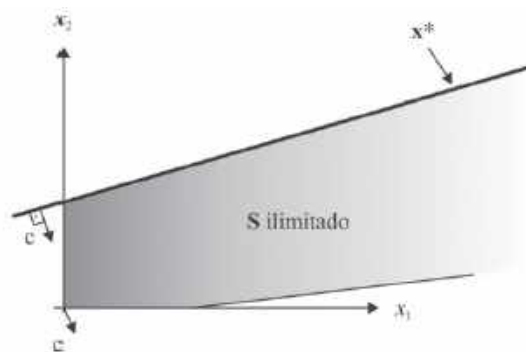


Figura 7: Conjunto ilimitado de soluções ótimas [2].

A Figura 8 apresenta mais uma possibilidade: um PPL sem solução ótima, apesar de possuir soluções factíveis. Neste caso temos um problema ilimitado.

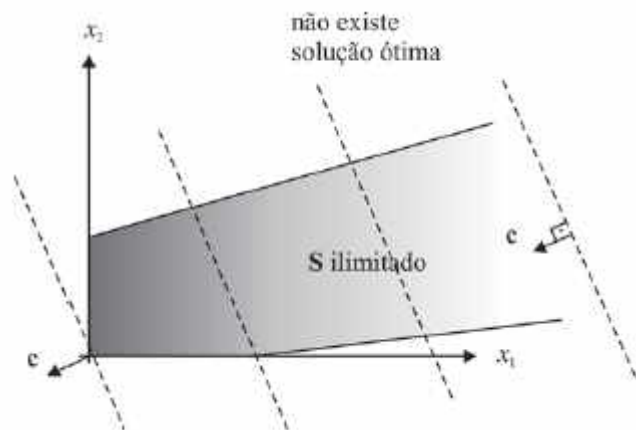


Figura 8: Problema ilimitado [2].

A inexistência de solução ótima também pode ocorrer pela infactibilidade da solução, conforme a Figura 9.

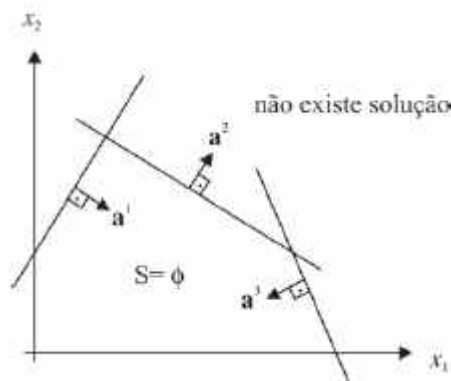


Figura 9: Região factível inexistente [2].

A Figura 10 mostra uma situação em que um mesmo vértice pode ser obtido com intersecção de retas diferentes. Nesse caso, dizemos que o vértice é um vértice degenerado.

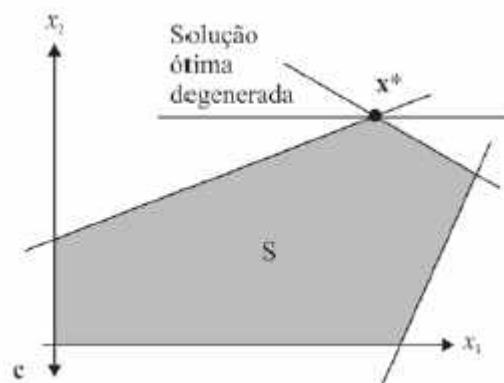


Figura 10: Vértice degenerado [2].

2.6. O MODELO NA FORMA PADRÃO

O algoritmo simplex necessita que um PPL esteja em uma forma padrão, descrito a seguir:

$$\min (c^T x)$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$b \geq 0$$

Para reduzir um PPL à forma padrão algumas estratégias podem ser necessárias:

- **Problema de Minimização:** O problema deve ser de minimização. Caso não seja, a função objetivo deve ser multiplicada por -1. Assim, o problema passa a ser de minimização.
- **Restrições como igualdades:** Todas as restrições do PPL devem ser expressas como igualdades. Isso é feito adicionando ou subtraindo variáveis não negativas de folga e/ou excesso às inequações. Por exemplo, uma restrição do tipo "menor do que ou igual a" ($\leq$) é transformada em uma igualdade adicionando uma variável de folga. Uma restrição do tipo "maior ou igual a" ($\geq$) é transformada em igualdade subtraindo uma variável de excesso.
- **Variáveis não negativas:** Todas as variáveis de decisão no problema devem ser não negativas. Caso não seja, temos duas situações: se a variável for negativa, basta substituir a variável em questão por uma com sinal oposto a ela em todo o problema; se a variável for livre, ou seja, puder assumir qualquer valor real, considera-se que ela é uma diferença de duas variáveis positivas.

Exemplo: Considere o seguinte PPL:

Maximize

$$Z = 2x + 3y$$

Sujeito a:

$$x + y \leq 4$$

$$2x - 5y \geq 5$$

$$x \geq 0, y \in \mathbb{R}$$

Para transformar este problema para a forma padrão, devemos primeiramente multiplicar a função objetivo por -1 para transformar o problema para minimização e, em

seguida, adicionar variáveis de folga s_1 e de excesso s_2 e fazer a troca da variável livre y por $y = y^+ - y^-$:

mi ni mi zar

$$Z = -2x - 3(y^+ - y^-)$$

Sujei toa:

$$x + y^+ - y^- + s_1 = 4$$

$$2x - 5y^+ + 5y^- - s_2 = 5$$

$$x, y^+, y^-, s_1, s_2 \geq 0$$

Exemplo: Considere novamente o problema das ligas metálicas que foi formulado matematicamente como:

$$\begin{aligned} \max & 3x_1 + 2x_2 \\ 0,5x_1 + 0,3x_2 & \leq 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 & \leq 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

Reduzido à forma padrão temos:

$$\begin{aligned} \min & -3x_1 - 2x_2 \\ 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 + x_4 & = 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 + x_5 & = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

A resolução gráfica de um PPL, juntamente com a inserção de variáveis de folga (e/ou excesso), conduzem a uma maneira de se solucionar o sistema $Ax = b$ proposto.

Algumas considerações matemáticas a respeito da solução do PPL:

Um conjunto de pontos x_j é denominado **solução factível** do PPL se satisfaz o sistema $Ax = b$ e obedece à condição de não-negatividade ($Ax = b, x_j \geq 0$).

O lugar geométrico correspondente ao conjunto de pontos que satisfazem simultaneamente todas as restrições é denominado **região factível**. Além disso, o lugar geométrico, dentro da região factível, em que pelo menos uma variável se anula, é denominado **fronteira**. Uma solução está na fronteira se, e somente se, $x_j = 0$, para algum $j = 0, 1, \dots, n$.

Um politopo é a intersecção de um número finito de semi-espacos fechados, isto é,

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \right\}.$$

A região factível de um PPL é um politopo convexo.

Dado o sistema $Ax = b$ com m equações e n variáveis e posto de A igual a m . Temos $n - m$ **variáveis independentes**, para as quais podem ser atribuídos quaisquer valores. Em particular, fixando-se os valores nulos para tais variáveis, temos um sistema $m \times m$ nas variáveis restantes, o qual pode ser resolvido por um método de solução de sistemas lineares. Podem até ser atribuídos valores não nulos para as variáveis independentes, mas as soluções obtidas com tais valores não serão vértices da região factível e, portanto, não serão otimizadas.

Se forem fixadas variáveis quaisquer, ou seja, sem analisar se são independentes ou dependentes, não há garantia de factibilidade da função. Mesmo que satisfaça a solução matricial, pode não verificar a condição de não negatividade. Assim, pode-se reescrever a solução matricial em função do agrupamento e separação das variáveis dependentes e independentes, conforme a seguir:

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b$$

Em que B e N são matrizes formadas por colunas da matriz original A . E os vetores decorrem da regra da multiplicação matricial, sendo x_B correspondente as variáveis dependentes e x_N às variáveis independentes. A ideia de reorganizar as colunas do sistema para encontrar uma solução qualquer é importante para a descrição do Método Simplex. Em suma resolver o sistema consiste em fixar valores para $n - m$ variáveis, resultando num sistema de m variáveis e m equações. Se a matriz resultante for invertível, a solução é bem determinada.

Seguem algumas definições:

Definição 2.5.1 (partição básica): Considere uma reorganização das colunas da seguinte forma:

$$A = [B \ N]$$

Em que:

- $B_{m \times m}$, chamada **matriz básica**, é formada por m colunas da matriz A e é invertível.
- $N_{m \times (n-m)}$, chamada **matriz não-básica**, é formada por $n - m$ colunas restantes de A , de forma que $B \cap N = \emptyset$ e $B \cup N = A$.

Essa partição nas colunas da matriz A é chamada **partição básica** e produz uma partição no vetor x :

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

Sendo:

- x_B o vetor de variáveis básicas e,
- x_N o vetor de variáveis não-básicas.

O sistema pode então ser reescrito da seguinte forma:

$$Ax = b \Leftrightarrow [B \ N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b$$

Ou

$$Bx_B + Nx_N = b$$

Portanto,

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \text{ (solução geral)}$$

Com ela pode-se determinar qualquer solução do sistema, basta atribuir valores quaisquer às $n - m$ variáveis não básicas em x_N , de modo que sejam unicamente determinadas e a solução resultante satisfaça $Ax = b$. A ordem inicial das variáveis é alterada conforme a partição básica e um abuso de notação é feito, sem que signifique um erro conceitual. Por exemplo:

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5] \text{ é reorganizado como: } x = (x_B, x_N) = [(x_1, x_2, x_5 | x_3 \ x_4)]$$

Definição 2.5.2: (solução básica) considere a partição básica $A = [B \ N]$ e a seguinte solução obtida ao se fixar as $n - m$ variáveis de x_N em zero, isto é:

$$\begin{cases} \hat{x}_B = B^{-1}b \\ \hat{x}_N = 0 \end{cases}$$

A solução $\hat{x}$ assim obtida é chamada **solução básica**. Se $\hat{x}_B = B^{-1}b \geq 0$, ou seja, se todas as variáveis básicas são não negativas, diz-se que $\hat{x}$ é uma **solução básica factível**. Além disso, se $\hat{x}_B = B^{-1}b > 0$ (todas as variáveis básicas são positivas), diz-se que a solução básica factível é **não degenerada**.

Propriedade 2.5.1: Considere a região $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \text{ tal que } Ax = b, x \geq 0\}$. Um ponto $x \in S$ é um **vértice** de S se x for uma solução básica factível.

Uma consequência desta propriedade é que a região factível S tem um número finito de vértices, pois há um número finito de partições básicas, limitado por:

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Apesar de esse número ser finito, pode ser muito grande para problemas práticos em que n é da ordem de centenas ou milhares, e muito maior que m .

Teorema Fundamental da Programação Linear: Dado um PPL na forma padrão onde A é uma matriz $m \times n$ de posto m , então:

- (i) Se há uma solução factível, há uma solução básica factível;
- (ii) Se há uma solução factível ótima, há uma solução básica factível ótima

Em outras palavras, se um PPL tem solução ótima, então existe um vértice ótimo.

Como consequência desse Teorema, basta que se procure o ótimo entre todas as soluções básicas factíveis, o que sugere um método de solução:

Determinar todas as soluções básicas factíveis (vértices da região factível S) e, dentre elas, determinar a que tem o valor ótimo.

Lembrando que a quantidade de vértices pode ser muito grande em problemas práticos, inviabilizando a solução computacional.

Assim, um método mais elaborado, que inicia com uma solução básica factível e pesquisa apenas outras soluções básicas melhores que a corrente é o Método Simplex. Tal método será descrito na seção 2.7 e 2.8, que será baseada nas referências [2] e [17].

2.7. O MÉTODO SIMPLEX

O Método Simplex encontra um vértice ótimo a partir de um subconjunto (em geral, pequeno) dos vértices da região factível. A construção do método de resolução é baseada em duas perguntas chave, a saber:

Dada uma solução básica factível,

1 - Essa solução é ótima?

2 - Caso não seja ótima, como determinar uma melhor?

Resposta à primeira pergunta: a solução é ótima?

Seja uma solução básica factível:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_B \\ \hat{x}_N \end{bmatrix} \text{ em que } \begin{cases} \hat{x}_B = B^{-1}b \geq 0 \\ \hat{x}_N = 0, \end{cases}$$

E $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ (solução geral) usando a mesma partição básica, isto é:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \text{ tal que } x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

(lembre-se de que, para qualquer x_N escolhido, x é uma solução do sistema $Ax = b$).

A função objetivo $f(x)$ pode ser expressa considerando a partição básica:

$$f(x) = c^T x = [c_B^T \quad c_N^T] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

c_B^T : coeficientes das variáveis básicas na função objetivo;

c_N^T : coeficientes das variáveis não-básicas na função objetivo.

Restringindo x ao sistema $Ax = b$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1}b - c_B^T B^{-1}Nx_N + c_N^T x_N \end{aligned}$$

O primeiro termo da equação corresponde ao valor da função objetivo em $\hat{x}$:

$$f(\hat{x}) = c_B^T \hat{x}_B + c_N^T \hat{x}_N = c_B^T (B^{-1}b) + c_N^T (0) = c_B^T B^{-1}b$$

Para simplificar a notação, definimos um vetor auxiliar a seguir:

Definição 2.6.1 (vetor multiplicador simplex): O vetor p dado por:

$$p^T = c_B^T B^{-1}$$

É chamado multiplicador simplex (ou também, vetor de variáveis duais).

Utilizando o vetor multiplicador simplex, segue:

$$f(x) = f(\hat{x}) - c_B^T B^{-1} N x_N + c_N^T x_N = f(\hat{x}) - p^T N x_N + c_N^T x_N = f(\hat{x}) + (c_N^T - p^T N) x_N$$

Ou, ainda, considerando-se:

$$\begin{aligned} c_N^T - p^T N &= (c_{N_1}, c_{N_2}, \dots, c_{N_{n-m}}) - p^T (a_{N_1}, a_{N_2}, \dots, a_{N_{n-m}}) \\ &= (c_{N_1} - p^T a_{N_1}, c_{N_2} - p^T a_{N_2}, \dots, c_{N_{n-m}} - p^T a_{N_{n-m}}) \\ x_N &= (x_{N_1}, x_{N_2}, \dots, x_{N_{n-m}}) \end{aligned}$$

Obtém-se:

$$f(x) = f(\hat{x}) + (c_{N_1} - p^T a_{N_1}) x_{N_1} + (c_{N_2} - p^T a_{N_2}) x_{N_2} + \dots + (c_{N_{n-m}} - p^T a_{N_{n-m}}) x_{N_{n-m}}$$

Definição 2.6.2 (custos relativos): Os coeficientes $\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - p^T a_{N_j})$ das variáveis não-básicas na função objetivo descrita acima são chamados custos relativos ou custos reduzidos.

Desta forma a função objetivo pode ser reescrita da seguinte forma:

$$f(x) = f(\hat{x}) + \hat{c}_{N_1} x_{N_1} + \hat{c}_{N_2} x_{N_2} + \dots + \hat{c}_{N_{n-m}} x_{N_{n-m}}$$

Sabe-se que $x_{N_j} \geq 0$ (todas as variáveis do problema são não negativas). Portanto, se $\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - p^T a_{N_j}) \geq 0, j = 1, \dots, n - m$, então $f(x) \geq f(\hat{x})$ para todo $x_N \geq 0$. Assim, a seguinte propriedade pode ser enunciada:

Propriedade 2.6.1 (condição de otimalidade): Considere uma partição básica $A = [B \ N]$ em que a solução básica associada $\hat{x}_B = B^{-1}b \geq 0$ (isto é, solução básica factível), e seja $p^T = c_B^T B^{-1}$ o vetor multiplicador simplex. Se $(c_{N_j} - p^T a_{N_j}) \geq 0, j = 1, \dots, n - m$, isto é, todos os custos relativos são não negativos, então a solução básica é ótima.

A propriedade acima fornece uma maneira simples de se afirmar a otimalidade de uma solução básica factível: *se a condição de otimalidade for verificada, então a solução básica factível é ótima*. Se a solução básica factível for não-degenerada, a recíproca da condição de otimalidade também é verdadeira: *se uma solução básica factível não degenerada (isto é, $\hat{x}_B = B^{-1}b > 0$) é uma solução ótima, então $(c_{N_j} - p^T a_{N_j}) \geq 0, j = 1, \dots, n - m$* .

Porém é possível ter uma solução ótima degenerada em mãos sem que a condição de otimalidade seja verificada. Nesse caso, é sempre possível identificar outra partição básica para a mesma solução degenerada que satisfaça a condição de otimalidade.

Resposta à segunda pergunta: como determinar uma solução básica factível melhor?

Considere uma solução básica factível e suponha que a condição de otimalidade seja violada (caso contrário, a solução seria ótima), isto é, suponha que exista k tal que:

$$\hat{c}_{N_k} = (c_{N_k} - p^T a_{N_k}) < 0$$

ou seja, o custo relativo da variável não-básica x_{N_k} é negativo.

Definição 2.6.3 (estratégia simplex): Chamamos de estratégia simplex, a perturbação de uma solução básica factível que consiste em alterar as variáveis não básicas por:

$$\begin{cases} x_{N_k} = \varepsilon \geq 0, (\text{variável com custo relativo negativo}) \\ x_{N_i} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n - m, i \neq k. \end{cases}$$

Em palavras, apenas uma variável não-básica, x_{N_k} , deixa de ser nula (por simplicidade, supõe-se que a solução é não degenerada, caso contrário $\varepsilon > 0$ pode levar a uma solução infactível). Com isso, a função objetivo passa a valer:

$$f(x) = f(\hat{x}) + \hat{c}_{N_1} 0 + \dots + \hat{c}_{N_k} \varepsilon + \dots + \hat{c}_{N_{n-m}} 0 = f(\hat{x}) + \hat{c}_{N_k} \varepsilon < f(\hat{x})$$

A função objetivo decresce à medida que ε cresce, com a taxa negativa $\hat{c}_{N_k}$, ilustrada na Figura 11. Quanto maior o vetor $\hat{c}_{N_k}$, mais rápido a função objetivo decresce. Isso justifica a escolha da variável não básica a ser perturbada com o menor custo relativo, conhecido como **regra de Dantzig**.

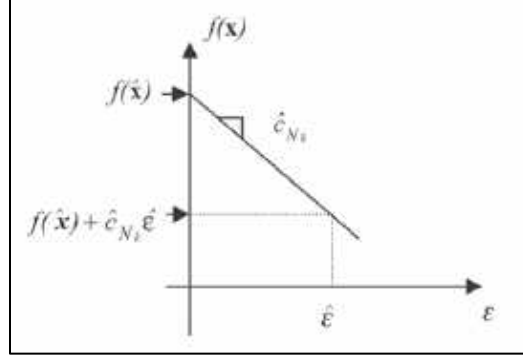


Figura 11: Variação da função objetivo com a estratégia simplex [2].

