

FELIPE PAMPLONA MARIANO

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE
NAVIER-STOKES USANDO UMA HIBRIDAÇÃO
DAS METODOLOGIAS FRONTEIRA IMERSA E
PSEUDO-ESPECTRAL DE FOURIER**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2011

FELIPE PAMPLONA MARIANO

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE
NAVIER-STOKES USANDO UMA HIBRIDAÇÃO DAS
METODOLOGIAS FRONTEIRA IMERSA E
PSEUDO-ESPECTRAL DE FOURIER**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOCTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Uberlândia - MG

2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU , MG, Brasil

M333s Mariano, Felipe Pamplona, 1981-
 Solução numérica das Equações de Navier-Stokes usando uma hibri-
 dação das metodologias Fronteira Imersa e Pseudo-Espectral de Fourier /
 Felipe Pamplona Mariano. - 2011.
 153 f. : il.

Orientador: Aristeu da Silveira Neto.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.

1. Dinâmica dos fluidos - Matemática. 2. Dinâmica dos fluidos - Mode-
los matemáticos - Teses. 2. Dinâmica dos fluidos - Processamento de da-
dos - Teses. I. Silveira Neto, Aristeu da, 1955- II. Universidade Federal de
Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III.
Título.

CDU: 532.51:519.6

FELIPE PAMPLONA MARIANO

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES USANDO
UMA HIBRIDAÇÃO DAS METODOLOGIAS FRONTEIRA IMERSA E
PSEUDO-ESPECTRAL DE FOURIER**

Tese **APROVADA** pelo Programa de
Pós-graduação em Engenharia Mecânica da
Universidade Federal de Uberlândia.
Área de concentração: Transferência de Calor
e Mecânica dos Fluidos.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto (Orientador) UFU

Prof. Dr. Álvaro Toubles Prata (UFSC)

Prof. Dr. João Luiz Filgueiras de Azevedo (IAE-CTA/ITA)

Prof. Dr. Francisco Paulo Lé pore Neto (UFU)

Prof. Dr. Francisco José de Souza (UFU)

Uberlândia, março de 2011

Aos meus pais e à minha filha Laura

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente aos meus pais, Jorge Sebastião Mariano e Ana Silvia Pamplona Mariano, por toda a atenção, respeito, educação e amor incondicional que me foram dados ao longo da minha vida.

À minha filha, Laura Tami Mano Mariano, quem me deu o maior incentivo e força para realizar o presente trabalho. Na simplicidade de suas palavras: “Força papai!”.

Aos meus familiares, principalmente, meus irmãos, Mônica Pamplona Mariano e Fábio Pamplona Mariano por sempre estarem ao meu lado e acreditarem em mim.

Ao meu orientador e amigo Professor Aristeu da Silveira Neto, agradeço pelos seus ensinamentos, conselhos (profissionais e pessoais) e paciência, transmitidos a mim ao longo dessa jornada.

Aos meus amigos do MFLab, da FEMEC e da UFU, além de todos que, de uma maneira ou de outra, foram indispensáveis para a realização deste trabalho. Em especial, aos meus amigos Carlos Frederico Bettencourt da Silva e Leonardo de Queiroz Moreira, pelas inestimáveis idéias e ajudas desde o início dos estudos sobre os métodos espectrais.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior por financiar meus estudos durante este período do curso de doutorado.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, juntamente com a Coordenação do seu Programa de Pós-Graduação, onde tive todo suporte e infra-estrutura necessários para realização dos meus trabalhos.

À Deus por me acompanhar nesta jornada, sempre me dando serenidade para discernir entre o certo e o errado, e me dando forças para seguir o caminho do bem.

MARIANO, F. P., **Solução numérica das equações de Navier-Stokes usando uma hibridação das metodologias fronteira imersa e pseudo-espectral de Fourier**. 2011. 153 f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RESUMO

No presente trabalho é desenvolvida uma nova metodologia para a solução das equações de Navier-Stokes na formulação incompressível aplicada a escoamentos sobre geometrias complexas. Ela é baseada no acoplamento da metodologia pseudo-espectral de Fourier (MPEF) juntamente com a metodologia da fronteira imersa (MFI). As principais particularidades do MPEF é a alta acurácia numérica, aliada com o baixo custo computacional, pois não é necessário resolver o sistema linear do acoplamento pressão-velocidade. Entretanto, ela é limitada a problemas com condições de contorno periódicas. Com o intuito de expandir a aplicabilidade da MPEF a outros problemas da Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD), ela foi acoplada à MFI. A MFI é uma metodologia desenvolvida para simular escoamentos sobre geometrias complexa e móveis usando malha cartesiana. Normalmente, apresenta baixa acurácia nos resultados próximos à região da interface imersa. Com a hibridação proposta no presente trabalho, obtém-se um aumento da precisão dos resultados sobre a fronteira. No presente trabalho mostra-se os resultados de verificação e validação da metodologia híbrida. Para a verificação utilizou-se a técnica das soluções manufaturas, obtendo quarta ordem de convergência numérica. Para a validação simularam-se problemas clássicos de CFD: escoamentos sobre degrau $2D$ e $3D$ e escoamentos sobre cilindros. A fim de testar as potencialidades da metodologia também simulou-se a queda de uma partícula em um meio fluido, o qual constituiu um problema de interação fluido-estrutura. Os resultados mostraram-se de acordo com os dados da literatura.

Palavras Chave: Dinâmica dos Fluidos Computacional, Método Pseudo-Espectral de Fourier, Método da Fronteira Imersa.

MARIANO, F. P., **Numerical solution of Navier-Stokes equations using a hybrid methodology of immersed boundary and Fourier pseudo-spectral.** 2011. 153 f. Doctor Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

ABSTRACT

In the present these a new methodology is developed for incompressible Navier-Stokes equations applied in flow over complex geometries. This methodology is supported by coupling of Fourier pseudo-spectral methodology (FPSM) and immersed boundary methodology (IBM). The main features of FPSM is high numerical accuracy combined with high computational efficiency, since is not necessary to solve the linear system for pressure-velocity coupling. However, it is restricted to problems with periodic boundary conditions. In order to expand the FPSM applicability in Computational Fluid Dynamics (CFD) it is coupled with IBM. The IBM was carried out to solve flows over complex and moving geometries using a cartesian mesh. Generally, IBM reach only low accuracy in solution near of immersed interface. Using the hybridation proposed in the present work, the accuracy increase in results near of boundary. In the present work are shown verification and validation results of hybrid methodology. Manufactured solutions technique is used in order to verify the IMERSPEC methodology. Fourth order convergence rate is obtained. For validation of methodology classical CFD benchmarks flows are simulated: flow over a backward-facing step $2D$ and $3D$ and flow over a cylinders. In order to demonstrate the methodology capabilities are also simulated the free fall of rigid body, which is a fluid-structure interaction problem. The results of all benchmark problems are in agreement with literature data.

Keywords: Computational Fluid Dynamics, Fourier Pseudo-Spectral Method, Immersed Boundary Method.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Comparação de três tipos de métodos. As linhas finas indicam os pontos (círculos fechados) que afetam diretamente o cálculo da derivada nos pontos mostrados sobre a linha do domínio pelos círculos abertos (BOYD, 2000) . .	4
1.2	Ilustração conceitual da utilização dos métodos espectrais aplicados em CFD no contexto da simulação numérica direta (KIRBY; KARNIADAKIS, 2003).	6
1.3	Comparação do custo computacional entre a transformada discreta de Fourier (DFT) e a transformada rápida de Fourier (FFT) (CANUTO et al., 2006). .	8
2.1	Simulação do escoamento dentro de um coração humano, Griffith et al. (2007).	15
2.2	a) Estruturas turbilhonares sobre uma esfera (CAMPREGHER, 2005) e b) escoamento sobre um modelo de automóvel (VEDOVOTO, 2007).	18
2.3	Esboço do esquema utilizado para determinar as células fantasmas (G); $\times$ são os pontos necessários para o cálculo da força e as células hachuradas representam o interior do corpo imerso, (TSENG; FERZIGER, 2003).	19
2.4	Esboço da região próxima à interface imersa, mostrando o volume de controle do método “cut-cell” (MITTAL; IACCARINO, 2005).	20
2.5	Esquemas de interpolação propostos por Fadlun et al. (2000).	21
2.6	Jato simulado por Uzun (2003), contornos instantâneos do módulo da vorticidade para $Re_D = 36.000$	23
2.7	Campo médio de vorticidade, ω_z , com linhas de corrente superpostas para número de Reynolds igual a 10.000 e malha 95×95 obtido com: (a) discretização de segunda ordem e (b) discretização de quarta ordem (PINHO, 2006). . . .	24

2.8	Comparação dos perfis da componente de velocidade média horizontal, Reynolds igual a 10.000, obtidos com malha de 95×95 (PINHO, 2006) e com esquemas de segunda e quarta ordem.	24
2.9	Trabalho computacional, número de operações com pontos flutuantes requeridos para integrar uma equação advectiva linear, para um determinado tempo de simulação, enquanto é mantido um erro de fase de 10% (KIRBY; KARNIADAKIS, 2003).	25
2.10	Visualizações do módulo da vorticidade em um jato natural: (a) Isosuperfície de vorticidade $= 1,3 \text{ s}^{-1}$ resolvido pelo método pseudo-espectral de Fourier (SOUZA, 2005), (b) visualização experimental via PIV (MATSUDA; SAKAKIBARA, 2005).	28
2.11	Simulação do escoamento em uma cavidade com tampa deslizante utilizando o método pseudo-espectral de Fourier acoplado com o método da fronteira imersa - modelo físico virtual (MARIANO, 2007).	29
2.12	Simulação de escoamento sobre um cilindro de base quadrada (MARIANO et al., 2010).	30
3.1	Esboço dos domínios de cálculo utilizados na metodologia da Fronteira Imersa, onde $\vec{x}$ posiciona um ponto qualquer no domínio euleriano (Ω) e $\vec{X}$ posiciona um ponto qualquer no domínio lagrangiano (Γ).	34
3.2	Trem de pouso imerso em um domínio euleriano (VEDOVOTO, 2007). . . .	35
3.3	Função distribuição do tipo gaussiana W_g (Eq. 3.6) proposta por Peskin (2002). . . .	37
3.4	Definição do plano π	45
3.5	Termos da equação de Navier-Stokes definidos em relação ao plano π	45
3.6	Projeção do termo fonte e do termo advectivo sobre o plano π	47
3.7	Representação esquemática dos domínios de cálculo: euleriano e lagrangiano. . . .	55
4.1	Solução manufaturada - vórtices de Taylor-Green em decaimento sem fronteira imersa, visualizações em $t/t_r = 3,0$. (a) Campo da componente de velocidade horizontal, (b) campo de pressão, superpostos pelos vetores velocidade. . . .	62

4.2	Evolução temporal da norma L_2 do campo da componente de velocidade horizontal e do campo de pressão.	63
4.3	Domínio de cálculo com a fronteira imersa (Γ) coincidente com os nós de colocação eulerianos (Ω).	64
4.4	Campo de pressão superposto pela malha que define a geometria lagrangiana em $t/t_r = 3, 0$	65
4.5	Evolução temporal da norma L_2 do campo da componente de velocidade horizontal e do campo de pressão.	66
4.6	Domínio de cálculo com a fronteira imersa (Γ) não coincidente com os nós de colocação eulerianos (Ω).	67
4.7	Comparação da ordem de convergência espacial entre diferentes funções distribuição.	68
4.8	Ordem de convergência espacial para a simulação com a função distribuição cúbica, (a) variáveis eulerianas e (b) variáveis lagrangianas.	71
4.9	Norma L_2 da componente de velocidade horizontal euleriana, comparação da convergência espacial entre diferentes funções distribuição e interpolação. . .	72
4.10	Posição da interface lagrangiana sobre a malha euleriana.	73
4.11	Norma L_2 da componente de velocidade horizontal.	74
4.12	Norma L_2 da componente horizontal da velocidade.	75
4.13	Evolução temporal da norma L_2 da componente horizontal de velocidade (a) euleriana (u/U_∞) e (b) lagrangiana (U/U_∞).	76
4.14	Expansão brusca: características físicas globais.	78
4.15	Expansão brusca: características geométricas.	78
4.16	Domínio periódico que enclausura o problema de uma expansão brusca. . . .	80
4.17	Detalhe das condições de contorno periódicas na direção do escoamento principal sobre um degrau a $Re_h = 6000$	81
4.18	Túnel de vento de circuito fechado comparado com o domínio de cálculo da Fig. 3.7 usado na metodologia IMERSPEC.	82
4.19	Campo de velocidade horizontal sobre o degrau a $Re_h = 400$ e $tU_\infty/h = 400$. .	83
4.20	Linhas de corrente sobre o degrau a $Re_h = 400$ e $tU_\infty/h = 400$	84

4.21	Detalhes das linhas de corrente sobre o degrau a $Re_h = 400$ em $tU_\infty/h = 400$.	84
4.22	Detalhes da linhas de corrente na zona de amortecimento (a); Perfil da componente de velocidade horizontal em $y/h=1,49$ (b); a $Re_h = 400$ e $tU_\infty/h = 400$.	85
4.23	Comparação dos perfis da componente de velocidade horizontal do presente trabalho com o trabalho experimental de Lee e Mateescu (1998) e com o trabalho numérico de Gartling (1990), em (a) $x/h = 0, 0$; (b) $x/h = 14, 0$; (c) $x/h = 30, 0$.	86
4.24	Evolução temporal da norma L_2 dos perfis de velocidade na entrada, da componente horizontal (a) e da componente vertical (b).	87
4.25	Evolução temporal da norma L_2 na parede inferior da componente de velocidade horizontal (a) e vertical (b).	88
4.26	Influência do refinamento da malha no escoamento complementar: (a) 1024×32 ; (b) 2048×64 ; (c) 4096×128 .	89
4.27	Evolução do perfil da componente de velocidade horizontal na entrada do domínio, dentro do processo de ciclagem, no primeiro passo de tempo da simulação, utilizando a metodologia IMERSPEC.	91
4.28	Evolução temporal da norma L_2 no perfil de entrada da componente de velocidade horizontal (a) e velocidade vertical (b).	92
4.29	Evolução temporal da norma L_2 na parede inferior da componente de velocidade horizontal (a) e vertical (b).	93
4.30	Campos instantâneos da componente de vorticidade, na direção z , (ω_z) para diferentes Re_h no instante $tU_\infty/h = 800, 0$.	95
4.31	Evolução temporal da componente de velocidade horizontal na posição $(x; y) = (14, 0; 1, 5)$ (a) e $(x; y) = (40, 0; 1, 5)$ (b).	97
4.32	Densidade espectral de energia turbulenta obtido através da análise espectral das sondas de velocidade temporal mostradas na Fig. 4.31 (b) para $Re_h = 1000$ e $Re_h = 6000$.	98
4.33	Evolução temporal do máximo resíduo de massa para a simulação através da expansão brusca a $Re_h = 6000$.	98
4.34	Campos instantâneos de vorticidade (ω) em diferentes tempos para $Re_h = 6000$.	99

4.35	Detalhes do escoamento da Fig. 4.34 com $Re_h = 6000$ em $tU_\infty/h = 100, 0$.	100
4.36	Perfis de velocidade longitudinal em $tU_\infty/h = 100, 0$ nas posições (a) $(x/h; z/h) = (7, 0; 1, 0)$ e (b) $(x/h; z/h) = (15, 0; 1, 0)$ comparados com os resultados experimentais de Lee e Mateescu (1998) e com os resultados da simulação bidimensional apresentados na Fig. 4.23.	103
4.37	Escoamento sobre um degau a $Re_h = 1000$ em $tU_\infty/h = 100, 0$. (a) Iso-superfícies da componente de vorticidade $\omega_z = -1, 0$ (escura) e $\omega_z = 1, 0$ (clara); (b) Iso-superfícies da componente de vorticidade $\omega_z = -1, 0$; (c) Plano da componente de vorticidade no centro do domínio $-1, 0 < \omega_z < 1, 0$.	104
4.38	Evolução temporal da norma L_2 da velocidade longitudinal (a) no plano de entrada ($z/h = 0$) e (b) no plano da parede inferior ($y = 0$).	106
4.39	Domínio de cálculo para as simulações de escoamentos sobre cilindros.	107
4.40	Campo de pressão do escoamento sobre cilindro a $Re_D = 40$ em $tU_\infty/D = 500$.	109
4.41	Linhas de corrente sobre um cilindro imerso em um escoamento a $Re_D = 40$ em $tU_\infty/D = 500$.	110
4.42	Vetores velocidade sobre um cilindro imerso em um escoamento a $Re_D = 40$ em $tU_\infty/D = 500$.	110
4.43	Evolução temporal da norma L_2 das componentes de velocidade (a) horizontal (b) vertical, sobre o cilindro imerso.	112
4.44	Campos instantâneos da componente de vorticidade perpendicular ao plano xy , $-1, 0 \leq \omega_z \leq 1, 0$, em um escoamento sobre um cilindro circular, a $Re_D = 300$.	114
4.45	Campo da componente de vorticidade, ω_z , $-1, 0 \leq \omega_z \leq 1, 0$, em um escoamento sobre um cilindro circular com diferentes números de Reynolds em $tU_\infty/D = 300$.	117
4.46	Determinação do número de Strouhal (frequência de formação de vórtices).	118
4.47	Evolução temporal do coeficiente de arrasto das simulações com (a) $Re_D = 100$ e (b) $Re_D = 300$.	119
4.48	Evolução temporal do coeficiente de sustentação das simulações com (a) $Re_D = 100$ e (b) $Re_D = 300$.	119

4.49	Esboço do domínio de cálculo utilizado nas simulações da queda de um corpo rígido em um meio fluido.	121
4.50	Forças fluido-dinâmicas que agem sobre a interface lagrangiana.	123
4.51	Representação esquemática do corpo rígido e os eixos de referência utilizados.	124
4.52	Forças que modelam o choque entre o corpo e a interface inferior.	125
4.53	Evolução temporal do campo vorticidade da queda de um cilindro com $\rho_p = 1,50 [kg/m^3]$ em um fluido com $\rho = 1,0 [kg/m^3]$ e $\mu = 0,01 [kg/(ms)]$	127
4.54	Evolução temporal (a) da posição vertical do centro do cilindro, X_c , (b) do número de Reynolds, Re_t	128
4.55	Evolução temporal (a) da posição na vertical do centro do cilindro X_c (b) e da componente de velocidade vertical U_p para um cilindro com $\rho_p/\rho = 1,5$ movendo-se em um fluido com $\mu = 0,01 [kg/(ms)]$	129
4.56	Comparação do presente trabalho, com o trabalho de Wan e Turek (2007) da evolução temporal (a) da componente de velocidade vertical, U_p , para um corpo cilíndrico com $\rho_p/\rho = 1,5$ movendo-se em um fluido com $\mu = 0,01 [kg/(ms)]$ (b) da energia cinética de translação.	130
4.57	Campo de vorticidade instantâneo, evolução do choque do cilindro com a interface inferior.	134

LISTA DE TABELAS

3.1	Coeficientes do esquema Runge-Kutta RK46.	53
4.1	Comparação da posição do ponto de recolamento para diferentes malhas a $Re_h = 400$	90
4.2	Tempo de processamento de CPU para 10 iterações no tempo e $NL = 200$ para diferentes malhas.	90
4.3	Comparação da posição dos pontos de recolamento e descolamento para diferentes números de ciclos do método de multipla forçagem.	94
4.4	Tempo de processamento de CPU para 10 iterações no tempo e $N_x = 2048$ e $N_y = 64$	94
4.5	Comparação da posição do ponto de recolamento na parede inferior (x_r/h) para diferentes números de Re_h	96
4.6	Comparação da posição dos pontos de recolamento e descolamento para o escoamento sobre degrau a $Re_h = 400$, a simulação bidimensional foi realizada utilizando 1024×64 nós de colocação eulerianos e 200 interações no processo de ciclagem.	102
4.7	Comparação da posição média dos pontos de recolamento e descolamento para o escoamento sobre degrau a $Re_h = 1000$	105
4.8	Comparação entre diferentes trabalhos da posição do centro das recirculações, $(x_c; y_c)$, posição do ponto de estagnação a jusante do cilindro, L_c e o coeficiente de arrasto para o escoamento sobre um cilindro a $Re_D = 40$	111

4.9	Refinamento de malha, comparação da posição do centro das recirculações, $(x_c; y_c)$, da posição do ponto de estagnação, L_c , e do coeficiente de arrasto para o escoamento sobre um cilindro a $Re_D = 40$	112
4.10	Número de Strouhal dos escoamentos sobre cilindro circular para diferentes números de Reynolds.	118
4.11	Coeficiente de arrasto médio dos escoamentos sobre cilindro circular para diferentes números de Reynolds.	120
4.12	Flutuação média do coeficiente de sustentação dos escoamentos sobre cilindro circular para diferentes números de Reynolds.	120
4.13	Comparação do número de Reynolds terminal, Eq. 4.35, entre diferentes trabalhos.	129

LISTA DE SÍMBOLOS

Siglas

<i>AUX</i>	- variável auxiliar do Runge-Kutta
<i>BZ</i>	- zona de amortecimento (“buffer zone”)
<i>CFD</i>	- “Computational Fluid Dynamics”
<i>DF</i>	- “Direct Forcing”, Modelo da imposição direta da força
<i>DFT</i>	- “Direct Fourier Transform”, transformada discreta de Fourier
<i>DNS</i>	- “Direct Numerical Simulation”, simulação numérica direta
<i>EDP</i>	- Equação Diferencial Parcial
<i>FEMEC</i>	- Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia
<i>FFT</i>	- “Fast Fourier Transform”, transformada rápida de Fourier
<i>FZ</i>	- zona de forçagem
<i>IMERSPEC</i>	- Metodologia da Fronteira Imersa acoplada com a metodologia pseudo-espectral de Fourier
<i>LES</i>	- “Large Eddy Simulation”, simulação de grandes escalas
<i>MDF</i>	- “Multi-Direct Forcing”, método da múltipla forçagem,
<i>MFI</i>	- Metodologia da Fronteira Imersa
<i>MFLab</i>	- Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia
<i>MFV</i>	- Modelo Físico Virtual
<i>MPEF</i>	- Metodologia Pseudo-Espectral de Fourier
<i>PIV</i>	- “Particle Image Velocimetry”
<i>tnl</i>	- termo não linear das equações de Navier-Stokes
<i>UFU</i>	- Universidade Federal de Uberlândia
<i>visc</i>	- termo viscoso (difusivo) das equações de Navier-Stokes

Operadores

∂	- derivada parcial
$\int$	- integral
$\max$	- máximo valor
$\min$	- mínimo valor
$\sum$	- somatória
$\wp$	- projeção

Subscritos

i	- índice da notação tensorial
j	- índice da notação tensorial
∞	- infinito
PhD	- “Periodical Domain”, domínio periódico
PhD	- “Physical Domain”, domínio físico

Sobrescritos

a	- variável analítica
it	- iteração atual
p	- vetor projetado
t	- variável no tempo atual
$\hat{}$	- variável no espaço espectral de Fourier
$*$	- variável temporária

Letras gregas

α	- constante da mola em $[N/m]$ ou variável auxiliar do Runge-Kutta
β	- fator de amortecimento em $[Ns/m]$ ou variável auxiliar do Runge-Kutta
Δt	- discretização do tempo em $[s]$
Δs	- discretização do comprimento do domínio lagrangiano em $[m]$
Δx	- discretização do comprimento do domínio na direção x em $[m]$
Δy	- discretização do comprimento do domínio na direção y em $[m]$
Δz	- discretização do comprimento do domínio na direção z em $[m]$
ε	- resíduo das iterações do método da múltipla força
θ	- função filtro
Γ	- domínio lagrangiano
ι	- Número imaginário, $\iota = \sqrt{-1}$
μ	- viscosidade dinâmica do fluido em $[Ns/m^2]$
ν	- viscosidade cinemática do fluido em $[m^2/s]$
π	- plano de divergência nula, ou número real constante $\pi = 3,14159265359$
ρ	- Massa específica do fluido em $[kg/m^3]$
ϕ	- função qualquer
Ω	- domínio euleriano
τ	- tangente unitária

Letras latinas

Cd	- Coeficiente de arrasto
Cl	- Coeficiente de sustentação
D	- núcleo de Dirac
$\vec{f}$	- campo de força euleriano em $[N/m^3]$
$\vec{F}$	- campo de força lagrangiano em $[N/m^3]$
$\vec{F}c$	- força global que o fluido faz sobre um corpo imerso $[N/m^3]$
$freq$	- frequência em $[Hz]$
h	- espaçamento entre dois pontos de colocação eulerianos
$\vec{k}$	- vetor número de onda em $[m^{-1}]$
L	- comprimento do domínio em $[m]$ ou norma do erro
NL	- número de iterações
Np	- número de iterações
N_x	- número de pontos de colocação na direção x
N_y	- número de pontos de colocação na direção y
N_z	- número de pontos de colocação na direção z
p	- campo de pressão euleriano em $[N/m^2]$
P	- campo de pressão lagrangiano em $[N/m^2]$
q	- ordem de convergência numérica
r	- distância adimensionalizada entre um ponto lagrangiano até um ponto de colocação euleriano
s	- superfície lagrangiana
$\vec{r}$	- vetor distância entre o centro de massa de uma partícula até um ponto lagrangiano
Re	- número de Reynolds
RHS	- variáveis que estão do lado direito de uma equação diferencial parcial
St	- número de Strouhal
t	- tempo em $[s]$
T	- campo de tensão de uma fibra elástica em $[Nm]$
$\vec{u}$	- velocidade euleriana em $[m/s]$
$\vec{U}$	- velocidade lagrangiana em $[m/s]$
$\vec{x}$	- vetor posição de um ponto euleriano $[m]$
$\vec{X}$	- vetor posição de um ponto lagrangiano $[m]$
W	- função peso utilizada nos processos de distribuição e interpolação

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Aspectos gerais	1
1.2	Métodos de alta ordem de convergência	5
1.3	Método pseudo-espectral de Fourier	7
1.4	Geometrias complexas e o método da fronteira imersa	9
1.5	Justificativas do presente trabalho	10
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1	Metodologia da fronteira imersa	13
2.1.1	Imposição da força de forma contínua	14
2.1.2	Imposição da força de forma discreta	19
2.1.2.1	Imposição direta das condições de contorno	19
2.1.2.2	Imposição indireta das condições de contorno	21
2.2	Metodologias de alta ordem	22
2.2.1	Metodologias no espaço físico	22
2.2.2	Metodologias espectrais	26
2.2.3	Presente trabalho	28
3	METODOLOGIA	33
3.1	Metodologia da fronteira imersa	33
3.1.1	Domínios de cálculo: euleriano e lagrangiano	33
3.1.2	Modelagem para o fluido - domínio euleriano	35
3.1.3	Modelo para o acoplamento entre os domínios euleriano e lagrangiano	35
3.1.4	Cálculo da força lagrangiana	38

3.1.5	Algoritmo básico da metodologia da fronteira imersa baseado no método de imposição direta da força	40
3.1.6	Múltipla imposição da força (Multi-Direct Forcing - MDF)	41
3.2	Método pseudo-espectral de Fourier	43
3.2.1	Transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço espectral de Fourier	43
3.2.2	Projeção	46
3.2.3	Recuperação do campo de pressão	48
3.2.4	Método pseudo-espectral de Fourier	49
3.2.5	DFT e FFT	50
3.3	Discretização temporal e filtragem espacial	52
3.4	Acoplamento entre as metodologias pseudo-espectral de Fourier e fronteira imersa - IMERSPEC	54
4	RESULTADOS	59
4.1	Verificação da metodologia e da implementação do código computacional . .	59
4.1.1	Simulação dos vórtices de Taylor-Green sem fronteira imersa	61
4.1.2	Simulação dos vórtices de Taylor-Green com fronteira imersa: nós lagrangianos e eulerianos coincidentes	63
4.1.3	Simulação dos vórtices de Taylor-Green com fronteira imersa: nós eulerianos e lagrangianos não coincidentes	66
4.1.3.1	Influência das funções distribuição e interpolação	67
4.1.3.2	Influência da distância dos pontos lagrangianos aos nós de colocação eulerianos	73
4.1.3.3	Influência do número de iterações do MDF	75
4.2	Validação da metodologia proposta	77
4.2.1	Escoamentos sobre degraus 2D	77
4.2.1.1	Características gerais	77
4.2.1.2	Escoamento sobre degrau a $Re_h = 400$	83
4.2.1.3	Influência do refinamento da malha	87

4.2.1.4	Influência do número de ciclos do método da múltipla força- gem direta	90
4.2.1.5	Diferentes números de Reynolds	94
4.2.2	Escoamento sobre degrau 3D	101
4.3	Fronteira não coincidente	107
4.3.1	Escoamento sobre cilindro circular bidimensional	107
4.3.1.1	Escoamento sobre cilindro a $Re_D = 40$	109
4.3.1.2	Escoamento sobre cilindro com diferentes números de Reynolds	112
4.3.2	Interação fluido-estrutura: queda livre de um corpo rígido	120
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	137
5.1	Conclusões	137
5.2	Trabalhos futuros	139
6	REFERÊNCIAS	141

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 Aspectos gerais

A Mecânica dos Fluidos é o ramo da ciência que tem motivado estudos e pesquisas de engenheiros, físicos, matemáticos, médicos, entre outros. Estudos nesta área são de grande importância devido ao vasto número de aplicações industriais e de escoamentos encontrados na natureza.

