AUGUSTO TANNÚS SILVA

A Equação da Onda Acústica com Parâmetro Fuzzy do Tipo 1 e do Tipo 2 Intervalar



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2024

AUGUSTO TANNÚS SILVA

A Equação da Onda Acústica com Parâmetro Fuzzy do Tipo 1 e do Tipo 2 Intervalar

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Matemática Aplicada.

Orientadora: Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice.

UBERLÂNDIA - MG
2024

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S586 Silva, Augusto Tannús, 1993-
2024 A Equação da Onda Acústica com Parâmetro Fuzzy do Tipo 1 e do Tipo 2 Intervalar [recurso eletrônico] / Augusto Tannús Silva. - 2024.

Orientadora: Rosana Sueli da Motta Jafelice.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2024.493
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Jafelice, Rosana Sueli da Motta, 1964-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 160 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.ppmat.ime.ufu.br - pgmat@ime.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 118, PPGMAT				
Data:	13 de agosto de 2024	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	15:30
Matrícula do Discente:	12212MAT003				
Nome do Discente:	Augusto Tannús Silva				
Título do Trabalho:	A Equação da Onda Acústica com Parâmetro Fuzzy do Tipo 1 e do Tipo 2 Intervalar				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Matemática Aplicada				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Estudo das Incertezas em Modelos Matemáticos via Conjuntos Fuzzy do Tipo 1 e do Tipo 2 Intervalar				

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Google Meet através do link https://meet.google.com/wni-aqxr-het, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Graciele Paraguaia Silveira - DFQM/UFSCar; Rafael Alves Figueiredo - IME/ UFU e Rosana Sueli da Motta Jafelice - IME/UFU, orientadora do candidato.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa, Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho.

A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa. A seguir a senhora presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Graciele Paraguaia Silveira**, **Usuário Externo**, em 13/08/2024, às 16:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rosana Sueli da Motta Jafelice**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 13/08/2024, às 16:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rafael Alves Figueiredo**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 13/08/2024, às 16:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5582223** e o código CRC **90ABCE71**.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa, Ana Carolina Ferreira Bernardes, por ser minha força, meu apoio e minha companhia durante toda essa jornada. Este trabalho é produto do seu esforço, amor, carinho e companheirismo. Eu te amo!

Dedico-o também aos meus falecidos avós maternos, Jorge Fackury Tannús e Elizabeth Prado Tannús. Espero que, de onde estiverem, estejam orgulhosos!

Agradecimentos

Laroyê Exu, Laroyê Seu Marabô! Saudações a quem deve ser saudado primeiro, e que esse agradecimento alcance seus destinatários!

Agradeço, primeiramente, a Olódùmarè, pelo sopro da vida, e a Sangó, que rege meu Orí e que me manteve firme por toda essa jornada. À todos os orixás de candomblé e guias de umbanda, os agradeço por sempre estarem por perto e nunca me deixarem cair. Sem vocês, nada disso teria acontecido.

Agradeço à minha esposa, Ana Carolina Ferreira Bernardes, por me acompanhar em todas as minhas loucuras. Por me ouvir, apoiar, cobrar e por viver tudo isso comigo. Esse trabalho é tanto seu quanto meu.

Aos meus pais, Ruth Tannús e Denilson Salvador Ferreira Silva, muito obrigado por todo apoio durante meu mestrado. Aos meus avós Elizabeth, Jorge, Geraldo e Maria Luz, agradeço por sempre terem me apoiado no caminho dos estudos.

À minha Iyalorisà Eleida de Obaluaiyê, meu Babá Egbé Barbosa de Ogum, minha Iyá kekerê Gabrielle de Osun e ao Apokan Matheus. Muito obrigado por sempre cuidarem de mim. Sem vocês eu não teria a firmeza necessária para passar por essa etapa.

Aos meus compadres João Paulo Lau de Almeida Borges, Gabriel Fernandes Bonfim e Gustavo Lucena. Eu espero que entendam meu sumiço agora... hahaha. Agradeço muito a vocês por serem parte de tudo sempre!

À minha orientadora, Rosana Sueli da Motta Jafelice, muito obrigado por me tornar um pesquisador. Muito obrigado também por sempre estar disposta, alegre e por me ensinar tudo que sei sobre minha área de pesquisa.

Aos professores Ana Maria Amarillo Bertone e Ubirajara Coutinho Filho, muito obrigado. Vocês dois são parte integrante desse trabalho, tendo possibilitado cada uma das etapas de desenvolvimento do mesmo.

Aos amigos do café, Pedro Augusto Diniz Santos, Juan David Rubio e Ricardo Arturo Alayon. Todas as conversas, todo apoio, todas as risadas e discussões resultaram nessa dissertação. Muito obrigado por tudo.

Agradeço imensamente ao professor Mário Luiz de Mendonça Faria. Se hoje estou aqui, é tudo por culpa sua (pro lado bom e ruim!). Agradeço também ao professor Geraldo Márcio de Azevedo Botelho, muito obrigado por me ensinar a pensar em matemática. Ao professor Victor Gonzalo Lopez Neumann, muito obrigado por me ensinar a escrever matemática. E por último, mas não menos importante, ao professor Daniel Cariello por me mostrar que eu me formei um matemático. Levarei tudo que aprendi com vocês para a vida toda.

Não posso deixar de mencionar e agradecer à CAPES pelo suporte financeiro crucial durante o curso.

Resumo

O sistema auditivo humano é responsável por diversas funções corporais importantes, podendo-se destacar o equilíbrio, a geolocalização e a comunicação. A cóclea tem papel central na audição, sendo responsável por converter os sons em impulsos nervosos, através da dinâmica entre a movimentação dos fluidos presentes nas cavidades e membranas internas. Neste trabalho, a abordagem escolhida para a formulação do modelo é a equação da onda acústica, que possui como parâmetro a velocidade do som. De acordo com a literatura, dois fatores que alteram a velocidade do som no ar são a temperatura e a umidade absoluta. A incerteza gerada por estes fatores é tratada através de dois Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF) do tipo 1 e do tipo 2 intervalar, sendo temperatura e umidade as variáveis de entrada, e tendo a velocidade do som como saída. Para construção do SBRF do tipo 1, é utilizada a rede neuro-fuzzy *Adaptative Neuro-Fuzzy Inference System* (ANFIS), com dados da velocidade do som, a depender de temperatura e umidade do ar, obtidos através do toolbox livre de termodinâmica CANTERA. O método de inferência para este sistema é o de Takagi-Sugeno. O SBRF do tipo 2 intervalar é construído através da flexibilização dos parâmetros que compõem as funções de pertinência das variáveis de entrada e saída. O objetivo do trabalho é tratar matematicamente a incerteza que pode influenciar o comportamento da pressão acústica em função do tempo, considerando o ar como fluido. As aproximações da solução da equação da onda são realizadas através do Método das Diferenças Finitas, para o caso unidimensional, e o Método dos Elementos Finitos para os modelos bidimensionais com domínios regular e irregular. As medidas dos domínios de cada modelo são retiradas de trabalhos científicos anteriores, relacionados ao tema. Os resultados obtidos mostram o quanto considerar a velocidade do som como parâmetro fuzzy, dependendo da temperatura e da umidade, influencia na pressão acústica, gerando diferenças no comportamento mecânico do fluido em um determinado ponto do interior do domínio.

Palavras-chave: Conjuntos Fuzzy; ANFIS; Cóclea; CANTERA; Acústica; SBRF.

Abstract

The human hearing system is responsible for several important bodily functions, highlighting balance, geolocation and communication. The cochlea plays a central role in hearing, being responsible for converting sounds into nervous impulses, through dynamics between the movement of fluids present in its cavities and internal membranes. In this work, the approach chosen for formulating the model is the acoustic wave equation, which has the speed of sound as a parameter. According to the literature, two factors that change the speed of sound in the air are temperature and absolute humidity. The uncertainty generated by these factors is treated through two Fuzzy Rule-Based Systems (FRBS) type-1 and interval type-2, with temperature and humidity being the input variables, and having the speed of sound as the output. To build the type-1 FRBS, the Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System (ANFIS) neuro-fuzzy network is used, with data about the speed of sound, depending on the air temperature and humidity, obtained through the free thermodynamics toolbox CANTERA. The inference method for this system is Takagi-Sugeno. The interval type-2 FRBS is constructed through the flexibility of the parameters that make up the pertinence functions of the input and output variables. The aim of this work is to mathematically treat the uncertainty that can influence the behavior of acoustic pressure as a function of time, considering air as a fluid. The approximations of the solution of the wave equation are solved through the Finite Difference Method, for the one-dimensional case, and the Finite Element Method for bidimensional models with regular and irregular domains. The measures of the domains of each model are taken from previous scientific works related to the topic. The results obtained show how much considering the speed of sound as a fuzzy parameter, depending on temperature and humidity, influences the acoustic pressure, generating differences in the mechanical behavior of the fluid at a given point within the domain.

Keywords: Fuzzy Sets; ANFIS; Cochlea; CANTERA; Acoustics; FRBS.

Lista de Figuras

1 Sistema auditivo (BEAR; CONNORS; PARADISO, 2017). 1
2 Ligação entre o estribo e o ouvido interno (BEAR; CONNORS; PARADISO, 2017). 2
3 Corte transversal da cóclea (BEAR; CONNORS; PARADISO, 2017). 3
4 Modelo da cóclea desenrolada (BEAR; CONNORS; PARADISO, 2017). 4
5 Esquema para obtenção do Sistema Baseado em Regras Fuzzy do tipo 1. Fonte: Elaborada pelo autor. 6

1.1 Função de pertinência trapezoidal representando a experiência do trabalhador em anos. Fonte: Elaborada pelo autor. 9
1.2 Representação gráfica da união de conjuntos fuzzy. Fonte: Elaborada pelo autor. 10
1.3 Representação gráfica da interseção de conjuntos fuzzy. Fonte: Elaborada pelo autor. 10
1.4 Representação gráfica do complementar de um conjuntos fuzzy. Fonte: Elaborada pelo autor. 11
1.5 Representação gráfica do princípio da extensão de Zadeh. Fonte: Elaborada pelo autor. 13
1.6 Sistema baseado em regras fuzzy. Fonte: Elaborada pelo autor. 16
1.7 Representação gráfica do método de Mamdani. Fonte: Elaborada pelo autor . . 18
1.8 Representação gráfica do método de Takagi-Sugeno. Fonte: Elaborada pelo autor 19
1.9 Funções de pertinência da experiência do funcionário. Fonte: Elaborada pelo autor. 21
1.10 Funções de pertinência da capacidade de liderança. Fonte: Elaborada pelo autor. 21
1.11 Linha do tempo dos conjuntos fuzzy do tipo 2 (JOHN; COUPLAND, 2007). . . 24
1.12 Exemplo de um conjunto fuzzy do tipo 2. Fonte: Elaborada pelo autor. 25
1.13 Conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar. Fonte: Elaborada pelo autor 26
1.14 SBRF para conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar. Fonte: Elaborada pelo autor . 26
1.15 A palavra "probabilidade" deve ser matematicamente entendida como "possibilidade" (JAFELICE; BERTONE, 2021). 31
1.16 FOU para a variável de entrada quantidade de máscaras. Fonte: Elaborada pelo autor. 33

2.1 Representação de um neurônio biológico (RAUBER, 2005). 36
2.2 Método dos mínimos quadrados. Fonte: Elaborada pelo autor. 37
2.3 Pontos gerados. Fonte: Elaborada pelo autor. 37
2.4 Reta obtida pelo método dos mínimos quadrados para os pontos gerados. Fonte: Elaborada pelo autor. 39
2.5 Parabolóide gerado pelo Método do Gradiente Descendente. Fonte: Elaborada pelo autor. 40
2.6 Reta obtida pelo método do gradiente descendente para os pontos gerados. Fonte: Elaborada pelo autor. 41

2.7 Arquitetura do ANFIS. Fonte: Elaborada pelo autor. 42
2.8 Representação gráfica da função trapezoidal. Fonte: Elaborada pelo autor. . . . 43
2.9 Funções de pertinência da temperatura. Fonte: Elaborada pelo autor. 48
2.10 Funções de pertinência da umidade. Fonte: Elaborada pelo autor. 48
2.11 Superfície gerada pelo SBRF do tipo 1. Fonte: Elaborada pelo autor. 49
2.12 Representação gráfica da construção da FOU. Fonte: Elaborada pelo autor. . . . 50
2.13 FOU da variável de entrada temperatura. Fonte: Elaborada pelo autor. 51
2.14 FOU da variável de entrada umidade. Fonte: Elaborada pelo autor. 52
2.15 Superfícies geradas pelo SBRF do tipo 2 intervalar. Fonte: Elaborada pelo autor. 53
2.16 Sobreposição das superfícies do tipo 1 e do tipo 2 intervalar obtidas de valores defuzzificados. Fonte: Elaborada pelo autor. 54

3.1 Exemplo de malha unidimensional. Fonte: Elaborada pelo autor. 57
3.2 Exemplo de malha bidimensional. Fonte: Elaborada pelo autor. 57
3.3 Aproximação da solução da equação (3.20) pelo MDF. Fonte: Elaborada pelo autor. 60
3.4 Pontos cardeais. Fonte: Elaborada pelo autor. 62
3.5 Matriz pentadiagonal. Fonte: Elaborada pelo autor. 63
3.6 Aproximação da solução da equação (3.34) pelo MDF. Fonte: Elaborada pelo autor. 64

4.1 Funções de base do espaço V_h. Fonte: Elaborada pelo autor. 69
4.2 Solução analítica. Fonte: Elaborada pelo autor. 74
4.3 Aproximação da solução da equação (4.30) obtida pelo MDF. Fonte: Elaborada pelo autor. 74
4.4 Aproximação da solução da equação (4.30) obtida pelo MEF. Fonte: Elaborada pelo autor. 75
4.5 Exemplo de enumeração de triângulos no MEF. Fonte: Elaborada pelo autor. . . 78
4.6 Enumeração dos vértices interiores do domínio. Fonte: Elaborada pelo autor. . . 79
4.7 Enumeração global dos vértices do domínio com $\tilde{M} = (n_x - 1)(n_y - 1)$. Fonte: Elaborada pelo autor. 79
4.8 Exemplo de enumeração local dos vértices de um elemento. Fonte: Elaborada pelo autor. 80
4.9 Exemplo de função φ_j em um elemento. Fonte: (FERREIRA, 2017). 81
4.10 Aproximação da solução da equação (4.68) pelo MEF. Fonte: Elaborada pelo autor. 85

5.1 Condições iniciais do PVI. Fonte: Elaborada pelo autor. 89
5.2 Superfície gerada pelas aproximações da equação a cada partição do tempo. Fonte: Elaborada pelo autor. 89
5.3 Aproximação da solução do PVI para a equação da onda determinística. Fonte: Elaborada pelo autor. 90
5.4 Queda de pressão no ponto $\overline{x}$ em função do tempo. Fonte: Elaborada pelo autor. 90
5.5 Aproximação da solução do PVI na condição de hipotermia e umidade baixa. Fonte: Elaborada pelo autor. 92
5.6 Aproximação da solução do PVI na condição de tempertura normal e umidade média. Fonte: Elaborada pelo autor. 92
5.7 Aproximação da solução do PVI na condição de febre e umidade alta. Fonte: Elaborada pelo autor. 92
5.8 Queda de pressão dos 3 casos apresentados. Fonte: Elaborada pelo autor. 93

5.9 Gráfico das diferenças entre as soluções nos 3 casos propostos. Fonte: Elaborada pelo autor. 93
5.10 Aproximação da solução do PVI para hipotermia moderada e umidade baixa. Fonte: Elaborada pelo autor. 95
5.11 Aproximação da solução do PVI para temperatura normal e umidade média. Fonte: Elaborada pelo autor. 95
5.12 Aproximação da solução do PVI para febre alta e umidade alta. Fonte: Elaborada pelo autor. 95
5.13 Representação gráfica das quedas de pressão acúsica do caso 1. Fonte: Elaborada pelo autor. 96
5.14 Representação gráfica das quedas de pressão acúsica do caso 2. Fonte: Elaborada pelo autor. 96
5.15 Representação gráfica das quedas de pressão acúsica do caso 3. Fonte: Elaborada pelo autor. 96
5.16 Gráfico das diferenças por iteração entre o 1^{o} e o 2^{o} casos. Fonte: Elaborada pelo autor. 97
5.17 Gráfico das diferenças por iteração entre o 2^{o} e o 3^{o} casos. Fonte: Elaborada pelo autor. 97
5.18 Gráfico das diferenças por iteração entre o 1^{o} e o 3^{o} casos. Fonte: Elaborada pelo autor. 97
5.19 Condição inicial do PVI. Fonte: Elaborada pelo autor. 101
5.20 Aproximação da solução do PVI para hipotermia moderada e umidade baixa. Fonte: Elaborada pelo autor. 102
5.21 Aproximação da solução do PVI para temperatura normal e umidade média. Fonte: Elaborada pelo autor. 102
5.22 Aproximação da solução do PVI para febre alta e umidade alta. Fonte: Elaborada pelo autor. 102
5.23 Gráfico da queda de pressão após 101 iterações para o ponto $(\overline{x}, \overline{y})$. Fonte: Elaborada pelo autor. 103
5.24 Gráfico das diferenças entre as soluções para o ponto $(\overline{x}, \overline{y})$. Fonte: Elaborada pelo autor. 103
5.25 Aproximação da solução do PVI para hipotermia moderada e umidade baixa. Fonte: Elaborada pelo autor. 105
5.26 Saída defuzzificada da aproximação da solução do PVI para hipotermia moderada e umidade baixa. Fonte: Elaborada pelo autor. 105
5.27 Aproximação da solução do PVI para temperatura normal e umidade média. Fonte: Elaborada pelo autor. 105
5.28 Aproximação da solução do PVI para temperatura normal e umidade média. Fonte: Elaborada pelo autor. 105
5.29 Aproximação da solução do PVI para febre alta e umidade alta. Fonte: Elaborada pelo autor. 105
5.30 Saída defuzzificada da aproximação da solução do PVI para febre alta e umidade alta. Fonte: Elaborada pelo autor. 105
5.31 Queda da pressão para as 3 saídas do caso 1. Fonte: Elaborada pelo autor. . . . 106
5.32 Queda da pressão para as 3 saídas do caso 2. Fonte: Elaborada pelo autor. . . . 106
5.33 Queda da pressão para as 3 saídas do caso 3. Fonte: Elaborada pelo autor. . . . 107
5.34 Gráfico das diferenças entre os casos 1 e 2. Fonte: Elaborada pelo autor. 107
5.35 Gráfico das diferenças entre os casos 2 e 3. Fonte: Elaborada pelo autor. 108
5.36 Gráfico das diferenças entre os casos 1 e 3. Fonte: Elaborada pelo autor. 108
5.37 Domínio Ω gerado através dos vértices descritos. Fonte: Elaborada pelo autor. . 109

5.38 Representação gráfica da malha gerada para resolução do PVI (5.41). Fonte: Elaborada pelo autor. 110
5.39 Representação gráfica da condição inicial do PVI (5.41). Fonte: Elaborada pelo autor. 111
5.40 Aproximação da solução do PVI para hipotermia moderada e umidade baixa. Fonte: Elaborada pelo autor. 111
5.41 Saída defuzzificada da aproximação da solução do PVI para temperatura normal e umidade média. Fonte: Elaborada pelo autor. 111
5.42 Aproximação da solução do PVI para temperatura de 41,5°C e umidade 5. Fonte: Elaborada pelo autor. 112
5.43 Queda de pressão para o nó 289 da malha. Fonte: Elaborada pelo autor. 112
5.44 Diferença entre as soluções a cada iteração para o nó 289 da malha. Fonte: Elaborada pelo autor. 113
5.45 Aproximação da solução do PVI utilizando a saída defuzzificada do 1º caso. Fonte: Elaborada pelo autor. 114
5.46 Aproximação da solução do PVI utilizando a saída defuzzificada do 2º caso. Fonte: Elaborada pelo autor. 115
5.47 Aproximação da solução do PVI utilizando a saída defuzzificada do 3º caso. Fonte: Elaborada pelo autor. 115
5.48 Queda de pressão no ponto $(\overline{x}, \overline{y})$ para o caso 1. Fonte: Elaborada pelo autor. . 116
5.49 Queda de pressão no ponto $(\overline{x}, \overline{y})$ para o caso 2. Fonte: Elaborada pelo autor. . 116
5.50 Queda de pressão no ponto $(\overline{x}, \overline{y})$ para o caso 3. Fonte: Elaborada pelo autor. . 116
5.51 Diferenças nas aproximações das soluções utilizando as 3 saídas do 1º caso. Fonte: Elaborada pelo autor. 117
5.52 Diferenças nas aproximações das soluções utilizando as 3 saídas do 2º caso. Fonte: Elaborada pelo autor. 117
5.53 Diferenças nas aproximações das soluções utilizando as 3 saídas do 3º caso. Fonte: Elaborada pelo autor. 117
5.54 Aproximação da solução do PVI utilizando a saída defuzzificada do 2º caso. Fonte: Elaborada pelo autor. 118
5.55 Aproximação da solução do PVI utilizando a saída inferior do 2º caso. Fonte: Elaborada pelo autor. 118
5.56 Aproximação da solução do PVI utilizando a saída superior do 2º caso. Fonte: Elaborada pelo autor. 118

A.1 Elemento padrão. Fonte: Elaborada pelo autor. 124

B.1 Transformação do elemento padrão para o elemento real. Fonte: Elaborada pelo autor. 128

C.1 Transformação do elemento padrão para o elemento real utilizado na malha do domínio regular. Fonte: Elaborada pelo autor. 130

Lista de Tabelas

1 Medidas da Cóclea (HONG; HORII, 2022). 5

Sumário

Dedicatória vi

Agradecimentos vii

Resumo viii

Abstract ix

Introdução 1

1 Teoria dos Conjuntos Fuzzy 7
- 1.1 Introdução . . . 7
- 1.2 Conjuntos Fuzzy do Tipo 1 . . . 7
  - 1.2.1 Operações com Conjuntos Fuzzy . . . 9
  - 1.2.2 Normas Triangulares . . . 11
  - 1.2.3 Níveis de um Conjunto Fuzzy . . . 11
  - 1.2.4 Números Fuzzy . . . 12
  - 1.2.5 Operações Aritméticas com Números Fuzzy . . . 13
- 1.3 Introdução aos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy . . . 14
  - 1.3.1 Relações Fuzzy . . . 15
  - 1.3.2 Composição entre Relações Fuzzy . . . 15
  - 1.3.3 Regras e Inferência fuzzy . . . 16
  - 1.3.4 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy(SBRF) . . . 16
- 1.4 Conjuntos Fuzzy do Tipo 2 . . . 23
  - 1.4.1 Preliminares . . . 24
- 1.5 Sistema Baseado em Regras Fuzzy do Tipo 2 Intervalar . . . 26
  - 1.5.1 Algoritmo de Karnik-Mendel . . . 28
  - 1.5.2 Método de Inferência de Takagi-Sugeno . . . 29

2 A Velocidade do Som via *Toolbox* CANTERA e Rede Neuro-Fuzzy 35
- 2.1 Redes Neurais Artificiais . . . 35
  - 2.1.1 Método dos Mínimos Quadrados . . . 36
  - 2.1.2 Método do Gradiente Descendente . . . 39
- 2.2 ANFIS . . . 41
  - 2.2.1 Algoritmo de Aprendizagem do ANFIS . . . 44
- 2.3 CANTERA . . . 46
- 2.4 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy do Tipo 1 para obter a Velocidade do Som 47
  - 2.4.1 Sistema Baseado em Regras Fuzzy do Tipo 1 o através de Rede Neuro-Fuzzy 47
- 2.5 Construção do Sistema Baseado em Regras Fuzzy do Tipo 2 Intervalar . . . 50
  - 2.5.1 Sistema Baseado em Regras Fuzzy do Tipo 2 Intervalar para obter a Velocidade do Som . . . 50

3 Método das Diferenças Finitas Unidimensional e Bidimensional 55
3.1 Classificação de Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem 55
3.2 Definição da Malha 56
3.2.1 Domínio Unidimensional 56
3.2.2 Domínio Bidimensional Regular 57
3.3 Diferenças Finitas Centradas para Problemas Unidimensionais 58
3.4 Diferenças Finitas Centradas para Problemas Bidimensionais com Domínio Regular 60

4 Método dos Elementos Finitos Unidimensional e Bidimensional 65
4.1 Formulação Fraca do Problema Unidimensional 65
4.1.1 Método de Galerkin Unidimensional 69
4.1.2 Exemplo Unidimensional 72
4.2 Formulação Fraca do Problema Bidimensional 75
4.2.1 Método de Galerkin para o Problema Bidimensional 77
4.2.2 Construção das Funções da Base de V_h. 78
4.2.3 Exemplo Bidimensional com Domínio Regular 83

5 Equação da Onda Acústica com Parâmetro Escalar, Fuzzy do Tipo 1 e do Tipo 2 Intervalar 86
5.1 Modelos Unidimensionais 86
5.1.1 Aproximação da Solução do Problema Unidimensional pelo Método das Diferenças Finitas 87
5.1.2 Aproximação da Solução do Modelo da Equação da Onda Unidimensional com Parâmetro Escalar 88
5.1.3 Aproximação da Solução do Modelo com Parâmetro Fuzzy do Tipo 1 . . 91
5.1.4 Aproximação da Solução do Modelo com Parâmetro Fuzzy do Tipo 2 Intervalar 94
5.2 Modelagem dos Problemas Bidimensionais com Domínio Regular 97
5.2.1 Aproximação da Solução do Modelo Bidimensional com Domínio Regular com Parâmetro Fuzzy do Tipo 1 100
5.2.2 Solução do Modelo Bidimensional com Domínio Regular Utilizando Parâmetro Fuzzy do Tipo 2 Intervalar 104
5.3 Modelagem dos Problema Bidimensionais com Domínio Irregular 109
5.3.1 Solução do Modelo Bidimensional com Domínio Irregular e Parâmetro Fuzzy do Tipo 1 110
5.3.2 Solução do Modelo Bidimensional com Domínio Irregular e Parâmetro Fuzzy do Tipo 2 Intervalar 113

6 Considerações Finais 119

Referências Bibliográficas 121

Apêndices 124

Apêndice A Matrizes de Rigidez do Elemento Padrão 124

Apêndice B Transformação do Elemento Triangular 128

Apêndice C Exemplo de Transformação do Elemento Padrão 130

Apêndice D Instruções para a Elaboração do Programa Computacional Bidimensional com Domínios Irregulares 133

Introdução

A acústica é o ramo da Física que estuda as ondas sonoras e suas interações com a matéria (KINSLER *et al.*, 2000). Além do uso comum no estudo dos sons, essa área de estudo é importante para diversos campos da ciência que necessitem lidar com vibrações mecânicas. Para enunciar alguns exemplos de utilização da acústica, pode-se citar as vibrações que ocorrem em edificações, nas asas de aviões e em motores no geral. Todos esses fenômenos precisam ser previstos por projetistas, para evitar possíveis acidentes e desgaste precoce em equipamentos.

Por se tratarem de ondas mecânicas, as ondas sonoras necessitam de um meio material para se propagarem. Em se tratando de fenômenos sonoros, o fluido responsável por essa propagação é o ar, que é objeto de estudo no trabalho.

Segundo Kinsler *et al.* (2000), uma onda sonora é um tipo de flutuação de pressão em um fluido compressível, no caso desse trabalho, o ar. Como fluidos com baixa viscosidade possuem pouca resistência à deformações, as ondas sonoras são transmitidas através de contrações e expansões sucessivas do mesmo. Esse processo cria regiões de alta e baixa pressão adjacentes, que permitem a transmissão das ondas sonoras.

As ondas sonoras, que são transmitidas através do ar, são captadas pelos ouvidos dos seres vivos que possuem sistema auditivo e traduzidas em informações úteis pelo cérebro. O nome do sentido relacionado à esse processo é a audição.

A audição é um dos sentidos mais importantes para o ser humano. É através dela que percebem-se os sons ao entorno, o que permite a comunicação, a evasão de perigos ou a apreciação de música, por exemplo.

O sentido da audição está relacionado ao sistema auditivo, que, nos humanos, é composto por uma diversidade de estruturas. Importante salientar que todo o detalhamento do sistema auditivo exposto no trabalho é baseado em Bear, Connors e Paradiso (2017). Uma ilustração que representa o sistema auditivo encontra-se na Figura 1.

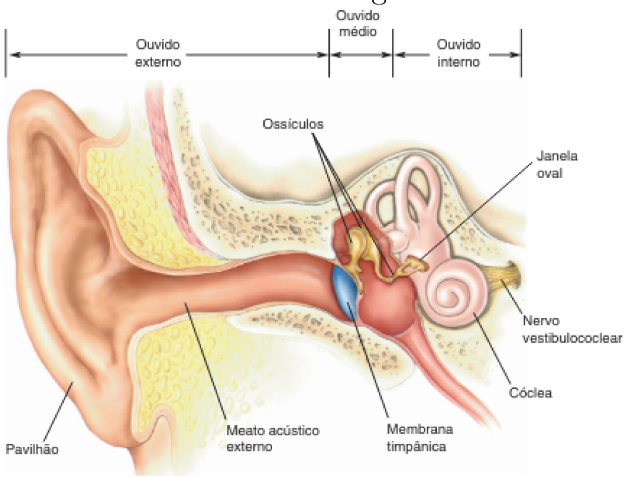


Figura 1: Sistema auditivo (BEAR; CONNORS; PARADISO, 2017).

Pela Figura 1, é possível notar que o sistema auditivo é composto por diversas estruturas, sendo estas:

- **Pavilhão**: Responsável pela captação das ondas sonoras em uma grande área. Seu funcionamento pode ser comparado ao de um bocal de um funil, que concentra o fluxo de um líquido disperso, para minimizar a perda ao se transmitir o fluido de um compartimento ao outro.

- **Meato**: Também conhecida como orelha interna, é responsável por conduzir o som até o tímpano.

- **Tímpano**: Responsável por transformar as ondas sonoras em movimento. Essa membrana recebe a ação do fluido acústico (ar), vibrando de acordo com os estímulos captados nas etapas anteriores. Esse movimento será transmitido para os três próximos componentes do sistema, que são denominados ossículos do ouvido interno.

- **Ossículos do ouvido médio**: Existem três ossículos responsáveis pela transmissão e amplificação da vibração do tímpano: o martelo, que recebe as primeiras vibrações do tímpano; a bigorna, que é movimentada pelo martelo e ajuda na amplificação das vibrações; e o estribo, que transmite o movimento à janela oval, presente no ouvido interno. A ligação entre o estribo e o ouvido interno encontra-se representada na Figura 2.

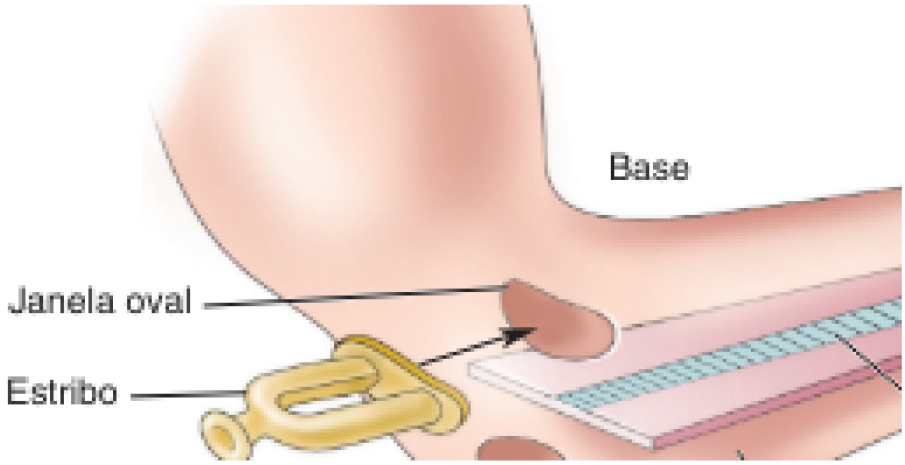


Figura 2: Ligação entre o estribo e o ouvido interno (BEAR; CONNORS; PARADISO, 2017).

- **Ouvido interno**: Principal tema do trabalho, o ouvido interno é composto pela cóclea, que é uma estrutura óssea corniculada, preenchida por duas membranas, que separam três cavidades. Esta tem a finalidade de converter os sons em impulsos nervosos, que podem ser conduzidos através dos neurônios até o cérebro.

Por ser o principal órgão utilizado neste estudo, que trata da modelagem matemática da pressão acústica na cóclea, torna-se necessário um olhar mais atento sobre seu funcionamento. A cóclea possui uma mecânica complexa, cujo detalhamento, neste trabalho, também é baseado em Bear, Connors e Paradiso (2017). Uma representação gráfica de um corte transversal da cóclea é apresentada na Figura 3 e pode ser observado que existem várias estruturas internas contidas na cóclea.

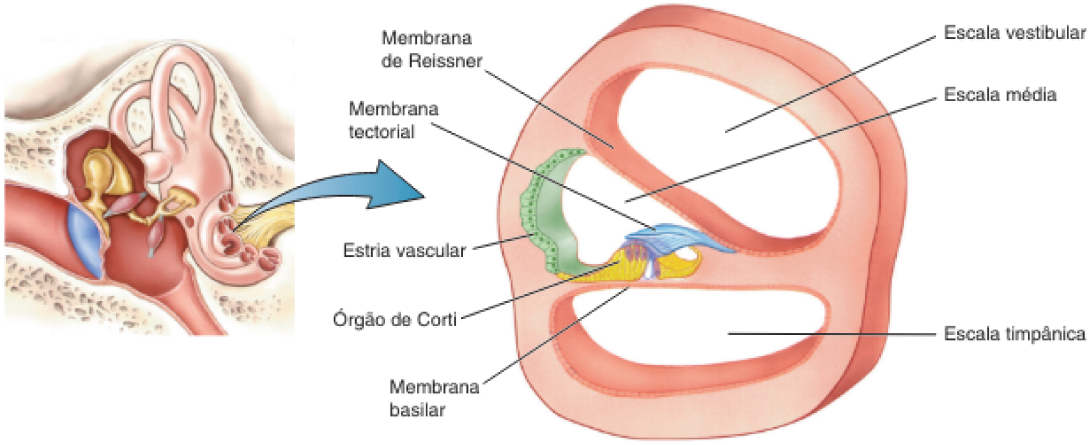


Figura 3: Corte transversal da cóclea (BEAR; CONNORS; PARADISO, 2017).

Segundo Bear, Connors e Paradiso (2017) as estruturas internas contidas na cóclea encontram-se descritas a seguir:

- **Escala Vestibular**: Cavidade interna da cóclea que recebe os estímulos advindos da janela oval. É preenchida com um fluido chamado perilinfa, podendo ser considerado um fluido compressível. A escala vestibular se comunica com a escala timpânica através da helicotema.
- **Escala timpânica**: Cavidade interna da cóclea, semelhante em vários aspectos à escala vestibular, sendo preenchida com o mesmo fluido da estrutura anterior. Essa cavidade é separada da escala média pela membrana basilar, que é a principal responsável pela transmissão do movimento da perilinfa para o orgão de Córti, por ser mais elástica que a membrana de Reissner.
- **Escala média**: Cavidade interna contida entre a duas estruturas anteriores. Esta é preenchida pela endolinfa, podendo ser considerado um fluido não-newtoniano. Essa cavidade não se comunica com as outras duas estruturas citadas anteriormente. Dentro desta, se encontra o órgão de Córti, responsável pela transcrição dos movimentos do fluido em impulsos nervosos.
- **Membrana de Reissner**: Membrana gelatinosa que separa a escala vestibular da escala média. Possui elasticidade menor que a membrana basilar, contribuindo menos aos mecanismos do órgão de Córti.
- **Membrana Basilar**: Membrana que separa a escala timpânica da escala média. É a principal responsável por transformar os movimentos da perilinfa em movimentos lineares, possibilitando a movimentação das partes que compõem o órgão de Córti.
- **Órgão de Córti**: Uma estrutura presente dentro da escala média. No órgão de Córti, se localizam uma série de celulas ciliares que, conforme o movimento das membranas basilar e de Reisner, se tocam ou se afastam, transmitindo uma série de sinais através do sistema nervoso, que chegarão ao cérebro. O funcionamento dessas células pode ser comparado ao ato de encostar dois fios elétricos de polaridade oposta. Ao tocar um cabo elétrico positivo em um negativo, ocorrerá a transmissão de cargas elétricas, pela diferença de potencial.

Para fins deste estudo, considera-se a cóclea "desenrolada". Uma representação gráfica dessa interpretação do problema encontra-se na Figura 4.

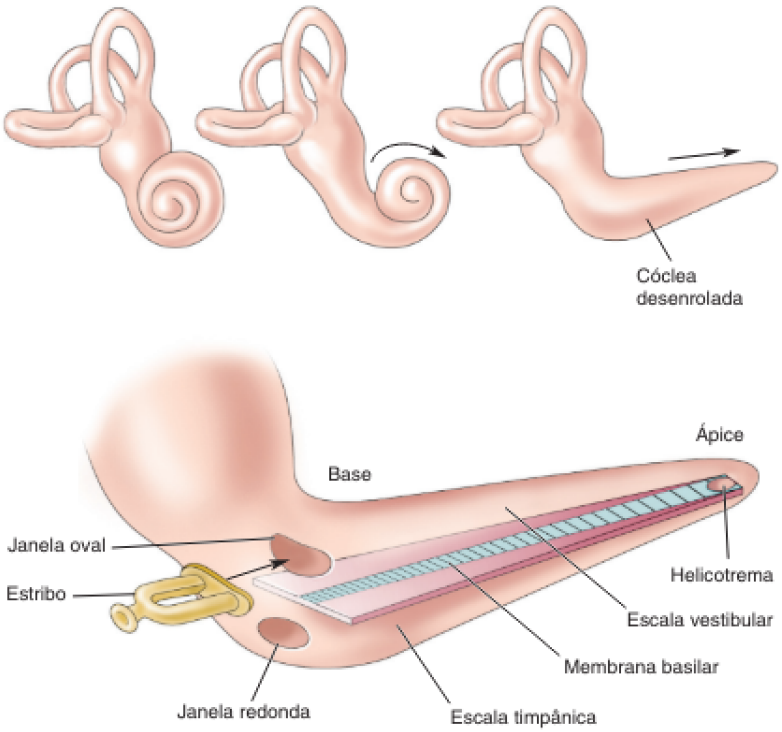


Figura 4: Modelo da cóclea desenrolada (BEAR; CONNORS; PARADISO, 2017).

Segundo Isailović *et al.* (2015), um possível modelo simplificado desta dinâmica é o que considera a cóclea com apenas duas cavidades separadas por uma membrana e o ar como fluido interno. A abordagem escolhida para a formulação do modelo matemático unidimensional é de uma equação da onda acústica dada por:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

em que p é a pressão do fluido dentro de duas cavidades da cóclea, vestibular e timpânica, cujo comprimento longitudinal é dado pela variável x, t é o tempo e c é a velocidade do som. No caso bidimensional, a equação é dada por:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \tag{2}$$

em que só a variável y é acrescentada na equação (1).

Um fato interessante sobre a velocidade do som é que a mesma depende da composição do meio mecânico em que o som se transmite. Segundo Nicolau, Miholca e Andrei (2009), a velocidade do som no ar apresenta uma incerteza com relação à temperatura. Estes autores, também destacam outro fator que altera a velocidade do som no ar que é a umidade absoluta, representando a porcentagem de água presente no meio. A modelagem matemática destas incertezas foram tratadas utilizando a teoria dos conjuntos fuzzy. Ao consultar tabelas da velocidade do som, como em Kinsler *et al.* (2000), percebe-se que esta é diferente no ar e na água. Logo, se existe umidade, existe incerteza com relação à este parâmetro.

Para trabalhar com um parâmetro que é incerto, como é o caso a velocidade do som no ar, é necessário introduzir ferramentas matemáticas que permitam o tratamento adequado da mesma. Além disso, para elaborar os modelos matemáticos apresentados neste trabalho, é necessário construir todos os domínios dos problemas de valor inicial a serem estudados, de

forma que possam representar a cóclea com precisão. Tais dados foram obtidos em Hong e Horii (2022) e estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Medidas da Cóclea (HONG; HORII, 2022).

Dimensões da Cóclea	
Comprimento da Cóclea	35 mm
Largura da Entrada da Cóclea	1,2 mm
Largura da Helicotrema	0,7 mm

Segundo Jafelice, Barros e Bassanezi (2023), Lofti Zadeh é precursor da elaboração da teoria dos conjuntos fuzzy. O pesquisador percebeu que nem sempre os problemas a serem tratados matematicamente possuem fronteiras bem definidas. Logo, torna-se necessária a criação de uma generalização da lógica clássica, que seja capaz de tratar de problemas que contenham ou não esse tipo de incerteza.

De acordo com John e Coupland (2007), em 1965, Lofti Zadeh publica o primeiro artigo sobre conjuntos fuzzy, onde os propõe como uma alternativa a lógica booleana na resolução de problemas computacionais. Os conjuntos fuzzy deste primeiro artigo são conhecidos como conjuntos fuzzy do tipo 1.

Ainda segundo John e Coupland (2007), em 1975, Zadeh publica um artigo que introduz a noção de conjuntos fuzzy do tipo 2, que generalizava as operações propostas pelo mesmo em 1965. A diferença crucial entre os conjuntos fuzzy do tipo 1 e o do tipo 2 é que o primeiro tem como grau de pertinência, de um elemento ao conjunto, um único valor entre 0 e 1, enquanto o conjunto fuzzy do tipo 2 revela o grau de pertinência em dois estágios, através da pertinência primária e da função de pertinência secundária. Quando a função de pertinência secundária é constante e igual a 1, o conjunto fuzzy é denominado do tipo 2 intervalar. Outras contribuições importantes a ser destacada são as de Ebrahim Mamdani e Michio Sugeno, sendo o segundo, em conjunto com Tomohiro Takagi, os responsáveis por desenvolver os métodos de inferência utilizados nessa dissertação.

Além destes, é importante destacar o papel de Jyh-Shing Jang, responsável pelo encontro entre lógica fuzzy e inteligência artificial, em Jang (1993). É creditada a ele a construção do algoritmo do ANFIS (*Adaptative Neuro-Fuzzy Inference System*). O artigo que trata de toda a arquitetura da rede neuro-fuzzy foi lançado em 1993, possibilitando um caminho inverso na construção de SBRF, em relação aos métodos tradicionais.

Nos problemas clássicos que se utilizam de lógica fuzzy, em geral, o pesquisador busca um especialista na área para construir um SBRF que permita o trabalho com as incertezas propostas. Em Borges (2016) e Ferreira (2017), os trabalhos determinam o parâmetro e a fronteira do domínio da equação diferencial parcial via SBRF do tipo 1, calculados com o auxílio do especialista da área de estudo, respectivamente. Porém, também é possível a construção de Sistemas Baseados em Regras Fuzzy a partir de dados resultantes de experimentos, como em Prudente (2024). Para trabalhar com essas informações, são construídos algoritmos de aprendizagem, denominados por redes neuro-fuzzy. Para construir o SBRF do tipo 1 utilizado no trabalho, a rede neuro-fuzzy aplicada foi o ANFIS, que constrói um SBRF com método de inferência de Takagi-Sugeno. Os dados utilizados para o treinamento da rede foram obtidos através do *toolbox* CANTERA. A combinação entre as informações fornecidas pelo CANTERA e a rotina computacional do ANFIS, determina um SBRF do tipo 1, o esquema está descrito na Figura 5.

A partir do SBRF do tipo 1 encontrado pela rede neuro-fuzzy, é construído um SBRF do tipo 2 intervalar. Acoplando o parâmetro fuzzy defuzzificado nos modelos unidimensionais e bidimensionais, são calculadas as aproximações das soluções utilizando métodos numéricos.

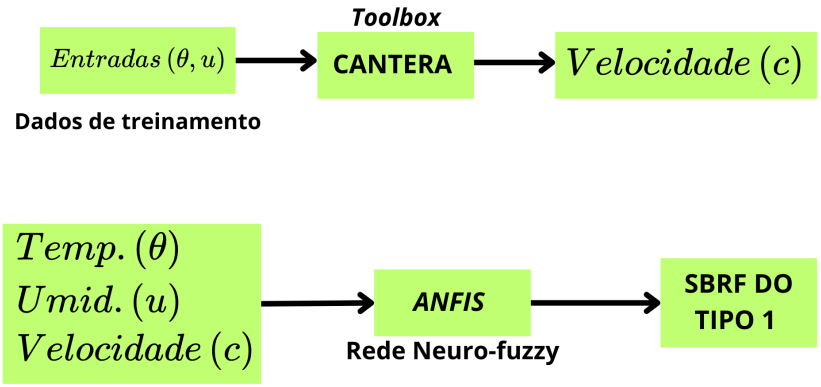


Figura 5: Esquema para obtenção do Sistema Baseado em Regras Fuzzy do tipo 1. Fonte: Elaborada pelo autor.

Para os modelos unidimensionais, é utilizado o Método das Diferenças Finitas Centradas (MDF), que se baseiam no truncamento da série de Taylor em um certo ponto, afim de encontrar uma aproximação da solução dos problemas de valor inicial propostos.

Nos modelos bidimensionais, é utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF). Além de possuir boas aproximações, este método apresenta a possibilidade de trabalhar com domínios irregulares, o que o torna muito vantajoso para o trabalho, visto que a cóclea e a membrana basilar possuem os valores das áreas das seções transversais variáveis.

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre a pressão acústica no interior da cóclea, utilizando a velocidade do som como parâmetro fuzzy do tipo 1 e do tipo 2 intervalar. Para tal finalidade, a modelagem matemática é formulada através da equação da onda acústica unidimensional e bidimensional com domínio regular e irregular, tratando a velocidade do som via SBRF do tipo 1 e do tipo 2 intervalar, as variáveis de entrada são temperatura e umidade. A rede neuro-fuzzy ANFIS e o *toolbox* CANTERA são combinados para obter o SBRF do tipo 1. O intuito é verificar matematicamente se a temperatura e a umidade influenciam a pressão acústica em função do tempo e gerar sistemas que podem ser utilizados para outros conjuntos de dados similares de entrada.

Com relação à organização deste trabalho, no Capítulo 1 é apresentada toda a fundamentação teórica dos conjuntos fuzzy para lidar com os parâmetros fuzzy dos tipos 1 e 2.

No Capítulo 2, são descritos o referencial teórico para a construção do ANFIS e o *toolbox* CANTERA. Além disso, à partir da junção de ambos, é construído um SBRF do tipo 1. A partir deste, também é construído um SBRF do tipo 2 intervalar, que é utilizado no decorrer do trabalho.

No Capítulo 3, é exposta a teoria referente ao MDF, bem como exemplos de utilização do mesmo em equações diferenciais. Como dito anteriormente, este método é utilizado na aproximação da solução de todos os modelos unidimensionais propostos na dissertação.

No Capítulo 4, é descrito o Método dos Elementos Finitos, que é utilizado na resolução de todos os modelos bidimensionais do trabalho. Esse método é importante pois permite uma boa aproximação para problemas de domínio irregular, que é o caso das cavidades cocleares.

Por fim, no Capítulo 5, são exibidos os resultados obtidos a partir de todos os modelos formulados, combinando as técnicas apresentadas e SBRF obtidos nos capítulos anteriores. Finalmente, no Capítulo 6 as considerações finais.

Ao final da dissertação, encontram-se os Apêndices que descrevem detalhes do método dos elementos finitos para os modelos com domínio irregular.

Capítulo 1

Teoria dos Conjuntos Fuzzy

1.1 Introdução

A lógica é um dos atributos cognitivos mais úteis para qualquer pessoa. Utiliza-se essa habilidade para resolver problemas rotineiros como, por exemplo, traçar a melhor rota para o trabalho, selecionar os produtos à serem colocados em um carrinho de compras no supermercado ou ainda ao tenta convencer uma pessoa relutante à fazer uma viagem de férias. Por ser um atributo inerente à natureza humana, a lógica é ponto de interesse da filosofia desde os seus primórdios, tendo sido, segundo Feitosa (2005) atribuído à Aristóteles o primeiro trabalho de sistematização do conceito.

A matemática utiliza a lógica clássica, aliada a noção de números, para modelar e resolver sistematicamente problemas de toda ordem, desde quantificar animais até projetar a forma e quantidade de materiais utilizados na construção de um arranha-céu. Nesse sentido, tratam-se quantidades precisas de maneira sistematizada, afim de obter um resultado condizente com a realidade. Porém, existem problemas que não são tão precisos. Um médico ao diagnosticar um paciente utiliza a lógica para associar fatores como sintomas, idade e profissão do indivíduo. Por exemplo, um idoso que trabalhou em um ambiente com alta poluição sonora por toda sua vida se queixa de dor crônica no ouvido e problemas auditivos. O especialista pode suspeitar de possíveis enfermidades como doença de Mèniére, otoscleroseneuroma do acústico ou colesteatoma, dada a idade e o emprego do paciente. A partir disso, o médico pode solicitar exames específicos para confirmar o diagnóstico. Mas como quantificar o grau de surdez e dor do paciente?

Segundo Jafelice, Barros e Bassanezi (2023), pensando em problemas que não tem fronteiras bem definidas, como o citado anteriormente, Lofti Zadeh propõe uma generalização da teoria clássica de conjuntos, denominada como teoria dos conjuntos fuzzy. Esta ferramenta matemática tem a capacidade de modelar e solucionar problemas que envolvem variáveis cujos valores são imprecisos.

1.2 Conjuntos Fuzzy do Tipo 1

É comum descrever um conjunto clássico através de sua função característica. Partindo desse conceito, Lofti Zadeh fundamentou a teoria de conjuntos fuzzy. Este capítulo expõe tais conceitos, com base nos trabalhos de Mendel (2017), Barros e Bassanezi (2015), Jafelice, Barros e Bassanezi (2023) e Jafelice e Bertone (2021).

Definição 1.1. *Um subconjunto clássico A em relação a um universo U é caracterizado por sua função característica, definida como:*

$$\chi_A : U \longrightarrow \{0, 1\},$$

em que cada elemento x do conjunto universal U recebe a imagem 1 através da função χ_A se pertencer a A; caso contrário, é considerado fora do conjunto, sendo associado ao valor 0.

Definição 1.2. *Um subconjunto fuzzy A de um universo U é definido em termos de uma função de pertinência μ_A que a cada elemento x de U associa um número $\mu_A(x)$ entre zero e um chamado de grau de pertinência de x a A. Assim,*

$$\mu_A : U \to [0,\ 1].$$

Os valores $\mu_A(x) = 1$ e $\mu_A(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência plena e a não pertinência do elemento x a A. Um subconjunto fuzzy também pode ser identificado por um conjunto clássico de pares ordenados:

$$G = \{(x, \mu_A(x)) \,|\, x \in U\};$$

que é o gráfico da função de pertinência.

É interessante notar que um subconjunto clássico A de U é um conjunto fuzzy particular para o qual a função de pertinência é a função característica de A, isto é,

$$\mu_A : U \to \{0, 1\}.$$

Exemplo 1.1. *Considere que uma empresa avalia o grau de experiência de seus funcionários à partir da quantidade de anos em que trabalham em uma determinada atividade ou cargo. Sejam U o conjunto da quantidade de tempo que cada funcionário trabalha nessa empresa e A o subconjunto dos funcionários considerados experientes. Suponha ainda que a empresa considere que um trabalhador experiente necessite de pelo menos 10 anos trabalhando em uma função. Ao utilizar a lógica clássica, pode se descrever o conjunto dos trabalhadores experientes com a seguinte função:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 1, & \text{se } x \geq 10 \end{cases}.$$

Perceba que utilizando uma função característica e a lógica clássica, uma pessoa com 9 anos de experiência em sua função e um recém-contratado possuem o mesmo grau de experiência, o que não condiz com a realidade. Para resolver esse problema, pode-se elaborar uma função de pertinência $\mu_A : U \longrightarrow A$ dada por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{10}, & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 1, & \text{se } \ x \geq 10 \end{cases}.$$

Na Figura 1.1 é representado o gráfico da função de pertinência μ_A.