Como a função objetivo decresce quando ε cresce, determina-se o maior valor possível para ε que mantém factível a solução perturbada:

Tamanho do passo ε

Com a alteração nos valores das variáveis não-básicas pela estratégia simplex, as variáveis básicas x_B também devem ser alteradas, de modo que o sistema $Ax = b$ seja satisfeito, conforme a solução geral. A estratégia simplex é equivalente a alterar as variáveis não básicas para:

$$x_N = \begin{pmatrix} x_{N_1} \\ \vdots \\ x_{N_k} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varepsilon \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$$

Portanto, as variáveis básicas são modificadas por:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \hat{x}_B - \underbrace{B^{-1}a_{N_k}}_y \varepsilon = \hat{x}_B - y_\varepsilon$$

em que $y = B^{-1}a_{N_k}$. A identidade anterior decorre da definição da matriz não-básica N e da definição de x_N dada acima:

$$Nx_N = N(0 \quad \cdots \quad \varepsilon \quad \cdots \quad 0)^T = [a_{N_1} \quad \cdots \quad a_{N_k} \quad \cdots \quad a_{N_{n-m}}](0 \quad \cdots \quad \varepsilon \quad \cdots \quad 0)^T$$

$$Nx_N = a_{N_k} \varepsilon$$

Definição 2.6.4 (direção simplex): Chama-se direção simplex o vetor $y = B^{-1}a_{N_k}$, o qual fornece os coeficientes de como as variáveis básicas são alteradas pela estratégia simplex. A direção simplex é solução do sistema de equações lineares $By = a_{N_k}$.

Reescrevendo a equação vetorial dada acima em cada uma de suas coordenadas, e considerando a não-negatividade das variáveis básicas temos:

$$x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i \varepsilon \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Assim,

Se $y_i < 0$, então $x_{B_i} \geq 0$, para todo $\varepsilon \geq 0$.

Se $y_i > 0$, como $x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i \varepsilon \geq 0$, então, $\varepsilon \leq \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}$.

Logo, o maior valor de ε é dado por:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\}. \text{ (Teste da razão)}$$

Solução ótima ilimitada: Se $y_i \leq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$, então o valor $\hat{\varepsilon}$ acima não se aplica, ou seja, não há limitante superior para ε , o que significa que a solução perturbada pela estratégia simplex será sempre factível para todo valor de $\varepsilon \geq 0$. Como a função objetivo decresce com o crescimento de ε , então $f(x) \rightarrow -\infty$ com $\varepsilon \rightarrow \infty$. Disso, conclui-se que o problema não tem solução ótima (é comum referir-se a esta situação como solução ilimitada).

2.8. O ALGORITMO SIMPLEX

Dado um PPL na forma padrão, pode-se estruturar as etapas do método de solução seguindo o algoritmo abaixo:

Entrada: Parâmetros; conjuntos B e N tal que $B = A_B$ é invertível e $B^{-1}b \geq 0$.

Passo 1: Calcular a solução básica: $\bar{x}_B = B^{-1}b$ e $\bar{x}_N = 0$;

Passo 2: Calcular o vetor multiplicador: $p^T = c_B^T B^{-1}$;

Passo 3: Calcular os custos relativos: $c_{Nj} = c_j - p^T a_j$, para cada $j \in N$;

Passo 4: Determinar $c_{Nk} = c_{Nj}$;

Passo 5: Se $c_{Nk} \geq 0$, PARAR, solução ótima encontrada. Senão x_k entra na base;

Passo 6: Calcular $y = B^{-1}a_k$;

Passo 7: Se $y \leq 0$, problema ilimitado, PARAR.

Passo 8: Teste da razão: $\frac{\bar{x}_{B_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\}$; $\bar{x}_{B_l}$ irá sair da base.

Passo 9: Atualiza B e N e retorna ao Passo 1.

Para exemplificação do algoritmo será utilizado o software gratuito *Scilab 2025* para o cálculo envolvendo as matrizes.

Considere novamente o problema das ligas metálicas em sua forma padrão:

$$\begin{aligned} \min & -3x_1 - 2x_2 \\ 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 &= 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 + x_4 &= 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 + x_5 &= 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Sejam as matrizes:

$$\begin{aligned} c^T &= [-3 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\ A &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ b^T &= [3 \quad 1 \quad 3] \end{aligned}$$

Aplicando o algoritmo definido acima, para a primeira iteração obtém-se:

Iteração 1

Considere a matriz básica B dada pelas colunas 3, 4 e 5 da matriz A e a matriz não-básica N sendo as colunas 1 e 2 da matriz A. Em termos de índices, $B = \{3,4,5\}$ e $N = \{1,2\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solução básica pode ser determinada por:

$$\begin{aligned} \bar{x}_B = B^{-1}b &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \bar{x}_N &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- determinando $f(x)$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} x_2$$

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 = 0$$

Solução básica: $\bar{x} = (0; 0; 3; 1; 3)$, ou seja, $f(\bar{x}) = 0$

- Calculando o vetor multiplicador:

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

- Calculando os custos relativos:

$$\hat{c}_{N_1} = (c_{N_1} - p^T a_{N_1}) = -3 - [0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} = -3$$

$$\hat{c}_{N_2} = (c_{N_2} - p^T a_{N_2}) = -2 - [0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} = -2$$

- Como $\hat{c}_{N_1}$ é o custo mais negativo, $k = 1$ e x_1 entra na base.

$$y = B^{-1} a_{N_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

- Teste da razão

$$\frac{\bar{x}_{B_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \min \left(\frac{3}{0,5} \quad \frac{1}{0,1} \quad \frac{3}{0,4} \right) = \frac{3}{0,5} = 6$$

$\bar{x}_{B_1}$ irá sair da base, ou seja, x_3 .

- Atualizando B e N:

$$B = \{1,4,5\} \quad N = \{3,2\}$$

Para tal valor de x_1 , tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0,6 \\ 2,4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} x_2$$

$$f(x) = -18 - 2x_2$$

Para o qual tem-se a solução básica: $\bar{x} = (6; \quad 0; \quad 0; \quad 0,4; \quad 0,6)$, com $f(\bar{x}) = -18$

Iteração 2

$$B = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0,1 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -0,2 & -0,8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solução básica pode ser determinada por:

$$\bar{x}_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0,2 & 1 & 0 \\ -0,8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- determinando $f(x)$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -0,2 \\ -0,8 \end{bmatrix} x_3 - \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,14 \\ 0,26 \end{bmatrix} x_2$$

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 = -3(6 - 2x_3 - 0,6x_2) - 2x_2 = -18 + 6x_3 - 0,2x_2$$

Solução básica: $\bar{x} = (6 \ 0 \ 0 \ 0,4 \ 0,6)$, com $f(\bar{x}) = -18$

- Calculando o vetor multiplicador:

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [-3 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0,2 & 1 & 0 \\ -0,8 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-6 \ 0 \ 0]$$

- Calculando os custos relativos:

$$\hat{c}_{N_3} = (c_{N_3} - p^T a_{N_3}) = 0 - [-6 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 6$$

$$\hat{c}_{N_2} = (c_{N_2} - p^T a_{N_2}) = -2 - [-6 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} = -0,2$$

- Como $\hat{c}_{N_2}$ é o custo mais negativo, $k = -0,2$ e x_2 entra na base.

$$y = B^{-1} a_{N_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0,2 & 1 & 0 \\ -0,8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,14 \\ 0,26 \end{bmatrix}$$

- Teste da razão

$$\frac{\bar{x}_{B_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \min \left(\frac{6}{0,6} \quad \frac{0,4}{0,14} \quad \frac{0,6}{0,26} \right) = \frac{0,6}{0,26} = 2,3$$

$\bar{x}_{B_3}$ irá sair da base ou seja x_5

- Atualizando B e N:

$$B = \{1,4,2\} \quad N = \{3,5\}$$

Para tal valor de x_2 , tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -0,2 \\ -0,8 \end{bmatrix} x_3 - \begin{bmatrix} 1,38 \\ 0,32 \\ 0,6 \end{bmatrix} 2,3$$

$$f(x) = -18 + 6x_3 - 0,46$$

Para o qual tem-se a solução básica: $\bar{x} = (4,62; \ 2,3; \ 0; \ 0,08; \ 0)$, com $f(\bar{x}) = -18,46$

Como x_5 possui valor nulo, agora atualiza-se a base.

Atualizando a base tem-se: $B = \{1,4,2\}$ e $N = \{3,5\}$;

Iteração 3

$$B = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 1 & 0,2 \\ 0,4 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 3,84 & 0 & -2,3 \\ 0,23 & 1 & -0,54 \\ -3,07 & 0 & 3,84 \end{bmatrix}$$

- Solução básica pode ser determinada por:

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3,84 & 0 & -2,3 \\ 0,23 & 1 & -0,54 \\ -3,07 & 0 & 3,84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,62 \\ 0,08 \\ 2,30 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- determinando $f(x)$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,62 \\ 0,08 \\ 2,31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3,85 \\ 0,23 \\ -3,08 \end{bmatrix} x_3 - \begin{bmatrix} -2,31 \\ -0,54 \\ 3,85 \end{bmatrix} x_5$$

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 = -3(4,62 - 3,85x_3 + 2,31x_5) - 2(2,31 + 3,08x_3 - 3,85x_5)$$

$$f(x) = -18,46 + 5,336x_3 + 0,78x_5 = -18,46$$

- Calculando o vetor multiplicador:

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [-3 \quad 0 \quad -2] \begin{bmatrix} 3,84 & 0 & -2,3 \\ 0,23 & 1 & -0,54 \\ -3,07 & 0 & 3,84 \end{bmatrix} = [-5,36 \quad 0 \quad -0,78]$$

- Calculando os custos relativos:

$$\hat{c}_{N_3} = (c_{N_3} - p^T a_{N_3}) = 0 - [-5,36 \quad 0 \quad -0,78] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 5,36$$

$$\hat{c}_{N_5} = (c_{N_5} - p^T a_{N_5}) = 0 - [-5,36 \quad 0 \quad -0,78] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,78$$

Como todos os custos relativos são positivos, condição de otimalidade verificada! Ponto ótimo encontrado!

A função objetivo permanece:

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 = -3(4,62 - 3,85x_3 + 2,31x_5) - 2(2,31 + 3,08x_3 - 3,85x_5)$$

$$f(x) = -18,46 + 5,336x_3 + 0,78x_5$$

Observando a $f(x)$ a taxa e mudança da função objetivo é positiva, pois todos os coeficientes são positivos. Logo, não tem como melhorar a solução, portanto é a base ótima.

Representando graficamente tem-se:

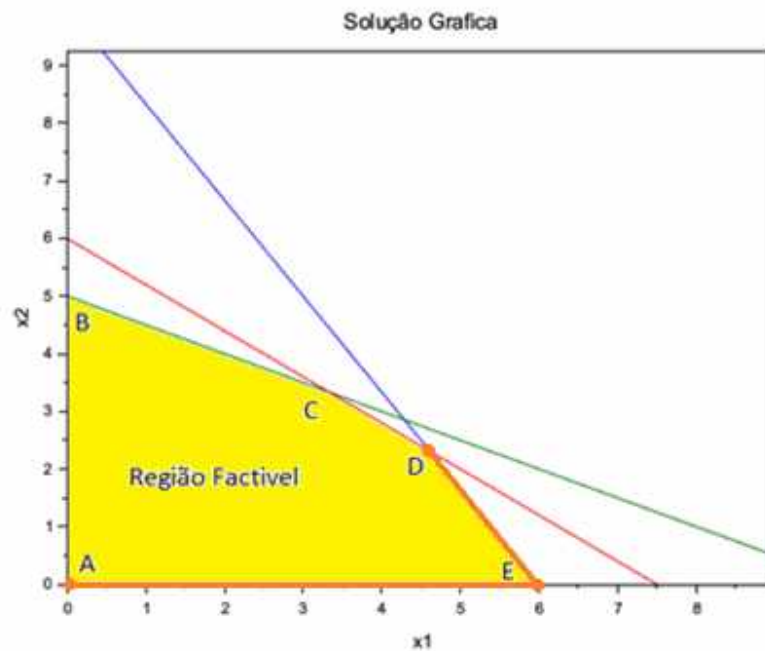


Figura 12: Representação gráfica do exemplo executado (do Autor).

A partir do gráfico, para $x_1 = 7,5$ ou $x_1 = 10$, observa-se soluções básicas não factíveis, ou seja, fora da região factível (amarela). Analisando as iterações, foi percorrido o trajeto A-E-D. Observe que não foi necessário enumerar todos os pontos extremos.

Algumas observações sobre o método simplex:

Ao aplicar o Método Simplex pode acontecer de, na hora de calcular os custos relativos, serem encontrados os mesmos valores negativos para s_j . Neste caso, pode-se escolher qualquer índice dentre os que empataram.

Além disso, se todos os valores encontrados no teste da razão forem negativos, tem-se que o valor da variável candidata a entrar na base pode aumentar indefinidamente sem que o problema se torne infactível. Assim, temos um problema ilimitado e devemos parar o algoritmo. No método gráfico, tem-se uma região aberta ilimitada e, a direção do gradiente é nesse trecho da região que é ilimitado.

Pode ainda acontecer de haver múltiplas soluções ótimas. Nesse caso, $s_j = 0$ para pelo menos um $j \in N$, ao encontrar a solução ótima. Pode-se realizar a combinação convexa de duas ou mais soluções ótimas, o que resulta em outra solução ótima:

$$x = \alpha x + (1 - \alpha)x \text{ com } \alpha \in [0,1].$$

Resumindo, o método Simplex é um método iterativo para resolver problemas de programação linear que se baseia em soluções básicas e na melhoria iterativa das soluções por meio de trocas de B e N . Em média são necessárias até $3m$ (onde m é a quantidade de restrições) iterações para obter a solução ótima, embora tenha complexidade não polinomial [26]. O algoritmo se encontra entre os dez algoritmos mais importantes do século XX, de acordo com a IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers), para desenvolvimento e prática da ciência e engenharia [7].

Até o momento, foram utilizadas as variáveis de folga para compor a base inicial do método simplex, já que as colunas de A referentes à essas variáveis formam uma matriz identidade que é invertível. Na prática, uma base inicial trivial pode não estar disponível. As duas próximas seções tratam de soluções para o problema de encontrar uma base inicial para o método simplex.

2.9. O MÉTODO DAS DUAS FASES

Esse método consiste em duas fases de execução. Na Fase 1, caso tenhamos um PPL que, na forma padrão, não tenha uma base óbvia, introduzimos novas variáveis $w_i, i = 1, \dots, n$ como se fossem as variáveis de folga. Tais variáveis são chamadas de variáveis artificiais. Para eliminar as variáveis artificiais, utilizamos um novo objetivo, que resulta no problema artificial:

mi ni mi zar

$$w_1 + \dots + w_n$$

sujei toa:

$$Ax + Iw = b$$

$$x \geq 0, w \geq 0$$

Então aplica-se o Método Simplex, iniciando a base dada pelas variáveis artificiais w . Caso uma solução ótima seja obtida com valor ótimo não nulo, então o problema é infactível. Caso $w = 0$ seja encontrado, a solução obtida é factível para o problema original.

Em seguida aplica-se o Método Simplex ao problema original utilizando a base ótima obtida na Fase 1 do método.

Exemplo: *mi ni mi zar*

$$f(x) = x_1 - x_2 + 2x_3$$

sujei toa:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, \geq 0$$

Percebe-se que, embora o problema esteja na forma padrão, não há uma base óbvia dentre as variáveis. Assim, aplica-se o método das duas fases:

Fase 1: Introduz as variáveis artificiais e muda a função objetivo

mi ni mi zar

$$f(x) = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1w_1 + 1w_2$$

sujei toa:

$$1x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 1w_1 = 3$$

$$2x_1 - 1x_2 + 3x_3 + 1w_2 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0$$

Inicia-se com w_1 e w_2 na base e aplica-se o Método Simplex para encontrar uma solução ótima. Utiliza-se a solução ótima encontrada na Fase 1 para iniciar a Fase 2:

Fase 2:

mi ni mi zar

$$f(x) = 1x_1 - 1x_2 + 2x_3$$

sujei toa:

$$1x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3$$

$$2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0$$

Este é o método duas fases.

2.10. MÉTODO M-GRANDE

O Método M-grande é semelhante ao anterior, mas executado tudo na mesma fase. Redefine-se a função objetivo como a seguir:

mi ni mi zar

$$f(x) = c^T x + Mw_1 + \dots + Mw_n$$

sujei toa:

$$Ax + Iw = b$$

$$x \geq 0, w \geq 0$$

Aplica-se então o método simplex, iniciando a base dada pelas variáveis artificiais w . Nesse caso, M é um parâmetro de entrada (fixo) que deve ser suficientemente grande para garantir $w = 0$ na solução ótima, caso o problema seja factível. A dúvida é determinar qual o melhor valor de M . Caso M não seja grande o suficiente, os coeficientes podem não ser garantidamente nulos ou, caso seja grande demais, pode haver problemas numéricos de cálculo. Voltando ao exemplo tem-se:

mi ni mi zar

$$f(x) = 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 + Mw_1 + Mw_2$$

sujei toa:

$$1x_1 + 1x_2 - 1x_3 + w_1 = 3$$

$$2x_1 - 1x_2 + 3x_3 + w_2 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0$$

Escolhe-se M suficientemente grande na função objetivo a fim de garantir que os coeficientes sejam nulos. Inicia-se com a base B (w_1, w_2) até que elas saiam da base. Caso a aplicação do Método Simplex resulte em um valor onde todos os custos sejam maiores ou iguais a zero, por exemplo o $w_2 = 5$, o problema original é infactível. Se todos os w_i são nulos, o problema é, portanto, factível.

Vejamos exemplo a seguir:

mi ni mi zar

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

sujei toa:

$$-2x_1 + 3x_2 \geq 9$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Analisando o problema, se escrevermos o problema na forma padrão, apareceriam duas variáveis de excesso:

Forma padrão:

mi ni mi zar

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

sujei toa:

$$-2x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 9$$

$$3x_1 + 2x_2 - 1x_4 = 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Ainda ficaria sem a base trivial, já que (0,0) não é solução factível. Desta forma, é necessário acrescentar uma variável artificial ao problema. Aplicando o **Método das Duas Fases** tem-se:

Fase 1:

mi ni mi zar

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 1x_6$$

sujei toa:

$$-2x_1 + 3x_2 - 1x_3 + 1x_5 = 9$$

$$3x_1 + 2x_2 - 1x_4 + 1x_6 = 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Na forma matricial:

$$c^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Realizando as iterações tem-se:

Iteração 1 (Fase 1)

$$B = \{5,6\} \text{ e } N = \{1,2,3,4\}$$

- Solução básica:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 21$

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [1 \quad 1]$$

$$c_{N1} = c_1 - p^T a_1 = -1$$

$$c_{N2} = c_2 - p^T a_2 = -5$$

$$c_{N3} = c_3 - p^T a_3 = 1$$

$$c_{N4} = c_4 - p^T a_4 = 1$$

- $c_{Nk} = c_{N2} \Rightarrow x_2$ entrará na base ($k = 2$)

Teste da razão

$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{B_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \frac{x_{B_1}}{y_1} = \frac{9}{3}$$

- $x_{B_1}(x_5)$ sairá da base ($l = 1$).