Existem basicamente duas maneiras para se estudar a dinâmica dos fluidos: os métodos experimentais e os métodos teóricos. Em ambos, busca-se representar, através de um modelo matemático, um fenômeno físico o mais próximo da realidade e, assim, poder estudá-lo e conhecer suas características e variáveis que mais o influenciam.

As técnicas experimentais evoluíram com o advento de instrumentos não intrusivos ou de dimensões praticamente microscópicas e de alta precisão. Entre esses avanços, destacam-se os modernos anemômetros de fio quente, a anemometria Laser-Doppler, o método PIV (“Particle Image Velocimetry”), etc. Essas técnicas são aplicadas no âmbito acadêmico para estudar e quantificar escoamentos fundamentais como camada limite, escoamentos cisalhantes livres (jatos, esteiras e camadas de mistura), ou mesmo escoamentos complexos, que são utilizados na indústria como parte do projeto de aeronaves, veículos, máquinas térmicas, bombas, edificações e etc.

No entanto, a realização de um ensaio experimental exige a execução de projetos e às

vezes requer uma condição difícil e/ou cara de se obter em laboratório. Quando partes preliminares de projetos, onde dimensões básicas precisam ser determinadas e não se têm dados experimentais confiáveis, torna-se interessante a utilização pelo projetista de metodologias teóricas. Desta forma, as metodologias teóricas tornam-se cada vez mais, uma excelente opção de estudo, tanto qualitativo, como quantitativo, da Mecânica dos Fluidos.

A modelagem matemática de um escoamento passa pelo estabelecimento de um modelo diferencial, composto por equações diferenciais parciais (EDP's). Um olhar sobre uma EDP já possibilita obter informações qualitativas preciosas. No entanto, a solução das mesmas traz informações quantitativas indispensáveis à compreensão da natureza, assim como para o desenvolvimento de projetos e, até mesmo, a melhoria de projetos existentes. No mundo da Mecânica dos Fluidos, uma solução analítica (funções contínuas) só é possível para problemas muito simples. Por outro lado, as soluções numéricas atingem um grau muito elevado de complexidade e, ao mesmo tempo, de precisão e confiabilidade. Nesse contexto, as metodologias numéricas computacionais exercem papel de muita relevância.

A Dinâmica dos Fluidos Computacional (do inglês, Computational Fluids Dynamics, CFD) é a área que estuda e utiliza os métodos numéricos e computacionais para a solução das EDP's associadas aos modelos matemáticos. O seu desenvolvimento começou em meados de 1960, tendo seus primeiros sucessos na década de 1970 e início em aplicações industriais na década de 1980. A divulgação e aceitação da metodologia vieram a partir de 1990, com o uso massivo de CFD em projetos aeronáuticos e veiculares. A partir daí, passou a ser uma ferramenta de desenvolvimento e melhoria de projetos. É neste contexto que se enquadra a presente tese.

As EDP's resolvidas usando CFD são, normalmente, equações de transporte de quantidade de movimento, massa, energia, componentes químicos, etc. Especificamente, no presente trabalho, as equações estudadas são as de Navier-Stokes. Essas equações modelam matematicamente o comportamento dinâmico dos fluidos. Existem várias formas de resolver numericamente essas equações. Dentre elas podem ser citados os métodos das diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos, métodos espectrais, entre outros. Dependendo do tipo do escoamento que se queira resolver, ou do tipo de fenômeno físico que se queira estudar, escolhe-se, entre esses métodos, o que melhor se adapta.

O Método das Diferenças Finitas surgiu na década de 1950 e consiste em aproximar as derivadas das equações governantes por meio de diferenças finitas que são geradas a partir de expansões em séries truncadas de Taylor (FORTUNA, 2000; FERZIGER; PERIC, 1996). Este método pode alcançar uma alta ordem de convergência usando fórmulas de alta ordem ou métodos compactos. Atenção especial deve ser dada ao seu custo computacional.

O Método dos Volumes Finitos consiste em uma integração formal das equações governantes do escoamento de fluido sobre todos os volumes de controle finitos que compõem o domínio de interesse. A discretização envolve a substituição dos termos da equação integrada por uma variedade de aproximações do tipo das diferenças finitas. Isto converte as equações integradas em sistemas de equações algébricas (PATANKAR, 1980; MALISKA, 2004).

O Método dos Elementos Finitos surgiu por volta de 1960 para a análise de comportamento estrutural e desde então é usado para resolver equações diferenciais parciais que aparecem nas áreas da Mecânica dos Sólidos, Elasticidade e na Dinâmica dos Fluidos. Estes métodos são particularmente apropriados para geometrias complexas que aparecem em muitas aplicações da engenharia. A base do Método dos Elementos Finitos consiste em dividir o domínio em um número de elementos e aproximar a solução em cada elemento por uma soma de funções de base, compostas por polinômios (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 1991).

Os Métodos Espectrais surgiram em meados de 1970 com o desenvolvimento dos métodos transformados (transformações entre o espaço físico e os espaços espectrais) em problemas da Dinâmica dos Fluidos e Meteorologia (ORZAG, 1980; GOTTLIEB; ORSZAG, 1986). Os Métodos Espectrais são caracterizados pela expansão da solução em termos de uma série truncada de funções de aproximação globais (séries de Fourier, séries de polinômios de Chebyshev ou Legendre) das variáveis independentes.

A Fig. 1.1 ilustra um esboço de como os métodos descritos acima utilizam os pontos da discretização do domínio (círculos fechados) para se calcular uma derivada na posição indicada pelos círculos abertos. Observa-se que para o cálculo de uma derivada utilizando os métodos espectrais é necessário todos os outros pontos do domínio, enquanto que o método das diferenças finitas (também pode ser o método dos volumes finitos) utiliza os nós vizinhos da posição onde se quer a derivada, e o método dos elementos finitos utiliza os nós de um elemento.

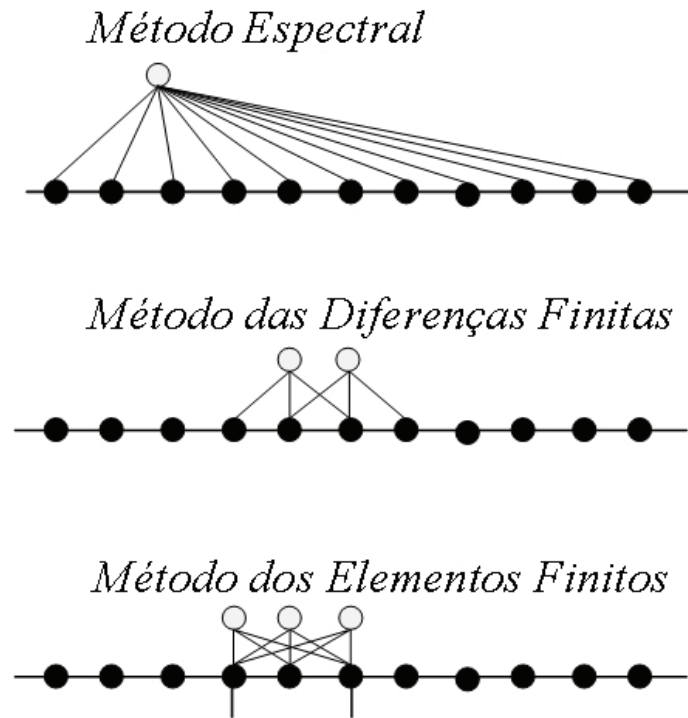


Figura 1.1: Comparação de três tipos de métodos. As linhas finas indicam os pontos (círculos fechados) que afetam diretamente o cálculo da derivada nos pontos mostrados sobre a linha do domínio pelos círculos abertos (BOYD, 2000)

Por se utilizar todos os pontos da discretização do domínio, obtém-se o máximo de informação possível para se calcular uma derivada, desta forma os Métodos Espectrais têm atraído muito a atenção devido a sua alta acurácia nas simulações numéricas. Estes métodos se mostraram altamente precisos nas simulações diretas da turbulência homogênea, na modelagem global do clima e em meteorologia, na dinâmica dos oceanos, na transferência de calor, na dinâmica dos fluidos e na aerodinâmica. No trabalho de Canuto et al. (2006), Canuto et al. (2007) são apresentadas diferentes utilizações dos métodos espectrais aplicados à dinâmica dos fluidos.

A alta acurácia possibilitada por estes métodos permite obter soluções de alta qualidade na engenharia usando poucos pontos na malha. Esta alta acurácia é conseguida sempre que o domínio for suficientemente simples e suave (domínios retangulares ou circulares). Em resumo, para resolver com alta acurácia uma EDP sobre um domínio simples e regular, os Métodos Espectrais são usualmente as melhores ferramentas numéricas (CANUTO et al., 1987; HUSSAINI; ZANG, 1987; HUSSAINI; KOPRIVA; PATERA, 1989).

Eles podem alcançar até 10 dígitos de precisão onde o Método das Diferenças Finitas ou Método dos Elementos Finitos obteriam dois ou três dígitos de precisão (TREFETHEN, 2000). Uma desvantagem destas técnicas numéricas baseadas nos Métodos Espectrais ocorre quando são aplicados em problemas envolvendo geometrias complexas. O uso de transformações suaves de um domínio complexo para outro domínio computacional simples, bem como a utilização de filtros, nem sempre são suficientes para recuperar a alta precisão perdida (RIZALES, 2005).

Na Fig. 1.2 Kirby e Karniadakis (2003) mostram um esboço de como os métodos espectrais estão enquadrados no contexto da dinâmica de fluidos computacional. Observa-se que em escoamentos sobre geometrias mais complexas, os métodos espectrais não podem ser utilizados, devido as condições de contorno. Por outro lado, no contexto da simulação numérica direta (DNS), em que objetiva-se resolver todas as escalas do escoamento sem a necessidade de modelos de turbulência adicionais (POPE, 2000), observa-se que os métodos espectrais conseguem atingir números de Reynolds mais altos que metodologias de baixa ordem. Desta forma, é interessante investir em uma metodologia que consiga trabalhar com métodos de alta ordem que possam ser aplicados para resolver escoamentos sobre geometrias complexas.

1.2 Métodos de alta ordem de convergência

No presente trabalho utiliza-se o termo “ordem de convergência” da metodologia para informar qual é a taxa de convergência que a solução numérica converge para a solução exata, em função do espaçamento da malha (FERZIGER; PERIC, 1996), ou o quanto que a diferença entre a solução exata e a solução numérica diminuí com o aumento do número de nós de colocação. A ordem de convergência da metodologia pode ser definida de acordo com as Eqs. 1.1 (VILLAR, 2007), ou 1.2 (FERZIGER; PERIC, 1996):

$$q = \frac{\log \left(\frac{\|\phi_{2h} - \phi_e\|}{\|\phi_h - \phi_e\|} \right)}{\log(2)} \quad (1.1)$$

$$q = \frac{\log \left(\frac{\phi_{4h} - \phi_{2h}}{\phi_{2h} - \phi_h} \right)}{\log(2)} \quad (1.2)$$

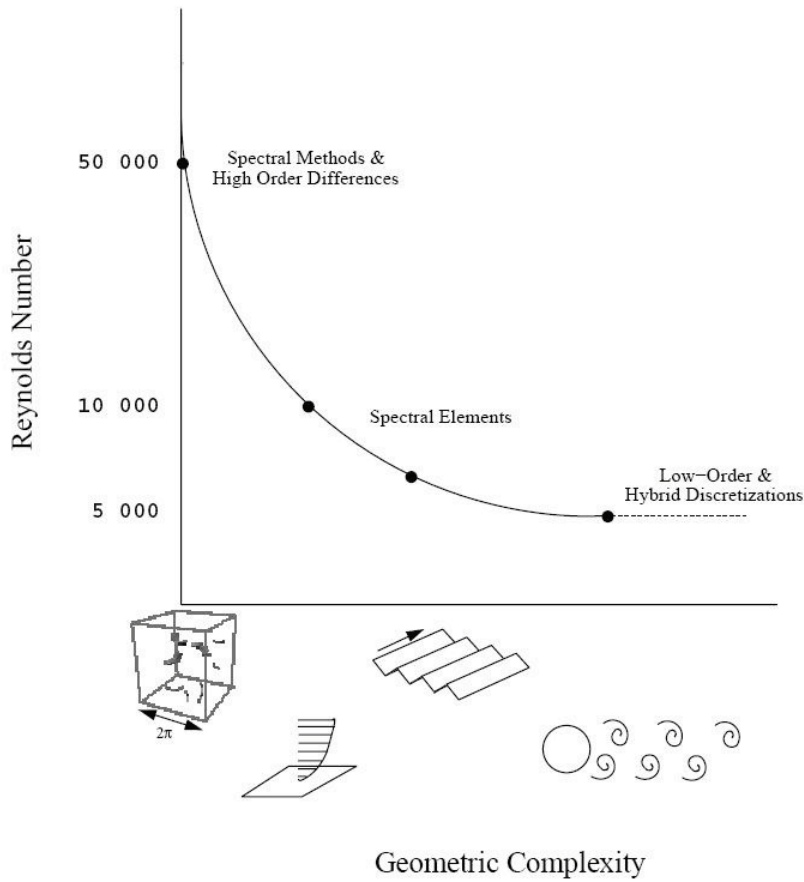


Figura 1.2: Ilustração conceitual da utilização dos métodos espectrais aplicados em CFD no contexto da simulação numérica direta (KIRBY; KARNIADAKIS, 2003).

onde ϕ é a solução de interesse com nível de refinamento h , $2h$ ou $4h$, onde h é o espaçamento da malha, ϕ_e é a solução exata, q é a ordem de convergência. O fator $\log(2)$ aparece, uma vez que, na Eqs. 1.1 e 1.2 dobra-se o refinamento da malha. Se o refinamento fosse triplicado seria $\log(3)$. O operador $||$ representa a norma L_2 , ou a norma máxima do erro entre alguma variável de interesse, *e.g.*, pressão ou componentes de velocidade. Segundo Kirby e Karniadakis (2003), são considerados métodos de alta ordem aqueles que apresentam $q > 2$.

O termo “acurácia”, muito utilizado no decorrer da presente tese, está ligado à magnitude do erro, isto é, o quanto a solução numérica é diferente da solução exata em um único nível de refinamento. Ou seja, a solução é mais precisa, quanto menor for o erro entre ela e a solução numérica. Normalmente, quanto mais refinada a malha, mais precisa é a solução.

A busca por métodos mais acurados para resolver as equações de Navier-Stokes é de grande interesse, pois existem fenômenos físicos que apenas metodologias com alta de conver-

gência e acurácia conseguem obter uma solução próxima da física do problema. Algumas aplicações podem ser citadas onde o uso de metodologias de alta ordem é imperativo, como por exemplo, nos fenômenos envolvendo aeroacústica, combustão e transição à turbulência. No caso da aeroacústica é importante dispor de um método que consiga capturar as ondas de pressão sonora, uma vez que estas ondas de pressão são de magnitude muito menor, que a pressão do escoamento. Em fenômenos envolvendo transição à turbulência é preciso estudar as pequenas instabilidades, as quais devido aos efeitos não lineares amplificam-se causando a transição do escoamento para um regime turbulento, ao mesmo tempo, grandes estruturas também estão presentes nos escoamentos turbulentos, portanto devido à multiplicidade de escalas, é necessário metodologias capazes de resolver tanto as grandes, quanto as pequenas escalas. Em escoamentos multifásicos, a interface entre as diferentes fases do escoamento, normalmente são esbeltas e, para serem bem representadas, além de um refinamento de malha, também devem ser resolvidas com um método de alta ordem.

A dificuldade encontrada em obter alta acurácia na solução das equações de Navier-Stokes é o custo computacional envolvido (HENDERSON; KARNIADAKIS, 1995), uma vez que as metodologias clássicas de alta ordem (diferenças finitas e volumes finitos de alta ordem e esquemas compactos) são onerosas, devido ao tamanho do estêncil e a necessidade de se resolver grandes sistemas lineares.

1.3 Método pseudo-espectral de Fourier

Dentre as metodologias com alta acurácia e alta ordem de convergência numérica destacam-se as metodologias espectrais, particularmente, o método pseudo-espectral de Fourier (MPEF). Ele possui vantagens como alta acurácia e alta ordem de convergência numérica, já comentadas anteriormente, aliadas a um baixo custo computacional. No presente trabalho o termo “custo computacional” está relacionado ao tempo de processamento de CPU e à quantidade de memória RAM necessárias para se realizar uma simulação.

Este baixo custo computacional advém do trabalho de Cooley e Tukey (1965), os quais desenvolveram o algoritmo denominado Transformada Rápida de Fourier (FFT). A FFT trabalha com o procedimento denominado rotação de bit, tornando o cálculo das transformadas

de Fourier muito eficiente, pois o número de operações reduz de $O(N^2)$ para $O(N \log_2 N)$, onde N é o número de pontos da malha discreta. Esse custo computacional torna atrativa a utilização do MPEF para resolver equações diferenciais parciais, principalmente quando se trabalha com problemas tridimensionais. O gráfico da Fig. 1.3 apresenta a comparação de custo computacional da transformação de uma função para o espaço espectral de Fourier utilizando a transformada discreta de Fourier (DFT) e a FFT.

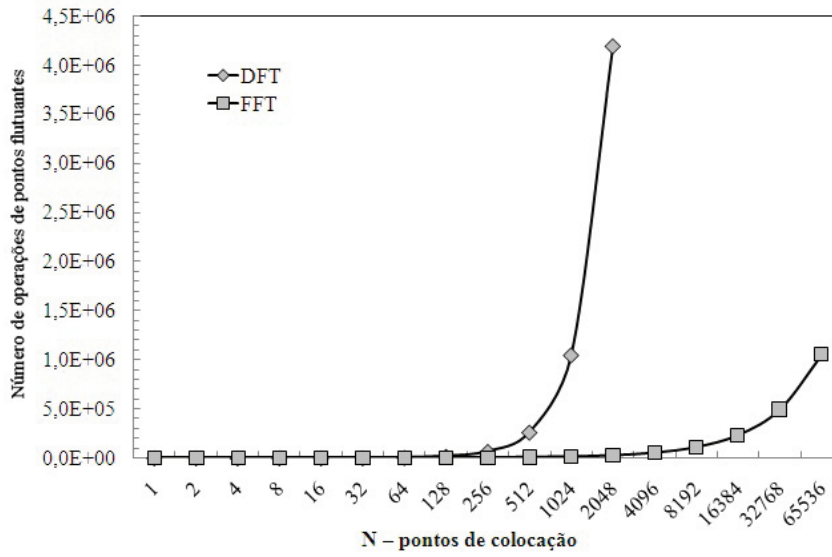


Figura 1.3: Comparação do custo computacional entre a transformada discreta de Fourier (DFT) e a transformada rápida de Fourier (FFT) (CANUTO et al., 2006).

Outra grande vantagem está diretamente relacionada com a transformação das equações de Navier-Stokes incompressíveis para o espaço espectral de Fourier. Estas equações ficam independentes do conceito de pressão, pois é possível utilizar o método de projeção do termo gradiente de pressão transformado (CANUTO et al., 2007). Este procedimento é explicado na seção 3. A partir daí, não é preciso resolver nenhum sistema linear, ou seja, o cálculo da equação de Poisson, necessária para fazer o acoplamento entre pressão e velocidade, é substituído por um produto vetor-matriz, um procedimento computacionalmente mais rápido.

Como será comentado na seção 3, o maior custo do algoritmo pseudo-espectral de Fourier está no cálculo dos termos não-lineares que aparecem nas equações de Navier-Stokes, uma vez que é preciso resolver um produto de convolução. Mesmo assim, a metodologia mostra-se competitiva com as demais metodologias de alta ordem.

A maior limitação do MPEF está nas condições de contorno, como comentado por Trefethen (2000) e Boyd (2000). Para preservar a ordem de convergência, aliada com o custo computacional, são permitidas apenas condições de contorno periódicas, limitando a sua utilização em CFD para alguns tipos de escoamentos muito específicos, como por exemplo, jatos em desenvolvimento temporal, (SOUZA, 2005; MOREIRA, 2007) e turbulência homogênea isotrópica (POPE, 2000; MOREIRA, 2010).

1.4 Geometrias complexas e o método da fronteira imersa

O tratamento de escoamentos sobre geometrias complexas com um alto nível de detalhamento é outro desafio em CFD, uma vez que as metodologias existentes, geralmente, apresentam baixa acurácia quando aplicadas a este tipo de problema. Esta baixa acurácia está relacionada com a geração da malha e o modo como os fluxos de massa são tratados nas regiões próximas à geometria complexa. O desafio torna-se mais complicado quando o problema envolve fronteiras móveis, em que a movimentação do corpo, invariavelmente, perturba a dinâmica do escoamento e vice-versa.

Existem na literatura muitas abordagens para se tratar este tipo de problema, mas nenhuma delas é definitiva e assim sendo, justificam-se mais estudos. Por envolver essencialmente geometrias complexas que podem ser móveis e/ou deformáveis, os métodos clássicos de simulação apresentam alguns inconvenientes e dificilmente são empregados com eficiência a todos os casos.

Basicamente, duas metodologias vêm sendo empregadas na simulação desse tipo de problema (geometrias complexas e móveis). A primeira faz uso de malhas não-estruturadas para descrever geometrias complexas e utiliza técnicas de remalhagem nos casos de corpos deformáveis e móveis. Têm-se, alternativamente, os métodos baseados no conceito da Fronteira Imersa (MFI). Neste aspecto, é interessante comparar as vantagens e desvantagens de cada uma. Nos métodos que utilizam malha não estruturada, o escoamento próximo à fronteira é bem resolvido, podendo ser aplicado para estudar fenômenos que envolvem camada limite sobre corpos imersos. No entanto, quando a geometria torna-se muito complicada, ou tem mobilidade, o processo de geração da malha não-estruturada torna-se oneroso, tanto

durante o pré-processamento, quanto durante o processamento. Neste ponto, destacam-se os métodos de fronteira imersa, atingindo alta eficiência computacional, embora apresentem resultados pouco precisos sobre a fronteira (MITTAL; IACCARINO, 2005).

1.5 Justificativas do presente trabalho

Os estudos sobre o método pseudo-espectral de Fourier (MPEF) iniciaram-se no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab), da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), com o trabalho de Souza (2005), no qual a autora apontou as vantagens da utilização do MPEF. Os desenvolvimentos e estudos desta linha de pesquisa continuaram com os trabalhos de mestrado de Moreira (2007) e Mariano (2007).

A metodologia da fronteira imersa é outra linha de pesquisa que vem sendo estudada e desenvolvida no MFLab. Desde o trabalho de Lima-E-Silva (2002) vários outros pesquisadores do MFLab vem aplicando a metodologia desenvolvida pela autora em diferentes situações, desde mais básicas, em nível de desenvolvimento e aperfeiçoamento da metodologia, até aplicados a problemas industriais, principalmente relacionados a indústria de petróleo.

A presente tese é continuação do trabalho de mestrado de Mariano (2007), no qual foi proposto, pela primeira vez, o uso conjunto do método pseudo-espectral de Fourier com a metodologia da fronteira imersa. A presente tese tem como objetivo contribuir no aperfeiçoamento da metodologia da fronteira imersa, buscando obter mais acurácia na modelagem da interface, para isso o cálculo da força lagrangiana foi remodelado no contexto do método da múltipla imposição direta da força (MDF). Desta forma, consegue-se obter uma melhor acurácia na representação da geometria e ao mesmo tempo se alcança uma ordem de convergência numérica maior do que a apresentada no trabalho de Mariano (2007). Do ponto de vista da metodologia pseudo-espectral de Fourier, o presente trabalho, além de possibilitar aplicações em escoamentos com condições de contorno não periódicas, como já apresentado no trabalho de Mariano (2007), de maneira mais eficiente computacionalmente, também viabiliza a utilização da metodologia para escoamentos sobre geometrias não cartesianas e móveis, uma vez que esta era uma das limitações metodológicas apresentadas no trabalho de Mariano (2007).

Após a apresentação dos detalhes matemáticos e numéricos deste acoplamento (seção 3), expõe-se o processo de verificação, tanto da metodologia, quanto do código computacional desenvolvido, através da técnica das soluções manufaturadas. Por fim, propõem-se resolver alguns problemas clássicos de CFD, escoamento sobre um degrau, escoamento sobre cilindro, queda de uma esfera em um meio fluido, com o intuito de validar a metodologia e prepará-la para aplicações industriais mais complexas.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estado da arte dos métodos utilizados no presente trabalho, fronteira imersa e pseudo-espectral de Fourier, são apresentados neste capítulo. Faz-se também, uma rápida revisão sobre métodos de alta ordem aplicado em escoamentos incompressíveis, procurando mostrar a sua importância, principais características, vantagens e desvantagens.