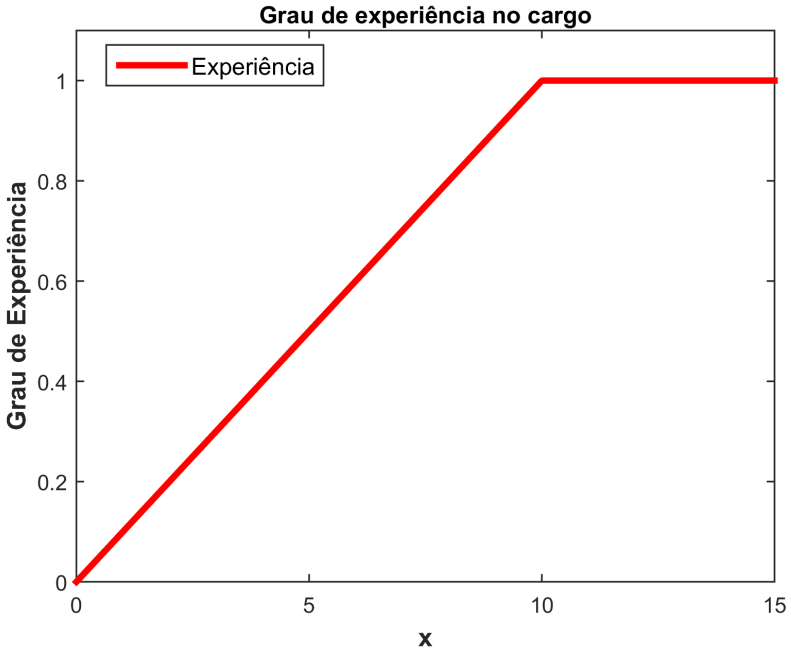


Figura 1.1: Função de pertinência trapezoidal representando a experiência do trabalhador em anos. Fonte: Elaborada pelo autor.

1.2.1 Operações com Conjuntos Fuzzy

Para estabelecer as normas e operações algébricas necessárias para tratar de um conjunto fuzzy, faz-se necessário revisitar as noções de conjuntos clássicos, e generalizar a ideia para conjuntos fuzzy, usando as funções de pertinência.

Definição 1.3. *Sejam A e B dois conjuntos clássicos em um universo U. Definem-se operações de união, inter e complementar por:*

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\};$$
$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\};$$
$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

As operações de conjuntos clássicos realizadas através de funções características:

$$\chi_{A\cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\};$$
$$\chi_{A\cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\};$$
$$\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

Observe que para qualquer $x \in U$, tem-se

$$x \in A \cup B \iff \chi_{A\cup B}(x) = 1 \iff \chi_A(x) = 1 \text{ ou } \chi_B(x) = 1 \iff \{x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

$$x \in A \cap B \iff \chi_{A\cap B}(x) = 1 \iff \chi_A(x) = 1 \text{ e } \chi_B(x) = 1 \iff \{x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

$$x \in A^c \iff \chi_{A^c}(x) = 1 \iff \chi_A(x) = 0 \iff x \notin A.$$

Partindo desta análise, se A é subconjunto de B então,

$$\chi_A(x) \leq \chi_B(x), \text{ para todo } x \in U.$$

Para generalizar as formulações matemáticas obtidas através das funções características, basta utilizar as funções de pertinência definidas anteriormente.

Definição 1.4. *Sejam dois subconjuntos fuzzy A e B de U, com funções de pertinência indicadas por μ_A e μ_B, repectivamente. As funções de pertinência que representam a união, a inter e o complementar dos conjuntos fuzzy são dadas por:*

$$\begin{aligned} \mu_{A \bigcup B}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}; \\ \mu_{A \bigcap B}(x) &= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}; \\ \mu_{A^c}(x) &= 1 - \mu_A(x). \end{aligned}$$

respectivamente.

As Figuras 1.2, 1.3 e 1.4 representam as operações de união, intersecção e complementar de um conjunto fuzzy, respectivamente.

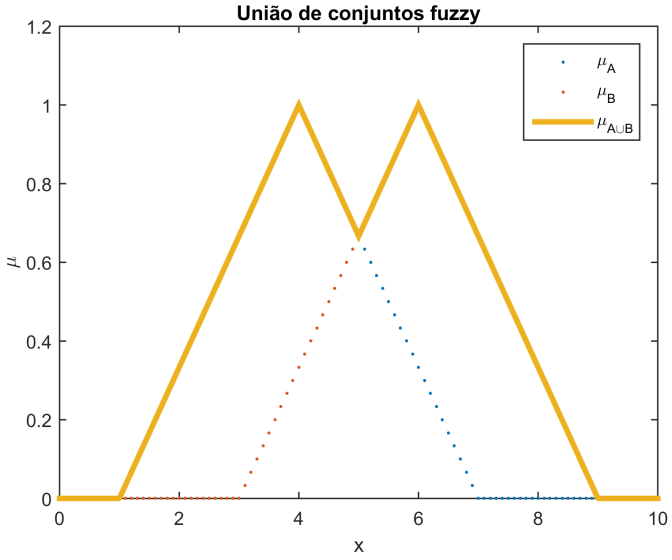


Figura 1.2: Representação gráfica da união de conjuntos fuzzy. Fonte: Elaborada pelo autor.

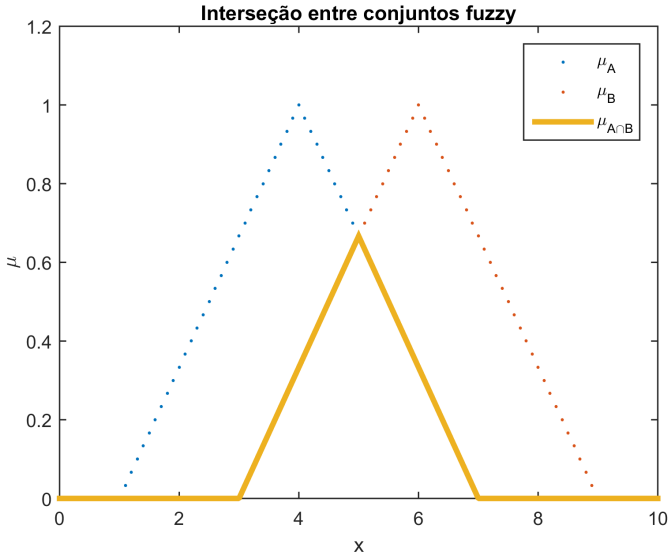


Figura 1.3: Representação gráfica da interseção de conjuntos fuzzy. Fonte: Elaborada pelo autor.

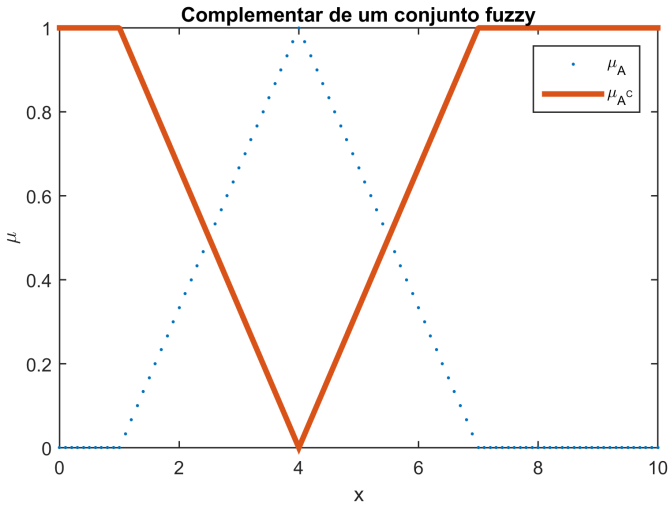


Figura 1.4: Representação gráfica do complementar de um conjuntos fuzzy. Fonte: Elaborada pelo autor.

1.2.2 Normas Triangulares

As normas triangulares são generalizações naturais dos operadores união e interseção.

Definição 1.5. *Uma conorma triangular ($\vee$ ou s-norma) é uma operação binária* $s : [0,\ 1] \times [0,\ 1] \longrightarrow [0,\ 1]$ *satisfazendo as seguintes propriedades:*

- *Comutatividade:* $xsy = ysx$;
- *Associatividade:* $xs(ysz) = (xsy)sz$;
- *Monotonicidade: Se* $x \leq y$ *e* $w \leq z$, *então* $xsw \leq ysz$;
- *Condições de Fronteira* $xs0 = x$ *e* $xs1 = 1$.

Um exemplo clássico de conorma triangular é o operado max. Esse fato pode ser verificado através das propriedades.

Definição 1.6. *Uma norma triangular ($\wedge$ ou t-norma) é uma operação binária* $t : [0,\ 1] \times [0,\ 1] \longrightarrow [0,\ 1]$ *satisfazendo as seguintes propriedades:*

- *Comutatividade:* $xty = ytx$;
- *Associatividade:* $xt(ytz) = (xty)tz$;
- *Monotonicidade: Se* $x \leq y$ *e* $w \leq z$, *então* $xtw \leq ytz$;
- *Condições de Fronteira* $0tx = 0$ *e* $1tx = x$.

Note que a diferença entre a s-norma e a t-norma ocorre nas condições de fronteira. Um exemplo de t-norma é o operador min.

1.2.3 Níveis de um Conjunto Fuzzy

Os níveis de um conjunto fuzzy são ferramentas essenciais para a formalização do conceito de números fuzzy, além de facilitar as operações entre os mesmos.

Definição 1.7. *Seja A um conjunto fuzzy e $\alpha \in (0,\ 1]$. Define-se o α-nível de A o conjunto:*

$$[A]^{\alpha} = \{x \in U |\ \mu_A(x) \geq \alpha\}. \tag{1.1}$$

Definição 1.8. *O suporte de um conjunto fuzzy, denotado por $supp(A)$, é composto por todos os elementos de U cujo grau de pertinência é diferente de zero no conjunto A. Isto é:*

$$supp(A) = \{x \in U |\ \mu_A(x) > 0\}. \tag{1.2}$$

É possível definir o nível zero de um conjunto fuzzy.

Definição 1.9. *Considere U como um espaço topológico e $A \subseteq U$ um conjunto fuzzy. O nível zero de A é o fecho topológico do suporte de A, isto é:*

$$[A]^0 = \overline{supp(A)}. \tag{1.3}$$

1.2.4 Números Fuzzy

Por se tratar de uma generalização da lógica clássica de conjuntos, faz-se necessário também a definição de uma noção de números, que permita trabalhar algebricamente com estes. Para tanto, duas definições fundamentais são a de um número fuzzy e a formalização do princípio de extensão de Zadeh.

Definição 1.10. *Sejam A um conjunto fuzzy e U o universo em que A está definido. A é definido como um número fuzzy se U for o conjunto dos números reais e a função de pertinência $\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\ 1]$ for tal que:*

- *$\mu_A(x) = 1$ para pelo menos um x do $supp(A)$;*
- *$[A]^{\alpha}$ é um intervalo fechado, para todo $\alpha \in (0,\ 1]$;*
- *$supp(A)$ é limitado.*

O princípio de extensão de Zadeh permite calcular a imagem de um conjunto fuzzy por uma função, Figura 1.5. Essa operação é de extrema importância para definir as operações algébricas entre números fuzzy.

Definição 1.11. *Sejam f uma função tal que $f : U \longrightarrow Z$ e A um subconjunto fuzzy de U. O princípio de extensão de Zadeh de f é a função $\widehat{f}$ que, ao ser aplicada em A fornece o subconjunto $\widehat{f}(a)$ de Z, cuja função de pertinência é dada por:*

$$\mu_{\widehat{f}(A)}(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(z)} \mu_A(x), & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

Segue então, um importante teorema que relaciona α-níveis e o princípio da extensão de Zadeh.

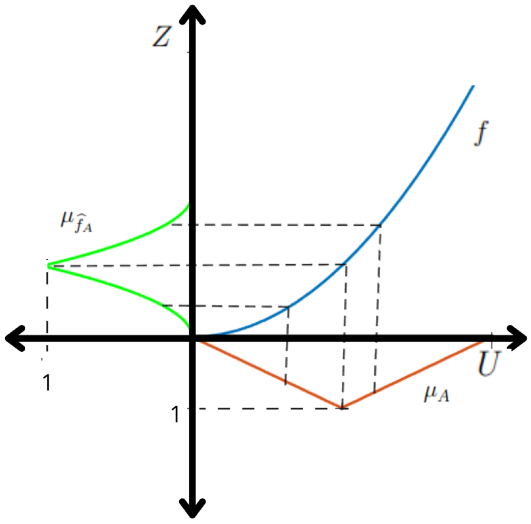


Figura 1.5: Representação gráfica do princípio da extensão de Zadeh. Fonte: Elaborada pelo autor.

Teorema 1.1. *(BARROS; BASSANEZI, 2015) Sejam $f : U \longrightarrow Z$ uma função contínua e A um subconjunto fuzzy de U, com α-níveis compactos e não-vazios. Então, para todo $\alpha \in [0,\ 1]$ tem-se:*

$$[\widehat{f}(A)]^{\alpha} = f([A]^{\alpha}). \tag{1.4}$$

1.2.5 Operações Aritméticas com Números Fuzzy

Com os conceitos apresentados nas seções anteriores, pode-se agora definir as operações aritméticas entre números fuzzy.

Definição 1.12. *Sejam A e B dois números fuzzy e $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- *A soma entre os números fuzzy A e B, denotada por $A + B$, é um número fuzzy cuja função de pertinência é:*

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{(x,y)\in\phi(z)} \min(\mu_A(x),\ \mu_B(y)); \tag{1.5}$$

  em que $\phi(z) = \{(x, y)|\ x + y = z\}$.

- *A diferença entre os números fuzzy A e B, denotada por $A - B$, é um número fuzzy cuja função de pertinência é:*

$$\mu_{A-B}(z) = \sup_{(x,y)\in\phi(z)} \min(\mu_A(x),\ \mu_B(y)); \tag{1.6}$$

  em que $\phi(z) = \{(x, y)|\ x - y = z\}$.

- *A multiplicação entre os números fuzzy A e B, denotada por $A \cdot B$, é um número fuzzy cuja função de pertinência é:*

$$\mu_{A\cdot B}(z) = \sup_{(x,y)\in\phi(z)} \min(\mu_A(x),\ \mu_B(y)); \tag{1.7}$$

  em que $\phi(z) = \{(x, y)|\ x \cdot y = z\}$.

- *A divisão entre os números fuzzy A e B, denotada por A/B, é um número fuzzy cuja função de pertinência é:*

$$\mu_{A/B}(z) = \sup_{(x,y)\in\phi(z)} \min(\mu_A(x),\ \mu_B(y)); \tag{1.8}$$

  em que $\phi(z) = \{(x,y)|\ x/y = z\}$.

- *A multiplicação de um escalar λ pelo número fuzzy A, denotada por λA, é um número fuzzy cuja função de pertinência é dada por:*

$$\mu_{\lambda A}(z) = \begin{cases} \mu_A(\lambda^{-1}z), & se\ \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(z), & se\ \lambda = 0 \end{cases}. \tag{1.9}$$

Como no caso da extensão de Zadeh, existe uma importante proposição que relaciona os α-níveis às operações aritméticas entre números fuzzy.

Proposição 1.1. *Sejam A e B conjuntos fuzzy, cujos α-níveis são dados por $[A]^\alpha = [a_1^\alpha,\ a_2^\alpha]$ e $[B]^\alpha = [b_1^\alpha,\ b_2^\alpha]$. Então, valem as seguintes operações:*

- *A soma entre A e B é o número fuzzy $A + B$, cujos α-níveis são*

$$[A+B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha,\ a_2^\alpha + b_2^\alpha]. \tag{1.10}$$

- *A subtração entre A e B é o número fuzzy $A - B$, cujos α-níveis são*

$$[A-B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha,\ a_2^\alpha - b_1^\alpha]. \tag{1.11}$$

- *A multiplicação entre A e B é o número fuzzy $A \cdot B$, cujos α-níveis são*

$$[A\cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha = [a_1^\alpha,\ a_2^\alpha] \cdot [b_1^\alpha,\ b_2^\alpha] = [\min(P),\ \max(P)], \tag{1.12}$$

  em que $P = \{a_1^\alpha \cdot b_1^\alpha,\ a_1^\alpha \cdot b_2^\alpha,\ a_2^\alpha \cdot b_1^\alpha,\ a_2^\alpha \cdot b_2^\alpha\}$.

- *A divisão entre A e B é o número fuzzy $\frac{A}{B}$, cujos α-níveis são*

$$\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [a_1^\alpha,\ \ a_2^\alpha] \cdot \left[\frac{1}{b_2^\alpha},\ \ \frac{1}{b_1^\alpha}\right]. \tag{1.13}$$

- *A multiplicação entre λ e A é o número fuzzy λA, cujos α-níveis são dados por*

$$[\lambda A]^\alpha = \lambda[A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha,\ \lambda a_2^\alpha], & se\ \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha,\ \lambda a_1^\alpha], & se\ \lambda < 0 \end{cases}. \tag{1.14}$$

1.3 Introdução aos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Na argumentação lógica, utilizam-se estruturas linguísticas para formular regras que permitam evidenciar conclusões pertinentes ao problema. Por exemplo, se um indivíduo sofre com determinados sintomas, então, através de uma construção lógica, relacionando sintomas e exames associados as doenças, o médico chega a um diagnóstico e consegue propor um tratamento pertinente à enfermidade.

Segundo Jafelice, Barros e Bassanezi (2023), os Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF) são uma tentativa de emular o comportamento humano na tomada de decisões lógicas, à partir de estruturas linguísticas. Esses algoritmos permitem a operação de conjuntos fuzzy na parte subsequente de um argumento lógico e, com base em um sistema de regras linguísticas ou matemáticas, obtenha-se como consequente um número real.

Porém, antes de definir de fato um SBRF, é necessário compreender alguns conceitos preliminares.

1.3.1 Relações Fuzzy

Ao desenvolver um tema em estudo, é necessário relacionar fatos de maneira pertinente para sustentar um argumento. Daí, aliado à tentativa de emular o comportamento humano citada anteriormente, surge a necessidade de criar ferramentas que permitam relacionar dois ou mais conjuntos fuzzy.

Definição 1.13. *Uma relação fuzzy R sobre $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ é qualquer subconjunto fuzzy do produto cartesiano $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$. Se o produto cartesiano é formado por apenas dois conjuntos, a nomeamos de relação binária.*

Definição 1.14. *O produto cartesiano fuzzy $A_1 \times A_2 \ldots \times A_n$ dos subconjuntos fuzzy $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ de $U_1,\ U_2, \ldots,\ U_n$ é a relação fuzzy R cuja função de pertinência é dada por:*

$$\mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2), \wedge \ldots \wedge \mu_{A_n}(x_n). \tag{1.15}$$

em que $\wedge$ é a t-norma min.

Um fato importante a se destacar é que essas operações indicam se os conjuntos estão relacionados ou não. Além disso, é possível calcular o quanto os conjuntos estão relacionados, dado que as relações são construídas com base em funções de pertinência.

1.3.2 Composição entre Relações Fuzzy

Definição 1.15. *Sejam R e S duas relações binárias fuzzy em $U_1 \times U_2$ e $U_2 \times U_3$, respectivamente. A composição $R \circ S$ é uma relação fuzzy binária em $U_1 \times U_3$ cuja função de pertinência é dada por:*

$$\mu_{R \circ S}(x_1, x_3) = \max_{x_2 \in U_2}[\min(\mu_R(x_1, x_2), \mu_s(x_2, x_3))]. \tag{1.16}$$

Definição 1.16. *Sejam U_1 e U_2 dois conjuntos e $\mathcal{F}(U_1)$ e $\mathcal{F}(U_2)$ as classes dos subconjuntos fuzzy U_1 e U_2, respectivamente, e R uma relação fuzzy binária sobre $U_1 \times U_2$. Então a relação R define um funcional de $\mathcal{F}(U_1)$ em $\mathcal{F}(U_2)$, que a cada elemento $A_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ faz corresponder o elemento $A_2 \in \mathcal{F}(U_2)$ cuja função de pertinência é dada por:*

$$\mu_{A_2}(x_2) = \mu_{R(A_1)}(x_2) = \max_{x_1 \in U_1}[\min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_R(x_1, x_2))]. \tag{1.17}$$

Agora, é possível definir uma equação relacional fuzzy.

Definição 1.17. *Sejam R, S e X relações fuzzy e $*$ uma operação entre relações fuzzy. Então uma equação relacional fuzzy tem a forma:*

$$R * X = S. \tag{1.18}$$

Existe ainda um importante teorema, evidenciado em Barros e Bassanezi (2015), que permite a resolução das equações relacionais fuzzy como a descrita anteriormente.

Teorema 1.2. *Dadas as relações fuzzy S e D definidas em $U \times V$ e $V \times W$ respectivamente, seja $\mathbb{A} = \{X : X$ é a relação fuzzy em $V \times W$ e $S \circ X = D\}$. Então se $\mathbb{A} \neq \emptyset$, tem-se $S_{\circ g}^{-1} D$ como elemento maximal de $\mathbb{A}$.*

1.3.3 Regras e Inferência fuzzy

No raciocínio lógico clássico, uma regra pode ser formada pela estrutura "Se X é ou não A então Y é ou não B", em que A e B são conjuntos. Também pode-se expressar essas regras matematicamente:

$$\text{Se } X \in A \text{ então } Y \in B. \tag{1.19}$$

É ainda possível compor mais de uma regra no subsequente ou no consequente da sentença utilizando os conectivos lógicos "ou" (representados por $\vee$) e "e" (representados por $\wedge$). Assim, podemos estruturar diversas regras de inferência clássica.

Uma regra fuzzy, por sua vez, também pode ser escrita com a mesma formulação. Sejam A e B dois conjuntos fuzzy e considere a sentença na forma "Se $X \in A$ então $Y \in B$". Esta pode ser interpretada como uma relação fuzzy R entre A e B, cuja função de pertinência $\mu_R(x, y)$ depende de $\mu_A(x)$ e $\mu_B(y)$. Pelo método de inferência de Mamdani, utiliza-se uma t-norma, em especial a do min, para relacionar os conjuntos A e B, desta forma:

$$\mu_R(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) = \min[\mu_A(x),\ \mu_B(y)]. \tag{1.20}$$

Isso implica que a relação R pode ser escrita como um produto cartesiano ($R = A \times B$). Caso seja necessário compor regras fuzzy, pode-se utilizar uma s-conorma, normalmente o max. Utilizando essa modelagem, substituem-se os conectivos lógicos "ou" e "e" por s-normas e t-normas, respectivamente. Isso possibilita o trabalho com conjuntos fuzzy sem maiores empecilhos.

1.3.4 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy(SBRF)

Um SBRF do tipo 1 possui quatro componentes: a fuzzificação, a base de regras, o método de inferência e a defuzzificação. Um anagrama que representa o SBRF é disposto na Figura 1.6.



Figura 1.6: Sistema baseado em regras fuzzy. Fonte: Elaborada pelo autor.

As descrições de cada um dos componentes do SBRF são:

- **Fuzzificação**: Este componente, também conhecido como fuzzificador ou processador de entrada, é responsável por traduzir as informações de entrada em conjuntos fuzzy.

- **Base de Regras**: Neste componente, ficam armzenadas as regras de entrada e saída do SBRF, podendo estas depender de variáveis linguísticas ou relações matemáticas. Como pode ser visto na Figura 1.6, a base de regras é construída juntamente ao método de inferência no sistema. É na base de regras que definem-se as relações entre os conjuntos fuzzy obtidos na etapa anterior.

  Sejam as entradas fuzzy $x_1, \ldots, x_n$ pertencentes aos conjuntos universo $X_1, \ldots, X_n$, respectivamente e a saída y pertencente ao conjunto universo Y. Pretende-se calcular a saída $y^{'} = y(x^{'}) \in \mathbb{R}$ a partir dos valores de entrada $(x_1^{'}, \ldots, x_n^{'}) \in \mathbb{R}^n$. Denotando-se o conjunto de termos linguísticos para cada entrada x_i por

  $$T_{x_i} = \{X_{ij},\ j \in I_i\},\ i = 1, \ldots, n; \tag{1.21}$$

  em que $I_i \subset \mathbb{N}$ é um conjunto de índices ordenados e X_{ij} são conjuntos fuzzy do tipo 1 definidos no universo X_i. A saída y possui um conjunto associado

  $$T_y = \{Y^k,\ k \in I\}; \tag{1.22}$$

  em que $I \subset \mathbb{N}$ é um conjunto de índices ordenados e Y^k é um conjunto fuzzy do tipo 1 definido no universo Y. Logo, uma regra $R^m,\ m \in \mathbb{N},\ m = 1, \ldots, M$ pode ser definida por

  $$R^m : \text{Se } x_1 \in F_1^m \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \in F_n^m \text{ então } y \in G^m; \tag{1.23}$$

  em que F_i^m é um elemento do conjunto $T_{x_i}, \forall i = 1, \ldots, n$ e G^m é um elemento do conjunto T_y.

- **Método de inferência**: Neste componente cada proposição fuzzy é traduzida matematicamente por meio das técnicas de raciocínio aproximado. Os principais métodos são:

  - **Método de Mamdani**: Este é o método mais utilizado para o caso em que a base de regras utiliza variáveis linguísticas nas entradas e saídas. Neste caso, uma regra"Se x é A então y é B" é definida, como visto anteriormente, pelo produto cartesiano fuzzy dos conjuntos fuzzy A e B. Esse método combina as regras através dos operadores lógicos "ou" (nesse caso, representado pela s-norma max) e, em cada uma das regras, o operador "e" (representado pela t-norma "min") é utilizado como conectivo lógico.

    Suponha, por exemplo, que se tenham as sentenças

    $$R_1 :\ \text{Se } x_1 \text{ é } X_{11} \text{ e } x_2 \text{ é } X_{21} \text{ então } y \text{ é } Y^1;$$

    $$R_2 :\ \text{Se } x_1 \text{ é } X_{12} \text{ e } x_2 \text{ é } X_{22} \text{ então } y \text{ é } Y^2.$$

    Os passos para utilização do método de inferência de Mamdani são:

    1. Primeiramente, calculam-se os valores das funções de pertinência das entradas, ou seja, são computados $\mu_{X_{11}}(x_1^{'})$, $\mu_{X_{21}}(x_1^{'})$, $\mu_{X_{12}}(x_2^{'})$, $\mu_{X_{22}}(x_2^{'})$.
    2. Nas funções de pertinência dos conjuntos fuzzy consequentes Y^1 e Y^2, destacam-se as regiões delimitadas entre estes conjuntos e as funções constantes $m_1 = \min[\mu_{X_{11}}(x_1^{'}), \mu_{X_{12}}(x_2^{'})]$ e $m_2 = \min[\mu_{X_{21}}(x_1^{'}), \mu_{X_{22}}(x_2^{'})]$, respectivamente. Denominam-se estas regiões por $C_1^{'}$ e $C_2^{'}$.

3. Aplica-se o operador max entre as regiões obtidas, o que resulta em uma região denominada por C. Observe que essa operação é a união das duas superfícies, ou seja, $C = C_1' \cup C_2'$. Percebe-se que ainda é necessário o processo de defuzzificação para se obter um número real como saída. O método escolhido para tal é o centro de gravidade da superfície resultante, que é detalhado no próximo componente do SBRF.

Este processo encontra-se representado graficamente na Figura 1.7.

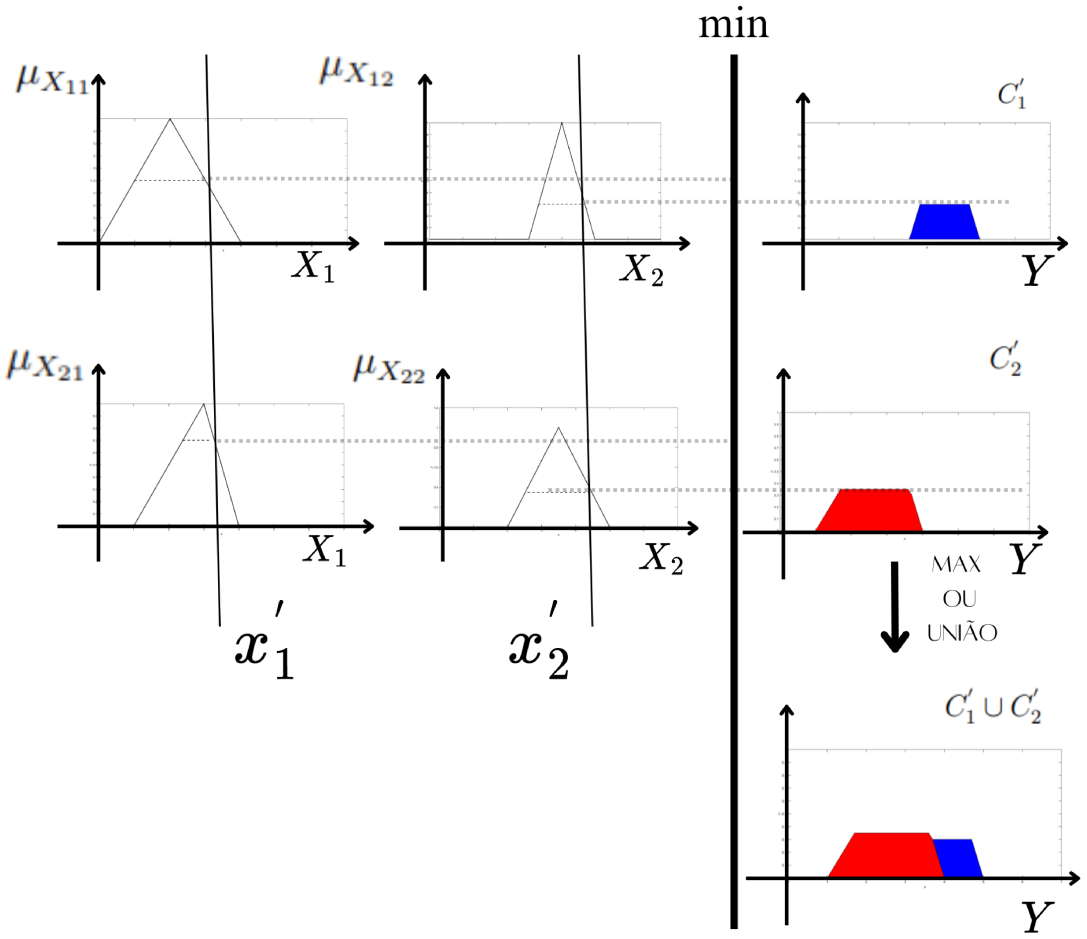


Figura 1.7: Representação gráfica do método de Mamdani. Fonte: Elaborada pelo autor

– **Método de Takagi-Sugeno**: Neste caso, o consequente de cada regra fuzzy é dado por uma função dependente das variáveis de entrada. Esse método atribui um peso ω na conjunção "e" dos valores de entrada, através da t-norma do min.

Como exemplo, supõe-se que são dispostas as regras

$$R_1: \text{ Se } x_1 \text{ é } X_{11} \text{ e } x_2 \text{ é } X_{12} \text{ então } Y^1 = p_1 x_1 + q_1 x_2 + r_1;$$

$$R_2: \text{ Se } x_1 \text{ é } X_{21} \text{ e } x_2 \text{ é } X_{22}, \text{ então } Y^2 = p_2 x_1 + q_2 x_2 + r_2.$$

Os passos para o método de inferência de Takagi-Sugeno são:

1. Primeiramente, calculam-se os valores das funções de pertinência das entradas, ou seja, calculam-se $\mu_{X_{11}}(x_1^{'})$, $\mu_{X_{12}}(x_1^{'})$, $\mu_{X_{12}}(x_2^{'})$, $\mu_{X_{22}}(x_2^{'})$.
2. Calculam-se os pesos ω_1 e ω_2 das regras supracitadas através da conjunção "e" que liga os conjuntos subsequentes, ou seja, $\omega_1 = \min[\mu_{X_{11}}(x_1^{'}), \mu_{X_{12}}(x_2^{'})]$ e $\omega_2 = \min[\mu_{X_{21}}(x_1^{'}), \mu_{X_{22}}(x_2^{'})]$. Perceba que utiliza-se novamente a t-norma do mínimo no produto cartesiano fuzzy dos conjuntos.
3. Calculam-se os consequentes Y^1 e Y^2 a partir da formulação de cada regra.
4. Por fim, defuzificam-se as saídas através da média ponderada entre as saídas de cada regra.

Esse algoritmo está representado graficamente na Figura 1.8.

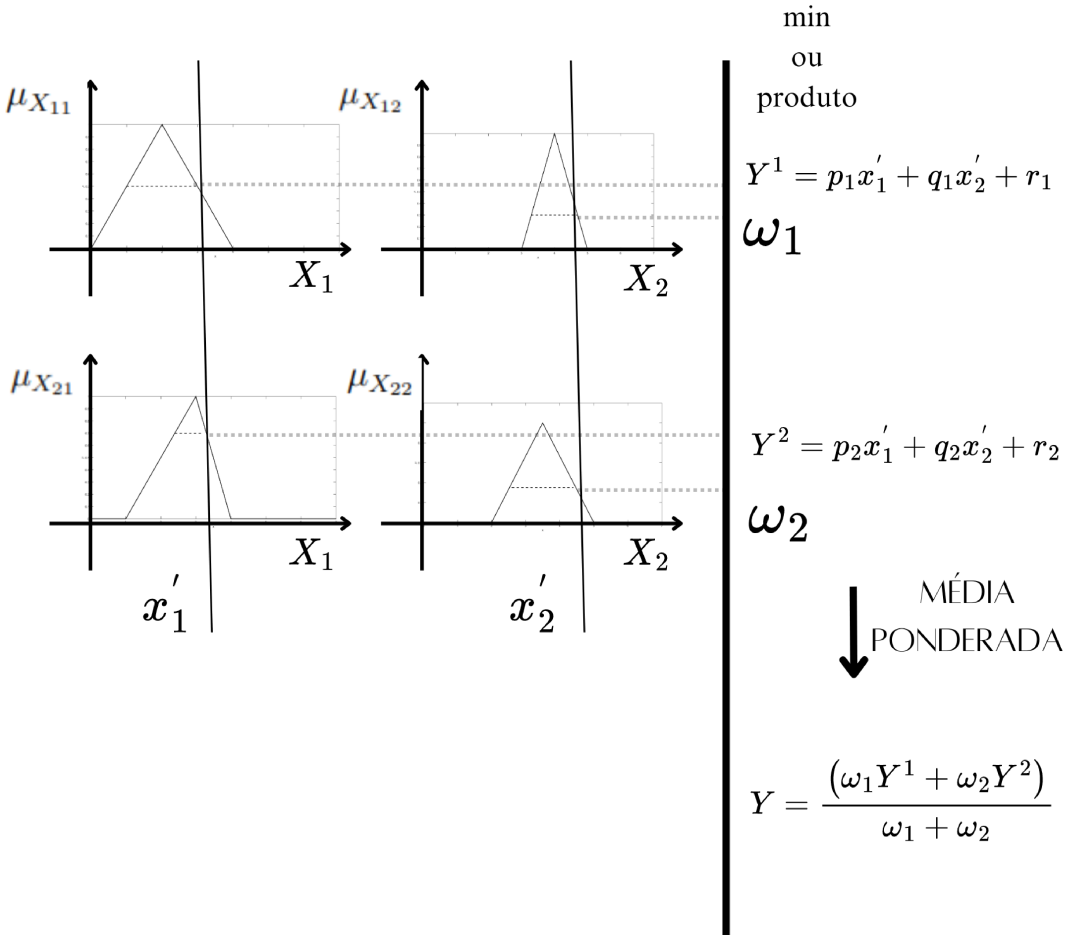


Figura 1.8: Representação gráfica do método de Takagi-Sugeno. Fonte: Elaborada pelo autor

– **Defuzificação**: A última etapa do sistema, também conhecida como processador de saída, é responsável por transformar a saída do método de inferência utilizado em um número real. Essa transformação é fundamental para a interpretação e utilização dos resultados do SBRF.

O método mais comum de defuzzificação é o centro de gravidade. Essa é uma

forma de defuzzificar a saída gerada pelo método de Mamdani e é dado por:

$$y^{'} = \frac{\int_R uC(u)du}{\int_R C(u)du}; \tag{1.24}$$

em que R é a região de integração. Caso o domínio seja discreto, tem-se:

$$y^{'} = \frac{\sum_{i=0}^{n} z_i C(z_i)}{\sum_{i=0}^{n} C(z_i)}, \tag{1.25}$$

em que z_i pertence ao domínio de $C = C_1^{'} \cup C_2^{'}$.

A seguir, tem-se um exemplo de SBRF utilizando o método de inferência de Takagi-Sugeno.

Exemplo 1.2. *Uma empresa necessita de realizar um estudo com todos os funcionários de um setor para escolher qual dentre eles será o novo gerente de processos. Um de seus administradores propõe um SBRF para calcular a possibilidade de cada um deles de se tornar gerente. O sistema é composto por dois conjuntos fuzzy de entrada, sendo estes a experiência no setor(E) e capacidade de liderança(L) e uma base de regras com saída (Y), que representa a possibilidade de se tornar gerente, que é função das variáveis de entrada. A experiência de um funcionário pode ser considerada: baixa(B); média(M) e alta(A). As funções de pertinência são dadas por:*

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, & se\ x < 2 \\ \dfrac{-x+4}{2}, & se\ 2 \leq x < 4 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}; \tag{1.26}$$

$$\mu_M(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{2}, & se\ 3 \leq x < 5 \\ 1, & se\ 5 \leq x < 6 \\ \dfrac{-x+8}{2}, & se\ 6 \leq x < 8 \\ 0, & caso\ conrário \end{cases}; \tag{1.27}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-7}{2}, & se\ 7 \leq x < 9 \\ 1, & se\ 9 \leq x \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}; \tag{1.28}$$

cujos gráficos são representados na Figura 1.9.

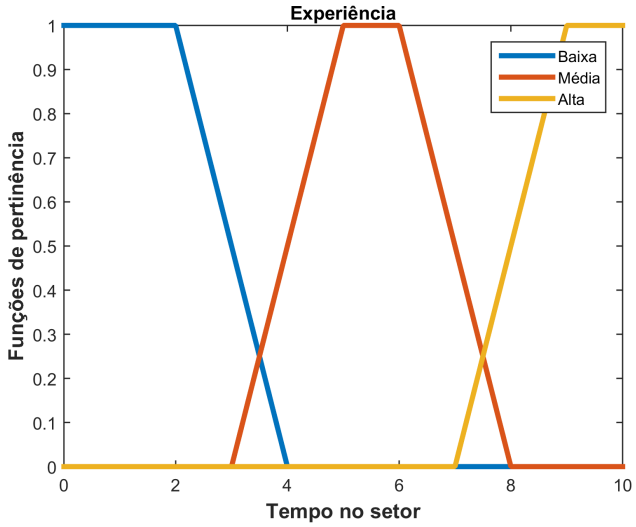


Figura 1.9: Funções de pertinência da experiência do funcionário. Fonte: Elaborada pelo autor.

A capacidade de liderança pode ser classificada como boa (boa) ou ruim (ruim), baseado na média das avaliações dadas pelos outros funcionários. Suas funções de pertinência são:

$$\mu_{ruim}(x) = \begin{cases} 1, & se \;\; 0 \leq x < 5 \\ \dfrac{-x+7}{2}, & se \; 5 \leq x < 7 \\ 0, & caso \; contrário \end{cases} ; \tag{1.29}$$

$$\mu_{boa}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-6}{2}, & se \; 6 \leq x < 8 \\ 1, & se \; 8 \leq x \\ 0, & caso \; contrário \end{cases} ; \tag{1.30}$$

cujos gráficos são representados na Figura 1.10.

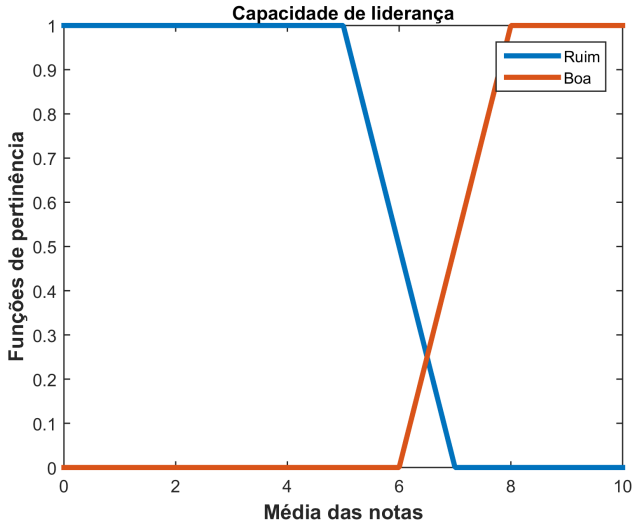


Figura 1.10: Funções de pertinência da capacidade de liderança. Fonte: Elaborada pelo autor.

Suponha que o centro de Recursos Humanos da empresa elaborou um conjunto de regras que dependem da experiência (E) e da capacidade de liderança (L) para calcular a possibilidade de um funcionário se tornar gerente. Tais regras são dadas por:

- R_1*: Se* E *é baixo e* L *é ruim então* $Y^1 = 0,1E + 0,2L$*;*
- R_2*: Se* E *é baixo e* L *é boa então* $Y^2 = 0,1E + 0,4L$*;*
- R_3*: Se* E *é médio e* L *é ruim então* $Y^3 = 0,4E + 0,2L$*;*
- R_4*: Se* E *é médio e* L *é boa então* $Y^4 = 0,4E + 0,4L$*;*
- R_5*: Se* E *é alto e* L *é ruim então* $Y^5 = 0,6E + 0,2L$*;*
- R_6*: Se* E *é alto e* L *é boa então* $Y^6 = 0,6E + 0,4L$*.*

Um dos funcionários tem 7,4 anos no setor e obteve nota 6,7 em liderança. Logo, seus dados correspondem aos valores de entrada $e = 7,4$ *e* $l = 6,7$*. Primeiramente, é necessário calcular o valor das funções de pertinência para cada um dos componentes da entrada. Considerando a experiência do trabalhador, dada pelas equações (1.26), (1.27) e (1.28), tem-se:*

$$\mu_B(7,4) = 0;$$
$$\mu_M(7,4) = \frac{-7,4+8}{2} = 0,3;$$
$$\mu_A(7,4) = \frac{7,4-7}{2} = 0,2.$$

Para calcular os valores de pertinência da componente liderança, utilizam-se as equações (1.29) e (1.30). Logo,

$$\mu_{ruim}(6,7) = 0;$$

$$\mu_{boa}(6,7) = \frac{6,7-6}{2} = 0,35.$$

Calculando os valores dos pesos tem-se:

$$\omega_1 = \min[\mu_B(7,4), \mu_{ruim}(6,7)] = 0;$$
$$\omega_2 = \min[\mu_B(7,4), \mu_{boa}(6,7)] = 0;$$
$$\omega_3 = \min[\mu_M(7,4), \mu_{ruim}(6,7)] = 0;$$
$$\omega_4 = \min[\mu_M(7,4), \mu_{boa}(6,7)] = 0,3;$$
$$\omega_5 = \min[\mu_A(7,4), \mu_{ruim}(6,7)] = 0;$$
$$\omega_6 = \min[\mu_A(7,4), \mu_{boa}(6,7)] = 0,2.$$

Pode-se então calcular os consequentes de cada regra:

$$y_1 = 0,1 \cdot 7,4 + 0,2 \cdot 6,7 = 2,08;$$

$$y_2 = 0,1 \cdot 7,4 + 0,4 \cdot 6,7 = 3.42;$$
$$y_3 = 0,4 \cdot 7,4 + 0,2 \cdot 6,7 = 4,3;$$
$$y_4 = 0,4 \cdot 7,4 + 0,4 \cdot 6,7 = 5,64;$$

$$y_5 = 0,6 \cdot 7,4 + 0,2 \cdot 6,7 = 5,78;$$

$$y_6 = 0,6 \cdot 7,4 + 0,4 \cdot 6,7 = 7,12.$$

Para obter a saída do SBRF, basta fazer a média ponderada:

$$y^{'} = \frac{\sum_{i=1}^{6} \omega_i y_i}{\sum_{i=1}^{6} \omega_i} = \frac{0,3 \cdot 5,64 + 0,2 \cdot 7,12}{0,3 + 0,2} = 6,2320.$$

Logo, a possibilidade desse funcionário se tornar gerente é de 6,2320 em 10.

Na próxima seção são introduzidos os conceitos teóricos referentes aos conjuntos fuzzy do tipo 2.

1.4 Conjuntos Fuzzy do Tipo 2

Como apontado anteriormente, em 1975, Lofti Zadeh introduziu a noção matemática dos conjuntos fuzzy do tipo 2. Segundo John e Coupland (2007), o trabalho se baseou em um conjunto fuzzy, no qual os graus de pertinência de outro conjunto fuzzy eram definidos, com base nas funções de pertinência *low*, *medium* e *high*. A pesquisa inicial era profundamente teórica e tinha como objetivo a construção de fundamentos que possibilitassem o trabalho com esse tipo de problema.

Os autores ainda citam que o principal objetivo de Zadeh com esse estudo era explorar ferramentas que possibilitassem o trabalho com os conectivos lógicos "e" e "ou". Então, entre 1975 e 1981, alguns pesquisadores continuaram os estudos iniciados por Zadeh.

Ainda segundo John e Coupland (2007), a partir de 1985, Gorzalczani, Turksen, Schwartz, Klir e Folger divulgaram o uso de conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar, quando a função de pertinência secundária assume valor 1. Essa nomenclatura foi adotada *a posteriori*. É atribuído à Gorzalczani, por exemplo, os primeiros passos no desenvolvimento das *Footprint of uncertainty* (FOU). São atribuídos ainda a Liang, Mendel e Bustince o desenvolvimento da lógica fuzzy do tipo 2 intervalar e a Tursken os trabalhos que forneceram conectivos lógicos para conjuntos fuzzy do tipo 1 que incidiam em conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar.

Entre 1998 e 2000, os pesquisadores Karnik e Mendel propuseram um algoritmo que permitia a redução de tipo dos problemas que envolviam conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar. A partir do algoritmo, conhecido como algoritmo de Karnik-Mendel, os conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar se transformam em conjuntos fuzzy do tipo 1, o que permite a utilização das ferramentas descritas na seção anterior.

Ao mesmo tempo em que o algoritmo de Karnik-Mendel surgiu, os conjuntos fuzzy do tipo 2 foram completamente definidos. Segundo John e Coupland (2007), John foi responsável por publicar vários artigos sobre o assunto. Posteriormente, em 2001, John, Karnik e Mendel publicaram o primeiro livro sobre o assunto.

Um diagrama que representa a linha do tempo é descrita na Figura 1.11.

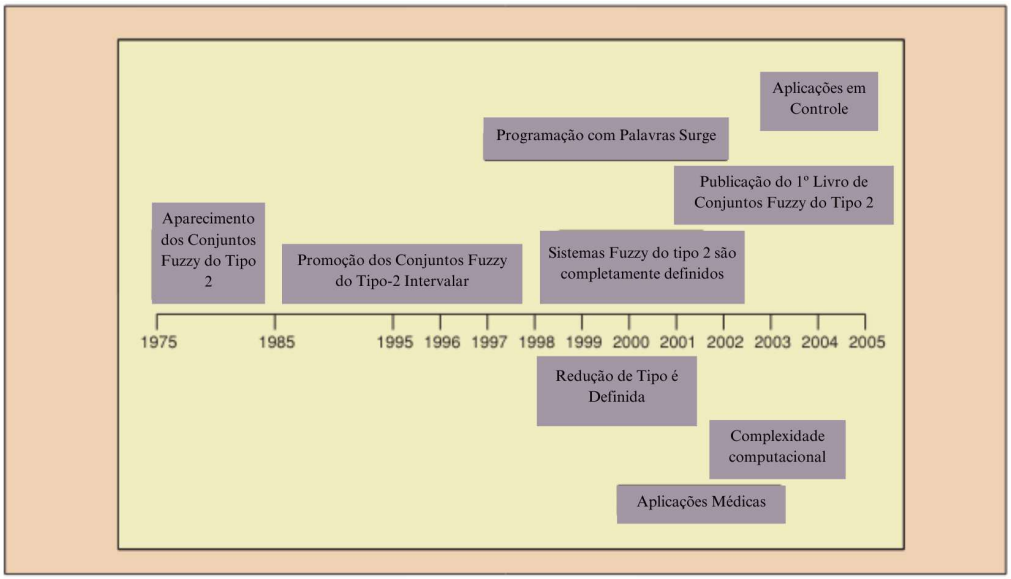


Figura 1.11: Linha do tempo dos conjuntos fuzzy do tipo 2 (JOHN; COUPLAND, 2007).

1.4.1 Preliminares

Definição 1.18. *Dado um universo X, um conjunto fuzzy do tipo 2, $\tilde{A}$, em X é o gráfico da função*

$$\begin{array}{rccc} \mu_{\tilde{A}} & : & X \times [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & & (x,u) & \longrightarrow & \mu_{\tilde{A}}(x,u), \end{array}$$

em que $\mu_{\tilde{A}}$ é chamada de função de pertinência de $\tilde{A}$. Em outras palavras, o conjunto fuzzy do tipo 2 de X, $\tilde{A}$, é dado por:

$$\tilde{A} = \{((x,u), \mu_{\tilde{A}}(x,u)) | (x,u) \in X \times [0,\ 1],\ \mu_{\tilde{A}}(x,u) \in [0,\ 1]\}. \tag{1.31}$$

Note que cada ponto de um conjunto fuzzy do tipo 2 é representado por uma terna da forma $((x,\ u),\ \mu_{\tilde{A}}(x,u))$. Uma representação gráfica de um exemplo de um conjunto fuzzy do tipo 2 discreto encontra-se na Figura 1.12.

Definição 1.19. *A função de pertinência secundária $\mu_{\tilde{A}_{(x)}}(u)$ de x é a função de pertinência do conjunto fuzzy do tipo 1, $\tilde{A}(x)$, que é obtida traçando um plano paralelo ao eixo u por x. O suporte de $\tilde{A}(x)$ é denotado por I_x, isto é,*

$$I_x = \{u|\ u \in [0,\ 1], \mu_{\tilde{A}}(x,u) > 0\}\,. \tag{1.32}$$

Definição 1.20. *O conjunto J_x dos pares (x,u) de pertinência positiva são chamados de pertinência primária de x, ou seja,*

$$J_x = \{(x,u)|\ u \in [0,\ 1], \mu_{\tilde{A}}(x,u) > 0\}\,. \tag{1.33}$$

Note que $J_x = x \times I_x$.

A seguir, quatro conceitos importantes dos conjuntos fuzzy do tipo 2 são definidos: os domínios de incerteza; as funções de pertinência superior e inferior; e as pegadas de incerteza.

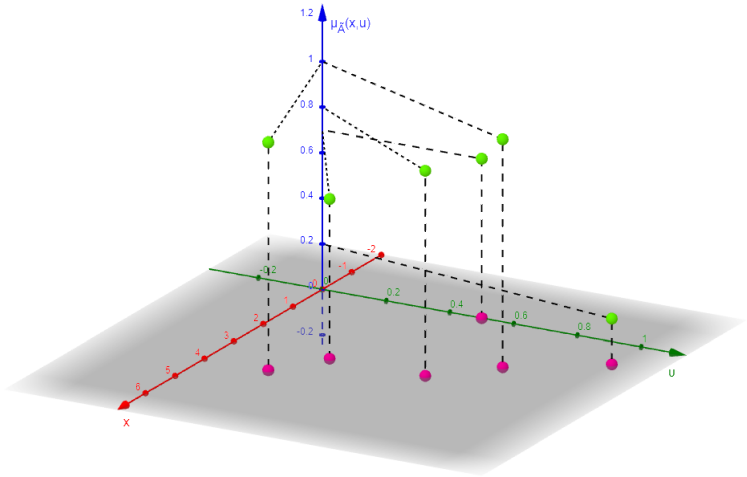


Figura 1.12: Exemplo de um conjunto fuzzy do tipo 2.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 1.21. *O domínio de incerteza de* $\tilde{A}$ *(Domain of Uncertainty), ou* $DOU(\tilde{A})$*, é o suporte de* $\tilde{A}$*, ou seja,*

$$DOU(\tilde{A}) = \{(x,u) \in X \times [0,\ 1] |\ \mu_{\tilde{A}}(x,u) > 0\}\,. \tag{1.34}$$

Por ser o suporte do conjunto fuzzy, como nas definições do tipo 1, em geral, $DOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x$.