Iteração 2 (Fase 1)

$$B = \{2, 6\} \text{ e } N = \{1, 5, 3, 4\}$$

- Solução básica:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6$

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [-0,66 \quad 1]$$

$$c_{N1} = c_1 - p^T a_1 = -4,33$$

$$c_{N3} = c_3 - p^T a_3 = -0,67$$

$$c_{N4} = c_4 - p^T a_4 = 1$$

$$c_{N5} = c_5 - p^T a_5 = 0,67$$

- $c_{Nk} = c_{N1} \Rightarrow x_1$ entrará na base ($k = 1$)

Teste da razão

$$y = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} -0,67 \\ 4,33 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{B_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \frac{x_{B_1}}{y_1} = \frac{6}{4,33}$$

- $x_{B_2}(x_6)$ sairá da base ($l = 2$).

Iteração 3 (Fase 1)

$$B = \{2, \mathbf{1}\} \text{ e } N = \{\mathbf{6}, 5, 3, 4\}$$

- Solução básica:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,92 \\ 1,38 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 0$

Note que a base agora não tem mais nenhuma variável artificial. Tem-se uma solução básica factível. Ao calcular os custos tem-se:

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [0 \ 0]$$

$$c_{N3} = c_3 - p^T a_3 = 0$$

$$c_{N4} = c_4 - p^T a_4 = 0$$

$$c_{N5} = c_5 - p^T a_5 = 1$$

$$c_{N6} = c_6 - p^T a_6 = 1$$

- $c_{Nk} > 0 \Rightarrow \text{PARE !}$

Solução ótima da Fase 1 encontrada!

Agora pode-se iniciar a Fase 2, com esta última base encontrada. Lembrando que a função objetivo original deve ser retomada:

$$c^T = [2 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 1 (Fase 2)

$$B = \{2, 1\} \text{ e } N = \{3, 4\}$$

- Solução básica:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,92 \\ 1,38 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6,68$

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [-0,08 \ 0,62]$$

$$c_{N3} = c_3 - p^T a_3 = -0,08$$

$$c_{N4} = c_4 - p^T a_4 = 0,62$$

- $c_{N3} < 0 \Rightarrow x_3$ entrará na base ($k = 3$)

Teste da razão

$$y = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} -0,23 \\ 0,45 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{B_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \frac{x_{B_2}}{y_2} = \frac{1,38}{0,15}$$

- $x_{B_2}(x_1)$ sai da base ($l = 2$).

Iteração 2 (Fase 2)

$$B = \{2, \textcolor{red}{3}\} \text{ e } N = \{\textcolor{red}{1}, 4\}$$

- Solução básica:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6$

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [0 \quad 0,5]$$

$$c_{N1} = c_1 - p^T a_1 = 0,5$$

$$c_{N4} = c_4 - p^T a_4 = 0,5$$

- $c_{N1}, c_{N4} > 0 \Rightarrow \text{PARE !}$

Solução ótima pelo Método das Duas Fases encontrada!

- $x^* = (0, 6, 9, 0)$.

Agora resolvendo pelo método do M-grande. Reescreve-se o problema original como:

mi ni mi zar

$$f = 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6$$

sujei to a:

$$-2x_1 + 3x_2 - 1x_3 + \textcolor{red}{1}x_5 = 9$$

$$3x_1 + 2x_2 - 1x_4 + \textcolor{red}{1}x_6 = 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Fazendo $M = 100$ e, escrevendo na forma matricial, tem-se:

$$\textcolor{red}{c}^T = [2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 100 \quad 100]$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{0} \\ 3 & 2 & 0 & -1 & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{1} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$$B = \{5, 6\} \text{ e } N = \{1, 2, 3, 4\}$$

- Solução básica:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 2100$

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [100 \quad 100]$$

$$c_{N1} = c_1 - p^T a_1 = -98$$

$$c_{N2} = c_2 - p^T a_2 = -499$$

$$c_{N3} = c_3 - p^T a_3 = 100$$

$$c_{N4} = c_4 - p^T a_4 = 100$$

- $c_{N2} < 0 \Rightarrow x_2$ entrará na base ($k = 2$)

Teste da razão

$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{B_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \frac{x_{B_1}}{y_1} = \frac{9}{3}$$

- $x_{B_1}(x_5)$ sairá da base ($l = 1$).

Iteração 2

$$B = \{2,6\} \text{ e } N = \{1,5,3,4\}$$

- Solução básica:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 603$

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [-66,33 \quad 100]$$

$$c_{N1} = c_1 - p^T a_1 = -430,67$$

$$c_{N3} = c_3 - p^T a_3 = -66,33$$

$$c_{N4} = c_4 - p^T a_4 = 100$$

$$c_{N5} = c_5 - p^T a_5 = 166,33$$

- $c_{N1} < 0 \Rightarrow x_1$ entrará na base ($k = 1$)

Teste da razão

$$y = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} -0,67 \\ 4,33 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{B_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \frac{x_{B_2}}{y_2} = \frac{6}{4,33}$$

- $x_{B_2}(x_6)$ sairá da base ($l = 2$).

Iteração 3

$$B = \{2, \mathbf{1}\} \text{ e } N = \{\mathbf{6}, 5, 3, 4\}$$

Agora não há mais nenhuma variável artificial na base!

- Solução básica:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,92 \\ 1,38 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6,68$

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [-0,08 \quad 0,62]$$

$$c_{N3} = c_3 - p^T a_3 = -0,08$$

$$c_{N4} = c_4 - p^T a_4 = 0,62$$

$$c_{N5} = c_5 - p^T a_5 = 99,38$$

$$c_{N6} = c_6 - p^T a_6 = 100,08$$

- $c_{N3} < 0 \Rightarrow x_3$ entrará na base ($k = 3$)

Teste da razão

$$y = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} -0,23 \\ 0,15 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{B_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \frac{x_{B_2}}{y_2} = \frac{1,38}{4,33}$$

- $x_{B_2}(x_1)$ sairá da base ($l = 2$).

Iteração 4

$$B = \{2, \mathbf{3}\} \text{ e } N = \{6, 5, \mathbf{1}, 4\}$$

- Solução básica:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6$

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [0 \quad 0,5]$$

$$c_{N1} = c_1 - p^T a_1 = 0,5$$

$$c_{N4} = c_4 - p^T a_4 = 0,5$$

$$c_{N5} = c_5 - p^T a_5 = 100$$

$$c_{N6} = c_6 - p^T a_6 = 99,5$$

- $c_{N1}, c_{N4}, c_{N5}, c_{N6} > 0 \Rightarrow PARE !$

Solução ótima pelo método do M-grande encontrada!

- $x^* = (0, 6, 9, 0)$.

Caso chegue na solução ótima com variável artificial na base com valor positivo, a solução é infactível e, provavelmente, um valor de M foi escolhido inadequadamente.

2.11. DEGENERACÃO

A degeneração acontece quando um ponto extremo é representado por mais de uma base.

Seja a função a ser minimizada:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2$$

Sujeita a:

$$0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 2,67$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$$

$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Representado a região factível graficamente tem-se a Figura 13:

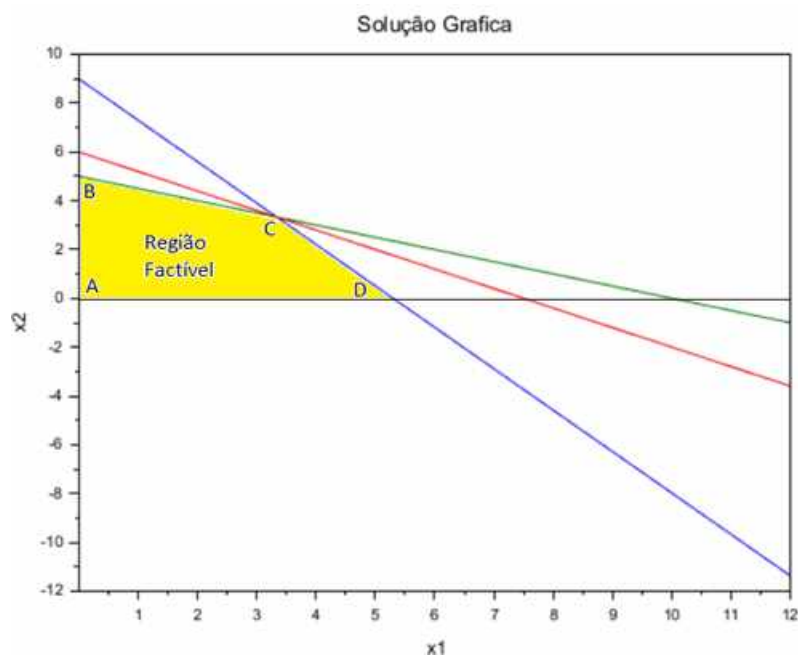


Figura 13: Região factível do exemplo (do Autor).

Analisando o gráfico, o ponto C é interceptado por várias retas, que representam as restrições do problema. Como são necessárias apenas duas para determinar o ponto, este excesso de retas causa o que se denomina degeneração.

Para o problema proposto acima, haveria três elementos em B, enquanto seriam 2 em N. Para o ponto C tem-se $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, o que resulta em um elemento nulo na base. A esse respeito pode-se pontuar:

- Quando ponto extremo é representado por mais de uma base, tem-se a degeneração;
- Em uma base degenerada, temos $x_{B_i} = 0$ para pelo menos um $i = 1, \dots, m$;
- Um problema de programação linear é degenerado quando possui pelo menos uma base degenerada;
- Podemos ter $c_{N_j} = 0$ mesmo quando a solução ótima é um único ponto extremo;

Aplicando o método simplex ao problema obtém-se na forma matricial:

$$c^T = [-4 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Realizando as iterações tem-se:

Iteração 1

$$B = \{3,4,5\} \text{ e } N = \{1,2\}$$

- Solução básica factível:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Custos relativos:

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$c_{N1} = c_1 - p^T a_1 = -4$$

$$c_{N2} = c_2 - p^T a_2 = -5$$

- $c_{N2} < 0 \Rightarrow x_2$ entrará na base ($k = 2$)

Teste da razão

$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{B_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \frac{x_{B_2}}{y_2} = 5$$

- $x_{B_2}(x_4)$ sairá da base ($l = 2$).

Iteração 2

$$B = \{3,2,5\} \text{ e } N = \{1,4\}$$

- Solução básica factível:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1,167 \\ 5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

- Custos relativos:

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [0 \quad -25 \quad 0]$$

$$c_{N1} = c_1 - p^T a_1 = -1,5$$

$$c_{N4} = c_4 - p^T a_4 = 25$$

- $c_{N1} < 0 \Rightarrow x_1$ entrará na base ($k = 1$)

Teste da razão

$$y = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,5 \\ 0,15 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{B_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \frac{x_{B_3}}{y_3} = 3,33$$

- $x_{B_3}(x_5)$ sairá da base ($l = 3$).

Iteração 3

$$B = \{3,2,1\} \text{ e } N = \{5,4\}$$

- Solução básica factível:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,33 \\ 3,33 \end{bmatrix}$$

Este zero caracteriza a solução degenerada.

- Custos relativos:

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [0 \quad 0 \quad -10]$$

$$c_{N5} = c_5 - p^T a_5 = 10$$

$$c_{N4} = c_4 - p^T a_4 = 0$$

- $c_{N4} = 0 \Rightarrow PARE !$

Solução ótima encontrada!

O x_4 pode ser colocado na base, sem alterar o valor ótimo:

Teste da razão

$$y = B^{-1}a_4 = \begin{bmatrix} 4,33 \\ 13,33 \\ -16,67 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{B_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \frac{x_{B_1}}{y_1} = 0$$

O maior valor para o x_4 entrar na base é nulo, ou seja, mesmo trocando de base, permanece no mesmo ponto:

Iteração 4

$$B = \{4,2,1\} \text{ e } N = \{5,3\}$$

- Solução básica factível:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,33 \\ 3,33 \end{bmatrix}$$

Este zero caracteriza a solução degenerada.

- Custos relativos:

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [0 \quad 0 \quad -10]$$

$$c_{N5} = c_5 - p^T a_5 = 10$$

$$c_{N3} = c_3 - p^T a_3 = 0$$

- $c_{N3} = 0 \Rightarrow PARE !$

O valor nulo encontrado nos custos relativos nem sempre garante múltiplas soluções ótimas, como é o caso da degeneração. Apesar de uma base diferente, a solução é a mesma, o que garante sua unicidade.

$$x^* = (3,33; \quad 3,33; \quad 0; \quad 0; \quad 0)$$

A degeneração pode aumentar o número de iterações desnecessariamente e causar ciclagem: o método troca de base, mas continua no mesmo ponto extremo, sem convergir.

2.12. PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA

A programação linear inteira (PLI), conforme define [27]:

São programações lineares nas quais algumas ou todas as variáveis estão restritas a valores inteiros (ou discretos). Quando estudamos PLI, precisamos nos concentrar em três áreas: aplicação, teoria e cálculo. Uma desvantagem dos algoritmos PLI é a sua falta de consistência na resolução de problemas com inteiros. Embora seja comprovado teoricamente que esses algoritmos convergem em um número finito de iterações, sua implantação em computador é uma experiência diferente.

Em relação aos tipos de programação inteira, vale destacar os modelos:

(1) Programação Inteira Pura: os modelos são descritos por variáveis inteiras apenas;

mi ni mi zar

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

sujei toa:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}_+$$

(2) Programação Inteira Mista: os modelos podem ter variáveis reais ou inteiras;

Mi ni mi zar

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + d_1y_1 + \dots + d_ny_n$$

Sujei toa:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + h_{11}y_1 + h_{12}y_2 + \dots + h_{1n}y_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + h_{21}y_1 + h_{22}y_2 + \dots + h_{2n}y_n \geq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + h_{m1}y_1 + h_{m2}y_2 + \dots + h_{mn}y_n \leq b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

$$y_1, \dots, y_n \in \mathbb{Z}_+$$

- (3) Programação Inteira Binária: os modelos são descritos por variáveis que podem ser iguais a 1 ou 0 somente.

minimizar

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

sujeito a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \in \{0,1\}$$

Se comparado ao Problema Linear Clássico, o resultado da função objetivo pode piorar um pouco, haja vista a redução dos pontos viáveis de solução. Considere o exemplo [27]:

Maximizar: $5x_1 + 4x_2$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

Cuja representação gráfica pode ser visualizada na Figura 14:

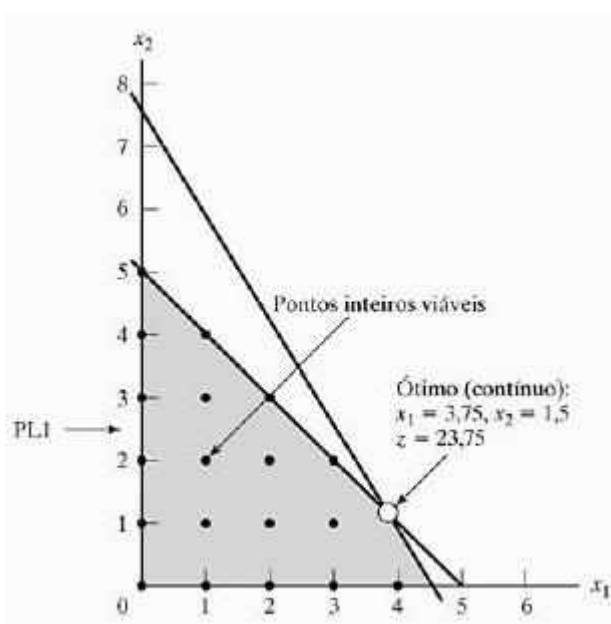


Figura 14: Exemplo comparando pontos viáveis e solução ótima [27].

Caso haja restrições ao problema, como uma variável estar condicionada a outra, adaptações precisam ser realizadas ao problema.

2.13. RELAXAÇÃO LINEAR

Se trocadas as restrições de integralidade, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}_+$, pelas restrições de não negatividade, $x_1, \dots, x_n \geq 0$, obtém-se a relaxação linear do modelo, retornando ao problema de programação linear inicial.

Relaxação Linear e arredondamento não garantem uma solução inteira ótima, nem mesmo factível. Mas podem ajudar com os limitantes.

O Método Simplex funciona bem para domínios contínuos. A solução ótima do problema de programação inteira pode não ser um ponto extremo ótimo da Relaxação Linear.

Com relação à modelagem, os problemas de PL diferem dos problemas de PLI apenas pelo domínio de suas variáveis, já que em PL são permitidas variáveis reais e em PLI apenas variáveis inteiras. Já para a Relaxação Linear, a estratégia desse é definida em [27], conforme a seguir:

Relaxe a região de soluções da PLI eliminando a restrição inteira imposta a todas as variáveis inteiras e substitua qualquer variável binária y pela faixa contínua $0 \leq y \leq 1$. O resultado da relaxação é uma PL normal.

Então resolva a PL e identifique a solução ótima contínua. Em seguida, começando do ponto ótimo contínuo, adicione restrições especiais que modifiquem iterativamente a região de soluções da PL de maneira que, a certa altura, resultará em um ponto extremo ótimo que satisfaz os requisitos inteiros.

A fim de gerar restrições especiais, um dos métodos que pode ser usado é o método de *Branch-and-Bound*. Embora tal método não seja consistentemente efetivo em termos computacionais, a experiência mostra que o método é muito bem-sucedido [27]. O referido método será descrito na Seção 2.14 a seguir.

2.14. MÉTODO BRANCH-AND-BOUND

O primeiro método *Branch-and-Bound* foi desenvolvido em 1960 por A. Land e G. Doig para os problemas misto e geral de PLI. O método consiste em, a partir do ponto ótimo obtido com a relaxação linear, particionar a região factível excluindo as soluções que violam a integralidade do problema, limitando a enumeração de soluções para não elevar o custo do algoritmo demasiadamente.

Em relação aos significados dos nomes temos:

- *Branch*: Ramificar

A ramificação consiste em particionar (ou dividir) a região factível de modo a excluir soluções que não satisfaçam as restrições de integralidade. Por exemplo, a Figura 15 mostra o particionamento da região dada pelo exemplo anterior (da Figura 14) em duas, excluindo a solução $x_1 = 3,75$ que viola a condição de integralidade;

- *Bound*: Limitar

Baseia-se em limitantes inferiores e superiores do valor ótimo para evitar a enumeração explícita de todas as soluções factíveis.