2.1 Metodologia da fronteira imersa

A metodologia da fronteira imersa (MFI) ganhou visibilidade com o trabalho de Peskin (1972), no qual o autor mostrou simulações de escoamentos em válvulas cardíacas, as quais foram representadas por um campo de força. Este tipo de escoamento é difícil de ser modelado, uma vez que apresenta uma geometria complexa e flexível, no caso o domínio de interesse é um coração humano. Devido à facilidade de lidar com essas características, a metodologia da fronteira imersa começou a ganhar espaço em CFD.

Desde o trabalho de Peskin (1972), a metodologia vem sendo aperfeiçoada e ganhando diferentes variações, dependendo muito do tipo de problema a ser estudado. Em Mittal e Iaccarino (2005) apresenta-se uma revisão das várias formas de se tratar o MFI, classificando, de forma didática, as metodologias existentes. Adotando a mesma classificação dada por eles, divide-se o método de acordo com a imposição da força no sistema de equações a ser resolvido, que pode ser de forma contínua ou discreta.

2.1.1 Imposição da força de forma contínua

Entende-se por imposição da força de forma contínua, os métodos de fronteira imersa que incluem o termo fonte nas equações diferenciais governantes, antes de serem discretizadas. Segundo a classificação de Mittal e Iaccarino (2005), esta abordagem pode ser aplicada em dois tipos de problemas: escoamentos com fronteiras elásticas e escoamentos com fronteiras sólidas.

Na classe de escoamentos com fronteiras elásticas destacam-se os trabalhos desenvolvidos no “Courant Institute of Mathematical Sciences” da Universidade de Nova York, onde Peskin (1972) mostrou, pela primeira vez, a metodologia MFI de um modo computacionalmente eficiente. O autor simulou escoamentos em válvulas cardíacas. O escoamento foi resolvido em uma malha cartesiana e as válvulas foram representadas, matematicamente, através de modelos de fibras elásticas. A força lagrangiana é gerada pela elasticidade do material de acordo com a Eq. 2.1:

$$F = \frac{\partial}{\partial s} (T\tau), \quad (2.1)$$

onde T é a tensão da fibra, τ é a tangente unitária e s é a superfície lagrangiana. A comunicação entre as fibras e o domínio fluido é realizada por meio de um processo de distribuição da força da interpolação das componentes de velocidade do fluido para interface imersa, como poderá ser visto no capítulo 3.

No trabalho de Peskin (2002), há uma revisão matemática do método e citações de vários trabalhos mostrando diferentes aplicações, como por exemplo, em biomecânica, válvulas cardíacas, todo o mecanismo da fisiologia cardiovascular, deformação de células vermelhas, mecanismos de locomoção de organismos aquáticos, etc.

Uma das principais questões a ser respondida nos trabalhos de Lai e Peskin (2000), Peskin (2002), Griffith e Peskin (2005), entre outros, é como obter uma melhor acurácia e uma melhor ordem de convergência numérica sobre a interface. Normalmente, devido aos processos de interpolação e distribuição, a MFI apresenta primeira ordem de convergência.

Griffith e Peskin (2005) mostram altas taxas de convergência numérica (segunda e terceira) para problemas suaves. Eles ainda demonstram a influência dos processos de interpolação e de distribuição, além da importância do método de acoplamento pressão-velocidade

para garantir a conservação da massa no sistema. Griffith et al. (2007) utilizaram a metodologia que apresentou as maiores taxas de convergência numérica estudaram a dinâmica do escoamento em um coração humano. O coração foi modelado através de um “novelo” de fibras elásticas, dentro de um domínio euleriano periódico. A Fig. 2.1 mostra uma das simulações apresentadas pelos autores. Deve-se notar a complexidade da geometria e no sítio <http://www.math.nyu.edu/faculty/peskin> é possível verificar a movimentação da mesma.

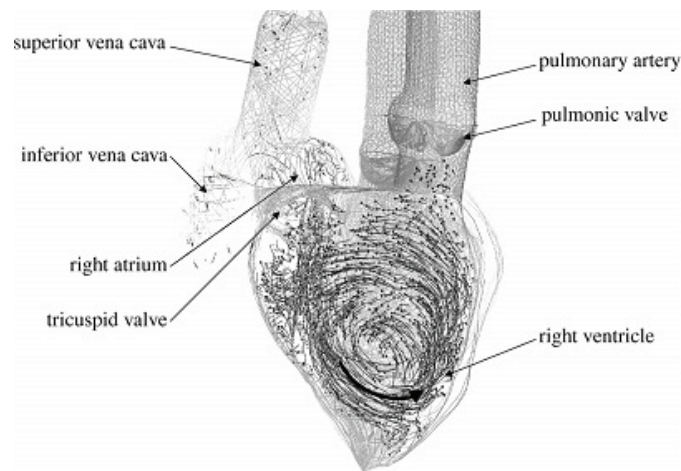


Figura 2.1: Simulação do escoamento dentro de um coração humano, Griffith et al. (2007).

Outra classe de problemas, que pertencem a classificação de força contínua são os métodos “front-tracking” e “level-set”, utilizados principalmente em problemas de interação fluido-fluido. A diferença neste tipo de abordagem é que a força lagrangiana é calculada através de parâmetros físicos e geométricos da interface e não mais pela tensão tangencial das fibras como mostrado na Eq. 2.1. Para maiores informações a respeito deste tipo de metodologia vide Villar (2007) e Roma, Peskin e Berger (1999), em ambos os trabalhos os autores utilizaram a MFI com malha adaptativa. Neste caso, a malha euleriana é refinada ao mesmo tempo em que a interface se movimenta. Com o refinamento adaptativo dinâmico os autores conseguiram simulações muito acuradas e eficientes computacionalmente.

A metodologia da interface imersa é outra forma de representar a geometria em um escoamento. Utiliza o mesmo princípio adotado por Peskin (2002), de somar um termo fonte nas equações de balanço de quantidade de movimento, porém ao invés de utilizar uma função distribuição para fazer a comunicação da interface com a malha euleriana, aproveita-se da

discretização das equações com diferenças finitas e coloca sobre esta discretização funções analíticas que representam saltos. Desta maneira, é possível representar a interface em uma região mais esbelta do que a utilizada pela função interpolação. Xu e Wang (2006) mostram o enchimento de um balão e escoamentos sobre cilindros. Le, Khoo e Peraire (2006) mostram interfaces imersas sendo levadas pelo escoamento em diferentes tipos de canais. Estas simulações apresentam segunda ordem de convergência numérica.

No trabalho de Linnick e Fasel (2005), os autores obtiveram quarta ordem de convergência espacial nas simulações realizadas sobre corpos rígidos utilizando a metodologia da interface imersa, porém, eles utilizaram a formulação vorticidade-função corrente, o que dificulta a extensão da metodologia para problema tridimensionais. Bonfigli (2010), através do tratamento dos nós de pressão próximos a interface imersa e de um procedimento especial de acoplamento pressão-velocidade, também mostra quarta ordem de convergência numérica.

Os problemas que envolvem escoamentos com fronteiras sólidas utilizam o princípio da força de restauração (“feedback forcing”). Esta abordagem se aproxima das descritas anteriormente. No entanto, a diferença está no modo de calcular a força lagrangiana, a qual passa a ser governada pela lei de Hooke (Eq. 2.2):

$$\vec{F} = -\alpha \left(\vec{X} - \vec{X}^e \right), \quad (2.2)$$

onde $\vec{F}$ é a força lagrangiana, $\vec{X}$ é a posição de um ponto lagrangiano, $\vec{X}^e$ é a posição de equilíbrio do ponto lagrangiano e α é a constante da mola.

Para representar o corpo sólido utiliza-se uma rigidez muito elevada, dessa forma os pontos lagrangianos não conseguem se movimentar, ou o movimento é muito pequeno, sendo desprezível.

Goldstein, Adachi e Sakata (1993) simularam escoamentos turbulentos em canais empregando a força de restauração para representar as paredes do canal. A força utilizada, além da força da mola, Eq. 2.2, apresenta também uma parcela relativa ao amortecimento, como mostrada na Eq. 2.3:

$$F = \alpha \int_0^t U(X, t) dt + \beta U(X, t), \quad (2.3)$$

onde α é a constante da mola, β o fator de amortecimento, t é o tempo e U é a velocidade de uma partícula de fluido sobre a fronteira.

Além disso, no trabalho de Goldstein, Adachi e Sakata (1993) o domínio euleriano é resolvido através de métodos espectrais, onde utiliza-se a metodologia espectral de Fourier nas direções com condições de contorno periódicas e espectral de Chebyshev nas direções em que não se tem condições de contorno periódicas. Esta metodologia, segundo os próprios autores, apresenta uma forte restrição no passo de tempo, devido à magnitude das constantes α e β da Eq. 2.3, as quais devem ser elevadas, para simular as paredes do canal.

Saiki e Birigen (1996), utilizando a mesma metodologia de Goldstein, Adachi e Sakata (1993), porém, substituindo o método espectral por diferenças finitas de alta ordem, apresentaram simulações sobre cilindros. O inconveniente encontrado na metodologia da fronteira imersa proposta nos trabalhos de Goldstein, Adachi e Sakata (1993) e Saiki e Birigen (1996) é a dependência das duas constantes, α e β da Eq. 2.3. Essas constantes, até que sejam bem ajustadas, são obtidas a partir de simulações anteriores.

Lai e Peskin (2000) desenvolveram um método formal de segunda ordem de convergência e simularam escoamentos sobre cilindros. Entretanto, os resultados não atingem, na prática, segunda ordem de convergência numérica. Os autores atribuíram esse fato às fortes descontinuidades existentes nas proximidades da fronteira imersa.

O Modelo Físico Virtual (MFV) foi proposto por Lima-E-Silva (2002) e, desde então, está sendo utilizado pelo grupo do Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab), da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). A idéia é modelar a força lagrangiana utilizando a segunda lei de Newton aplicada à partícula posicionada na interface, Eq. 2.4:

$$F_i = \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial(U_i U_j)}{\partial X_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X_i} - \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j}, \quad (2.4)$$

onde U_i são as componentes de velocidade do fluido, P é a pressão, X é a posição lagrangiana, t é o tempo, ρ é a massa específica e ν é a viscosidade cinemática.

Lima-E-Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003) propuseram calcular as derivadas da Eq. 2.4 através de interpolações de Lagrange. Para isso, faz-se uso de pontos auxiliares e da função interpolação. Depois de calculada a força lagrangiana, ela é espalhada para o domínio euleriano através da função distribuição. Os resultados foram demonstrados em simulações de escoamentos sobre cilindros.

Arruda (2004), utilizando a mesma metodologia proposta por Lima-E-Silva (2002),

simulou escoamentos em cavidades com tampa deslizante e escoamentos promovidos por um pistão em movimento. Silva (2008), também, utilizando o MFV, simulou escoamentos sobre cilindros com movimento imposto e cilindros ancorados por molas, os quais se movimentam devido à força do fluido, constituindo um problema de interação fluido-estrutura.

Oliveira (2006) estendeu a modelo físico virtual a problemas com altos números de Reynolds, simulando escoamentos turbulentos sobre aerofólios. Além disso, ele também fez a otimização de forma de aerofólios de uma maneira computacional eficiente.

Campregher (2005) estendeu o modelo físico virtual para problemas tridimensionais, mostrando simulações de problemas de interação fluido-estrutura em esferas ancoradas por molas. Vedovoto (2007) habilitou o código numérico desenvolvido por Campregher (2005) a importar qualquer geometria. Para evidenciar as potencialidades do código Vedovoto (2007) simulou escoamentos sobre protótipos de veículos e aeronaves (Fig. 2.2).

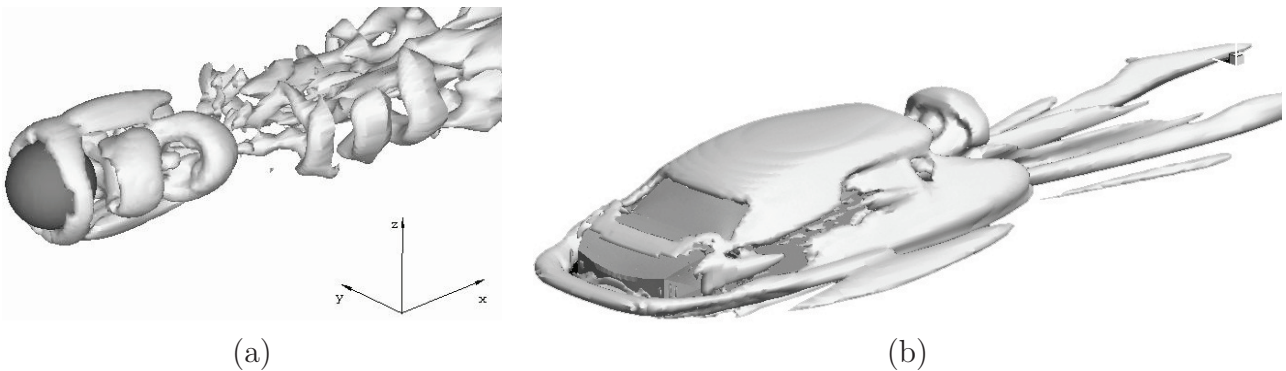


Figura 2.2: a) Estruturas turbilhonares sobre uma esfera (CAMPREGHER, 2005) e b) escoamento sobre um modelo de automóvel (VEDOVOTO, 2007).

Uma alternativa para aumentar a ordem de convergência espacial do MFV está apresentada na dissertação de Mariano (2007). Para isto, foi utilizado o método pseudo-espectral de Fourier para realizar simulações em cavidades com tampa deslizante.

A principal vantagem do modelo físico virtual frente aos anteriores é que não é necessário determinar constantes ad-hoc, como no trabalho de Goldstein, Adachi e Sakata (1993). No entanto, o modelo precisa de baixos passos de tempo para convergir com uma acurácia aceitável. Essa restrição no passo de tempo está diretamente ligada a discretização do termo fonte de força, pois, um de seus termos apresenta uma derivada temporal, como pode ser visto na Eq. 3.12.

2.1.2 Imposição da força de forma discreta

As metodologias de imposição de força de forma discreta, impõem a força euleriana como um esquema numérico que se adapta a forma de como as equações são discretizadas. Num primeiro momento, não se observa o mesmo significado físico de uma força de corpo agindo nas equações de quantidade de movimento, como descritos anteriormente. Em contrapartida, não é preciso utilizar constantes *ad-hoc* e nem passos de tempo muito restritivos, como nas abordagens comentadas anteriormente.

2.1.2.1 Imposição direta das condições de contorno

Tseng e Ferziger (2003) mostram a metodologia denominada fronteira imersa com células fantasma (“ghost cell”). Eles simularam escoamentos sobre cilindros bidimensionais e, utilizando a metodologia de simulação de grandes escalas, simularam um canal em forma de onda (“wavy boundary”) e escoamentos geofísicos sobre colinas. O método consiste em alterar as componentes de velocidade nos pontos da malha euleriana onde se encontra a fronteira, representada pela linha cheia da Fig. 2.3.

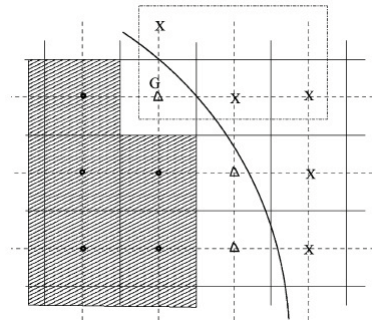


Figura 2.3: Esboço do esquema utilizado para determinar as células fantasmas (G); $\times$ são os pontos necessários para o cálculo da força e as células hachuradas representam o interior do corpo imerso, (TSENG; FERZIGER, 2003).

Para isso, determinam-se as células eulerianas nas quais existem pontos lagrangianos. Também identificam-se os nós do volume que estão no lado interno, representado pelos triângulos, e os que estão no lado externo, representado pelo $\times$, da interface. Uma interpolação bilinear ou trilinear para problemas bidimensionais ou tridimensionais, respectivamente, são utilizadas para calcular as componentes de velocidade dos pontos eulerianos que se encontram

no interior da interface, células hachuradas da Fig. 2.3 denominadas de células fantasmas.

Mark e Wachen (2008) mostram dois tipos de fronteira imersa baseados na metodologia proposta por Tseng e Ferziger (2003). Os autores denominaram uma das metodologias de “restrição dos vértices” e a outra de “espelhamento”. A segunda abordagem apresentou melhores resultados de convergência numérica alcançando segunda ordem de convergência.

Quando se altera o valor das componentes de velocidade nas células próximas a interface imersa, como apresentado nos trabalhos de Tseng e Ferziger (2003) e Mark e Wachen (2008), resultados muito precisos sobre a fronteira são obtidos, permitindo realizar simulações com números de Reynolds elevados. No entanto, a imposição da força dificulta a convergência da resolução da equação de Poisson, sendo necessário utilizar esquemas de pré-condicionamento para garantir a conservação da massa do sistema. Além disso, o algoritmo para a busca dos pontos que se encontram dentro e fora da fronteira pode gerar um custo computacional elevado, caso a fronteira se movimente.

Devido a dificuldade de fechar o balanço de massa na metodologia da célula fantasma, surgiu a metodologia da célula cortada (“cut-cell”). Ela parte de uma discretização via volumes finitos e as células cortadas pela interface imersa são remodeladas, de tal forma que a parcela que fica interna ao corpo é descartada e o pedaço restante é aglutinado no volume vizinho (Fig. 2.4). Isto faz com que as células ao redor do corpo apresentem uma geometria trapezoidal (MITTAL; IACCARINO, 2005). Esta metodologia garante a conservação da massa e uma boa representação da interface até segunda ordem de convergência espacial.

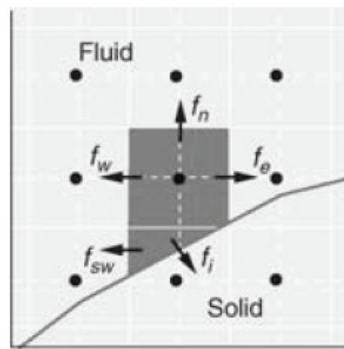


Figura 2.4: Esboço da região próxima à interface imersa, mostrando o volume de controle do método “cut-cell” (MITTAL; IACCARINO, 2005).

2.1.2.2 Imposição indireta das condições de contorno

A metodologia da imposição indireta das condições de contorno também é conhecida como “imposição direta da força” (“Direct Forcing”). Ela tem como princípio utilizar a solução numérica obtida da discretização das equações de Navier-Stokes para impor a condição de não-deslizamento sobre uma interface imersa. Este tipo de metodologia é utilizada em conjunto com métodos de passo-fracionado, como será explicado no próximo capítulo, e permite utilizar passos de tempo menos restritivos que as outras metodologias existentes.

Mohd-Yusof (1997), utilizando o método pseudo-espectral de Fourier, juntamente com “B-splines”, propôs o cálculo da força diretamente das equações de movimento do fluido. Para isso ele extrapola os valores encontrados na região externa ao corpo para a região interna, de forma a impor a condição de não-deslizamento. No trabalho de Mohd-Yusof (1998), o autor mostra altas taxas de convergência espacial (terceira e quinta ordem) simulando um problema de Couette, utilizando condições de periodicidade na direção axial do canal.

Fadlun et al. (2000) apresentam a mesma metodologia proposta por Mohd-Yusof (1997), utilizando diferenças finitas para a discretização das equações em malha deslocada. Os autores simularam escoamentos sobre esferas e dentro de uma câmara de combustão com um pistão em movimento. Também propuseram diferentes esquemas de interpolação para estimar a velocidade na região próxima ao corpo. Na Fig. 2.5 são mostrados os esquemas de interpolação utilizados por Fadlun et al. (2000).

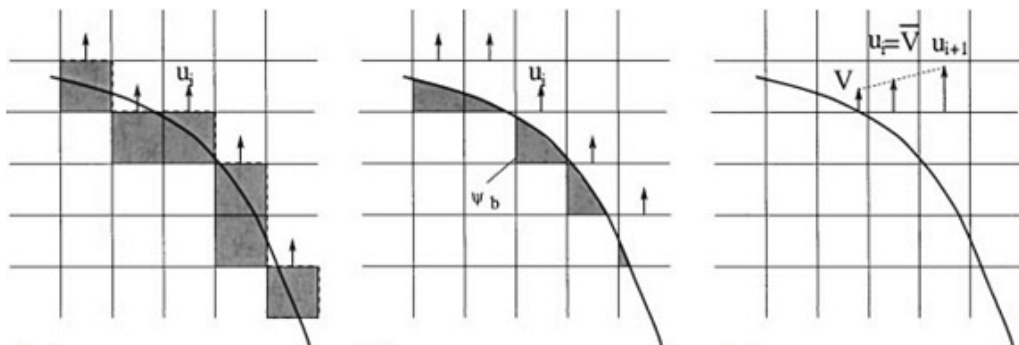


Figura 2.5: Esquemas de interpolação propostos por Fadlun et al. (2000).

Kim, Kim e Choi (2001), além de adicionar um termo forçante às equações de Navier-Stokes, que representa a interface, também adicionaram um termo denominado massa-sumidouro na equação da continuidade. Aplicando o método dos volumes finitos, esta meto-

dologia resultou em condições de não-deslizamentos bem calculadas sobre a fronteira, bem como a garantia da conservação da massa.

Tanto na metodologia proposta por Mohd-Yusof (1997), Fadlun et al. (2000) e Kim, Kim e Choi (2001), os pontos lagrangianos devem estar posicionados sobre linhas que cruzam a malha euleriana. Isto pode causar um aumento do custo computacional caso a fronteira se movimente, pois é necessário sempre ajustar os pontos lagrangianos, através de interpolações.

Uhlmann (2005) trabalhou com simulações de sedimentação de partículas, utilizando o método do passo fracionado, onde o campo de velocidade estimado é calculado sem o campo de força. Na sequência, é então calculado o campo de força lagrangiano interpolando-se as velocidades estimadas para a malha lagrangiana. A força lagrangiana é, então, espalhada para a malha euleriana, através de uma função distribuição. Depois desse procedimento, resolve-se a equação de Poisson para garantir a conservação da massa. Su, Lai e Lin (2007) utilizaram a mesma idéia de Uhlmann (2005) e simularam escoamentos sobre cilindros e cavidades com tampa deslizante. Ambos os trabalhos mostram que os resultados convergem com segunda ordem, além de apresentarem uma boa acurácia. Shu, Liu e Chew (2007) propuseram uma variante da metodologia desenvolvida por Uhlmann (2005), mas no lugar do passo-fracionado é aplicado o método de Lattice-Boltzmann para resolver o escoamento.

Um procedimento denominado de múltipla imposição da força (“multi-direct forcing”) proposto por Wang, Fan e Luo (2008), utiliza um processo iterativo para melhorar o cálculo da força euleriana, conseguindo uma representação da interface imersa melhor que o método utilizado por Uhlmann (2005). Além disso, os autores utilizaram diferenças-finitas de quarta ordem de convergência espacial para simular sedimentação de particulados.

2.2 Metodologias de alta ordem

2.2.1 Metodologias no espaço físico

As metodologias de alta ordem apresentam convergência espacial maior que dois (KIRBY; KARNIADAKIS, 2003). Computacionalmente estes métodos são mais caros, considerando armazenamento de dados na memória e tempo de processamento de CPU, quando comparados com métodos de baixa ordem de convergência. No entanto, permitem atingir altas taxas

de convergência, ou seja, a acurácia é maior à medida que se refina a malha. São muito utilizados em problemas de aeroacústica (UZUN, 2003), simulação numérica direta (DNS) e simulação de grandes escala (LES).

Os principais métodos são baseados em diferenças finitas e volumes finitos de alta ordem, nos quais as derivadas são discretizadas com mais pontos no estêncil. Baseiam-se também em diferenças finitas e volumes finitos compactos (NAGARAJAN; LELE; FERZIGER, 2003) e nos métodos espectrais (CANUTO et al., 2006; CANUTO et al., 2007). Também existe a possibilidade de se trabalhar com métodos híbridos, isto é, utiliza-se os métodos espectrais para calcular as derivadas em direções onde se pode utilizar periodicidade e métodos compactos de alta ordem nas demais direções (DA-SILVA, 2001).

No campo da aeroacústica, Uzun (2003) fez simulações de grande escala para jatos utilizando diferenças finitas compactas de alta ordem (Fig. 2.6).

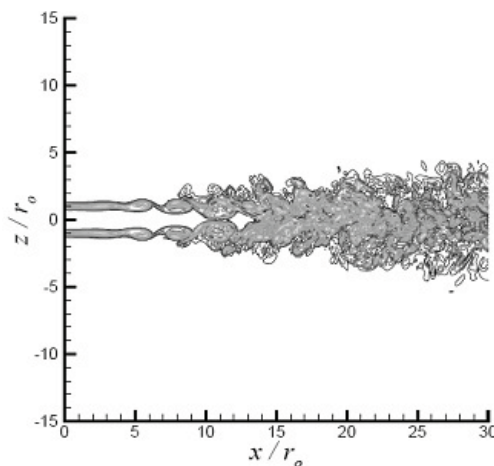


Figura 2.6: Jato simulado por Uzun (2003), contornos instantâneos do módulo da vorticidade para $Re_D = 36.000$.

Pinho (2006) simulou cavidades com tampa deslizante bidimensionais e tridimensionais, comparando os métodos de diferenças finitas de segunda e quarta ordem, indicando a importância dos métodos de alta ordem na simulação de grandes escalas para modelagem da turbulência.

A Fig. 2.7 ilustra o campo médio obtido por Pinho (2006) com discretização de segunda e de quarta ordem, respectivamente. Qualitativamente, não há grandes diferenças entre os dois, a não ser pelo pequeno vórtice no canto inferior esquerdo (Fig. 2.7 b), que se

apresenta muito menor na solução de segunda ordem. Porém, quando se compara os perfis de velocidade (Fig. 2.8), verifica-se que, apesar de captar o formato da curva de forma coerente, na discretização de segunda ordem, as velocidades não atingem os valores máximos e mínimos corretamente. Já no caso da discretização de quarta ordem, a solução confere muito bem com os resultados de Ghia, Ghia e Shin (1982).

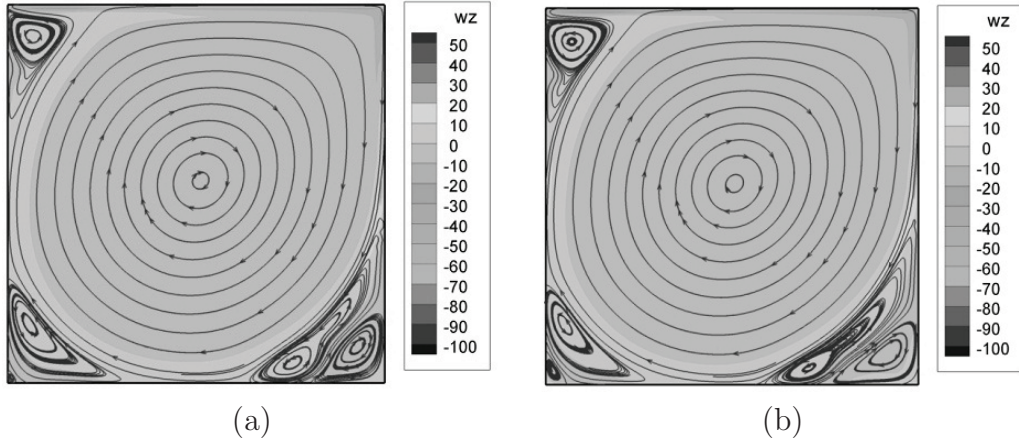


Figura 2.7: Campo médio de vorticidade, ω_z , com linhas de corrente superpostas para número de Reynolds igual a 10.000 e malha 95×95 obtido com: (a) discretização de segunda ordem e (b) discretização de quarta ordem (PINHO, 2006).