Definição 1.22. *As funções de pertinência superior e inferior, denotadas por* $\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ *e* $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$*,* $x \in X$ *são definidas por*

$$\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \sup\{u |\ u \in [0,\ 1],\ \mu_{\tilde{A}}(x,u) > 0\} = \sup I_x; \tag{1.35}$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \inf\{u |\ u \in [0,\ 1],\ \mu_{\tilde{A}}(x,u) > 0\} = \inf I_x; \tag{1.36}$$

em que sup *denota o supremo e* inf *denota o ínfimo do conjunto* I_x.

Definição 1.23. *A pegada de incerteza (Footprint of Uncertainty) de* $\tilde{A}$*,* $FOU(\tilde{A})$ *é o conjunto*

$$FOU(\tilde{A}) = \left\{(x,u) |\ x \in X \text{ e } u \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x),\ \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x)]\right\}. \tag{1.37}$$

Uma consequência importante advinda das definições é que $DOU(\tilde{A})$ e $FOU(\tilde{A})$ coincidem caso $I_x = [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x),\ \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x)]$.

Definição 1.24. *Dado um conjunto fuzzy do tipo 2* $\tilde{A}$*, se todos os valores de* $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$ *forem unitários, ou seja,* $\mu_{\tilde{A}}(x,u) = 1, \forall (x,u) \in X \times [0,\ 1]$*, então* $\tilde{A}$ *é um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar. Diz-se ainda que um conjunto fuzzy do tipo 1* B *é imerso no conjunto fuzzy intervalar do tipo 2,* $\tilde{A}$*, se* $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_B(x) \leq \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x),\ \forall x \in X$.

A representação gráfica de um exemplo de conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar discreto encontra-se na Figura 1.13.

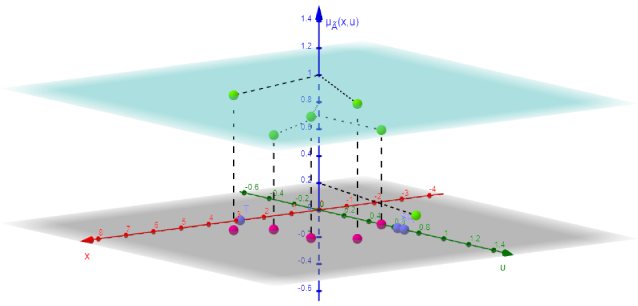


Figura 1.13: Conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar. Fonte: Elaborada pelo autor

A partir dos conceitos trabalhados, é possível construir os SBRF do tipo 2 intervalar.

1.5 Sistema Baseado em Regras Fuzzy do Tipo 2 Intervalar

Como na terceira seção do capítulo, é interessante formular um sistema de regras lógicas para se trabalhar os conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar, afim de operar tais conjuntos e obter saídas reais. No geral, a construção mantém a estrutura do SBRF do tipo 1, porém adicionando uma componente após o método de inferência, chamada redutor de tipo. A adição deste componente permite a utilização do método de defuzzificação descrito anteriormente. Uma representação gráfica do algoritmo utilizado para o SBRF do tipo 2 intervalar encontra-se na Figura 1.14.

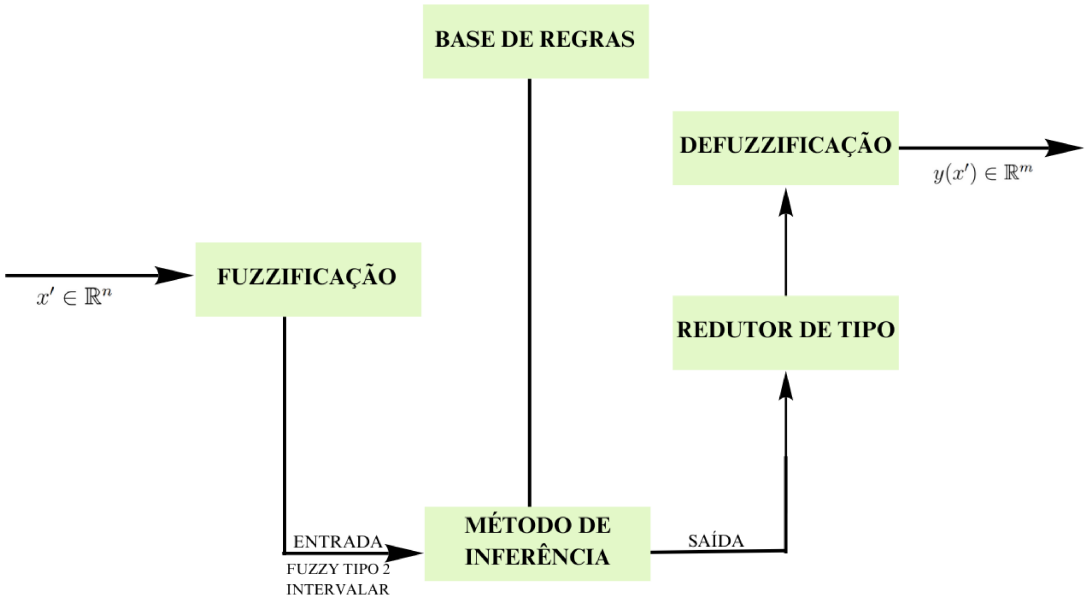


Figura 1.14: SBRF para conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar. Fonte: Elaborada pelo autor

Cada um dos componentes e suas funções encontram-se descritos a seguir:

- **Fuzzificação**: A fuzzificação ou processador de entrada é responsável pela fuzzificação de cada elemento do domínio, ou seja, dado um elemento $x = (x_1^{'}, x_2^{'}, \ldots, x_n^{'}) \in \mathbb{R}^n$, calcula-se $\underline{\mu}_{\tilde{A}_i}(x)$ e $\overline{\mu}_{\tilde{A}_i}(x)$ para cada conjunto fuzzy $\tilde{A}_i$, com $i = 1, 2, \ldots, n$.
- **Base de Regras**: A base de regras do SBRF do tipo 2 funciona da mesma forma forma que a base de regras anterior, diferindo apenas nas características dos conjuntos fuzzy envolvidos. Para apresentar essa diferença, considere um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar qualquer e com entrada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, em que, para cada $i = 1, \ldots, n$ existe um conjunto associado da forma:

$$T_{x_i} = \left\{ \tilde{X}_{ij} | j \in I_i \right\}, \ i = 1, \ldots, n; \tag{1.38}$$

  em que I_i é um conjunto de índices e $\tilde{X_{ij}}$ são conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar definidos no universo X_i, $i = 1, \ldots, n$, representando os termos linguísticos nas regras do SBRF. A saída y também possui um conjunto associado da forma

$$T_y = \left\{ \tilde{Y^k} | k \in I \right\}; \tag{1.39}$$

  em que I é um conjunto de índices e $\tilde{Y^k}$ são conjuntos fuzzy do tipo 2 definidos no universo Y. É importante salientar que $\tilde{Y^k}$ pode ser um ponto, um intervalo ou um conjunto fuzzy do tipo 2.

  A construção das regras do SBRF do tipo 2 será, então feita de forma similar às regras do tipo 1. Logo, a regra R^m, $m \in \mathbb{N}, \ m = 1, \ldots, M$ é definida por:

$$R^m : \text{Se } x_1 \text{ é } \tilde{F}_1^m \text{ e } x_2 \text{ é } \tilde{F}_2^m \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \text{ é } \tilde{F}_n^m \text{ então } y \text{ é } \tilde{G}^m; \tag{1.40}$$

  em que $\tilde{F}_i^m \in T_{x_i}, \ i = 1, \ldots, n$ e $\tilde{G}^m \in T_y$.
- **Método de Inferência**: Nesta componente acontecem as operações lógicas definidas na base de regras, isto é, são calculados os consequentes das bases de regras. Os principais métodos de inferência para o tipo 2 são o método de Dongrui-Wu, o método de Takagi-Sugeno e o método de Mamdani. O método de Takagi-Sugeno é detalhado posteriormente.
- **Redutor de Tipo**: Esta componente é adicionada ao SBRF para reduzir os conjuntos do tipo 2 à conjuntos do tipo 1. Seu objetivo é tornar possível a defuzzificação das saídas dos SBRF tipo 2 à partir dos métodos do centro de gravidade e da média ponderada, descritos anteriormente. O método mais utilizado para tal é o método de Karnik-Mendel, que é um algoritmo que determina o mínimo e o máximo dos centróides de todos os conjuntos fuzzy do tipo 1 contidos no conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar. Estes são denotados por y_L e y_R respectivamente.
- **Defuzzificação**: A defuzzificação ou processador de saída do conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar calcula a média aritmética entre as saídas do redutor de tipo, ou seja,

$$y^{'} = \frac{y_L + y_R}{2}. \tag{1.41}$$

  em que y_L e y_R dependem do valor de cada entrada real.

Para melhor entendimento dos métodos utilizados no trabalho, é necessário detalhar o algoritmo de Karnik-Mendel, que é a ferramentas utilizada na componente de redução de tipo do trabalho, sendo parte essencial do método de inferência de Takagi-Sugeno, utilizado nos SBRF. A próxima seção é baseada em Mendel (2017) e Castillo (2014).

1.5.1 Algoritmo de Karnik-Mendel

Como dito anteriormente, o método de Karnik-Mendel tem como objetivo transformar a saída do SBRF do tipo 2 para um conjunto de duas saídas do tipo 1, tornando possível a defuzzificação do mesmo pela média aritmética.

Seja o vetor de entrada $x = (x_1^{'}, x_2^{'}, \ldots, x_n^{'}) \in \mathbb{R}^n$, calcule os graus de pertinência inferior e superior ($\underline{\mu}_{\tilde{F_i^m}}$ e $\overline{\mu}_{\tilde{F_i^m}}$, respectivamente) de cada componente $x_i^{'}$ da entrada x da m-ésima regra R^m, ou seja, $\underline{\mu}_{\tilde{F_i^m}}(x_i^{'})$ e $\overline{\mu}_{\tilde{F_i^m}}(x_i^{'}),\ i = 1, \ldots, n\ e\ m = 1, \ldots, M$. Considere o consequente $\tilde{G}^m$ como um intervalo da forma $[\underline{g}^m,\ \overline{g}^m]$.

– **Cálculo de** y_L:

1. Calcule $\underline{f}^m$ e $\overline{f}^m$, definidos por:

$$\underline{f}^m = \underline{\mu}_{\tilde{F}_1^m}(x_1^{'}) \wedge \ldots \wedge \underline{\mu}_{\tilde{F}_n^m}(x_n^{'}),\ m = 1, \ldots,\ M; \tag{1.42}$$

$$\overline{f}^m = \overline{\mu}_{\tilde{F}_1^m}(x_1^{'}) \wedge \ldots \wedge \overline{\mu}_{\tilde{F}_n^m}(x_n^{'}),\ m = 1, \ldots,\ M. \tag{1.43}$$

2. Ordene em ordem crescente as funções $\underline{g}^m$ definidas anteriormente e associe com os intervalos $[\underline{f}^m,\ \overline{f}^m]$.
3. Para cada regra m, calcule

$$f^m = \frac{\underline{f}^m + \overline{f}^m}{2}. \tag{1.44}$$

4. Compute o valor de y', definido por:

$$y' = \frac{\sum_{m=1}^{M} \underline{g}^m f^m}{\sum_{m=1}^{M} f^m}. \tag{1.45}$$

5. Encontre o *switch point* (ponto de virada) $k,\ k = 1, \ldots, m-1$, tal que $\underline{g}^k \leq y' \leq \underline{g}^{k+1}$.
6. Defina

$$f^m = \begin{cases} \overline{f}^m & \text{se} \quad m \leq k \\ \underline{f}^m & \text{se} \quad m > k \end{cases}, \tag{1.46}$$

e calcule

$$y_l(k) = \frac{\sum_{m=1}^{M} \underline{g}^m f^m}{\sum_{m=1}^{M} f^m}. \tag{1.47}$$

7. Verifique se $y_l(k) = y'$. Em caso positivo, defina $y_L = y_l(k)$ e $L = k$. Em caso negativo, siga para o próximo passo.
8. Defina $y' = y_l(k)$ e retorne ao passo 4.

– **Cálculo do** y_R:

1. Calcule $\underline{f}^m$ e $\overline{f}^m$, definidos por:

$$\underline{f}^m = \underline{\mu}_{\tilde{F}_1^m}(x_1^{'}) \wedge \ldots \wedge \underline{\mu}_{\tilde{F}_n^m}(x_n^{'}),\ m = 1, \ldots,\ M; \tag{1.48}$$

$$\overline{f}^m = \overline{\mu}_{\tilde{F}_1^m}(x_1^{'}) \wedge \ldots \wedge \overline{\mu}_{\tilde{F}_n^m}(x_n^{'}),\ m = 1, \ldots,\ M. \tag{1.49}$$

2. Ordene em ordem crescente as funções $\overline{g}^m$ definidas anteriormente e associe com os intervalos $[\underline{f}^m,\ \overline{f}^m]$.
3. Para cada regra m, calcule
$$f^m = \frac{\underline{f}^m + \overline{f}^m}{2}. \tag{1.50}$$
4. Compute o valor de y', definido por:
$$y' = \frac{\sum_{m=1}^{M} \overline{g}^m f^m}{\sum_{m=1}^{M} f^m}. \tag{1.51}$$
5. Encontre o *switch point* (ponto de virada) $k,\ k = 1, \ldots, m-1$, tal que $\overline{g}^k \leq y' \leq \overline{g}^{k+1}$.
6. Defina
$$f^m = \begin{cases} \underline{f}^m & \text{se } m \leq k \\ \overline{f}^m & \text{if } m > k \end{cases}, \tag{1.52}$$
e calcule
$$y_r(k) = \frac{\sum_{m=1}^{M} \overline{g}^m f^m}{\sum_{m=1}^{M} f^m}. \tag{1.53}$$
7. Verifique se $y_r(k) = y'$. Em caso positivo, defina $y_R = y_r(k)$ e $R = k$. Em caso negativo, siga para o próximo passo.
8. Defina $y' = y_r(k)$ e retorne ao passo 4.

Ao final do capítulo, encontra-se um exemplo do método de inferência de Takagi-Sugeno, que utiliza o método de Karnik-Mendel como redutor de tipo, o que permite melhor visualização da aplicação do método no SBRF.

1.5.2 Método de Inferência de Takagi-Sugeno

No método de Takagi-Sugeno do tipo 2 intervalar, assim como no método de Takagi-Sugeno do tipo 1, os consequentes das regras fuzzy são funções definidas com relação às entradas do sistema. Seja então $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e a m-ésima regra, $m = 1, \ldots, M$

$$R^m:\ \text{Se } x_1 \text{ é } \tilde{F}_1^m \text{ e } x_2 \text{ é } \tilde{F}_2^m \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \text{ é } \tilde{F}_n^m \text{ então } y \text{ é } \tilde{G}^m = Y^m(x_1, \ldots, x_n); \tag{1.54}$$

em que Y^m é uma função das variáveis $(x_1, \ldots, x_n)$. Considere Y^m como uma combinação linear dos componentes da entrada, ou seja:

$$Y^m = D_0^m + D_1^m x_1 + \ldots + D_n^m x_n; \tag{1.55}$$

em que $m = 1, \ldots, M$ e as componentes $D_i^m = [\underline{D}_i^m,\ \overline{D}_i^m],\ i = 1, \ldots, n$. Então, Y^m é a saída da m-ésima regra R^m. Além disso, definem-se os intervalos D_i^j com relação aos centros c_i^m e amplitude a_i^m do respectivo intervalo:

$$D_i^m = [c_i^m - a_i^m,\ c_i^m + a_i^m]; \tag{1.56}$$

em que

$$a_i^m = \frac{\overline{D}_i^m - \underline{D}_i^m}{2} \text{ e}$$
$$c_i^m = \underline{D}_i^m + a_i^m. \tag{1.57}$$

Note que que o resultado do consequente é também um intervalo, definido por $Y^m = [\underline{y}^m,\ \overline{y}^m]$.

Considera-se a t-norma $\wedge$, uma entrada $x = (x_1^{'}, \ldots, x_n^{'}) \in \mathbb{R}^n$ e os graus de pertinência inferior e superior de $x_i^{'}$ da m-ésima regra descrita acima.

A partir disso, seguem os cálculos

$$\underline{f}^m = \underline{\mu}_{\tilde{F}_1^m}(x_1^{'}) \wedge \ldots \wedge \underline{\mu}_{\tilde{F}_n^m}(x_n^{'}). \tag{1.58}$$

De maneira semelhante, tem-se

$$\overline{f}^m = \overline{\mu}_{\tilde{F}_1^m}(x_1^{'}) \wedge \ldots \wedge \overline{\mu}_{\tilde{F}_n^m}(x_n^{'}). \tag{1.59}$$

É possível agora calcular os consequentes da seguinte forma

$$\underline{y}^m = \sum_{i=1}^{n} c_i^m x_i^{'} + c_0^m - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^m \|x_i^{'}\| + a_0^m \right); \tag{1.60}$$

$$\overline{y}^m = \sum_{i=1}^{n} c_i^m x_i^{'} + c_0^m + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^m \|x_i^{'}\| + a_0^m \right). \tag{1.61}$$

Utilizando o algoritmo de Karnik-Mendel, é possível determinar as saídas reais y_L e y_R.

$$y_L = \min_{K \in [1; M-1]} \left[\frac{\sum_{m=1}^{k} \overline{f}^m \underline{y}^m + \sum_{m=k+1}^{M} \underline{f}^m \underline{y}^m}{\sum_{m=1}^{k} \overline{f}^m + \sum_{m=k+1}^{M} \underline{f}^m} \right] = \frac{\sum_{m=1}^{L} \overline{f}^m \underline{y}^m + \sum_{m=L+1}^{M} \underline{f}^m \underline{y}^m}{\sum_{m=1}^{L} \overline{f}^m + \sum_{m=L+1}^{M} \underline{f}^m}; \tag{1.62}$$

$$y_R = \max_{K \in [1; M-1]} \left[\frac{\sum_{m=1}^{k} \underline{f}^m \overline{y}^m + \sum_{m=k+1}^{M} \overline{f}^m \overline{y}^m}{\sum_{m=1}^{k} \underline{f}^m + \sum_{m=k+1}^{M} \overline{f}^m} \right] = \frac{\sum_{m=1}^{R} \underline{f}^m \overline{y}^m + \sum_{m=R+1}^{M} \overline{f}^m \overline{y}^m}{\sum_{m=1}^{R} \underline{f}^m + \sum_{m=R+1}^{M} \overline{f}^m}. \tag{1.63}$$

Por fim, basta defuzzificar a saídas através da média aritmética entre y_L e y_R.

Para exemplificar o algoritmo de Karnik-Mendel e o método de defuzzificação de Takagi-Sugeno, segue um exemplo presente em Jafelice e Bertone (2021).

Exemplo 1.3. *Supõe-se que existam 100 pessoas em um mesmo ambiente e que 50 delas possam transmitir o vírus da COVID-19. Os mesmos podem ou não usar máscaras. A entrada do SBRF do tipo 2 é definida como o número de pessoas usando máscaras (x), podendo variar de 0 à 100. Consideram-se os termos linguísticos pequeno($\tilde{P}$), médio ($\tilde{M}$) e grande ($\tilde{G}$) e muito grande ($\widetilde{MG}$). A saída do conjunto fuzzy é o risco de contaminação do grupo (y), sendo que esta pode assumir qualquer valor no intervalo* $[0, 1,\ 0, 9]$. *Segundo as autoras, o motivo para a escolha desse intervalo de saída é o fato de que as máscaras não são totalmente eficazes e que a contaminação de indivíduos, mesmo sem utilizar a máscara, não é certa. Na Figura 1.15 é apresentado o cartaz que inspirou a elaboração deste exemplo.*

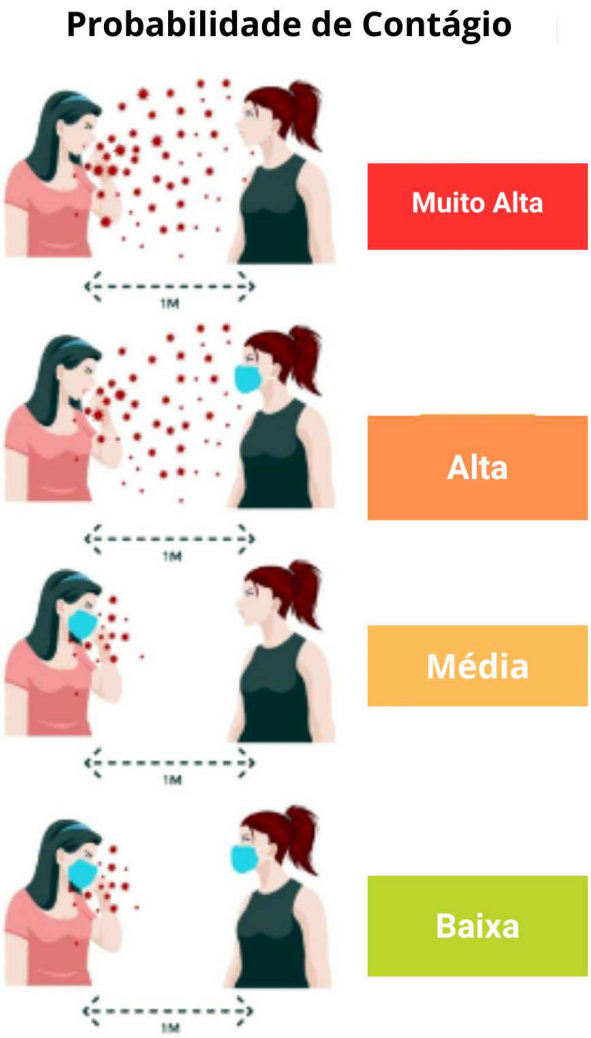


Figura 1.15: A palavra "probabilidade" deve ser matematicamente entendida como "possibilidade" (JAFELICE; BERTONE, 2021).

O conjunto de regras fuzzy a ser utilizado é

- R^1 : *Se* x *é* $\tilde{P}$ *então* y *é* $Y^1 = [0,8994,\ 0,9794] + [-0,01124,\ -0,00524]x$;
- R^2 : *Se* x *é* $\tilde{M}$ *então* y *é* $Y^2 = [0,9284,\ 0,9304] + [-0,009723,\ -0,005723]x$;
- R^3 : *Se* x *é* $\tilde{G}$ *então* y *é* $Y^3 = [0,9022,\ 0,9042] + [-0,008764,\ -0,006764]x$;
- R^4 : *Se* x *é* $\widetilde{MG}$*então* y *é* $Y^4 = [0,9019,\ 0,9039] + [-0,00806,\ -0,00646]x$.

As funções de pertinência correspondentes aos conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar são:

$$\underline{\mu}_{\tilde{P}}(x) = \begin{cases} 0,95, & \text{se } 0 \leq x < 7,11 \\ \dfrac{-0,95x + 17,955}{11,79}, & \text{se } 7,11 \leq x < 18,9 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases};$$

$$\overline{\mu}_{\tilde{P}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ \dfrac{-x + 23,5}{13,5}, & \text{se } 10 \leq x < 23,5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases};$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} \dfrac{0,95x - 14,345}{11,3}, & \text{se } 15,1 \leq x < 26,4 \\ 0,95, & \text{se } 26,4 \leq x < 39,5 \\ \dfrac{-0,95x + 48,735}{11,8}, & \text{se } 39,5 \leq x < 51,3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases};$$

$$\overline{\mu}_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 9,983}{13,417}, & \text{se } 9,983 \leq x < 23,4 \\ 1, & \text{se } 23,4 \leq x < 43,4 \\ \dfrac{-x + 56,8}{13,4}, & \text{se } 43,4 \leq x < 56,8 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases};$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{G}}(x) = \begin{cases} \dfrac{0,95x - 47,025}{9}, & \text{se } 49,5 \leq x < 58,5 \\ 0,95 & \text{se } 58,5 \leq x < 72,4 \\ \dfrac{-0,95x + 81,035}{12,9}, & \text{se } 72,4 \leq x < 85,3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases};$$

$$\overline{\mu}_{\tilde{G}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 43,32}{12,98}, & \text{se } 43,32 \leq x < 56,3 \\ 1, & \text{se } 56,3 \leq x < 77 \\ \dfrac{-x + 90,3}{13,3}, & \text{se } 77 \leq x < 90,3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases};$$

$$\underline{\mu}_{\widetilde{MG}}(x) = \begin{cases} \dfrac{0,95x - 76,8835}{12,6}, & \text{se } 80,93 \leq x < 93,53 \\ 0,95, & \text{se } 93,53 \leq x \leq 100 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases};$$

$$\overline{\mu}_{\widetilde{MG}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 76,65}{13,35}, & \text{se } 76,65 \leq x < 90 \\ 1, & \text{se } 90 \leq x \leq 100 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

A representação gráfica da FOU da variável de entrada encontra-se na Figura 1.16.

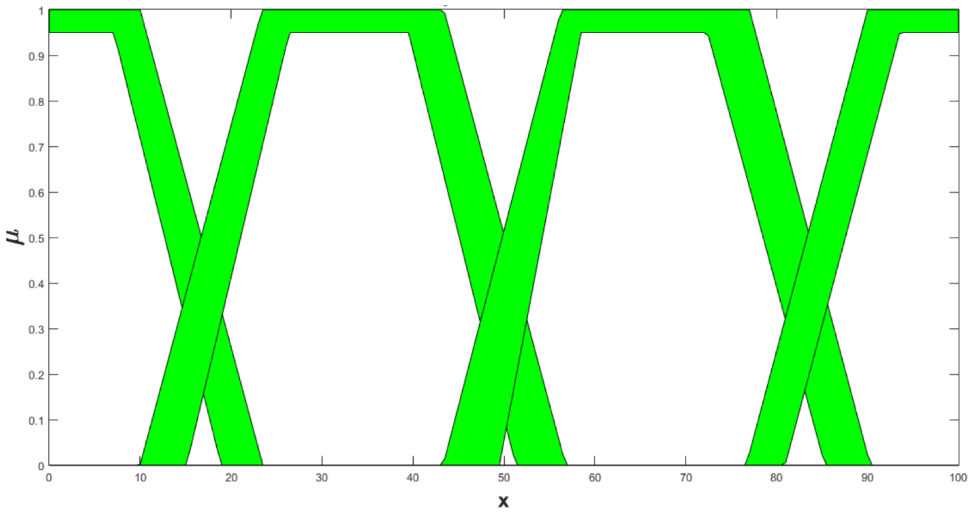


Figura 1.16: FOU para a variável de entrada quantidade de máscaras. Fonte: Elaborada pelo autor.

Supondo que $x^{'} = 10$*, ou seja, que 10 pessoas estão usando máscaras. Note que os graus de pertinência de 10 são diferentes de zero apenas em* $\underline{\mu}_{\tilde{P}}$, $\overline{\mu}_{\tilde{P}}$ *e* $\overline{\mu}_{\tilde{M}}$*. Então,*

$$[\underline{f}^1,\ \overline{f}^1] = [\underline{\mu}_{\tilde{P}}(x^{'}),\ \overline{\mu}_{\tilde{P}}(x^{'})] = [0,7171,\ 1];$$
$$[\underline{f}^2,\ \overline{f}^2] = [\underline{\mu}_{\tilde{M}}(x^{'}),\ \overline{\mu}_{\tilde{M}}(x^{'})] = [0,\ 0,00127].$$

Calculando os valores de $\underline{y}^1$, $\overline{y}^1$, $\underline{y}^2$ *e* $\overline{y}^2$*, utilizando das expressões (1.60) e (1.61) obtêm-se:*

$$\underline{y}^1 = c_1^{\tilde{P}}x^{'} + c_0^{\tilde{P}} - (a_1^{\tilde{P}}\|x^{'}\| + a_0^{\tilde{P}}) = -0,00824 \cdot 10 + 0,9394 - 0,003 \cdot \|10\| - 0,04 = 0,787;$$

$$\overline{y}^1 = c_1^{\tilde{P}}x^{'} + c_0^{\tilde{P}} + (a_1^{\tilde{P}}\|x^{'}\| + a_0^{\tilde{P}}) = -0,00824 \cdot 10 + 0,9394 + 0,003 \cdot \|10\| + 0,04 = 0,927;$$

$$\underline{y}^2 = c_1^{\tilde{M}}x^{'} + c_0^{\tilde{M}} - (a_1^{\tilde{M}}\|x^{'}\| + a_0^{\tilde{M}}) = -0,007723 \cdot 10 + 0,9294 - 0,002 \cdot \|10\| - 0,001 = 0,8312;$$

$$\overline{y}^2 = c_1^{\tilde{M}}x^{'} + c_0^{\tilde{M}} + (a_1^{\tilde{M}}\|x^{'}\| + a_0^{\tilde{M}}) = -0,007723 \cdot 10 + 0,9294 + 0,002 \cdot \|10\| + 0,001 = 0,8732,$$

sendo os coeficientes obtidos através dos consequentes da regras fuzzy.

Utilizando o algoritmo de Karnik-Mendel para os cálculos. Primeiramente, calculam-se os valores de f^1 *e* f^2*, utilizando a equação (1.44):*

$$f^1 = \frac{\underline{f}^1 + \overline{f}^1}{2} = \frac{0,7171 + 1}{2} = 0,85855;$$

$$f^2 = \frac{\underline{f}^2 + \overline{f}^2}{2} = \frac{0 + 0,00127}{2} = 0,000635.$$

Calculando y'

$$y' = \frac{\sum_{m=1}^{2} \underline{y}^m f^m}{\sum_{m=1}^{2} f^m} = \frac{0,787 \cdot 0,85855 + 0,8312 \cdot 0,000635}{0,85855 + 0,000635} = 0,787.$$

Note que $\underline{y}^1 \leq y' \leq \underline{y}^2$. *Logo, o ponto de virada desejado é* $k = 1$. *Então, pela equação (1.51) tem-se:*

$$\overline{f}^1 = 1 \ e \ \underline{f}^2 = 0.$$

Portanto,

$$f^m = \begin{cases} \overline{f}^1, \ se \ m \leq 1 \\ \underline{f}^2, \ se \ m > 1 \end{cases}.$$

Pode-se então calcular y_L *através da equação (1.53)*

$$y_l = \frac{\sum_{m=1}^{2} \underline{y}^m f^m}{\sum_{m=1}^{2} f^m} = \frac{0,787 \cdot 1 + 0,9284 \cdot 0}{1 + 0} = 0,787 = y'.$$

Logo, $y_L = 0,787$.

Para calcular y_R *é necessário reiniciar o processo. Note que* $\overline{y}^1 > \overline{y}^2$, *logo é necessário ordená-los em ordem crescente. Obtém-se:*

$$\overline{y}^1 = 0,8732 \ e \ [\underline{f}^1, \ \overline{f}^1] = [0, \ 0,00127];$$

$$\overline{y}^2 = 0,927 \ e \ [\underline{f}^2, \ \overline{f}^2] = [0,7171 \ , \ 1].$$

Calculando $y^{'}$, *tem-se,*

$$y' = \frac{\sum_{m=1}^{2} \overline{y}^m f^m}{\sum_{m=1}^{2} f^m} = \frac{0,8732 \cdot 0,85855 + 0,927 \cdot 0,000635}{0,85855 + 0,000635} = 0,8732.$$

Note que, neste caso, também tem-se que $\overline{y}^1 \leq y' \leq \overline{y}^2$. *Logo, o ponto de virada é* $k = 1$, *e como feito anteriormente:*

$$f^m = \begin{cases} \underline{f}^1, \ se \ m \leq 1 \\ \overline{f}^2, \ se \ m > 1 \end{cases},$$

e calculando y_r, *obtém-se:*

$$y_r = \frac{\sum_{m=1}^{2} \overline{y}^m f^m}{\sum_{m=1}^{2} f^m} = \frac{0,8732 \cdot 0 + 0,927 \cdot 1}{1 + 0} = 0,927 = y'.$$

Logo, pode-se definir $y_R = 0,927$ *e é possível calcular a saída defuzzificada*

$$y = \frac{y_L + y_R}{2} = \frac{0,787 + 0,927}{2} = 0,857.$$

A conclusão é que, numa situação em que 10 pessoas estão usando máscaras, entre os 100 indivíduos presentes no ambiente, a possibilidade de contaminação é de $0,857$.

No próximo capítulo são conceituadas as redes neuro-fuzzy, bem como o detalhamento do ANFIS e sua associação com o *toolbox* CANTERA, que fornecerá os dados da velocidade do som utilizados no treinamento e na validação do SBRF obtido pelo ANFIS.

Capítulo 2

A Velocidade do Som via *Toolbox* CANTERA e Rede Neuro-Fuzzy

Um dos temas mais discutidos atualmente é a Inteligência Artificial (*IA*) e suas aplicabilidades. Segundo Barbosa e Portes (2023), um conceito importante, em se tratando de IA é o de *deep learning*. Este pode ser caracterizado como um tipo especial de máquina computacional, que engloba uma série de redes neurais artificiais com várias camadas, que imitam a forma com que os humanos aprendem. Nesses sistemas, as saídas de uma camada são as entradas da próxima, o que permite o tratamento de dados de entrada.

Ainda segundo os autores, a humanidade e a ciência podem se beneficiar das possibilidades de automação de processos volumosos e desgastantes, além da interpretação de um grande volume de dados em instantes. Dada sua utilidade, é natural que todo tipo de ciência se aproprie dessas ferramentas, afim de aprimorar procedimentos ou tarefas. Isso não é diferente com a teoria de conjuntos fuzzy e a construção de SBRF.

Como citado anteriormente, é possível formular um SBRF a partir de regras elaboradas por especialistas, mas o que pode ser feito quando só se dispõem de dados de entrada e saída do SBRF? Uma alternativa de solução para esse problema reside nas redes neuro-fuzzy. À partir dos dados de entrada e saída a serem utilizados e de algoritmos de aprendizagem, é possível construir um SBRF, com precisão e acurácia.

Para entender as redes neuro-fuzzy, é necessário definir alguns conceitos preliminares. Essa é baseada nos trabalhos de Santana (2021), Freitas (2021) e Prudente (2024).

2.1 Redes Neurais Artificiais

Um bebê que está aprendendo a falar tenta repetir os fonemas que um ou mais tutores utilizam ou o estimulam a reproduzir. Essa criança, em suas tentativas, incorrerá em erros, já que a fala é uma habilidade de coordenação complexa, porém, a menos que possua condições que o impeçam de falar, eventualmente conseguirá repetir os mesmos fonemas, e aperfeiçoará essas habilidades até ser capaz de se comunicar plenamente. Para que essa aprendizagem ocorra, é necessário que o sistema nervoso do bebê se adapte à novos estímulos, formando novas sinapses nervosas, o que torna possível a construção de novas habilidades. Na Figura 2.1 encontra-se uma representação de um neurônio.

Segundo Rauber (2005), o neurônio é uma célula, com núcleo e corpo, que transmite informações através de reações químicas e impulsos elétricos, que percorrem o axônio até chegar nas sinapses. Essas, então, disparam substâncias químicas aos dendrites do

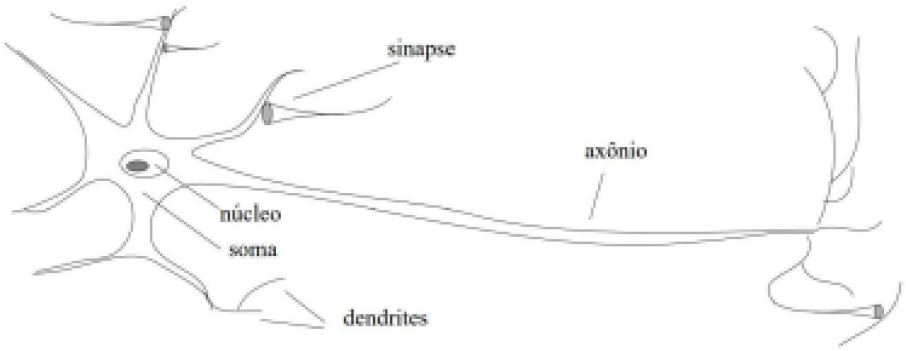


Figura 2.1: Representação de um neurônio biológico (RAUBER, 2005).

próximo neurônio. Conforme os estímulos são recebidos na próxima célula, ela processa a informação novamente, e repete a transmissão para o próximo neurônio, formando assim uma cadeia de reações.

De acordo com Braga, Ludermir e Carvalho (2000), as redes neurais são algoritmos que tentam imitar o sistema de aprendizagem de seres inteligentes, que aprendem através da repetição e experiências vivenciadas. Esse tipo de recurso utiliza estruturas de repetição e aprimoramento para obter uma solução para o problema apresentado.

Ainda segundo Rauber (2005), uma rede neural artificial possui duas estruturas básicas: a arquitetura e o sistema de aprendizagem. Essa estrutura de programação é diferente da arquitetura padrão. Na arquitetura de Von Neumann, o computador é instruído acerca do que deve fazer. Porém em redes neurais artificiais, a máquina aprende o que deve fazer a partir de uma base de dados. Uma estrutura de armazenamento de informações e pesos é adaptada no decorrer do processo. Nessa estrutura, é discriminado ao computador o tipo de rede e o algoritmo de adaptação de pesos, também conhecido como algoritmo de treino.

Combinando os fatos supracitados aos conjuntos fuzzy, as redes neuro-fuzzy são responsáveis por construir as funções de pertinência e a base de regras de um SBRF, através de uma rotina de treinamento pré-estabelecida. Neste capítulo são apresentados uma rede neuro-fuzzy e um *toolbox* para coleta de dados utilizados no treinamento da mesma. Para isso, é necessário apresentar alguns conceitos matemáticos importantes para os processos de otimização empregados na rede neural, sendo estes o Método dos Mínimos Quadrados e o Método dos Gradientes Descendentes.

2.1.1 Método dos Mínimos Quadrados

Seja o sistema linear $Ax = b$, em que A é uma matriz de dimensões $m \times n$, com $m \leq n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Considere ainda a equação

$$\|r(x)\| = \|Ax - b\|, \tag{2.1}$$

em que $\|.\|$ é a norma euclidiana. O método dos mínimos quadrados consiste em minimizar $r(x)$, que é o resíduo gerado pela solução do sistema linear apresentado Burden e Faires (2011).

Note que a matriz A pode ser vista como uma função $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Desta forma, qualquer $v \in Im(A)$ pode ser escrito como uma combinação linear de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$.

Além disso, $\|r(x)\|$ representa a distância entre v e b em $\mathbb{R}^m$, como representado na Figura 2.2. Logo, é possível fazer uma projeção do vetor b em $Im(A)$, obtendo um vetor u tal que $u = Ax$. Assim, encontra-se um vetor x tal que x minimiza o sistema.

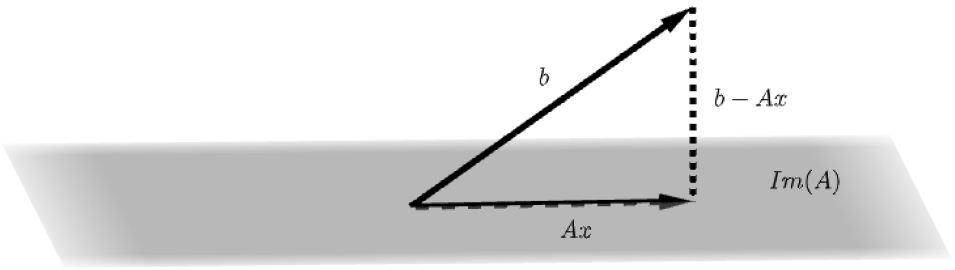


Figura 2.2: Método dos mínimos quadrados. Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir apresenta-se um exemplo utilizando o método dos mínimos quadrados.

Exemplo 2.1. *Neste exemplo, foram gerados a partir do sofware Matlab, 201 pontos com valores de* x_g *e* y_g*, satisfazendo a equação* $y_g = 3x_g - 1 + (-1 + 2\epsilon)$ *em que* ϵ *é um valor tomado aleatoriamente, tal que* $\epsilon \in [-1\ ,\ 1]$*. Os pontos gerados estão representados na Figura 2.3.*

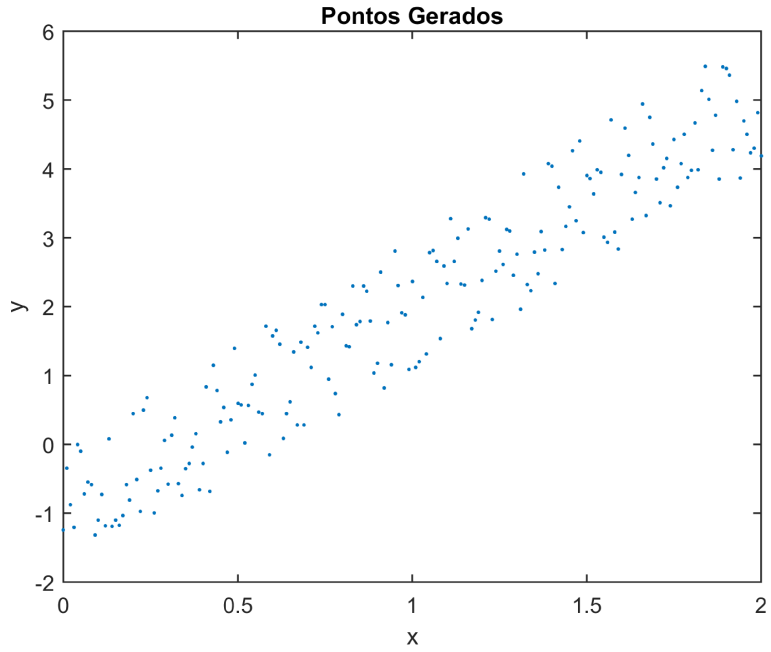


Figura 2.3: Pontos gerados. Fonte: Elaborada pelo autor.

Deseja-se encontrar a reta que mais se aproxima aos pontos gerados, através do método dos mínimos quadrados. Tem-se então que:

$$E = \sum_{i=1}^{201} (f(x_i) - y_{g_i})^2.$$

O método baseia-se na busca de uma reta que otimize o problema, dada por $f(x) = ax + b$.

Logo,

$$E = \sum_{i=1}^{201} (ax_i + b - y_{g_i})^2.$$

Observe que a função $E = E(a,b) \geq 0, \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$*, isto é, é uma função limitada inferiormente e portanto, esta tem um ponto de mínimo. Este ponto pode ser determinado encontrando os pontos críticos da função.*

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 0.$$

Logo,

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^{201} 2(ax_i + b - y_{g_i})x_i = 0$$

$$\implies a\sum_{i=1}^{201} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{201} x_i = \sum_{i=1}^{201} y_{g_i}x_i,$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=1}^{201} 2(ax_i + b - y_{g_i}) = 0$$

$$\implies a\sum_{i=1}^{201} x_i + 201b = \sum_{i=1}^{201} y_{g_i},$$

obtendo o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{201} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{201} x_i = \sum\limits_{i=1}^{201} y_{g_i}x_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{201} x_i + 201b = \sum\limits_{i=1}^{201} y_{g_i} \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial, tem-se que $Ax = Y$ *, em que*

$$A = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{201} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{201} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{201} x_i & 201 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad e\ Y = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{201} y_{g_i}x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{201} y_{g_i} \end{pmatrix}.$$

A solução do sistema é dada pela função $f(x) = 2,9728x - 0,9962$*, representada na Figura 2.4.*

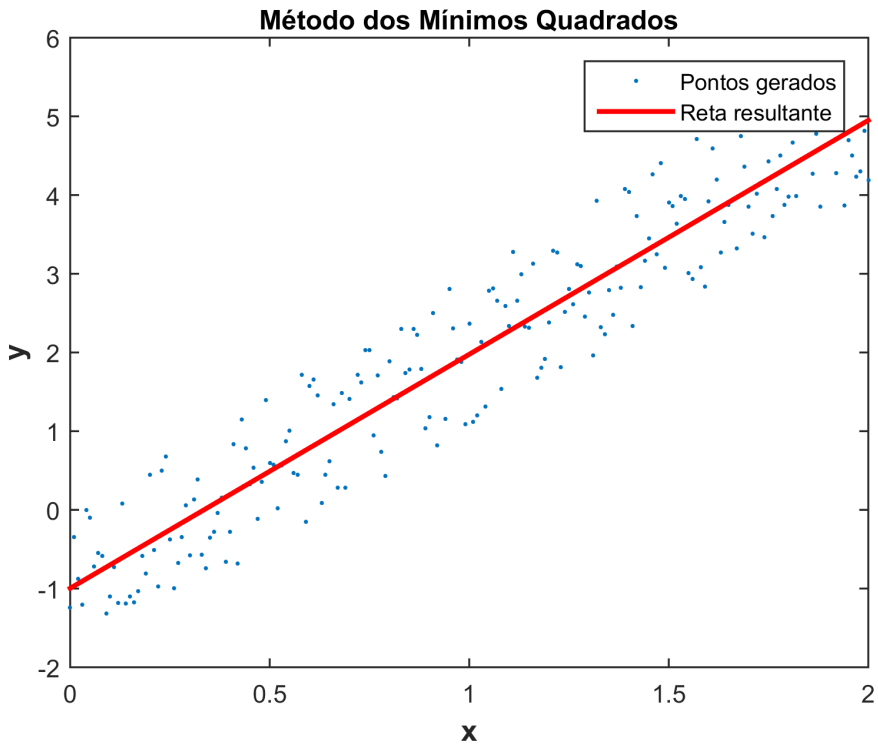


Figura 2.4: Reta obtida pelo método dos mínimos quadrados para os pontos gerados. Fonte: Elaborada pelo autor.

O coeficiente de determinação (r^2) *é dado por* 0.8789. *Para maiores detalhes sobre o método, veja a definição em Bussab e Morettin (1987).*

2.1.2 Método do Gradiente Descendente

Sejam os vetores y e y_e, sendo estes os valores reais de uma variável e os valores estimados para a mesma, respectivamente. O erro quadrático médio entre y e y_e é dado por:

$$E_{qm} = \frac{1}{2}(y_e - y)^2. \tag{2.2}$$

Considerando que $y_e = y_e(a, b)$ é um parâmetro, a depender de duas variáveis a e b ajustáveis, pode-se considerar que E_{qm} é um parabolóide. O método dos gradientes descendentes consiste em encontrar o ponto de mínimo do parabolóide supracitado, como representado na Figura 2.5.

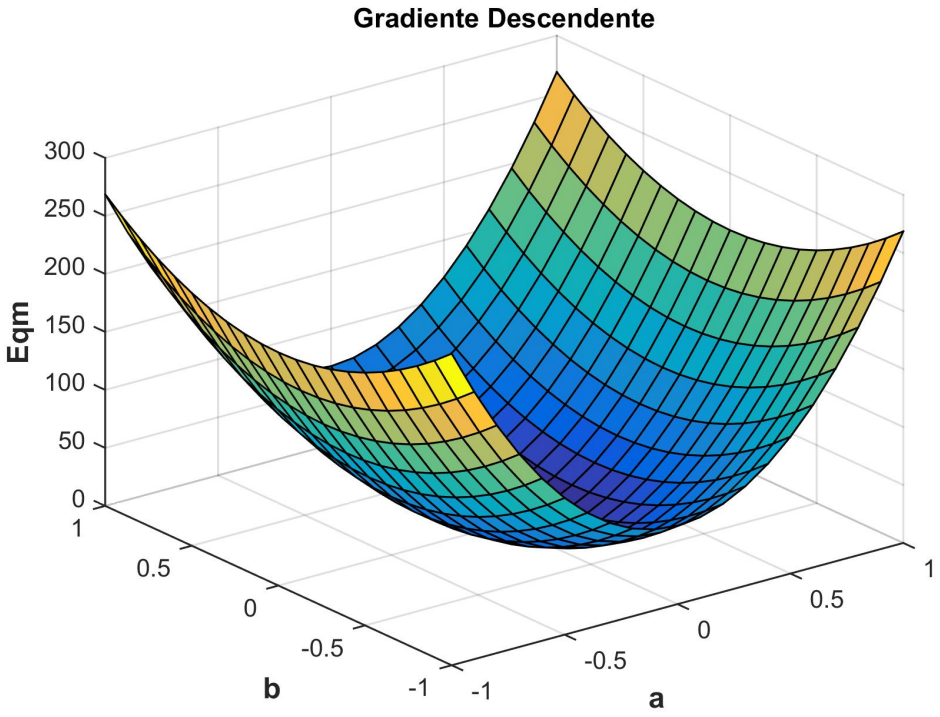


Figura 2.5: Parabolóide gerado pelo Método do Gradiente Descendente.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Para corrigir os parâmetros a e b, tem-se que:

$$a_j = a_{j-1} - \alpha \frac{\partial E_{qm}}{\partial a}, \tag{2.3}$$

$$b_j = b_{j-1} - \alpha \frac{\partial E_{qm}}{\partial b}. \tag{2.4}$$

em que $\alpha > 0$ é a taxa de aprendizagem do algoritmo e j representa o número da iteração realizada no método. Além disso, pela regra da cadeia tem-se que:

$$\frac{\partial E_{qm}}{\partial a} = \frac{\partial E_{qm}}{\partial y_e} \cdot \frac{\partial y_e}{\partial a}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial E_{qm}}{\partial b} = \frac{\partial E_{qm}}{\partial y_e} \cdot \frac{\partial y_e}{\partial b}. \tag{2.6}$$

A seguir, tem-se um exemplo de utilização do método dos gradientes descendentes.

Exemplo 2.2. *Utilizando os mesmos pontos gerados anteriormente, e tendo como objetivo obter uma reta, inicia-se o processo definindo a função do erro quadrado médio.*

$$E_{qm} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{201}(f(x_i) - y_{g_i})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{201}(ax_i + b - y_{g_i})^2.$$

Logo, tem-se que

$$\frac{\partial E_{qm}}{\partial a} = \frac{\partial E_{qm}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial a} = \sum_{i=1}^{201}\frac{(ax_i + b - y_{g_i})x_i}{201};$$

$$\frac{\partial E_{qm}}{\partial b} = \frac{\partial E_{qm}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial b} = \sum_{i=1}^{201} \frac{(ax_i + b - y_{g_i})}{201}.$$

Para o exemplo é considerado $\alpha = 0,1$. O método necessita de um "chute inicial" para iniciar os processos de otimização dos parâmetros, sendo escolhida a reta $f_0(x) = 2x + 1$, além das equações 2.3 e 2.4. Após todo o procedimento, os resultados obtidos encontram-se na Figura 2.6.