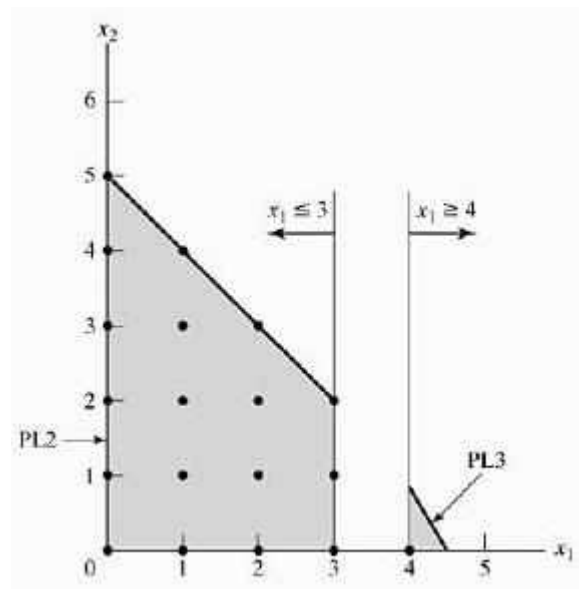


Figura 15: Ramificação do problema da Figura 14 [27].

O algoritmo de *Branch-and-Bound* é composto por 5 etapas [18], conforme descrito abaixo:

- 1- Resolver o problema como se fosse um PPL com as variáveis relaxadas (ignorando as restrições de integralidade). Conferir a solução ótima calculada e observar se as variáveis que deveriam ser inteiras são, de fato, inteiras. Caso as variáveis sejam inteiras, o problema foi resolvido. Caso contrário, passar à próxima etapa.
- 2- Se na etapa anterior houver uma variável não inteira entre dois números inteiros consecutivos e não negativos ($i_1 < x_j < i_2$), dois novos modelos de programação inteira se formam, acrescido ao problema original uma restrição do tipo $x_j \leq i_1$, ou do tipo $x_j \geq i_2$.
- 3- Se uma das primeiras aproximações ainda apresentar uma solução não inteira, o PLI resultante por essa primeira aproximação torna-se candidato a uma ramificação adicional.
- 4- Se o problema for de maximização, a ramificação continua até ser obtida uma primeira aproximação inteira (que é uma candidata à solução ótima do problema original), e o valor da função objetivo relativa às variáveis encontradas torna-se o limite inferior para o problema, o que significa que modelos cujas primeiras aproximações apresentem valores da função objetivo menores que o limite inferior devem ser descartados.
- 5- Se o problema for de minimização, o procedimento é o mesmo. A diferença é que os limites a serem utilizados devem ser superiores, e não inferiores. Logo, o valor da função objetivo a partir da primeira solução inteira torna-se o limite superior do problema, e devem ser descartados os modelos com valor de função objetivo maiores ao limite.

O algoritmo pode ser estendido diretamente a problemas mistos. Se uma variável for contínua, esta não é selecionada como variável de ramificação.

Sobre o Método *Branch-and-Bound* vale destacar:

- Soluções factíveis e relaxações fornecem limitantes que são usados para descartar nós e garantir que uma solução é ótima;
- Em problemas de maximização a solução factível é o limitante inferior enquanto a solução de relaxação limita superiormente;
- Já em casos de minimização a solução factível é o limitante superior enquanto a solução de relaxação limita inferiormente;

- A solução incumbente é a melhor solução inteira, factível, encontrada até o momento;
- Os nós das ramificações podem ser descartados por infactibilidade, qualidade (limitante) ou otimalidade.

Elucidando cada critério de eliminação de um nó da árvore *Branch-and-Bound* tem-se:

1. **Infactibilidade:** S^n é infactível. A região factível do subproblema é vazia e assim, a solução ótima não pode ser obtida no ramo atual.
2. **Qualidade:** o valor da função objetivo relativa às variáveis encontradas é menor do que o limite inferior em um problema de maximização ou maiores do que o limite superior em um problema de minimização. Assim, mesmo que outras soluções inteiras possam ser obtidas no ramo atual, elas não terão valor melhor que o da solução incumbente.
3. **Otimalidade:** as variáveis relativas ao nó satisfazem as restrições de integralidade e, portanto, não há como ramificar.

Fica em aberto a posição da lista em que os novos nós devem ser inseridos. Essa escolha pode ser crítica, pois determina a ordem de processamento dos nós e influencia diretamente no tamanho da árvore. Em geral, tem-se as seguintes regras:

1. Busca em profundidade: escolhe sempre o último nó da lista para processar. Favorece o aprofundamento de ramos e, assim, a obtenção de soluções factíveis;
2. Busca em largura: escolhe sempre o primeiro nó da lista para processar. Assim, percorre-se a árvore nível a nível;
3. Busca pelo melhor limitante: os nós são processados em ordem crescente de limitante dado pela relaxação. Em maximização (minimização) os nós com maiores (menores) limitantes são processados antes, com o intuito de levar à solução ótima do problema mais rapidamente.

Ainda, tem-se em aberto, qual o critério a ser usado para escolher em qual variável ramificar. Essa escolha também é crítica, e influencia no tamanho da árvore. Geralmente, seleciona-se a variável “mais fracionária” (parte fracionária mais próxima de 0,5).

Atualmente, os algoritmos mais eficientes em programação inteira são baseados no método *Branch-and-Bound*:

1. Método *Branch-and-Cut*: gera restrições que eliminam soluções infactíveis, restringindo ainda mais o problema e melhorando a relaxação linear;
2. Método *Branch-and-Price*: reformula o problema de modo que as colunas possam ser geradas iterativamente;
3. Método *Branch-and-Price-and-Cut*: Mistura os dois problemas anteriores. Atualmente é único capaz de obter soluções ótimas de problemas importantes em tempo viável, como roteamento de veículos, programação de produção, entre outros.

Para exemplificar o método Branch-and-Bound retomemos ao exemplo das ligas metálicas. Consideremos agora as variáveis inteiras:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
 \end{aligned}$$

Observe que, a resolução gráfica para esse problema difere um pouco da solução inicial, já que as soluções factíveis são dadas pelos pontos azuis na Figura 16, enquanto as soluções factíveis da relaxação linear são dadas por toda a região amarela, o que implica que a solução inteira é pior do que a solução relaxada. Para exemplificar a afirmação já citada de que arredondamentos não geram boas soluções, nota-se que, ao arredondar a solução do problema relaxado $(4,62; 2,3)$ para o inteiro mais próximo, tem-se $(5,2)$, que não pertence às soluções factíveis. Ao arredondar para baixo, teríamos o ponto $(4,2)$ cujo valor da função objetivo é $f(4,2) = 16$, que é pior do que a solução ótima (que é $f(6,0) = 18$, como pode-se ver no gráfico).

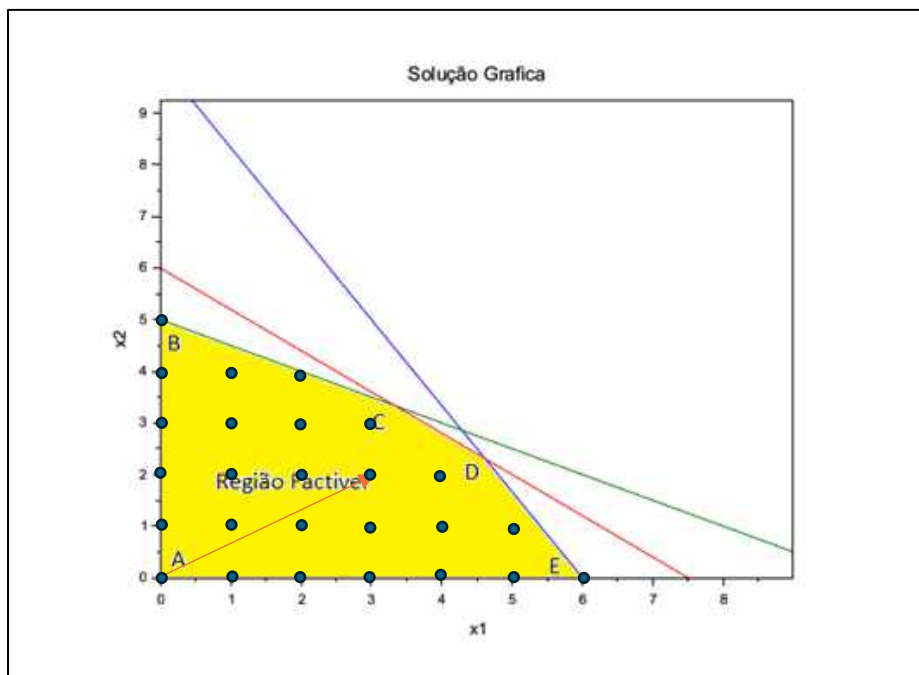


Figura 16: Representação dos pontos inteiros na solução gráfica (do Autor).

Resolvendo o problema pelo método *Branch-and-Bound* resulta na árvore ilustrada na Figura 17 a seguir.

O método é aplicado inicialmente ao nó raiz. Como o método ainda está no início a solução incumbente é vazia, limitante inferior $-\infty$ e os nós na árvore são $\{0\}$. Para o nó raiz definimos o sub-problema 0, ao qual aplica-se a relaxação linear:

$$\begin{aligned}
 S^{(0)} \max f(x_1, x_2) &= 3x_1 + 2x_2 \\
 0,5x_1 + 0,3x_2 &\leq 3 \\
 0,1x_1 + 0,2x_2 &\leq 1 \\
 0,4x_1 + 0,5x_2 &\leq 3 \\
 x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

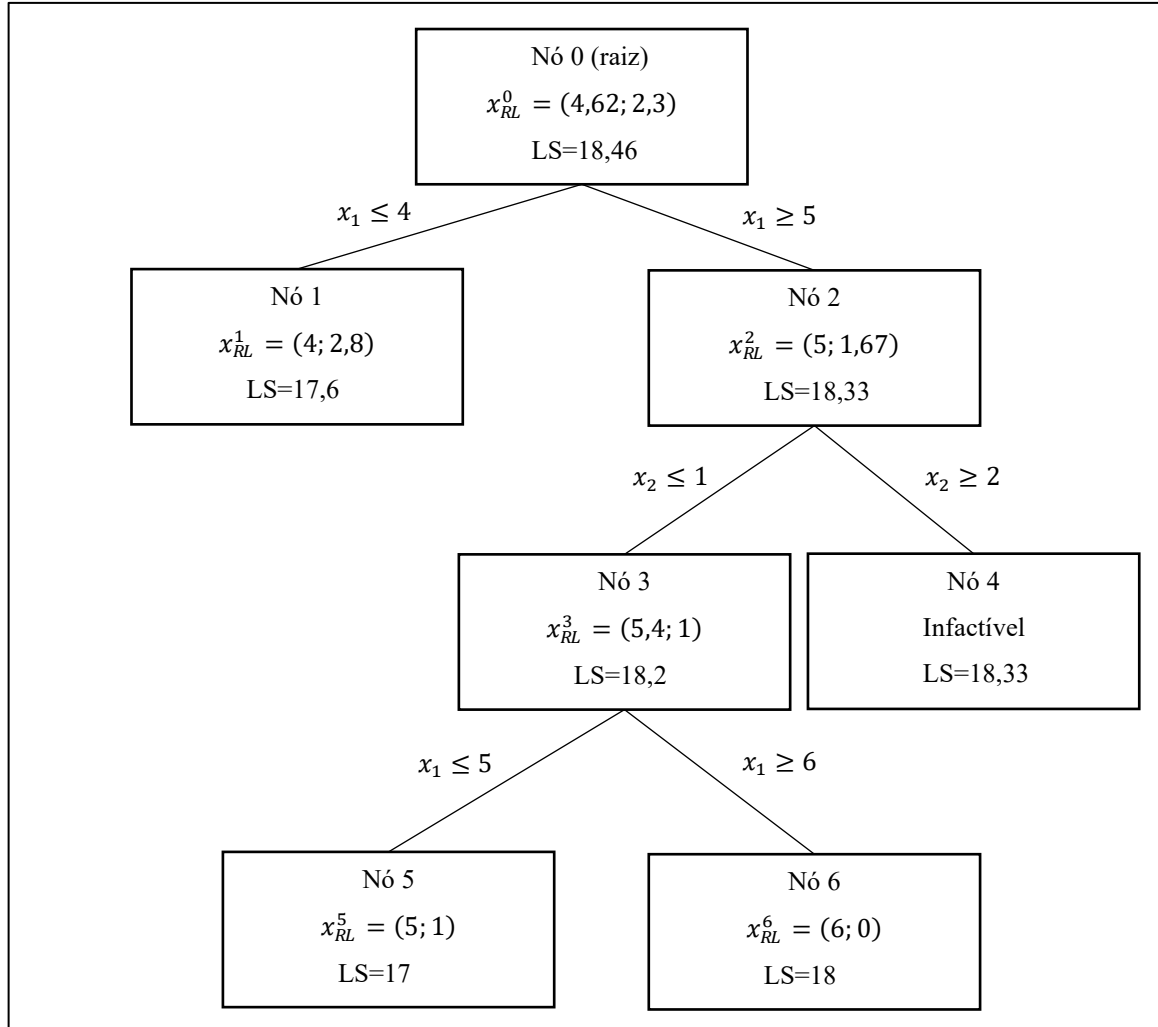


Figura 17: Árvore gerada pela aplicação do método *Branch-and-Bound* no exemplo (do Autor).

Para o qual encontra-se a solução ótima: $(x_{RL}^0 = (4,62; 2,3), f(x) = 18,46)$. Define-se então o limite superior como: $LS = 18,46$. Temos então como opções para ramificar: $x_1 = 4,62$ e $x_2 = 2,3$. Escolhe-se $x_1 = 4,62$ por ter a parte fracionária mais próxima de 0,5. Ramifica-se então os nós 1 e 2, conforme Figura 18, para os quais temos os seguintes subproblemas:

$$\begin{aligned}
 S^{(1)} \max f(x_1, x_2) &= 3x_1 + 2x_2 \\
 0,5x_1 + 0,3x_2 &\leq 3 \\
 0,1x_1 + 0,2x_2 &\leq 1 \\
 0,4x_1 + 0,5x_2 &\leq 3 \\
 x_1 &\leq 4 \\
 x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{(2)} \max f(x_1, x_2) &= 3x_1 + 2x_2 \\
0,5x_1 + 0,3x_2 &\leq 3 \\
0,1x_1 + 0,2x_2 &\leq 1 \\
0,4x_1 + 0,5x_2 &\leq 3 \\
x_1 &\geq 5 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

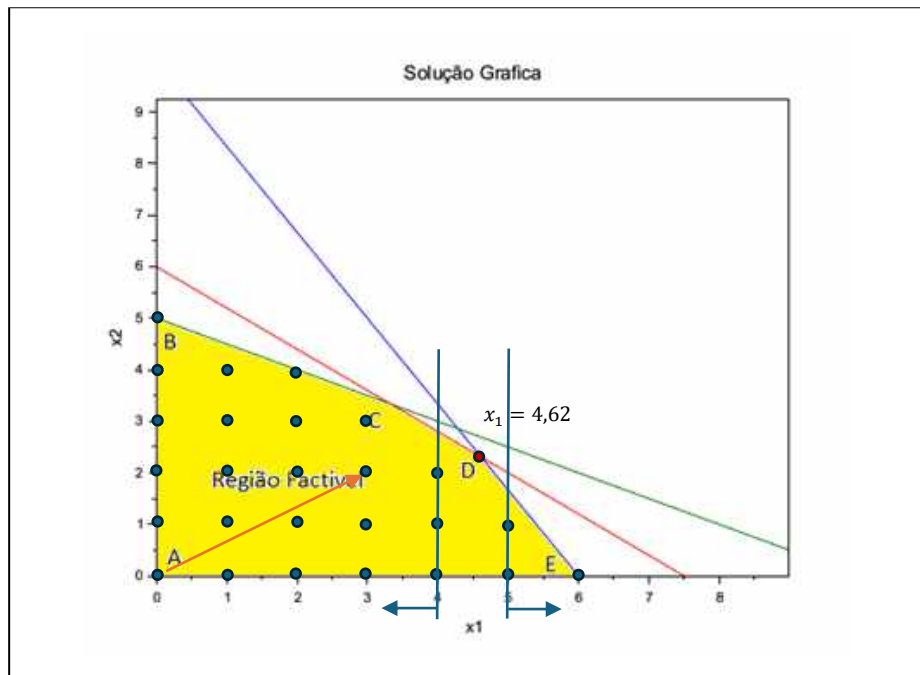


Figura 18: Ramificação do nó zero, subdividindo em duas regiões (do Autor).

Escolhendo uma busca em profundidade, aplica-se a relaxação linear ao nó 2, para o qual encontra-se, com a relaxação linear $x_{RL}^2 = (5; 1,67)$ LS=18,33. Encontrou-se um valor inteiro para x_1 , sendo x_2 fracionário.

Ramifica-se então x_2 , definindo mais dois nós:

$$\begin{aligned}
S^{(3)} \max f(x_1, x_2) &= 3x_1 + 2x_2 \\
0,5x_1 + 0,3x_2 &\leq 3 \\
0,1x_1 + 0,2x_2 &\leq 1 \\
0,4x_1 + 0,5x_2 &\leq 3 \\
x_1 &\geq 5 \\
x_2 &\leq 1 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{(4)} \max f(x_1, x_2) &= 3x_1 + 2x_2 \\
0,5x_1 + 0,3x_2 &\leq 3 \\
0,1x_1 + 0,2x_2 &\leq 1 \\
0,4x_1 + 0,5x_2 &\leq 3 \\
x_1 &\geq 5 \\
x_2 &\geq 2 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Com a busca em profundidade resolve-se o nó 4, para o qual, realizando a interseção das restrições, não se encontra uma região factível. Então descarta-se o nó por infactibilidade e parte-se para o nó 3. Resolvendo a relaxação linear para o nó 3 (problema $S^{(3)}$), encontra-se $x_{RL}^3 = (5,4; 1)$ LS=18,2. Com $x_1 = 5,4$ fracionário ramifica-se mais uma vez, nos nós 5 e 6.

$$\begin{aligned}
S^{(5)} \max f(x_1, x_2) &= 3x_1 + 2x_2 \\
0,5x_1 + 0,3x_2 &\leq 3 \\
0,1x_1 + 0,2x_2 &\leq 1 \\
0,4x_1 + 0,5x_2 &\leq 3 \\
x_1 &\geq 5 \\
x_2 &\leq 1 \\
x_1 &\leq 5 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{(6)} \max f(x_1, x_2) &= 3x_1 + 2x_2 \\
0,5x_1 + 0,3x_2 &\leq 3 \\
0,1x_1 + 0,2x_2 &\leq 1 \\
0,4x_1 + 0,5x_2 &\leq 3 \\
x_1 &\geq 5 \\
x_2 &\leq 1 \\
x_1 &\geq 6 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Resolvendo o nó 6 pela relaxação linear, encontra-se: Nó 6 $x_{RL}^6 = (6; 0)$ LS=18. Que é uma solução incumbente, por ser inteira. Descarta-se então o nó por otimalidade. Agora tem-se um limitante inferior LI=18.