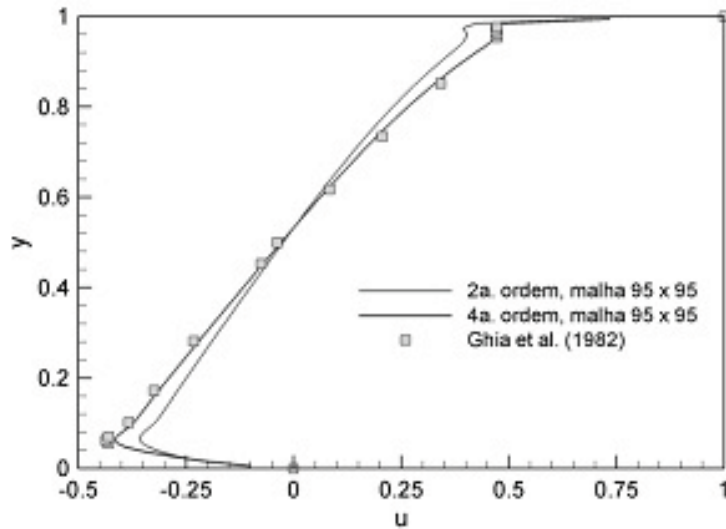


Figura 2.8: Comparação dos perfis da componente de velocidade média horizontal, Reynolds igual a 10.000, obtidos com malha de 95×95 (PINHO, 2006) e com esquemas de segunda e quarta ordem.

Shukla, Tatineni e Zhong (2007), utilizando diferenças finitas compactas de 4^{a} a 20^{a}

ordem em malha não uniforme, resolveram o movimento de uma onda e obtiveram níveis de acurácia muito elevados. No mesmo trabalho são simulados escoamentos passando sobre cilindros utilizando diferenças finitas compactas de 20^a ordem.

Piller e Stalio (2004), simularam uma cavidade com tampa deslizante comparando métodos de volumes finitos compactos de várias ordens de convergência. Os resultados mostram que com poucos pontos na malha e utilizando um método de alta ordem é possível atingir níveis de acurácia tão significativos quanto usar malhas refinadas com métodos de baixa ordem de convergência. Cabe observar que isso é possível apenas para o comportamento médio das propriedades.

No gráfico da Fig. 2.9 (KIRBY; KARNIADAKIS, 2003), é mostrada uma comparação entre os esquemas de diferenças finitas de 2^a, 4^a e 6^a ordens de convergência. Os resultados indicaram que para manter um erro de fase de 10%, quando se compara esses esquemas com a solução analítica, o trabalho computacional aumenta muito para o método de 2^a ordem.

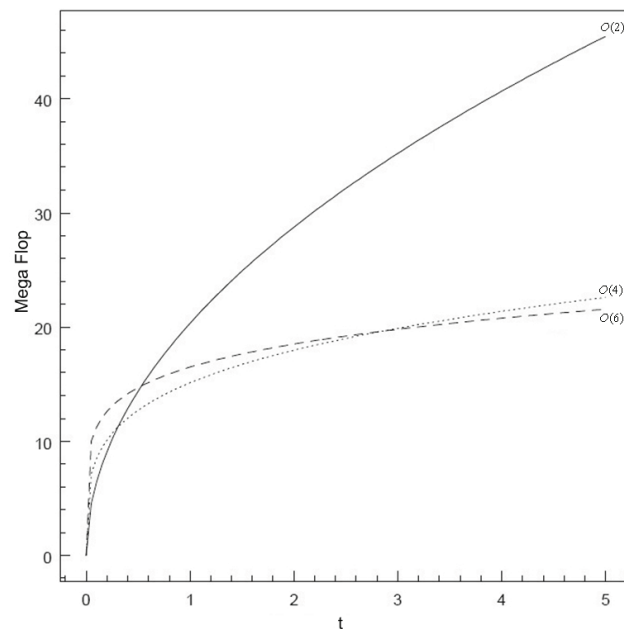


Figura 2.9: Trabalho computacional, número de operações com pontos flutuantes requeridos para integrar uma equação advectiva linear, para um determinado tempo de simulação, enquanto é mantido um erro de fase de 10% (KIRBY; KARNIADAKIS, 2003).

2.2.2 Metodologias espectrais

As metodologias espectrais, com base nas transformadas de Fourier, possuem como grande vantagem, quando comparadas com outros métodos de alta ordem, o baixo custo computacional. Isso se deve à utilização da “Fast Fourier Transform” (FFT), algoritmo que calcula as transformadas de Fourier de forma muito eficiente (CANUTO et al., 1987).

Outra boa característica da metodologia espectral de Fourier é que, pelo método da projeção, elimina-se o campo de pressão dos cálculos das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis. Este procedimento contribuiu para o baixo custo computacional na resolução das equações de Navier-Stokes utilizando o método espectral de Fourier. Existem, no entanto, fragilidades dessa metodologia: uma delas é a influência do fenômeno de Gibbs, quando há descontinuidades no domínio de interesse; a outra é a exigência de condições de contorno periódicas, devido ao uso da transformada discreta de Fourier (DFT).

Para contornar esses inconvenientes surgiram diferentes técnicas. Uma das mais conhecidas é a técnica de decomposição do domínio, que tem sido empregada com os seguintes métodos: diferenças finitas, elementos finitos e o método dos volumes finitos. Delves e Hall (1979) introduziram o método do elemento global; Orzag (1980), propôs pela primeira vez a combinação dos métodos espectrais com um pré-condicionamento de elementos finitos para resolver um sistema de equações mal condicionado. Este autor também descreveu uma nova técnica para retalhar (Patching) as interfaces entre subdomínios não sobrepostos, a qual foi chamada de método espectral de decomposição do domínio, também conhecido como método multidomínio espectral. Consiste em dividir o domínio em subdomínios contíguos ou adjacentes mais simples. A maioria das versões dos métodos espectrais de decomposição do domínio usa variações ou extensões desta técnica de retalho, originalmente sugerida por Orzag (1980).

Morchoisne (1984) desenvolveu um método baseado na sobreposição de múltiplos domínios para estudar escoamentos incompressíveis em geometrias bi e tridimensionais, usando as formulações tipo função corrente-vorticidade. Patera (1984) usou uma formulação variacional para satisfazer à continuidade de fluxo nas interfaces dos elementos, ao qual chamou de método dos elementos espectrais. Ele testou este método com polinômios de Chebyshev na

equação advecção-difusão unidimensional e aplicou-o na simulação de escoamentos laminares bidimensionais sobre um canal com degrau.

Deville e Mund (1985) usaram um tipo de pré-condicionamento baseado no método dos elementos finitos para resolver equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem de convergência, pela técnica pseudo-espectral de Chebyshev com condições de “retalho” nas interfaces dos subdomínios. Ordem de convergência espectral foi alcançada no problema elíptico de uma região bidimensional.

Henderson e Karniadakis (1995) apresentaram um método dos elementos espectrais Legendre-Fourier para estudar escoamentos turbulentos incompressíveis em geometrias complexas. As equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis foram escritas em uma forma apropriada, tanto para a simulação numérica direta como para a simulação de grandes escalas.

Rizales (2005) apresentou um método multidomínio espectral, o qual se baseia no método de colocação espectral e em um método de decomposição do domínio tipo “retalho”, onde se utiliza a técnica da matriz de influência para impor as condições de continuidade nas interfaces. O código numérico desenvolvido permitiu simular escoamentos em um canal com degrau, cavidades com tampa deslizante e sobre cilindros. Os resultados de Rizales (2005) mostram uma boa concordância quando comparados com outros dados da literatura.

No MFLab, da Universidade Federal de Uberlândia, os estudos sobre métodos espectrais começaram com o trabalho de Souza (2005). A autora comparou diferentes metodologias e obteve resultados excelentes utilizando o método pseudo-espectral de Fourier. Os resultados obtidos, das simulações de jatos temporais, mostram um grande número de detalhes, principalmente com o jato em regime turbulento.

A Fig. 2.10 (b) mostra um jato natural experimental utilizando a técnica PIV de visualização (MATSUDA; SAKAKIBARA, 2005) comparado com um jato em desenvolvimento temporal simulado via MPEF (SOUZA, 2005). É possível observar, em ambas as visualizações, detalhes do estiramento das estruturas, bem como a formação de estruturas do tipo grampo de cabelo ao redor do núcleo do jato. Essa comparação ilustra o grande potencial do método pseudo-espectral de Fourier, uma vez que capturar essas estruturas numericamente é uma tarefa que exige uma metodologia de alta acurácia ou um grande refinamento de malha.

A extensão deste trabalho foi dada por Moreira (2007), o qual implementou diversos modelos de turbulência propiciando simulações de grandes escalas de jatos temporais turbulentos.

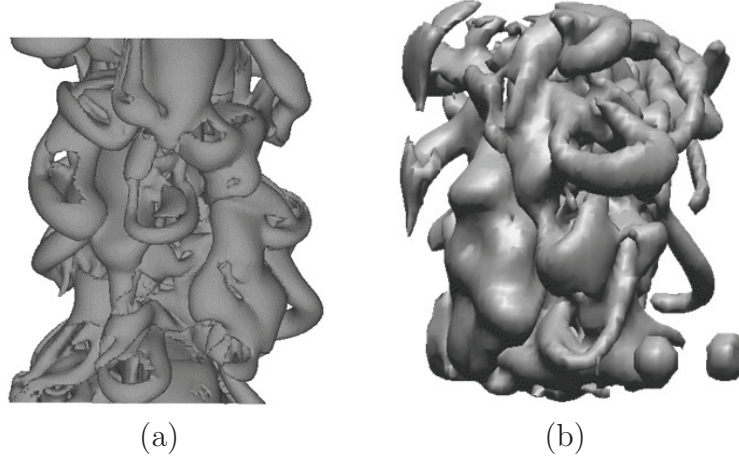


Figura 2.10: Visualizações do módulo da vorticidade em um jato natural: (a) Isosuperfície de vorticidade $= 1, 3 \text{ s}^{-1}$ resolvido pelo método pseudo-espectral de Fourier (SOUZA, 2005), (b) visualização experimental via PIV (MATSUDA; SAKAKIBARA, 2005).

2.2.3 *Presente trabalho*

Em 2007, no MFLab, foi proposta uma metodologia resultante da hibridação das metodologias pseudo-espectral de Fourier e fronteira imersa. Na dissertação de Mariano (2007) foram feitas as primeiras implementações e foram simulados escoamentos em cavidades com tampa deslizante (Fig. 2.11) e no trabalho de Mariano et al. (2010) são mostradas simulações de escoamentos sobre cilindros de base quadrada (Fig. 2.12). Em ambos os trabalhos são utilizados o método pseudo-espectral de Fourier juntamente com o modelo físico virtual (LIMA-E-SILVA; SILVEIRA-NETO; DAMASCENO, 2003). Essa metodologia permitiu, de forma original, modelar e simular problemas com condições de contorno não periódicas, utilizando a metodologia pseudo-espectral de Fourier em todas as direções do domínio, sendo denominada IMERSPEC pelos autores (MARIANO et al., 2010).

A primeira versão da metodologia IMERSPEC, devido ao cálculo da derivadas para obter a força lagrangiana do modelo físico virtual, serem feitas no espaço espectral, impossibilitava a utilização da metodologia em problemas de escoamentos sobre geometrias não cartesianas. Além disso, também apresentou primeira ordem de convergência espacial.

No entanto, a metodologia IMERSPEC se mostrou eficiente computacionalmente, além de apresentar uma acurácia satisfatória.

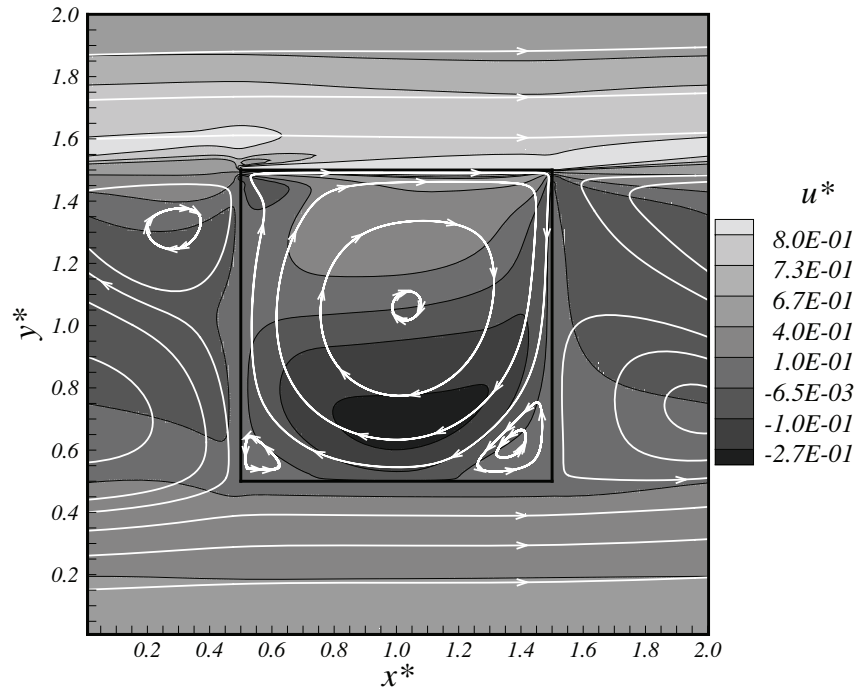


Figura 2.11: Simulação do escoamento em uma cavidade com tampa deslizante utilizando o método pseudo-espectral de Fourier acoplado com o método da fronteira imersa - modelo físico virtual (MARIANO, 2007).

O presente trabalho dá continuidade aos desenvolvimentos da metodologia IMERSPEC. O modelo físico virtual foi substituído pelo método da múltipla imposição da força, adaptado do trabalho de Wang, Fan e Luo (2008). Desta forma obteve-se uma metodologia de alta ordem de convergência, elevada acurácia e alta eficiência computacional. Possibilitou, também, aplicar a metodologia em escoamentos sobre geometrias não cartesianas.

As principais características da metodologia IMERSPEC, resultantes do presente trabalho, são as seguintes: inteiramente pseudo-espectral de Fourier; sem acoplamento pressão-velocidade; sem sistema linear; fronteira imersa para a solução de geometrias complexas utilizando-se de malhas cartesianas; o campo de pressão pode ser recuperado, sem solução de sistemas lineares (para escoamentos incompressíveis), com a mesma ordem de convergência espacial que a velocidade, o erro no balanço de massa é sempre da ordem dos erros de arredondamento da máquina (“round-off errors”).

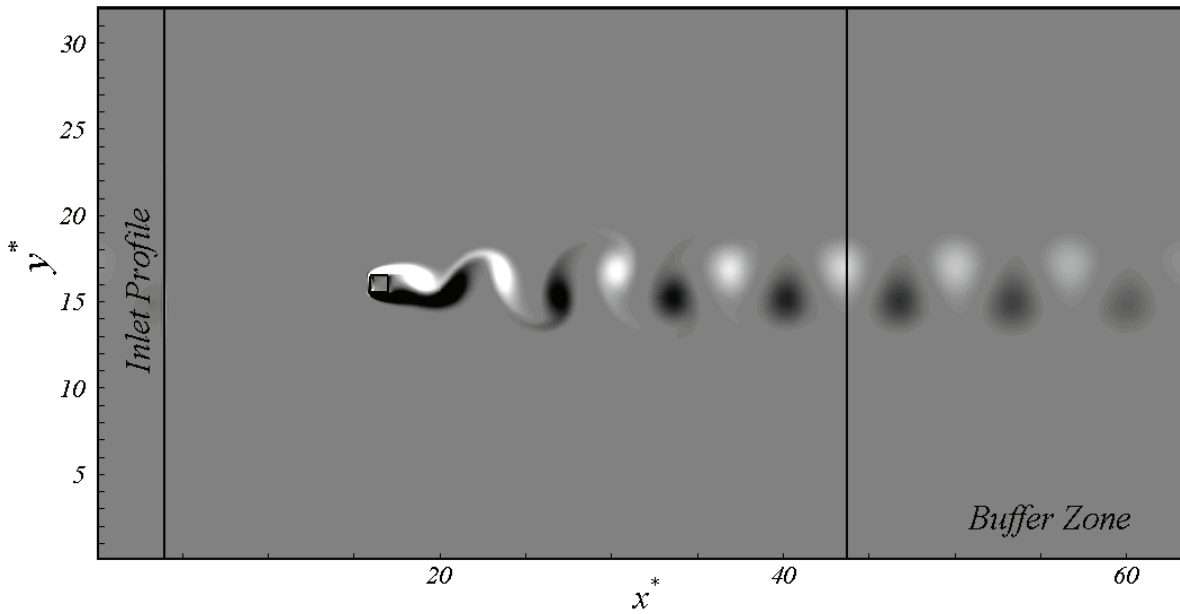


Figura 2.12: Simulação de escoamento sobre um cilindro de base quadrada (MARIANO et al., 2010).

As características apresentadas acima, são mostradas nos trabalhos de Mariano, Moreira e Silveira-Neto (2010a) e Mariano, Moreira e Silveira-Neto (2009), nos quais resultados de simulações de escoamentos sobre geometrias complexas foram apresentados. Pela primeira vez, tendo em conta a revisão bibliográfica, foi obtida quarta ordem de convergência espacial, para problemas suaves utilizando a metodologia de fronteira imersa, que utilizam funções de distribuição de força. No trabalho de Mariano, Moreira e Silveira-Neto (2010b) apresentaram-se simulações de escoamentos bidimensionais sobre uma expansão brusca, os resultados concordam muito bem com os dados experimentais. Também é mostrado que a metodologia suporta altos números de Reynolds. No trabalho de Mariano, Moreira e Silveira-Neto (2010c) simulou-se a queda livre de partículas em um fluido, mostrando que é possível resolver problemas de interação fluido-estrutura de forma eficiente com a metodologia IMERSPEC.

Ainda, como extensão da metodologia IMERSPEC, uma nova abordagem, em desenvolvimento no MFLab, o método pseudo-espectral de Fourier está sendo utilizado para simulações de escoamentos bifásicos, conforme apresentado no trabalho de Villela et al. (2010). Por outro lado, Moreira (2010) estudou a viabilidade de usar a metodologia IMERSPEC em

escoamentos turbulentos, simulando jatos tridimensionais em desenvolvimento espacial, com modelagem sub-malha da turbulência.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

Objetiva-se neste capítulo mostrar as modelagens matemática e numérica propostas, resultantes do acoplamento da metodologia pseudo-espectral de Fourier (MPEF) com a metodologia da fronteira imersa (MFI). Primeiramente, apresenta-se a MFI, baseada na imposição direta da força (“direct forcing” - DF), desenvolvendo a formulação matemática que a rege, bem como os principais detalhes de implementação numérica. No que se refere à MPEF, procede-se à transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço espectral de Fourier e se estabelece o algoritmo básico associado ao método. De posse dos fundamentos teóricos dos dois métodos, desenvolve-se a formulação para a metodologia proposta (IMERSPEC).

3.1 Metodologia da fronteira imersa

A modelagem matemática via fronteira imersa, para fins didáticos, será dividida em três etapas: o tratamento dos domínios euleriano e lagrangiano, a transferência de informação entre esses domínios e, por último, o cálculo da força lagrangiana.

3.1.1 Domínios de cálculo: euleriano e lagrangiano

O MFI trabalha simultaneamente com dois domínios de cálculo. Um, denominado euleriano (Ω), cartesiano e fixo, onde são resolvidas as equações para o fluido, e o outro é denominado lagrangiano (Γ), o qual representa a interface imersa no escoamento. No caso

de escoamentos bidimensionais, ele é representado por uma linha e, no caso tridimensional, por uma superfície, vide Fig. 3.1. É importante notar que as equações para o fluido são resolvidas em todo o domínio euleriano (Ω), mesmo na sua região delimitada pelo domínio lagrangiano. O domínio lagrangiano (Γ) representa uma fronteira entre dois tipos de fluidos, ou a fronteira entre um fluido e um sólido.

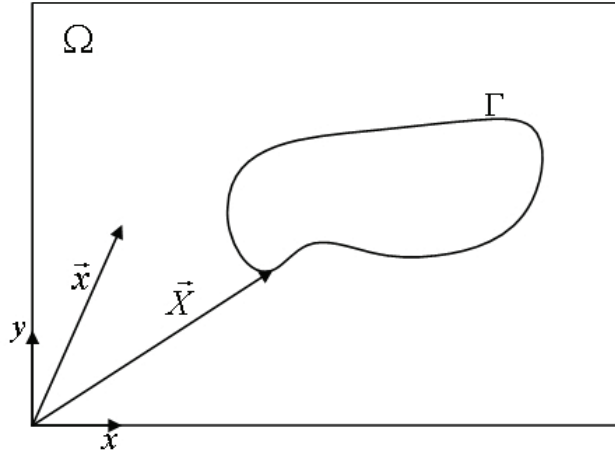


Figura 3.1: Esboço dos domínios de cálculo utilizados na metodologia da Fronteira Imersa, onde $\vec{x}$ posiciona um ponto qualquer no domínio euleriano (Ω) e $\vec{X}$ posiciona um ponto qualquer no domínio lagrangiano (Γ).

Sendo o domínio lagrangiano independente do domínio euleriano, consegue-se modelar e simular escoamentos sobre geometrias complexas utilizando domínios cartesianos para o fluido. No trabalho de Vedovoto (2007), é mostrada a capacidade de se importar qualquer geometria lagrangiana para o interior do domínio euleriano, como ilustra a Fig. 3.2, onde se visualiza um trem de pouso imerso em uma malha cartesiana. Outra vantagem a ser considerada é que, no caso de problemas de interação fluido-estrutura, a malha euleriana é fixa, não havendo necessidade de remalhagem. Mesmo com a estrutura se movendo, apenas a interface lagrangiana se move. O fato de se trabalhar sempre com um domínio cartesiano fixo é a principal vantagem apontada pelos pesquisadores (FADLUN et al., 2000; LIMA-E-SILVA; SILVEIRA-NETO; DAMASCENO, 2003; MITTAL; IACCARINO, 2005), quando a comparam com metodologias que utilizam malha não-estruturada, ou metodologias que precisam remalhar o domínio fluido.

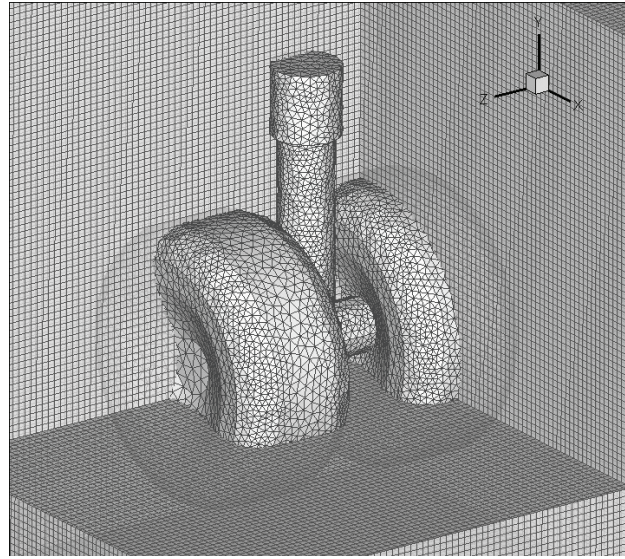


Figura 3.2: Trem de pouso imerso em um domínio euleriano (VEDOVOTO, 2007).

3.1.2 Modelagem para o fluido - domínio euleriano

O próximo passo a ser compreendido é como a comunicação entre os dois domínios é realizada. Para isso, são consideradas as equações de Navier-Stokes (Eq. 3.1) e a equação da continuidade (Eq. 3.2) válidas no domínio Ω e para $t \geq 0$, onde t é o tempo. São considerados apenas fluidos newtonianos, escoamentos incompressíveis, sem transferência de calor e com propriedades físicas do fluido constantes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (3.2)$$

onde $p = p^*/\rho + gz$; p^* é a pressão estática em $[N/m^2]$; z é a cota vertical alinhada com o vetor gravidade $\vec{g}$ na direção vertical e sentido positivo para cima; u_i são as componentes da velocidade em $[m/s]$ na direção $i = 1, 2$ para os problemas bidimensionais e $i = 1, 2, 3$ para os problemas tridimensionais. $f_i = \frac{f_i^*}{\rho}$; f_i^* é o termo fonte de força em $[N/m^3]$; ρ é a massa específica em $[kg/m^3]$; ν é a viscosidade cinemática em $[m^2/s]$.

3.1.3 Modelo para o acoplamento entre os domínios euleriano e lagrangiano

Na Eq. 3.1 aparece o termo f_i , o qual pode ser considerado, fisicamente, como um termo que representa as forças de campo, como por exemplo, uma força eletromagnética.

No caso do MFI, este termo é o responsável por representar a interface imersa no domínio euleriano (Ω). Matematicamente ele é representado pela Eq. 3.3 (ENRIQUES-REMIGIO; SILVEIRA-NETO, 2007):

$$f_i(\vec{x}, t) = \begin{cases} F_i(\vec{X}, t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X} \end{cases}, \quad (3.3)$$

onde $F_i(\vec{X}, t)$ é a força lagrangiana definida no domínio Γ .

Esta definição leva a um campo $f_i(\vec{x}, t)$ descontínuo, o qual pode ser resolvido numericamente apenas quando houver coincidência dos pontos que compõem a interface com algum dos pontos que compõem o domínio fluido. Caso não haja coincidência, o que, para geometrias complexas é muito frequente, deve-se distribuir a função $F_i(\vec{x}, t)$ sobre a sua vizinhança. Para tanto, faz-se uso da função distribuição de força, $D_h(\vec{x} - \vec{X})$, proposta por Peskin (1972), e transcrita aqui pelas Eqs. 3.4, 3.5 e 3.6.

$$f_i(\vec{x}) = \sum_{\Gamma} D_h(\vec{x} - \vec{X}) F_i(\vec{X}) \Delta s^2, \quad (3.4)$$

$$D_h(\vec{x} - \vec{X}) = \frac{1}{h^2} W_g(r_x) W_g(r_y), \quad (3.5)$$

$$W_g(r) = \begin{cases} \frac{3-2|r|+\sqrt{1+4|r|-4|r|^2}}{8} & \text{se } 0 < |r| \leq 1 \\ \frac{5-2|r|-\sqrt{-7+12|r|-4|r|^2}}{8} & \text{se } 1 < |r| \leq 2 \\ 0 & \text{se } 2 < |r| \end{cases}, \quad (3.6)$$

onde, $r_x = \frac{x-X}{h}$ e $r_y = \frac{y-Y}{h}$, sendo h o espaçamento entre os nós de colocação do domínio euleriano, quando esse é discretizado e Δs é o espaçamento entre os nós discretizados do domínio lagrangiano. Se o problema for tridimensional usa-se h^3 , Δs^3 e $r_z = \frac{z-Z}{h}$. A função W_g é ilustrada na Fig. 3.3. Ela tem a forma similar a uma gaussiana e atende à propriedade de integral unitária no intervalo de $[-\infty, \infty]$.