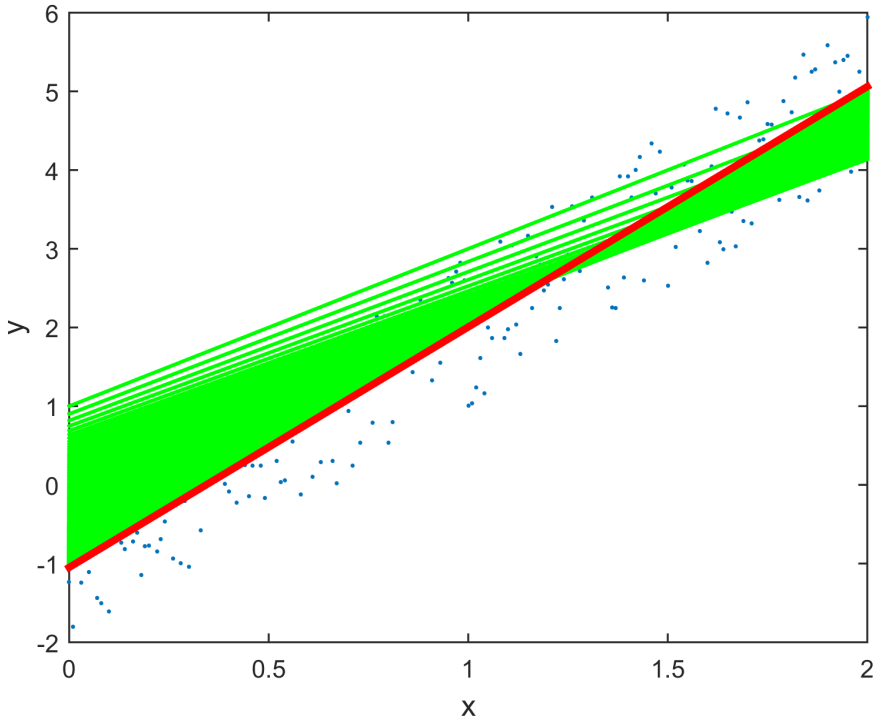


Figura 2.6: Reta obtida pelo método do gradiente descendente para os pontos gerados. Fonte: Elaborada pelo autor.

A reta obtida é dada pela função $f(x) = 3,124x - 1,1736$. O coeficiente de determinação (r^2) foi de 0.8789.

Na próxima seção é detalhada a rede neuro-fuzzy empregada no trabalho, baseada em Jang (1993), Negnevitsky (2005) e Freitas (2021). Além, do *toolbox* livre utilizado para obtenção de dados da velocidade do som no ar e o SBRF obtido.

2.2 ANFIS

A *Adaptative Neuro-Fuzzy Inference System* (ANFIS), é uma rede neuro-fuzzy composta por 5 camadas, ligadas por pesos unitários. Cada camada da rede é responsável por um processo. O resultado obtido pela mesma é um SBRF, cujo método de inferência é o de Takagi-Sugeno, em que as saídas do sistema são funções das variáveis de entrada. A arquitetura da rede está representada na Figura 2.7.

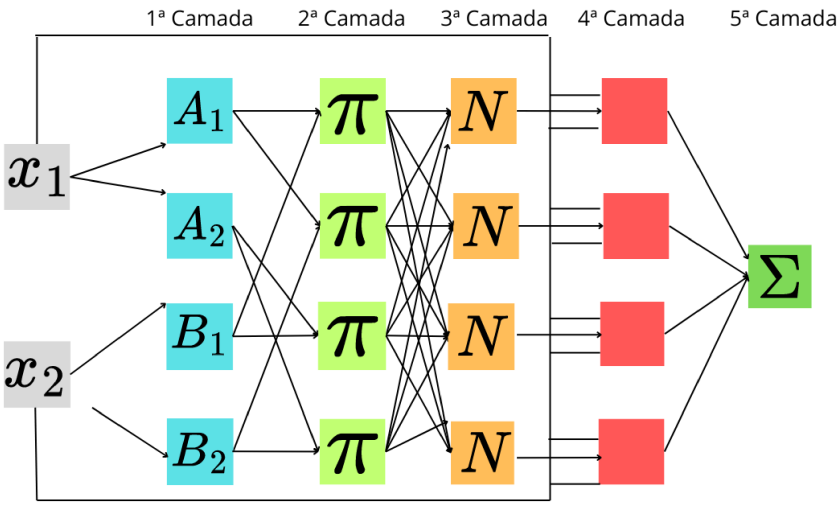


Figura 2.7: Arquitetura do ANFIS. Fonte: Elaborada pelo autor.

Como um exemplo prático para demonstrar os mecanismos utilizados em cada uma das etapas, considera-se um sistema com duas entradas, duas funções de pertinência para cada entrada e uma saída. Além disso, as funções de pertinência são trapezoidais, como descrito nos exemplos do Capítulo 1.

É importante notar que o ANFIS inicia o processo com um número de funções de pertinência pré-determinado pelo usuário, além de considerar todas as funções igualmente espaçadas. Após isso, a rede adapta as funções de pertinência para aproximar melhor as saídas do SBRF aos dados reais obtidos. Segue a descrição de cada uma das camadas.

– **1ª Camada:** Essa camada é responsável por calcular as funções de pertinência de cada regra em cada uma das entradas. Assim, os valores a serem calculados são:

$$y_i^{(1)} = \mu_{A_i}(x_1), \ para \ i = 1, 2; \tag{2.7}$$

$$y_i^{(1)} = \mu_{B_{i-2}}(x_2), \ para \ i = 3, 4; \tag{2.8}$$

em que A_i e B_{i-2} são as variáveis linguísticas predefinidas pelo usuário, e x_1 e x_2 são as componentes da entrada do sistema. Neste trabalho, as funções de pertinência são trapezoidais, veja a Figura 2.8.

A expressão da função de pertinência trapezoidal, de forma geral, é dada por:

$$\mu_{A_i}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}, & \text{se } x_0 \leq x < x_1 \\ 1, & \text{se } x_1 \leq x < x_2 \\ \dfrac{x_3 - x}{x_3 - x_2}, & \text{se } x_2 \leq x \leq x_3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} . \tag{2.9}$$

Observe que esta função de pertinência é composta por duas retas, da forma $f(x) = ax + b$, cujos parâmetros a e b são ajustados pela rede neuro-fuzzy, nos intervalos convenientes. Nos intervalos em que a função é constante não necessitam de ajustes, visto que indicam pertinência plena ou não pertinência.

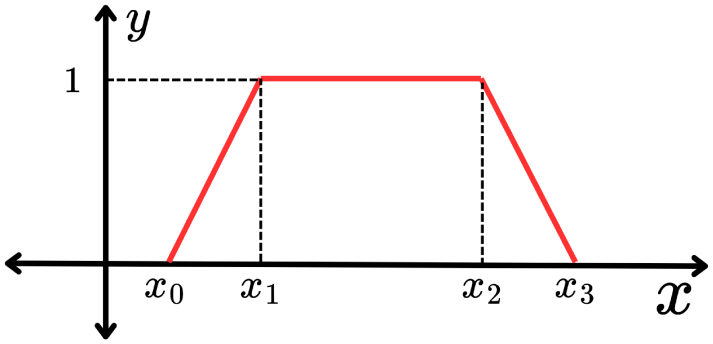


Figura 2.8: Representação gráfica da função trapezoidal.
Fonte: Elaborada pelo autor.

– **2ª Camada:** Os nós dessa camada são responsáveis por calcular as partes antecedentes das regras utilizadas no processo, ou seja, esta é responsável pela parte do "se" nas regras fuzzy. Para isso, como é usual no método de inferência de de Takagi-Sugeno, utiliza-se a t-norma do produto como base do operador "e", o que possibilita o cálculo dos ω_i utilizados no método de inferência supracitado. Logo, os nós dessa camada são:

$$y_1^{(2)} = \omega_1 = \mu_{A_1}(x_1) \cdot \mu_{B_1}(x_2); \tag{2.10}$$

$$y_2^{(2)} = \omega_1 = \mu_{A_1}(x_1) \cdot \mu_{B_2}(x_2); \tag{2.11}$$

$$y_3^{(2)} = \omega_1 = \mu_{A_2}(x_1) \cdot \mu_{B_1}(x_2); \tag{2.12}$$

$$y_4^{(2)} = \omega_1 = \mu_{A_2}(x_1) \cdot \mu_{B_2}(x_2). \tag{2.13}$$

em que $y_i^{(2)}$ é a saída do nó i, obtida através do produto entre os graus de pertinência dos pontos x_1 e x_2.

– **3ª Camada:** Os nós dessa camada são responsáveis por normalizar as saídas obtidas na camada anterior. Logo, as saídas calculadas por essa camada são:

$$y_i^{(3)} = \overline{\omega}_i = \frac{\omega_i}{\sum_{i=1}^{4} \omega_i}. \tag{2.14}$$

Importante salientar que o número de saídas da camada 2 pode ser diferente de 4, logo, os somatórios representados podem variar em número de termos.

– **4ª Camada:** Essa camada é responsável por criar a parte consequente das regras fuzzy. Como o objetivo do SBRF é trabalhar com um sistema de inferência de Takagi-Sugeno, é realizado o cálculo dos parâmetros consequentes $\{k_{i0}; k_{i1}; k_{i2},\ i = 1, 2, 3, 4\}$ que formam as funções dependentes das variáveis de entrada. Os parâmetros calculados são:

$$y_i^{(4)} = \overline{\omega}_i f_i = \overline{\omega}_i (k_{i0} x_1 + k_{i1} x_2 + k_{i2}). \tag{2.15}$$

– **5ª Camada:** Essa camada, composta por um único nó, é responsável por calcular a saída do SBRF, através da média ponderada. Como as funções peso foram normalizadas na 3ª camada, a saída é calculada através do somatório das saídas da 4ª camada, isto é:

$$y^{(5)} = \sum_{i=1}^{4} \overline{\omega}_i f_i. \tag{2.16}$$

O *software Matlab* utiliza a raiz do erro quadrado médio como medida de imprecisão em cada ponto de treinamento, a cada iteração. Esse método é nomeado por *Root Mean Square Error*(RMSE), cuja fórmula é:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i^{(5)} - y)^2}; \tag{2.17}$$

em que n é o número de dados de treinamento, $y_i^{(5)}$ são as saídas do SBRF gerado e y são os dados de treinamento.

2.2.1 Algoritmo de Aprendizagem do ANFIS

O ANFIS utiliza um algoritmo de aprendizagem em duas fases. Este utiliza o método dos mínimos quadrados para otimizar os parâmetros $\{k_{i0}; k_{i1}; k_{i2}\}$, além do método do gradiente descendente para otimizar os parâmetros das funções de pertinência da 1ª camada. Como dito anteriormente, o ANFIS inicia o processo com funções igualmente espaçadas, cobrindo todo o domínio dos dados de treinamento utilizados.

A partir das estimativas iniciais e dos valores de entrada, considerando um número P de combinação entrada-saída, o ANFIS calcula as seguintes P equações:

$$\begin{cases} Y_1 = \overline{\omega}_1(1)f_1(1) + \ldots + \overline{\omega}_n(1)f_n(1) \\ \vdots \\ Y_p = \overline{\omega}_1(p)f_1(p) + \ldots + \overline{\omega}_n(p)f_n(p) \\ \vdots \\ Y_P = \overline{\omega}_1(P)f_p(P) + \ldots + \overline{\omega}_n(P)f_n(P) \end{cases}; \tag{2.18}$$

em que $f_i = k_{i0} + k_{i1}x_1 + \ldots + k_{in}x_m$, para $i = 1, \ldots, n$, sendo m é o número de variáveis de entrada, n o número de nós da terceira camada e $Y(p)$ é a saída para as entradas $x_1(p), \ldots, \_n(p)$. Assim, essa equação pode ser escrita na forma $Y = Ak$, em que:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_P \end{pmatrix}; \tag{2.19}$$

$$A = \begin{pmatrix} \overline{\omega}_1 & \overline{\omega}_1 x_1(1) & \ldots & \overline{\omega}_1 x_m(1) & \ldots & \overline{\omega}_n x_1(1) & \ldots & \overline{\omega}_n x_m(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{\omega}_1 & \overline{\omega}_2 x_1(2) & \ldots & \overline{\omega}_n x_m(2) & \ldots & \overline{\omega}_n x_1(2) & \ldots & \overline{\omega}_n x_m(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{\omega}_1 & \overline{\omega}_1 x_1(p) & \ldots & \overline{\omega}_1 x_m(p) & \ldots & \overline{\omega}_n x_1(p) & \ldots & \overline{\omega}_n x_m(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{\omega}_1 & \overline{\omega}_1 x_1(1) & \ldots & \overline{\omega}_1 x_m(P) & \ldots & \overline{\omega}_n x_1(P) & \ldots & \overline{\omega}_n x_m(P) \end{pmatrix}; \tag{2.20}$$

$$k = \begin{pmatrix} k_{10} \\ k_{11} \\ k_{12} \\ \dots \\ k_{1P} \\ k_{20} \\ \dots \\ k_{2P} \\ \dots \\ k_{n0} \\ \dots \\ k_{nP} \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

A solução desse sistema é calculada através do método dos mínimos quadrados, minimizando $\|Ak - y\|$. Após isso, calculam-se as saídas estimadas pela rede ANFIS. Essas são representadas por y_e.

A partir dos dados de treinamento e dos coeficientes obtidos pela iteração do ANFIS, é possível utilizar o método dos mínimos quadrados. Inicia-se o processo calculando o vetor do erro e do erro quadrado médio, dados respectivamente por:

$$e = y_e - y; \tag{2.22}$$

$$E_{qm} = \frac{1}{2}(y_e - y)^2. \tag{2.23}$$

Segundo Sandmann (2006), as derivadas parciais utilizadas no problema são dadas por:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial E}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}_i f_i} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_i f_i}{\partial \overline{\omega}_i} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial \omega_i} \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial \mu_{A_i}} \cdot \frac{\partial \mu_{A_i}}{\partial a}; \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \frac{\partial E}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}_i f_i} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_i f_i}{\partial \overline{\omega}_i} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial \omega_i} \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial \mu_{A_i}} \cdot \frac{\partial \mu_{A_i}}{\partial b}. \tag{2.25}$$

Daí, tem-se que

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\partial (\frac{1}{2}e^2)}{\partial e} = e; \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial (y_e - y)}{\partial y} = -1; \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial y}{\partial (\overline{\omega}_i f_i)} = \frac{\partial (\overline{\omega}_i f_i)}{\partial (\overline{\omega}_i f_i)} = 1; \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial (\overline{\omega}_i f_i)}{\partial \overline{\omega}_i} = f_i; \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial \omega_i} = \frac{\partial \left(\dfrac{\omega_i}{\sum_{i=1}^{4} \omega_i} \right)}{\partial \omega_i} = \frac{(\sum_{j=1}^{4} \omega_j) - \omega_i}{(\sum_{j=1}^{4} \omega_j)^2} = \frac{\overline{\omega}_i (1 - \overline{\omega}_i)}{\omega_i}; \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \mu_{A_i}} = \frac{\omega_i}{\mu_{A_i}}. \tag{2.31}$$

Exemplo do Cálculo das Derivadas Parciais

Para o cálculo dos parâmetros descritos anteriormente é considerada uma função trapezoidal, conforme a expressão da função de pertinência (2.9). Como somente as retas da forma $f(x) = ax + b$ são ajustadas em cada intervalo, podemos tratar o ajuste dos parâmetros de cada função $f(x)$ separadamente. A seguir, são realizados os cálculos para as expressões (2.24) e (2.25):

$$\frac{\partial \mu_{A_i}}{\partial a} = \begin{cases} x, & \text{se } x_0 \leq x < x_1; \\ 0, & \text{se } x_1 \leq x \leq x_2 \\ x, & \text{se } x_2 < x \leq x_3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial \mu_{A_i}}{\partial b} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 \leq x < x_1 \\ 0, & \text{se } x_1 \leq x \leq x_2 \\ 1, & \text{se } x_2 < x \leq x_3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{2.33}$$

Então, tem-se que:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = e \cdot (-1) \cdot 1 \cdot f_i \cdot \frac{\overline{\omega}_i(1 - \overline{\omega}_i)}{\omega_i} \cdot \frac{\omega_i}{\mu_{A_i}} \cdot \frac{\partial \mu_{A_i}}{\partial a}; \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = e \cdot (-1) \cdot 1 \cdot f_i \cdot \frac{\overline{\omega}_i(1 - \overline{\omega}_i)}{\omega_i} \cdot \frac{\omega_i}{\mu_{A_i}} \cdot \frac{\partial \mu_{A_i}}{\partial b}. \tag{2.35}$$

E, portanto:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \begin{cases} -(y_e - y) \cdot (k_{i0}x_1 + k_{i1}x_2 + k_{i2}) \cdot \dfrac{\overline{\omega}_i(1 - \overline{\omega}_i)}{\mu_{A_i}} \cdot x, & \text{se } x_0 \leq x < x_1 \text{ ou } x_2 \leq x \leq x_3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \begin{cases} -(y_e - y) \cdot (k_{i0}x_1 + k_{i1}x_2 + k_{i2}) \cdot \dfrac{\overline{\omega}_i(1 - \overline{\omega}_i)}{\mu_{A_i}}, & \text{se } x_0 \leq x < x_1 \text{ ou } x_2 \leq x \leq x_3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{2.37}$$

Com a construção teórica para o ANFIS detalhada, é necessário obter os dados que são utilizados no treinamento e validação do SBRF gerado.

2.3 CANTERA

Segundo Goodwin *et al.* (2023), o CANTERA é um conjunto de ferramentas de código aberto para problemas envolvendo cinética química, termodinâmica e problemas de transferência de massa. Entre outras funções, esse *toolbox* é capaz de gerar dados da velocidade do som a partir da composição química do meio, além de fatores específicos, como por exemplo, a temperatura do material.

Para fins de estudo do trabalho, o fluido escolhido como base é o ar. Para formulação do SBRF, a partir do ANFIS, as duas variáveis de entrada são a umidade absoluta (u),que

se refere à porcentagem de água presente na composição do ar, tendo esta variado entre 0% e 5% (MORAES, 2017), e a temperatura (θ).

Como o trabalho trata da cóclea, um orgão localizado no interior do ouvido interno, foram escolhidas temperaturas que representem situações entre a hipotermia moderada e febre extremas. As informações foram retiradas de Laganá, Faro e Araújo (1992) e Silva, Luz e Nery (2013). Logo, para gerar os dados de velocidade do som, foram escolhidas temperaturas entre 28 °C e 42 °C.

Escolhidas as variações de umidade e temperatura, foram gerados 846 dados de treinamento, além de 360 dados diferentes, que são utilizados para validação do SBRF obtido posteriormente. Essa quantidade corresponde à $29,85\%$ do total de 1206 dados gerados.

2.4 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy do Tipo 1 para obter a Velocidade do Som

Nesta seção são apresentados o SBRF do tipo 1 obtido através do ANFIS, além da construção do SBRF do tipo 2 intervalar utilizado no trabalho, baseado no SBRF do tipo 1.

2.4.1 Sistema Baseado em Regras Fuzzy do Tipo 1 o através de Rede Neuro-Fuzzy

Tendo os dados de treinamento da velocidade do som determinados pelo CANTERA, os parâmetros de treinamento do ANFIS são definidos por:

- A variável linguística da temperatura é composto por 4 funções trapezoidais;
- A variável linguística da umidade é composto por 3 funções trapezoidais;
- No processo de aprendizagem são realizadas 150 iterações.
- O $RMSE$ obtido é de $0,00599528180531687$.

Após todas as iterações, o ANFIS retorna um SBRF do tipo 1, cujas funções de pertinência da temperatura obtidas são:

$$\mu_{\theta_{baixa}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 29,42 \\ -0,53475x + 16,73262, & \text{se } 29,42 \leq x \leq 31,29 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{2.38}$$

$$\mu_{\theta_{média}}(x) = \begin{cases} 0,53475x - 15,72727, & \text{se } 29,41 \leq x < 31,28 \\ 1, & \text{se } 31,28 \leq x < 34,08 \\ -0,5291x + 19,03174, & \text{se } 34,08 \leq x < 35,97 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{2.39}$$

$$\mu_{\theta_{alta}}(x) = \begin{cases} 0,54054x - 18,43243, & \text{se } 34,1 \leq x < 35,95 \\ 1, & \text{se } 35,95 \leq x < 38,72 \\ -0,55865x + 22,63128, & \text{se } 38,72 \leq x < 40.51 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{2.40}$$

$$\mu_{\theta_{muito\ alta}}(x) = \begin{cases} 0,53191x - 20,59042, & \text{se } 38,71 \leq x < 40,59 \\ 1, & \text{se } x \geq 40,59 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{2.41}$$

Os gráficos das funções de pertinência da temperatura com domínio $[0,\ 42]$ estão representados na Figura 2.9.

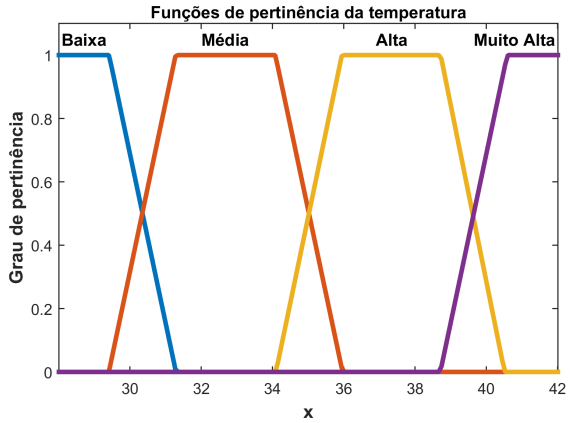


Figura 2.9: Funções de pertinência da temperatura. Fonte: Elaborada pelo autor.

As funções de pertinência para a umidade obtidas são:

$$\mu_{u_{baixa}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 0,756; \\ -1,00401x + 1,75903, & \text{se } 0,756 \leq x < 1,752 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{2.42}$$

$$\mu_{u_{média}}(x) = \begin{cases} 1,01286x - 0,77858, & \text{se } 0,7687 \leq x < 1,756 \\ 1, & \text{se } 1,756 \leq x < 3,245 \\ -1,0124x + 4,28441, & \text{se } 3,245 \leq x < 4,233 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{2.43}$$

$$\mu_{u_{alta}}(x) = \begin{cases} 1,003x - 3,25777, & \text{se } 3,248 \leq x < 4,245 \\ 1, & \text{se } x \geq 4,245 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{2.44}$$

Os gráficos das funções de pertinência para a umidade com domínio $[0,\ 5]$ estão representados na Figura 2.10.

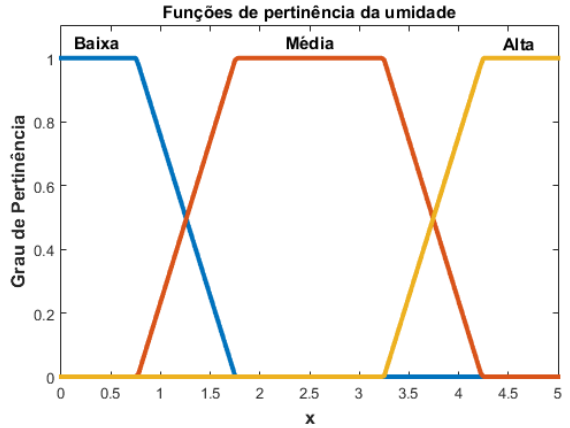


Figura 2.10: Funções de pertinência da umidade. Fonte: Elaborada pelo autor.

As 12 regras fuzzy obtidas pelo ANFIS são:

1. Se θ é *baixa* e u é *baixa* então $c_1 = 0,5706\theta + 0,55u + 332,5$;
2. Se θ é *baixa* e u é *média* então $c_2 = 0,572\theta + 0,5557u + 332,4$;
3. Se θ é *baixa* e u é *alta* então $c_3 = 0,5735\theta + 0,5746u + 332,3$
4. Se θ é *média* e u é *baixa* então $c_4 = 0,567\theta + 0,5539u + 332,6$;
5. Se θ é *média* e u é *média* então $c_5 = 0,5691\theta + 0,5588u + 332,5$;
6. Se θ é *média* e u é *alta* então $c_6 = 0,5705\theta + 0,5779u + 332,4$;
7. Se θ é *alta* e u é *baixa* então $c_7 = 0,5626\theta + 0,5544u + 332,8$;
8. Se θ é *alta* e u é *média* então $c_8 = 0,5651\theta + 0,5634u + 332,6$;
9. Se θ é *alta* e u é *alta* então $c_9 = 0,5648\theta + 0,584u + 332,6$;
10. Se θ é *muito alta* e u é *baixa* então $c_{10} = 0,5607\theta + 0,563u + 332,8$;
11. Se θ é *muito alta* e u é *média* então $c_{11} = 0,5656\theta + 0,571u + 332,6$;
12. Se θ é *muito alta* e u é *alta* então $c_{12} = 0,5616\theta + 0,5871u + 332,7$.

O SBRF do ANFIS foi validado a partir do RMSE, definido por:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_{g_i} - y_i)^2} \tag{2.45}$$

em que y_{g_i} são as velocidades obtidas pelo SBRF do tipo 1, y_i são as velocidades do som utilizadas na validação do sistema e n é o número destes dados. O erro alcançado é da ordem 10^{-3}.

A superfície que representa a velocidade do som, gerada a partir do SBRF para valores de temperatura (θ) no intervalo $[28°C,\ 42°C]$ e umidade (u) no intervalo $[0,\ 5]$ com grade 15×15 na Figura 2.11.

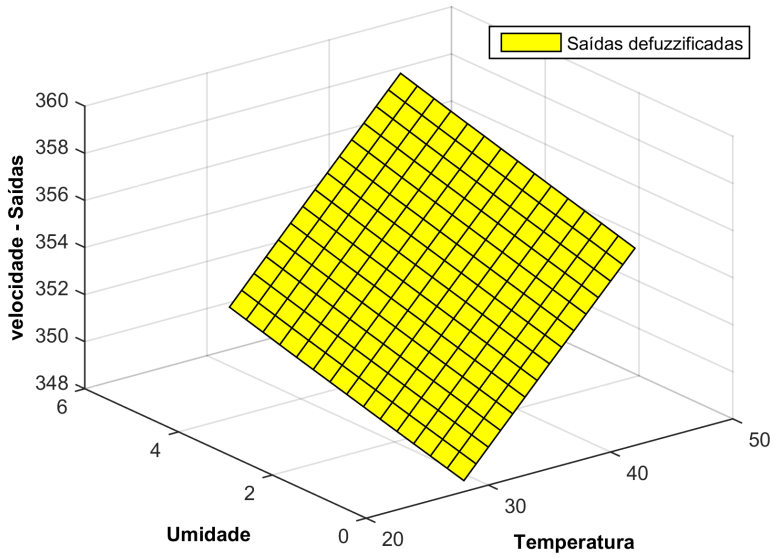


Figura 2.11: Superfície gerada pelo SBRF do tipo 1. Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir do SBRF obtido, é possível construir um SBRF do tipo 2 intervalar através das técnicas descritas no Capítulo 1.

2.5 Construção do Sistema Baseado em Regras Fuzzy do Tipo 2 Intervalar

Para obter o SBRF do tipo 2 intervalar a partir de um SBRF do tipo 1, são utilizadas as mesmas funções de pertinência resultantes do ANFIS, porém considerando amplitudes para construção das FOU e nas saídas em função das variáveis de entrada, como descrito no Capítulo 1.

Para realizar essa construção, os extremos do suporte das funções de pertinência obtidas através do ANFIS, denotados por a e b, são utilizados como pontos centrais para o cálculo dos extremos das funções de pertinência superiores e inferiores, observe a Figura 2.12. A partir destes pontos, são somados e subtraídos a amplitude D e no intervalo que a função de pertinência do tipo 1 assume o valor 1 é subraído a mesma amplitude, alcançando uma pertinência máxima de $1-D$. Utilizando os mesmos coeficientes angulares das funções de pertinência do tipo 1 são realizadas as construções das retas que compõem as funções de pertinência inferiores (μ_{inf}) e superiores (μ_{sup}) da FOU. Este procedimento é realizado para as duas variáveis de entrada.

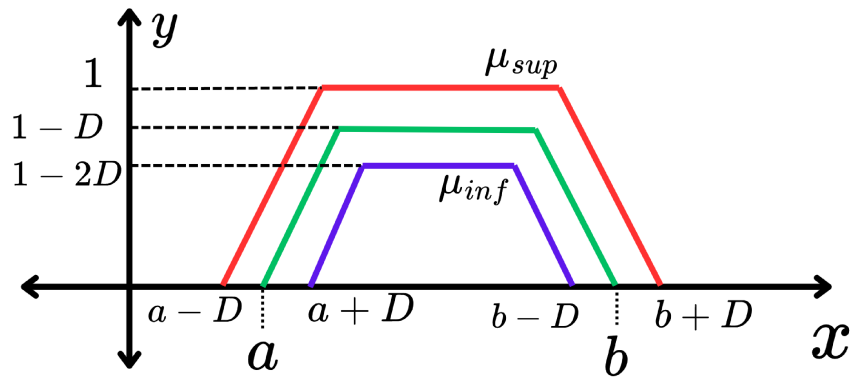


Figura 2.12: Representação gráfica da construção da FOU. Fonte: Elaborada pelo autor.

2.5.1 Sistema Baseado em Regras Fuzzy do Tipo 2 Intervalar para obter a Velocidade do Som

A partir do SBRF do tipo 1 e do procedimento descrito anteriormente, utilizando $D = 0,05$, as funções de pertinência superior e inferior da temperatura para o SBRF do tipo 2 intervalar são dadas por:

$$\underline{\mu}_{\theta_{baixa}}(x) = \begin{cases} 0,95, & \text{se } x < 28,57 \\ -0,53324x + 16,18620, & \text{se } 28,57 \leq x \leq 30,35 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{2.46}$$

$$\overline{\mu}_{\theta_{baixa}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 29,42 \\ -0,53323x + 16,68616, & \text{se } 29,42 \leq x \leq 31,29 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{2.47}$$

$$\underline{\mu}_{\theta_{média}}(x) = \begin{cases} 0,53366x - 16,19492, & \text{se } 30,35 \leq x < 33,23 \\ 0,95, & \text{se } 32,13 \leq x < 33,23; \\ -0,53038x + 18,57610, & \text{se } 33,23 \leq x < 35,02 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} ; \tag{2.48}$$

$$\overline{\mu}_{\theta_{média}}(x) = \begin{cases} 0,53366x - 15,69485, & \text{se } 29,41 \leq x < 31,28 \\ 1, & \text{se } 31,28 \leq x < 34,08 \\ -0,53038x + 19,07611, & \text{se } 34,08 \leq x < 35,97 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} ; \tag{2.49}$$

$$\underline{\mu}_{\theta_{alta}}(x) = \begin{cases} 0,54046x - 18,92849, & \text{se } 35,02 \leq x < 36,78 \\ 0,95, & \text{se } 36,78 \leq x < 37,91 \\ -0,55735x + 22,08015, & \text{se } 37,91 \leq x < 39,61 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} ; \tag{2.50}$$

$$\overline{\mu}_{\theta_{alta}}(x) = \begin{cases} 0,54045x - 18,42843, & \text{se } 34,1 \leq x < 35,95 \\ 1, & \text{se } 35,95 \leq x < 38,72 \\ -0,55735x + 22,58027, & \text{se } 38,72 \leq x < 40.51 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} ; \tag{2.51}$$

$$\underline{\mu}_{\theta_{muito\ alta}}(x) = \begin{cases} 0,53284x - 21,12603, & \text{se } 39,65 \leq x < 41,43 \\ 0,95, & \text{se } x \geq 41,43 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} ; \tag{2.52}$$

$$\overline{\mu}_{\theta_{muito\ alta}}(x) = \begin{cases} 0,53284x - 20,62598, & \text{se } 38,71 \leq x < 40,59 \\ 1, & \text{se } x \geq 40,59 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} . \tag{2.53}$$

Na Figura 2.13 é apresentada a FOU da variável de entrada temperatura.

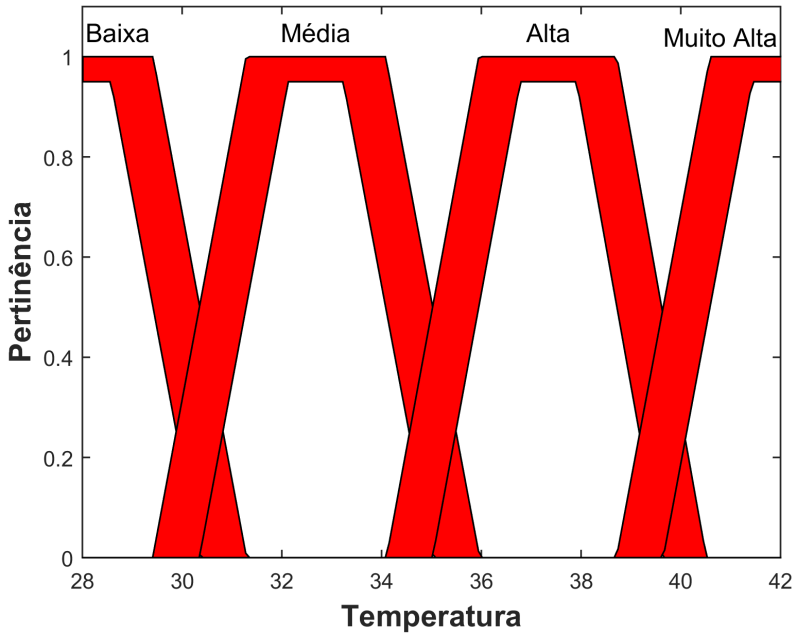


Figura 2.13: FOU da variável de entrada temperatura. Fonte: Elaborada pelo autor.

As funções de pertinência para a umidade obtidas são:

$$\underline{\mu}_{u_{baixa}}(x) = \begin{cases} 0,95, & \text{se } x \leq 0,308 \\ -1,00402x + 1,25900, & \text{se } 0,308 \leq x < 1,254 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{2.54}$$

$$\overline{\mu}_{u_{baixa}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 0,308 \\ -1,05687x + 1,32527, & \text{se } 0,608 \leq x < 1,254 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{2.55}$$

$$\underline{\mu}_{u_{média}}(x) = \begin{cases} 1,01292x - 1,27868, & \text{se } 1,26 \leq x < 2,2 \\ 0,95, & \text{se } 2,2 \leq x < 2,8; \\ -1,01176x + 3,78267, & \text{se } 2,8 \leq x < 3,74 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{2.56}$$

$$\overline{\mu}_{u_{média}}(x) = \begin{cases} 1,01291x - 0,77866, & \text{se } 0,7687 \leq x < 1,756 \\ 1, & \text{se } 1,756 \leq x < 3,2445 \\ -1,01177x + 4,28271, & \text{se } 3,2445 \leq x < 4,233 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{2.57}$$

$$\underline{\mu}_{u_{alta}}(x) = \begin{cases} 1,00368x - 3,76016, & \text{se } 3,75 \leq x < 4,693 \\ 1, & \text{se } x \geq 4,693 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{2.58}$$

$$\overline{\mu}_{u_{alta}}(x) = \begin{cases} 1,00368x - 3,26015, & \text{se } 3,248 \leq x < 4,245 \\ 1, & \text{se } x \geq 4,245 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{2.59}$$

Na Figura 2.14 é apresentada a FOU da variável de entrada umidade.

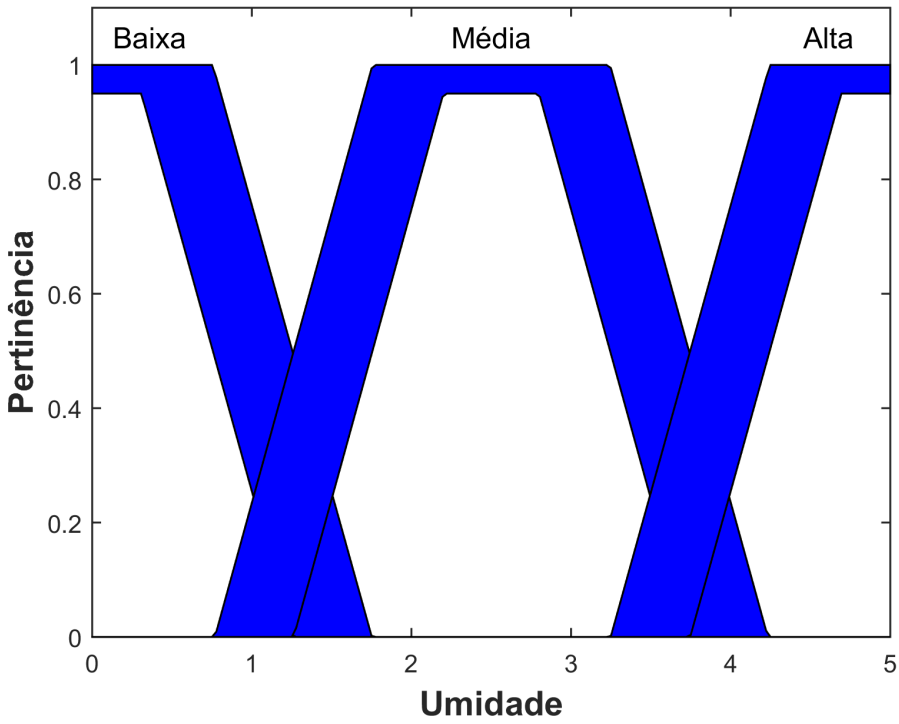


Figura 2.14: FOU da variável de entrada umidade. Fonte: Elaborada pelo autor.

As 12 regras são obtidas utilizando os parâmetros calculados pela ANFIS como centro do intervalo e amplitudes de $0,1$ para os coefientes intervalares que acompanham θ e u, além de uma amplitude de 1 para o termo independente. Assim, obtém-se as seguintes regras:

1. Se θ é *baixa* e u é *baixa*, então $c_1 = [0,5606,\ 0,5806]\theta + [0,45,\ 0,65]u + [331,5,\ 333,5]$;
2. Se θ é *baixa* e u é *média*, então $c_2 = [0,472,\ 0,672]\theta + [0,4557,\ 0,6557]u + [331,4,\ 333,4]$;
3. Se θ é *baixa* e u é *alta*, então $c_3 = [0,4735,\ 0,6735]\theta + [0,4746,\ 0,6746]u + [331,3,\ 333,3]$
4. Se θ é *média* e u é *baixa*, então $c_4 = [0,467,\ 0,667]\theta + [0,4539,\ 0,6539]u +]331,6,\ 333,6]$;
5. Se θ é *média* e u é *média*, então $c_5 = [0,4691,\ 0,6691]\theta + [0,4588,\ 0,6588]u + [331,5,\ 333,5]$;
6. Se θ é *média* e u é *alta*, então $c_6 = [0,4705,\ 0,6705]\theta + [0,4779,\ 0,6779]u + [331,4,\ 333,4]$;
7. Se θ é *alta* e u é *baixa*, então $c_7 = [0,4626,\ 0,6626]\theta + [0,4544,\ 0,6544]u + [331,8,\ 333,8]$;
8. Se θ é *alta* e u é *média*, então $c_8 = [0,4651,\ 0,6651]\theta + [0,4634,\ 0,6634]u + [331,6,\ 333,6]$;
9. Se θ é *alta* e u é *alta*, então $c_9 = [0,4648,\ 0,6648]\theta + [0,484,\ 0,684]u + [331,6,\ 333,6]$
10. Se θ é *muito alta* e u é *baixa*, então $c_{10} = [0,4607,\ 0,6607]\theta + [0,463,\ 0,663]u + [331,8,\ 333,8]$;
11. Se θ é *muito alta* e u é *média*, então $c_{11} = [0,4656,\ 0,6656]\theta + [0,471,\ 0,671]u + [331,6,\ 333,6]$;
12. Se θ é *muito alta* e u é *alta*, então $c_{12} = [0,4616,\ 0,6616]\theta + [0,4871,\ 0,6871]u + [331,7,\ 333,7]$.

Na Figura 2.15, são apresentadas três superfíces geradas pelo SBRF do tipo 2 intervalar, para os valores da temperatura (θ) no intervalo $[28°C,\ 42°C]$ e da umidade (u) no intervalo $[0,\ 5]$ com grade 15×15. Estas superfícies são geradas pelos pontos obtidos pelos c_L, pelos pontos defuzzificados c e pelos c_R, mostrando que as superfícies apresentam o mesmo comportamento, com valores diferentes. Note que existe uma faixa que contém as três superfícies, sendo aproximações de planos.

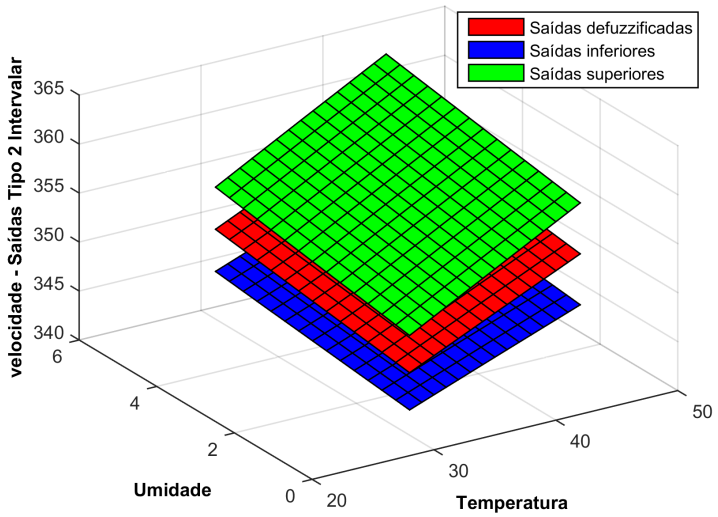


Figura 2.15: Superfícies geradas pelo SBRF do tipo 2 intervalar. Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante notar também que, como o SBRF do tipo 2 intervalar foi construído a partir da saída do ANFIS, assim, as superfícies do SBRF do tipo 1 e a saída defuzzificada do SBRF do tipo 2 intervalar se sobrepõem, como pode ser observado na Figura 2.16.

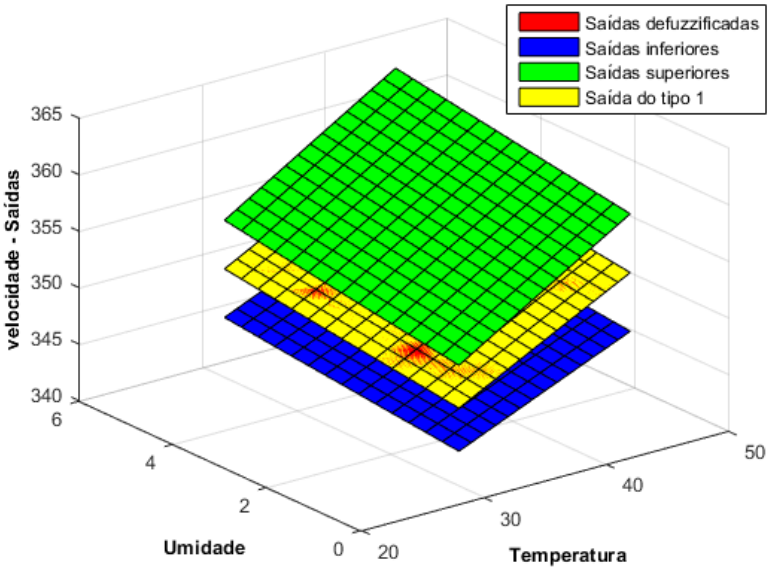


Figura 2.16: Sobreposição das superfícies do tipo 1 e do tipo 2 intervalar obtidas de valores defuzzificados. Fonte: Elaborada pelo autor.

No próximo capítulo, é apresentado o referencial teórico do método numérico que é utilizado para obter as aproximações das soluções das equações da onda acústica unidimensionais elaborados nesta dissertação.

Capítulo 3

Método das Diferenças Finitas Unidimensional e Bidimensional

As equações diferenciais são úteis para modelar inúmeros problemas envolvendo as mais variadas áreas do conhecimento. Dada sua aplicabilidade e importância, esse tipo de modelagem tem sido objeto de estudo da matemática. Além de resolução analíticas de problemas, é comum que se desenvolvam métodos numéricos para a aproximação de soluções destes tipos de equação.

Os métodos numéricos se baseiam em processos de discretização, ou seja, reduzem um problema do contínuo à um problema discreto, com um número finito de variáveis, que pode ser computado. Os métodos numéricos para aproximação da solução de equações diferenciais escolhidos para este trabalho são: o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Neste capítulo, são apresentadas as aproximações numéricas para uma equação diferencial unidimesional e uma equação de Poisson bidimensional com domínio regular utilizando o Método das Diferenças Finitas Centradas. A seguir, são apresentados conceitos importantes para compreensão do MDF.

3.1 Classificação de Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem

Sejam duas funções, $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, a representação geral de uma equação diferencial de segunda ordem é:

$$ap_{xx} + bp_{xy} + cp_{yy} + dp_x + ep_y + fp = g. \tag{3.1}$$

em que, $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ e f são constantes, ou funções conhecidas das variáveis do domínio $\mathbb{R}^2$. As funções $a,\ b$ e c são tais que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0. \tag{3.2}$$

No caso em que essas funções são constantes, torna-se possível uma classificação da equação diferencial parcial de segunda ordem, em analogia às equações cônicas, estudadas em Geometria Analítica, como pode ser visto em Winterle e Steinbruch (2000). Considere

$$p_{xx} = \alpha^2,\ p_{yy} = \beta^2,\ p_{xy} = \alpha\beta,\ p_x = \alpha,\ p_y = \beta. \tag{3.3}$$

Então, é possível escrever a função g como o seguinte polinômio:

$$P(\alpha, \beta) = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\alpha\beta + d\alpha + e\beta + fp. \tag{3.4}$$

Observe que o polinômio $P(\alpha, \beta)$ descreve a equação de uma cônica, como descrito em Winterle e Steinbruch (2000). Logo, pode ser classificado à partir do seu discriminante $b^2 - ac$. Portanto, $P(\alpha, \beta)$ é uma cônica:

- Elíptica se $b^2 - ac < 0$;
- Parabólica se $b^2 - ac = 0$;
- Hiperbólica se $b^2 - ac < 0$.

A mesma nomenclatura é utilizada para as equações diferenciais parciais de segunda ordem.

Outra definição importante utilizada no trabalho é o Laplaciano.

Definição 3.1. *Seja uma função $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Define-se o Laplaciano (Δ) de p por:*

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}.$$

Para estudo dos métodos de aproximação numérica, é necessário também definir o que é a ordem do erro de uma aproximação.

Definição 3.2. *Seja $F(x, h)$ uma fórmula de diferenças que aproxima a derivada de ordem (q) de uma função $y(x)$ com erro $\varepsilon(x, h)$. então:*

$$y^{(q)}(x) = F(x, h) + \varepsilon(x, h). \tag{3.5}$$

Dizemos que a fórmula $F(x, h)$ é de ordem p se $\epsilon(x, h) = h^p R(x)$, em que $R(x)$ não depende de h. Neste caso, é utilizada a notação $\varepsilon(x, h) = O(h^p)$, indicando que $\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon(x,h)}{h^p}$ é uma constante finita.

3.2 Definição da Malha

3.2.1 Domínio Unidimensional

Seja o intervalo fechado $[a,\ b]$ correspondente ao domínio de uma função $p(x)$. Definindo-se um número $n+1$ de pontos desejados para a discretização, sendo $x_0 = a$ e $x_n = b$. Para calcular o espaçamento h entre os pontos da discretização, basta utilizar a seguinte fórmula:

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}. \tag{3.6}$$

Definido o espaçamento h, o conjunto dos pontos de discretização é formado pelos pontos $x_i = x_0 + ih$. A representação gráfica de uma discretização unidimensional se encontra na Figura 3.1.

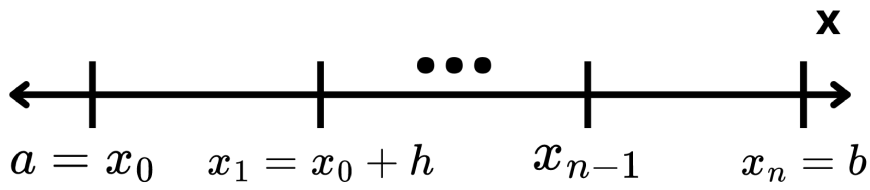


Figura 3.1: Exemplo de malha unidimensional. Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2.2 Domínio Bidimensional Regular

Sejam o domínio retangular $\Omega = [a_1,\ b_1] \times [a_2,\ b_2]$ e R o conjunto dos pontos $(x,\ y)$ do domínio para os quais a função $p(x, y)$ está definida. É possível construir uma malha R_h de pontos igualmente espaçados, com espaçamento h, a partir de um ponto de referência $(x_0,\ y_0)$ dada por:

$$R_h = \{(x_i,\ y_j) = (x_0 + ih,\ y_0 + jh),\ i, j = \pm 1, \pm 2, \ldots\}\,. \tag{3.7}$$

No caso de malhas com espaçamento variado entre as componentes do domínio, para formar a mesma, basta considerar os espaçamentos h e k, para as componentes das variáveis x e y, respectivamente.

Uma representação de malha bidimensional é encontrando na Figura 3.2

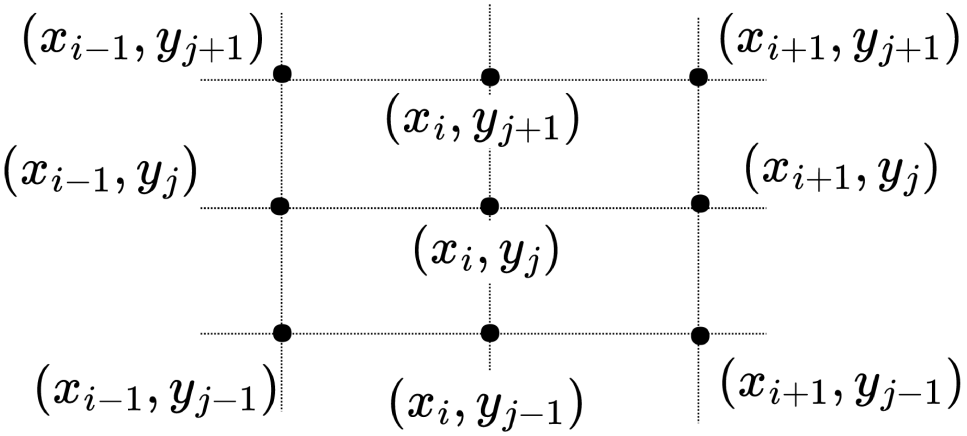


Figura 3.2: Exemplo de malha bidimensional. Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3 Diferenças Finitas Centradas para Problemas Unidimensionais

O método das diferenças finitas centradas se baseia na combinação de duas expansões finitas da série de Taylor, o que permite a aproximação das derivadas presentes em uma equação diferencial. Considere uma função p com domínio $D = [x_0,\ x_n]$ discretizado em $(n+1)$ pontos igualmente espaçados, com espaçamento h, e seja x_i um ponto qualquer desse conjunto. Aproximando o valor de $x_i + h$ através da série de Taylor (CUMINATO; MENEGUETTE, 2013):

$$p(x_i + h) = p(x_i) + hp^{'}(x_i) + \frac{h^2}{2!}p^{''}(x_i) + \frac{h^3}{3!}p^{'''}(x_i) + \dots. \tag{3.8}$$

Truncando a série na terceira derivada, tem-se que:

$$p(x_i + h) = p(x_i) + hp^{'}(x_i) + \frac{h^2}{2!}p^{''}(x_i) + \frac{h^3}{3!}p^{'''}(\xi_1), \tag{3.9}$$

em que $x_i < \xi_1 < \ x_i + h$. Esta aproximação é chamada de diferença progressiva. Para calcular a diferença atrasada, basta expandir a série com o mesmo truncamento, porém utilizando $p(x_i - h)$. Logo tem-se:

$$p(x_i - h) = p(x_i) - hp^{'}(x_i) + \frac{h^2}{2!}p^{''}(x_i) - \frac{h^3}{3!}p^{'''}(\xi_2), \tag{3.10}$$

em que $x_i - h < \xi_2 < \ x_i$, sendo esta chamada de diferença atrasada. Para calcular a diferença centrada, basta subtrair as equações (3.9) e (3.10). Logo,

$$p(x_i + h) - p(x_i - h) = 2hp^{'}(x_i) + \frac{h^3}{3!}[p^{'''}(\xi_1) + p^{'''}(\xi_2)]. \tag{3.11}$$

Isolando $p'(x)$, tem-se

$$\begin{aligned} p'(x_i) &= \frac{p(x_i + h) - p(x_i - h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}\left[\frac{1}{2}(p'''(\xi_1) + p'''(\xi_2))\right] \\ p'(x_i) &= \frac{p(x_i + h) - p(x_i - h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}y'''(\xi) \end{aligned} \tag{3.12}$$

em que $\xi \in (x_i - h, x_i + h)$ e é utilizado o teorema do valor intermediário para funções contínuas (LIMA, 1976)

$$\frac{1}{2}[p'''(\xi_1) + p'''(\xi_2)] = y'''(\xi)$$

para algum $\xi \in [\min\{\xi_1, \xi_2\}, \max\{\xi_1, \xi_2\}]$.