Processando-se agora o nó 5 encontra-se: $x_{RL}^5 = (5; 1)$ LS=17. Como a solução é pior que o nó 6, descarta-se o nó por qualidade e parte-se para o nó 1, a fim de investigar o restante da árvore.

Retornando ao nó 1 e aplicando a relaxação linear temos: $x_{RL}^1 = (4; 2,8)$ LS=17,6. Como o limitante superior é pior que o inferior, não é necessário mais ramificar. Nó eliminado por qualidade.

Então o valor ótimo é 18 e o nó 6 é a solução final.

O Capítulo 3 trata da aplicação de Programação Linear Inteira proposta para esse trabalho.

3. APLICAÇÃO DO PROBLEMA

O problema proposto no presente trabalho se refere a alocação de carga horária didática nas instituições. Considerando a organização dos cursos, tanto a alocação da carga horária, quanto a alocação dos horários das disciplinas são casos complexos a serem tratados. Quanto maior a instituição ou curso considerado, maior a quantidade de professores e turmas, todos com várias disciplinas a serem distribuídas de acordo com a preferência, formação e disponibilidade dos docentes.

Vale ressaltar que há a dependência do espaço físico e da diferença ou concomitância de horário, o que contribui ou dificulta essa distribuição de carga horária. Tal panorama resulta num problema complexo, muito difícil de ser resolvido manualmente, conhecido como ***Timetabling Problem***. Tal problema é definido, segundo [28], como um problema de alocação de objetos em determinado tempo-espaço, dados os recursos à disposição e, satisfazendo o máximo de objetivos possíveis mediante as restrições às quais esses objetos estão sujeitos.

Sua definição é ampla e, conforme [10], se subdivide em vários subproblemas, dos quais vale citar:

Class-Teacher Timetabling: comum nas escolas de ensino médio, consistem em determinar o horário da escola tendo as turmas e professores já alocados;

Student Scheduling: consiste em atribuir alunos às diferentes sessões de horários de determinada disciplina, considerando as restrições de capacidade e sobreposição de horários;

Classroom Assignment: consistem em atribuir salas por período, considerando as restrições como localização, tamanho ou preferências.

Teacher Assignment: atribuição de professores às disciplinas com a maximização da preferência, respeitadas as restrições impostas, que é o modelo do presente trabalho.

Devido a grande quantidade de possibilidades e particularidades impostas, problemas de agendamentos de horários são geralmente problemas NP-Difíceis [8], ou seja, não se conhece um algoritmo eficiente (de tempo polinomial) para resolvê-los, mas cujas soluções, se fornecidas, podem ser verificadas eficientemente.

A maioria dos problemas NP-difíceis não tem algoritmos eficientes conhecidos para encontrar soluções ótimas. Isso leva à necessidade de algoritmos aproximados, algoritmos heurísticos, ou técnicas de programação não exata.

Muitos problemas do mundo real, como roteamento de veículos, agendamento, otimização de recursos, e criptografia, são exemplos de problemas que podem ser modelados como problemas NP-difíceis.

Desta forma, tomando como base o trabalho realizado em [9], a formulação de um problema de programação linear inteira foi proposta. A fim de entender a formulação, primeiramente será explicitada a seguir, estrutura do curso analisado.

3.1. DESCRIÇÃO DO CURSO:

Esse trabalho foi inspirado na alocação da carga horária didática do curso de Estatística da Universidade Federal de Uberlândia para o semestre 2025/1, ou seja, é um problema de *Teacher Assignment*. Foram considerados 17 professores efetivos e 2 substitutos com cargas horárias variando de 8 a 15 horas semanais. Os professores foram ranqueados a fim de definir a carga didática mínima e máxima para cada docente. As distribuições se encontram na Tabela 1. Os professores no rank de 1 a 5 recebem de 8 a 9 horas-aula semanais. Em seguida, para o rank de 6 a 12, têm de 10 a 11 horas-aula atribuídas. No próximo grupo de professores, de 13 a 17, ficou estabelecida a possibilidade de atribuição de 11 a 12 horas-aula, exceto para o Professor 15, cuja carga horária deve ser entre 8 e 10 horas-aula. Por fim, os professores substitutos ficam com a carga horária, de 12 a 15 horas-aula.

É importante destacar que, para adaptar o algoritmo desenvolvido em [9], foi necessário definir as cargas didáticas mínima e máxima para cada docente. No entanto, conforme resolução do Departamento de Estatística, os docentes são divididos em grupos com diferentes cargas didáticas mínimas. A estratégia adotada neste trabalho foi aproximar as faixas aos respectivos grupos.

Tabela 1: Ranking de professores e respectiva carga horária

Nome	Rank	CH-min	CH-max
Professor 1	1	8	9
Professor 2	2	8	9
Professor 3	3	8	9
Professor 4	4	8	9
Professor 5	5	8	9
Professor 6	6	10	11
Professor 7	7	10	11
Professor 8	8	10	11
Professor 9	9	10	11

Professor 10	10	10	11
Professor 11	11	10	11
Professor 12	12	10	11
Professor 13	13	11	12
Professor 14	14	11	12
Professor 15	15	8	10
Professor 16	16	11	12
Professor 17	17	11	12
Substituto 1	18	12	15
Substituto 2	19	12	15

Como não há uma listagem de preferências de disciplinas por professor no curso de Estatística em específico, foi utilizada a biblioteca *Random* do Python para selecionar para cada professor 15 disciplinas, dentre as 50 disciplinas disponíveis (descritas no Anexo I), para compor as disciplinas de sua preferência. Entretanto, ressalta-se que, propositalmente, 4 disciplinas (Tabela 2) foram sorteadas para não constar na listagem de preferências de nenhum professor e, 25 das disciplinas restantes foram selecionadas obrigatoriamente por mais de um professor. A listagem de preferências por professor pode ser visualizada no Anexo II. Para melhor organização da tabela as disciplinas foram colocadas em apelidos, conforme Anexo III.

Tabela 2: Disciplinas que não foram sorteadas na lista de prioridades.

Disciplinas excluídas:
Prof Merc
Bioest-TN
An Dados 1 - A
Est Apl Psico

É importante destacar que todas as disciplinas precisam ser alocadas para serem lecionadas, mesmo que não estejam na listagem de nenhum professor. A Tabela 3 lista as disciplinas que são mais frequentes nas listagens dos professores. Essas, por sua vez, não podem ser alocadas a vários professores simultaneamente, o que requer um critério de escolha a ser determinado.

Tabela 3: Disciplinas mais escolhidas pelos professores

Disciplina	Quantidade de professores que a escolheram
Prob 3	12
Est - Mct / Aer	12
Cont E Qual	10
Est 2 - FAMAT	10
Est - Eng Quim	9

Desta forma, baseado em [9], modelamos na próxima seção o problema proposto.

3.2. MODELAGEM

Seja $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, P\}$ o conjunto dos professores, $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T\}$ o conjunto das disciplinas, $\mathcal{H} = \{1, 2, \dots, H\}$ o conjunto dos horários disponíveis e $\mathcal{D} = \{1, 2, \dots, D\}$ o conjunto dos dias da semana considerados. Cada professor $p \in \mathcal{P}$ deve ser alocado para lecionar a uma disciplina $t \in \mathcal{T}$, em um horário $h \in \mathcal{H}$ de um dia $d \in \mathcal{D}$. No problema em estudo, tem-se $P = 17$, $T = 50$, $H = 17$ e $D = 5$. A variável de decisão $x(p, t)$ representa a atribuição professor-disciplina e é dada por:

$$x(p, t) = \begin{cases} 1, & \text{se o professor } p \text{ for alocado à turma } t; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A carga horária do professor deve ser atribuída dentro de um limite máximo e mínimo, ou seja, dentro do intervalo $[H_{min}(p), H_{max}(p)]$. Para o problema proposto, tais limites estão definidos conforme a Tabela 1 (colunas CH-min e CH-max).

Os horários associados à cada disciplina são fixados e armazenados da seguinte forma:

$$HT(t, h, d) = \begin{cases} 1, & \text{se a disciplina } t \text{ tem aula no horário } h \text{ do dia } d; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De acordo com a preferência do professor p pela disciplina t , um peso $e(p, t) \in \{1, 2, \dots, 10\}$ foi atribuído à mesma. A escala é crescente sendo 1 quando o professor tem pouco interesse em lecionar a disciplina e 10 quando o professor tem muito interesse. Para este trabalho foi considerado o vetor

$$pesos_preferencias = [10, 10, 9, 9, 8, 8, 7, 7, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1]$$

que atribui peso 10 para as duas primeiras disciplinas da listagem, peso 9 para a terceira e a quarta e assim sucessivamente. Caso a disciplina não esteja na listagem de preferências do professor, considera-se peso nulo.

A fim de valorizar a posição do ranking em que o professor ocupa, foi considerado um peso $w(p)$ na função objetivo. Neste trabalho foram testados dois pesos:

$$w_1(p) = \frac{1}{rank(p)}$$

$$w_2(p) = 10,94e^{-0,0225rank(p)}$$

O peso $w_1(p)$ consiste em dividir 1 pela posição do ranking do professor e o segundo peso $w_2(p)$ foi definido utilizando um ajuste de curva exponencial passando pelos pontos (1,10), (6,9), (12,8) e (19,7).

A função objetivo do problema é modelada com a finalidade de maximizar a satisfação total dos professores, a saber:

$$S = \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T w(p)e(p,t)x(p,t)$$

A formulação considerada é descrita abaixo:

$$\max \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T w(p)e(p,t)x(p,t)$$

Sujeito a

$$\sum_{p=1}^P x(p,t) = 1, \forall t \quad (1)$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{h=1}^H \sum_{d=1}^D HT(t,h,d)x(p,t) \geq H_{min}(p), \forall p \quad (2)$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{h=1}^H \sum_{d=1}^D HT(t,h,d)x(p,t) \leq H_{max}(p), \forall p \quad (3)$$

$$\sum_{t=1}^T HT(t,h,d)x(p,t) \leq 1 \forall p, h, d \quad (4)$$

$$x(p,t_1) + x(p,t_2) \leq 1 \forall t_1, t_2, campus(t_1) \neq campus(t_2), HT(t_1, h, d) = HT(t_2, h+1, d) = 1 \quad (5)$$

A restrição (1) garante que toda disciplina t será atribuída a um e apenas um professor. As restrições (2) e (3) garantem que os limites máximos e mínimos de carga horária semanal de cada professor sejam respeitados. A restrição (4) foi adicionada para que cada professor não assuma mais do que uma disciplina em um mesmo horário de determinado dia, evitando conflito de horário. Por último, a restrição (5) garante que disciplinas em horários consecutivos (h e $h+1$) no mesmo dia em campi diferentes não seja atribuída ao mesmo professor, evitando que um professor termine uma aula em um campus e tenha aula em sequência em um campus geograficamente distante.

4. METODOLOGIA

Definida a função objetivo e impostas as restrições, um algoritmo foi implementado a fim de determinar a melhor distribuição de carga horaria didática para o semestre de 2025/1 do curso de Estatística.

O ambiente escolhido para implementação do algoritmo foi o Google Colaboratory (Colab), uma plataforma baseada em nuvem que permite a criação e execução de notebooks interativos em Python diretamente no navegador, sem necessidade de configuração local. O Colab é amplamente utilizado em aplicações de aprendizado de máquina, análise de dados e ensino em programação, por oferecer recursos computacionais escaláveis (aumenta ou diminui os recursos como CPU, memória RAM, GPU ou TPU conforme a demanda do usuário) e a bibliotecas Python pré-instaladas. Como a execução ocorre em servidores remotos do Google, o uso da ferramenta elimina a exigência de instalação local do interpretador Python e de seus pacotes.

No Colab foi utilizada a biblioteca Pyomo (Python Optimization Modeling Objects) para a modelagem do problema de programação linear inteira, juntamente com o solver CBC. O Pyomo [11][5] é uma estrutura em Python voltada para a formulação de problemas de otimização matemática com sintaxe intuitiva, boa integração com outras ferramentas além de ser flexível, poderoso e oferecer amplo suporte acadêmico. Já o CBC (*Coin-or Branch and Cut*) é um solver de código aberto especializado em problemas de otimização combinatória e Programação Inteira Mista (MIP). Em resumo, o Pyomo é utilizado para representar matematicamente o problema de otimização enquanto o CBC executa o processo de busca pela solução ótima.

O princípio do CBC (*Coin-or Branch and Cut*) no Pyomo é resolver problemas de otimização, especialmente LP e MIP utilizando uma abordagem de divisão e conquista (*branch and cut*). Ele divide o problema original em subproblemas menores e, em seguida, utiliza cortes (*cuts*) para refinar a solução e reduzir o espaço de busca.

Dessa forma, devido à sua praticidade, integração com o Google Drive e facilidade de uso em ambientes remotos, o Colab foi adotado como ambiente de desenvolvimento. Em conjunto com a biblioteca Pyomo e o solver CBC, o Colab permitiu a implementação e execução da modelagem matemática proposta para a resolução do problema.

4.1. FORMULAÇÃO ALGORITMO

O algoritmo foi realizado em três partes a saber:

1. Leitura dos dados das planilhas e organização dos dados;
2. Formulação da função objetivo e execução do solver;
3. Organização das respostas e dados de saída.

Na leitura dos dados das planilhas são importadas as bibliotecas para análise dos dados e é realizada a autenticação da conta Google. Em seguida são realizadas as leituras, e os dados extraídos das planilhas são organizados nas variáveis que serão trabalhadas na resolução do problema, conforme fluxograma ilustrado na Figura 19.

Em seguida são definidas as funções de peso conforme equacionamento definido, são preparados os possíveis pares de possibilidade de alocação de carga horária e são definidas as variáveis binárias do problema. Na sequência, a função objetivo e as funções de restrição do problema são definidas no código e tem-se tudo para execução do problema através do solver definido, conforme Figura 20.

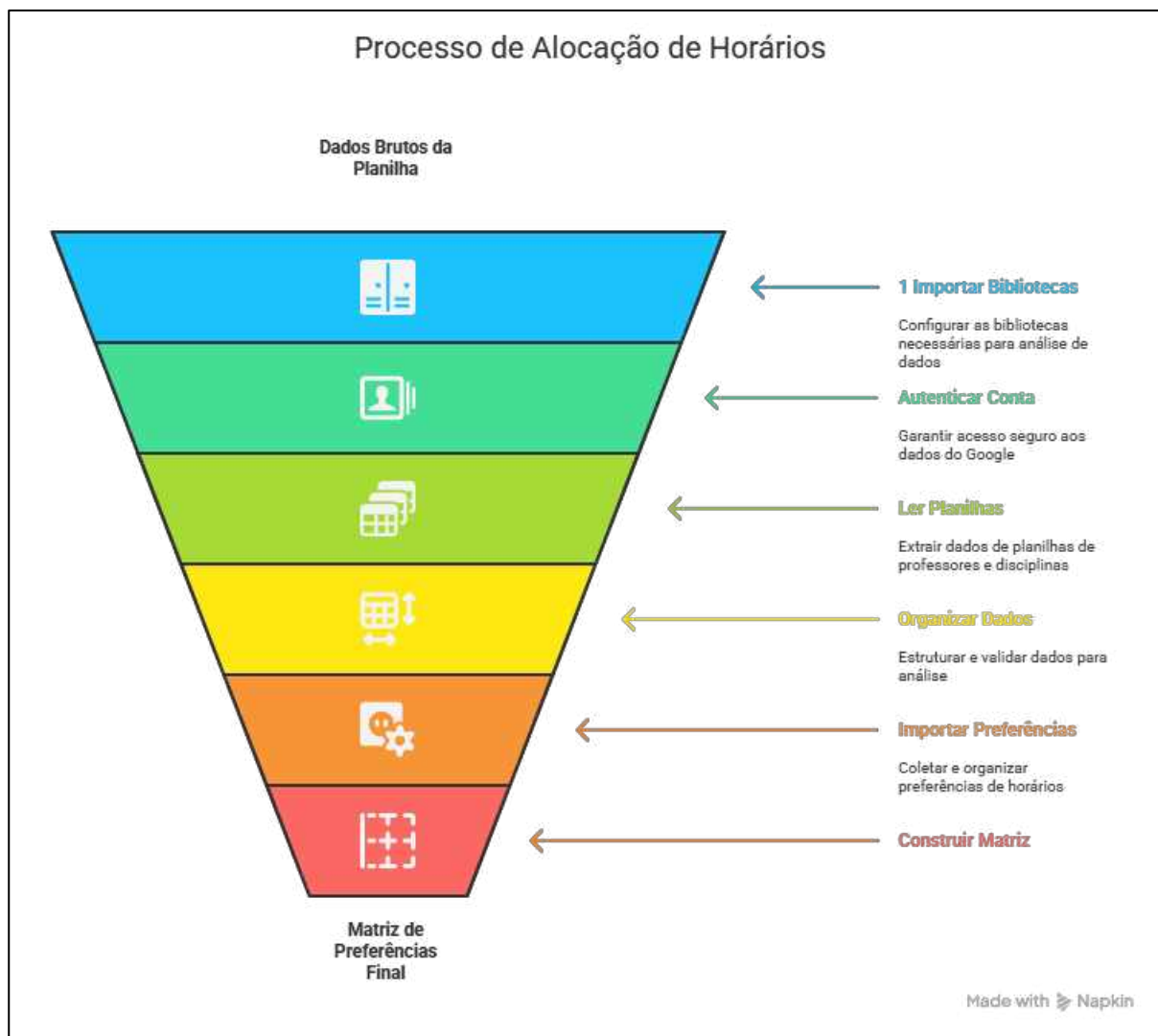


Figura 19: Processo de leitura e tratamento dos dados (do Autor).

Por fim, para exibir os dados da solução do problema, as variáveis são preparadas e o cabeçalho com os dados da solução são devidamente preparados e organizados a fim de se exibir tudo o que foi alocado, bem como as métricas obtidas com a solução, a saber: índice de satisfação, quantidade de carga didática, quantidade de ocorrência de satisfação zero, posição da primeira ocorrência de satisfação zero, carga didática média dos efetivos. O fluxograma do código desenvolvido pode ser visualizado na Figura 21.