O campo de força euleriano, $f_i(\vec{x}, t)$, é nulo em todo domínio, exceto quando se aproxima dos pontos lagrangianos, onde ele passa a modelar virtualmente a presença da membrana imersa, simulando a presença de um corpo ou a interface entre dois fluidos. Com isso não é necessário fazer uma adaptação da malha euleriana para localizar a interface (LIMA-E-SILVA; SILVEIRA-NETO; DAMASCENO, 2003).

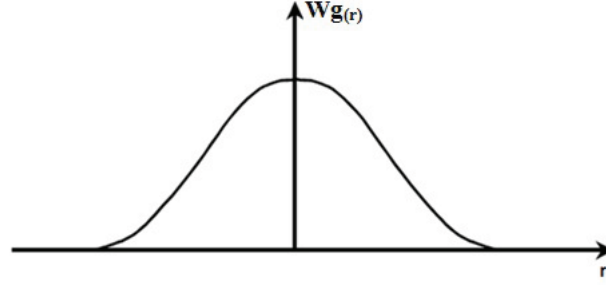


Figura 3.3: Função distribuição do tipo gaussiana W_g (Eq. 3.6) proposta por Peskin (2002).

Uma vez calculado o campo de força lagrangiano, $F_i(\vec{X}, t)$, este pode ser distribuído e, assim, transmitir a informação da presença da geometria para a malha euleriana.

No presente trabalho, além da função gaussiana proposta por Peskin (1972), Eq. 3.6, utilizou-se outras funções propostas por diferentes autores. O que diferencia uma das outras é apenas a função peso, $W(r)$. A função denominada cúbica, W_c , (Eq. 3.7) foi proposta por Tornberg e Engquist (2004); a função de seis pontos, W_{6p} , (Eq. 3.8) proposta por Stockie (1997); a função cosseno, W_{cos} (Eq. 3.9) foi proposta por Peskin (2002) e utilizada por Villar (2007); e por último a função chapéu (“hat”), W_h , Eq. 3.10, a qual equivale a uma interpolação bilinear, mostrada no trabalho de Su, Lai e Lin (2007):.

$$W_c(r) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|r| - |r|^2 + \frac{1}{2}|r|^3 & \text{se } 0 \leq |r| < 1 \\ 1 + \frac{11}{6}|r| + |r|^2 - \frac{1}{6}|r|^3 & \text{se } 1 \leq |r| < 2 \\ 0 & \text{se } 2 \leq |r| \end{cases}, \quad (3.7)$$

$$W_{6p}(r) = \begin{cases} \frac{61}{112} - \frac{11}{42}|r| - \frac{11}{56}|r|^2 + \frac{1}{12}|r|^3 + \\ \frac{\sqrt{3}}{336} (243 + 1584|r| - 748|r|^2 - 1560|r|^3) & \text{se } 0 \leq |r| < 1 \\ +500|r|^4 + 336|r|^5 - 112|r|^6)^{1/2} & \\ \frac{21}{16} + \frac{7}{12}|r| - \frac{7}{8}|r|^2 + \frac{1}{6}|r|^3 - \frac{3}{2}W_{6p}(|r|-1) & \text{se } 1 \leq |r| < 2 \\ \frac{9}{8} - \frac{23}{12}|r| + \frac{3}{4}|r|^2 - \frac{1}{12}|r|^3 + \frac{1}{2}W_{6p}(|r|-2) & \text{se } 2 \leq |r| < 3 \\ 0 & \text{se } 3 \leq |r| \end{cases}, \quad (3.8)$$

$$W_{cos}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi|r|}{2}\right) \right] & \text{se } 0 \leq |r| < 2 \\ 0 & \text{se } 2 \leq |r| \end{cases}, \quad (3.9)$$

$$W_h(r) = \begin{cases} 1 - |r| & \text{se } 0 \leq |r| \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < |r| \end{cases}. \quad (3.10)$$

Nem todas essas funções peso satisfazem às propriedades matemáticas necessárias que uma função distribuição deve ter. Todavia, Griffith e Peskin (2005) mostram que, mesmo assim, elas apresentam resultados melhores que algumas funções que satisfazem todas as propriedades. A função peso, $W(r)$, é fundamental para a acurácia e ordem de convergência numérica da metodologia. Serão apresentados resultados comparando estas diferentes funções distribuição.

3.1.4 Cálculo da força lagrangiana

No contexto da explicação da metodologia da fronteira imersa, é necessário descrever o modelo para o cálculo da força lagrangiana, $F_i(\vec{X}, t)$. Neste ponto também existem variações de tipos de métodos de fronteira imersa, porém o presente trabalho ficará restrito ao método da imposição direta da força (“Direct Forcing” - DF) proposto por Uhlmann (2005) e também apresentado nos trabalhos de Shu, Liu e Chew (2007), Su, Lai e Lin (2007) e Wang, Fan e Luo (2008), entre outros. Todos esses apresentam diferentes tipos de discretização espacial e temporal das equações de Navier-Stokes, porém o conceito do modelo DF é sempre o mesmo. No presente trabalho, uma nova forma desse modelo foi proposta para a metodologia IMERSPEC.

Primeiramente, determina-se o campo de força euleriano, isolando f_i na Eq. 3.1:

$$f_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.11)$$

Como a Eq. 3.11 foi desenvolvida a partir da hipótese do contínuo e o domínio Γ está contido em Ω , pode-se definir a força lagrangiana através da Eq. 3.12:

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial(U_i U_j)}{\partial X_j} + \frac{\partial P}{\partial X_i} - \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j}, \quad (3.12)$$

onde as variáveis maiúsculas dizem respeito ao domínio lagrangiano. A Eq. 3.12 representa a segunda lei de Newton aplicada às partículas de fluido que estão localizadas na interface fluido-fluido ou fluido-sólido. Discretizando a derivada temporal da Eq. 3.12 através de um esquema de Euler explícito (WANG; FAN; LUO, 2008), obtém-se:

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t, \quad (3.13)$$

onde

$$RHS_i = \frac{\partial(U_i U_j)}{\partial X_j} + \frac{\partial P}{\partial X_i} - \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j}, \quad (3.14)$$

e Δt é o passo de tempo.

O método “direct forcing” consiste em somar e subtrair um parâmetro temporário U_i^* no operador discretizado do tempo (WANG; FAN; LUO, 2008), ou seja:

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^* + U_i^* - U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t. \quad (3.15)$$

O próximo passo é decompor a Eq. 3.15 em duas outras (Eqs. 3.16 e 3.17), no mesmo passo de tempo:

$$\frac{U_i^* - U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t = 0, \quad (3.16)$$

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^*}{\Delta t}. \quad (3.17)$$

A Eq. 3.16 é definida tanto no domínio lagrangiano, quanto no domínio euleriano. Desta forma, consegue-se obter o parâmetro temporário u_i^* resolvendo-se a Eq. 3.18,

$$\frac{u_i^* - u_i^t}{\Delta t} + rhs_i^t = 0. \quad (3.18)$$

Fazendo uma analogia com um método preditor-corretor (CHORIN, 1968), este parâmetro temporário u_i^* , pode ser entendido como um campo de velocidade predita, ou estimada, ou seja, a Eq. 3.18 é a equação de Navier-Stokes (Eq. 3.1) sem a influência do termo fonte f_i . Em um segundo momento, após obter o termo fonte, faz-se a “correção” do campo u_i^* , usando-se a Eq. 3.19, isto é, o campo de velocidade euleriano recebe a informação do campo de força:

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^* + \Delta t f_i. \quad (3.19)$$

A Eq. 3.17 requer o cálculo de U_i^* , o que vem do processo de transferência de informação do domínio euleriano para o domínio lagrangiano. Para isso, é utilizada, ou a Eq. 3.20, quando há coincidência entre os pontos do domínio lagrangianos com os do domínio eulerianos, ou a função de interpolação, dada pela Eq. 3.21:

$$U_i^*(\vec{X}, t) = \begin{cases} u_i^*(\vec{x}, t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X} \end{cases}, \quad (3.20)$$

$$U_i^* = \sum_{\Omega} u_i^* D_h(x_i - X_i) h^2. \quad (3.21)$$

A função de interpolação pode ser entendida como um processo oposto ao de distribuição, isto é, enquanto que na operação de distribuição a informação de um ponto lagrangiano é transmitida para os vizinhos eulerianos, na operação de interpolação transfere-se a informação dos pontos eulerianos vizinhos para um ponto lagrangiano. Essas transferências são ponderadas pela distância entre esses pontos, $|x_i - X_i|$, através da função D_h , dada por uma das Eqs. 3.6 até 3.10.

O termo $U_i^{t+\Delta t}$ que aparece na Eq. 3.17, diz respeito à velocidade da fronteira imersa no tempo $t + \Delta t$. Normalmente essa velocidade é conhecida para problemas para os quais é possível especificar $U_i^{t+\Delta t}$. Para problemas de interação fluido-fluido, ou fluido-estrutura, $U_i^{t+\Delta t} = U_{FI}$, onde U_{FI} deve ser obtida do modelo que rege o movimento da interface. Por exemplo, utilizando a abordagem particionada para a solução de problemas de interação fluido-estrutura (CAMPREGHER, 2005), primeiramente, resolve-se as equações que regem o movimento da estrutura, obtendo a nova posição e a velocidade estrutural. Esta velocidade é, então, passada para o cálculo da força lagrangiana.

3.1.5 Algoritmo básico da metodologia da fronteira imersa baseado no método de imposição direta da força

A fim de facilitar o entendimento desta metodologia, apresenta-se um resumo das equações descritas até agora, na sequência em que elas são utilizadas no algoritmo implementado:

$$\frac{u_i^* - u_i^t}{\Delta t} = -\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (3.22)$$

$$U_i^*(\vec{X}, t) = \sum_{\Omega} u_i^* D_h(\vec{x} - \vec{X}) h^2, \quad (3.23)$$

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{U_{FI} - U_i^*}{\Delta t}, \quad (3.24)$$

$$f_i(\vec{x}, t) = \sum_{\Gamma} D_h(\vec{x} - \vec{X}) F_i(\vec{X}, t) \Delta S^2, \quad (3.25)$$

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^* + \Delta t f_i. \quad (3.26)$$

A Eq. 3.22 serve para calcular o parâmetro temporário, u_i^* . Para fins didáticos, a derivada temporal é discretizada através do esquema de Euler de primeira ordem. Ela pode

ser discretizada de outra maneira, como, por exemplo, em Uhlmann (2005) e Wang, Fan e Luo (2008) que utilizaram um Runge-Kutta de terceira ordem de convergência temporal. Su, Lai e Lin (2007) usaram um esquema de Crank-Nicolson. No presente trabalho é utilizado um esquema de Runge-Kutta de quarta ordem de convergência temporal otimizado (ALLAMPALLI et al., 2009), o qual será explicado com mais detalhes no decorrer deste capítulo.

A Eq. 3.23 modela o processo de interpolação, pelo qual a informação do domínio euleriano, neste caso u_i^* , é transmitida para o domínio lagrangiano. A Eq. 3.24 fornece a força lagrangiana, $F_i(\vec{x}, t)$, onde U_{FI} é a velocidade que a fronteira deve ter (imposta ou fornecida por um modelo estrutural). A Eq. 3.25 é o processo de distribuição da força $F_i(\vec{x}, t)$, que pertence ao domínio lagrangiano, para a obtenção de $f_i(\vec{x}, t)$, definida em todo domínio euleriano.

Na Eq. 3.26 é feita a atualização do campo de velocidade, ou seja, nesta etapa do algoritmo o “campo de velocidade estimado” recebe a informação da fronteira, ou seja, ele recebe a influência do campo de força euleriano (f_i). Também nesta etapa o operador temporal foi discretizado através de um esquema de Euler de primeira ordem de convergência temporal, apenas para entendimento do algoritmo.

Cabe ressaltar, que este é um algoritmo simplificado da metodologia da fronteira imersa usando o modelo DF (“direct-forcing”). Ainda falta o cálculo do campo de pressão de forma a satisfazer a equação da continuidade (Eq. 3.2). Quando se resolvem as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis no espaço físico, é necessária a resolução da equação de Poisson para a pressão (FERZIGER; PERIC, 1996). Entretanto, como no presente trabalho é utilizado o método pseudo-espectral de Fourier, não é necessário calcular esta variável no processo de integração espaço-temporal. Será visto que a projeção do campo de velocidade garante o balanço de massa.

3.1.6 Múltipla imposição da força (Multi-Direct Forcing - MDF)

A velocidade do fluido sobre a interface imersa, teoricamente, deveria ser igual a U_{FI} (velocidade que a fronteira deve ter). Porém, devido aos processos de discretização temporal e espacial, além dos processos de interpolação e distribuição, essa condição não é absolutamente

satisfeita. Nos estudos de Wang, Fan e Luo (2008), é proposto um processo iterativo para o cálculo da força e da velocidade corrigida, denominado “Multi-Direct Forcing”, onde se busca melhorar a precisão deste cálculo. Para isto, na Eq. 3.26, faz-se:

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^{it}, \quad (3.27)$$

onde it é o número da iteração dentro do processo iterativo.

O campo de velocidade u_i^{it} , antes de avançar para o próximo passo de tempo, é novamente interpolado, ou seja, a Eq. 3.23 é resolvida novamente:

$$U_i^{it} = \sum_{\Omega} u_i^{it} D_h(x_i - X_i) h^2. \quad (3.28)$$

Assim, obtém-se um novo campo de força f_i^{it} (distribuição de F_i^{it} , obtido da Eq. 3.24) do qual se obtém novamente:

$$u_i^{it+1} = u_i^{it} + \Delta t f_i^{it}, \quad (3.29)$$

o qual se aproxima ainda mais da condição de não deslizamento. Assim, repetindo este procedimento de $it = 1$ até $it = NL$, onde NL é o número total de iterações, tem-se que:

$$U_{FI} - U_i^{it+1} \rightarrow 0. \quad (3.30)$$

Com isso, a força lagrangiana da N -ésima iteração tende a zero. Wang, Fan e Luo (2008) utilizaram um número de iterações NL fixo. No presente trabalho, optou-se por utilizar a máxima diferença entre as velocidades lagrangianas entre duas iterações consecutivas, ou seja:

$$\max |U_i^{it+1} - U_i^{it}| \leq \varepsilon. \quad (3.31)$$

Utilizando a Eq. 3.31 o processo iterativo fica independente de NL . Uma vez que, à princípio, não se sabe qual o melhor número de iterações necessário para se obter um resultado fiel a física. Pois em determinados momentos, principalmente quando o escoamento está na fase transiente, é necessário mais iterações para representar bem a fronteira. Já na etapa em que o escoamento está em regime permanente não se precisa de tantas iterações. Por outro lado, a Eq. 3.31 fica dependente da máxima diferença entre as velocidades lagrangianas

em iterações consecutivas, ou seja, quando a velocidade tender a não se alterar mais entre duas iterações consecutivas o processo iterativo é finalizado.

Para calcular quantidades que dependem da força sobre o corpo, por exemplo, forças de arrasto e de sustentação sobre corpos imersos em escoamentos, e para problemas de interação fluido-estrutura, em que o movimento da estrutura depende da força gerada pelo fluido utiliza-se o somatório de todas as NL iterações:

$$F_{C_i} = - \sum_{it=1}^{NL} \int_{\Gamma} F_i(\vec{X}, t) ds. \quad (3.32)$$

A integral apresentada na Eq. 3.32, normalmente, é substituída pelo somatório da força lagrangiana (Eq. 3.24), dada em cada ponto do domínio lagrangiano, isto é:

$$F_{C_i} = - \sum_{it=1}^{NL} \sum_{p=1}^{Np} F_i^p(\vec{X}, t) \Delta s, \quad (3.33)$$

onde Np é o número de pontos lagrangianos utilizados para a discretização da interface imersa e o índice p representa cada um dos pontos lagrangianos que compõem a interface.

3.2 Método pseudo-espectral de Fourier

Nesta seção é apresentado o método pseudo-espectral de Fourier (CANUTO et al., 2006), em que é feita a transformação dos campos das variáveis primitivas (velocidade e pressão) para o espaço espectral de Fourier.

3.2.1 Transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço espectral de Fourier

As variáveis de interesse passam por um processo de transformação linear, chamado de transformada de Fourier (BRIGGS; HENSON, 1995). As transformadas direta e inversa de Fourier são dadas, respectivamente, pelas Eqs. 3.34 e 3.35:

$$\widehat{\phi}(\vec{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\vec{x}, t) e^{-\iota 2\pi \vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{x}, \quad (3.34)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(\vec{k}, t) e^{\iota 2\pi \vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{k}, \quad (3.35)$$

nestas equações $\widehat{\phi}(\vec{k}, t)$ é a função transformada e $\vec{k}$ é o vetor número de onda, parâmetro de transformação espacial de Fourier e $\iota = \sqrt{-1}$ é o número imaginário. O campo transformado,

$\widehat{\phi}(\vec{k}, t)$, está no chamado espaço de Fourier ou espaço espectral. Em contrapartida, o campo não transformado está no espaço físico.

A grande vantagem dessa transformação é que algumas operações matemáticas são simplificadas no domínio espectral, por exemplo, a operação de derivada. Outra vantagem é que, normalmente, uma equação diferencial parcial se reduz a uma equação diferencial ordinária. Por outro lado, outras operações tornam-se mais complicadas, como o produto entre duas funções. No livro de Briggs e Henson (1995), essas propriedades são apresentadas com mais detalhes.

Partindo para a transformação do modelo diferencial (Eqs. 3.1 e 3.2) para o espaço espectral, primeiramente, aplica-se a transformada de Fourier sobre a equação da continuidade (Eq. 3.2):

$$\widehat{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = 0. \quad (3.36)$$

Então, aplicando a propriedade das transformadas de Fourier sobre a derivada da Eq. 3.36, obtém-se:

$$\iota k_j \hat{u}_j = 0. \quad (3.37)$$

Da geometria analítica sabe-se que, se o produto escalar entre dois vetores é nulo, então eles devem ser ortogonais entre si. Portanto, observando a Eq. 3.37, tem-se que o vetor número de onda, $\vec{k}$, é ortogonal ao campo de velocidade transformada $\hat{u}_i(\vec{k}, t)$. Define-se, então, um plano perpendicular ao vetor número de onda, denominado plano π , no qual está contido o campo de velocidade transformado de divergente nulo. Portanto, o vetor velocidade transformado, $\hat{u}_i(\vec{k}, t)$, está contido no plano π , conforme ilustrado na Fig. 3.4.

Transformando a Eq. 3.1 para o espaço de Fourier, tem-se:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \iota k_j \widehat{(u_i u_j)} = -\iota k_i \hat{p} - \nu k^2 \hat{u}_i + \hat{f}_i, \quad (3.38)$$

onde k^2 é a norma ao quadrado do vetor número de onda, $\vec{k}$, ou seja, $k^2 = k_j k_j$.

Deve ficar claro que a transformada de Fourier é aplicada sobre as funções espaciais, ou seja, as Eqs. 3.37 e 3.38 passam a ser definidas no domínio dos números de onda, $\vec{k}$, diferenciando de problemas relacionados a análise de sinais, em que a transformada, normalmente, é aplicada sobre o tempo, recaindo no domínio da frequência.

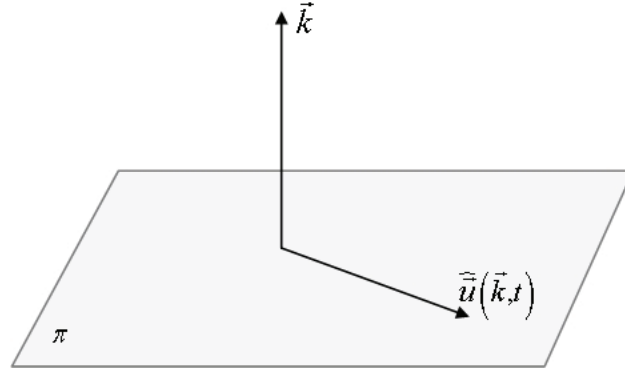


Figura 3.4: Definição do plano π .

A Eq. 3.38 pode ser manipulada matematicamente, a fim de desacoplar o campo de pressão do campo de velocidade. Para entender esse procedimento, cada um dos termos transformados são relacionados com o plano π e, posteriormente, é aplicado o operador projeção sobre esses termos.

Tanto o termo da taxa de variação da quantidade de movimento linear, $\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t}$, quanto o termo de difusão, $\nu k^2 \hat{u}_i$, pertencem ao plano π . O gradiente de pressão, $\iota k_i \hat{p}$, é colinear ao vetor número de onda, $\vec{k}$, sendo, portanto ortogonal ao plano π . Os termos transformados das equações de Navier-Stokes são relacionados com o plano π de acordo com a Fig. 3.5.

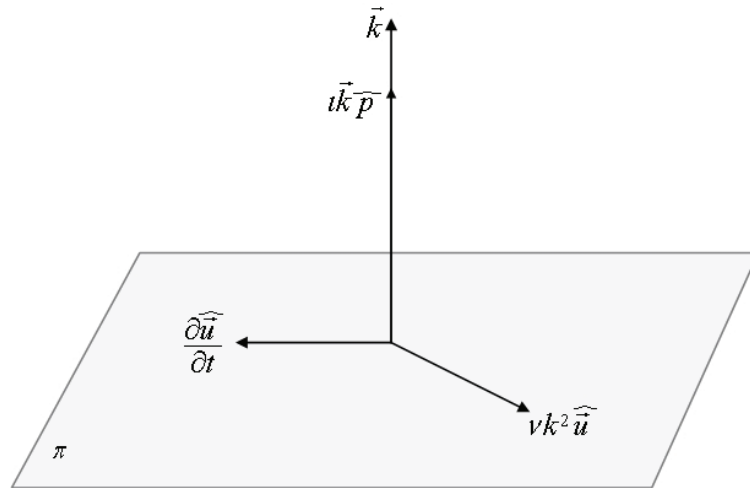


Figura 3.5: Termos da equação de Navier-Stokes definidos em relação ao plano π .

No termo advectivo, $\iota k_j \widehat{(u_i u_j)}$, aparece uma transformada do produto entre duas funções, $\widehat{(u_i u_j)}$, aparecendo uma integral de convolução, definida na Eq. 3.39:

$$\iota k_j \widehat{(u_i u_j)}(\vec{k}) = \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_i(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r}, \quad (3.39)$$

onde $\vec{k} = \vec{r} + \vec{s}$, fornece as interações triádicas entre os vetores número de onda $\vec{k}$, $\vec{r}$ e $\vec{s}$. Dessa forma, não se sabe qual é a posição do termo advectivo em relação ao plano π , além disso, também não se pode afirmar nada sobre a posição do termo fonte, $\hat{f}_i$.

3.2.2 Projeção

Nesta etapa, procura-se mostrar o procedimento para que o campo de pressão seja desacoplado do campo de velocidade. Primeiramente, separam-se os termos que pertencem ao plano π dos demais:

$$\underbrace{\left[\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \nu k^2 \hat{u}_i \right]}_{\in \pi} + \left[\iota k_j \widehat{(u_i u_j)} - \hat{f}_i + \iota k_i \hat{p} \right] = 0. \quad (3.40)$$

Observando a Eq. 3.40 e sabendo-se que a soma do termo transiente com o termo difusivo pertence ao plano π , então, tem-se que a soma vetorial do termo não-linear com o gradiente de pressão e o termo fonte também deve pertencer ao plano π , pois a soma de todos os termos é nula. Isto se deve ao fato que, se a soma de dois vetores é nula, então os dois vetores devem ser colineares.

O próximo passo é definir o tensor projeção:

$$\wp_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad (3.41)$$

onde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (3.42)$$

O tensor projeção, $\wp_{ij}$, projeta qualquer vetor, a_i , sobre o plano π (SILVEIRA-NETO, 2002). Para verificar esta propriedade, toma-se um vetor $\vec{a}$ qualquer, e faz-se a projeção dele, obtendo-se o seguinte:

$$\bar{\wp} \cdot \vec{a} = \wp_{ij} a_j = a_j \delta_{ij} - a_j \frac{k_i k_j}{k^2} = a_i - a_j k_j \frac{k_i}{k^2} = a_i^p. \quad (3.43)$$

onde a_i^p é o vetor a_i projetado por $\bar{\wp}$. Fazendo-se o produto escalar da projeção, a_i^p , pelo vetor número de onda, k_i , tem-se:

$$a_i^p k_i = a_i k_i - a_j k_j \frac{k_i k_i}{k^2} = 0, \quad (3.44)$$

logo, verifica-se que o tensor $\wp_{ij}$ projeta um vetor a_i qualquer sobre o plano π . De posse da definição do tensor projeção, destaca-se, novamente, na Eq. 3.40, especificamente o segundo colchete apresentado nesta equação:

$$\left[\iota k_j \widehat{(u_i u_j)} - \hat{f}_i + \iota k_i \hat{p} \right] \in \pi, \quad (3.45)$$

concluí-se que a soma dos termos apresentados na Eq. 3.45 está contida no plano π , e sabendo-se que o termo $\iota k_i \hat{p}$ é ortogonal a π , pode-se afirmar que:

$$\left[\iota k_j \widehat{(u_i u_j)} + \iota k_i \hat{p} - \hat{f}_i \right] = \wp_{im} \left[\iota k_j \widehat{(u_m u_j)} - \hat{f}_m \right]. \quad (3.46)$$

Nota-se na Eq. 3.46, que o termo referente ao gradiente de pressão no espaço de Fourier, $\iota k_i \hat{p}$, desaparece no lado direito do sinal de igualdade, pois a projeção, sobre um dado plano, de um vetor ortogonal a esse plano é nula. Este resultado é ilustrado na Fig. 3.6. Nela têm-se os vetores do termo fonte e do termo advectivo projetados sobre o plano π . Já o vetor que representa o gradiente de pressão desaparece quando projetado. Este procedimento faz o desacoplamento do campo de pressão das equações de Navier-Stokes incompressíveis.