É importante salientar que o erro é de ordem $O(h^2)$. De forma simplificada, pode-se dizer que:

$$p^{'}(x_i) \approx \frac{p(x_i + h) - p(x_i - h)}{2h}. \tag{3.13}$$

Para calcular as aproximações da derivada segunda de uma função, utiliza-se novamente a série de Taylor, porém truncando a expressão na quarta derivada. Tem-se então que a diferença progressiva é dada por:

$$p(x_i + h) = p(x_i) + hp^{'}(x_i) + \frac{h^2}{2!}p^{''}(x_i) + \frac{h^3}{3!}p^{'''}(x_i) + \frac{h^4}{4!}p^{(4)}(\xi_1). \tag{3.14}$$

De maneira semelhante, a diferença atrasada é dada por:

$$p(x_i - h) = p(x_i) - hp^{'}(x_i) + \frac{h^2}{2!}p^{''}(x_i) - \frac{h^3}{3!}p^{'''}(x_i) + \frac{h^4}{4!}p^{(4)}(\xi_2); \tag{3.15}$$

Somando as equações (3.14) e (3.15), obtém-se:

$$p(x_i - h) + p(x_i + h) = 2p(x_i) + h^2 p''(x_i) + \frac{h^4}{12}\left[\frac{1}{2}(p^{(4)}(\xi_1) + p^{(4)}(\xi_2))\right], \tag{3.16}$$

isolando $p''(x_i)$, tem-se:

$$p''(x_i) = \frac{p(x_i + h) - 2p(x_i) + y(x_i - h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}p^{(4)}(\xi) \tag{3.17}$$

em que $\xi \in (x_i - h, x_i + h)$, com

$$\frac{1}{2}[y^{(4)}(\xi_1) + y^{(4)}(\xi_2)] = y^{(4)}(\xi)$$

para algum $\xi \in [\min\{\xi_1, \xi_2\}, \max\{\xi_1, \xi_2\}]$.

Logo, o erro de aproximação é de ordem $O(h^2)$ e, de forma simplificada, tem-se:

$$p^{''}(x_i) \approx \frac{p(x_i + h) - 2p(x_i) + p(x_i - h)}{h^2}. \tag{3.18}$$

Para calcular as diferenças finitas com relação ao tempo, tem-se:

$$\frac{\partial p^2(x_i, t_j)}{\partial^2 t} \approx \frac{p_i^{j+1} - 2p_i^j + p_i^{j-1}}{\Delta t^2}; \tag{3.19}$$

em que Δt é o espaçamento do tempo t, $p_i^j = p(x_i,\ t_j)$, sendo i e j os índices das variáveis x e t, respectivamente. Segue um exemplo de resolução de uma equação diferencial unidimensional de segunda ordem, através do MDF.

Exemplo 3.1. *Considere o seguinte problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2p}{dx^2} = cos(x), \quad em\ [0,\ 1] \\ p(0) = p(1) = 0 \end{cases}. \tag{3.20}$$

Deseja-se aproximar as soluções da equação diferencial à partir do MDF, utilizando 51 pontos de discretização. Considerando a equação (3.20) para o ponto x_i, tem-se:

$$p^{''}(x_i) \approx \frac{p(x_i + h) - 2p(x_i) + p(x_i - h)}{h^2};$$

para $i = 1, \ldots,\ n - 1$.

Logo,

$$-\frac{p(x_i + h) - 2p(x_i) + p(x_i - h)}{h^2} = cos(x_i) \Longrightarrow -p(x_i + h) + 2p(x_i) - p(x_i - h) = h^2 cos(x_i);$$

para $i = 1, \ldots, \ n-1$.

Na forma matricial, têm-se:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ \vdots \\ p(x_{n-2}) \\ p(x_{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 cos(x_1) \\ h^2 cos(x_2) \\ \vdots \\ h^2 cos(x_{n-2}) \\ h^2 cos(x_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

A representação gráfica do resultado obtido com a resolução do sistema linear com as condições $p(0) = p(1) = 0$ *para* $h = 0,1$*, encontra-se na Figura 3.3*

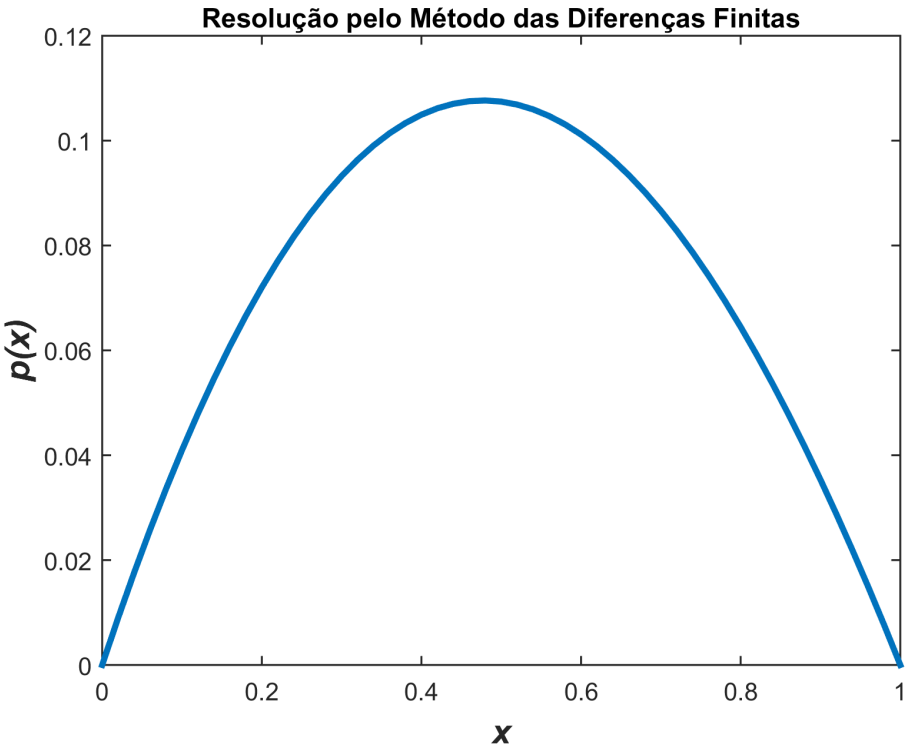


Figura 3.3: Aproximação da solução da equação (3.20) pelo MDF. Fonte: Elaborada pelo autor.

Um estudo acerca dos erros da aproximação é apresentado no próximo capítulo, ao comparar o MDF com o método dos elementos finitos.

3.4 Diferenças Finitas Centradas para Problemas Bidimensionais com Domínio Regular

Sejam o domínio $R = [a_1, \ b_1] \times [a_2, \ b_2]$ e uma função $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Considera-se também a seguinte discretização:

$$R_h = \{(x_i, y_j) = (x_0 + ih, y_0 + jk), \ i, j = \pm 1, \pm, 2, \ldots\}; \tag{3.21}$$

em que h e k representam o espaçamento na variável x e y respectivamente, não sendo necessariamente iguais.

Como na anterior, é possível aproximar as derivadas parciais de $p(x, y)$ através da série de Taylor. Assim, utilizando as diferenças centradas discutidas anteriormente tem-se que:

$$\begin{aligned}
p_x(x,y) &\approx \frac{p(x+h,y)-p(x-h,y)}{2h}, \text{ com erro de ordem } O(h^2);\\
p_y(x,y) &\approx \frac{p(x,y+k)-p(x,y-k)}{2k}, \text{ com erro de ordem } O(h^2);\\
p_{xx}(x,y) &\approx \frac{p(x+h,y)-2p(x,y)+p(x-h,y)}{h^2}, \text{ com erro de ordem } O(h^2);\\
p_{yy}(x,y) &\approx \frac{p(x,y+k)-2p(x,y)+p(x,y-k)}{k^2}, \text{ com erro de ordem } O(h^2).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Para simplificar a notação, considera-se que:

$$\begin{aligned}
p(x_i, y_j) &= p_{i,j};\\
p(x_i + h, y_j) &= p_{i+1,j};\\
px_i - h, y_j) &= p_{i-1,j};\\
p(x_i, y_j + k) &= p_{i,j+1};\\
p(x_i, y_j - k) &= p_{i,j-1}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
p_x(x,y) &\approx \frac{p_{i+1,j}-p_{i-1,j}}{2h};\\
p_y(x,y) &\approx \frac{p_{i,j+1}-p_{i,j-1}}{2k};\\
p_{xx}(x,y) &\approx \frac{p_{i+1,j}-2p_{i,j}+p_{i-1,j}}{h^2};\\
p_{yy}(x,y) &\approx \frac{p_{i,j+1}-2p_{i,j}+p_{i,j+1}}{k^2}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Com as aproximações das derivadas parciais descritas, é possível discretizar o Laplaciano:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \approx \frac{p_{i+1,j}-2p_{i,j}+p_{i-1,j}}{h^2} + \frac{p_{i,j+1}-2p_{i,j}+p_{i,j-1}}{k^2}. \tag{3.25}$$

É importante notar que a discretização envolve, em cada ponto da malha, os valores que a solução possui em seus 4 pontos cardeais. Essa discretização está representada graficamente na Figura 3.4.

Com a discretização do Laplaciano deduzida através do MDF, é possível aproximar a solução de uma equação diferencial parcial de segunda ordem elíptica. Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta p = f(x,y), & \text{em } \Omega;\\ p = g(x,y), & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.26}$$

em que,

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le L_x, 0 \le y \le L_y\}. \tag{3.27}$$

sendo L_x e L_y os comprimentos do domínio retangular Ω nas direções x e y, respectivamente.

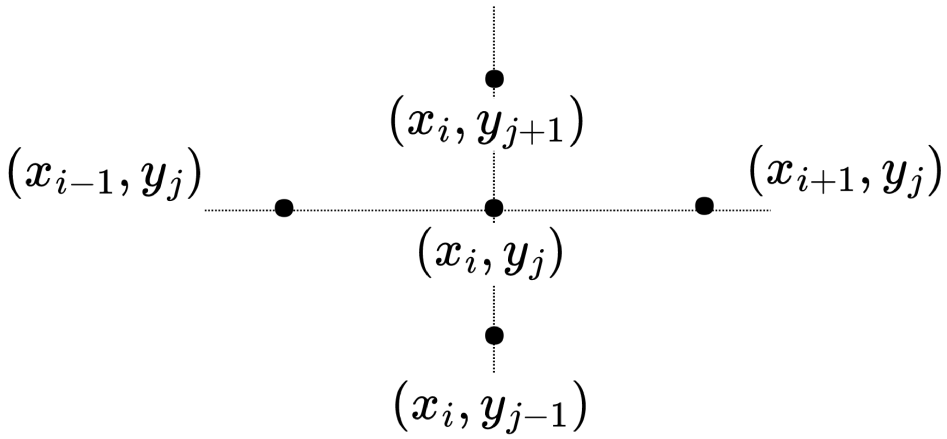


Figura 3.4: Pontos cardeais. Fonte: Elaborada pelo autor.

Discretizando o domínio Ω em $M+2$ pontos na direção vertical e $N+2$ pontos na direção horizontal, é possível definir os espaçamentos h e k por:

$$h = \frac{L_x}{N+1} \; e \; k = \frac{L_y}{M+1}. \tag{3.28}$$

Aplicando a discretização do Laplaciano, obtém-se que:

$$\frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{h^2} + \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{k^2} = f(x,y). \tag{3.29}$$

Logo,

$$h^2 p_{i,j-1} + k^2 p_{i-1,j} - 2(h^2 + k^2) p_{i,j} + k^2 p_{i+1,j} + h^2 p_{i,j+1} = h^2 k^2 f(x,y). \tag{3.30}$$

Essa fórmula é conhecida como Fórmula de 5 pontos, sendo possível resolvê-la matricialmente. Porém, é necessário interpretar os índices dos pontos de discretização. Percebe-se que a diagonal principal da matriz é formada por elementos da forma $2(h^2+k^2)$. Além disso, as diagonais secundárias são formadas pelos termos da forma k^2 que acompanham os termos anteriores e posteriores na direção horizontal.

Para descobrir o posicionamento das diagonais afastadas inferior e superior, é necessário saber o número de pontos da discretização no sentido horizontal (nesse caso, $M+2$, como definido anteriormente). Os termos que compõem a diagonal afastada (h^2) estão exatamente M linhas abaixo e M colunas à direita da diagonal principal. Além disso, a matriz resultante da discretização é quadrada, com dimensões NM. Uma representação gráfica da matriz pentadiagonal encontra-se na Figura 3.5.

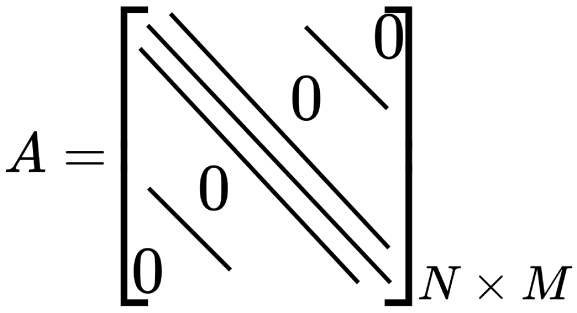


Figura 3.5: Matriz pentadiagonal. Fonte: Elaborada pelo autor.

O sistema resultante é da forma $Ap = b$, onde:

$$A = [a_{ij}], \text{ em que } a_{ij} \begin{cases} -2(h^2 + k^2), & \text{se } i = j \\ k^2, & \text{se } i = j + 1 \text{ } ou \text{ } i = j - 1 \\ h^2, & \text{se } i = j + M \text{ } ou \text{ } i = j - M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{3.31}$$

$$p = \begin{pmatrix} p_{1,1} \\ \vdots \\ p_{N,1} \\ p_{1,2} \\ \vdots \\ p_{N,2} \\ \vdots \\ p_{1,M} \\ \vdots \\ p_{NM} \end{pmatrix}; \tag{3.32}$$

e

$$f = \begin{pmatrix} h^2k^2f_{1,1} - k^2p_{0,1} - h^2p_{1,0} \\ h^2k^2f_{2,1} - h^2p_{2,0} \\ \vdots \\ h^2k^2f_{N,1} - k^2p_{N+1,1} - h^2p_{N,0} \\ h^2k^2f_{1,2} - k^2p_{0,2} \\ h^2k^2f_{2,2} \\ \vdots \\ h^2k^2f_{N,2} - k^2p_{N+1,2} \\ \vdots \\ h^2k^2f_{1,M} - k^2p_{0,2} - h^2p_{1,M+1} \\ h^2k^2f_{2,M} - h^2p_{2,M+1} \\ \vdots \\ h^2k^2f_{N,M} - k^2p_{N+1,M} - h^2p_{N,M+1} \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Para elucidar o uso do MDF em uma equação elíptica, segue um exemplo:

Exemplo 3.2. *Considere o seguinte problema de valor inicial com fronteiras de Dirichlet.*

$$\begin{cases} \Delta p = 1, & em\ \Omega = [0,\ 5] \times [0,\ 5]; \\ p = 0, & em\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.34}$$

Inicia-se o processo definindo a malha. Nesse exemplo, é utilizada uma malha igualmente espaçada em que M e N representam a quantidade de pontos interiores de Ω, nas direções x e y, respectivamente. Como o domínio Ω é quadrado, tem-se que $M = N$. Sejam h e k os espaçamentos nos sentidos horizontal e vertical, respectivamente. Assim tem-se $h = k$. Logo, o domínio discretizado será da forma:

$$R_h = \{(x_i, y_j) = (x_0 + i.h, y_0 + j.h,\ i, j = 1, 2, \ldots, 20\};$$

em que $x_0 = y_0 = 0$.

A equação discretizada empregando o MDF é:

$$\frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j} + p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{h^2} = 1$$

Logo,

$$p_{i,j-1} + p_{i-1,j} - 4p_{i,j} + p_{i+1,j} + p_{i,j+1} = h^2.$$

Pode-se que concluir que o sistema linear resultante é da forma $A.\xi = f$, em que:

$$A = [a_{ij}],\ em\ que\ a_{ij} \begin{cases} -4, & se\ i = j \\ 1, & se\ i = j + 1\ ou\ i = j - 1 \\ 1, & se\ i = j + M \quad ou\ i = j - M; \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

e

$$f = \begin{pmatrix} h^2 \\ \vdots \\ h^2 \end{pmatrix}.$$

Utilizando $N = M = 19$, os resultados obtidos para a aproximação da solução da equação (3.34) pelo MDF estão representados graficamente pela Figura 3.6.



Figura 3.6: Aproximação da solução da equação (3.34) pelo MDF.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Como no exemplo anterior, a comparação entre os resultados do MDF e o método dos elementos finitos é discutida no próximo capítulo.

Capítulo 4

Método dos Elementos Finitos Unidimensional e Bidimensional

O Método dos Elementos Finitos (MEF) possibilita a aproximação da resolução de equações diferenciais em domínios irregulares. O método consiste em particionar o domínio em um número finito de elementos triangulares e resolver um problema equivalente ao inicial (FERREIRA, 2017). Essa nova formulação é chamada de formulação fraca. Estes elementos podem assumir diversas formas diferentes. Para a resolução dos problemas aqui apresentados, foram escolhidos os elementos triangulares.

O MEF utiliza conceitos de análise funcional para definir a formulação fraca. Considera-se um espaço V de funções contínuas que contém a resolução do problema. V é um espaço vetorial de dimensão infinita. Então, é feita uma restrição do mesmo, denominada por V_h, que é subespaço vetorial de dimensão finita de V, que contém a solução pretendida. Como V_h possui dimensão finita, é possível escrever a solução p como combinação vetorial dos elementos da base. Esse capítulo é baseado nos trabalhos de Johnson (2012), Borges (2016) e Ferreira (2017).

4.1 Formulação Fraca do Problema Unidimensional

Considere o seguinte problema de Dirichlet homogêneo unidimensional, dado por:

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2p}{dx^2} = f(x),\ x \in (0,1) \\ \quad p(0) = p(1) = 0 \end{cases} . \tag{4.1}$$

em que f é uma função contínua. No MEF, ao invés de resolver o problema (4.1), é proposto um problema equivalente, denominado por formulação fraca do original. A partir disso, obtém-se a solução p para o problema proposto (4.1), que é denotada por (S), que também é a solução do problema de minimização (M) e do problema variacional (PV), relacionados à formulação fraca do problema inicial.

Para entender este processo, seguem algumas definições e teoremas que fundamentam o método.

Definição 4.1. *Seja V um espaço vetorial. Dizemos que $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma forma linear em V se:*

$$L(\beta v + \theta w) = \beta L(v) + \theta L(w),\ \forall \beta, \theta \in \mathbb{R} \text{ e } v, w \in V. \tag{4.2}$$

Seja $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, denotada por $a(\cdot, \cdot)$. Dizemos que a é uma forma bilinear se:

$$a(u, \beta v + \theta w) = \beta a(p, v) + \theta a(u, w), \forall \beta, \theta \in \mathbb{R} \text{ e } u, v, w \in V; \tag{4.3}$$

e

$$a(\beta u + \theta v, w) = \beta a(u, w) + \theta a(v, w), \forall \beta, \theta \in \mathbb{R} \text{ e } u, v, w \in V. \tag{4.4}$$

A forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ definida em V é dita simétrica se:

$$a(v, w) = a(w, v), \ \forall v, w \in V. \tag{4.5}$$

A forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ definida em V é dita definida positiva sobre V se:

$$a(v, v) > 0, \ \forall v \in V, v \neq 0. \tag{4.6}$$

Quando se define uma forma bilinear simétrica e definida positiva no espaço vetorial V, então V é um espaço vetorial normado, com a norma induzida por a, denotada por $\| \cdot \|_a$, definida por:

$$\|v\|_a = (a(v, v))^{\frac{1}{2}}, \forall v \in V; \tag{4.7}$$

a forma bilinear simétrica definida positiva, denotada por $(.,.)$, é chamada de produto interno definido em V, com a norma $\| \cdot \|$. O espaço V é também um espaço normado com norma induzida.

Definição 4.2. *Seja $\mathbb{F}$ o espaço das funções contínuas e limitadas em $[0, \ 1]$. Então:*

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx; \tag{4.8}$$

é um produto interno no espaço vetorial $\mathbb{F}$.

Definição 4.3. *Define-se o subespaço vetorial V de $\mathbb{F}$:*

$$V = \left\{ \begin{array}{c} v : v \text{ é uma função contínua em } [0, \ 1], \dfrac{dv}{dx} \text{ é uma função contínua} \\ \text{por partes e limitada em } [0, \ 1], \ v(0) = v(1) = 0 \end{array} \right\}. \tag{4.9}$$

Definição 4.4. *Define-se o funcional linear $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por:*

$$F(v) = \frac{1}{2}(\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dx}) - \int_0^1 fvdx. \tag{4.10}$$

Consideram-se os seguintes problemas:

– Problema de minimização (M): encontrar $p \in V$ tal que $F(p) \leq F(v), \forall v \in V$;

– Problema Variacional (PV): encontrar $p \in V$ tal que $\left(\dfrac{dp}{dx}, \dfrac{dv}{dx}\right) = \displaystyle\int_0^1 fvdx, \ \forall v \in V$.

O (PV) é obtido multiplicando o problema inicial por uma função $v \in V$ qualquer e integrando de 0 a 1. Logo,

$$-\int_0^1 \frac{d^2p}{dx^2}vdx = \int_0^1 fvdx. \tag{4.11}$$

Utilizando a integração por partes para resolver o membro esquerdo da equação obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)v(x)dx &= \int_0^1 \frac{d^2p}{dx^2}vdx \\ &= -\left(\left[v(x)\frac{dp}{dx}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{dp}{dx}\frac{dv}{dx}dx\right) \\ &= -\left(v(1)\frac{dp}{dx}(1) - v(0)\frac{dp}{dx}(0) - \int_0^1 \frac{dp}{dx}\frac{dv}{dx}dx\right) \\ &= \int_0^1 \frac{dp}{dx}\frac{dv}{dx}dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^1 f(x)v(x)dx = \int_0^1 \frac{dp}{dx}\frac{dv}{dx}dx, \forall v \in V. \tag{4.12}$$

A equação (4.12) com a condição de fronteira de Dirichlet homogênea é a formulação fraca do problema apresentado.

Teorema 4.1. *$(S) \Leftrightarrow (PV) \Leftrightarrow (M)$, ou seja, a solução da equação diferencial é equivalente à solução do problema variacional que é equivalente à solução do problema de minimização.*

Demonstração 4.1. $(S) \Rightarrow (PV)$.

Seja p a solução da equação diferencial $-\frac{d^2p}{dx^2} = f$.

Considere $v \in V$, realizando o produto entre a equação diferencial e v, e integrando obtém-se que:

$$-\int_0^1 \frac{d^2p}{dx^2}vdx = \int_0^1 fvdx.$$

Integrando por partes, tem-se:

$$\left[-\frac{dp}{dx}v\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{dp}{dx}\frac{dv}{dx}dx = \int_0^1 fvdx.$$

Logo,

$$\int_0^1 \frac{dp}{dx}\frac{dv}{dx}dx = \int_0^1 fvdx.$$

Portanto,

$$\left(\frac{dp}{dx}, \frac{dv}{dx}\right)_V = \int_0^1 fvdx, \ \forall v \in V.$$

$(PV) \Rightarrow (S)$.
Se $p \in V$ é solução de (PV), então

$$\left(p', v'\right)_V = \int_0^1 fvdx, \forall v \in V. \tag{4.13}$$

Supondo que:

$$p \in C^2(I) = \{\textit{funções duas vezes continuamente diferenciáveis}\}.$$

De (4.13), obtém-se

$$0 = \int_0^1 p'v'dx - \int_0^1 fvdx = p'v|_0^1 - \int_0^1 p''vdx - \int_0^1 fvdx. \tag{4.14}$$

Logo,

$$0 = pv|_0^1 - \int_0^1 (p'' + f)vdx. \tag{4.15}$$

Portanto, $\int_0^1 (p'' + f)vdx = 0$, para todo $v \in V$. Isso implica que $(p'' + f) = 0 \Rightarrow -p'' = f$.

$(PV) \Rightarrow (M)$.

Seja $p \in V$ solução de (PV). Então $(u', v') = \int_0^1 fvdx$, para todo $v \in V$. Sejam $v \in V$ e $w \in V$ tal que $w = v - p$. Isso implica que $v = p + w$. Logo,

$$
\begin{aligned}
F(v) &= F(p+w) \\
&= \frac{1}{2}\|(p+w)'\|^2 - \int_0^1 f(p+w)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(p'+w', p'+w'\right) - \int_0^1 fpdx - \int_0^1 fwdx \\
&= \frac{1}{2}\|p'\|^2 - \int_0^1 fpdx + \left(p', w'\right) - \int_0^1 fwdx + \frac{1}{2}\|w'\|^2 \\
&= F(p) + \frac{1}{2}\|w\|^2 F(p) \geq F(p)\ \forall v \in V.
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

já que p é solução do (PV). Isso implica que $(p', w') - \int_0^1 fwdx = 0.$

$(M) \Rightarrow (PV)$.
Seja $p \in V$ *solução de* (M). *Então:*

$$
F(p) \leq F(v), \forall v \in V. \tag{4.17}
$$

Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* F *o funcional linear dado em (4.10). Assim:*

$$
\begin{aligned}
g(\epsilon) &= F(p+\epsilon v) \\
&= \frac{1}{2}\|p' + \epsilon v'\|^2 - \int_0^1 f(p+\epsilon v)dx \\
&= \frac{1}{2}\|p'\| + \epsilon(p', v') + \frac{\epsilon^2}{2}\|v'\|^2 - \epsilon\int_0^1 fvdx - \int_0^1 fpdx
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Por (4.17) e (4.18), segue que $g(0) = F(p) \leq g(\epsilon), \forall \epsilon \in \mathbb{R}$. *Isso implica que g possui mínimo em* $\epsilon = 0$. *Tem-se então que:*

$$
\begin{aligned}
g'(0) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{g(0+\epsilon) - g(0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{g(\epsilon) - g(0)}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\frac{1}{2}\|p'\| + \epsilon(p', v') + \frac{\epsilon^2}{2}\|v'\|^2 - \epsilon\int_0^1 fvdx - \int_0^1 fpdx - \frac{1}{2}\|p'\| + \int_0^1 fpdx}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}(p \\
&= (u, v') - \int_0^1 fvdx.
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

Segue que $g'(0) = 0 = (u', v') - \int_0^1 fvdx, \forall v \in V$. *Isso implica que* $(p', v') = \int_0^1 fvdx, \forall v \in V$. *Portanto, p é solução do* (PV).

É importante notar que se $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *com* $dim(V) = \infty$, *define-se a derivada de Gateaux de F como:*

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\frac{F(p+\epsilon v) - F(p)}{\epsilon} = \frac{\partial F}{\partial v}(p).
$$

Logo, se existir $p \in V,\ F(p) \leq F(v), \forall v \in V$ *e* $\frac{\partial F}{\partial v}(p), \forall v \in V$, *então* $\frac{\partial F}{\partial v}(p) = 0.$

4.1.1 Método de Galerkin Unidimensional

Definição 4.5. *Seja o espaço vetorial V_h de dimensão finita, subespaço de V. Sejam ainda $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1$ uma partição do intervalo $(0,\ 1)$, $I_j = (x_{j-1},\ x_j)$, $h_j = x_j - x_{j-1},\ j = 1, 2, , n+1$ e $h = \max h_j$. Então:*

$$V_h = \left\{ v | v \text{ é contínua em } [0,\ 1] \text{ e } v(0) = v(1) = 0,\ v|_{I_j} \text{ é linear, para todo} j \in J \right\}. \quad (4.20)$$

Suponha que p é solução do (PV) em V. Então tem-se que $(u', v') = \int_0^1 f v dx, \forall v \in V$. Além disso, dado $v_h \in V_h$ tem-se que:

$$(u', v_h') = \int_0^1 f v_h dx. \quad (4.21)$$

Observação 4.1. *O Método de Galerkin consiste na utilização do espaço definido em (4.20) para a resolução do (PV) que é referido como $(PV)_h$. De maneira similar, o problema de minimização $(M)_h$ é conhecido como método de Ritz.*

Pode-se demonstrar que $(PV)_h \Leftrightarrow (M)_h$ em V_h de maneira semelhante à utilizada na anterior. Essa equivalência caracteriza o método de Ritz-Galerkin.

Definição 4.6. *Sejam P_h uma partição do intervalo $[0,\ 1]$ e V_h um espaço vetorial como em (4.20). Então, as funções $\varphi_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ da forma:*

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{h_j}, & \text{se } x \in [x_{j-1},\ x_j] \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{h_j}, & \text{se } x \in [x_j,\ x_{j+1}] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \quad (4.22)$$

formam uma base para o espaço V_h.

A Figura 4.1 ilustra as funções φ de uma partição P_h.

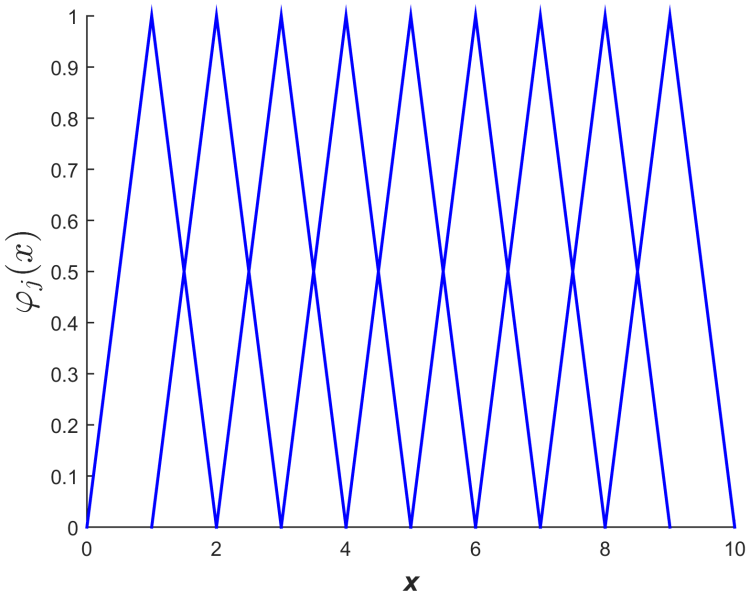


Figura 4.1: Funções de base do espaço V_h. Fonte: Elaborada pelo autor.

Observação 4.2. *Como o conjunto $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ é uma base de V_h, para qualquer $v \in V$, existe uma única forma de escrever $v(x)$ como combinação linear de elementos de φ. Ou seja:*

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} v(x_i)\varphi_i(x), \ \forall x \in [0,\ 1]. \tag{4.23}$$

Isso implica que $dim(V_h) = n$. Tem-se então que, ao escolher qualquer $v \in V_h$, é equivalente à escolher $v = \varphi_j$ com $j = 1, \ldots, n$. Portanto:

$$(p_h^{'}, \varphi_h^{'}) = \int_0^1 f\varphi_j dx, \forall j = 1, \ldots, n. \tag{4.24}$$

Como $p_h \in V_h$, tem-se que:

$$p_h(x) = \sum_{i=1}^{n} p_h(x_i)\varphi_i(x). \tag{4.25}$$

Logo,

$$(p_h^{'}, \varphi_j^{'}) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_h(x_i)\varphi_i^{'}(x), \varphi_j^{'}(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} p_h(x_i)\left(\varphi_j^{'}(x), \varphi_j^{'}(x)\right). \tag{4.26}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} p_h(x_i)\left(\varphi_i^{'}(x), \varphi_j^{'}(x)\right) = \int_0^1 f\varphi_j dx, \forall j. \tag{4.27}$$

Daí, obtém-se um sistema linear da forma $Ap = b$, em que:

$$A = \begin{pmatrix} (\varphi_1^{'}, \varphi_1^{'}) & (\varphi_2^{'}, \varphi_1^{'}) & \ldots & (\varphi_n^{'}, \varphi_1^{'}) \\ (\varphi_1^{'}, \varphi_2^{'}) & (\varphi_2^{'}, \varphi_2^{'}) & \ldots & (\varphi_n^{'}, \varphi_2^{'}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_1^{'}, \varphi_n^{'}) & (\varphi_2^{'}, \varphi_n^{'}) & \ldots & (\varphi_n^{'}, \varphi_n^{'}) \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} p_h(x_1) \\ p_h(x_2) \\ \vdots \\ p_h(x_n) \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} \int_0^1 f\varphi_1 dx \\ \int_0^1 f\varphi_2 dx \\ \vdots \\ \int_0^1 f\varphi_n dx \end{pmatrix}.$$

A matriz A é chamada de Matriz de Rigidez do sistema linear, enquanto o vetor b é chamado de Vetor de Carga do sistema. Pela Definição 4.2 tem-se que:

$$A = \begin{pmatrix} \int_0^1 \frac{\varphi_1}{dx}\frac{\varphi_1}{dx}dx & \int_0^1 \frac{\varphi_2}{dx}\frac{\varphi_1}{dx}dx & \ldots & \int_0^1 \frac{\varphi_M}{dx}\frac{\varphi_1}{dx}dx \\ \int_0^1 \frac{\varphi_2}{dx}\frac{\varphi_1}{dx}dx & \int_0^1 \frac{\varphi_2}{dx}\frac{\varphi_2}{dx}dx & \ldots & \int_0^1 \frac{\varphi_2}{dx}\frac{\varphi_M}{dx}dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \frac{\varphi_1}{dx}\frac{\varphi_M}{dx}dx & \int_0^1 \frac{\varphi_2}{dx}\frac{\varphi_M}{dx}dx & \ldots & \int_0^1 \frac{\varphi_M}{dx}\frac{\varphi_M}{dx}dx \end{pmatrix}.$$

É importante salientar que $(\varphi_i^{'}, \varphi_j^{'}) = (\varphi_j^{'}, \varphi_i^{'})$, para todo i, j.

Proposição 4.1. *A matriz A é:*

1. *Simétrica*
2. *Tridiagonal*
3. *Positiva Definida, ou seja,* $w^t Aw > 0, \forall w \in \mathbb{R}^n, w \neq 0$.

Demonstração 4.2. 1. *Como o produto interno é comutativo, tem-se que a matriz A é simétrica.*

2. *Primeiramente, tem-se que:*

$$\varphi_i^{'} = \begin{cases} \dfrac{1}{h_i}, & \text{se } x \in [x_{i-1},\ x_i] \\ \dfrac{-1}{h_{i+1}}, & \text{se } x \in [x_i,\ x_{i+1}] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Assim, se $i = j$*, tem-se,*

$$\begin{aligned} A_{i,i} &= \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_i}{dx}dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i}\frac{1}{h_i}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-1}{h_{i+1}}\frac{-1}{h_{i+1}}dx \\ &= \frac{1}{h_i^2}(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{h_{i+1}^2}(x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}. \end{aligned}$$

Se $i = j + 1$ *ou* $i = j - 1$*, tem-se:*

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_{i-1}}{dx}dx \\ &= \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} 0.\frac{d\varphi_{i-1}}{dx}dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_{i-1}}{dx}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} 0.\frac{d\varphi_i}{dx}dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_{i-1}}{dx}dx \\ &= \frac{-1}{h_i}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

É importante notar que, caso $|i - j| > 1$*, então,*

$$\int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx = 0.$$

Logo, A é uma matriz tridiagonal.

3. *Dado* $w \in V_h$*, tem-se que:*

$$\begin{aligned} w^t Aw &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx\right) w_i \\ &= \int_0^1 \left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{d\varphi_i}{dx}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \frac{d\varphi_j}{dx}\right)\right] dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{d\varphi_i}{dx}\right)^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

Em que a desigualdade só se tornará uma igualdade caso $w = 0$. Mas w é definido como um vetor qualquer do espaço V_h,

$$\frac{d\varphi_i}{dx} = 0, \ \textit{todo } i, \ x \in [0, \ 1].$$

Por hipótese, tem-se que φ_i é contínua e cumpre a condição de Dirichlet imposta. Logo todas as funções de base são nulas, o que é um absurdo. Logo, $w^t Aw > 0, \forall w \in V_h$, ou seja, A é uma matriz positiva definida.

Uma consequência do fato da matriz A ser positiva definida é o fato que o sistema matricial $Ap = b$ admite sempre uma única solução. Além disso, o vetor p, composto pelos componentes $p_h(x_i)$ são aproximações da solução p nos pontos x_i, para todos os índices i da partição P_h.

Também é prática comum em métodos numéricos adotar uma partição com intervalos igualmente espaçados. Nesse caso, tem-se que:

$$h_j = h = \frac{1}{n+1}, \forall j.$$

Então, a matriz de rigidez A apresentada anteriormente é dada por:

$$A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

4.1.2 Exemplo Unidimensional

Considere a seguinte equação:

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2p}{dx^2} = \cos(x), \quad \text{em } (0, \ 1) \\ p(0) = p(1) = 0 \end{cases}. \tag{4.30}$$

Para resolver a equação diferencial é utilizado o método dos elementos finitos. Além disso, para comparação entre métodos, são deduzidas a solução analítica, além do resultado obtido no capítulo anterior, utilizando o MDF.

Para iniciar a resolução pelo MEF, considere o mesmo espaçamento h utilizado na resolução a partir do MDF. Como demonstrado na Proposição 4.1, a matriz A é tridiagonal e, além disso, seus elementos são da forma:

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \frac{2}{h}; \\ a_{i-1,j} = a_{i+1,j} &= -\frac{1}{h}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Calculando o vetor b, tem-se:

$$\begin{aligned} b_j &= \int_0^1 \cos(x)\varphi_j(x)dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos(x)\frac{x - x_{j-1}}{h}dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \cos(x)\frac{x_{j+1} - x}{h}dx. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Calculando as integrais:

$$\begin{aligned}\int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos(x)\frac{x-x_{j-1}}{h}dx &= \frac{1}{h}\int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos(x)(x-x_{j-1})dx \\ &= \frac{1}{h}\left[(x-x_{j-1})sen(x)|_{x_{j-1}}^{x_j} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} sen(x)dx\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[(x_j-x_{j-1})sen(x_j) - (x_{j-1}-x_{j-1})sen(x_{j-1}) + cos(x)|_{x_{j-1}}^{x_j}\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[hsen(x_j) + \cos(x_j) - \cos(x_{j-1})\right].\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}\int_{x_j}^{x_{j+1}} cos(x)\frac{x_{j+1}-x}{h}dx &= \frac{1}{h}\int_{x_j}^{x_{j+1}} cos(x)(x_{j+1}-x)dx \\ &= \frac{1}{h}\left[(x_{j+1}-x)sen(x)|_{x_j}^{x_{j+1}} + \int_{x_j}^{x_{j+1}} sen(x)dx\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[(x_{j+1}-x_{j+1})sen(x_{j+1}) - (x_{j+1}-x_j)sen(x_j) - cos(x)|_{x_j}^{x_{j+1}}\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[-cos(x_{j+1}) + cos(x_j) - hsen(x_j)\right].\end{aligned} \tag{4.34}$$

Então,

$$\begin{aligned}b_j &= \frac{1}{h}\left[hsen(x_j) + \cos(x_j) - \cos(x_{j-1}) - cos(x_{j+1}) + cos(x_j) - hsen(x_j)\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[-cos(x_{j-1}) + 2cos(x_j) - cos(x_{j+1})\right].\end{aligned} \tag{4.35}$$

Portanto, para aproximar a solução da equação, basta resolver o seguinte sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h} & \frac{-1}{h} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{-1}{h} & \frac{2}{h} & \frac{-1}{h} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{h} & \frac{2}{h} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{2}{h} & \frac{-1}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{h} & \frac{2}{h} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_h(x_1) \\ p_h(x_2) \\ p_h(x_3) \\ \vdots \\ p_h(x_{n-1}) \\ p_h(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h}\left[-cos(x_0) + 2cos(x_1) - cos(x_2)\right] \\ \frac{1}{h}\left[-cos(x_1) + 2cos(x_2) - cos(x_3)\right] \\ \frac{1}{h}\left[-cos(x_2) + 2cos(x_3) - cos(x_4)\right] \\ \vdots \\ \frac{1}{h}\left[-cos(x_{n-2}) + 2cos(x_{n-1}) - cos(x_n)\right) \\ \frac{1}{h}\left[-cos(x_{n-1}) + 2cos(x_n) - cos(x_{n+1})\right] \end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

Resolvendo analiticamente a equação diferencial tem-se que:

$$p(x) = \int\int -\frac{d^2p}{dx^2}dxdx = \int\int -cos(x)dxdx = \int(-sen(x)+c_1)dx = cos(x)+c_1x+c_2. \tag{4.37}$$

Utilizando que $p(0) = p(1) = 0$, tem-se que $c_2 = -1$ e $c_1 = 1 - cos(1)$. Logo, $p(x) = cos(x) + (1 - cos(x)).x - 1$.

Os gráficos da solução analítica, da solução aproximada pelo MDF e da solução aproximada pelo MEF se encontram representados nas Figuras 4.2, 4.3 e 4.4, respectivamente.

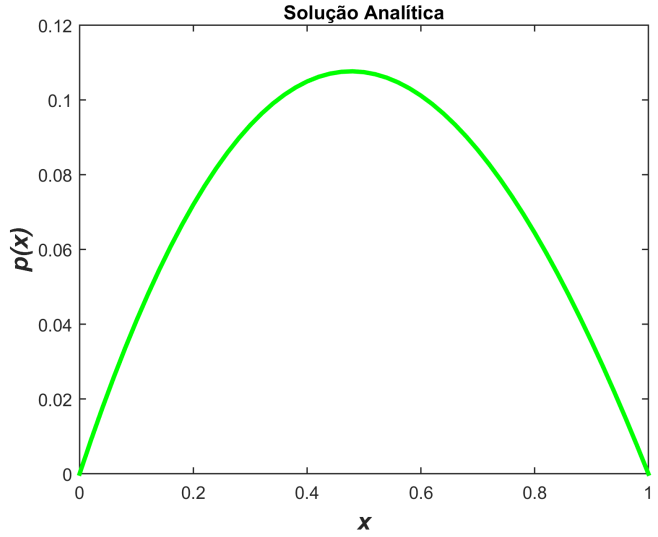


Figura 4.2: Solução analítica. Fonte: Elaborada pelo autor.

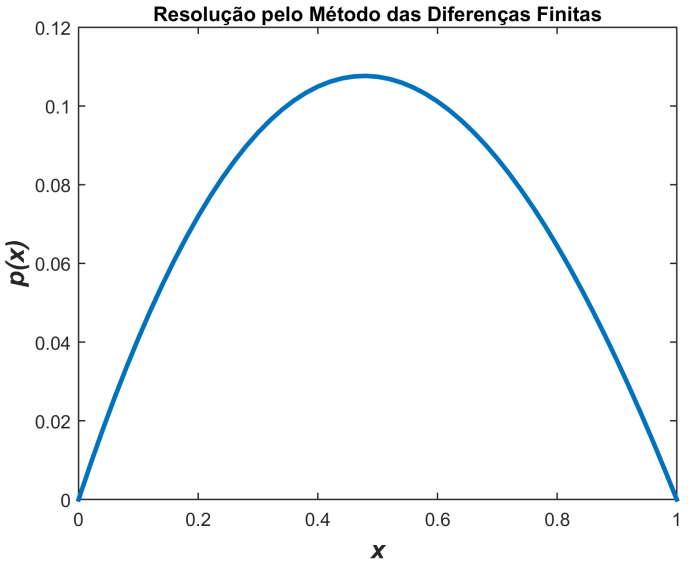


Figura 4.3: Aproximação da solução da equação (4.30) obtida pelo MDF. Fonte: Elaborada pelo autor.

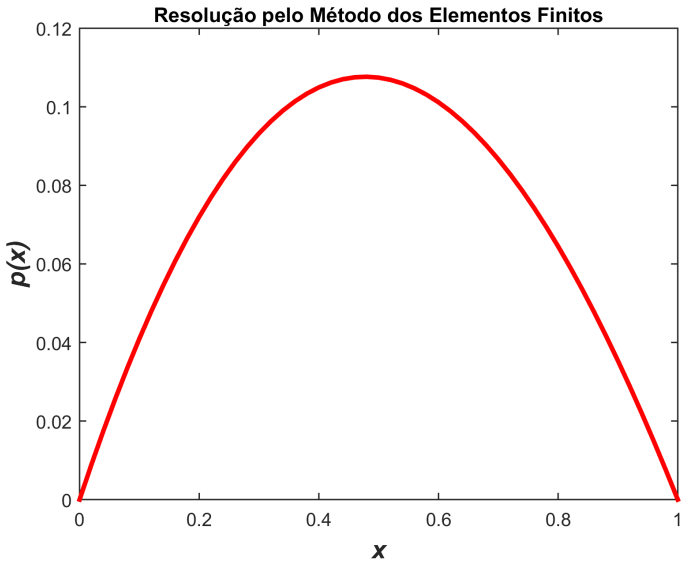


Figura 4.4: Aproximação da solução da equação (4.30) obtida pelo MEF. Fonte: Elaborada pelo autor.

O erro absoluto é calculado através da fórmula:

$$e = \max_{x_i \in P_h} \|\textit{solução analítica} - \textit{aproximação da solução}\|. \tag{4.38}$$

Os erros obtidos são:

$$e_{MDF} = 3,58839896583141.10^{-6} \text{ e } e_{MEF} = 5,55111512312578.10^{-16}, \tag{4.39}$$

sendo e_{MDF} o erro da aproximação pelo MDF e e_{MEF} o erro da aproximação pelo MEF.

4.2 Formulação Fraca do Problema Bidimensional

Esta é baseada nos trabalhos de Johnson (2012) e Ferreira (2017). Pretende-se obter uma aproximação para a solução da equação de Poisson bidimensional. Considere um domínio $\Omega \in \mathbb{R}^2$, aberto e limitado, e uma função f real, contínua por partes e limitada em Ω. Além disso, considere que o domínio do problema seja de Dirichlet homogênea:

$$\begin{cases} -\Delta p = f(x,y) & \text{em } \Omega \\ p(x,y) = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.40}$$

Considera-se então o seguinte espaço de funções:

$$V := \left\{ v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} v \textit{ é uma função contínua em } \Omega, \ \dfrac{\partial v}{\partial x} \textit{ e } \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \textit{são contínuas por partes em } \Omega \textit{ e } v = 0 \textit{ em } \partial\Omega. \end{array} \right\} \tag{4.41}$$

Aplicando o produto interno, descrito na anterior, no domínio Ω, tem-se que:

$$\int_\Omega -\Delta p \cdot v d\Omega = \int_\Omega f(x,y) v d\Omega, \ \forall v \in V. \tag{4.42}$$

Para resolver a integral do lado esquerdo em um domínio bidimensional, é necessária a utilização do teorema do divergente, descrito a seguir.

Teorema 4.2. *(Teorema do Divergente): Dado um conjunto $\Omega \in \mathbb{R}^2$ de fronteira suave e $A = (F_1, F_2)$ um campo definido em Ω. Então:*

$$\int_\Omega div(A)dxdy = \int_\Omega \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial\Omega} (F_1, F_2)\cdot(\eta_1, \eta_2)ds = \int_{\partial\Omega} A\cdot\eta ds, \tag{4.43}$$

em que $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ é o vetor unitário normal externo a $\partial\Omega$.

Para obter as hipóteses do Teorema 4.2, considere os campos $F_1 = \left(v\frac{\partial p}{\partial x}, 0\right)$ e $F_1 = \left(0, v\frac{\partial p}{\partial y}\right)$, em que $p, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} div(F_1) &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}; \\ div(F_2) &= \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y} + v\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Aplicando o Teorema 4.2, tem-se que:

$$\int_\Omega div(F_1)dxdy = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial p}{\partial x}\eta_1; \tag{4.45}$$

$$\int_\Omega div(F_2)dxdy = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial p}{\partial y}\eta_2. \tag{4.46}$$

Somando as equações (4.45) e (4.46), obtém-se:

$$\int_\Omega \left[div(F_1) + div(F_2)\right] dxdy = \int_{\partial\Omega} v\left(\frac{\partial p}{\partial x}\eta_1 + \frac{\partial p}{\partial y}\eta_2\right). \tag{4.47}$$

Como $div(F_1) + div(F_2) = \nabla v\cdot\nabla p + v\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)$, deduz-se que:

$$\int_\Omega \nabla v\nabla p dxdy + \int_\Omega v\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) dxdy = \int_{\partial\Omega} x\left(\frac{\partial p}{\partial x}\eta_1 + \frac{\partial p}{\partial y}\eta_2\right) dxdy, \tag{4.48}$$

Logo,

$$\int_\Omega \nabla v\nabla p dxdy + \int_\Omega v\Delta p dxdy = \int_{\partial\Omega} v\nabla p\cdot\eta \tag{4.49}$$

A expressão (4.49) é conhecida como Fórmula de Green.

Demonstra-se que como p é solução da equação (4.40), é possível obter o seguinte problema variacional:

(PV): Encontrar $p \in V$ tal que

$$a(p, v) = \int_\Omega fv dxdy, \forall v \in V; \tag{4.50}$$

em que,

$$a(p, v) = \int_\Omega \nabla p\cdot\nabla v dxdy = \int_\Omega \left[\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right] dxdy. \tag{4.51}$$

A equação (4.51) juntamente com uma fronteira de Dirichlet homogênea geram a formulação fraca da equação (4.40).

4.2.1 Método de Galerkin para o Problema Bidimensional

Para fundamentar o método de Galerkin bidimensional, é utilizada uma abordagem semelhante ao problema unidimensional, porém utilizando uma triangulação de Ω. Johnson (2012) considera V_h um subespaço de dimensão finita de V. Para facilitar os cálculos, assume-se que Ω é um polígono e $\partial\Omega$ é uma curva poligonal. Então, é possível criar uma triangulação de Ω, a partir de elementos não sobrepostos, ou seja, existe um conjunto finito de triângulos $T_h = \{K_1, K_2, \ldots, K_m\}$ tal que:

$$\begin{aligned} &\text{Para todo } \mathrm{K}_i, K_j \in T_h,\ i \neq j,\ K_i \cap K_j = \emptyset; \\ &\Omega = \bigcup_{K \in T_h} K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_m. \end{aligned} \tag{4.52}$$

tal que o vértice de um triângulo não encontra o lado de outro. Faz-se necessário definir o diâmetro de um conjunto e o espaço V_h.