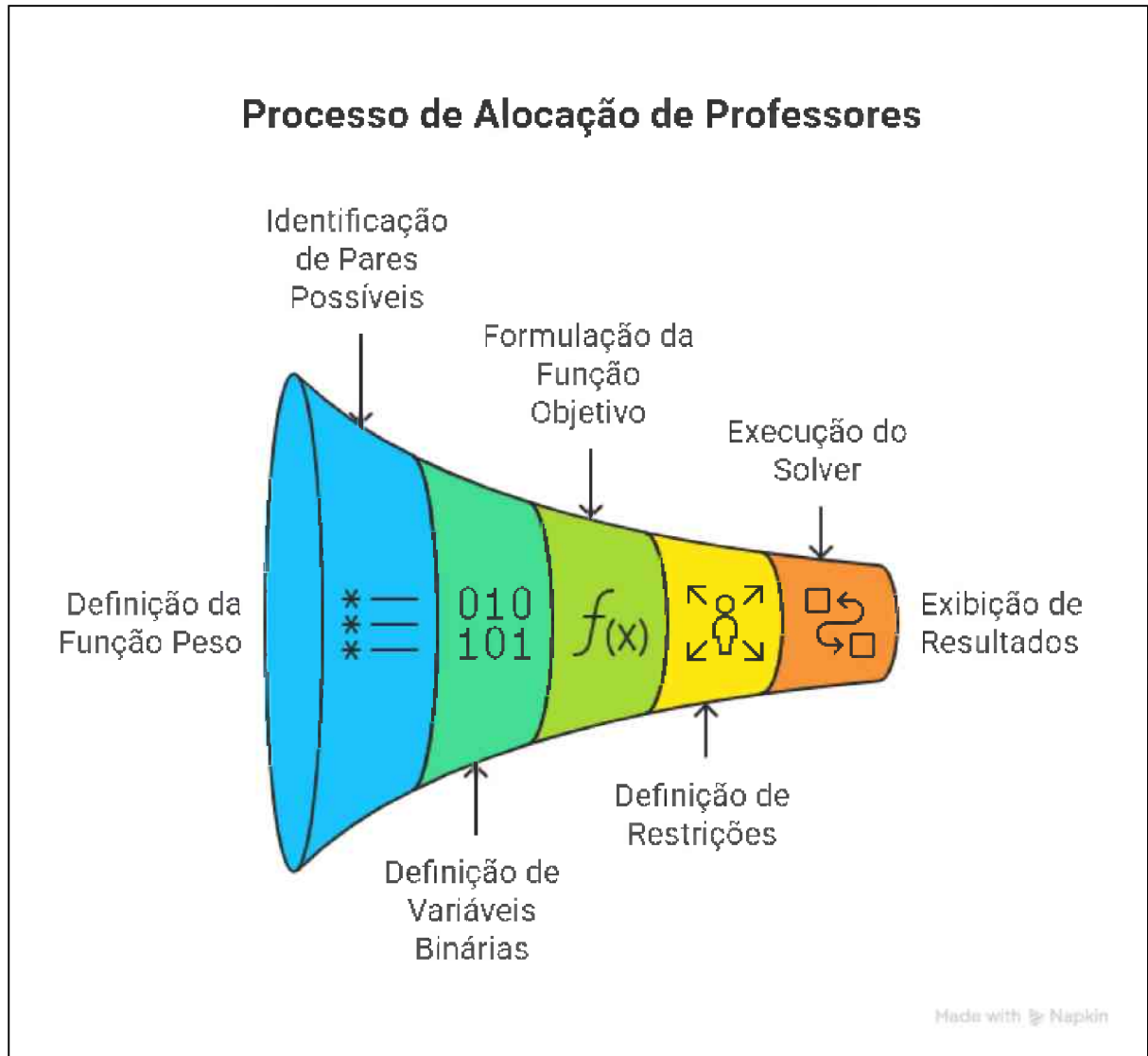


Figura 20: Fluxograma do processo de alocação da carga didática (do Autor).

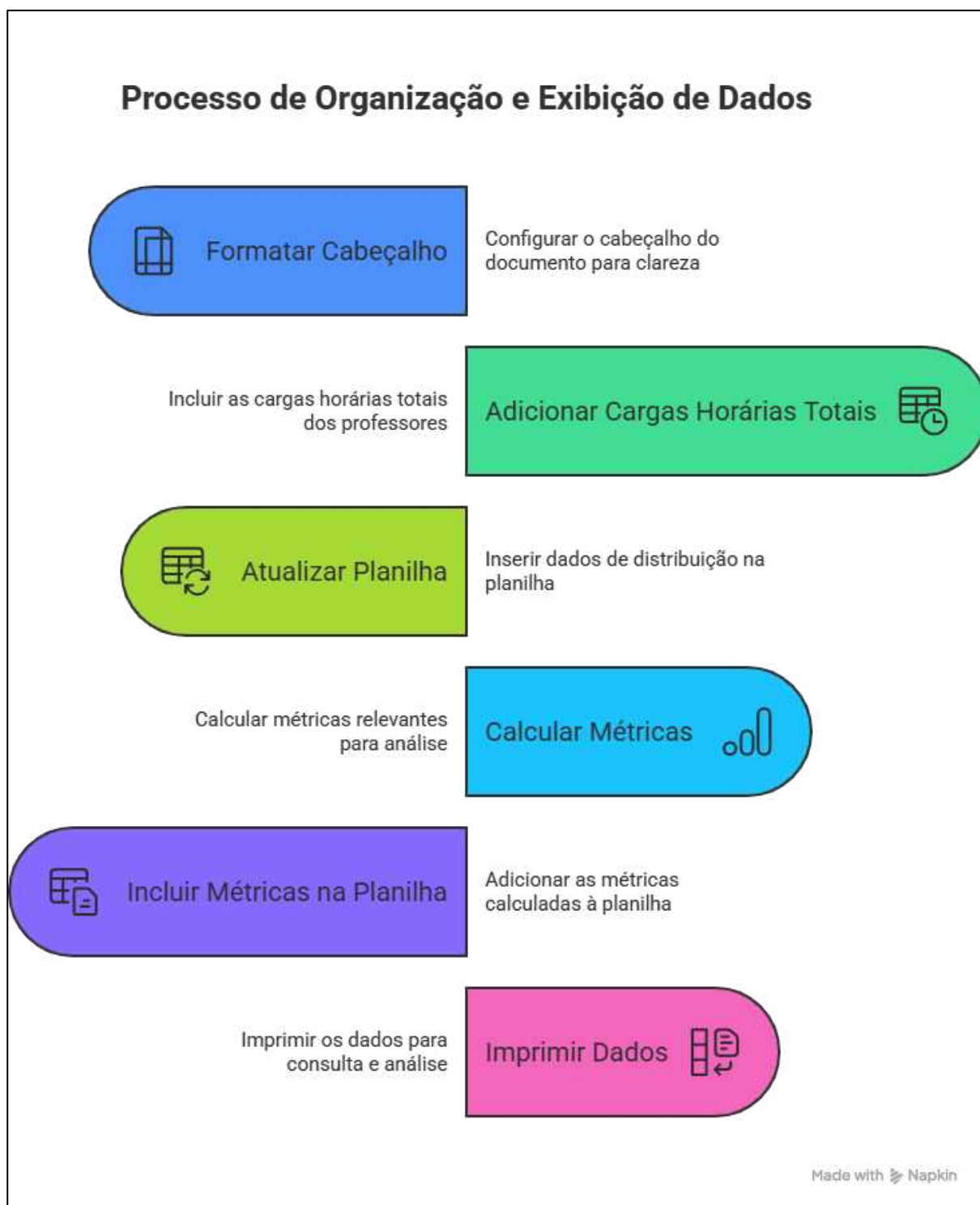


Figura 21: Fluxograma da organização da saída de dados (do Autor).

Os resultados encontrados, após a execução do algoritmo para os pesos w_1 e w_2 , estão explicitados no Capítulo 5 a seguir.

5. DESCRIÇÃO E ANÁLISES DOS RESULTADOS

A execução do código desenvolvido resultou na alocação da carga horária entre os professores, respeitando as restrições definidas no modelo matemático. A partir dessa alocação, foram determinados os valores de satisfação correspondentes, calculados com base nos pesos de preferência atribuídos a cada disciplina. Esses valores permitem avaliar o desempenho da solução quanto à função objetivo, que visa maximizar a satisfação dos docentes com as disciplinas atribuídas.

$$\text{CASO 1: } w(p) = \frac{1}{\text{rank}(p)}$$

A distribuição por professor e o índice de satisfação para o Caso 1 podem ser observados nas Tabelas 4 a 6.

Tabela 4: Distribuição por professor e satisfação $\left(w(p) = \frac{1}{\text{rank}(p)}\right)$ – Grupo 1

Professor	Disciplina	CH	CH total	Índice de Satisfação	Satisfação média
Professor 1	Fund Est Apl	4	9	10	10,00
	Est Apl Vet	5		10	
Professor 2	Est - Cont C	4	8	9	9,50
	Est 1 - FAMAT	4		10	
Professor 3	An Dados 2 - B	4	8	10	9,00
	OPT1 - Tópicos	4		8	
Professor 4	Est - Mct / Aer	4	8	9	9,50
	ICD	4		10	
Professor 5	Est - Eng Civ	4	8	10	10,00
	Est - Eng Quim	4		10	

Tabela 5: Distribuição por professor e satisfação $\left(w(p) = \frac{1}{\text{rank}(p)}\right)$ – Grupo 2

Professor	Disciplina	CH	CH total	Índice de Satisfação	Satisfação média
Professor 6	Mod Lin Gen	4	10	9	8,67
	Prob 1	4		10	
	TCC2	2		7	
Professor 7	Bioest	3	11	2	6,33
	Bioest	4		10	
	Inf Bay	4		7	
Professor 8	Est - Cienc Comp	4	10	9	8,33
	Prob 3	4		10	
	TCC1	2		6	
Professor 9	Est - Agr	3	11	8	8,00
	Est - Fis Med - V	4		7	

	Cont E Qual	4		9	
Professor 10	Bioest-TN	3	11	0	5,00
	Est 2 - FAMAT	4		6	
	Est Apl Psico	4		9	
Professor 11	Inf Est 2	4	11	10	7,33
	Bioest/Met3	3		4	
	Est - Zoot	4		8	
Professor 12	Bioest-TL/TB	3	11	10	8,67
	An Regr	4		9	
	Est Comp	4		7	

Tabela 6: Distribuição por professor e satisfação $\left(w(p) = \frac{1}{rank(p)}\right)$ – Grupo 3

Professor	Disciplina	CH	CH total	Índice de Satisfação	Satisfação média
Professor 13	Est Multiv	6	11	10	10,00
	Est Prob	5		10	
Professor 14	Est - Eng Elet - U	4	12	6	4,67
	Est - Eng Mec	4		10	
	An S Temp	4		8	
Professor 15	Bioest	4	8	9	9,50
	Proc Estoc	4		10	
Professor 16	An Dados 1 - B	4	12	10	6,33
	An Dados 1 - A	4		0	
	An Dados 2 - A	4		9	
Professor 17	Est - Eng Amb	4	12	10	8,00
	Prob 2	4		7	
	Est - Sis Inf	4		7	
Substituto 1	Est - Cont I	4	14	0	
	Amost	4		0	
	Inf Est 1	6		0	
Substituto 2	Plan An Exper	6	14	0	
	Prof Merc	4		0	
	Est Apl Psico	4		0	

Analisando as tabelas percebe-se que todos os limites de carga horária foram respeitados, segundo o ranking estabelecido previamente. Também foi constatado que os melhores índices de satisfação se encontram no Grupo 1, grupo com melhor posição no ranking, enquanto os piores índices de satisfação se encontram nos grupos 2 e 3.

Realizando uma média geral encontrou-se o valor 8,17 para a satisfação para o Caso 1, conforme valor explicitado na Tabela 7. A distribuição foi verificada e observou-se que todos os horários foram devidamente alocados sem sobreposição e não há o conflito de aulas consecutivas em campi distintos alocadas para um mesmo professor.

Tabela 7: Satisfação média e carga horária alocada para o Caso 1

Média de satisfação Geral	8,17
CH total	199

As frequências dos índices de satisfação dentre os efetivos também foram analisadas por disciplina alocada para o Caso 1. O resultado pode ser observado na Tabela 8. Observa-se que a maioria das disciplinas alocadas se concentraram nos índices 9 e 10. Isso implica que a maioria dos docentes tiveram disciplinas que desejavam lecionar atribuídas a eles.

Tabela 8: Índice de satisfação por disciplina alocada - Caso 1

Índice de satisfação (Efetivos)	Frequência
0	2
2	1
4	1
6	3
7	6
8	4
9	9
10	18

Por fim, a Tabela 9 apresenta algumas métricas extraídas do Caso 1. Analisando a tabela, pode-se perceber que o primeiro índice satisfação 0 (insatisfação) ocorreu na décima posição do ranking (dentre 17 professores), ocorrendo no total apenas duas vezes. A carga horária média dos efetivos foi de aproximadamente 10 horas-aula semanais.

Tabela 9: Índice de satisfação por disciplina alocada

Média de satisfação (efetivos)	8,16
Quantidade de ocorrências de satisfação 0 (efetivos)	2
Posição do 1º prof. efetivo c/ satisf. 0 (no ranking)	10
Carga horária média (efetivos)	10,06

$$\text{CASO 2: } w_2(p) = 10,94e^{-0,0225\text{rank}(p)}$$

A carga horária por professor e o índice de satisfação para o Caso 2 podem ser observados nas Tabelas 10 a 12.

Tabela 10: Distribuição por professor e satisfação ($w_2 = 10,94e^{-0,0225rank(p)}$) – Grupo 1

Professor	Disciplina	CH	CH total	Índice de Satisfação	Satisfação média
Professor 1	Fund Est Apl	4	9	10	10,00
	Est Apl Vet	5		10	
Professor 2	Est - Cont C	4	8	9	8,50
	Est 2 - FAMAT	4		8	
Professor 3	An Dados 2 - B	4	8	10	9,00
	OPT1 - Tópicos	4		8	
Professor 4	Est - Eng Quim	4	8	8	9,00
	ICD	4		10	
Professor 5	Bioest-TL/TB	3	9	9	8,50
	Est Multiv	6		8	

Tabela 11: Distribuição por professor e satisfação ($w_2 = 10,94e^{-0,0225rank(p)}$) – Grupo 2

Professor	Disciplina	CH	CH total	Índice de Satisfação	Satisfação média
Professor 6	Mod Lin Gen	4	10	9	8,67
	Prob 1	4		10	
	TCC2	2		7	
Professor 7	Bioest	3	11	2	7,33
	An Regr	4		10	
	Bioest	4		10	
Professor 8	Amost	4	10	6	7,33
	TCC1	2		6	
	Est - Sis Inf	4		10	
Professor 9	Est - Agr	3	11	8	7,00
	Est - Fis Med - V	4		7	
	Prob 2	4		6	
Professor 10	Bioest-TN	3	11	0	6,33
	Est 1 - FAMAT	4		10	
	Est Apl Psico	4		9	
Professor 11	Inf Est 2	4	11	10	7,33
	Bioest/Met3	3		4	
	Est - Zoot	4		8	
Professor 12	Est Comp	4	10	7	8,50
	Plan An Exper	6		10	

Tabela 12: Distribuição por professor e satisfação ($w_2 = 10,94e^{-0,0225rank(p)}$) – Grupo 3

Professor	Disciplina	CH	CH total	Índice de Satisfação	Satisfação média
Professor 13	Est - Cienc Comp	4	12	9	8,33
	Est - Cont I	4		8	
	Prob 3	4		8	
Professor 14	Est - Eng Mec	4	12	10	9,00

	An S Temp	4		8	
	Cont E Qual	4		9	
Professor 15	Bioest	4	8	9	9,50
	Proc Estoc	4		10	
Professor 16	An Dados 1 - B	4	12	10	9,67
	An Dados 2 - A	4		9	
	Est - Mct / Aer	4		10	
Professor 17	Est - Eng Amb	4	12	10	9,00
	Est - Eng Civ	4		9	
	Inf Bay	4		8	
Substituto 1	Inf Est 1	6	15	0	
	Est Prob	5		0	
	Est Apl Psico	4		0	
Substituto 2	An Dados 1 - A	4	12	0	
	Est - Eng Elet - U	4		0	
	Prof Merc	4		0	

Analisando as tabelas observa-se que todas as cargas horárias atribuídas aos professores também respeitaram o limite estabelecido. Quanto aos índices de satisfação, pode ser observado um aumento da satisfação do Grupo 3, quando comparados com o Caso 1. O Grupo 2 permanece com os menores valores de satisfação.

Calculando a média geral do índice de satisfação, observa-se um valor ligeiramente maior que o valor observado no Caso 1, indicando uma melhor alocação das disciplinas quando levadas em consideração as preferências de disciplinas segundo o ranking estabelecido. A carga horária distribuída também contemplou todas as aulas disponíveis para o semestre sem conflitos.

Tabela 13: Satisfação média e carga horaria alocada para o Saso 2

Média satisfação geral	8,41
CH total	199

Analisando as frequências dos índices de satisfação por disciplina alocada, temos 35 disciplinas alocadas com satisfação igual ou superior a 8 para o Caso 2, enquanto temos apenas 31 com similar satisfação para o Caso 1. Pode ser observado que há apenas uma disciplina alocada com satisfação nula para este caso.

Tabela 14: Índice de satisfação por disciplina alocada - Caso 2

Índice de satisfação (Efetivos)	Frequência
---------------------------------	------------

0	1
2	1
4	1
6	3
7	3
8	10
9	9
10	16

Finalmente com as métricas determinadas, observa-se um aumento no índice de satisfação geral média para o caso exponencial, quando comparado com o Caso 1. A posição do primeiro professor efetivo com índice de satisfação nula se manteve na décima posição, enquanto houve uma leve piora na carga didática média dos efetivos. Analisando a alocação das disciplinas temos uma aula a menos alocada para os professores substitutos, se comparado ao Caso 1 (27 aulas no Caso 2 contra 28 aulas para o Caso 1).

Tabela 15: Índice de satisfação por disciplina alocada - caso 2

Média satisfação (efetivos)	8,32
Quantidade de ocorrências de satisfação 0 (efetivos)	1
Posição do 1º prof. efetivo c/ satisf. 0 (no ranking)	10
Carga horária média (efetivos)	10,12

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o desenvolvimento do presente trabalho pode ser constatado que uma boa escolha da função de penalidade ou peso é fundamental para um bom índice de satisfação, ou boa alocação das disciplinas conforme a preferência do docente. Foram exploradas duas formulações de peso, sendo possível analisar ainda diversas outras e observar sua influência na melhora do modelo proposto.

Ainda, a fim de melhorar os índices de satisfação, ou diminuir a atribuição de disciplinas indesejadas ou não preferidas para o docente lecionar, podem ser exploradas as variações de carga didática máxima e mínima através da variação da quantidade de professores em cada grupo do ranking de preferências de horários. Como pode ser observado nos resultados, o Grupo 2, de docentes com rank intermediário teve grande variação nos índices de satisfação e pode ser determinante na eficiência da alocação de carga horária, por isso, merece maior exploração.