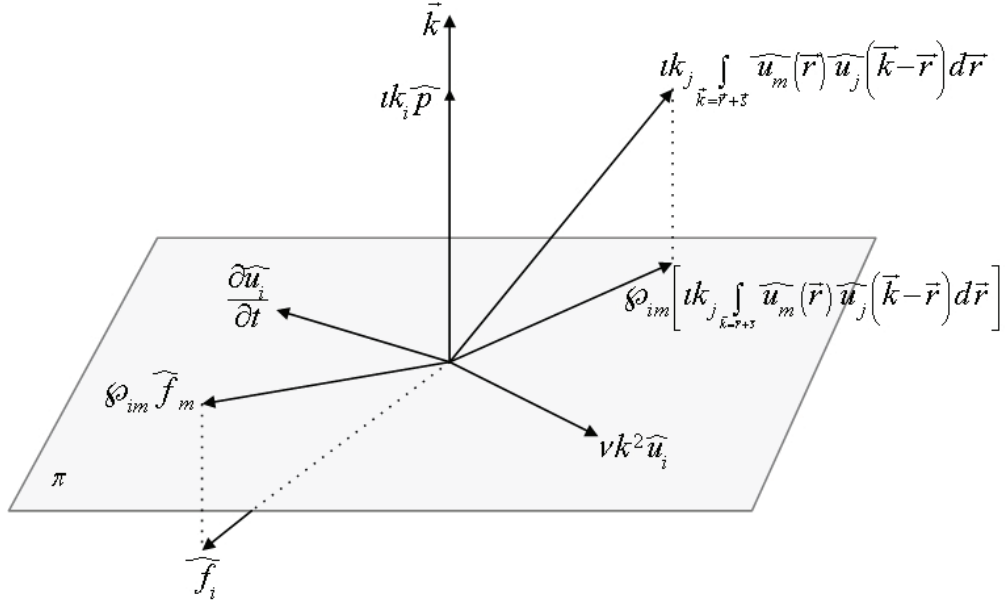


Figura 3.6: Projeção do termo fonte e do termo advectivo sobre o plano π .

Finalmente, substituindo o lado direito da Eq. 3.46 na Eq. 3.40, obtém-se as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis no espaço espectral de Fourier:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right] \hat{u}_i(\vec{k}, t) = \wp_{im} \left[\hat{f}_m(\vec{k}, t) - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}, t) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}, t) d\vec{r} \right]. \quad (3.47)$$

Algumas observações devem ser tecidas a respeito da Eq. 3.47. A primeira é a sua independência do termo de pressão, o qual foi substituído pela projeção dos termos fonte e advectivo. Comparando com esquemas clássicos, esse procedimento equivale a substituir a solução de uma equação de Poisson por um produto vetor-matriz, que, em termos numéricos, é mais barato. Em termos físicos, ambos têm a mesma função de garantir a conservação da massa.

Uma segunda observação é a presença de uma integral de convolução, que rigorosamente, deve ser resolvida através de algum esquema de integração numérica. Caso isso seja feito, provavelmente, o ganho computacional obtido pela operação de projeção seria perdido na resolução dessa integral. Todavia, como será visto posteriormente, essa integral de convolução é substituída pelo método pseudo-espectral, tornando-se a resolução da Eq. 3.47 muito atrativa quando comparada com os métodos clássicos.

3.2.3 Recuperação do campo de pressão

Apesar do campo de pressão não aparecer nas equações de Navier-Stokes transformadas (Eq. 3.47), ele pode ser recuperado por meio de um pós-processamento a partir da Eq. 3.46. Isolando-se o termo referente ao gradiente de pressão, tem-se que:

$$\iota k_i \hat{p}(\vec{k}) = \wp_{im} \left[\iota k_j \widehat{(u_m u_j)}(\vec{k}) - \hat{f}_m(\vec{k}) \right] - I_{im} \left[\iota k_j \widehat{(u_m u_j)}(\vec{k}) - \hat{f}_m(\vec{k}) \right], \quad (3.48)$$

observa-se que o tensor identidade, I_{im} , foi introduzido por conveniência, sem alterar a Eq. 3.48. Colocando-se em evidência os termos entre colchetes:

$$\iota k_i \hat{p}(\vec{k}) = (\wp_{im} - I_{im}) \left[-\hat{f}_m(\vec{k}) + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right]. \quad (3.49)$$

Fazendo o produto escalar da Eq. 3.49 pelo vetor número de onda k_i , tem-se:

$$\iota k^2 \hat{p}(\vec{k}) = (\wp_{im} - I_{im}) k_i \left[-\hat{f}_m(\vec{k}) + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right]. \quad (3.50)$$

Observando-se que:

$$(\wp_{im} - I_{im}) k_i = \left(\delta_{im} - \frac{k_i k_m}{k^2} - I_{im} \right) k_i = -k_m, \quad (3.51)$$

então substituindo a equação Eq. 3.51 na Eq. 3.50 obtém-se:

$$\iota k^2 \widehat{p}(\vec{k}) = -k_m \left[-\widehat{f}_m(\vec{k}) + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_m(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right]. \quad (3.52)$$

Assim, o campo de pressão pode ser obtido usando a Eq. 3.53:

$$\widehat{p}(\vec{k}) = \frac{\iota k_m}{k^2} \left[-\widehat{f}_m(\vec{k}) + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_m(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right], \quad (3.53)$$

aplicando a operação transformada inversa (Eq. 3.35) sobre $\widehat{p}(\vec{k}, t)$, obtém-se o campo de pressão no espaço físico.

3.2.4 Método pseudo-espectral de Fourier

O método pseudo-espectral de Fourier consiste em realizar o produto de duas funções no espaço físico e transformar o produto já realizado, ao invés de transformar as duas funções separadamente e realizar a integral de convolução no espaço de Fourier. A vantagem desse processo é não ter que resolver a integral de convolução, sem, no entanto, perder a precisão do método espectral. A manutenção da alta precisão do método espectral de Fourier se dá pela possibilidade de se fazer os produtos no espaço físico e de se fazer o cálculo das derivadas no espaço espectral. A desvantagem do método pseudo-espectral é ter que fazer as transformadas direta e inversa de Fourier a cada passo de tempo. Dadas duas funções $g(\vec{x}, t)$ e $h(\vec{x}, t)$, define-se a função produto $b(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t)h(\vec{x}, t)$. Logo,

$$\widehat{gh}(\vec{k}, t) = \widehat{b}(\vec{k}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\iota 2\pi \vec{k} \cdot \vec{x}} b(\vec{x}, t) d\vec{x}, \quad (3.54)$$

assim, o termo não-linear, das equações de Navier-Stokes, passa a ser tratado de forma pseudo-espectral como descrito acima.

Outro detalhe importante na formulação apresentada no presente trabalho é a forma pela qual o termo não-linear é tratado. A forma anti-simétrica, proposta por Canuto et al. (2007), como sendo a mais estável, foi utilizada no presente trabalho. Ela consiste em fazer uma média aritmética do termo não-linear escrito na forma conservativa e na forma não-conservativa:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i. \quad (3.55)$$

Quando se trata de escoamentos incompressíveis, observa-se que as Eqs. 3.1 e 3.55 são matematicamente idênticas, uma vez que o divergente de velocidade é nulo. No entanto, quando as Eqs. 3.1 e 3.55 são discretizadas, geram níveis de estabilidade numérica e de custo computacional diferentes. As transformadas de Fourier das Eqs. 3.1 e 3.55 fornecem:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) \widehat{u}_i(\vec{k}, t) = \wp_{im} \left[-\iota k_j \widehat{(u_m u_j)}(\vec{k}, t) + \widehat{f_m}(\vec{k}, t) \right], \quad (3.56)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) \widehat{u}_i(\vec{k}, t) = \wp_{im} \left[-\frac{1}{2} \left(\iota k_j \widehat{u_m u_j} + \widehat{u_j \frac{\partial u_m}{\partial x_j}} \right) (\vec{k}, t) + \widehat{f_m}(\vec{k}, t) \right]. \quad (3.57)$$

Observa-se que, na Eq. 3.57, o termo $\widehat{u_j \frac{\partial u_m}{\partial x_j}}$ requer a derivada $\frac{\partial u_m}{\partial x_j}$, a qual deve ser realizada no espaço de Fourier. Uma vez realizada essa derivada, faz-se a sua transformada inversa e, só então, se realiza o produto, o qual é novamente transformado para o espaço de Fourier. Resolvendo a Eq. 3.57 obtém-se uma maior estabilidade numérica quando se compara com a solução da Eq. 3.56 (CANUTO et al., 2007).

3.2.5 DFT e FFT

Para finalizar a compreensão sobre o método pseudo-espectral de Fourier alguns detalhes numéricos devem ser comentados. A versão discreta da transformada de Fourier é denominada Transformada Discreta de Fourier (DFT), e é definida na Eq. 3.58 (BRIGGS; HENSON, 1995):

$$\widehat{\phi}_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \phi_n e^{\frac{-\iota 2\pi k n}{N}}, \quad (3.58)$$

onde ϕ_n é o campo de velocidade discretizado com N nós de colocação, os quais representam os nós da malha; n fornece a posição x_n dos nós de colocação, $x_n = n\Delta x$; Δx é o espaçamento entre dois nós de colocação; e k é o número de onda (Eq. 3.60).

A Eq. 3.58 é a aproximação numérica da transformada de Fourier, a qual é aplicada sobre os nós de colocação de um domínio discretizado. Deve-se notar que para se trabalhar com a DFT, a função a ser transformada necessariamente deve ser periódica, ou seja:

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x} + \vec{L}, t), \quad (3.59)$$

onde $\vec{L}$ é o comprimento do domínio na direção considerada. As rotinas DFT impõem automaticamente a condição de periodicidade. Esta propriedade é a grande restrição da metodologia pseudo-espectral de Fourier limitando o seu uso a problemas com condições de contorno periódicas. Entretanto, com a fusão da metodologia da fronteira-imersa com a MPEF, busca-se resolver esta restrição.

Em termos de programação, para se resolver a Eq. 3.58, utiliza-se o algoritmo proposto por Cooley e Tukey (1965), denominado transformada rápida de Fourier - FFT. Pode-se encontrar disponíveis várias sub-rotinas que calculam a FFT.

No site [http : //www.fftw.org/benchfft/ffts.html](http://www.fftw.org/benchfft/ffts.html) existem disponibilizados vários pacotes, os quais levam em conta diversos parâmetros a serem escolhidos, como por exemplo, trabalhar com dados reais ou complexos; precisão simples ou dupla; FFTs unidimensionais, bidimensionais, ou tridimensionais; programação em serial ou paralelo; números de nós de colocação de potência 2, 3, 5, 7, 11 e 13; diversas linguagens de programação (Fortran, C e C++).

Especificamente, no presente trabalho, foi utilizada a versão 4.0 da sub-rotina FFTE de Takahashi (2006), que pode ser encontrada em [http : //www.ffte.jp](http://www.ffte.jp). É uma sub-rotina escrita no padrão FORTRAN 77, com dupla precisão. Seu melhor desempenho ocorre para 2^N nós de colocação, onde N é um número inteiro. Foram utilizadas as versões bidimensional e tridimensional com variáveis complexas.

Um último detalhe a ser comentado, quanto à implementação do método pseudo-espectral, é o cálculo dos números de onda, Eq. 3.60, que são usados na resolução das equações transformadas. Para utilizar a FFTE, os vetores número de onda são calculados da seguinte forma:

$$k_i(n) = \begin{cases} \frac{2\pi}{L_i}(n-1) & 1 \leq n \leq \frac{N}{2} + 1 \\ \frac{2\pi}{L_i}(n-1-N) & \frac{N}{2} + 2 \leq n \leq N \end{cases} . \quad (3.60)$$

onde k_i é a componente i do vetor número de onda; N é o número de nós de colocação numa dada direção; L é o comprimento físico do domínio nessa dada direção e n é a posição no vetor em uma dada direção do domínio.

3.3 Discretização temporal e filtragem espacial

A metodologia IMERSPEC consiste em resolver a Eq. 3.22 no espaço de Fourier. Isso é feito transformando cada um dos termos dessa equação para o espaço espectral de Fourier, como mostrado anteriormente:

$$\frac{\hat{u}_i^* - \hat{u}_i^t}{\Delta t} = -\nu k^2 \hat{u}_i^t - \wp_{im} \left(\widehat{tnl_m^t} \right) \quad (3.61)$$

onde $\widehat{tnl}$ é a transformada do termo não-linear, resolvida de forma pseudo-espectral, seção 3.2.4. É possível observar que a Eq. 3.61 é a discretização temporal da Eq. 3.57 sem o termo $\widehat{f}_i(\vec{k}, t)$.

Resolvendo-se a Eq. 3.61, obtém-se o parâmetro temporário no espaço espectral, $\hat{u}_i^* \left(\vec{k}, t \right)$. Para fins didáticos, a discretização temporal utilizada foi de primeira ordem de convergência temporal (Euler). Nos trabalhos de Mariano (2007) e Souza (2005) foi mostrado que quando um método com alta acurácia e com alta ordem de convergência é usado na discretização espacial também deve-se utilizar um método compatível na discretização do tempo. Portanto, na presente tese optou-se pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem de convergência temporal, com seis passos (RK46), otimizado no espaço espectral, com redução do custo de armazenamento de variáveis, baixa dispersão e baixa dissipação numérica. Para maiores detalhes deste método ver o trabalho de Allampalli et al. (2009). O algoritmo RK46 é mostrado abaixo, aplicado à Eq. 3.61:

$$\begin{cases} AUX_i^l = \alpha^l AUX_i^{l-1} + \Delta t \left[- \left(\nu k^2 \hat{u}_i^* \right)^l - \wp_{im} \left(\widehat{tnl_m^*} \right)^l \right] \\ \left(\hat{u}_i^* \right)^{l+1} = \left(\hat{u}_i^* \right)^l + \beta^l AUX_i^l \end{cases} \quad (3.62)$$

onde $l = 1, 2, \dots, 6$ é o passo do Runge-Kutta; AUX é uma variável auxiliar, α^l e β^l são constantes dadas na Tab. 3.1.

Além disso, foi utilizado passo de tempo variável, baseado no critério CFL , proposto por (COURANT; FRIEDRICHS; LEWY, 1967):

$$\Delta t = CFL \cdot \min \left[\min \left[\frac{\Delta x}{\max[|u|]}; \frac{\Delta y}{\max[|v|]} \right]; \frac{2}{\nu} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1} \right], \quad (3.63)$$

onde CFL , normalmente, é um número entre 0 e 1, o qual depende do esquema de integração temporal e do próprio escoamento que se está analisando.

Fazendo as seis iterações propostas na Eq. 3.62, obtém-se o parâmetro temporário no espaço de Fourier, $\widehat{u}_i^*$.

Tabela 3.1: Coeficientes do esquema Runge-Kutta RK46.

it	α	β
1	0,0	0,122
2	-0,691750960670	0,477263056358
3	-1,727127405211	0,381941220320
4	-0,694890150986	0,447757195744
5	-1,039942756197	0,498614246822
6	-1,531977447611	0,186648570846

O próximo passo é obter a transformada inversa de $\widehat{u}_i^*$, isto é, $u_i^* = TIF[\widehat{u}_i^*]$. Então interpola-se o campo de velocidade u_i^* para o domínio lagrangiano através da Eq. 3.20 ou da Eq. 3.21. Após isso calcula-se a força lagrangiana com a Eq. 3.24. Segue-se com o cálculo do campo de força euleriano usando a Eq. 3.3 ou distribuindo-o através da Eq. 3.25. Nota-se que esses três passos são realizados com as variáveis no espaço físico.

Leva-se o campo de força euleriano, f_i , para o espaço espectral e projeta-o sobre o plano π . Após isso, resolve-se a Eq. 3.26 no espaço espectral, ou seja:

$$\frac{\widehat{u}_i^{t+\Delta t} - \widehat{u}_i^*}{\Delta t} = \wp_{im}(\widehat{f}_m). \quad (3.64)$$

O processo iterativo para o cálculo da força pode ser utilizado da mesma forma como já comentado. Sua influência também será testada posteriormente na apresentação de resultados.

Quando se trabalha com métodos de alta ordem, em particular o método espectral de Fourier, a solução das equações que apresentam descontinuidades no domínio de cálculo é influenciada pelo fenômeno de Gibbs (CANUTO et al., 2006; BRIGGS; HENSON, 1995), o qual produz erros numéricos nos pequenos comprimentos de onda na forma de oscilações espúrias. Para contornar esse problema, a literatura aponta para processos de filtragem dos campos onde aparecem as descontinuidades (CANUTO et al., 2006; KOPRIVA, 1986).

Na metodologia proposta, o processo de filtragem pode ser imposto no campo de força euleriano quando este está no espaço espectral de Fourier, ou no próprio campo de velocidade, pois são campos que apresentam descontinuidades. Este processo de filtragem é dado pela

equação:

$$\hat{\phi}_i(\vec{k}, t)_{filtrado} = \sigma \hat{\phi}_i(\vec{k}, t), \quad (3.65)$$

onde $\sigma(\theta)$ é a função filtro que é apresentada na Eq. 3.66, aplicada sobre a variável ϕ .

Kopriva (1986) propôs diferentes tipos de filtro passa-baixa para funções unidimensionais com descontinuidades, os quais foram testados no trabalho de Mariano (2007). Na presente tese optou-se por utilizar o filtro denominado “Sharpened Raised Cosine” (SRC), pois apresentou os melhores resultados dentre os filtros analisados por Mariano (2007):

$$\sigma = \sigma_0^4 (35 - 84\sigma_0 + 70\sigma_0^2 - 20\sigma_0^3), \quad (3.66)$$

onde σ_0 é dado por:

$$\sigma_0 = \frac{1}{4} \left[1 + \cos\left(\frac{L_x k_x}{N_x}\right) \right] \left[1 + \cos\left(\frac{L_y k_y}{N_y}\right) \right], \quad (3.67)$$

onde N_x e N_y são os números de pontos do domínio nas direções x e y , respectivamente.

3.4 Acoplamento entre as metodologias pseudo-espectral de Fourier e fronteira imersa - IMERSPEC

Com os fundamentos básicos das metodologias da fronteira-imersa e pseudo-espectral comentados nas seções anteriores, nesta etapa é desenvolvida a metodologia proposta no presente trabalho. Como já comentado, visa-se contornar a restrição das condições de contorno periódicas necessárias para a utilização do método pseudo-espectral e, ao mesmo tempo, obter um método de fronteira-imersa preciso e com alta ordem de convergência espacial.

A última característica importante da metodologia é a idéia de se utilizar um domínio complementar. As definições dos domínios são apresentadas na Fig. 3.7. O domínio físico Ω_{PhD} , dito euleriano, é delimitado pela fronteira imersa Γ_{PhD} , a qual também é considerada como um domínio lagrangiano. No interior de Ω_{PhD} ocorre toda a fenomenologia física pela qual se interessa modelar e simular. Nesse domínio, pode-se inserir um ou mais subdomínios delimitados pelas fronteiras imersas Γ_i , onde $i = 1, 2, \dots, N$. Sobre a fronteira imersa Γ_{PhD} pode-se modelar quaisquer condições de contorno, mesmo que sejam não periódicas.

O domínio complementar euleriano Ω_{PeD} é delimitado pela fronteira Γ_{PeD} , e serve para se impor as condições de contorno periódicas diretamente, para a solução das equações de Navier-Stokes transformadas (Eq. 3.47). Esse domínio, Ω_{PeD} , é complementar ao domínio Ω_{PhD} e possibilita estender a solução do problema não periódico até a fronteira periódica Γ_{PeD} . As condições de contorno periódicas são impostas diretamente sobre Γ_{PeD} através dos procedimentos pseudo-espectral. Por outro lado, as “condições de contorno” não periódicas são impostas sobre a fronteira imersa Γ_{PhD} , de forma indireta, através do campo de força euleriano $\vec{f}(\vec{x}, t)$. Na Fig. 3.7 o vetor $\vec{x}$ define qualquer ponto pertencente ao domínio euleriano, enquanto o vetor $\vec{X}$ define qualquer ponto pertencente a uma interface lagrangiana.

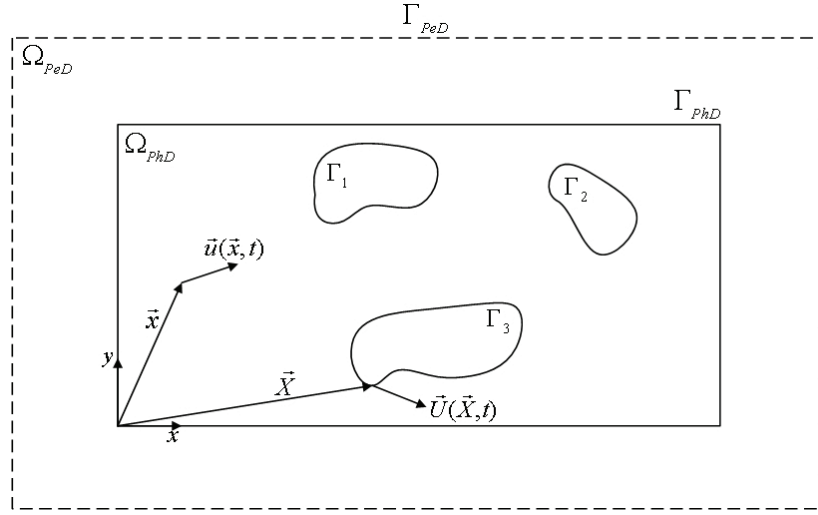


Figura 3.7: Representação esquemática dos domínios de cálculo: euleriano e lagrangiano.

Para finalizar, o algoritmo da metodologia IMERSPEC é apresentado abaixo:

1. Inicia-se o campo de velocidade no espaço físico, no tempo t , u_i^t ;
2. Aplica-se a FFT (Eq. 3.58) sobre o campo de velocidade, u_i^t , obtendo-se o campo transformado, $\hat{u}_i^t$;
3. A fim de garantir a equação da continuidade, aplica-se a o tensor projeção sobre o campo de velocidade, obtendo: $\hat{u}_{i\pi}^t = \wp_{ij}(\hat{u}_i^t)$;
4. Calculam-se os termos do lado direito, necessários para resolver a Eq. 3.57:

- Termo difusivo: $\widehat{visc_i}^t = \nu k^2 \hat{u}_{i\pi}^t$

- Termo advectivo na forma “anti-simétrica”, este é o método pseudo-espectral:

- Calcula-se o produto: $(Pu)_i^t = u_{i\pi}^t u_{j\pi}^t$ no espaço físico;
- Transforma-se o produto $(Pu)_i^t$ para o espaço espectral usando a FFT (Eq. 3.58), obtendo-se $(\widehat{Pu})_i^t$;
- Calcula-se as derivadas no espaço espectral, $(\widehat{Du})_i^t = \iota k_i \widehat{u}_{i\pi}^t$;
- Aplica-se a transformada inversa de Fourier sobre as derivadas, $(\widehat{Du})_i^t$, obtendo $(Du)_i^t$;
- Calcula-se o produto das velocidades no espaço físico, com as derivadas, também no espaço físico, $(P Du)_i^t = u_{i\pi}^t (Du)_i^t$;
- Transforma-se o produto das velocidades com as derivadas para o espaço de Fourier, obtendo $(\widehat{P Du})_i^t$;
- Calcula-se o termo advectivo, (termo não-linear): $\widehat{tnl}_i^t = \frac{1}{2} \left[(\widehat{Pu})_i^t + (\widehat{P Du})_i^t \right]$;
- Projeta-se o termo não-linear usando o tensor projeção (Eq. 3.43):

$$\widehat{tnl}_{i\pi}^t = \wp_{ij} \left(\widehat{tnl}_j^t \right);$$

- Aplica-se o esquema de Runge-Kutta, dado pela Eq. 3.62 e, após os seis passos, obtém-se o parâmetro temporário, $\widehat{u}_i^*$;
- Aplica-se a transformada inversa de Fourier em $\widehat{u}_i^*$, obtendo o parâmetro temporário no espaço físico, u_i^* ;
- Se os pontos lagrangianos coincidem com os eulerianos, usa-se a Eq. 3.20. Caso contrário, interpola-se o parâmetro temporário no espaço físico, usando a Eq. 3.21, obtendo-se a velocidade sobre os pontos lagrangianos, U_i^* ;
- Calcula-se a força lagrangiana, F_i , através da Eq. 3.17, onde $U_i^{t+\Delta t} = U_{FIi}$, isto é, a velocidade que a fronteira imersa deve ter;
- Calcula-se a força euleriana, f_i , usando a Eq. 3.3, quando os pontos lagrangianos coincidem com os nós de colocação eulerianos, ou utiliza-se o processo de distribuição, dado pela Eq. 3.4, quando não existe coincidência;

10. Transforma-se o campo de força euleriano, f_i , para o espaço espectral e aplica-se o tensor projeção $\wp_{ij}$, obtendo: $\widehat{f}_{i\pi} = \wp_{ij} \left(\widehat{f}_j \right)$;
11. Com o parâmetro temporário obtido no passo 5 e a força euleriana projetada no passo 10, resolve-se a Eq. 3.64, ou seja, atualiza-se o campo de velocidade;
12. Até o passo 11 têm-se o método da imposição direta da força, isto é, após o campo de velocidade receber a informação do campo de força euleriano e, conseqüentemente, receber as informações das condições de contorno. A próxima etapa é retornar ao passo inicial;
13. Caso o método da múltipla imposição da força seja utilizado, entra-se no processo de ciclagem. Então, faz-se $\widehat{u}_i^{*it+1} = \widehat{u}_i^{t+\Delta t}$, atualizando o parâmetro temporário da seguinte maneira: $\widehat{u}_i^{*it+1} = \widehat{u}_i^{*it} + \Delta t \wp_{ij} \left(\widehat{f}_j^{it} \right)$;
14. Com $\widehat{u}_i^{*it+1}$ calculado, retorna-se ao passo 6, obtendo $u_i^* = u_i^{*it+1}$;
15. Repete-se os passos 6 até 11 até satisfazer um dos critérios de parada, seja a Eq. 3.31 ou o número máximo de iterações, NL ;
16. Após o critério de parada ser satisfeito, retorna-se ao passo 1.

Note que, no processo de ciclagem, atualiza-se a velocidade com o campo de força projetado no plano π , o qual leva a propagação da informação das condições de contorno da seguinte maneira:

$$\widehat{u}_i^{*it+1} = \widehat{u}_i^{*it} + \Delta t \wp_{ij} \left(\widehat{f}_j^{it} \right). \quad (3.68)$$

Na próxima iteração, tem-se:

$$\widehat{u}_i^{*it+2} = \widehat{u}_i^{*it+1} + \Delta t \wp_{ij} \left(\widehat{f}_j^{it+1} \right). \quad (3.69)$$

Substituindo a Eq. 3.68 na Eq. 3.69, tem-se:

$$\widehat{u}_i^{*it+2} = \widehat{u}_i^{*it} + \Delta t \wp_{ij} \left(\widehat{f}_j^{it} + \widehat{f}_j^{it+1} \right). \quad (3.70)$$

Generalizando, ao final das NL iterações, obtém-se:

$$\widehat{u}_i^{t+\Delta t} = \widehat{u}_i^* + \Delta t \sum_{it=1}^{NL} \wp_{ij} \left(\widehat{f}_j^{it} \right) = \widehat{u}_i^* + \Delta t \wp_{ij} \sum_{it=1}^{NL} \left(\widehat{f}_j^{it} \right). \quad (3.71)$$

Define-se a força total:

$$\widehat{f}_i^{total} = \sum_{it=1}^{NL} \widehat{f}_i^{it}. \quad (3.72)$$

Logo, no espaço físico, tem-se:

$$f_i^{total} = \sum_{it=1}^{NL} f_i^{it}. \quad (3.73)$$

Se essa força total fosse conhecida à priori, a velocidade poderia ser determinada sem o processo iterativo, ou seja:

$$\widehat{u}_i^* = \widehat{u}_i^t + \Delta t \wp_{ij} \left(\widehat{RHS}_j \right), \quad (3.74)$$

$$\widehat{u}_i^{t+\Delta t} = \widehat{u}_i^* + \Delta t \wp_{ij} \left(\widehat{f}_j^{total} \right). \quad (3.75)$$

Somando-se as Eqs. 3.74 e 3.75, tem-se que:

$$\widehat{u}_i^{t+\Delta t} = \widehat{u}_i^t + \Delta t \wp_{ij} \left(\widehat{RHS}_j \right) + \Delta t \wp_{ij} \left(\widehat{f}_j^{total} \right). \quad (3.76)$$

Assim fica demonstrado que o campo de velocidade determinado ao final do processo iterativo, dado pelos passos 1 ao 16, satisfaz simultaneamente as equações da continuidade e de Navier-Stokes.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

4.1 Verificação da metodologia e da implementação do código computacional

A verificação será feita utilizando-se a técnica das soluções manufaturadas (SILVA; VILLAR, 2010). Uma solução manufaturada, ou sintetizada, para as equações de Navier-Stokes, consiste em determinar termos-fonte a partir de uma dada solução analítica proposta para os campos de velocidade e de pressão. Estes termos-fonte são, então, somados às equações de Navier-Stokes. Existem soluções manufaturadas de várias formas para problemas bidimensionais (TAYLOR; GREEN, 1937), tridimensionais (CANUTO et al., 2007; MOREIRA, 2007), com propriedades físicas variáveis (NÓS, 2007).