Definição 4.7. *(Diâmetro de um conjunto)Sejam $K_i \in T_h$, e os pontos a e b, tais que $a, b \in K_i$. Define-se por diâmetro de um conjunto, denotado por $diam(K_i)$ como sendo a maior distância euclidiana para os pontos de K_i, isto é:*

$$diam(K_i) = \max_{a,b \in K_i} \|a - b\|_e = \max_{a,b \in K_i} \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}. \tag{4.53}$$

Definição 4.8. *Seja $h = \max_{K_i \in T_h} diam(K_i)$, em que $diam(k_i)$ representa o diâmetro de cada conjunto $K_i \in T_h$. Define-se V_h da seguinte maneira:*

$$V_h := \{v :\ v \text{ é contínua em } \Omega,\ v|_K \text{ é linear, para cada } K \in T_h,\ v = 0 \text{ em } \partial\Omega\} \tag{4.54}$$

Observação 4.3. *É claro que o espaço V_h é composto por todas as funções contínuas que são lineares em cada triângulo $K \in T_h$, além de assumirem valor 0 na fronteira de Ω.*

Seja $N = \{N_i\}$ o conjunto dos vértices dos triângulos $K \in T_h$. É possível então definir as funções lineares de V_h por:

$$\varphi_j(N_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, i, j = 1, \ldots, n. \tag{4.55}$$

Como no caso unidimensional, V_h é um espaço vetorial que possui como base o conjunto $\varphi = \{\varphi_j,\ j = 1, \ldots, n\}$, cujos elementos são descritos posteriormente. Uma representação gráfica das funções de base encontra-se representada na Figura 4.9. Por serem a base do espaço V_h, para toda função $v \in V_h$ tem-se:

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} v(N_j)\varphi_j(x),\ \text{para todo } x \in \Omega \cup \partial\Omega. \tag{4.56}$$

É possível então, formular uma restrição do problema variacional (PV) ao espaço V_h da seguinte maneira:

(PV_h) encontrar $p_h \in V_h$ tal que

$$a(p_h, v) = \int_\Omega f v dx dy,\ \text{para todo } v \in V_h. \tag{4.57}$$

De maneira semelhante à da anterior, obtém-se o seguinte sistema linear:

$$A\xi = b \tag{4.58}$$

em que $A = (a_{ij}) = a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$; $\xi = (\xi_i) = u_h(N_i)$; $b_i = (b_i) = \int_\Omega f\varphi_i dx dy$. Além disso, como na anterior, a matriz A é simétrica e definida positiva. Assim, pode-se afirmar que, sendo a matriz A não-singular, o sistema $A\xi = b$ admite uma única solução. É importante também apontar que, no caso bidimensional, a matriz A não é tridiagonal. Isso se deve à iteração entre elementos laterais e a numeração dos vértices. A numeração citada é discutida na próxima subseção.

4.2.2 Construção das Funções da Base de V_h.

Considerando o subespaço $V_h \subset V$. Seja Ω_h uma aproximação poligonal do domínio Ω. Considerando $T_h = \{K_1, \ldots, K_m\}$ uma triangulação de Ω_h, com m elementos, sendo $K_{\tilde{M}}$ o conjunto dos triângulos cujas arestas não pertencem à fronteira de Ω_h, definidos como triângulos interiores. A seguir, são apresentadas algumas informações relevantes para obtenção das funções de base:

– Denota-se a enumeração dos elementos a uma bijeção que associa cada elemento à um número natural do conjunto $\{1, \ldots, m\}$. A Figura 4.5 apresenta a representação gráfica da enumeração global de elementos;

Notação k_i é o i-ésimo elemento da malha.

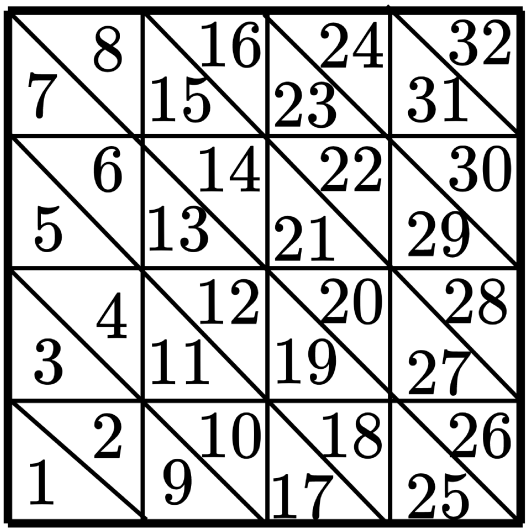


Figura 4.5: Exemplo de enumeração de triângulos no MEF. Fonte: Elaborada pelo autor.

– O subconjunto dos vértices interiores da malha é denotado por uma bijeção que associa cada vértice interior à um elemento do conjunto $\{1, \ldots, \tilde{M}\}$. Considerando uma malha discretizada em n_y subintervalos no sentido vertical e n_x subintervalos no sentido horizontal. A representação gráfica da enumeração dos vértices interiores encontra-se na Figura 4.6;

Notação: N_i é um vértice interior da malha.

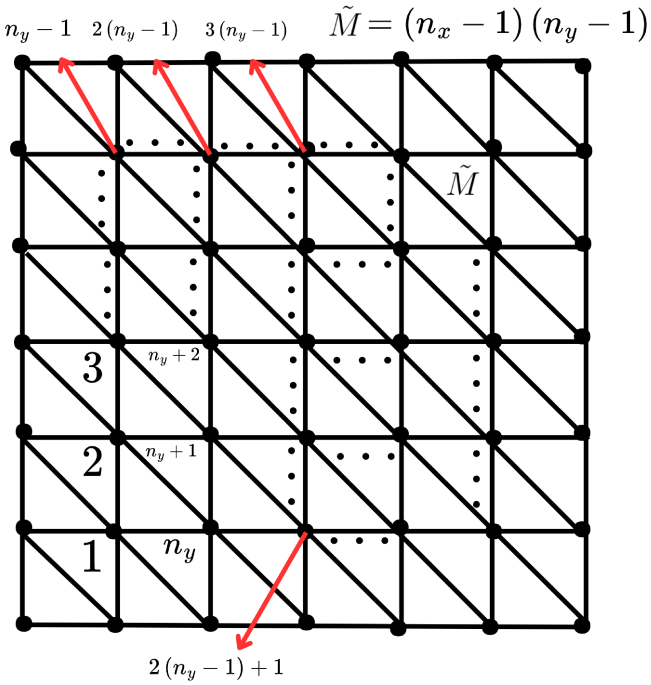


Figura 4.6: Enumeração dos vértices interiores do domínio. Fonte: Elaborada pelo autor.

– A enumeração global dos vértices é denotada por uma bijeção que associa cada vértice à um elemento do conjunto $\{1, \ldots, \tilde{M}, \ldots, M\}$, respeitando a numeração dos vértices interiores. Isso implica que os vértices da fronteira começaram a ser enumerados a partir do termo $\tilde{M} + 1$, como pode ser observado na Figura 4.7.

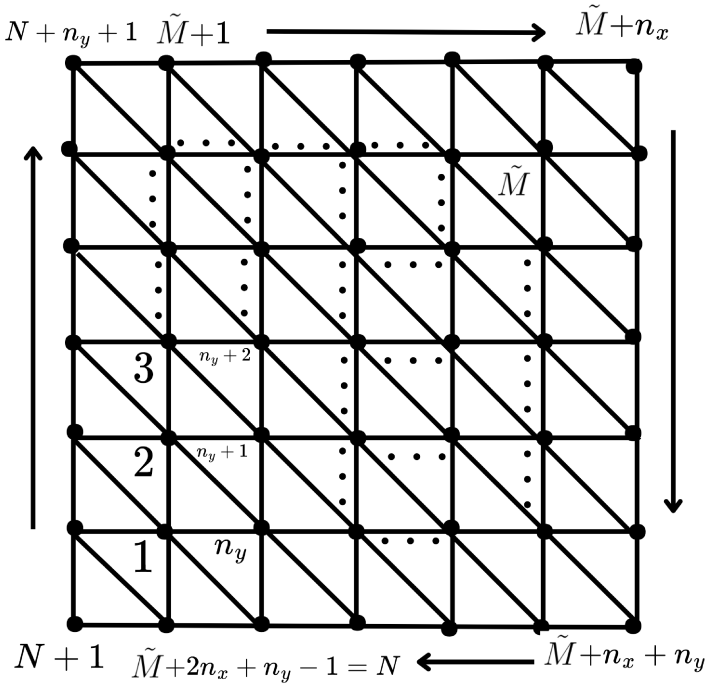


Figura 4.7: Enumeração global dos vértices do domínio com $\tilde{M} = (n_x - 1)(n_y - 1)$. Fonte: Elaborada pelo autor.

– A enumeração local dos vértices de cada elemento da malha é uma bijeção que:

1. associa cada vértice de um triângulo $K_i \in T_h$ à um elemento do conjunto $\{1, 2, 3\}$;
2. percorre o elemento K_i em sentido anti-horário, isto é, ao denotarmos um vértice por 1, a numeração dos próximos deve seguir o sentido anti-horário. Denota-se o vértice de índice $s \in \{1, 2, 3\}$ do elemento triangular K_i por $(x_s^{K_i}, y_s^{K_i})$;

   A representação gráfica da numeração local dos vértices de um elemento pode ser observada na Figura 4.8.

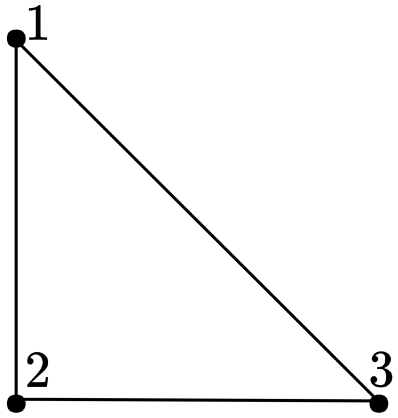


Figura 4.8: Exemplo de enumeração local dos vértices de um elemento. Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo, o gráfico de φ_j no elemento K_i é:

$$\varphi_j^{K_i} = \begin{cases} plano \neq 0, & \text{se } K_i \text{ tem o vértice } N_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Uma representação gráfica de uma função φ_j qualquer encontra-se na Figura 4.9.

É importante frisar que, como na anterior, as funções φ_j formam uma base B do espaço V_h. Além disso, as únicas funções de B que assumem valores diferentes de zero em um elemento triangular K_i são as funções associadas aos seus vértices, isto é, se N_j é vértice de K_i, então $\varphi_i(N_i) \neq 0$ e $\varphi_j(N_i) = 0, \forall j \neq i$. Isso implica que, para cada elemento $K_i \in T_h$, podem existir no máximo três funções associadas, uma para cada um de seus vértices.

Para determinar cada uma das funções φ_j em um ponto interior da malha, basta utilizar alguns argumentos de geometria analítica apresentados a seguir, como dispostos em Winterle e Steinbruch (2000). Em suma, deseja-se compreender o que acontece com um ponto $(x, y) \in K_i$, se o elemento K_i está associado à uma função φ_j.

Em termos de notação, definem-se os vértices do triângulo K_i como sendo $(x_1^{K_i}, y_1^{K_i})$, $(x_2^{K_i}, y_2^{K_i})$ e $(x_3^{K_i}, y_3^{K_i})$, obedecendo o ordenamento no sentido anti-horário, citado anteriormente. Supõe-se que a função φ_j é associada ao vértice 1 de K_i.

Logo, $\varphi_j(x_1, y_1) = 1$, $\varphi_j(x_2, y_2) = \varphi_j(x_3, y_3) = 0$. Portanto, para algum ponto $(x, y) \in K_i$, o ponto $(x, y, \varphi_j(x, y))$ é coplanar aos pontos $(x_1, y_1, 1)$, $(x_2, y_2, 0)$ e $(x_3, y_3, 0)$. Isso implica que, seu produto misto deve ser igual a zero.

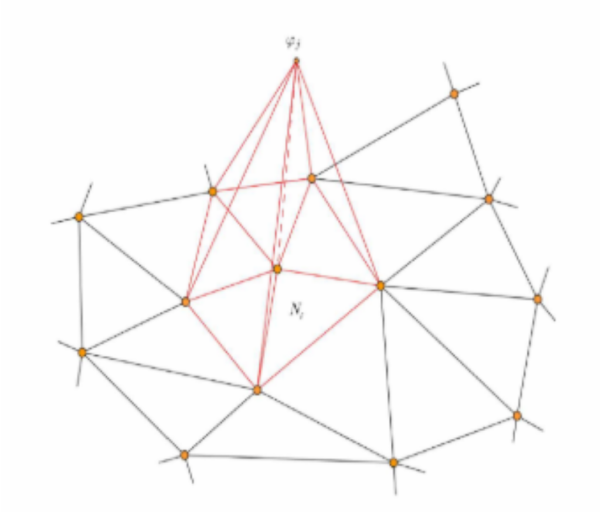


Figura 4.9: Exemplo de função φ_j em um elemento. Fonte: (FERREIRA, 2017).

Para calcular o produto misto, é necessário calcular os 3 vetores que ligam os pontos anteriormente citados ao ponto (x, y). Tem-se que:

$$\begin{aligned}(x, y, \varphi_j(x, y)) - (x_1, y_1, 1) &= (x - x_1, y - y_1, \varphi_j(x, y) - 1);\\ (x, y, \varphi_j(x, y)) - (x_2, y_2, 0) &= (x - x_2, y - y_2, \varphi_j(x, y));\\ (x, y, \varphi_j(x, y)) - (x_3, y_3, 0) &= (x - x_3, y - y_3, \varphi_j(x, y)).\end{aligned} \tag{4.59}$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & \varphi_j(x, y) - 1 \\ x - x_2 & y - y_2 & \varphi_j(x, y) \\ x - x_3 & y - y_3 & \varphi_j(x, y) \end{vmatrix} = 0. \tag{4.60}$$

Resolvendo o determinante, obtém-se que:

$$\begin{aligned}&(x - x_1)(y - y_2)\varphi_j(x, y) + (x - x_3)(y - y_1)\varphi_j(x, y) + (x - x_2)(y - y_3)(\varphi_j(x, y) - 1)\\ &-(x - x_3)(y - y_2)(\varphi_j(x, y)) - (x - x_1)(y - y_3)\varphi_j(x, y) - (x - x_2)(y - y_1)\varphi_j = 0\\ &\varphi_j(x, y) \cdot [(x - x_1)(y - y_2) + (x - x_2)(y - y_3) + (x - x_3)(y - y_1)\\ &-(x - x_3)(y - y_2) - (x - x_2)(y - y_1) - (x - x_1)(y - y_3)]\\ &+ [-(x - x_2)(y - y_3) + (x - x_3)(y - y_2)] = 0.\end{aligned} \tag{4.61}$$

Isolando $\varphi_j(x, y)$ na equação:

$$\varphi_j(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x - x_3 & y - y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x - x_3 & y - y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x - x_3 & y - y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y1 \\ x - x_2 & y - y2 \end{vmatrix}}. \tag{4.62}$$

Utilizando as propriedades de determinante, é possível obter uma forma mais simples para a função $\varphi_j(x, y)$. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 \\ x-x_3 & y-y_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 \\ x & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & y \\ x & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{4.63}$$

Repetindo o processo para os outros determinantes, é possível encontrar a seguinte função:

$$\varphi_j(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2^{K_i} & y_2^{K_i} \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1^{K_i} & y_1^{K_i} \\ 1 & x_2^{K_i} & y_2^{K_i} \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \end{vmatrix}}. \tag{4.64}$$

Segundo Winterle e Steinbruch (2000), sabe-se que o determinante da matriz presente no denominador da função equivale ao dobro da área do triângulo K_i, cujos vértices são determinados por $(x_1^{K_i}, y_1^{K_i})$, $(x_2^{K_i}, y_2^{K_i})$ e $(x_3^{K_i}, y_3^{K_i})$. Logo, é possível reescrever a função $\varphi_j(x,y)$ como:

$$\varphi_j(x,y) = \frac{1}{2A_{K_i}} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2^{K_i} & y_2^{K_i} \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \end{vmatrix}. \tag{4.65}$$

Para encontrar as funções $\varphi_j(x,y)$ relacionadas aos outros vértices do elemento K_i, basta substituir os índices dos vértices pelo número do próximo vértice no sentido horário, ou seja:

$$\begin{aligned} &Vértice\ 3 \longrightarrow Vértice\ 2; \\ &Vértice\ 2 \longrightarrow Vértice\ 1; \\ &Vértice\ 1 \longrightarrow Vértice\ 3. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Aplicando esse processo aos três vértices do elemento K_i, é possível obter a expressão geral da função $\varphi_j(x,y)$ no triângulo:

$$\varphi_j(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2A_{K_i}} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2^{K_i} & y_2^{K_i} \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \end{vmatrix}, & \text{se } (x,y) \in K_i \text{ e } \varphi_j \text{ é associada ao vértice 1 de } K_i \\ \dfrac{1}{2A_{K_i}} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \\ 1 & x_1^{K_i} & y_1^{K_i} \end{vmatrix}, & \text{se } (x,y) \in K_i \text{ e } \varphi_j \text{ é associada ao vértice 2 de } K_i \\ \dfrac{1}{2A_{K_i}} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1^{K_i} & y_1^{K_i} \\ 1 & x_2^{K_i} & y_2^{K_i} \end{vmatrix}, & \text{se } (x,y) \in K_i \text{ e } \varphi_j \text{ é associada ao vértice 3 de } K_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} . \tag{4.67}$$

Na próxima seção, é apresentado um exemplo de utilização do MEF para resolução de uma equação de Poisson bidimensional.

4.2.3 Exemplo Bidimensional com Domínio Regular

Considere o domínio $\{\Omega \in \mathbb{R}^2 : \Omega = [0,\ 5] \times [0,\ 5]\}$ com n pontos interiores. Tem-se como objetivo aproximar a resolução da seguinte equação de Poisson:

$$\begin{cases} -\Delta p = 1 & \text{em } \Omega \\ p(x,y) = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} . \tag{4.68}$$

Primeiramente, considere o espaço V, definido por:

$$V = \left\{ v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{v é uma função contínua em } \Omega,\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \text{ e } \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \text{são contínuas por partes em } \Omega \text{ e } v = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{array} \right\}.$$

Aplicando o produto interno tem-se,

$$\int_\Omega -\Delta p.v d\Omega = \int_\Omega 1 v d\Omega$$
$$\int_\Omega -\Delta p.v d\Omega = \int_\Omega v d\Omega.$$

Pelo Teorema do Divergente, obtém-se

$$\int_\Omega \nabla p.\nabla v dx dy = \int_\Omega v dx dy.$$

Sejam $T_h = \{K_i,\ i = 1, \ldots, m\}$ uma triangulação de Ω e $N = \{N_i\}$ o conjunto dos vértices dos triângulos que compõem T_h. Definem-se as funções $\varphi_j(N_i)$ por:

$$\varphi_j(N_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} ;\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Seja V_h o subespaço vetorial de V definido por:

$$V_h := \{v \in V : \ v \text{ é contínua em } \Omega, \ v|_K \text{ é linear}, \ \forall K \in T_h, \ v = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Considere a base $B = \{\varphi_j, j = 1, \ldots, n\}$. Logo, para toda função $v \in V_h$:

$$v(x,y) = \sum_{j=1}^{n} v(N_j)\varphi_j(x,y), \ \forall (x,y) \in \Omega \cup \partial\Omega.$$

Formulando o (PV_h):

$$a(p_h, v) = \int_\Omega v dxdy$$
$$\int_\Omega \nabla p_h . \nabla v dxdy = \int_\Omega v dxdy.$$

Como $p_h \in V_h$, é possível escrevê-lo como uma combinação linear de elementos da base, isto é:

$$p_h(x,y) = \sum_{j=1}^{n} p_h(N_j)\varphi_j(x,y).$$

Logo

$$\nabla p_h = \sum_{j=1}^{n} p_h(N_j).\nabla\varphi_j(x,y). \tag{4.69}$$

Considerando a função $v(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x,y)$, tem-se que:

$$\nabla v(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \nabla\varphi_i(x,y). \tag{4.70}$$

Tem-se ainda que:

$$\begin{aligned} \int_\Omega p_h(N_j) v dxdy &= \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} p_h(N_j).\nabla\varphi_j(x,y). \sum_{i=1}^{n} \nabla\varphi_j(x,y) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_h(N_j). \int_\Omega \nabla\varphi_i.\nabla\varphi_j dxdy. \end{aligned} \tag{4.71}$$

Substituindo (4.69), (4.70) e (4.71) no (PV_h):

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_h(N_j). \int_\Omega \nabla\varphi_i.\nabla\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \nabla\varphi_i(x,y) dxdy.$$

Na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & a(\varphi_1,\varphi_2) & \ldots & a(\varphi_1,\varphi_n) \\ a(\varphi_2,\varphi_1) & a(\varphi_2,\varphi_2) & \ldots & a(\varphi_2,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_n,\varphi_1) & a(\varphi_n,\varphi_2) & \ldots & a(\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_h(N_1) \\ p_h(N_2) \\ \vdots \\ p_h(N_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_\Omega \varphi_1 dxdy \\ \int_\Omega \varphi_2 dxdy \\ \vdots \\ \int_\Omega \varphi_n dxdy \end{pmatrix}. \tag{4.72}$$

Os calculos dos valores de $a(\varphi_i, \varphi_j)$ para o elemento padrão estão presentes no *Apêndice A*. A transformação do elemento padrão para o elemento real, bem como um exemplo de utilização do mesmo encontram-se nos Apêndices *B* e *C*. O gráfico apresentado na Figura 4.10 é a solução do sistema (4.72), que tem comportamento semelhante ao gráfico da Figura 3.6.

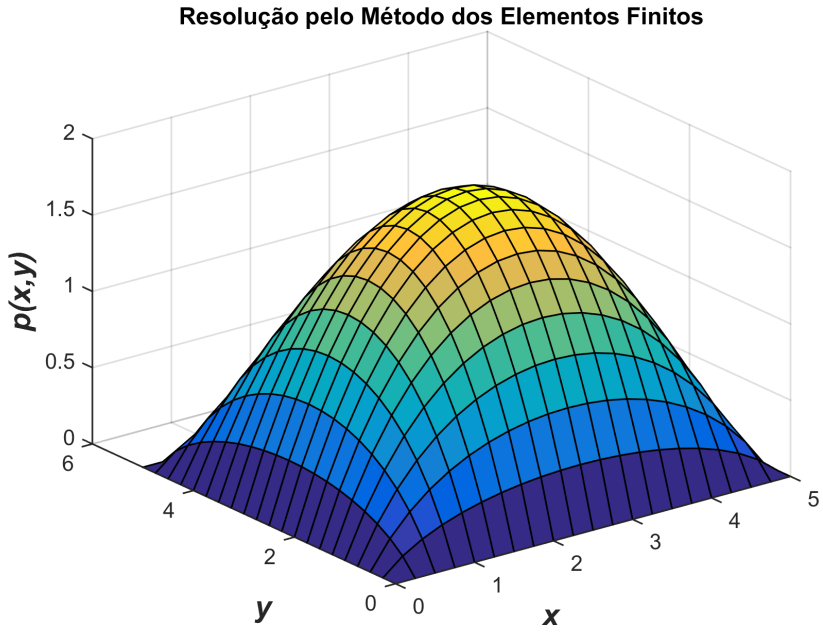


Figura 4.10: Aproximação da solução da equação (4.68) pelo MEF. Fonte: Elaborada pelo autor.

O valor máximo obtido na aproximação pelo MEF é de $1,838167730834756$. Já na aproximação pelo MDF, o máximo obtido foi de $1,841203639840018$, os valores estão próximas, o que aponta que as aproximações da solução estão compatíveis.

No próximo capítulo, são apresentadas as resoluções dos modelos da equação da onda acústica com parâmetro determinístico, fuzzy do tipo 1 e do tipo 2 intervalar.

Capítulo 5

Equação da Onda Acústica com Parâmetro Escalar, Fuzzy do Tipo 1 e do Tipo 2 Intervalar

Como mencionado na introdução deste trabalho, uma abordagem utilizada para modelagem do fluido no interior da cóclea é a equação da onda. Neste capítulo são apresentadas as aproximações das resoluções de diversos modelos matemáticos, tanto unidimensionais quanto bidimensionais. O fluido escolhido para a construção dos modelos é o ar e as fronteiras delimitadas são baseadas nas dimensões da escala vestibular.

Vale destacar que os modelos apresentados evoluíram ao longo do desenvolvimento do trabalho. Seguindo a ordem de contrução e aperfeiçoamento dos modelos, inicialmente é proposto um modelo unidimensional, baseado em Elliott *et al.* (2013), para a equação da onda acústica com parâmetro escalar e com parâmetro fuzzy do tipo 1. À partir deste, é elaboarado o modelo unidimensional com parâmetro fuzzy do tipo 2 intervalar.

Com base nos casos unidimensionais, são propostos os modelos bidimensionais com domínio regular e parâmetros fuzzy do tipo 1 e tipo 2 intervalar, utilizando o MEF como técnica para a aproximação da solução. Por fim, são propostos os modelos cujo domínio é irregular, utilizando as medidas descritas em Hong e Horii (2022), com o mesmo método.

Para fins de comparação entre os diferentes modelos apresentados, são mantidos os critérios de verificação utilizados.

5.1 Modelos Unidimensionais

Um modelo clássico da equação da onda acústica unidimensional é dado pelo seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ p(x,t)|_{\partial\Omega} = f(x,t) \\ p(x,0) = p_0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(x,t) = g(x,t) \end{cases}, \tag{5.1}$$

em que $p(x,t)$ é a pressão acústica do fluido no ponto x e tempo t, $\partial\Omega$ denomina a fronteira do domínio e $p(x,0) = p_0$ representa a condição inicial do fluido.

Para modelar o problema são fixadas as fronteiras como sendo de Dirichlet homogêneas e o domínio $\Omega = [0,\ 0,035]$, que corresponde o tamanho da cóclea em metros (m). Supondo

que a condição inicial do PVI é um pico de 60 decibéis (Db), que segundo Lacerda *et al.* (2005) equivale ao ruído de uma conversação normal, no ponto médio $\overline{x}$ representada pela função:

$$p_0 = p(x,0) = 60 \cdot e^{\frac{(x-\overline{x})^2}{2\cdot\sigma^2}}; \tag{5.2}$$

em que $\overline{x} = 0,0175\ m$ é a posição do centro do pico de pressão e $\sigma = 0,0005$ é a largura da função.

Além disso, é definido que $\dfrac{\partial p}{\partial t}(x,0) = 0$. Logo, o PVI à ser solucionado é dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ p(x,t)|_{\partial\Omega} = 0 \\ p(x,0) = p_0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}. \tag{5.3}$$

A seguir, o MDF é empregado para determinar a aproximação da solução do PVI (5.3).

5.1.1 Aproximação da Solução do Problema Unidimensional pelo Método das Diferenças Finitas

Considere o domínio $\Omega = [0,\ 0,035]$, discretizado em $n+1$ pontos igualmente espaçados, dados por $x_0 = 0, \ldots, x_n = 0,035$, e espaçamento dado por:

$$\Delta x = \frac{x_n - x_0}{n+1} = \frac{0,035}{n+1}. \tag{5.4}$$

Pelo método das diferenças finitas, tem-se que:

$$\frac{p_{i+1}^k - 2p_i^k + p_{i-1}^k}{\Delta x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{p_i^{k+1} - 2p_i^k + p_i^{k-1}}{\Delta t^2}. \tag{5.5}$$

Explicitando p_i^{k+1} e definindo $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ obtém-se:

$$p_i^{k+1} = c^2\lambda^2(p_{i+1}^k - 2p_i^k + p_{i-1}^k) + 2p_i^k - p_i^{k-1}. \tag{5.6}$$

Esse método é chamado de método explícito, ou seja, é o método obtido explicitando o termo p_i^{k+1} na formulação anterior. Na forma matricial tem-se que:

$$p_i^{k+1} = c^2\lambda^2 p_{i+1}^k + (2 - 2c^2\lambda^2)p_i^k + c^2\lambda^2 p_{i-1}^k - p_i^{k-1}. \tag{5.7}$$

Logo,

$$P_{k+1} = A \cdot P_k - P_{k-1}, \tag{5.8}$$

em que,

$$A = \begin{pmatrix} 2-2c^2\lambda^2 & c^2\lambda^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ c^2\lambda^2 & 2-2c^2\lambda^2 & c^2\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & c^2\lambda^2 & 2-2c^2\lambda^2 & c^2\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c^2\lambda^2 & 2-2c^2\lambda^2 \end{pmatrix}; \tag{5.9}$$

$$P_k = \begin{pmatrix} p_0^k \\ p_1^k \\ \vdots \\ p_n^k \end{pmatrix}; \tag{5.10}$$

$$P_{k-1} = \begin{pmatrix} p_0^{k-1} \\ p_1^{k-1} \\ \vdots \\ p_n^{k-1} \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Faz-se necessário encontrar uma aproximação para os valores de $p_i^1,\ i = 0, 1, \ldots, n$, possibilitando iniciar o processo iterativo descrito anteriormente. Para isso, utiliza-se o desenvolvimento da série de Taylor na variável t. Para t_1 tem-se que:

$$p(x_i, t_1) = p(x_i, \Delta t) = p(x_i, 0) + \Delta t \frac{\partial p}{\partial t}(x_i, 0) + \left(\frac{\Delta t^2}{2}\right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x_i, 0) + O(\Delta t^3); \tag{5.12}$$

em que $O(\Delta t^3)$ é considerado o erro da solução.

Para calcular o valor de $\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, 0)$, basta utilizar a equação da onda acústica definida em (5.3). Além disso, $\dfrac{\partial p}{\partial t}(x_i, 0) = 0$ Logo,

$$p(x_i, t_1) = p(x_i, 0) + \left(\frac{\Delta t^2}{2}\right) \left(c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_i, 0)\right). \tag{5.13}$$

Calculando $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_i, 0)$, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_i, 0) = 60 \left[\frac{1}{\sigma^2} \cdot e^{\dfrac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}} + \frac{(x-\overline{x})^2}{\sigma^4} \cdot e^{\dfrac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}}\right]. \tag{5.14}$$

Segundo LeVeque (1992), a estabilidade da solução é obtida quando:

$$c \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1. \tag{5.15}$$

5.1.2 Aproximação da Solução do Modelo da Equação da Onda Unidimensional com Parâmetro Escalar

Tradicionalmente, trata-se a velocidade do som no ar como uma constante física. Segundo Kinsler *et al.* (2000), a velocidade do som no ar é de aproximadamente 343 m/s.

Considerando $c_0 = 343\ m/s$ e a condição inicial dada em (5.2), deseja-se aproximar a seguinte equação:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c_0^2} \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ p(x, t)|_{\partial\Omega} = 0 \\ p(x, 0) = p_0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases}. \tag{5.16}$$

Para iniciar a aproximação do problema, utiliza-se o espaçamento de $\Delta x = 0,00001m$ e para o tempo, $\Delta t = 0,00000001s$. Observe que as condições de estabilidade são alcançadas, visto que:

$$\begin{aligned} c_0 \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} &= 343 \cdot \frac{0,00000001}{0,00001} \\ &= 0,343 < 1. \end{aligned}$$

A condição inicial do problema é apresentada na Figura 5.1.

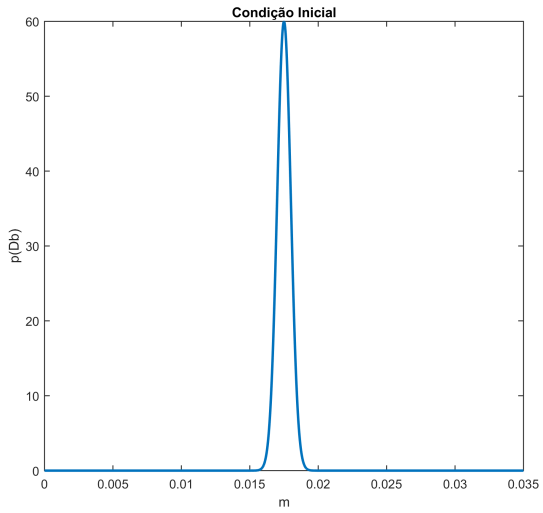


Figura 5.1: Condições iniciais do PVI. Fonte: Elaborada pelo autor.

A superfície gerada pelas aproximações das soluções do PVI a cada partição de tempo encontra-se na Figura 5.2.

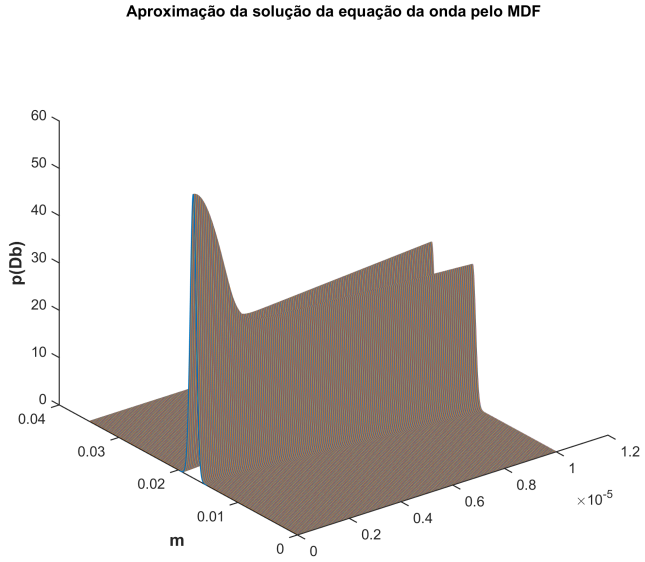


Figura 5.2: Superfície gerada pelas aproximações da equação a cada partição do tempo. Fonte: Elaborada pelo autor.

Utilizando a aproximação pelo MDF, o resultado obtido após 1001 iterações, no tempo $t = 0,00001s$, está representado graficamente pela Figura 5.3.

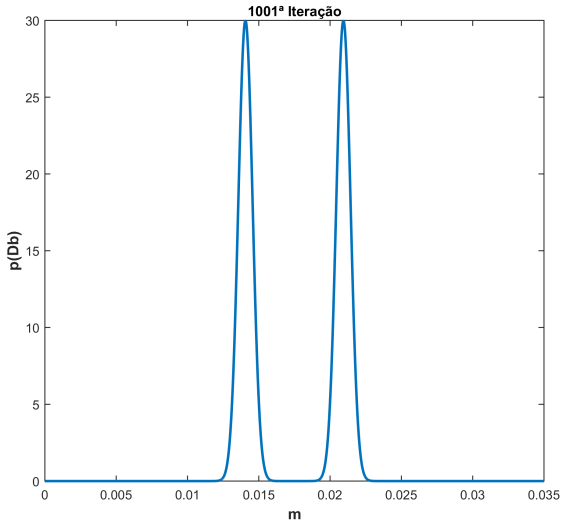


Figura 5.3: Aproximação da solução do PVI para a equação da onda determinística. Fonte: Elaborada pelo autor.

Para fins de estudo do comportamento temporal da função, é selecionado o ponto $\overline{x} = 0,0175\ m$, que pertence ao interior do domínio. São armazenados os valores de $p(\overline{x}, t)$ para todas as iterações realizadas. O gráfico que representa a relação entre os valores da pressão e o tempo no ponto fixado encontra-se na Figura 5.4.

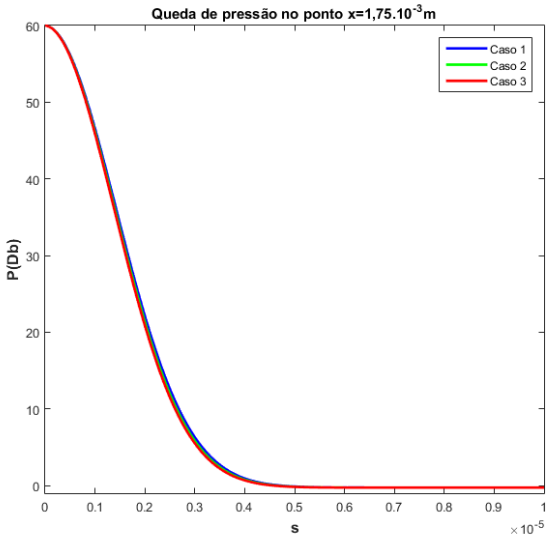


Figura 5.4: Queda de pressão no ponto $\overline{x}$ em função do tempo. Fonte: Elaborada pelo autor.

O estudo desse comportamento é importante para entender a padronização dos modelos posteriores. Esta aproximação da solução é considerada como *baseline* do trabalho, sendo a velocidade do som um parâmetro constante.

Na próxima seção, a velocidade do som é tratada como um parâmetro fuzzy do tipo 1 com os valores do SBRF obtidos no Capítulo 2.

5.1.3 Aproximação da Solução do Modelo com Parâmetro Fuzzy do Tipo 1

O modelo descrito nesta seção foi apresentado na II Reunião Mineira de Matemática Silva *et al.* (2023).

Considerando o domínio $\Omega = [0,\ 0,035]$ em metros (m), as condições de fronteira como sendo de Dirichlet homogêneas, $p(x,t)|_{\partial\Omega} = 0$ e $\dfrac{\partial p}{\partial t}(x,0) = 0$. Sejam a condição inicial descrita na expressão (5.2) e a velocidade do som $c_{T1} = c_{T1}(\theta, u)$ como um parâmetro fuzzy do tipo 1, que depende da temperatura θ e da umidade absoluta u. O valor de c_{T1} é a saída do SBRF do tipo 1 descrito na Seção 2.4, obtém-se o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c_{T1}^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ p(x,t)|_{\partial\Omega} = 0 \\ p(x,0) = p_0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}. \tag{5.17}$$

São calculadas as saídas do SBRF do tipo 1 para 3 casos:

- **1º Caso**: Uma pessoa com hipotermia moderada em um ambiente completamente seco. Para isso, são utilizadas os valores de entrada $\theta_1 = 29°C$ e $u_1 = 0\%$, obtendo-se a velocidade:
$$c_{T1}(29, 0) = 349,0389\ m/s;$$

- **2º Caso**: Uma pessoa com temperatura normal em um ambiente com umidade média. Para isso, são utilizadas os valores de entrada $\theta_2 = 36,5°C$ e $u_2 = 3\%$, obtendo-se a velocidade:
$$c_{T1}(36,5\ ,\ 3) = 354,9644\ m/s;$$

- **3º Caso**: Uma pessoa com febre extrema em um ambiente com alta umidade. Para isso, são utilizadas os valores de entrada $\theta_3 = 41.5°C$ e $u_3 = 5\%$, obtendo-se a velocidade :
$$c_{T1}(41,5\ ,\ 5) = 358,9380\ m/s.$$

Os valores dos passos são $\Delta x = 0.00001\ m$ e $\Delta t = 0.00000001\ s$. Definidos os incrementos, é possível verificar a condição de estabilidade.

$$c_{T1}.\frac{\Delta t}{\Delta x} = c_{T1}.0,001.$$

Como os valores obtidos para o parâmetro c_{T1} variam entre $349,0389$ e $358,9380$, nos casos estudados, então as condições de estabilidade são atingidas, isto é, são menores do que 1.

Os resultados do PVI obtidos da $1001^{\underline{a}}$ iteração para cada caso estão representados nos gráficos das Figuras 5.5, 5.6 e 5.7, respectivamente.

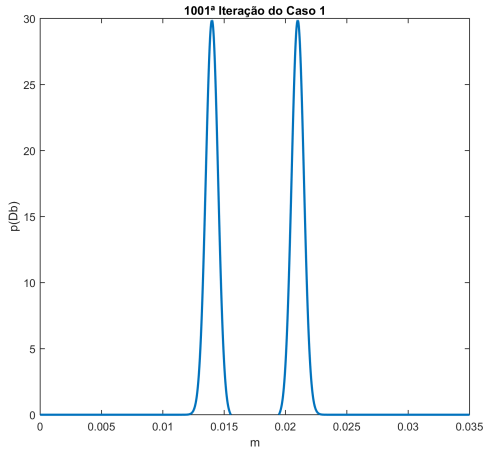


Figura 5.5: Aprovimação da solução do PVI na condição de hipotermia e umidade baixa. Fonte: Elaborada pelo autor.

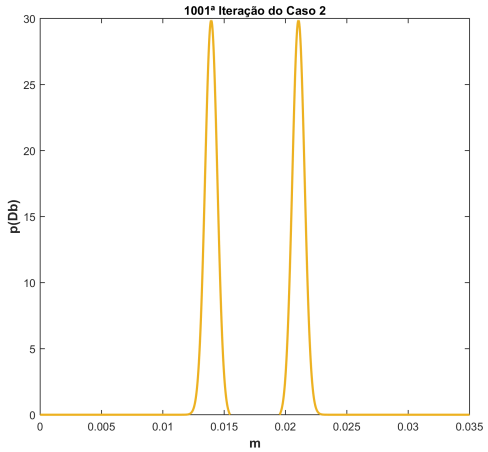


Figura 5.6: Aprovimação da solução do PVI na condição de tempertura normal e umidade média. Fonte: Elaborada pelo autor.

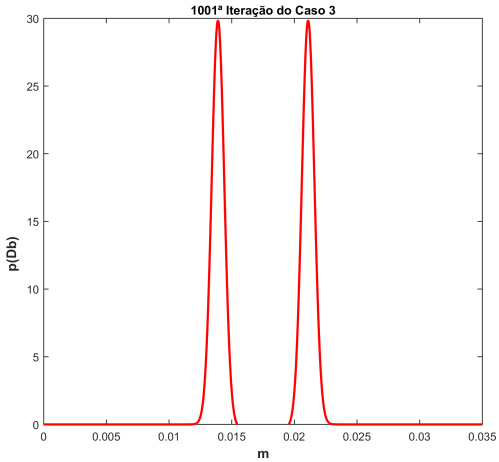


Figura 5.7: Aprovimação da solução do PVI na condição de febre e umidade alta. Fonte: Elaborada pelo autor.

A representação gráfica da queda de pressão no ponto $\overline{x} = 0,0175$ encontra-se na Figura 5.8.

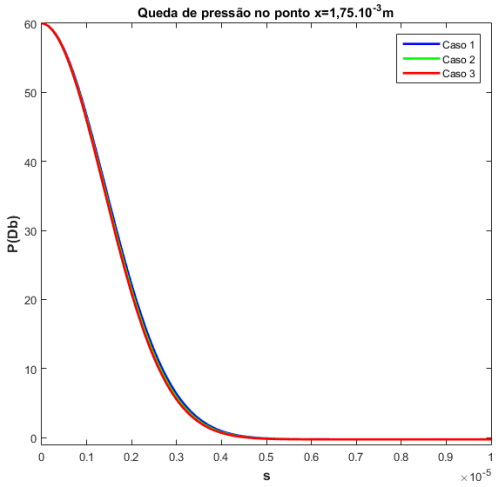


Figura 5.8: Queda de pressão dos 3 casos apresentados. Fonte: Elaborada pelo autor.

Para verificar a diferença entre as aproximações obtidas, são armazenados os valores da pressão acústica, para cada caso apresentado, no ponto fixo $\overline{x} = 0,0175$. Após isso, é calculado o valor absoluto das diferenças entre as soluções, duas a duas. A representação gráfica das diferenças encontradas em função do tempo é apresentada na Figura 5.9.

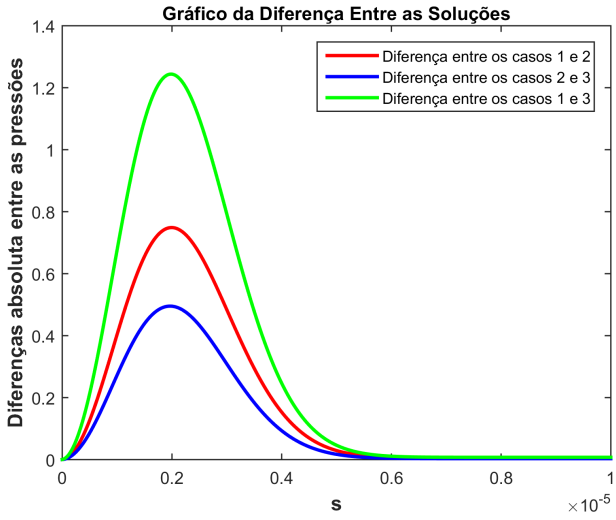


Figura 5.9: Gráfico das diferenças entre as soluções nos 3 casos propostos. Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que, pela Figura 5.9, a temperatura e a umidade influenciam na solução do problema. Um fato importante à ser destacado é de que, pela diferença entre os dados de saída do SBRF dos casos 1 e 3 ser maior, o valor absoluto das diferenças de pressão é maior. A diferença das saída do SBRF entre os casos 1 e 2 é maior do que a diferença entre os casos 2 e 3, tendo período menor na primeira diferença.

Na próxima seção, é construído um modelo com parâmetro fuzzy do tipo 2 intervalar, considerando os três casos anteriores, visando a comparação entre as aproximações das soluções obtidas a partir dos conjuntos fuzzy do tipo 1 e do tipo 2 intervalar.

5.1.4 Aproximação da Solução do Modelo com Parâmetro Fuzzy do Tipo 2 Intervalar

Para o modelo da equação da onda acústica utilizando parâmetro fuzzy do tipo 2, utilizam-se as mesmas condições do modelo anterior, diferenciando-se apenas o parâmetro da velocidade do som, que é considerado como a saída do SBRF do tipo 2 intervalar, construído na Seção 2.5. Esse parâmetro é definido por $c_{T2} = c_{T2}(\theta, u)$, que depende da temperatura θ e da umidade absoluta u. Logo, o PVI obtido na modelagem é:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c_{T2}^2} \cdot \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ p(x,t)|_{\partial\Omega} = 0 \\ p(x,0) = p_0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases} . \tag{5.18}$$

Para obter as saídas da velocidade do som, utilizou-se o SBRF do tipo 2 intervalar descrito na Seção 2.5. A saída c_{T2} é calculada a partir dos 3 casos vistos anteriormente. Além disso, um SBRF do tipo 2 intervalar possui 3 saídas, sendo uma saída defuzzificada (c_{defuz}), uma saída inferior (c_{inf}) e uma superior (c_{sup}), logo, são calculadas 9 velocidades do som. Os valores de saída do SBRF do tipo 2 intervalar obtidos são:

- **1º Caso**: Uma pessoa com hipotermia moderada em um ambiente completamente seco. Para isso, são utilizados os valores de entrada $\theta_1 = 29°C$ e $u_1 = 0\%$, obtendo-se as velocidades:

  1. $c_{defuz}(29,\ 0) = 349,0389$;
  2. $c_{inf}(29,\ 0) = 345,1389$;
  3. $c_{sup}(29,\ 0) = 352,9389$.

- **2º Caso**: Uma pessoa com temperatura em um ambiente com umidade média. Para isso, são utilizados os valores de entrada $\theta_2 = 36,5°C$ e $u_2 = 3\%$, obtendo-se as velocidades:

  1. $c_{defuz}(36,5,\ 3) = 354,9651$;
  2. $c_{inf}(36,5,\ 3) = 350,01504$;
  3. $c_{sup}(36,5,\ 3) = 359,91516$.

- **3º Caso**: Uma pessoa com febre alta em um ambiente muito úmido. Para isso, são utilizados os valores de entrada $\theta_3 = 41,5°C$ e $u_3 = 5\%$, obtendo-se as velocidades:

  1. $c_{defuz}(41,5,\ 5) = 358,93804$;
  2. $c_{inf}(41,5,\ 5) = 353,28804$;
  3. $c_{sup}(41,5,\ 5) = 364,58804$.

  Como parâmetros de discretização, utilizam-se: $\Delta x = 0,00001\ m$ e $\Delta t = 0,00000001\ s$. Note que a condição de estabilidade é atingida pois:

$$c_{T2} \cdot \frac{0,00000001}{0,00001} = c_{T2} \cdot 0,001 < 1.$$

  para qualquer velocidade do som obtida através do SBRF do tipo 2 intervalar. Além disso, como na seção anterior, o processo é realizado 1001 iterações da solução do problema.

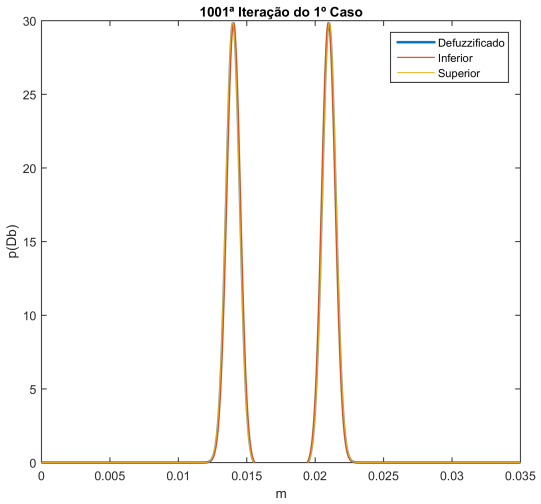


Figura 5.10: Aproximação da solução do PVI para hipotermia moderada e umidade baixa. Fonte: Elaborada pelo autor.

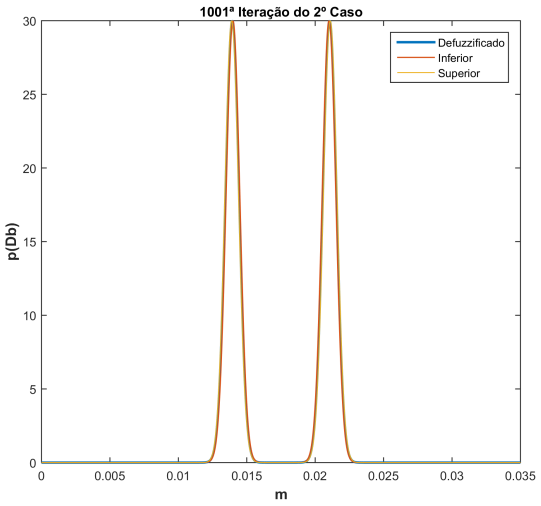


Figura 5.11: Aproximação da solução do PVI para temperatura normal e umidade média. Fonte: Elaborada pelo autor.

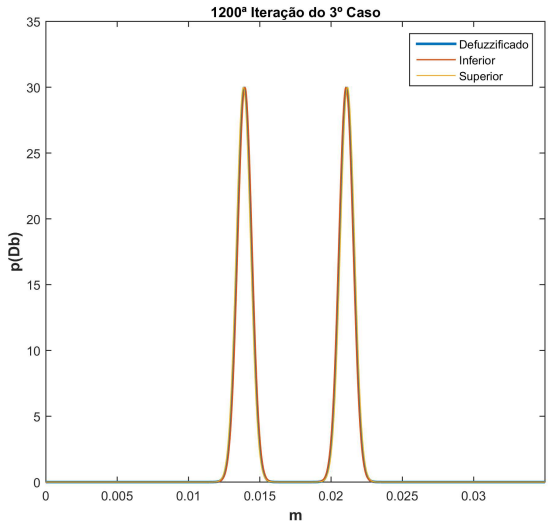


Figura 5.12: Aproximação da solução do PVI para febre alta e umidade alta. Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados obtidos do PVI da 1001ª iteração para cada caso utilizando o SBRF do tipo 2 intervalar são representados na Figura 5.10, do 1º caso, na Figura 5.11, do 2º caso e na Figura 5.12, do 3º caso.

A seguir, encontram-se dispostas as quedas da pressão acústica no ponto $\overline{x} = 0,0175$, para cada caso, tendo sido plotadas no mesmo gráfico às 3 saídas resultantes de cada entrada (θ, u). As representações gráficas dos casos 1, 2 e 3 encontram-se dispostas nas Figuras 5.13, 5.14 e 5.15, respectivamente.

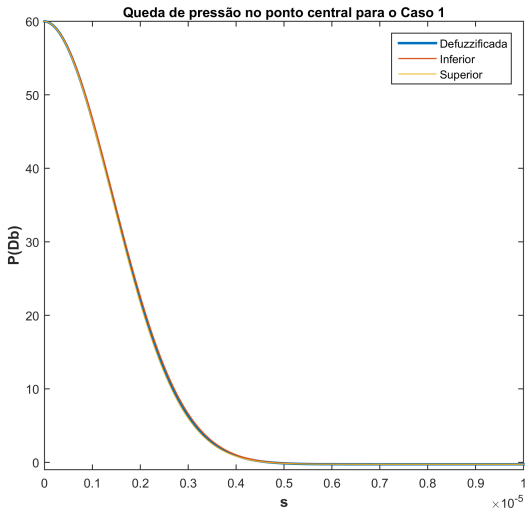


Figura 5.13: Representação gráfica das quedas de pressão acúsica do caso 1. Fonte: Elaborada pelo autor.

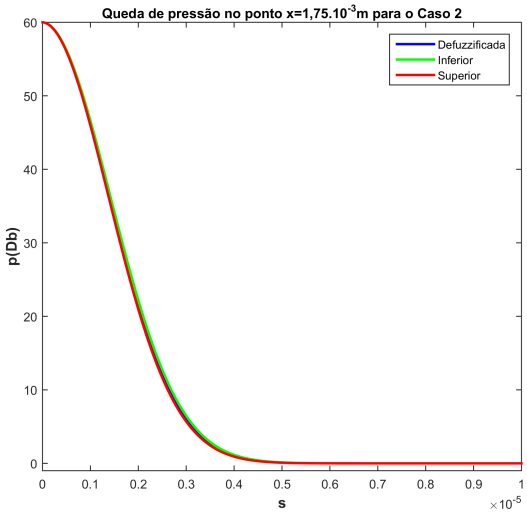


Figura 5.14: Representação gráfica das quedas de pressão acúsica do caso 2. Fonte: Elaborada pelo autor.