Gostaríamos de destacar a importância e a versatilidade das ferramentas utilizadas do desenvolvimento do trabalho, permitindo a interação remota, bem como a não necessidade de instalação de softwares, ou de uma configuração avançada ou grande quantidade memória para executar e rodar a solução do problema. O problema da atribuição de carga didática ou alocação de horários tem uma solução potente, versátil que pode ser aplicada e adaptada conforme a necessidade da instituição. O uso de programação versátil, execução de dados na nuvem e ambiente de colaboração esteve presente neste trabalho e permitiu um aprimoramento e constatação da necessidade de estar integrado às tecnologias e ferramentas que, daqui para frente, serão permanentes e cada vez mais presentes na nossa vida profissional.

Ressalto também a importância da matemática aplicada e do bom desenvolvimento do raciocínio matemático, aliados ao desenvolvimento de algoritmos com aplicação à programação. Concluir um curso de licenciatura de Matemática com um trabalho que reflète a aplicação de algo prático, constitui um importante motivador para a vida profissional de professor de matemática. Desta forma, trazendo uma luz ao uso da matemática na vida em sociedade.

REFERÊNCIAS

- [1] ANDRADE, E. L., 1998, *Introdução à Pesquisa Operacional*, LTC, Rio de Janeiro, Brasil. Disponível em <https://repositorio-api.animaeducacao.com.br/server/api/core/bitstreams/0ed25a14-80fe-430b-baf5-151e80dfed2e/content> . Acesso em: 20/06/2025.
- [2] ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H.. *Pesquisa Operacional*. [recurso eletrônico] - Rio de Janeiro: Elsevier: ABEPRO, 2011. Disponível em <https://pdfcoffee.com/pesquisa-operacional-arenales-et-al2007-pdf-free.html> . Acesso em: 20/06/2025.
- [3] ARRUDA, W. G. B. et al. Aplicação do método simplex na maximização do lucro de uma empresa de doces. In: Anais do Simpósio Nacional de Engenharia de Produção: SINEP. Anais...Dourados (MS) UFGD - Unidade 2, 2018. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/sinep/116283-aplicacao-do-metodo-simplex-na-maximiza-cao-do-lucro-de-uma-empresa-de-doces>. Acesso em: 20/06/2025.
- [4] ASSAD, C. L.; CHAVEZ, J. R.; ARICA, G. G. M. de. Proposta de um algoritmo de enumeração dos vértices de um poliedro baseado no método Simplex. In: Simpósio de engenharia de produção, 7., 2019. Anais [...]. Montes Claros - MG: Faculdade Santo Agostinho - FASA, 2019. ISSN: 2318-9258. Disponível em: <http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jsp-ui/handle/riufcg/32155>
- [5] BYNUM, Michael L., Gabriel A. HACKEBEIL, William E. HART, Carl D. LAIRD, Bethany L. NICHOLSON, John D. SIIROLA, Jean-Paul WATSON, and David L. WOODRUFF. *Pyomo - Optimization Modeling in Python*, 3rd Edition. Springer, 2021. Disponível em < <https://www.osti.gov/servlets/purl/1771935> > . Acesso em: 20/06/2025.
- [6] CRUZ, A.; SILVA, F.; MARACCI, F.; PAZOTI, M. (2014). O uso da inteligência coletiva e o método simplex na busca de minimizar custo utilizando dispositivos móveis. *Colloquium Exactarum*. 6. 140-156. 10.5747/ce.2014.v06. n2. e081. Disponível em < <https://journal.unoeste.br/index.php/ce/article/view/1033> > . Acesso em: 20/06/2025
- [7] DONGARRA, J., SULLIVAN, F. (2000). Top 10 Algorithms of the 20th Century. *Computing in Science & Engineering*, 2(1), 22–23. Disponível em < <https://pi.math.cornell.edu/~ajt/presentations/TopTenAlgorithms.pdf> > . Acesso em: 20/06/2025
- [8] FEOFILOFF, Paulo USP. Complexidade e problemas NP-completos. Departamento de Ciência da Computação. Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2021-01-17.

- Disponível em: [\[https://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/aulas/NPcompleto.html\]](https://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/aulas/NPcompleto.html). Acesso em: 27 jun. 2025.
- [9] FERREIRA, P. S., KARAS, E. W., POLUCOSKI, F. L., RIBEIRO, A. A.; SILVA, A. L. (2011). Aplicação de Programação Inteira na Distribuição de Encargos Didáticos em Instituições de Ensino. *Trends in Computational and Applied Mathematics*, 12(2), 135–144. Disponível em < <https://tema.sbmec.org.br/tema/article/view/84> > . Acesso em: 20/06/2025.
- [10] FREITAS FILHO, F. S. de. Uma abordagem para o problema de alocação de professores em disciplinas utilizando programação linear inteira. 2016. 7 f. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Quixadá, Curso de Ciência da Computação, Quixadá, 2016. Disponível em < <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/24821> > . Acesso em: 20/06/2025.
- [11] HART, W. E., WATSON J., e WOODRUFF, D. L. “Pyomo: modeling and solving mathematical programs in Python.” *Mathematical Programming Computation* 3, no. 3 (2011): 219-260. Disponível em < <https://link.springer.com/article/10.1007/s12532-011-0026-8> > . Acesso em: 20/06/2025.
- [12] KLEE, V., MINTY, G. J. (1972). How good is the simplex algorithm? Disponível em < <https://sophie.huiberts.me/files/Klee-Minty-How-Good-Is-the-Simplex-Algorithm-1970.pdf> > . Acesso em: 20/06/2025.
- [13] LEMES, D. F., SILVA, G. P., 2006. Apostila de CIC373 – Fluxo em Redes. Material Didático. Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Departamento de Computação, Ouro Preto, 2006. Disponível em: < http://www.decom.ufop.br/gustavo/bcc342/Apostila_fluxo_redes.pdf >. Acesso em: 23 jul. 2025.
- [14] LISBOA, E. F. A., 2002. Pesquisa Operacional, Apostila do Curso. Rio de Janeiro-RJ, Brasil, 2002. Disponível em: <http://www.ericolisboa.eng.br>. Acesso em: 20/06/2025.
- [15] LOURENÇO, A. A. et al. (2014) Apresentação de material pedagógico-computacional para o ensino do método Simplex. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, Rio de Janeiro, v. 6, n. 1, p. 67-80, jan./abr. 2014. Disponível em: <<https://www.podesenvolvimento.org.br/podesenvolvimento/article/view/222>>. Acesso em: 20 jun 2025.
- [16] MENEZES, M. A. F., 2006, Programação Linear, Departamento de Computação, UCG, Goiás, Brasil. Disponível em < <https://eventos.ifg.edu.br/semat/wp->

- [content/uploads/sites/83/2023/10/Anais_14%C2%AASeMat.1.pdf](content/uploads/sites/83/2023/10/Anais_14%C2%AASeMat.1.pdf) > . Acesso em: 20/06/2025.
- [17] MUNARI, Pedro. Programação Linear. YouTube, 23 de maio de 2020. Playlist completa. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=TX2Ffzx_rDE&list=PLjK8TkmwOe0qQjWsb_uxGsUNf54HPeS8&ab_channel=PedroMunari>. Acesso em: 15 de junho de 2025.
- [18] MUNHOZ, I. P, AOKI, R. M. Pesquisa operacional: programação matemática / Igor Polezi Munhoz, Roberto Masahiko Aoki. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018. 216 p. ISBN 978-85-522-0690-3. Disponível em <http://cm-cls-content.s3.amazonaws.com/201802/INTERATIVAS_2_0/PESQUISA_OPERACIONAL_PROGRAMACAO_MATEMATICA/U1/LIVRO_UNICO.pdf> . Acesso em: 20/06/2025.
- [19] OKIISHI, T. F.; SOUZA, L. de F. R. de, 2013. Método simplex aplicado à minimização dos custos de transporte de uma rede de farmácias. Revista Eletrônica de Educação e Ciência (REEC) – ISSN 2237-3462 - Volume 03 – Número 01 – 2013. Disponível em <https://fira.edu.br/revista/vol3_num1_pag15.pdf> . Acesso em: 20/06/2025.
- [20] OLIVEIRA, K. H.; PIMENTA, A. C, (2017). Sequência didática no ensino-aprendizagem de resolução de problemas de programação linear com o método simplex: relato de experiência. Anais VI Encontro Goiano de Educação Matemática. v. 6 n. 6 (2017):Urutai-GO. ISSN: 2176-3305. Disponível em < <https://anais.sbem-go.com.br/index.php/EnGEM/issue/view/1> > . Acesso em: 20/06/2025.
- [21] PIMENTEL, Renato. Pesquisa operacional, introdução à programação linear e solução gráfica. Uberlândia, São Paulo. UFU. ago. 2022. Apresentação de Power Point. 101 slides. color. Notas de aula. Disponível em: < <https://www.facom.ufu.br/~rpimentel/files/gsi027-2022-2/gsi027.intro.solgrafica.pdf> > Acesso em 15 de junho de 2025.
- [22] POLDI, K.C. (2007). O problema de corte de estoque multiperíodo. Tese de Doutorado, ICMC – USP. Disponível em < <https://repositorio.usp.br/item/001596980> > . Acesso em: 20/06/2025.
- [23] RODRIGUES, L., CÂMARA, M. Programação Linear e o Problema do Sistema de Transporte Coletivo de Uberlândia, FAMAT, Universidade Federal de Uberlândia, 2006. Disponível em < <https://seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/issue/view/1976> > . Acesso em: 20/06/2025.
- [24] SANTOS, M. dos.; LIMA, I. C.; PAIXÃO, A. C.; DIAS, F. da C.; REIS, M. F. dos (2016). Proposta de otimização do mix de produção utilizando o método simplex: um estudo

- de caso de uma confecção de moda íntima do município de Cordeiro – RJ. Anais do IV Simpósio de Engenharia de Produção, Recife, 2016. - ISSN: 2318-9258. Disponível em < <http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/xmlui/handle/riufcg/30146> > . Acesso em: 20/06/2025.
- [25] SANTOS, M.; SILVA, K.; FREITAS DOS REIS, M.; RADEMAKER MARTINS, E. (2019). Apoio à decisão de um microempreendedor individual por meio do método Simplex. 2. 305-321. Revista de Trabalhos Acadêmicos Lusófona, v.2. n.2. Abr./Jun.2019. Disponível em <https://www.researchgate.net/publication/334152063_Apoio_a_decisao_de_um_microempreendedor_individual_por_meio_do_metodo_Simplex> . Acesso em: 20/06/2025.
- [26] SPIELMAN, D., TENG, S. (2001). Smoothed Analysis of Algorithms: Why the Simplex Algorithm Usually Takes Polynomial Time. Journal of the ACM. 51. 10.1145/380752.380813. Disponível em <<https://www.di.ens.fr/~vergnaud/algo0910/Simplex.pdf>> . Acesso em: 20/06/2025.
- [27] TAHA, H. A, 2008. Pesquisa operacional: uma visão geral, 8ª ed – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. Disponível em < <https://pdfcoffee.com/pesquisa-operacional-8-edtaha2008pdf-3-pdf-free.html> > . Acesso em: 20/06/2025.
- [28] WREN, A. Scheduling, timetabling and rostering—a special relationship? In: SPRINGER. International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling. [S.l.],1995. p. 46–75. Disponível em < <https://www.scribd.com/document/517858313/wren1996> > . Acesso em: 20/06/2025.
- [29] ZIONTS, S., 1974, *Linear and Integer Programming*, Prentice-Hall Inc., Nova Jersey, EU. Disponível em < http://web.tecnico.ulisboa.pt/~mcasquilho/acad/or/LP/LP_Zionts.pdf > . Acesso em: 20/06/2025.

ANEXOS

ANEXO I – DESCRIÇÃO DAS DISCIPLINAS ANALISADAS

DISCIPLINA (NOME - CURSO - CÓDIGO - TURMA)	CURSO	C.H.	HORÁRIO
Análise de dados 1 - Administração - FAMAT39102 - B	Administração	4	TER: 08:00-11:30
Análise de dados 1 - Administração - FAMAT39102 - A	Administração	4	TER: 19:00-22:30
Análise de dados 2 - Administração - FAMAT39104 - B	Administração	4	TER: 08:00-11:30
Análise de dados 2 - Administração - FAMAT39104 - A	Administração	4	QUI: 19:00-22:30
Estatística - Agronomia - FAMAT39216 - G	Agronomia	3	QUI: 14:50-17:40
Bioestatística - Biotecnologia/Biomedicina - GBT001/FAMAT39209 - B/B2	Biotecnologia/Biomedicina	4	TER: 08:00-11:30
Estatística - Ciência da Computação - GBC041 - C	Ciência da Computação	4	QUA: 16:50-18:30 SEX: 13:10-14:50
Bioestatística - Ciências Biológicas - FAMAT39201 - TN	Ciências Biológicas	3	SEX: 18:10-20:40
Bioestatística - Ciências Biológicas/Nutrição - FAMAT39201/FAMAT39701 - TL/TB	Ciências Biológicas/Nutrição	3	SEG: 08:00-10:40
Estatística - Ciências Contábeis - FAMAT39309 - I	Ciências Contábeis	4	QUI: 08:00-11:30
Estatística - Ciências Contábeis - FAMAT39309 - C	Ciências Contábeis	4	QUI: 19:00-22:30
Fund. Estatística Aplic. à Educ. Física - Educação Física - FAMAT39213 - EFLB	Educação Física	4	SEG: 14:00-17:40
Bioestatística - Enfermagem - FAMAT39201 - E	Enfermagem	3	TER: 09:50-12:20
Estatística - Eng Ambiental/Quím Industrial - FAMAT31033 - A	Eng Ambiental/Quím Industrial	4	TER: 14:50-16:50 SEX: 14:00-15:40
Estatística - Eng Civil - FAMAT31033 - U	Eng Civil	4	QUA: 16:50-18:30 SEX: 16:50-18:30
Estatística - Eng FEELT - FAMAT31033 - T1	Eng FEELT	4	SEG: 07:10-08:50 TER: 07:10-08:50
Estatística - Eng FEELT/Física Médica - FAMAT31033 - T2/G	Eng FEELT/Física Médica	4	SEG: 07:10-08:50 TER: 07:10-08:50

Estatística - Eng Mecânica - FAMAT49021 - U	Eng Mecânica	4	QUI: 14:50-16:50 SEX: 13:10-14:50
Estatística - Eng Mecat/Aeronáutica - FAMAT49021 - V	Eng Mecat/Aeronáutica	4	QUI: 14:50-16:50 SEX: 13:10-14:50
Estatística - Eng Química - FAMAT39005 - Q	Eng Química	4	TER: 16:50-18:30 QUI: 13:10-14:50
Amostragem em Ciência de Dados - Estatística - FAMAT31505 - E	Estatística	4	SEG: 19:00-22:30
Análise de Regressão - Estatística - FAMAT31506 - E	Estatística	4	QUI: 20:50-22:30 SEX: 19:00-20:40
Análise de Séries Temporais - Estatística - GES033 - E	Estatística	4	QUI: 19:00-22:30
Bioestatística - Estatística - GES029 - E	Estatística	4	QUA: 19:00-22:30
Controle Estatístico de Qualidade - Estatística - FAMAT31403 - E	Estatística	4	SEG: 19:00-20:40 TER: 20:50-22:30
Estatística 1 - Estatística - FAMAT31105 - E	Estatística	4	SEG: 18:10-19:50 TER: 20:50-22:30
Estatística 2 - Estatística - FAMAT31202 - E	Estatística	4	SEG: 18:10-19:50 TER: 20:50-22:30
Estatística Computacional - Estatística - FAMAT31307 - E	Estatística	4	QUI: 19:00-20:40 SEX: 20:50-22:30
Estatística Multivariada - Estatística - GES025 - E	Estatística	6	TER: 19:50-21:40 QUA: 19:00-20:40 QUI: 19:00-20:40
Inferência Bayesiana - Estatística - GES030 - E	Estatística	4	SEG: 20:50-22:30 TER: 19:00-20:40
Inferência Estatística - Estatística - FAMAT31508 - E	Estatística	6	TER: 19:50-22:30 QUA: 18:10-20:40
Inferência Estatística 2 - Estatística - GES022 - E	Estatística	4	SEG: 20:50-22:30 TER: 19:00-20:40
Opt. 1 - Geoestatística - Estatística - GES038 - E	Estatística	4	SEG: 20:50-22:30 TER: 19:00-20:40
Introdução a Ciência de Dados - Estatística - FAMAT31308 - E	Estatística	4	SEG: 18:10-19:50 TER: 20:50-22:30
Modelos Lineares Generalizados - Estatística - GES031 - E	Estatística	4	SEG: 19:00-20:40 TER: 20:50-22:30
Planejamento e Análise de Experimentos - Estatística - GES024 - E	Estatística	6	SEG: 19:00-20:40 TER: 20:50-22:30 QUA: 19:00-20:40
Probabilidade 1 - Estatística - FAMAT31203 - E	Estatística	4	TER: 19:00-20:40 QUA: 20:50-22:30
Probabilidade 2 - Estatística - FAMAT31309 - E	Estatística	4	TER: 19:00-20:40 QUA: 20:50-22:30
Probabilidade 3 - Estatística - FAMAT31404 - E	Estatística	4	TER: 19:00-20:40 QUA: 20:50-22:30
Introdução aos Processos Estocásticos - Estatística - FAMAT31507 - E	Estatística	4	TER: 18:10-19:50 QUA: 20:50-22:30
Profissão e Mercado - Estatística - GES035 - E	Estatística	4	SEX: 19:00-22:30

TCC1 - Estatística - FAMAT32901 - E	Estatística	2	SEG: 07:10-08:50
TCC2 - Estatística - FAMAT32902 - E	Estatística	2	TER: 07:10-08:50
Bioestatística - Fisioterapia - FAMAT39502 - F5	Fisioterapia	3	SEG: 14:00-16:50
Estatística e Probabilidade - Matemática - FAMAT31603 - MAT	Matemática	5	QUI: 14:50-16:50 SEX: 16:00-18:30
Estatíst. Aplic. Med. Veterinária - Medicina Veterinária - FAMAT39207 - VA	Medicina Veterinária	5	SEG: 08:00-10:40 QUA: 08:00-09:40
Introdução à Estatística - Psicologia - GPI004 - P	Psicologia	4	QUI: 14:00-17:40
Estatística Aplicada à Psicologia - Psicologia - FAMAT39122 - PN	Psicologia	4	SEX: 08:00-11:30
Estatística - Sistemas de Informação - FAMAT39505 - S	Sistemas de Informação	4	QUA: 19:00-20:40 SEX: 20:50-22:30
Estatística - Zootecnia - GZT014 - T	Zootecnia	4	QUI: 08:00-11:30