Obtém-se dessa maneira, a solução analítica válida em todo domínio de cálculo e para todo tempo, podendo, então, comparar os resultados numéricos e analíticos dos campos de velocidade e de pressão, conseguindo, assim, verificar uma nova metodologia, bem como corrigir erros de implementação do algoritmo propostos e do código computacional desenvolvido. Taylor e Green (1937), propuseram a solução manufaturada dada pelas Eqs. 4.1, 4.2 e 4.3:

$$u^a = U_\infty \sin\left(\frac{ax}{L}\right) \cos\left(\frac{by}{L}\right) e^{-[\frac{\nu t}{L^2}(a^2+b^2)]}, \quad (4.1)$$

$$v^a = -U_\infty \frac{a}{b} \cos\left(\frac{ax}{L}\right) \sin\left(\frac{by}{L}\right) e^{-[\frac{\nu t}{L^2}(a^2+b^2)]}, \quad (4.2)$$

e

$$p^a = -\rho U_\infty^2 \frac{a^2}{2b^2} \left[\sin^2\left(\frac{ay}{L}\right) - \cos^2\left(\frac{by}{L}\right) \right] e^{-[\frac{2\nu t}{L^2}(a^2+b^2)]}, \quad (4.3)$$

onde, u^a e v^a são as componentes de velocidade analíticas, p^a é o campo pressão analítico, a e b são constantes, x e y são as coordenadas cartesianas, t é o tempo e ν e ρ são a viscosidade cinemática e massa específica do fluido, respectivamente, U_∞ é a velocidade de referência e L é o comprimento de referência.

Deve ser observado que o divergente do campo de velocidade analítico, Eq. 4.4, é nulo, ou seja, a solução proposta (Eqs. 4.1 e 4.2) satisfaz à equação da continuidade:

$$\frac{\partial u^a}{\partial x} + \frac{\partial v^a}{\partial y} = 0. \quad (4.4)$$

Os termos-fonte a serem somados às equações da quantidade de movimento linear são dados pelas Eqs. 4.5 e 4.6:

$$f_x^a = \frac{\partial u^a}{\partial t} + \frac{\partial (u^a u^a)}{\partial x} + \frac{\partial (u^a v^a)}{\partial y} + \frac{\partial p^a}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^2 u^a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^a}{\partial y^2} \right), \quad (4.5)$$

$$f_y^a = \frac{\partial v^a}{\partial t} + \frac{\partial (u^a v^a)}{\partial x} + \frac{\partial (v^a v^a)}{\partial y} + \frac{\partial p^a}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 v^a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^a}{\partial y^2} \right), \quad (4.6)$$

onde f_x^a e f_y^a são os termos-fonte a serem somados ao lado direito das equações de Navier-Stokes.

As derivadas que compõem os termos-fonte (Eqs. 4.5 e 4.6) são obtidas analiticamente a partir das Eqs. 4.1, 4.2 e 4.3. Desta forma, quando se resolve numericamente as equações de Navier-Stokes com estes termos-fonte, o resultado deve seguir a mesma evolução que as soluções analíticas, a menos de erros numéricos promovidos, por exemplo, pelas discretizações temporais e espaciais.

A solução proposta por Taylor e Green (1937), Eqs. 4.1, 4.2 e 4.3, foi escolhida, porque apresenta, como vantagem, nulos os termos-fonte dados pelas Eqs. 4.5 e 4.6 nulos, como pode ser verificado efetuando-se as derivadas das Eqs. 4.5 e 4.6, obtendo-se:

$$f_x^a = 0, \quad (4.7)$$

$$f_y^a = 0. \quad (4.8)$$

Será mostrada a verificação da metodologia desenvolvida e do código implementado através da técnica das soluções manufaturadas em três etapas distintas. Primeiramente, mostra-se a verificação do código sem fronteira imersa, sendo possível constatar a precisão

elevada da metodologia pseudo-espectral de Fourier. Na segunda etapa, mostra-se a verificação da metodologia com fronteira imersa com os pontos lagrangianos coincidentes com parte dos nós de colocação eulerianos. Esta é uma etapa importante, pois as condições de contorno dos problemas que serão apresentados na sequência do presente capítulo dependem dessa característica. A última etapa é a verificação da metodologia com fronteira imersa e sem coincidência entre a malha lagrangiana e a malha euleriana. Será mostrada a ordem de convergência espacial da metodologia, comparando-a com de outros trabalhos.

Em todas as simulações apresentadas, o domínio de cálculo é um quadrado de comprimento $L_x = L_y = 2L$. As condições de contorno são periódicas em todas as direções e a condição inicial é dada pelas Eqs. 4.1 e 4.2 em $t = 0.0$ [s]. Para fins de comparação, utiliza-se os mesmos valores dados no trabalho de Uhlmann (2005), os quais são $U_\infty = 1,0$ [m/s], que é a velocidade máxima do escoamento em $t = 0,0$ [s], $L = \pi$ [m], é o tamanho de um vórtice, $\rho = 1,0$ [kg/m³], $a = b = 1,0$ e $\nu = U_\infty L / Re$ [m²/s], o que resulta em $Re = 10$, ou seja, é o número de Reynolds baseado na condição inicial.

4.1.1 Simulação dos vórtices de Taylor-Green sem fronteira imersa

Nesta seção é apresentada a verificação do código pseudo-espectral de Fourier, ainda sem a influência de qualquer corpo imerso. Dada a condição inicial, a solução evolui com o passar do tempo e pode ser comparada com a solução analítica. No presente trabalho, adotou-se, como medida do erro a norma L_2 , dada pela Eq. 4.9:

$$L_2(\phi) = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j^{Nx Ny} (\phi_{ij}^a - \phi_{ij})^2}{NxNy}}, \quad (4.9)$$

onde ϕ^a é a variável analítica, dada por uma das Eqs. 4.1, 4.2 ou 4.3, ϕ_{ij} é a variável calculada numericamente no nó de colocação ij , Nx e Ny são os números de nós de colocação da discretização do domínio nas direções x e y , respectivamente.

O domínio de cálculo foi dividido em $Nx = Ny = 16$ nós de colocação, o passo de tempo adotado foi o mesmo que o de Bonfigli (2010) e é $\Delta t / t_r = 10^{-4}$, onde $t_r = L / U_\infty$ é o tempo de referência. A magnitude deste Δt é baixa para evitar que o erro da discretização temporal influencie o erro da discretização espacial. O campo da componente de velocidade

horizontal (u) e o campo de pressão (p) calculados numericamente são apresentados na Fig. 4.1 em $t/t_r = 3,0$.

Na Fig. 4.1, através dos vetores velocidade, é possível observar quatro vórtices. Na Fig. 4.1 (b) observar-se, que as zonas de baixa pressão aparecem no centro dos vórtices, um resultado que condiz com o esperado.

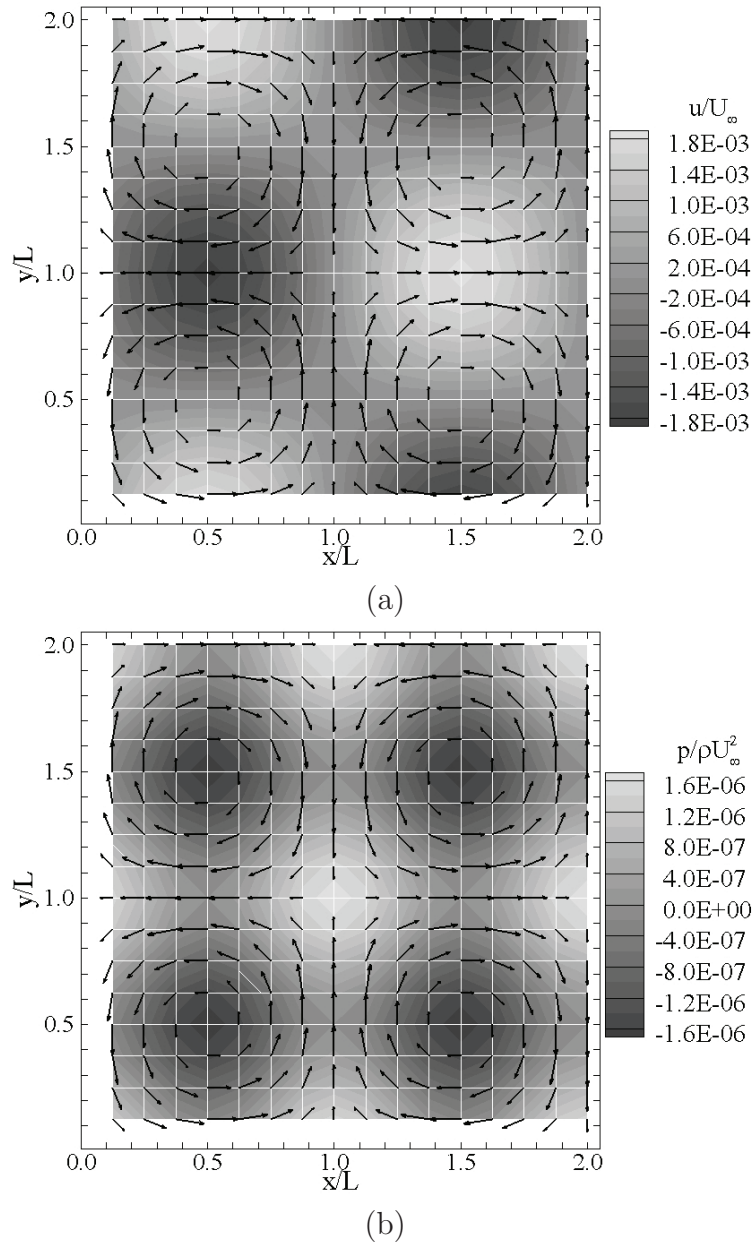


Figura 4.1: Solução manufaturada - vórtices de Taylor-Green em decaimento sem fronteira imersa, visualizações em $t/t_r = 3,0$. (a) Campo da componente de velocidade horizontal, (b) campo de pressão, superpostos pelos vetores velocidade.

O objetivo desta primeira simulação é mostrar a precisão do método pseudo-espectral de Fourier. Para isso, os campos da componente de velocidade e pressão calculados numericamente são comparados com as soluções analíticas através da norma L_2 (Eq. 4.9). O resultado da evolução temporal da norma L_2 para a componente de velocidade horizontal e para a pressão são apresentados no gráfico da Fig. 4.2. O resultado da componente de velocidade vertical, foi omitido, pois é idêntico ao da componente de velocidade horizontal.

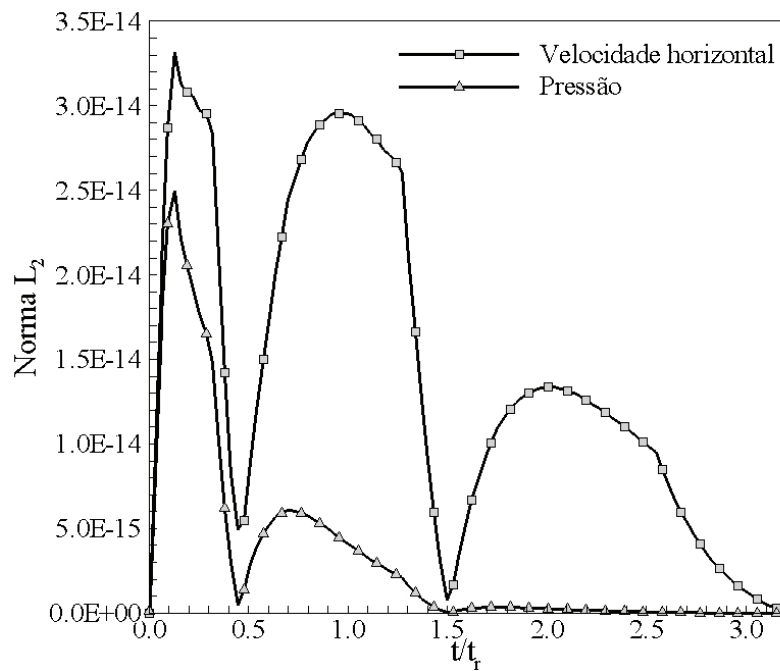


Figura 4.2: Evolução temporal da norma L_2 do campo da componente de velocidade horizontal e do campo de pressão.

De acordo com a Fig. 4.2, observa-se a acurácia elevada do método pseudo-espectral de Fourier, uma vez que, o maior erro apresentado está na ordem de 10^{-14} em uma malha relativamente grosseira com apenas 16×16 nós de colocação. É importante frisar que foi utilizada dupla precisão nos cálculos, isto é, os erros observados estão na ordem dos erros de truncamento da máquina.

4.1.2 Simulação dos vórtices de Taylor-Green com fronteira imersa: nós lagrangianos e eulerianos coincidentes

Nesta seção verifica-se a imposição da fronteira imersa utilizando a Eq. 3.3, ou seja, os pontos lagrangianos coincidem com os nós de colocação eulerianos. Na aplicação da me-

todologia IMERSPEC, frequentemente, têm-se esse tipo de situação em um elevado número de problemas, pois as condições de contorno dos problemas estudados possibilitam esta coincidência entre as malhas. Como mostrado na Fig. 4.3, uma geometria quadrada, de lado $L = \pi [m]$, é posicionada no centro do domínio euleriano Ω .

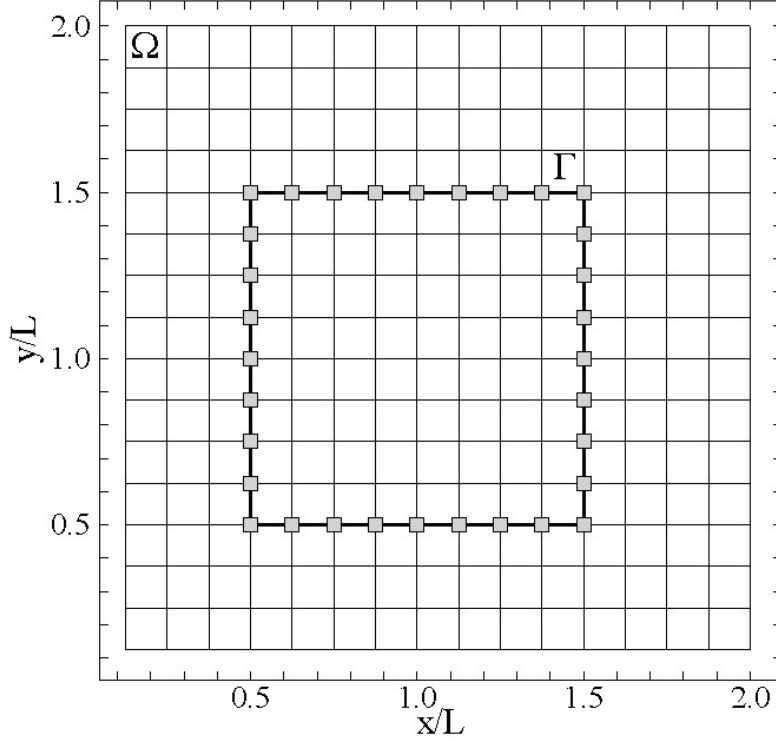


Figura 4.3: Domínio de cálculo com a fronteira imersa (Γ) coincidente com os nós de colocação eulerianos (Ω).

Da mesma forma, como nos trabalhos de Uhlmann (2005), Kim, Kim e Choi (2001) e Bonfigli (2010) a velocidade que os pontos lagrangianos devem ter, U_{FI} , é dada pelas equações analíticas, Eqs. 4.1 e 4.2 avaliadas em $t + \Delta t$, ou seja:

$$U_{FI} = u^a(\vec{X}, t + \Delta t), \quad (4.10)$$

$$V_{FI} = v^a(\vec{X}, t + \Delta t). \quad (4.11)$$

Com as velocidade conhecidas da fronteira imersa no tempo $t + \Delta t$ e com as velocidades do fluido na fronteira imersa, é possível calcular a força lagrangiana, através da Eq. 3.17, e consequentemente, a força euleriana, dada pela Eq. 3.3. O campo de pressão é mostrado na Fig. 4.4, em $t/t_r = 3,0$, juntamente com o domínio lagrangiano, onde os nós de colocação são forçados.

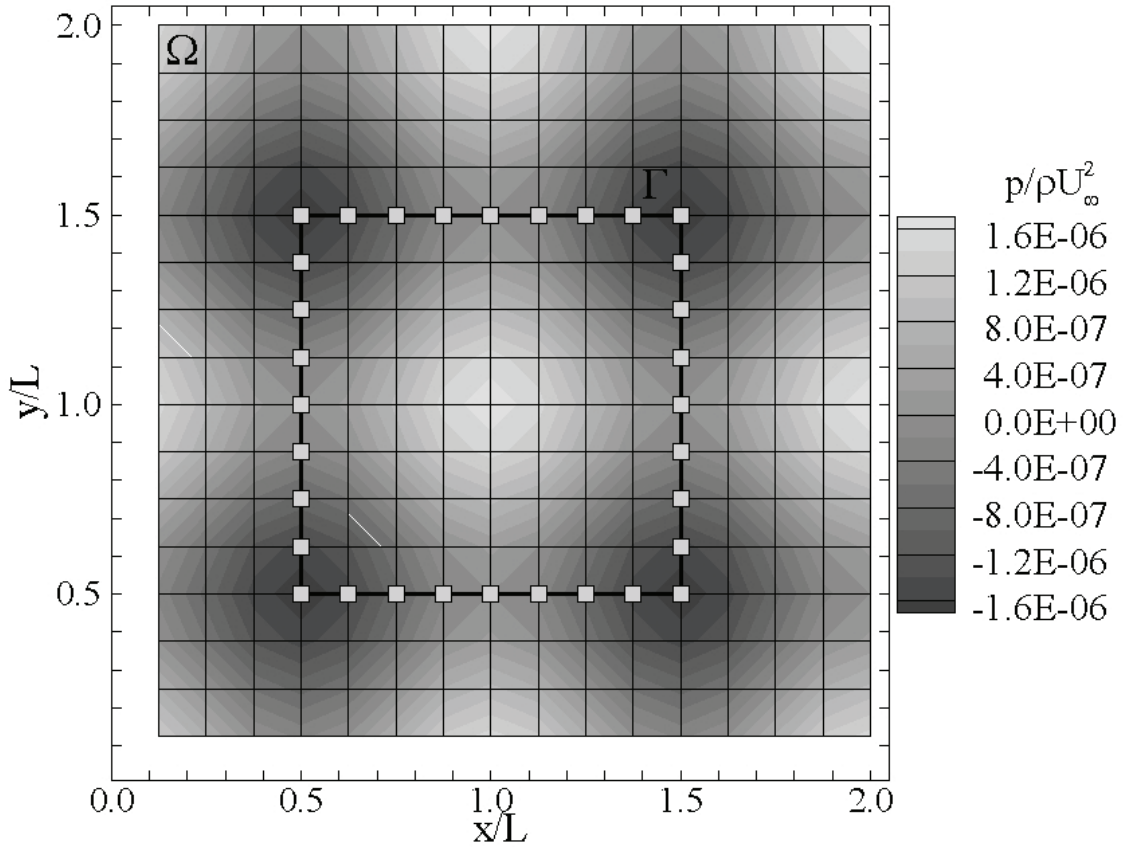


Figura 4.4: Campo de pressão superposto pela malha que define a geometria lagrangiana em $t/t_r = 3,0$.

O resultado da evolução temporal da norma L_2 da componente de velocidade horizontal é apresentado na Fig. 4.5 e está comparado com o resultado da simulação sem fronteira imersa, tendo sido utilizado o mesmo passo de tempo, ($\Delta t/t_r = 10^{-4}$) e mesmo número de nós de colocação ($Nx = Ny = 16$). Os erros apresentados se mantêm na ordem de erro de arredondamento de máquina, isto é, na ordem de 10^{-14} , caracterizando a acurácia elevada da metodologia IMERSPEC.

O erro da simulação com fronteira imersa coincidente é mais baixo do que na simulação sem fronteira imersa. Isto se explica devido à melhor acurácia nos cálculos de alguns pontos de colocação eulerianos, pois são forçados pelo campo de força da fronteira imersa. Em simulações com um número de nós de colocação mais elevado os erros continuam na ordem de erros de arredondamento de máquina. Isto caracteriza uma metodologia com alta acurácia, isto é, o erro numérico continua sendo o erro de arredondamento de máquina, para qualquer nível de refinamento.

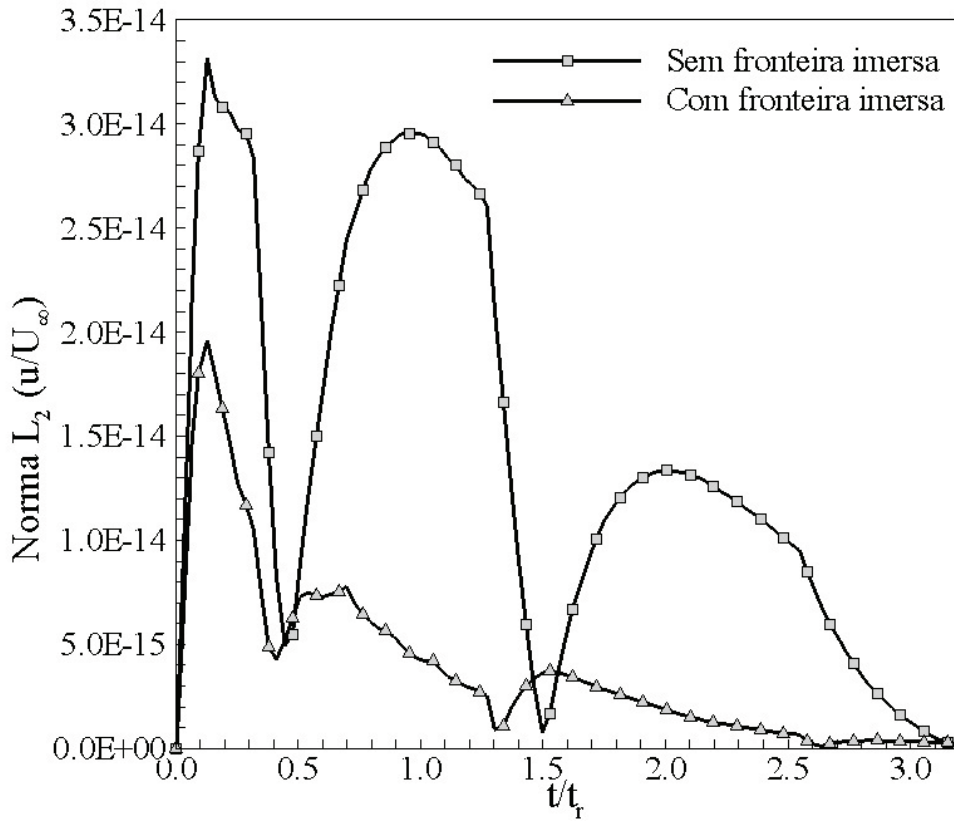


Figura 4.5: Evolução temporal da norma L_2 do campo da componente de velocidade horizontal e do campo de pressão.

Desta forma, pode-se dizer que a metodologia pseudo-espectral de Fourier utilizando fronteira imersa para representar uma geometria cartesiana, ou seja, em que os pontos lagrangianos coincidem com alguns nós de colocação eulerianos, está verificada, pois esperava-se que os erros fossem da ordem dos erros de arredondamento da máquina, o que foi comprovado, para as componentes de velocidade e para o campo de pressão.

4.1.3 Simulação dos vórtices de Taylor-Green com fronteira imersa: nós eulerianos e lagrangianos não coincidentes

Visto na seção 4.1.1, que a implementação da metodologia pseudo-espectral de Fourier e do método de imposição direta da força (seção 4.1.2) usando as Eqs. 3.3 e 3.20 está verificada, a presente seção tem por objetivo verificar as implementações das funções distribuição (Eq. 3.4) e interpolação (Eq. 3.21), necessárias quando não há coincidência entre os pontos lagrangianos e os nós de colocação eulerianos.

Para tanto, utilizam-se as Eqs. 4.10 e 4.11 para determinar as componentes de velo-

cidade que a interface imersa deve ter, mas, diferentemente da seção anterior, a geometria agora é um círculo de diâmetro $D = L = \pi [m]$, posicionado no centro do domínio de cálculo, de forma que os pontos lagrangianos não são mais coincidentes com os nós de colocação eulerianos, como pode ser visto na Fig. 4.6.

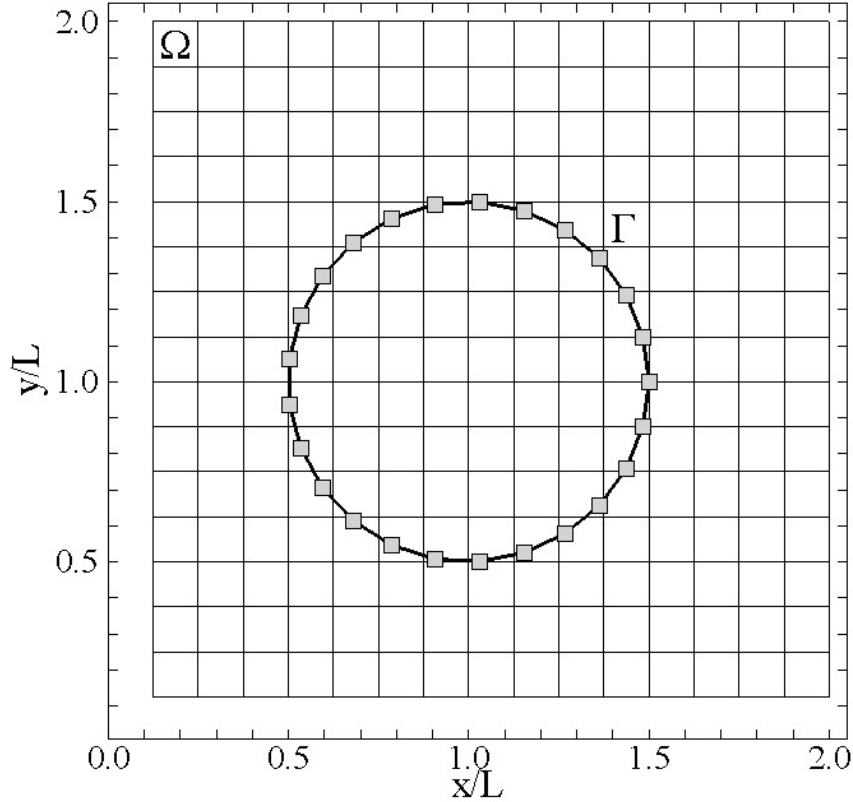


Figura 4.6: Domínio de cálculo com a fronteira imersa (Γ) não coincidente com os nós de colocação eulerianos (Ω).