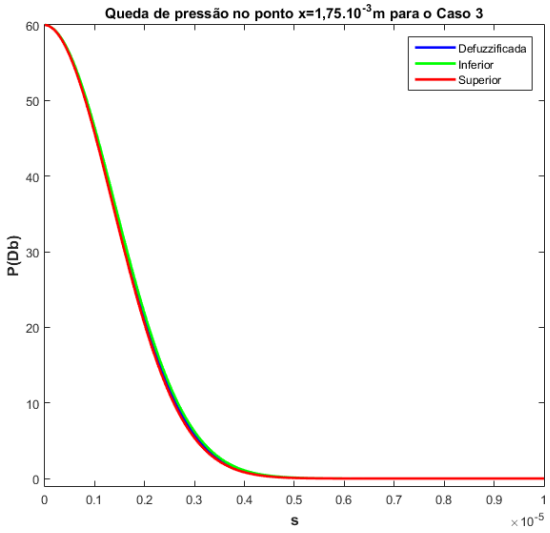


Figura 5.15: Representação gráfica das quedas de pressão acúsica do caso 3. Fonte: Elaborada pelo autor.

Para mostrar a diferença na solução do PVI utilizando cada uma das saídas do SBRF do tipo 2 intevalar, são salvos os valores de cada uma das 1001 iterações em um determinado ponto $\overline{x} = 0,0175$. Após isso, são calculadas as diferenças entre as aproximações das soluções, duas a duas. A representação gráfica dessas diferenças encontram-se nas Figuras 5.16, 5.17 e 5.18.

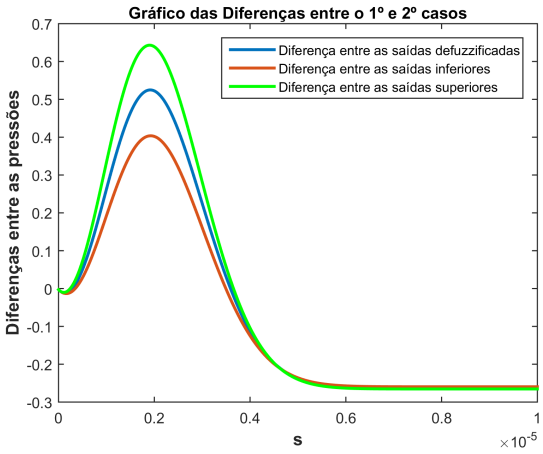


Figura 5.16: Gráfico das diferenças por iteração entre o 1º e o 2º casos. Fonte: Elaborada pelo autor.

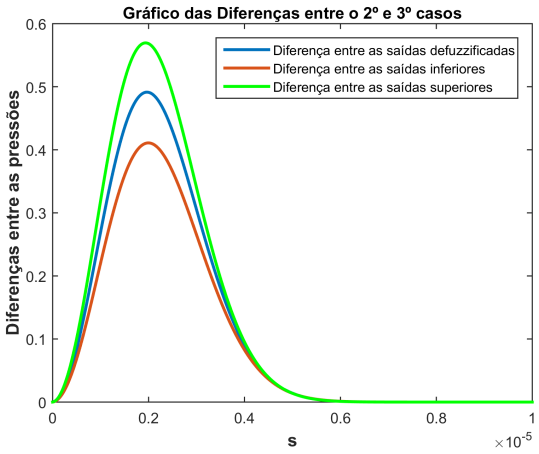


Figura 5.17: Gráfico das diferenças por iteração entre o 2º e o 3º casos. Fonte: Elaborada pelo autor.

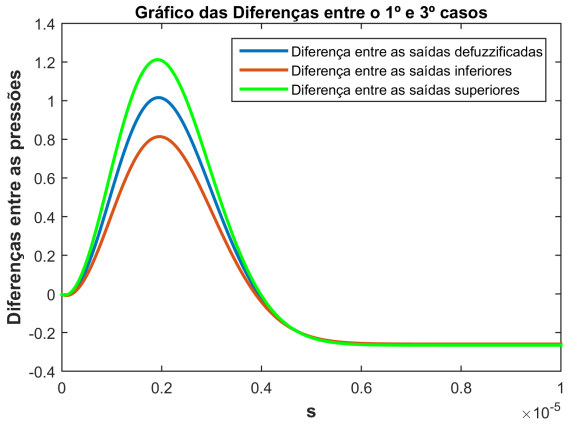


Figura 5.18: Gráfico das diferenças por iteração entre o 1º e o 3º casos. Fonte: Elaborada pelo autor.

As figuras anteriores mostram que as diferenças entre as saídas influenciam no comportamento das diferenças entre as aproximações da solução. Note que para cada caso obtém-se três gráficos, destacando a incerteza ampliada quando a velocidade do som é obtida a partir de um SBRF do tipo 2 intevalar.

Na próxima seção, é realizado o estudo do modelo bidimensional com domínio regular.

5.2 Modelagem dos Problemas Bidimensionais com Domínio Regular

Sejam c a velocidade do som e o domínio retangular Ω, com a condição de Dirichlet na fronteira de Ω. Deseja-se modelar através do MEF, a equação dada por:

$$\begin{cases} \Delta p = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ p(x,y,t)|_{\partial\Omega} = 0 \\ p(x,y,0) = p_0(x,y) \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(x,y,0) = 0 \end{cases}, \tag{5.19}$$

em que $\Delta p = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}$ e p_0 representa a condição inicial do PVI.

Para iniciar a modelagem do (PV), considere o espaço vetorial V de todas as funções contínuas que satisfazem a condição de fronteira de Ω. Aplicando o produto interno no domínio têm-se que:

$$\int_\Omega -\Delta p v d\Omega = \frac{1}{c^2}\int_\Omega \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} v d\Omega, \ \forall v \in V. \tag{5.20}$$

Pela primeira identidade do Teorema de Green tem-se:

$$c^2\int_\Omega (\Delta p) v dx dy = -c^2\int_\Omega (\nabla p \cdot \nabla v) dx dy + c^2\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial p}{\partial \eta} dS; \tag{5.21}$$

em que η corresponde ao vetor unitário normal externo a $\partial\Omega$. Como a fronteira é de Dirichlet e $p(x,y,t)|_{\partial\Omega} = 0$, têm-se que:

$$\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial p}{\partial \eta} dS = 0. \tag{5.22}$$

logo,

$$-c^2\int_\Omega (\nabla p \cdot \nabla v) dx dy = \int_\Omega \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} v dx dy, \tag{5.23}$$

então,

$$-c^2\left(\nabla p, \nabla v\right) = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, v\right). \tag{5.24}$$

Pelo método de Galerkin, considera-se uma triangulação T_h do domínio Ω, tal que os elementos triangulares são dois a dois disjuntos e $\Omega = \bigcup_{K\in T_h} K_i$. Têm-se ainda que $h = \max_{K_{ih}} diam(K_i)$. Define-se o subespaço vetorial V_h por:

$$V_h = \left\{v : v \textit{ é contínua em } \Omega, \ v|_{K_i} \textit{ é linear}, \ \forall K_i \in T_h \textit{ e } v = 0 \textit{ em } \partial\Omega\right\}. \tag{5.25}$$

Pela formulação do (PV_h), é necessário encontrar uma função $p_h(x,y,t) \in V_h$ tal que:

$$-c^2\left(\nabla p_h, \nabla v\right) = \left(\frac{\partial^2 p_h}{\partial t^2}, v\right) \tag{5.26}$$

sendo esse o (PV_h) desejado.

Sabe-se que o espaço V_h possui base $B = \{\varphi_j,\ j = 1, \ldots, M\}$. Tem-se ainda que $p_h \in V_h$. Logo,

$$p_h(x, y, t) = \sum_{j=1}^{n} p_j(t) \cdot \varphi_j(x, y). \tag{5.27}$$

Substituindo $p_h(x, y, t)$ no (PV_h), obtém-se:

$$-c^2 \left(\sum_{j=1}^{n} p_j(t) \nabla\varphi_j, \nabla v \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p_j}{\partial t^2}(t)\varphi_j, v \right). \tag{5.28}$$

Por se tratar de um produto interno, é possível aplicar a propriedade distributiva,

$$-c^2 \sum_{j=1}^{n} p_j(t) \left(\nabla\varphi_j, \nabla v\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p_j}{\partial t^2}(t) \left(\varphi_j, v\right). \tag{5.29}$$

Tomando $v = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$, em que $\varphi_i \in B$, tem-se que:

$$-c^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_j(t) \left(\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p_j}{\partial t^2}(t) \left(\varphi_i, \varphi_j\right). \tag{5.30}$$

Para encontrar a solução no tempo t, emprega-se o método de Crank-Nicholson. Substituindo a derivada no tempo pelas diferenças finitas no (PV_h) obtém-se:

$$-c^2 \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} p_j^n(t) \left(\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j\right) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \frac{p_j^{n+1} - 2p_j^n + p_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} \left(\varphi_j.\varphi_i\right), \tag{5.31}$$

logo,

$$-c^2 \cdot (\Delta t)^2 \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} p_j^n(t) \left(\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j\right) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \left(p_j^{n+1} - 2p_j^n + p_j^{n-1}\right) \cdot \left(\varphi_j.\varphi_i\right). \tag{5.32}$$

Isolando a solução do tempo posterior, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} p_j^{n+1}(\varphi_j, \varphi_i) = &\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} p_j^n \left(-c^2 \cdot (\Delta t)^2 \left(\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i\right) + 2 \cdot \left(\varphi_j, \varphi_i\right)\right) \\ &- \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} p_j^{n-1}(\varphi_j, \varphi_i). \end{aligned} \tag{5.33}$$

Com o resultado obtido, é possível construir o sistema matricial, com as matrizes X, Y, P^{n+1}, P^n e P^{n-1}, dadas por:

$$
\begin{aligned}
X &= (\varphi_i, \varphi_j);\\
Y &= -c^2(\Delta t)^2 \cdot (\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j) + 2X;\\
P^{n+1} &= \begin{pmatrix} p_1^{n+1} \\ \vdots \\ p_M^{n+1} \end{pmatrix};\\
P^{n} &= \begin{pmatrix} p_1^{n} \\ \vdots \\ p_M^{n} \end{pmatrix};\\
P^{n-1} &= \begin{pmatrix} p_1^{n-1} \\ \vdots \\ p_M^{n-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

logo, o sistema matricial obtido é

$$
XP^{n+1} = YP^n - XP^{n-1}. \tag{5.35}
$$

Para aproximar a primeira iteração do sistema, de forma semelhante ao método das diferenças finitas, utiliza-se a expressão (5.13).

A seguir, as aproximações das soluções dos problemas bidimensionais com fronteira regular são apresentadas nos três casos estudados anteriormente.

5.2.1 Aproximação da Solução do Modelo Bidimensional com Domínio Regular com Parâmetro Fuzzy do Tipo 1

Sejam $c_{T_1} = c_{T_1}(\theta, u)$ a velocidade do som, sendo esta um parâmetro fuzzy do tipo 1 e o domínio $\Omega = [0,\ 0,035] \times [0,\ 0,0012]$ em metros (m). Considere ainda a fronteira Ω de Dirichlet homogêneas e a seguinte condição inicial:

$$
p_0(x, \overline{y}) = \begin{cases} 60 \cdot e^{\dfrac{(x-\overline{x})^2}{2\cdot\sigma^2}}, & \text{se} \quad 0,0168 \leq x \leq 0,0182 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \tag{5.36}
$$

em que $\overline{x} = 0,0175\ m$ e $\overline{y} = 0,0006\ m$ são as coordenadas para o pico de pressão e $\sigma = 0,0005$ é a largura da função. A condição inicial descrita representa uma excitação acústica de 60 Db no ponto central da malha. Afim de suavizar a curva da pressão acústica foram calculados os valores da função Gaussiana em pontos laterais ao ponto central da malha.

Pretende-se aproximar a solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} \Delta p = \dfrac{1}{c_{T_1}^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ p(x,y,t)|_{\partial\Omega} = 0 \\ p(x,y,0) = p_0(x,\overline{y}) \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(x,y,0) = 0 \end{cases} . \tag{5.37}$$

A condição inicial do PVI encontra-se representada graficamente na Figura 5.19.

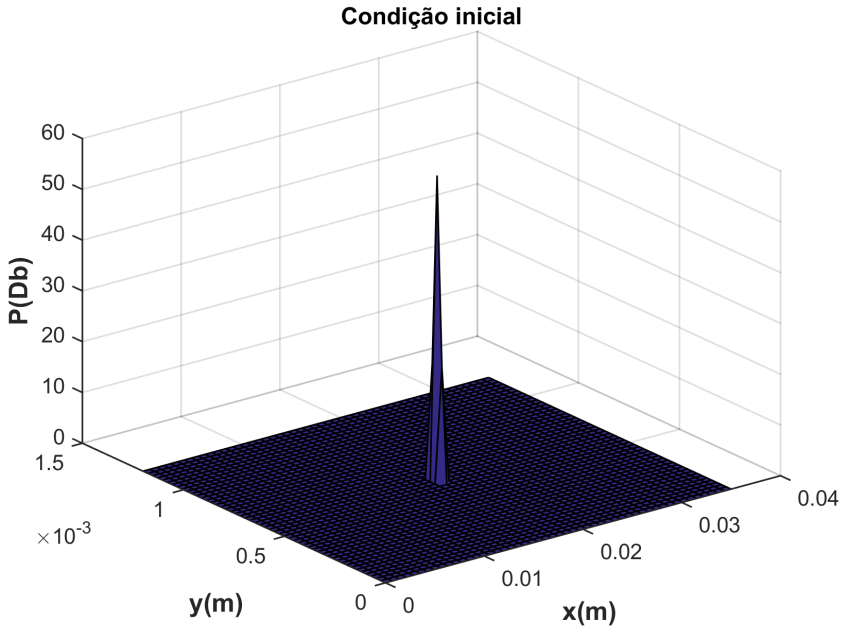


Figura 5.19: Condição inicial do PVI. Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste modelo, são utilizadas as três condições de temperatura e umidade dadas na Subseção 5.1.3.

As saídas do SBRF do tipo 1 como as mesmas situações propostas:

- **1º Caso**: Para os valores de entradas $\theta_1 = 29°C$ e $u_1 = 0\%$, obtendo-se a velocidade:

$$c_{T1}(29, 0) = 349,0389\ m/s;$$

- **2º Caso**: Os valores de entrada $\theta_2 = 36,5°C$ e $u_2 = 3\%$, obtendo-se a velocidade:

$$c_{T1}(36,5\ ,\ 3) = 354,9644\ m/s;$$

- **3º Caso**: Os valores de entrada $\theta_3 = 41.5°C$ e $u_3 = 5\%$, obtendo-se a velocidade :

$$c_{T1}(41,5\ ,\ 5) = 358,9380\ m/s.$$

Para determinar a aproximação da solução é utilizada uma malha com 50 subintervalos nos eixos x e y. Além disso, o passo do tempo é $\Delta t = 0,00000001\ s$. Utilizando a formulação pelo MEF, construída na seção anterior, as aproximações obtidas após 101 iterações, para os casos 1, 2 e 3 encontam-se representados graficamente pelas Figuras 5.20, 5.21 e 5.22, respectivamente.

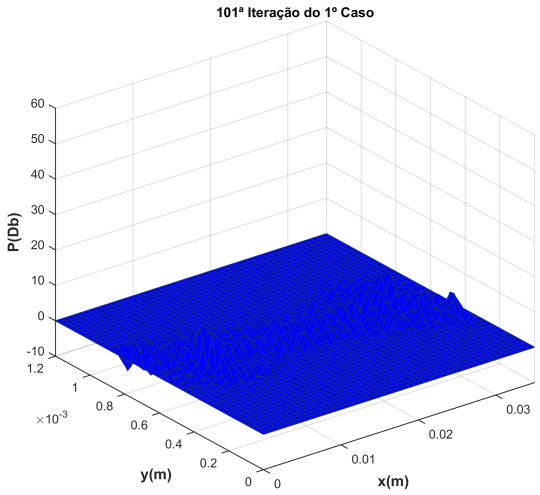


Figura 5.20: Aproximação da solução do PVI para hipotermia moderada e umidade baixa. Fonte: Elaborada pelo autor.

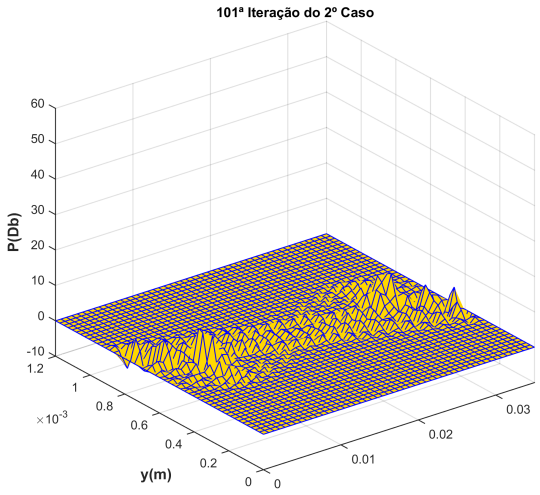


Figura 5.21: Aproximação da solução do PVI para temperatura normal e umidade média. Fonte: Elaborada pelo autor.

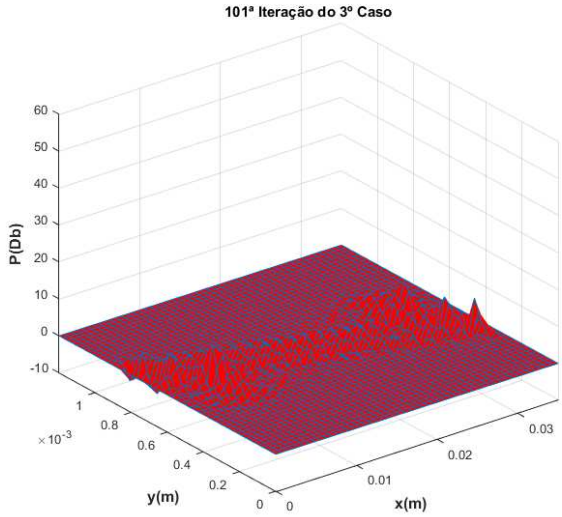


Figura 5.22: Aproximação da solução do PVI para febre alta e umidade alta. Fonte: Elaborada pelo autor.

Graficamente a queda de pressão em cada uma das aproximações obtidas é mostrada fixando o nó de número 1201, dado pelo ponto $(\overline{x}, \overline{y}) = (0,0175\ ,\ 0,0006)$ que se encontra no interior do domínio Ω. Após 101 iterações, as representações gráficas de tais fenômenos encontram-se na Figura 5.23.

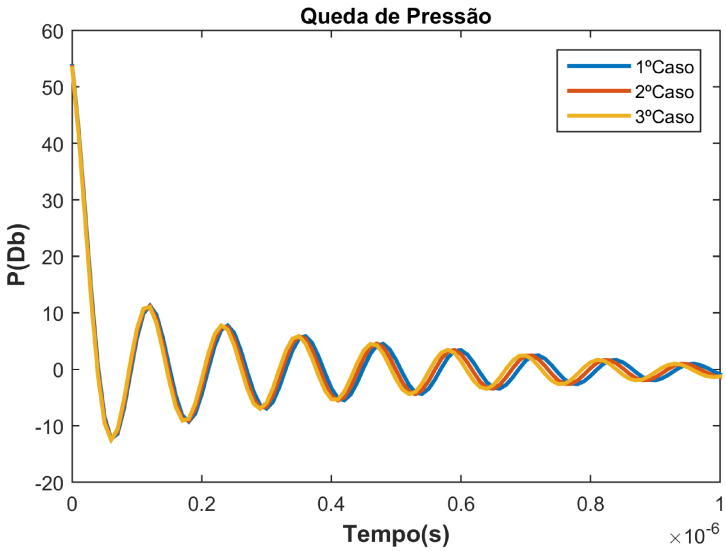


Figura 5.23: Gráfico da queda de pressão após 101 iterações para o ponto $(\overline{x}, \overline{y})$. Fonte: Elaborada pelo autor.

Para facilitar a visualização das diferentes situações foram calculadas as diferenças entre os valores da pressão no ponto $(\overline{x}, \overline{y})$ dos casos estudados, agrupados dois a dois. As representações gráficas entre essas diferenças encontram-se na Figura 5.24. Observe que, quanto maior a diferença entre os valores da velocidade do som que são saídas do SBRF do tipo 1, maiores são as amplitudes das diferenças obtidas. Além disso, é possível notar diferenças de até $3Db$ entre os casos. Destaca-se qua as diferenças iniciam nulas devido a mesma condição inicial, aumenta no decorrer das iterações e aproxima-se de zero depois de 101 iterações, devido a dispersão da pressão acústica causada pelo pico de 60 Db.

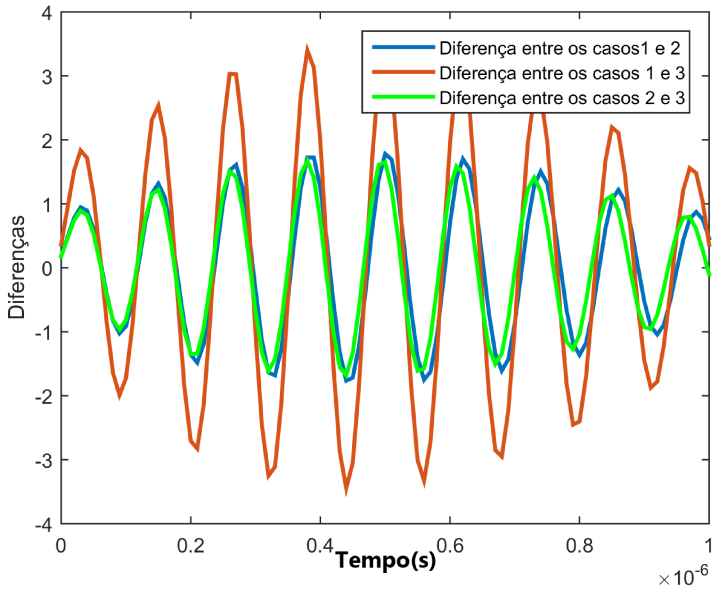


Figura 5.24: Gráfico das diferenças entre as soluções para o ponto $(\overline{x}, \overline{y})$. Fonte: Elaborada pelo autor.

Na próxima subseção, é apresentada a aproximação da solução do modelo bidimensional com domínio regular e parâmetro fuzzy do tipo 2 intervalar.

5.2.2 Solução do Modelo Bidimensional com Domínio Regular Utilizando Parâmetro Fuzzy do Tipo 2 Intervalar

Sejam $c_{T_2} = c_{T_2}(\theta, u)$ o valor da velocidade do som, sendo esta um parâmetro fuzzy do tipo 2 intervalar, e o domínio $\Omega = [0,\ 0,035] \times [0,\ 0,0012]$ em metros (m), com fronteiras de Dirichlet homogênea e a condição inicial dada em (5.36). Assim, obtém-se o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \Delta p = \dfrac{1}{c_{T_2}^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ p(x,y,t)|_{\partial\Omega} = 0 \\ p(x,y,0) = p_0(x,\overline{y}) \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(x,y,0) = 0 \end{cases}. \tag{5.38}$$

Assim, como na Seção 5.1.4, a saída do SBRF do tipo 2 intervalar são calculadas a partir dos três casos citados anteriormente. Da mesma forma, o sistema produz 3 saídas, sendo uma saída defuzificada (c_{defuz}), uma saída inferior (c_{inf}) e uma superior (c_{sup}). Assim, os 9 valores de c_{T2} obtidos através do SBRF são:

- **1º Caso**: Os valores de entrada são $\theta_1 = 29°C$ e $u_1 = 0\%$, obtendo-se as velocidades:
  1. $c_{defuz}(29,\ 0) = 349,03891$;
  2. $c_{inf}(29,\ 0) = 345,13891$;
  3. $c_{sup}(29,\ 0) = 352,93891$.
- **2º Caso**: Os valores de entrada são $\theta_2 = 36,5°C$ e $u_2 = 3\%$, obtendo-se as velocidades:
  1. $c_{defuz}(36,5,\ 3) = 354,9651$;
  2. $c_{inf}(36,5,\ 3) = 350,015037$;
  3. $c_{sup}(36,5,\ 3) = 359,91516$.
- **3º Caso**: Os valores de entrada são $\theta_3 = 41,5°C$ e $u_3 = 5\%$, obtendo-se as velocidades:
  1. $c_{defuz}(41,5,\ 5) = 358,93804$;
  2. $c_{inf}(41,5,\ 5) = 353,28804$;
  3. $c_{sup}(41,5,\ 5) = 364,58804$.

Utilizando novamente o problema variacional descrito na Seção 5.2 e empregando as condições citadas anteriormente, obtêm-se 3 aproximações da solução para cada temperatura e umidade. Nas Figuras 5.25, 5.27 e 5.29 são apresentadas as 3 saídas de cada caso, no lado esquerdo, e o destaque para a saída defuzzificada no lado direito, para cada um dos 3 casos supracitados, Figuras 5.26, 5.26 e 5.30, após 101 iterações.

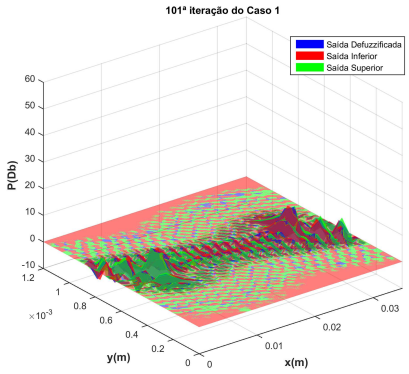


Figura 5.25: Aprimação da solução do PVI para hipotermia moderada e umidade baixa. Fonte: Elaborada pelo autor.

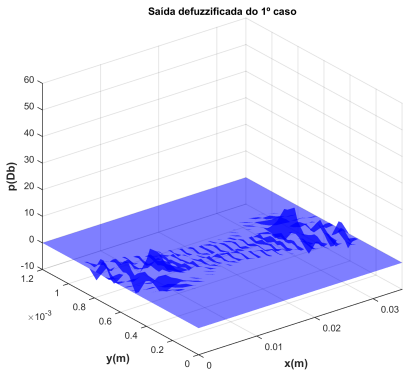


Figura 5.26: Saída defuzzificada da aproximação da solução do PVI para hipotermia moderada e umidade baixa. Fonte: Elaborada pelo autor.

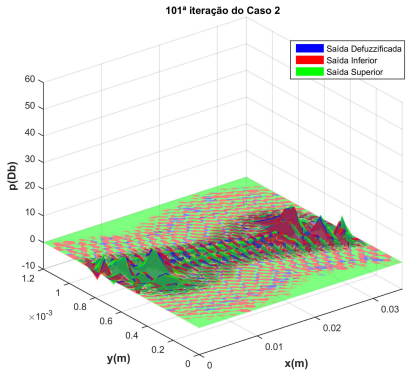


Figura 5.27: Aprimação da solução do PVI para temperatura normal e umidade média. Fonte: Elaborada pelo autor.

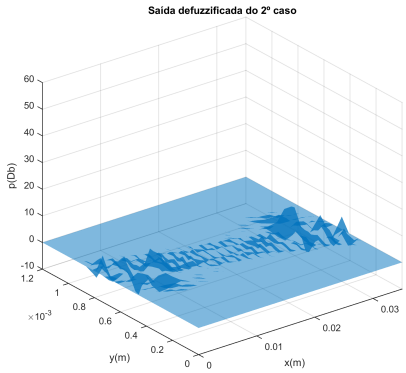


Figura 5.28: Aprimação da solução do PVI para temperatura normal e umidade média. Fonte: Elaborada pelo autor.

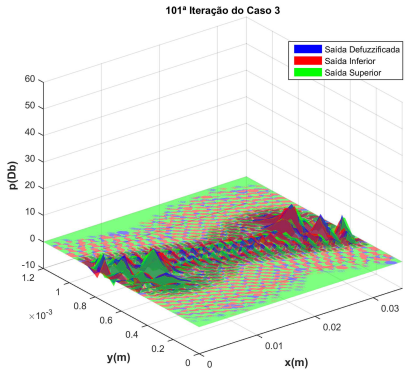


Figura 5.29: Aprimação da solução do PVI para febre alta e umidade alta. Fonte: Elaborada pelo autor.

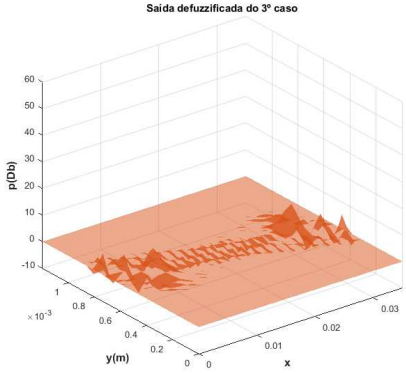


Figura 5.30: Saída defuzzificada da aproximação da solução do PVI para febre alta e umidade alta. Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que as Figuras 5.25, 5.27 e 5.29 são aproximações das soluções do PVI para as saídas superiores, inferiores e defuzzificadas de cada caso, note que a representação das superfícies são diferentes, como pode ser constatado pelas cores distintas, nos gráficos da esquerda.

Destaca-se os comportamentos da pressão no ponto $(\overline{x}, \overline{y})$ para cada caso, em função do tempo decorrido do pulso inicial. A representação gráfica das quedas de pressão encontram-se representadas nas Figuras 5.31, 5.32 e 5.33.

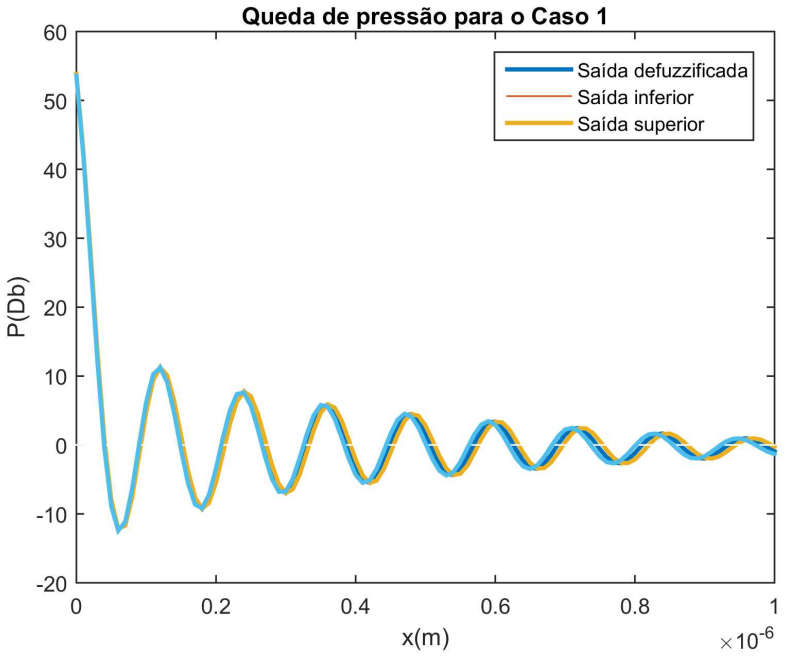


Figura 5.31: Queda da pressão para as 3 saídas do caso 1. Fonte: Elaborada pelo autor.

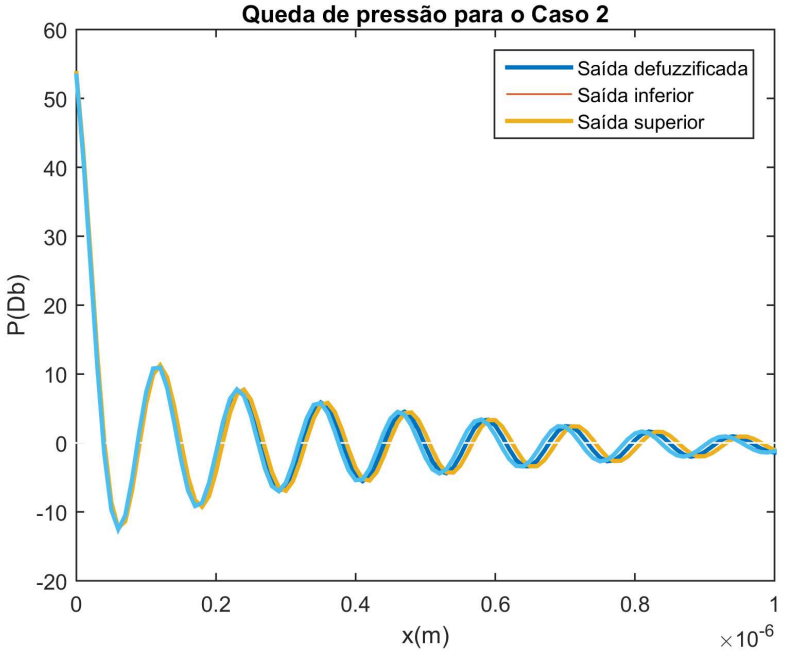


Figura 5.32: Queda da pressão para as 3 saídas do caso 2. Fonte: Elaborada pelo autor.

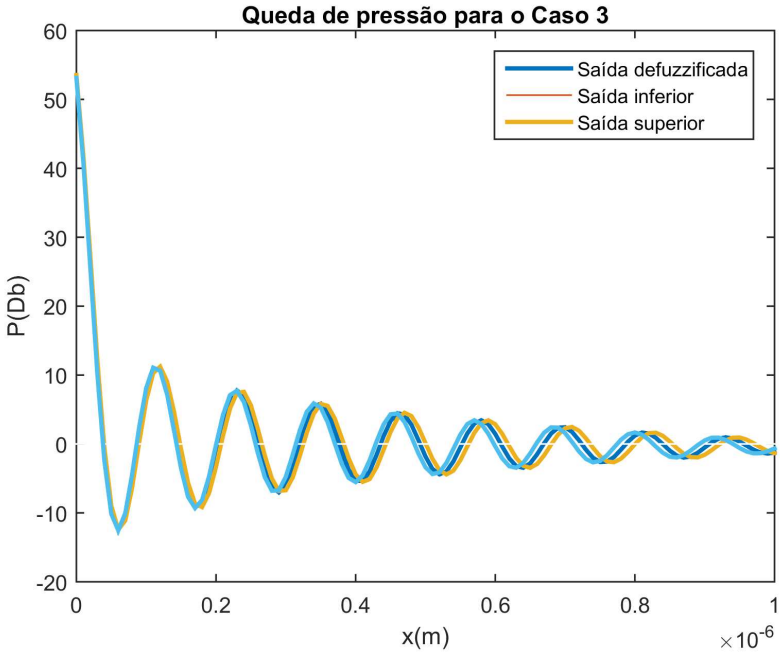


Figura 5.33: Queda da pressão para as 3 saídas do caso 3. Fonte: Elaborada pelo autor.

Faz-se necessário ainda a construção do gráfico das diferenças a cada iteração. Fixando o nó $(\overline{x}, \overline{y})$, dado pelo ponto $(0,0175\ ,\ 0,0006)$, que pertence ao interior do domínio, após 1200ª iterações. A seguir, as diferenças para as aproximações das soluções utilizando todas as saídas, c_{defuz}, c_{inf} e c_{sup}, para cada caso, encontram-se nas Figuras 5.34, 5.35 e 5.36.

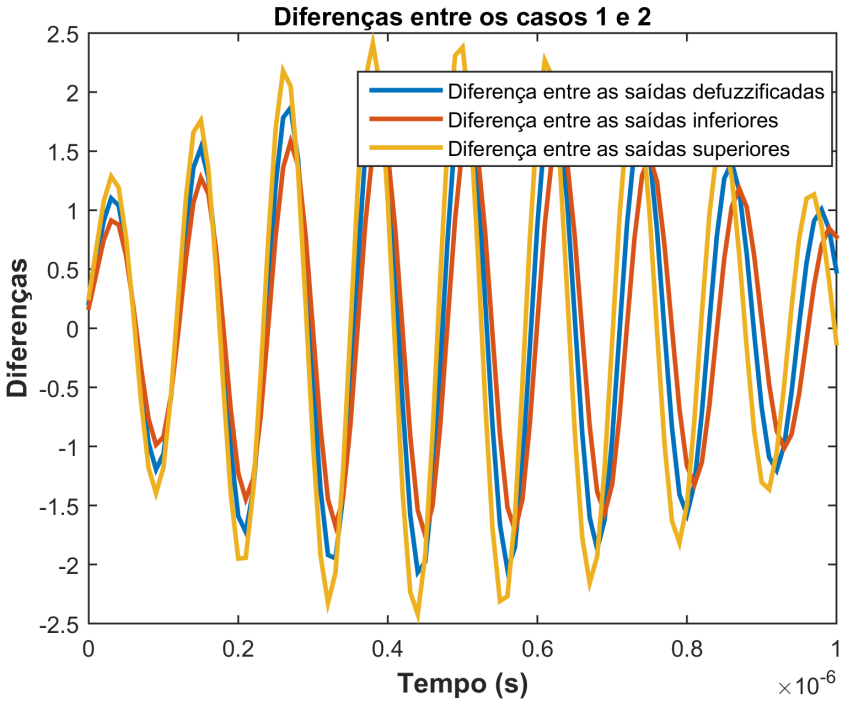


Figura 5.34: Gráfico das diferenças entre os casos 1 e 2. Fonte: Elaborada pelo autor.

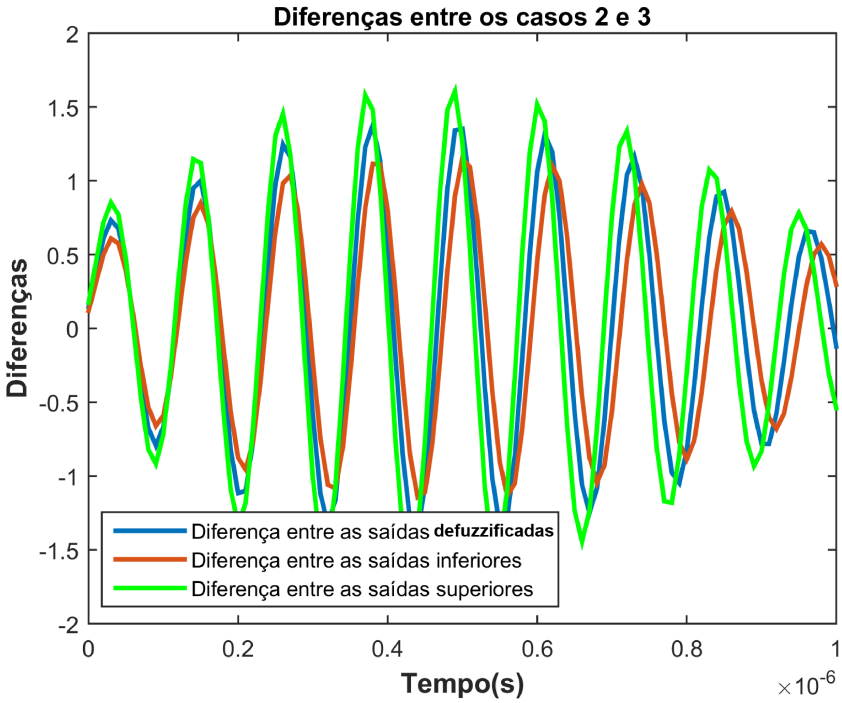


Figura 5.35: Gráfico das diferenças entre os casos 2 e 3. Fonte: Elaborada pelo autor.

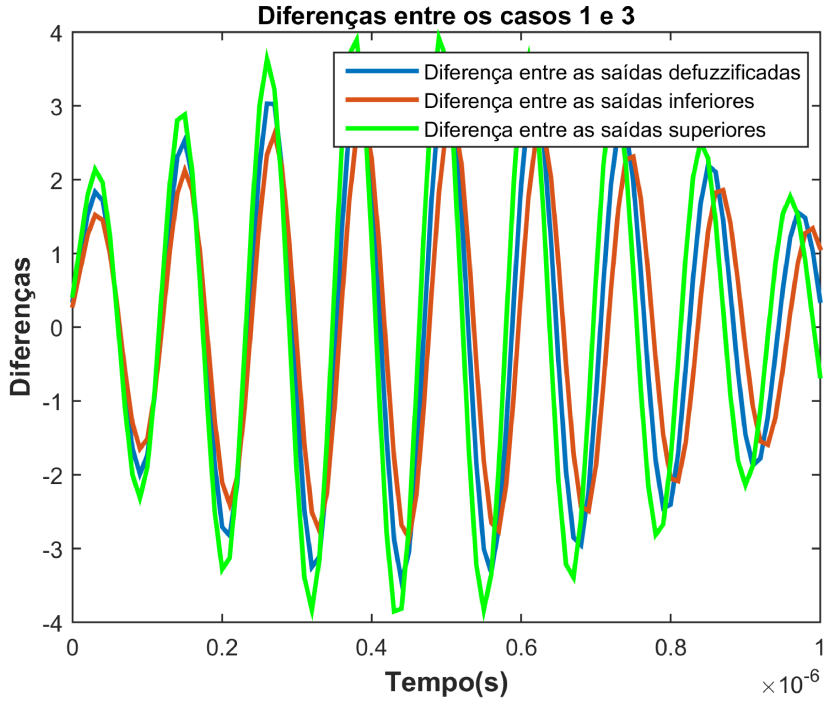


Figura 5.36: Gráfico das diferenças entre os casos 1 e 3. Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível perceber o quão diferentes são os resultados obtidos através das saídas do SBRF do tipo 2 intervalar, comparados as do tipo 1, devido acréscimo de incerteza introduzido no modelo. Os gráficos mostram as diferenças entre as 3 saídas do sistema, além das discrepâncias geradas por condições de temperatura e umidade diferentes.

5.3 Modelagem dos Problema Bidimensionais com Domínio Irregular

Como dito na introdução deste trabalho, o comprimento da seção transversal da membrana basilar (MB) é variada, à depender de quão distante a seção está da janela oval. Para aproximar melhor as medidas da MB, o domínio de resolução do PVI deve ser modificado. Segundo os dados fornecidos por Hong e Horii (2022), são escolhidos os pontos $(0,\ 0)$, $(0,\ 0,0012)$, $(0,035,\ 0,00095)$ e $(0,035,\ 0,00025)$ como os vértices do domínio. O polígono definido pelos mesmos encontra-se descrito na Figura 5.37.

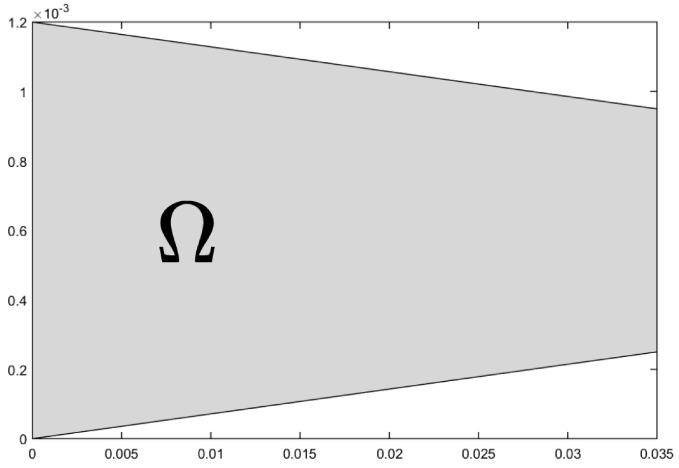


Figura 5.37: Domínio Ω gerado através dos vértices descritos. Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível observar que o polígono convexo formado pelos 4 pontos escolhidos como vértice é um trapézio. Logo, para definir o domínio é necessário conhecer as funções que o delimitam. Observa-se que o domínio Ω é delimitado por $x \in [0,\ 0,035]$ e as retas inferior, definida por $y_{inf}(x)$ e superior, definida por $y_{sup}(x)$. Tais retas são, respectivamente:

$$\begin{aligned} y_{inf}(x) &= 0,00714x; \\ y_{sup}(x) &= -0,00714x + 0,0012. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Dispondo das retas que delimitam o domínio Ω, é possível definir o mesmo por:

$$\Omega = \{(x, y) : x \in [0,\ 035]\ e\ y_{inf} \leq y(x) \leq y_{sup}\}. \tag{5.40}$$

Tendo delimitado o domínio Ω, é possível construir os dois modelos bidimensionais com fronteira irregular que representam a pressão acústica dentro da cóclea.

5.3.1 Solução do Modelo Bidimensional com Domínio Irregular e Parâmetro Fuzzy do Tipo 1

Sejam o domínio definido em (5.40), com fronteiras de Dirichlet homogêneas e $c_{T_1} = c_{T_1}(\theta, u)$ a velocidade do som, tratada como parâmetro fuzzy do tipo 1. Considere ainda o ponto $(\overline{x}, \overline{y}) = (0,01742\ ,\ 0,0006045)$. Nessa modelagem, considera-se um pico de pressão de $60Db$, no ponto citado anteriormente. O PVI que modela a situação proposta é dado por:

$$\begin{cases} \Delta p = \dfrac{1}{c_{T_1}^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ p(x,y,t)|_{\partial\Omega} = 0 \\ p(\overline{x},\overline{y},0) = 60 \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(x,y,0) = 0 \end{cases}. \tag{5.41}$$

Para a triangulação, é construída uma malha contendo 1305 nós e 2304 elementos triangulares, representada na Figura 5.38. Todo o processo de construção da malha encontra-se descrito no Apêndice D.

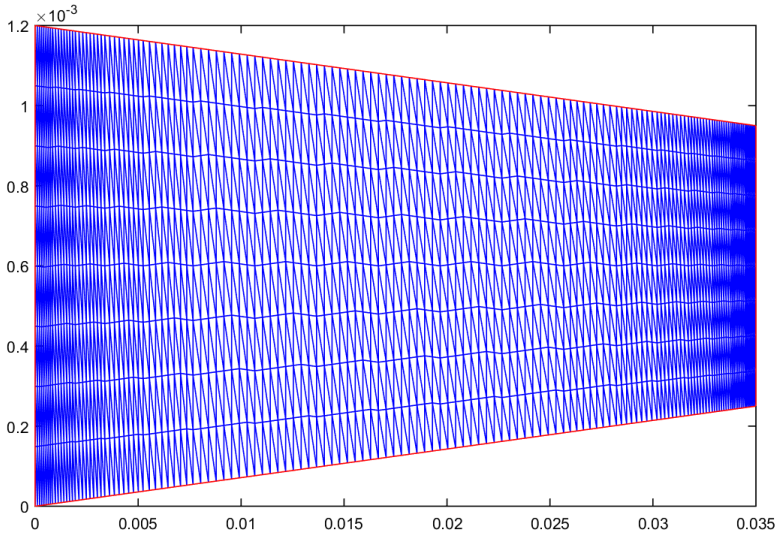


Figura 5.38: Representação gráfica da malha gerada para resolução do PVI (5.41). Fonte: Elaborada pelo autor.

Segue uma representação gráfica da condição inicial do PVI disposta na Figura 5.39.

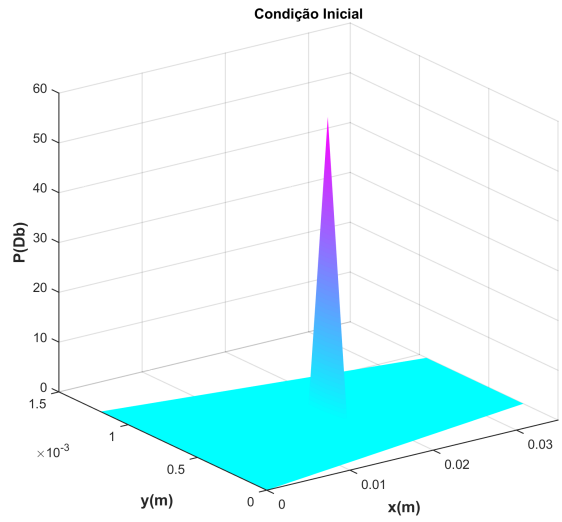


Figura 5.39: Representação gráfica da condição inicial do PVI (5.41). Fonte: Elaborada pelo autor.

Os mesmos valores de entradas do SBRF do tipo 1 são utilizados:
1º Caso: $\theta_1 = 29°C$ e $u_1 = 0\%$, obtendo o valor de saída $c_{T1}(29, 0) = 349,0389\ m/s$;
2º Caso: $\theta_2 = 36,5°C$ e $u_2 = 3\%$, gerando o valor de saída $c_{T1}(36,5\ \ 3) = 354,9644\ m/s$;
3º Caso: $\theta_3 = 41.5°C$ e $u_3 = 5\%$, obtendo a velocidade $c_{T1}(41,5\ ,\ \ 5) = 358,9380\ m/s$.

Os resultados obtidos à partir do programa descrito no Apêndice D, considerando as condições citadas estão representados graficamente nas Figuras 5.40, 5.41 e 5.42, respectivamente.

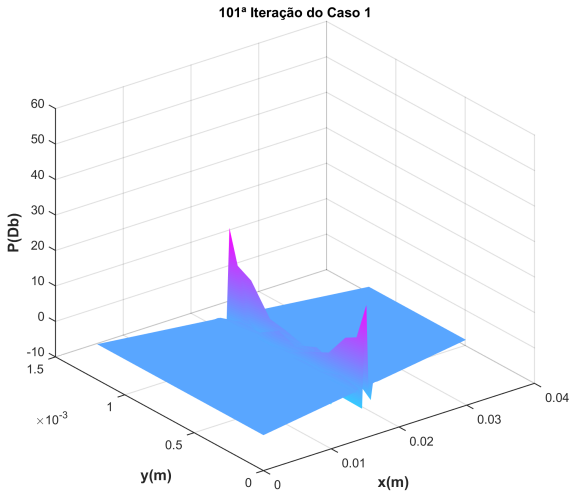


Figura 5.40: Aproximação da solução do PVI para hipotermia moderada e umidade baixa. Fonte: Elaborada pelo autor.

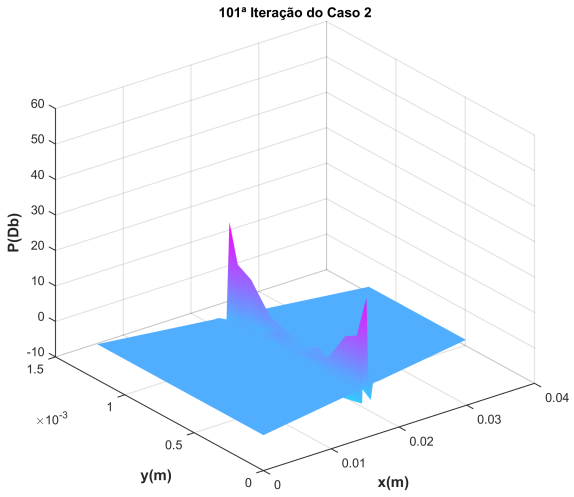


Figura 5.41: Saída defuzzificada da aproximação da solução do PVI para temperatura normal e umidade média. Fonte: Elaborada pelo autor.

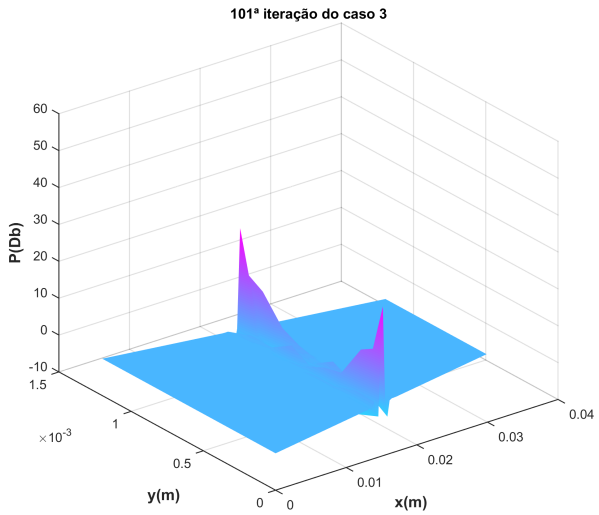


Figura 5.42: Aproximação da solução do PVI para temperatura de 41,5°C e umidade 5. Fonte: Elaborada pelo autor.