ANEXO II – PREFERÊNCIAS DE CADA PROFESSOR EFETIVO

Professor	Professor 1	Professor 2	Professor 3	Professor 4
Disciplina 1	Est Apl Vet	Bioest-TL/TB	Est 1 - FAMAT	Est 1 - FAMAT
Disciplina 2	Fund Est Apl	Est 1 - FAMAT	An Dados 2 - B	ICD
Disciplina 3	Est - Eng Quim	Est - Cont C	An Regr	Est 2 - FAMAT
Disciplina 4	Cont E Qual	An Dados 2 - B	Bioest	Est - Mct / Aer
Disciplina 5	Bioest-TL/TB	Est - Mct / Aer	OPT1 - Tópicos	Est - Eng Quim
Disciplina 6	Est - Eng Amb	Est 2 - FAMAT	Prob 3	Inf Est 1
Disciplina 7	An Dados 1 - B	Cont E Qual	Est - Cont C	Est Multiv
Disciplina 8	Est Multiv	Est - Sis Inf	Cont E Qual	Est Apl Vet
Disciplina 9	Prob 3	Est - Cienc Comp	Est - Cont I	Bioest
Disciplina 10	Est - Cont C	Bioest	Bioest	Prob 3
Disciplina 11	Inf Est 2	Inf Bay	Inf Est 2	Fund Est Apl
Disciplina 12	Est - Agr	Prob 1	Est - Eng Civ	Est - Cont C
Disciplina 13	ICD	An Dados 1 - B	An Dados 2 - A	TCC1
Disciplina 14	An Regr	An S Temp	Est - Sis Inf	Proc Estoc
Disciplina 15	Plan An Exper	OPT1 - Tópicos	Est - Mct / Aer	Amost

Professor	Professor 5	Professor 6	Professor 7	Professor 8
Disciplina 1	Est - Eng Quim	Prob 1	An Regr	Prob 3
Disciplina 2	Est - Eng Civ	Inf Est 2	Bioest	Est - Sis Inf
Disciplina 3	Bioest-TL/TB	Mod Lin Gen	ICD	Est - Cienc Comp
Disciplina 4	Est - Eng Mec	Est - Eng Quim	Est - Eng Civ	Inf Est 2
Disciplina 5	Est Comp	An Dados 2 - B	Est 1 - FAMAT	Mod Lin Gen
Disciplina 6	Est Multiv	Est - Eng Amb	Est Apl Vet	Est Multiv
Disciplina 7	Bioest	Cont E Qual	An Dados 1 - B	Est - Fis Med - V
Disciplina 8	OPT1 - Tópicos	TCC2	Inf Bay	Est - Eng Elet - U
Disciplina 9	Inf Est 1	OPT1 - Tópicos	Est - Fis Med - V	TCC1
Disciplina 10	Est 2 - FAMAT	Est - Cienc Comp	Est - Sis Inf	Amost
Disciplina 11	Est - Cont C	Est - Eng Civ	Cont E Qual	An Regr
Disciplina 12	An S Temp	Est - Sis Inf	Fund Est Apl	Est 2 - FAMAT
Disciplina 13	Prob 3	An Dados 1 - B	Est - Eng Quim	Est - Eng Quim
Disciplina 14	Est - Mct / Aer	Prob 3	Bioest	Bioest-TL/TB
Disciplina 15	Inf Est 2	ICD	Est - Mct / Aer	Bioest

Professor	Professor 9	Professor 10	Professor 11	Professor 12
Disciplina 1	Est - Eng Quim	Est Prob	Inf Est 2	Bioest-TL/TB
Disciplina 2	Prob 3	Est 1 - FAMAT	Est - Eng Amb	Plan An Exper
Disciplina 3	Cont E Qual	Est - Eng Amb	Est 2 - FAMAT	Est - Mct / Aer
Disciplina 4	Bioest	Est Apl Psico	Proc Estoc	An Regr
Disciplina 5	ICD	Est - Cont C	Est - Zoot	Est Multiv
Disciplina 6	Est - Agr	ICD	Cont E Qual	TCC1
Disciplina 7	Est - Fis Med - V	Est - Eng Civ	Mod Lin Gen	An Dados 2 - A
Disciplina 8	Fund Est Apl	Est - Mct / Aer	Est - Fis Med - V	Est Comp
Disciplina 9	Est - Cienc Comp	Est 2 - FAMAT	Est - Mct / Aer	Mod Lin Gen

Disciplina 10	Prob 2	Est - Sis Inf	Plan An Exper	An S Temp
Disciplina 11	Mod Lin Gen	Prob 1	Est 1 - FAMAT	OPT1 - Tópicos
Disciplina 12	OPT1 - Tópicos	An Dados 2 - B	Bioest/Met3	Est 2 - FAMAT
Disciplina 13	An Dados 2 - A	An Dados 2 - A	Bioest	Cont E Qual
Disciplina 14	An Dados 2 - B	Inf Est 2	Est - Eng Civ	Inf Est 2
Disciplina 15	Est - Mct / Aer	Est - Cienc Comp	Prob 1	Est Apl Vet

Professor	Professor 13	Professor 14	Professor 15	Professor 16	Professor 17
Disciplina 1	Est Prob	Est - Eng Mec	Proc Estoc	An Dados 1 - B	Est - Eng Amb
Disciplina 2	Est Multiv	An Dados 2 - B	An Regr	Est - Mct / Aer	Prob 3
Disciplina 3	Est 1 - FAMAT	Prob 3	Prob 3	An S Temp	Est 1 - FAMAT
Disciplina 4	Est - Cienc Comp	Cont E Qual	Bioest	An Dados 2 - A	Est - Eng Civ
Disciplina 5	Prob 3	An S Temp	Bioest	An Dados 2 - B	Inf Bay
Disciplina 6	Est - Cont I	Est 2 - FAMAT	Est - Cont C	Est - Agr	Est - Mct / Aer
Disciplina 7	Bioest	An Regr	Est - Agr	Est Multiv	Est - Sis Inf
Disciplina 8	Prob 1	An Dados 2 - A	Est - Eng Mec	Est - Eng Quim	Prob 2
Disciplina 9	Proc Estoc	Est - Eng Elet - U	Est - Sis Inf	TCC2	Bioest/Met3
Disciplina 10	Bioest-TL/TB	Est - Agr	Fund Est Apl	Est - Eng Civ	An Regr
Disciplina 11	TCC2	Est - Mct / Aer	Mod Lin Gen	Prob 3	Est Prob
Disciplina 12	Plan An Exper	Est - Eng Quim	Cont E Qual	Bioest-TL/TB	Est - Cienc Comp
Disciplina 13	Mod Lin Gen	Bioest	Est 2 - FAMAT	Est 2 - FAMAT	An Dados 2 - A
Disciplina 14	OPT1 - Tópicos	Amost	Est - Cienc Comp	Est - Cont C	Bioest-TL/TB
Disciplina 15	Bioest	Est - Sis Inf	Prob 1	An Regr	An S Temp

ANEXO III – APELIDO DAS DISCIPLINAS

DISCIPLINA (NOME - CURSO - CÓDIGO - TURMA)	APELIDO
Análise de dados 1 - Administração - FAMAT39102 - B	An Dados 1 - B
Análise de dados 1 - Administração - FAMAT39102 - A	An Dados 1 - A
Análise de dados 2 - Administração - FAMAT39104 - B	An Dados 2 - B
Análise de dados 2 - Administração - FAMAT39104 - A	An Dados 2 - A
Estatística - Agronomia - FAMAT39216 - G	Est - Agr
Bioestatística - Biotecnologia/Biomedicina - GBT001/FAMAT39209 - B/B2	Bioest
Estatística - Ciência da Computação - GBC041 - C	Est - Cienc Comp
Bioestatística - Ciências Biológicas - FAMAT39201 - TN	Bioest-TN
Bioestatística - Ciências Biológicas/Nutrição - FAMAT39201/FAMAT39701 - TL/TB	Bioest-TL/TB
Estatística - Ciências Contábeis - FAMAT39309 - I	Est - Cont I
Estatística - Ciências Contábeis - FAMAT39309 - C	Est - Cont C
Fund. Estatística Aplic. à Educ. Física - Educação Física - FAMAT39213 - EFLB	Fund Est Apl
Bioestatística - Enfermagem - FAMAT39201 - E	Bioest
Estatística - Eng Ambiental/Quím Industrial - FAMAT31033 - A	Est - Eng Amb
Estatística - Eng Civil - FAMAT31033 - U	Est - Eng Civ
Estatística - Eng FEELT - FAMAT31033 - T1	Est - Eng Elet - U
Estatística - Eng FEELT/Física Médica - FAMAT31033 - T2/G	Est - Fis Med - V
Estatística - Eng Mecânica - FAMAT49021 - U	Est - Eng Mec
Estatística - Eng Mecat/Aeronáutica - FAMAT49021 - V	Est - Mct / Aer
Estatística - Eng Química - FAMAT39005 - Q	Est - Eng Quim
Amostragem em Ciência de Dados - Estatística - FAMAT31505 - E	Amost
Análise de Regressão - Estatística - FAMAT31506 - E	An Regr
Análise de Séries Temporais - Estatística - GES033 - E	An S Temp
Bioestatística - Estatística - GES029 - E	Bioest
Controle Estatístico de Qualidade - Estatística - FAMAT31403 - E	Cont E Qual
Estatística 1 - Estatística - FAMAT31105 - E	Est 1 - FAMAT
Estatística 2 - Estatística - FAMAT31202 - E	Est 2 - FAMAT
Estatística Computacional - Estatística - FAMAT31307 - E	Est Comp
Estatística Multivariada - Estatística - GES025 - E	Est Multiv
Inferência Bayesiana - Estatística - GES030 - E	Inf Bay
Inferência Estatística - Estatística - FAMAT31508 - E	Inf Est 1
Inferência Estatística 2 - Estatística - GES022 - E	Inf Est 2
Opt. 1 - Geoestatística - Estatística - GES038 - E	OPT1 - Tópicos
Introdução a Ciência de Dados - Estatística - FAMAT31308 - E	ICD
Modelos Lineares Generalizados - Estatística - GES031 - E	Mod Lin Gen
Planejamento e Análise de Experimentos - Estatística - GES024 - E	Plan An Exper

Probabilidade 1 - Estatística - FAMAT31203 - E	Prob 1
Probabilidade 2 - Estatística - FAMAT31309 - E	Prob 2
Probabilidade 3 - Estatística - FAMAT31404 - E	Prob 3
Introdução aos Processos Estocásticos - Estatística - FAMAT31507 - E	Proc Estoc
Profissão e Mercado - Estatística - GES035 - E	Prof Merc
TCC1 - Estatística - FAMAT32901 - E	TCC1
TCC2 - Estatística - FAMAT32902 - E	TCC2
Bioestatística - Fisioterapia - FAMAT39502 - F5	Bioest/Met3
Estatística e Probabilidade - Matemática - FAMAT31603 - MAT	Est Prob
Estatíst. Aplic. Med. Veterinária - Medicina Veterinária - FAMAT39207 - VA	Est Apl Vet
Introdução à Estatística - Psicologia - GPI004 - P	Est Apl Psico
Estatística Aplicada à Psicologia - Psicologia - FAMAT39122 - PN	Est Apl Psico
Estatística - Sistemas de Informação - FAMAT39505 - S	Est - Sis Inf
Estatística - Zootecnia - GZT014 - T	Est - Zoot

ANEXO IV – HORÁRIOS ALOCADOS PARA O CASO 1

Professor	Horários	Campus
Professor 1	SEG: 14:00-17:40	Campus Santa Monica
	SEG: 08:00-10:40 QUA: 08:00-09:40	Campus Glória
Professor 2	QUI: 19:00-22:30	Campus Santa Mônica
	SEG: 18:10-19:50 TER: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
Professor 3	TER: 08:00-11:30	Campus Santa Mônica
	SEG: 20:50-22:30 TER: 19:00-20:40	Campus Santa Mônica
Professor 4	QUI: 14:50-16:50 SEX: 13:10-14:50	Campus Glória
	SEG: 18:10-19:50 TER: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
Professor 5	QUA: 16:50-18:30 SEX: 16:50-18:30	Campus Santa Mônica
	TER: 16:50-18:30 QUI: 13:10-14:50	Campus Santa Mônica
Professor 6	SEG: 19:00-20:40 TER: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
	TER: 19:00-20:40 QUA: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
	TER: 07:10-08:50	Campus Santa Mônica
Professor 7	TER: 09:50-12:20	Campus Umuarama
	QUA: 19:00-22:30	Campus Santa Mônica
	SEG: 20:50-22:30 TER: 19:00-20:40	Campus Santa Mônica
Professor 8	QUA: 16:50-18:30 SEX: 13:10-14:50	Campus Santa Mônica
	TER: 19:00-20:40 QUA: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
	SEG: 07:10-08:50	Campus Santa Mônica
Professor 9	QUI: 14:50-17:40	Campus Glória
	SEG: 07:10-08:50 TER: 07:10-08:50	Campus Santa Mônica
	SEG: 19:00-20:40 TER: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
Professor 10	SEX: 18:10-20:40	Campus Santa Mônica
	SEG: 18:10-19:50 TER: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
	QUI: 14:00-17:40	Campus Umuarama
Professor 11	SEG: 20:50-22:30 TER: 19:00-20:40	Campus Santa Mônica
	SEG: 14:00-16:50	Campus Santa Mônica
	QUI: 08:00-11:30	Campus Glória
Professor 12	SEG: 08:00-10:40	Campus Santa Mônica
	QUI: 20:50-22:30 SEX: 19:00-20:40	Campus Santa Mônica
	QUI: 19:00-20:40 SEX: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
Professor 13	TER: 19:50-21:40 QUA: 19:00-20:40 QUI: 19:00-20:40	Campus Santa Mônica
	QUI: 14:50-16:50 SEX: 16:00-18:30	Campus Santa Mônica
Professor 14	SEG: 07:10-08:50 TER: 07:10-08:50	Campus Santa Mônica
	QUI: 14:50-16:50 SEX: 13:10-14:50	Campus Glória
	QUI: 19:00-22:30	Campus Santa Mônica
Professor 15	TER: 08:00-11:30	Campus Santa Mônica
	TER: 18:10-19:50 QUA: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
Professor 16	TER: 08:00-11:30	Campus Santa Mônica

	TER: 19:00-22:30	Campus Santa Mônica
	QUI: 19:00-22:30	Campus Santa Mônica
Professor 17	TER: 14:50-16:50 SEX: 14:00-15:40	Campus Santa Mônica
	TER: 19:00-20:40 QUA: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
	QUA: 19:00-20:40 SEX: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
Substituto 1	QUI: 08:00-11:30	Campus Santa Mônica
	SEG: 19:00-22:30	Campus Santa Mônica
	TER: 19:50-22:30 QUA: 18:10-20:40	Campus Santa Mônica
Substituto 2	SEG: 19:00-20:40 TER: 20:50-22:30 QUA: 19:00-20:40	Campus Santa Mônica
	SEX: 19:00-22:30	Campus Santa Mônica
	SEX: 08:00-11:30	Campus Umuarama

ANEXO V – HORÁRIOS ALOCADOS PARA O CASO 2

Professor	Horários	Campus
Professor 1	SEG: 14:00-17:40	Campus Santa Monica
	SEG: 08:00-10:40 QUA: 08:00-09:40	Campus Glória
Professor 2	QUI: 19:00-22:30	Campus Santa Mônica
	SEG: 18:10-19:50 TER: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
Professor 3	TER: 08:00-11:30	Campus Santa Mônica
	SEG: 20:50-22:30 TER: 19:00-20:40	Campus Santa Mônica
Professor 4	TER: 16:50-18:30 QUI: 13:10-14:50	Campus Santa Mônica
	SEG: 18:10-19:50 TER: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
Professor 5	SEG: 08:00-10:40	Campus Santa Mônica
	TER: 19:50-21:40 QUA: 19:00-20:40 QUI: 19:00-20:40	Campus Santa Mônica
Professor 6	SEG: 19:00-20:40 TER: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
	TER: 19:00-20:40 QUA: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
	TER: 07:10-08:50	Campus Santa Mônica
Professor 7	TER: 09:50-12:20	Campus Umuarama
	QUI: 20:50-22:30 SEX: 19:00-20:40	Campus Santa Mônica
	QUA: 19:00-22:30	Campus Santa Mônica
Professor 8	SEG: 19:00-22:30	Campus Santa Mônica
	SEG: 07:10-08:50	Campus Santa Mônica
	QUA: 19:00-20:40 SEX: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
Professor 9	QUI: 14:50-17:40	Campus Glória
	SEG: 07:10-08:50 TER: 07:10-08:50	Campus Santa Mônica
	TER: 19:00-20:40 QUA: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
Professor 10	SEX: 18:10-20:40	Campus Santa Mônica
	SEG: 18:10-19:50 TER: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
	QUI: 14:00-17:40	Campus Umuarama

Professor 11	SEG: 20:50-22:30 TER: 19:00-20:40	Campus Santa Mônica
	SEG: 14:00-16:50	Campus Santa Mônica
	QUI: 08:00-11:30	Campus Glória
Professor 12	QUI: 19:00-20:40 SEX: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
	SEG: 19:00-20:40 TER: 20:50-22:30 QUA: 19:00-20:40	Campus Santa Mônica
Professor 13	QUA: 16:50-18:30 SEX: 13:10-14:50	Campus Santa Mônica
	QUI: 08:00-11:30	Campus Santa Mônica
	TER: 19:00-20:40 QUA: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
Professor 14	QUI: 14:50-16:50 SEX: 13:10-14:50	Campus Glória
	QUI: 19:00-22:30	Campus Santa Mônica
	SEG: 19:00-20:40 TER: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
Professor 15	TER: 08:00-11:30	Campus Santa Mônica
	TER: 18:10-19:50 QUA: 20:50-22:30	Campus Santa Mônica
Professor 16	TER: 08:00-11:30	Campus Santa Mônica
	QUI: 19:00-22:30	Campus Santa Mônica
	QUI: 14:50-16:50 SEX: 13:10-14:50	Campus Glória
Professor 17	TER: 14:50-16:50 SEX: 14:00-15:40	Campus Santa Mônica
	QUA: 16:50-18:30 SEX: 16:50-18:30	Campus Santa Mônica
	SEG: 20:50-22:30 TER: 19:00-20:40	Campus Santa Mônica
Substituto 1	TER: 19:50-22:30 QUA: 18:10-20:40	Campus Santa Mônica
	QUI: 14:50-16:50 SEX: 16:00-18:30	Campus Santa Mônica
	SEX: 08:00-11:30	Campus Umuarama
Substituto 2	TER: 19:00-22:30	Campus Santa Mônica
	SEG: 07:10-08:50 TER: 07:10-08:50	Campus Santa Mônica
	SEX: 19:00-22:30	Campus Santa Mônica