Para mostrar as discrepâncias entre os comportamentos da pressão acústica em cada um dos casos, segue uma representação gráfica da queda da pressão no ponto $(\overline{x}, \overline{y})$, na Figura 5.43.

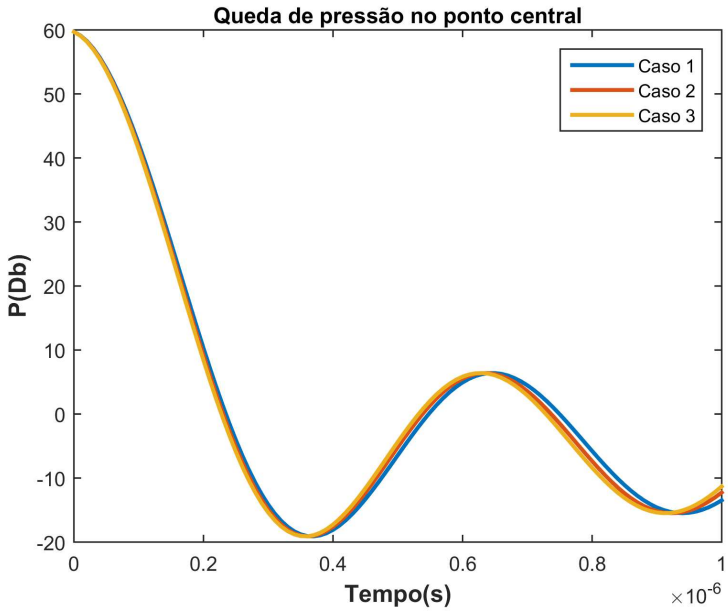


Figura 5.43: Queda de pressão para o nó 289 da malha. Fonte: Elaborada pelo autor.

Para mapear a diferença entre as aproximações são utilizados os resultados obtidos no nó 289, de coordenadas $(\overline{x}, \overline{y}) = (0,01742\ ,\ 0,0006045)$, que pertence ao interior do domínio. A representação gráfica das diferenças obtidas à cada iteração encontra-se na Figura 5.44

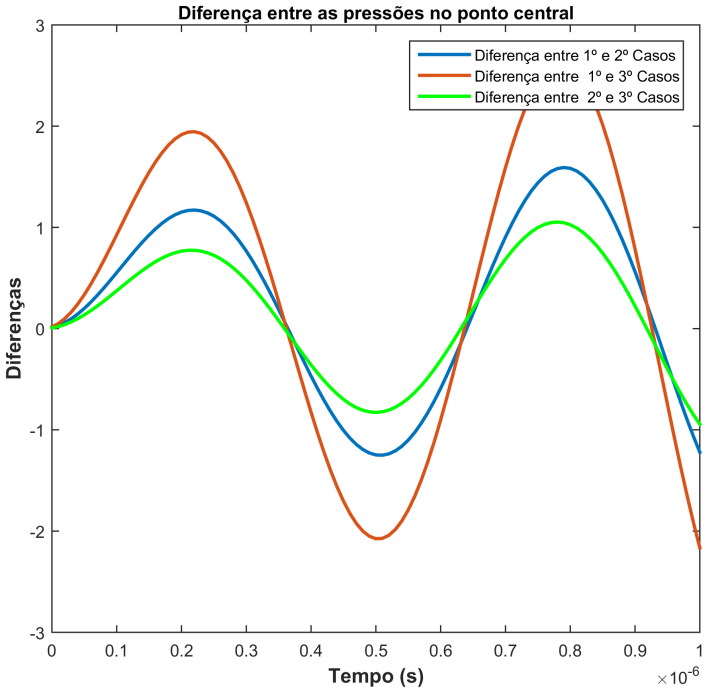


Figura 5.44: Diferença entre as soluções a cada iteração para o nó 289 da malha. Fonte: Elaborada pelo autor.

Pelos resultados apresentados nesta subseção, é fácil perceber o quanto a solução do modelo com domínio irregular se diferencia da aproximação dos modelos de domínio regular. Os gráficos evidenciam que a variação da velocidade do som gera diferenças nas oscilações da pressão no decorrer do domínio.

É possível notar ainda um padrão diferente entre os gráficos que mostram as diferenças por iteração, com relação aos resultados bidimensionais regulares, evidenciando a influencia do domínio na solução do PVI. Ainda, é possível observar que as diferenças maiores entre as saídas do SBRF geram diferenças maiores nas aproximações das soluções entre os casos 1^{o} e 3^{o}.

5.3.2 Solução do Modelo Bidimensional com Domínio Irregular e Parâmetro Fuzzy do Tipo 2 Intervalar

Sejam $c_{T_2} = c_{T_2}(\theta, u)$ a velocidade do som, tratada como um parâmetro fuzzy do tipo 2 intervalar, e o domínio Ω, com fronteiras de Dirichlet homogêneas. Consideram-se ainda um pulso de pressão acústica de $60Db$ em um único ponto da malha e sua derivada com relação ao tempo sendo zero. O ponto do pico de pressão em questão é $(\overline{x}, \overline{y}) = (0,01742\ ,\ 0,0006045)$, ponto mais próximo do centro de Ω. A modelagem dessas codições resultam no seguinte PVI:

$$\begin{cases} \Delta p = \dfrac{1}{c_{T_2}^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ p(x,y,t)|_{\partial\Omega} = 0 \\ p(\overline{x},\overline{y},0) = 60 \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(x,y,0) = 0 \end{cases} . \tag{5.42}$$

É utilizada a mesma triangulação da Figura 5.38, além de programa computacional similar. Para os 3 casos citados anteriormente, obtém-se que:

- Para $(\theta_1, u_1) = (29,\ 0)$:
  1. $c_{defuz}(29,\ 0) = 349,03891$;
  2. $c_{inf}(29,\ 0) = 345,13891$;
  3. $c_{sup}(29,\ 0) = 352,93891$.
- Para $(\theta_2, u_2) = (36,5\ ,\ 3)$:
  1. $c_{defuz}(36,5,\ 3) = 354,9651$;
  2. $c_{inf}(36,5,\ 3) = 350,01504$;
  3. $c_{sup}(36,5,\ 3) = 359,91516$.
- Para $(\theta_3, u_3) = (41,5\ ,\ 5)$:
  1. $c_{defuz}(41,5,\ 5) = 358,93804$;
  2. $c_{inf}(41,5,\ 5) = 353,2880456$;
  3. $c_{sup}(41,5,\ 5) = 364,5880456$.

Os resultados obtidos após 101 iterações das saídas defuzzificadas estão dispostos nas Figuras 5.45, 5.46 e 5.47.

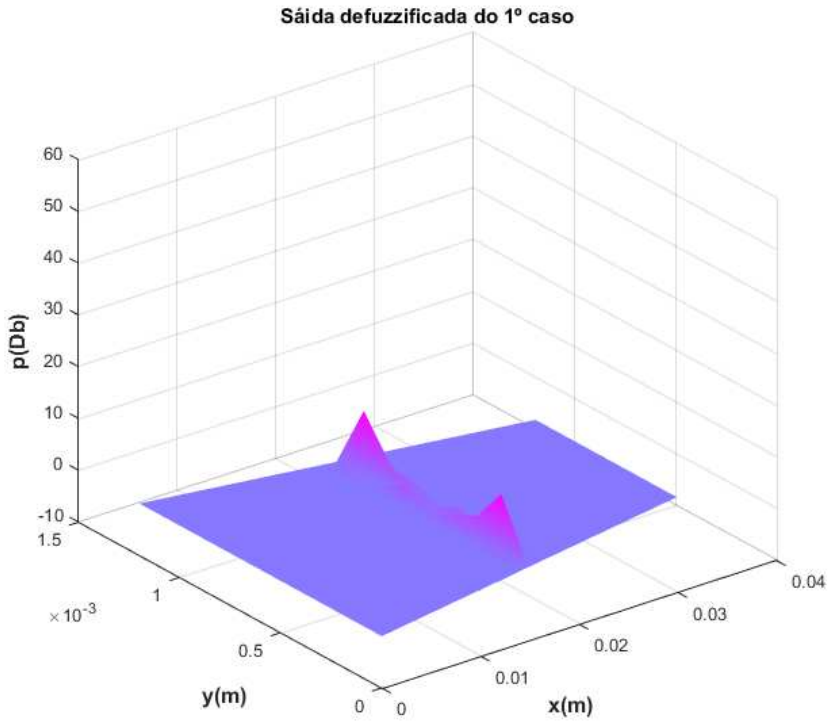


Figura 5.45: Aproximação da solução do PVI utilizando a saída defuzzificada do 1º caso. Fonte: Elaborada pelo autor.

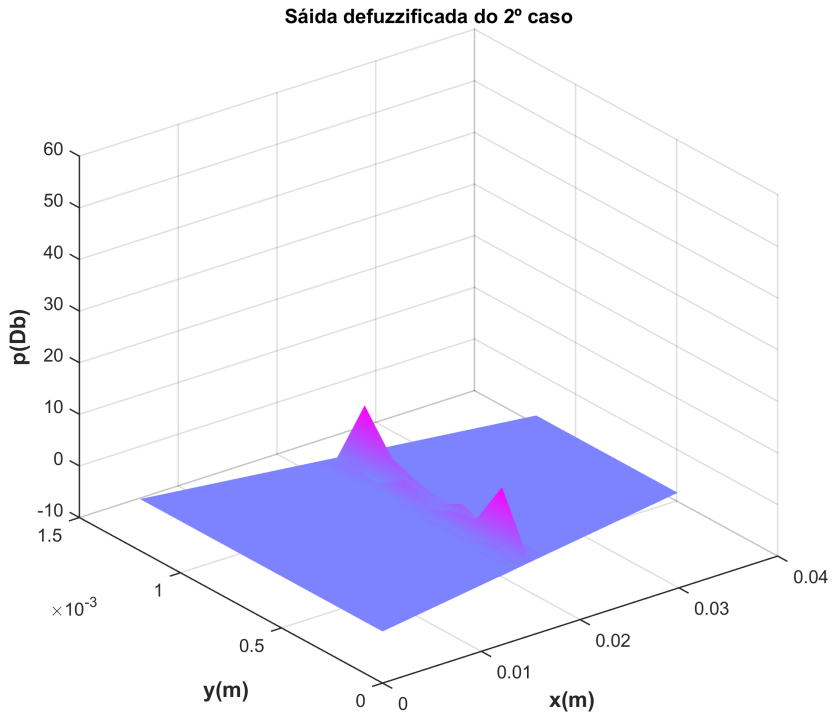


Figura 5.46: Aproximação da solução do PVI utilizando a saída defuzzificada do 2º caso. Fonte: Elaborada pelo autor.

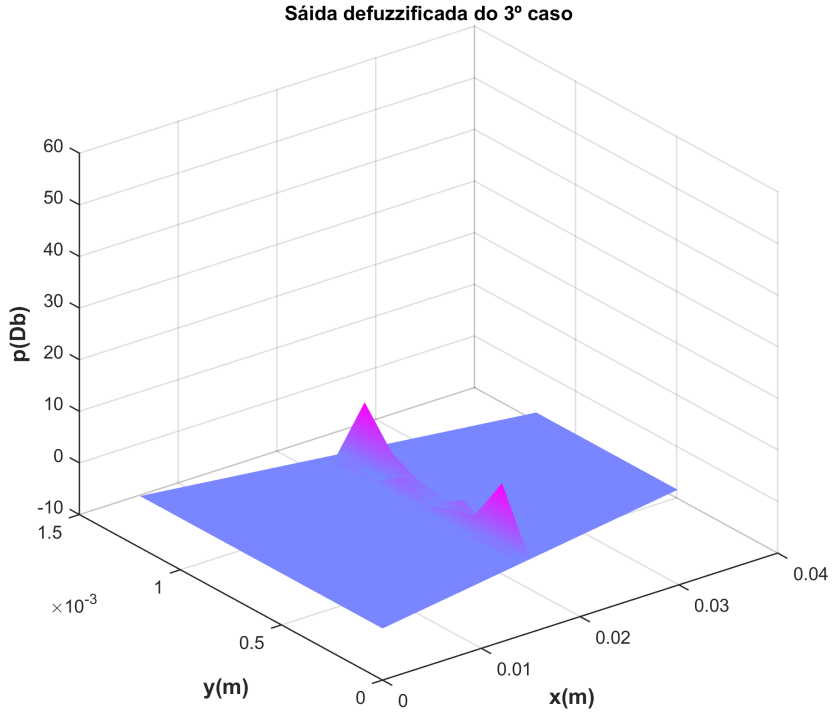


Figura 5.47: Aproximação da solução do PVI utilizando a saída defuzzificada do 3º caso. Fonte: Elaborada pelo autor.

Para facilitar a interpretação dos gráficos obtidos, nas Figuras 5.48, 5.49 e 5.50, encontram- se as representações gráficas da queda da pressão acústica para o ponto $(\overline{x}, \overline{y})$.

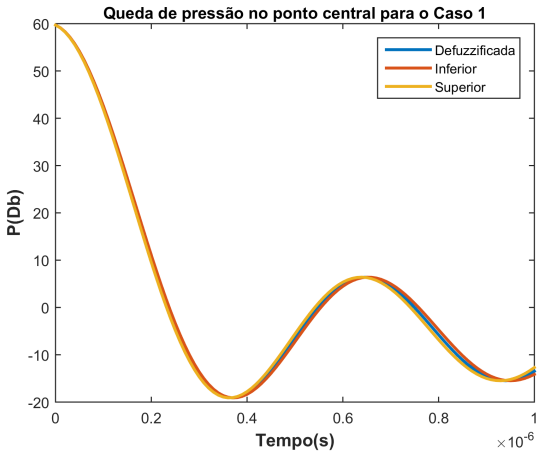


Figura 5.48: Queda de pressão no ponto $(\overline{x}, \overline{y})$ para o caso 1. Fonte: Elaborada pelo autor.

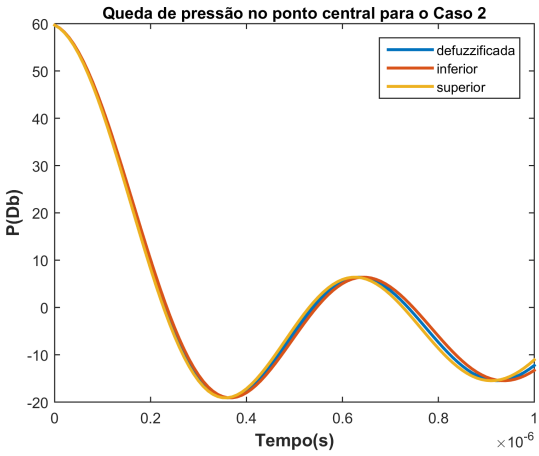


Figura 5.49: Queda de pressão no ponto $(\overline{x}, \overline{y})$ para o caso 2. Fonte: Elaborada pelo autor.

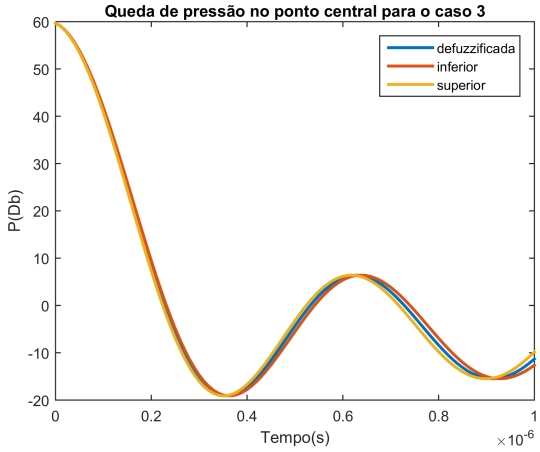


Figura 5.50: Queda de pressão no ponto $(\overline{x}, \overline{y})$ para o caso 3. Fonte: Elaborada pelo autor.

Para cada caso são calculadas as diferenças entre a saídas defuzzificada, inferior e superior. As representações gráficas das diferenças citadas encontram-se nas Figuras 5.51, 5.52 e 5.53. Note que as amplitudes das diferenças são diferentes para cada caso estudado.

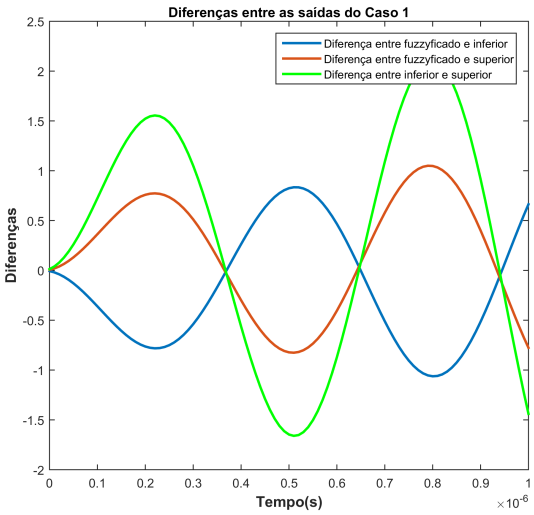


Figura 5.51: Diferenças nas aproximações das soluções utilizando as 3 saídas do 1º caso. Fonte: Elaborada pelo autor.

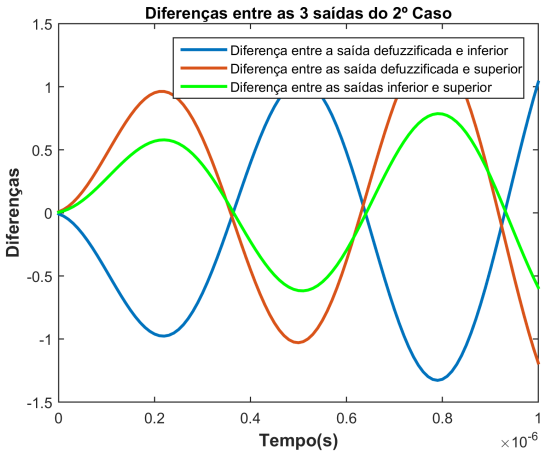


Figura 5.52: Diferenças nas aproximações das soluções utilizando as 3 saídas do 2º caso. Fonte: Elaborada pelo autor.

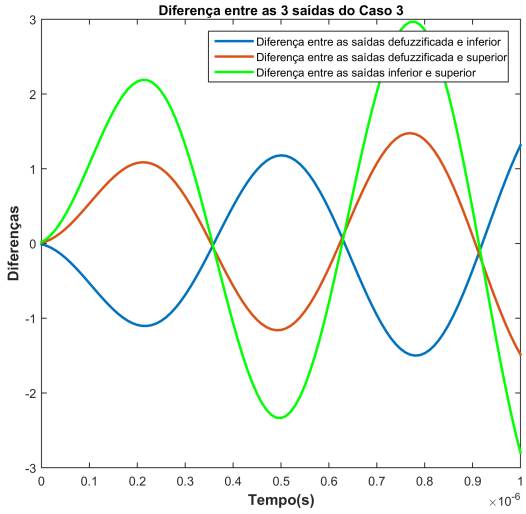


Figura 5.53: Diferenças nas aproximações das soluções utilizando as 3 saídas do 3º caso. Fonte: Elaborada pelo autor.

Novamente, para mostrar as diferenças entre cada uma das saídas do SBRF, é fixado o nó de número 289, cujas coordenadas são $(\overline{x}, \overline{y}) = (0,01742\ ,\ 0,0006045)$, que pertence ao interior do domínio. Daí, são armazenadas suas soluções à cada iteração para cada caso. Os gráficos das diferenças entre as aproximações utilizando as saídas encontram-se nas Figuras 5.54, 5.55 e 5.56.

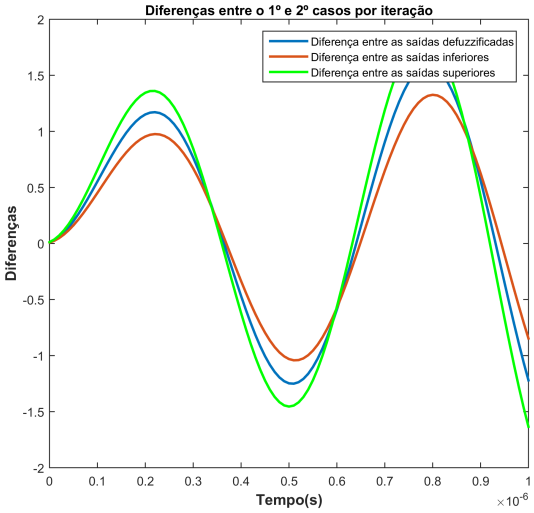


Figura 5.54: Aproximação da solução do PVI utilizando a saída defuzzificada do 2º caso. Fonte: Elaborada pelo autor.

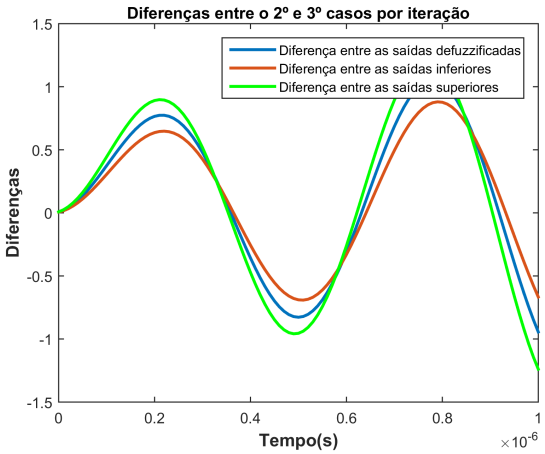


Figura 5.55: Aproximação da solução do PVI utilizando a saída inferior do 2º caso. Fonte: Elaborada pelo autor.

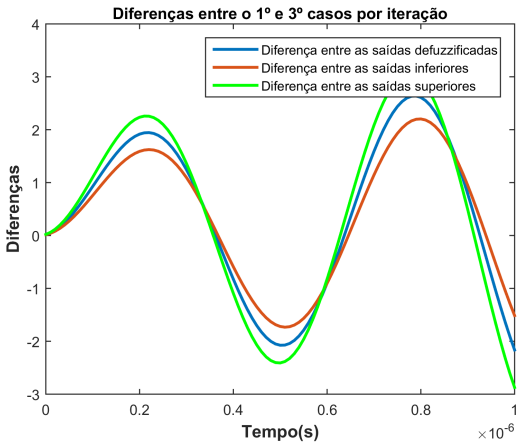


Figura 5.56: Aproximação da solução do PVI utilizando a saída superior do 2º caso. Fonte: Elaborada pelo autor.

O último modelo deste trabalho evidencia como as saídas pelo SBRF do tipo 2 intervalar com domínio irregular afetam a solução do problema. Tendo sido respeitadas as dimensões da cóclea desenrolada é possível observar as diferenças entre as três saídas do SBRF, influenciada pelas condições de temperatura e umidade discrepantes.

Observando que as escalas no sentido vertical das diferenças entre as soluções defuzzificadas no ponto central são distintas, é possível notar também que diferenças maiores entre as velocidades do som geram diferenças maiores entre as pressões à cada iteração. Apesar disso, os gráficos das diferenças apresentam um comportamento qualitativo semelhante para todos os casos de cada modelo estudado.

Após o estudo de todos os exemplos de aproximação da solução da equação da onda com parâmetro escalar, fuzzy do tipo 1 e fuzzy do tipo 2 intervalar, é possível a seguir apresentar as considerações finais do trabalho.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho, a modelagem matemática do parâmetro velocidade do som, da equação da onda acústica é realizada com novas abordagens. Várias ferramentas matemáticas são combinadas para obter um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) que determina a variável de saída, a velocidade do som, tendo como variáveis de entrada, a temperatura e a umidade. Uma rede neuro-fuzzy (ANFIS) que representa a junção entre a inteligência artificial, especificamente uma rede neural, e a teoria dos conjuntos fuzzy, em combinação com dados obtidos pelo *toolbox* CANTERA, que trata de problemas de termodinâmica, cinética química e transferência de massa, gera um SBRF do tipo 1. O método de inferência utilizado é o de Takagi-Sugeno. Em seguida, a incerteza utilizada nas variáveis de entrada e de saída é ampliada através de um SBRF do tipo 2 intervalar. Este parâmetro do tipo 2 intervalar gera três aproximações da solução da equação da onda acústica, sendo uma o valor da velocidade inferior, outra com a velocidade superior e uma para o valor defuzzificado. A novidade é utilizar os conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar em um parâmetro da equação da onda.

A abordagem utilizada neste estudo para a equação da onda acústica foi unidimensional e bidimensional, com a condição inicial dada por um pico de pressão, como é descrito a seguir:

- **Modelo Unidimensional**: para diferentes modelagens do parâmetro da equação.
  - **Parâmetro Escalar**: é possível observar como a equação da onda acústica se comporta no modelo clássico, servindo de *baseline* para os resultados posteriores.
  - **Parâmetro Fuzzy do Tipo 1**: a aproximação da solução do PVI é obtida pelo método das diferenças finitas, utilizando a velocidade do som no ar via o SBRF do tipo 1, sendo o domínio as dimensões longitudinais da cóclea. É possível observar como a velocidade influencia as soluções através da representação gráfica das diferenças por iteração em cada caso estudado, mantendo o comportamento qualitativo.
  - **Parâmetro Fuzzy do Tipo 2 Intervalar**: é possível observar o quanto as incertezas adicionadas ao processo pelo SBRF do tipo 2 intervalar construído interferem nas aproximações da solução do PVI. Além da comparação inicial entre os valores: defuzzificados, inferiores e superiores; são mostradas também as diferenças entre os três casos para condições de temperatura e umidade diferentes.

- **Modelo Bidimensional**: para diferentes abordagens do parâmetro da equação.
  - **Parâmetro Fuzzy do Tipo 1 com Domínio Regular**: o comprimento longitudinal da cóclea foi mantido, como nos casos anteriores. Porém, é adicionado uma seção transversal fixa, com as fronteiras de Dirichlet iguais a 0 que afetam o problema inicial. A resolução é feita através do método dos elementos finitos. É possível observar as diferenças obtidas através das incertezas da velocidade do som no ar.
  - **Parâmetro Fuzzy do Tipo 2 Intervalar com Domínio Regular**: a modelagem é semelhante ao problema anterior, porém utilizando o SBRF do tipo 2 intervalar. Além das diferenças entre as três saídas do sistema, foram estudadas as discrepâncias entre as soluções em diferentes condições de temperatura e umidade.
  - **Parâmetro Fuzzy do Tipo 1 com Domínio Irregular**: neste caso o domínio possui dimensões semelhantes às citadas na introdução do trabalho, representando com fidelidade o canal interno da cóclea desenrolada. A resolução desse problema ilustra o quanto o domínio irregular influencia o comportamento da pressão sonora.
  - **Parâmetro Fuzzy do Tipo 2 Intervalar com Domínio Irregular**: no último problema estudado, é possível perceber, além das conclusões retiradas do modelo anterior, que a adição de mais uma incerteza interfere no problema. Também, este modelo exibe que as variações de temperatura e umidade no ar alteram a forma como a pressão acústica se comporta.

Os resultados obtidos indicam que situações diferentes de calor e umidade podem gerar respostas diferentes das membranas internas da cóclea, visto que as mesmas reagem às movimentações do fluido que estão em contato. Os SBRF do tipo 1 e do tipo 2 intervalar obtidos, podem ser utilizados para determinar os valores da velocidade do som para outros conjuntos de dados semelhantes aos valores das entradas. Além disso, é posto que diferenças maiores entre as condições de temperatura e umidade geram discrepâncias maiores entre o comportamento da pressão acústica.

Como trabalhos futuros, podem ser considerados diferentes fluidos para modelar o fluido interno da cóclea. Além disso, é possível acoplar as equações do fluido acústico e da membrana elástica através de um sistema de equações diferenciais parcias, para estudar o comportamento da membrana basilar em diversas situações de temperatura e umidade. Uma outra possibilidade é o estudo de parâmetros fuzzy para modelar a membrana elástica. Sabe-se que fatores como a idade e tipo de trabalho do indivíduo podem prejudicar a audição. Também, existe a possibilidade dos modelos desenvolvidos serem tratados a partir de dados reais do problema, obtidos através de experimentos em laboratório, e o uso de uma rede neuro-fuzzy que construa um SBRF do tipo 2 intervalar, poderão enriquecer ainda mais o estudo deste tema.

Referências Bibliográficas

BARBOSA, L. M.; PORTES, L. A. F. Inteligência artificial. *Revista Tecnologia Educacional, Rio de Janeiro*, Rio de Janeiro-RJ, n. 236, p. 16–27, 2023.

BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. 3. ed. Campinas: Grupo de Biomatemática, IMECC/UNICAMP, 2015.

BEAR, M. F.; CONNORS, B. W.; PARADISO, M. A. *Neurociências: desvendando o sistema nervoso*. Porto Alegre-RS: Artmed editora, 2017.

BORGES, J. C. *Estudo da concentração da poluição do ar com parâmetro Fuzzy em Uberlândia*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2016.

BRAGA, A. P.; LUDERMIR, T. B.; CARVALHO, A. C. P. L. F. Redes neurais artificiais: teoria e aplicações. 2000.

BURDEN, L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. 9. ed. Boston, MA: Brooks/Cole, 2011.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. *Estatística básica*. 4. ed. São Paulo-SP: Atual Editora, São Paulo, 1987.

CASTILLO, E. R. *Modelagem da dinâmica de um grupo de indivíduos HIV positivos com parâmetro fuzzy do tipo 2*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2014.

CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE, M. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ELLIOTT, S. J.; NI, G.; MACE, B. R.; LINETON, B. A wave finite element analysis of the passive cochlea. *The Journal of the Acoustical Society of America*, AIP Publishing, v. 133, n. 3, p. 1535–1545, 2013.

FEITOSA, H. A. *Um prelúdio à lógica*. São Paulo: Unesp, 2005.

FERREIRA, M. P. S. *Equação da onda com fronteira Fuzzy para vibrações mecânicas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017.

FREITAS, F. A. *Aplicação da Teoria dos Conjuntos Fuzzy no Estudo da Impedância Eletromecânica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021.

GOODWIN, D. G.; MOFFAT, H. K.; SCHOEGL, I.; SPETH, R. L.; WEBER, B. W. *Cantera: An Object-oriented Software Toolkit for Chemical Kinetics, Thermodynamics, and Transport Processes*. 2023. ⟨https://www.cantera.org⟩. Version 3.0.0.

HONG, W.; HORII, Y. Simulation-based study on round window atresia by using a straight cochlea model with compressible perilymph. In: MDPI. *Acoustics*. Basel-Switzerland, 2022. v. 4, n. 2, p. 345–361.

ISAILOVIĆ, V.; NIKOLIĆ, M.; MILOSEVIĆ, Ž.; SAVELJIĆ, I.; NIKOLIĆ, D.; RADOVIĆ, M.; FILIPOVIĆ, N. *Finite Element Model of Cochlea–Air Conduction and Bone Conduction*. Universidade de Kragujevac: ICIST, 2015.

JAFELICE, R. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Teoria dos conjuntos fuzzy com aplicações*. 3. ed. São Carlos-SP, Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2023.

JAFELICE, R. S. M.; BERTONE, A. M. A. *Biological models via interval type-2 fuzzy sets*. Cham, Switzerland: Springer, 2021.

JANG, J.-S. Anfis: adaptive-network-based fuzzy inference system. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, IEEE, v. 23, n. 3, p. 665–685, 1993.

JOHN, R.; COUPLAND, S. Type-2 fuzzy logic: A historical view. *IEEE computational intelligence magazine*, IEEE, v. 2, n. 1, p. 57–62, 2007.

JOHNSON, C. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Stokholm-Sweden: Courier Corporation, 2012.

KINSLER, L. E.; FREY, A. R.; COPPENS, A. B.; SANDERS, J. V. *Fundamentals of acoustics*. Daryaganj New Delhi: John wiley & sons, 2000.

LACERDA, A. B. M. d.; MAGNI, C.; MORATA, T. C.; MARQUES, J. M.; ZANNIN, P. H. T. Ambiente urbano e percepção da poluição sonora. *Ambiente & Sociedade*, SciELO Brasil, v. 8, p. 85–98, 2005.

LAGANÁ, M. T. C.; FARO, A. C. M.; ARAÚJO, T. L. A problemática da temperatura corporal enquanto um procedimento de enfermagem: conceitos e mecanismos reguladores. *Revista da Escola de Enfermagem da USP*, SciELO Brasil, v. 26, n. 2, p. 173–186, 1992.

LEVEQUE, R. J. *Numerical methods for conservation laws*. Basel, Suíça: Springer, 1992. v. 214.

LIMA, E. *Curso de Análise - vol.1*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1976.

MENDEL, J. M. Uncertain rule-based fuzzy systems. *Introduction and new directions*, Springer, v. 684, 2017.

MORAES, T. B. Leb0200-física do ambiente agrícola. *Introduction and new directions*, Springer, v. 684, 2017.

NEGNEVITSKY, M. *Artificial intelligence: a guide to intelligent systems*. London: Pearson education, 2005.

NICOLAU, V.; MIHOLCA, C.; ANDREI, M. Fuzzy rules of sound speed influence on ultrasonic sensing in outdoor environments. In: IEEE. *2009 3rd International Workshop on Soft Computing Applications*. Szeged-Arad-Romania, 2009. p. 145–150.

PRUDENTE, F. A. D. *Monitoramento Estrutural por Impedância Eletromecânica via Sistemas Neuro-Fuzzy*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2024.

RAUBER, T. W. Redes neurais artificiais. *Universidade Federal do Espírito Santo*, v. 29, 2005.

SANDMANN, H. R. *Predição não-linear de séries temporais usando sistemas de arquitetura neuro-fuzzy*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, 2006.

SANTANA, P. V. *Abordagens de Sistemas Neuro-Fuzzy em Modelos Econômicos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021.

SILVA, A. T.; JAFELICE, R. M.; FILHO, U. C.; BERTONE, A. M. A. Equação da onda acústica com parâmetro fuzzy para modelar o fluido da cóclea. In: *II Reunião Mineira de Matemática*. Belo Horizonte-MG: Universidade Federal de Minas Gerais, 2023.

SILVA, I.; LUZ, A.; NERY, F. Hipotermia e ondas de Osborn. Associação de Cuidados Intermédios Médicos (ACIM), v. 3, n. 2, p. 24–28, 2013.

WINTERLE, P.; STEINBRUCH, A. *Geometria analítica*. São Paulo-SP: Makron Books, São Paulo, 2000.

Apêndice A

Matrizes de Rigidez do Elemento Padrão

Neste apêndice, são apresentados os cálculos necessários para construção das matrizes de rigidez de cada elemento. Para tal finalidade, são utilizadas as funções de base encontradas no Capítulo 4, bem como um elemento padrão que pode ser empregado na aproximação de soluções para problemas de fronteira regular. Considera-se o elemento padrão descrito na Figura A.1.

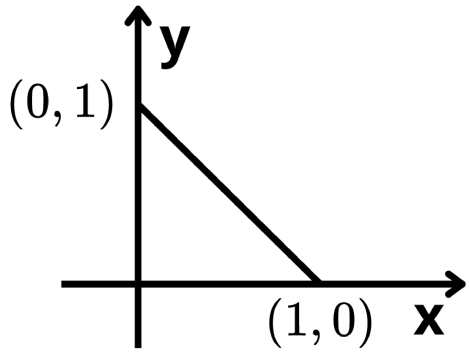


Figura A.1: Elemento padrão. Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolvendo os determinantes das funções de base da equação (4.67), além da área do elemento base, obtém-se:

$$\varphi_1(x, y) = 1 - x - y; \tag{A.1}$$

$$\varphi_2(x, y) = x; \tag{A.2}$$

$$\varphi_3(x, y) = y. \tag{A.3}$$

É possível calcular os elementos da matriz de rigidez do elemento padrão:

$$
\begin{aligned}
a_{1,1} &= (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_1) \\
&= \int_\Omega \nabla\varphi_1 \nabla\varphi_1 d\Omega \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} \langle (-1,-1), (-1,-1) \rangle \, dxdy = 1;
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{1,2} = a_{2,1} &= (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2) \\
&= \int_\Omega \nabla\varphi_1 \nabla\varphi_2 d\Omega \\
&= \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} \langle (-1,-1), (1,0) \rangle \, dxdy = \frac{-1}{2};
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{2,2} = &= (\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_2) \\
&= \int_\Omega \nabla\varphi_2 \nabla\varphi_2 d\Omega \\
&= \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} \langle (1,0), (1,0) \rangle \, dxdy = \frac{1}{2};
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{1,3} = a_{3,1} &= (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_3) \\
&= \int_\Omega \nabla\varphi_1 \nabla\varphi_3 d\Omega \\
&= \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} \langle (-1,-1), (0,1) \rangle \, dxdy = \frac{-1}{2};
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{2,3} = a_{3,2} &= (\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_3) \\
&= \int_\Omega \nabla\varphi_2 \nabla\varphi_3 d\Omega \\
&= \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} \langle (1,0), (0,1) \rangle \, dxdy = 0;
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{3,3} = &= (\nabla\varphi_3, \nabla\varphi_3) \\
&= \int_\Omega \nabla\varphi_3 \nabla\varphi_3 d\Omega \\
&= \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} \langle (0,1), (0,1) \rangle \, dxdy = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

A seguir, é apresentada a matriz de rigidez A, referente ao elemento padrão:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{A.10}$$

Para construir a matriz do produto interno entre as funções de base, têm-se os seguintes elementos:

$$\begin{aligned} c_{1,1} = (\varphi_1, \varphi_1) &= \int_\Omega \varphi_1 \varphi_1 d\Omega \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} (1-x-y)(1-x-y) dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{y-1} \left(1 - 2x - 2y + 2xy + x^2 + y^2\right) dxdy = \frac{1}{12}; \end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned} c_{1,2} = c_{2,1} = (\varphi_1, \varphi_2) &= \int_\Omega \varphi_1 \varphi_2 d\Omega \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} (1-x-y) x dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{y-1} \left(x - x^2 - xy\right) dxdy = \frac{1}{24}; \end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned} c_{1,3} = c_{3,1} = (\varphi_1, \varphi_3) &= \int_\Omega \varphi_1 \varphi_3 d\Omega \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} (1-x-y) y dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{y-1} \left(y - y^2 - xy\right) dxdy = \frac{1}{24}; \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned} c_{2,2} = (\varphi_2, \varphi_2) &= \int_\Omega \varphi_2 \varphi_2 d\Omega \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} x \cdot x dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{y-1} x^2 dxdy = \frac{1}{12}; \end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned} c_{2,3} = c_{3,2} = (_2, \varphi_3) &= \int_\Omega \varphi_2 \varphi_3 d\Omega \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} xy dxdy = \frac{1}{24}; \end{aligned} \tag{A.15}$$

$$
\begin{aligned}
c_{3,3} = (\varphi_3, \varphi_3) &= \int_\Omega \varphi_3 \varphi_3 d\Omega \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} y \cdot y dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{y-1} y^2 dx dy = \frac{1}{12}.
\end{aligned} \tag{A.16}
$$

A seguir, é apresentada a matriz C dos produtos internos das funções de base:

$$
C = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}. \tag{A.17}
$$

Apêndice B

Transformação do Elemento Triangular

O elemento padrão possui um formato fixo e nem sempre é útil, logo, torna-se necessário transformar o mesmo no elemento real utilizado na triangulação. Denota-se o elemento padrão por $\widehat{K}$ e o elemento real por K. A Figura B.1 representa graficamente um exemplo de transformação do elemento padrão à um elemento real.

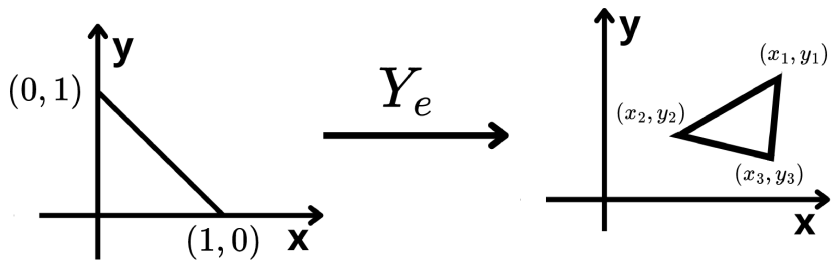


Figura B.1: Transformação do elemento padrão para o elemento real. Fonte: Elaborada pelo autor.

Consideram-se as funções de base $\varphi_1(\xi, \eta) = \eta$, $\varphi_2(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$ e $\varphi_3(\xi, \eta) = \xi$. Deseja-se encontrar uma transformação linear $Y_e : \widehat{K} \longrightarrow K$ que fazem as seguintes correspondências:

$$\begin{aligned} (0,1) &\longrightarrow (x_1, y_1); \\ (0,0) &\longrightarrow (x_2, y_2); \\ (1,0) &\longrightarrow (x_3, y_3). \end{aligned} \tag{B.1}$$

Como Y_e é uma transformação linear, têm-se que:

$$Y_e(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}, \tag{B.2}$$

logo

$$\begin{aligned} x(\xi,\eta) &= x_3 + (x_1 - x_3)\xi + (x_2 - x_3)\eta; \\ y(\xi,\eta) &= y_3 + (y_1 - y_3)\xi + (y_2 - y_3)\eta. \end{aligned} \tag{B.3}$$

É possível então calcular o jacobiano de Y_e:

$$JY_e = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix}. \tag{B.4}$$

É sabido que $\varphi_{\widehat{i}}(\xi,\eta) = \varphi_i(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$, logo, pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{\widehat{i}}}{\partial \xi} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial \varphi_{\widehat{i}}}{\partial \eta} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Substituindo as derivadas, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{\widehat{i}}}{\partial \xi} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x_1 - x_3) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y_1 - y_3); \\ \frac{\partial \varphi_{\widehat{i}}}{\partial \eta} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x_2 - x_3) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y_2 - y_3); \end{aligned} \tag{B.6}$$

que pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\widehat{i}}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_{\widehat{i}}}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \end{pmatrix}; \tag{B.7}$$

logo,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = ((JY_e)^t)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\widehat{i}}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_{\widehat{i}}}{\partial \eta} \end{pmatrix}. \tag{B.8}$$

Sejam $B = \{\varphi_1^K, \varphi_2^K, \varphi_3^K\}$ a base de funções do elemento real e $\widehat{B} = \{\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2, \widehat{\varphi}_3\}$ a base de funções do elemento padrão. Têm-se que:

$$\begin{aligned} \int_K \nabla\varphi_i^K \nabla\varphi_j^K &= \int_K (((JY_e)^t)^{-1}\nabla\widehat{\varphi}_i) \cdot (((JY_e)^t)^{-1}\nabla\widehat{\varphi}_j) \\ &= 2 \cdot \acute{A}rea(\widehat{K}) \int_{\widehat{K}} (((JY_e)^t)^{-1}\nabla\widehat{\varphi}_i) \cdot (((JY_e)^t)^{-1}\nabla\widehat{\varphi}_j). \end{aligned} \tag{B.9}$$

Apêndice C

Exemplo de Transformação do Elemento Padrão

Seja o elemento padrão $\widehat{K}$, discutido anteriormente e o elemento real K descrito na Figura C.1.

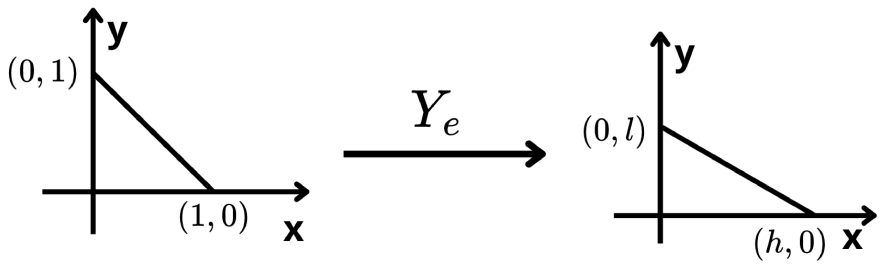


Figura C.1: Transformação do elemento padrão para o elemento real utilizado na malha do domínio regular. Fonte: Elaborada pelo autor.

Considere as funções de base do elemento padrão $\varphi_1(\xi, \eta) = \eta$, $\varphi_2(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$ e $\varphi_3(\xi, \eta) = \xi$. Deseja-se encontrar o valor de $(\nabla\varphi_i^K, \nabla\varphi_j^K)$. Considerando a equação (B.4), têm-se que:

$$JY_e = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix} \tag{C.1}$$

Têm-se ainda que:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\widehat{\varphi}_1}{\partial\xi} = 0; \quad \frac{\partial\widehat{\varphi}_2}{\partial\xi} = -1; \quad \frac{\partial\widehat{\varphi}_3}{\partial\xi} = 1; \\ &\frac{\partial\widehat{\varphi}_1}{\partial\eta} = 1; \quad \frac{\partial\widehat{\varphi}_2}{\partial\eta} = -1; \quad \frac{\partial\widehat{\varphi}_3}{\partial\eta} = 0. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Com todos os dados dispostos, é possível calcular os elementos da matriz de rigidez G desejada através da equação (B.9). Suponha que deseje-se calcular o elemento G_{11}. Têm-se então que:

$$G_{1,1} = \int_K \nabla\varphi_1^K \nabla\varphi_1^K = \int_K (((JY_e)^t)^{-1}\nabla\widehat{\varphi}_1) \cdot (((JY_e)^t)^{-1}\nabla\widehat{\varphi}_1). \tag{C.3}$$

Inicia-se o processo calculando JY_e para a função desejada. Então:

$$JY_e = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h & l \\ -h & 0 \end{pmatrix},$$

então

$$JY_e^T = \begin{pmatrix} -h & l \\ -h & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$(JY_e^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{h} \\ \frac{1}{l} & \frac{-1}{l} \end{pmatrix}. \tag{C.4}$$

Tem-se ainda que:

$$\nabla\varphi_1 = (JY_e^T)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_{\tilde{1}}}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial\varphi_{\tilde{1}}}{\partial\eta} \end{pmatrix}, \tag{C.5}$$

logo

$$\begin{aligned} \nabla\varphi_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{h} \\ \dfrac{1}{l} & \dfrac{-1}{l} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{h} \\ \dfrac{-1}{l} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{C.6}$$

Agora, basta calcular a integral desejada:

$$\begin{aligned} G_{1,1} = \int_k \nabla\varphi_1 \nabla\varphi_1 &= \int_K ((JY_e)^t)^{-1}\nabla\widehat{\varphi}_1) \cdot (((JY_e)^t)^{-1}\nabla\widehat{\varphi}_1) \\ &= 1 \cdot \int_0^l \int_0^{h\left(1-\frac{y}{l}\right)} \left\langle \left(\frac{-1}{h}, \frac{-1}{l}\right); \left(\frac{-1}{h}, \frac{-1}{l}\right) \right\rangle dx\, dy \\ &= \int_0^l \int_0^{h\left(1-\frac{y}{l}\right)} \frac{1}{h^2} + \frac{1}{l^2} dx dy \\ &= \frac{\dfrac{l}{h} + \dfrac{h}{l}}{2} \end{aligned} \tag{C.7}$$

Calculando todas as integrais necessárias é possível criar a matriz G, dada por:

$$G = \begin{pmatrix} \dfrac{\dfrac{l}{h} + \dfrac{h}{l}}{2} & -\dfrac{l}{2h} & -\dfrac{h}{2l} \\ -\dfrac{l}{2h} & \dfrac{l}{2h} & 0 \\ -\dfrac{h}{2l} & 0 & \dfrac{h}{2l} \end{pmatrix}. \tag{C.8}$$

Apêndice D

Instruções para a Elaboração do Programa Computacional Bidimensional com Domínios Irregulares

Nesta seção, é exibido o procedimento para implementação do programa computacional que permite a resolução do problema com domínios irregulares. Todos os passos são enumerados na ordem da implementação. Considere o domínio descrito na equação (5.40).

1. Como esse conjunto forma um trapézio regular, para iniciar o programa, é necessário criar um arquivo com extensão **.dat** contendo as coordenadas dos vertices do domínio, sendo a primeira e a segunda colunas correspondentes às coordenadas x e y, respectivamente. Este arquivo pode ser gerado através aplicativo *Notepad*.
2. No *Matlab*, inicie o *toolbox pde* (Partial Differential Equation Toolbox), com o comando *pdeinit*.
3. Gere uma matriz utilizando o arquivo .dat, em seguida, inicie a ferramenta *pdepoly*, que é responsável por desenhar o polígono do domínio. Após esse processo, a janela do *toolbox pde* é aberta.
4. Dentro do aplicativo, clique na aba *Mesh* na barra de ferramentas. entre os itens desta aba, escolha a opção *Initialize Mesh*, que automaticamente, delimita uma malha inicial de discretização. Caso desejado, também é possível utilizar a ferramenta *Refine Mesh*, presente na mesma aba, para obter malhas mais refinadas.
5. Após obter a malha desejada, basta exportar a mesma, através da função *Export Mesh*, presente na mesma aba. Essa função é responsável por gerar três vetores: e (*elements*), que é a matriz que numera os elementos triangulares da malha; p (*points*), sendo a matriz que descreve as coordenadas dos pontos de discretização utilizados; e t (*triangles*), que descrevem os elementos da malha.
6. Por último, salve as três matrizes em um único arquivo com extensão *.mat*. Esta etapa finaliza o processo de confecção da malha.
7. Em um novo programa, carregue o arquivo *.mat* gerado anteriormente.
8. Defina os valores do incremento temporal desejado (Δt), além de uma variável que armazene o número total de nós da malha.

9. Construa, a partir da matriz e, o vetor inb, que é composto pelos índices dos nós das fronteiras do domínio. Crie uma variável responsável por contabilizá-los. Também, é necessário criar uma variável que armazene o último nó presente na fronteira.
10. Defina a matriz ira, que enumera novamente os nós da fronteira à partir do valor 1, além de definir os valores da função na fronteira, que no caso desse trabalho são de Dirichlet, com valor nulo.
11. É necessário ainda o número de funções de base e o número total de elementos da malha. Para tal finalidade, crie um vetor inz, a partir da função *find*, que retorna na forma de vetor os índices e valores dos elementos diferentes de zero na matriz inb. Após isso, os valores da matriz inb em cada nó diferente de zero receberão o valor da mesma posição presentes na matriz ira.
12. Inicie a resolução do problema através do MEF. Primeiramente, crie as matrizes de elemento padrão, como nas equações (A.10) e (A.17). Defina também os valores dos gradientes de cada função de base do elemento padrão, as mudanças de variável necessárias e a matriz Y_e, como descritas no Apêndice B.
13. Formule as novas matrizes de Rigidez $Afull$ e $Bfull$, que são utilizadas para resolução do problema na malha irregular, concatenando-se as matrizes de rigidez de cada elemento.
14. Crie duas matrizes esparsas A e B, através da função *sparse* aplicada nas matrizes $Afull$ e $Bfull$, respectivamente. Estas novas matrizes permitem a utilização da função lu para fatorar a matriz A através do processo de fatoração LU.
15. Crie o vetor de índices dos nós do interior do domínio, utilizando da função $\sim ismember$, que retorna todos os nós diferentes de zero presentes nas matrizes. Lembre-se que os nós da fronteira receberam o valor de zero após o tratamento pelas matrizes ira e irb. Implemente as condições iniciais do problema em todos os nós interiores do domínio, além da aproximação por diferenças finitas da solução após uma iteração. Feito isso, é possível iniciar a resolução do sistema de equações definido.
16. Utilize a formulação do problema no processo iterativo do tempo.
17. Para plotagem da solução, empregue a função *pdesurf*, que lê as matrizes p, t e a matriz da solução do sisema para representar graficamente a aproximação da solução do PVI desejado. Também é importante salientar que, apesar da facilidade de utilização da função para plotagem dos gráficos, a mesma não permite alteração da cor, utilizando sempre o mesmo padrão em todos os gráficos.