4.1.3.1 Influência das funções distribuição e interpolação

Nesta sequência de simulações, objetiva-se determinar a acurácia e a ordem de convergência numérica da metodologia proposta, utilizando diferentes funções interpolação e distribuição. O gráfico da Fig. 4.7 foi construído dobrando-se, em cada direção, o número de pontos de colocação eulerianos, 16×16 , 32×32 , 64×64 , 128×128 e 256×256 , e lagrangianos, $NL = 28$, 56, 112, 224 e 448, respectivamente, desta forma a relação entre a distância dos nós de colocação eulerianos, pelo pontos lagrangianos, $\Delta x / \Delta s \cong 1,0$. Para cada simulação realizada, após $tU_\infty / L = 1,0$, calcula-se o valor da norma L_2 da componente horizontal de velocidade. O passo de tempo é calculado utilizando-se $CFL = 0,1$, de maneira que o

erro gerado pela discretização temporal possa ser desconsiderado (BONFIGLI, 2010). Foram testadas as cinco funções distribuição/interpolação apresentadas pelas Eqs. 3.6 até 3.10.

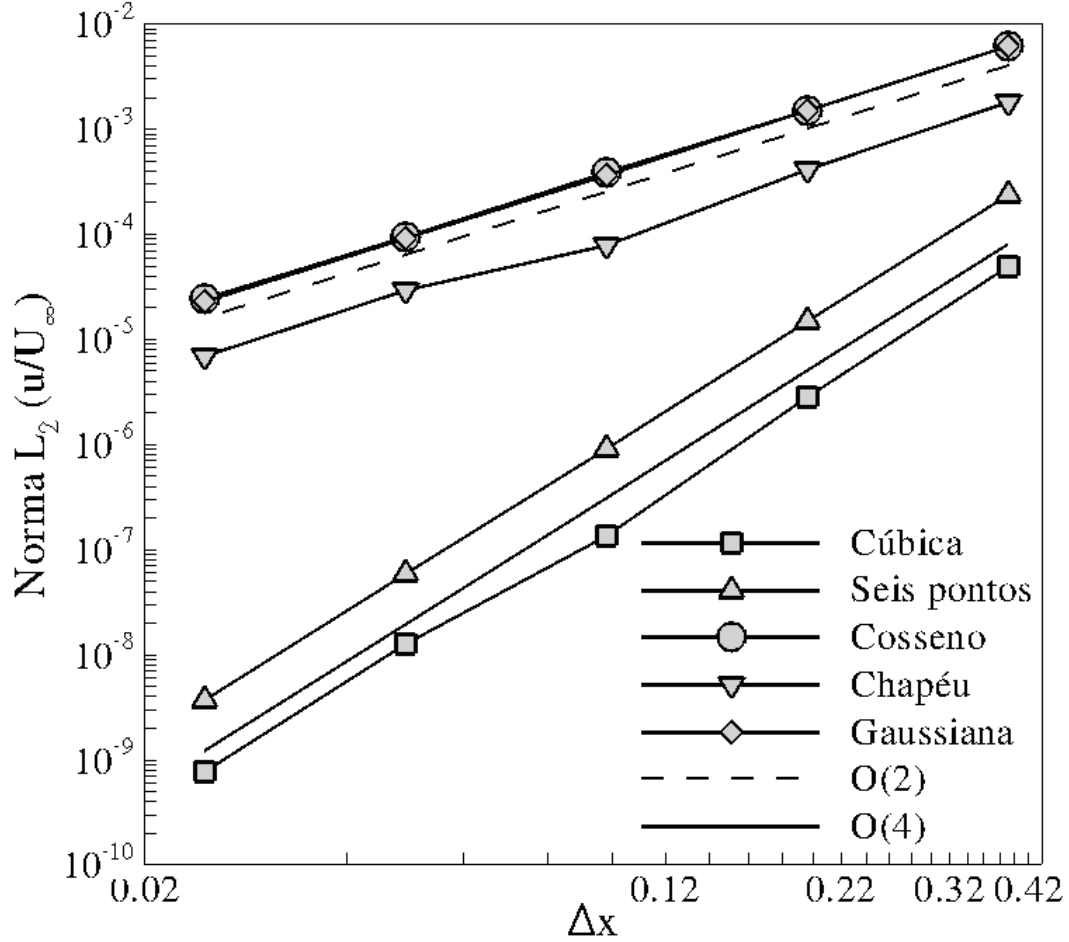


Figura 4.7: Comparação da ordem de convergência espacial entre diferentes funções distribuição.

Na Fig. 4.7 apresenta-se a ordem de convergência da componente horizontal da velocidade dada pela Eq. 1.1, onde $\Delta x = h$ é o espaçamento entre dois pontos de colocação consecutivos. Observa-se que as funções cosseno e gaussiana apresentam segunda ordem de convergência numérica e, praticamente, o mesmo erro. Para a simulação com a malha mais refinada o erro é aproximadamente da ordem de 2.10^{-5} . Com a função chapéu obtém-se, novamente segunda ordem de convergência, porém com uma acurácia maior quando comparada às funções anteriormente citadas (na malha mais refinada o erro é de 5.10^{-6}). As funções “seis pontos” e “cúbica” apresentam quarta ordem de convergência e ao mesmo tempo uma melhor acurácia numérica que as demais. Quando comparadas entre si, a função cúbica apresenta

um menor erro, sendo que na malha mais refinada atinge-se um erro de $2 \cdot 10^{-10}$, enquanto que a de seis pontos atinge um erro de $3 \cdot 10^{-9}$. Além disso, a função cúbica utiliza menos pontos para o seu cálculo, 5 ao invés de 7, sendo, portanto, mais eficiente computacionalmente que a função “seis pontos”.

A solução de Taylor-Green é suave, ou seja, não apresenta descontinuidades ao longo do domínio de cálculo. Até aí, os resultados do presente trabalho não apresentam novidades em relação à literatura. No entanto, de acordo com as referências estudadas, quando se utiliza fronteira imersa com a função distribuição da força, foi a primeira vez que um método de fronteira imersa alcançou quarta ordem de convergência espacial, um dos principais objetivos buscados no presente trabalho que era obter uma ordem de convergência maior do que um.

Nos trabalhos de Uhlmann (2005) e Kim, Kim e Choi (2001), simulando este mesmo problema, com os mesmos parâmetros ajustados, eles apresentaram segunda ordem de convergência. No trabalho de Bonfigli (2010), o qual utilizou uma formulação da interface imersa para obter a representação da fronteira, também foi mostrada quarta ordem de convergência espacial. No entanto, obtém-se uma acurácia inferior à que é conseguida utilizando-se a função “cúbica” do presente trabalho, por exemplo, com um espaçamento $\Delta x = 0.04[m]$, Bonfigli (2010) obtém um erro de $3 \cdot 10^{-6}$, enquanto que no presente trabalho o erro é de $1 \cdot 10^{-9}$, isso significa, aproximadamente, um erro menor que três ordens de grandeza, utilizando o mesmo refinamento da malha.

Peskin (2002) discutiu o problema de convergência numérica com relação à metodologia da fronteira imersa, demonstrando que, em problemas suaves, a solução converge com ordem mais elevada. Entretanto, para problemas que apresentam descontinuidades, a ordem da metodologia é alterada.

No presente trabalho, acredita-se que não se obteve uma ordem de convergência maior que quatro, devido a dois fatores principais: as funções interpolação/distribuição utilizadas e o esquema de avanço temporal, uma vez que é de quarta ordem de convergência temporal. Também é importante notar a influência da fronteira imersa na perda de acurácia. Na simulação sem corpo imerso a norma L_2 , das componentes de velocidade e da pressão, é da ordem de 10^{-14} , enquanto que com o campo de força ela atinge, no máximo, 10^{-10} .

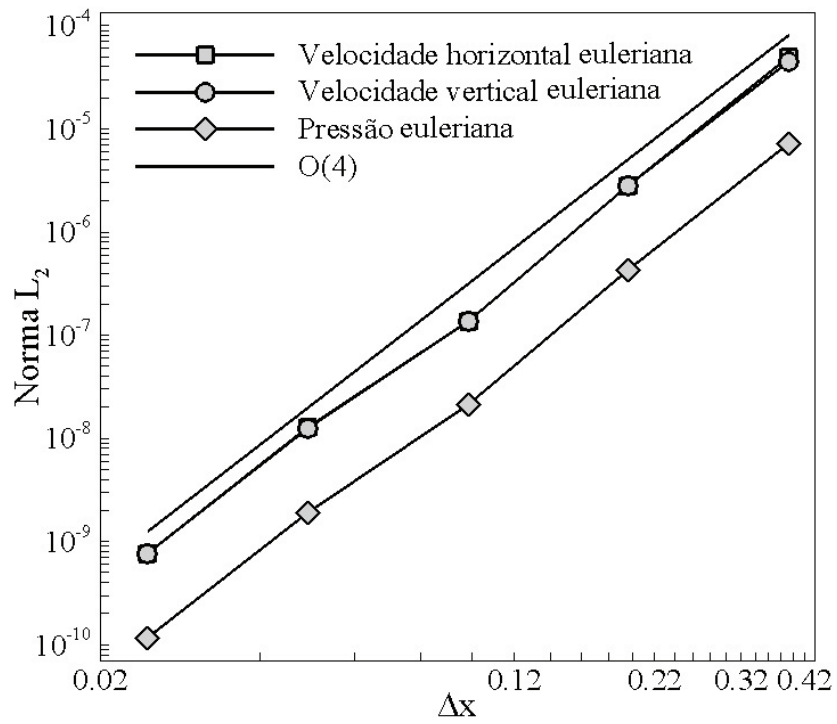
Seria desejável fazer mais simulações e testes com relação a este problema de acurácia

e de ordem de convergência espacial, todavia com as simulações realizadas atingiram-se resultados semelhantes e até melhores que os trabalhos de Uhlmann (2005), Kim, Kim e Choi (2001) e Bonfigli (2010). Considera-se que a metodologia proposta está implementada corretamente. A única ressalva é em problemas que apresentam fortes descontinuidades, nos quais, provavelmente, o fenômeno de Gibbs aparecerá, prejudicando a acurácia da solução. Para contornar este tipo de problema a utilização de filtros é a prática mais aconselhada na literatura (KOPRIVA, 1986; CANUTO et al., 2006).

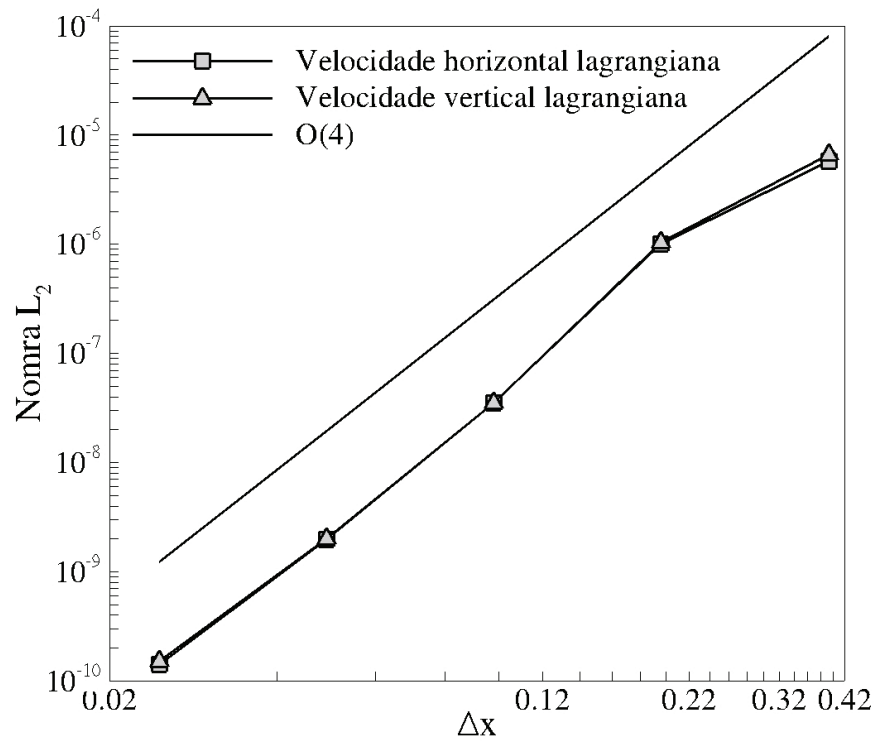
O gráfico da Fig. 4.8 contém as curvas de ordem de convergência espacial das outras variáveis, eulerianas (a) e lagrangianas (b) das simulações utilizando a função distribuição cúbica. Pode ser observado (Fig. 4.8) que todas as variáveis da simulação apresentam quarta ordem de convergência espacial. Enfatiza-se que o campo de pressão, recuperado pela Eq. 3.53, é determinado apenas por pós-processamento. Não é necessário o conceito de pressão no espaço de Fourier, para se determinar o campo de velocidade. Esse resultado é clássico para problemas periódicos (CANUTO et al., 2007; POPE, 2000). Considera-se que no presente trabalho, esse resultado foi estendido também para problemas não periódicos, como será apresentado. Outro fato importante é que a pressão é determinada com a mesma ordem de convergência que a velocidade. Esse é um resultado considerado novo em relação a outros trabalhos apresentados na literatura. Normalmente, a ordem de convergência espacial da pressão é menor que a ordem de convergência da velocidade, isso acontece devido ao método de acoplamento pressão-velocidade. Como no caso da metodologia pseudo-espectral de Fourier não ter esse acoplamento a ordem de convergência da pressão é resultado direto da manipulação matemática, Eq. 3.53, dos campos de velocidade.

Quanto às variáveis lagrangianas, Fig. 4.8 (b), também apresentam quarta ordem de convergência. Este resultado é importante, pois mostra que a acurácia e a ordem de convergência espacial não são comprometidas na região próxima à fronteira imersa.

As funções distribuição (Eq. 3.25) e interpolação (Eq. 3.23) utilizadas nas simulações anteriores, foram avaliadas sempre usando a mesma função peso, Eqs. 3.6 até 3.10. Na Fig. 4.9 apresenta-se a análise de ordem de convergência espacial da componente horizontal da velocidade euleriana, em um teste em que se utilizou funções peso diferentes para a avaliação das funções distribuição e interpolação.



(a)



(b)

Figura 4.8: Ordem de convergência espacial para a simulação com a função distribuição cúbica, (a) variáveis eulerianas e (b) variáveis lagrangianas.

Em uma primeira análise utilizou-se, para a interpolação, a função chapéu (Eq. 3.10) e, ao mesmo tempo, para se avaliar a distribuição de força utilizou-se a função cúbica (Eq. 3.7). No segundo teste inverteu-se as funções peso.

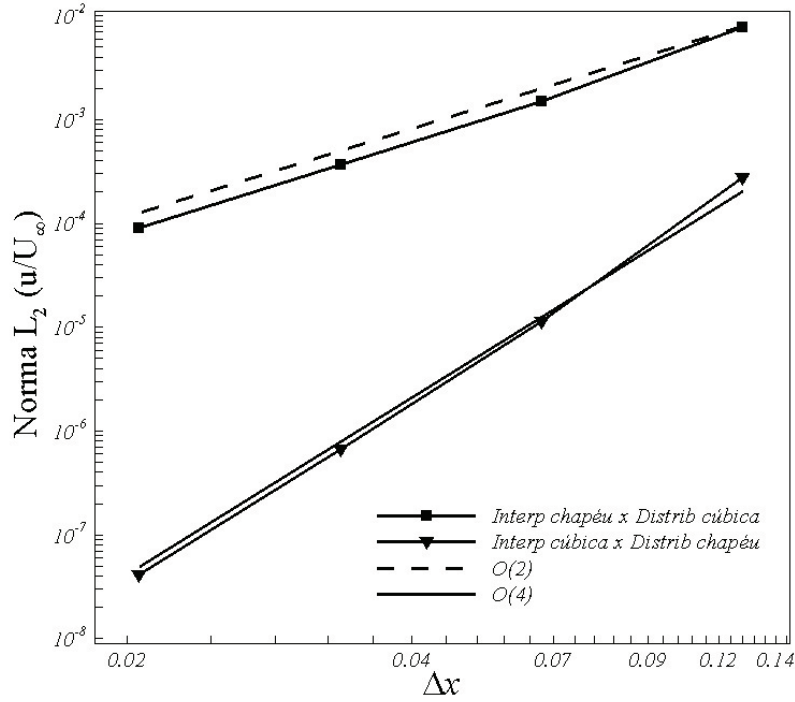


Figura 4.9: Norma L_2 da componente de velocidade horizontal euleriana, comparação da convergência espacial entre diferentes funções distribuição e interpolação.

Observa-se na Fig. 4.9 que a ordem de convergência espacial apresenta-se de segunda ordem, quando se utiliza a função chapéu na interpolação, mesmo usando a função cúbica na distribuição. Este resultado é o mesmo que o apresentado na Fig. 4.7, onde se utilizou a função chapéu, tanto na interpolação, quanto na distribuição.

No teste em que se usou a função cúbica, (melhor convergência apresentada na Fig. 4.7) para a interpolação, obteve-se quarta ordem de convergência, mesmo usando a função chapéu na distribuição. Cabe observar que a função chapéu apresentou segunda ordem de convergência na análise em que ela era utilizada, tanto na função distribuição, quanto na interpolação. Dessa forma, pode-se concluir que o processo de interpolação é que determina a ordem de convergência da metodologia, sendo, portanto, importante utilizar uma função peso de alta ordem de convergência para a sua avaliação. Por outro lado, o processo de distribuição não foi influenciado pela mudança de funções peso.

4.1.3.2 Influência da distância dos pontos lagrangianos aos nós de colocação eulerianos

Na presente seção apresenta-se a influência da distância entre os nós lagrangianos e os nós eulerianos. Com o intuito de ter mais controle sobre este parâmetro, a geometria da interface imersa utilizada no presente estudo, é um quadrado de lado L . A Fig. 4.10 mostra uma ampliação da fronteira imersa, mostrando-se o seu canto inferior esquerdo, em diferentes posições do domínio euleriano.

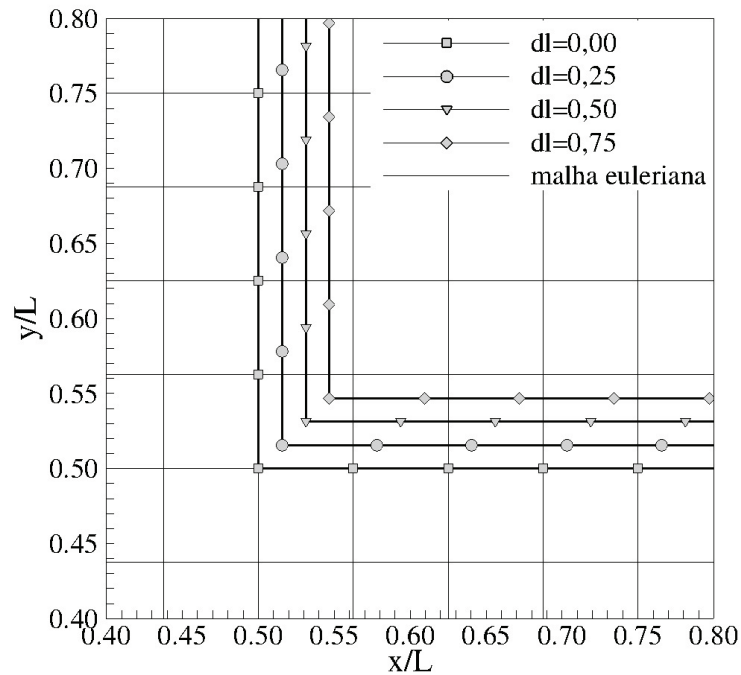


Figura 4.10: Posição da interface lagrangiana sobre a malha euleriana.

Na Fig. 4.10 quando $dl = 0,0$ significa que a distância entre os pontos lagrangianos em relação aos eulerianos é nula. Quando $dl = 0,25$ significa que a interface lagrangiana está deslocada de $0,25\Delta x$ para a direita e $0,25\Delta y$ para cima. A maior distância é dada quando $dl = 0,50$, pois os pontos lagrangianos estão exatamente no centro, entre quatro nós de colocação eulerianos. A posição $dl = 0,75$ corresponde à mesma que $dl = 0,25$, pois também se encontra a $0,25\Delta x$ de um ponto euleriano, à direita e a $0,25\Delta y$ de um ponto de euleriano acima.

O domínio euleriano foi discretizado com $N_x = N_y = 32$ nós de colocação, na discretização temporal utilizou-se $CFL = 0,1$ e a função peso utilizada, tanto no processo de interpolação, quanto no processo de distribuição, foi a função cúbica (Eq. 3.7). A evolução

temporal da norma L_2 da componente de velocidade horizontal é mostrada na Fig. 4.11 para as diferentes posições da interface, como descrito anteriormente e mostrado na Fig. 4.10.

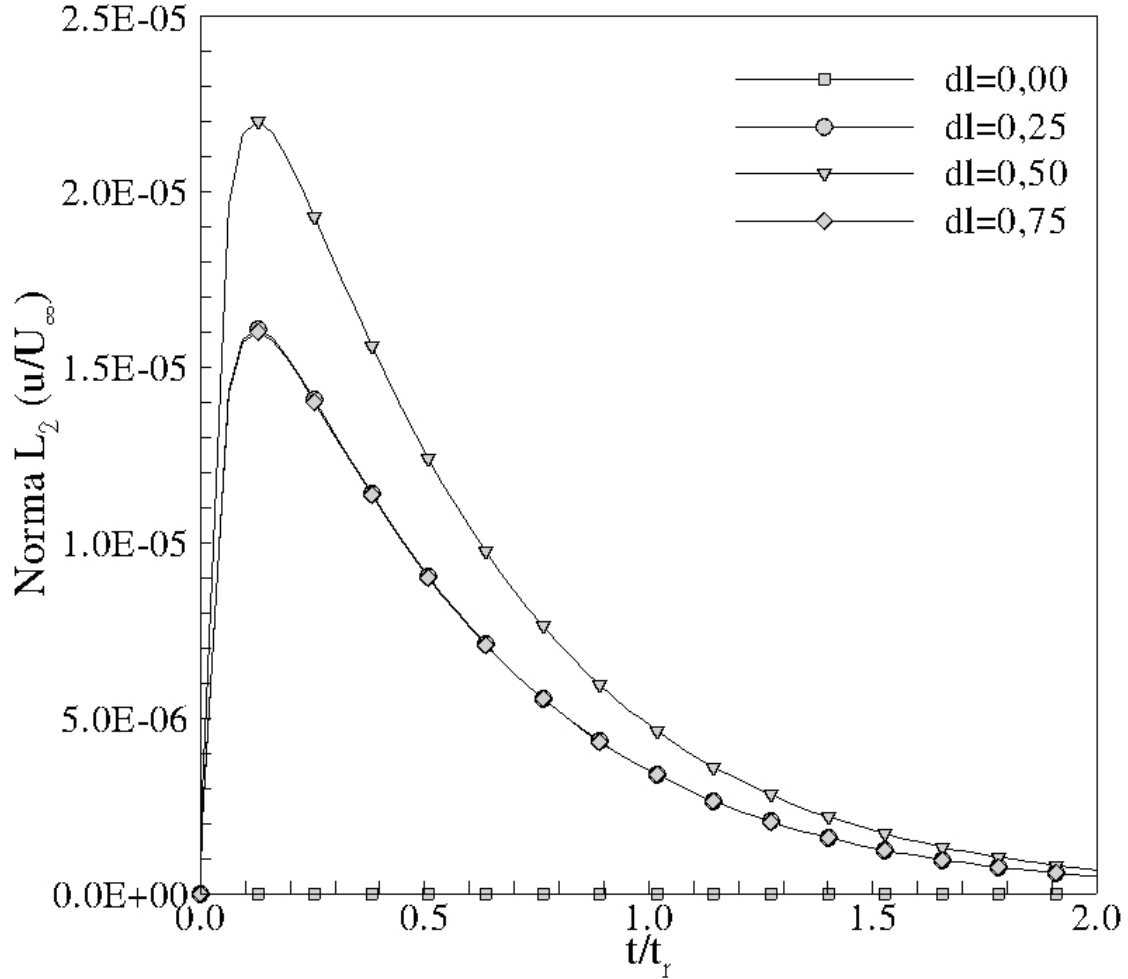


Figura 4.11: Norma L_2 da componente de velocidade horizontal.

Os resultados obtidos com as malhas euleriana e lagrangiana coincidentes, $dl = 0,0$ na Fig. 4.11, foram obtidos utilizando as funções distribuição (Eq. 3.4) e interpolação (Eq. 3.21), diferentemente dos resultados da seção 4.1.2, onde foram utilizadas as Eqs. 3.3 e 3.20. Ambos os resultados apresentam erros de arredondamento de máquina 10^{-14} , como esperado, quando se utiliza a metodologia pseudo-espectral de Fourier, podendo-se dizer, que o espalhamento da força, através de um núcleo de Dirac, está verificado.

Na posição $dl = 0,50$ aparecem os maiores erros, da ordem de 2.10^{-5} , pois é a posição mais distante que um ponto lagrangiano pode atingir de um ponto euleriano. Os erros das posições $dl = 0,25$ e $dl = 0,75$ são os mesmos. Isto acontece porque as distâncias da interface lagrangiana aos nós eulerianos são relativamente iguais.

4.1.3.3 Influência do número de iterações do MDF

O procedimento de múltipla forçagem direta (MDF), descrito na seção 3.1.6, foi avaliado utilizando a interface circular imersa no domínio euleriano como pode ser visualizado na Fig. 4.6. O domínio euleriano foi discretizado com $N_x = N_y = 32$ nós de colocação e o espaçamento entre os nós lagrangianos foi considerado igual ao dos nós eulerianos, $\Delta s = \Delta x$, perfazendo 56 pontos lagrangianos para representar a interface circular imersa. Na discretização temporal foi utilizado $CFL = 0,1$. As funções distribuição e interpolação foram avaliadas com a função peso cúbica (Eq. 3.7).

Aumentou-se o número de iterações do processo de múltipla imposição da força de $NL = 1$ até $NL = 8192$. Os resultados da norma L_2 em $t/t_r = 1,0$ da componente de velocidade horizontal euleriana e lagrangiana são apresentados no gráfico da Fig. 4.12.

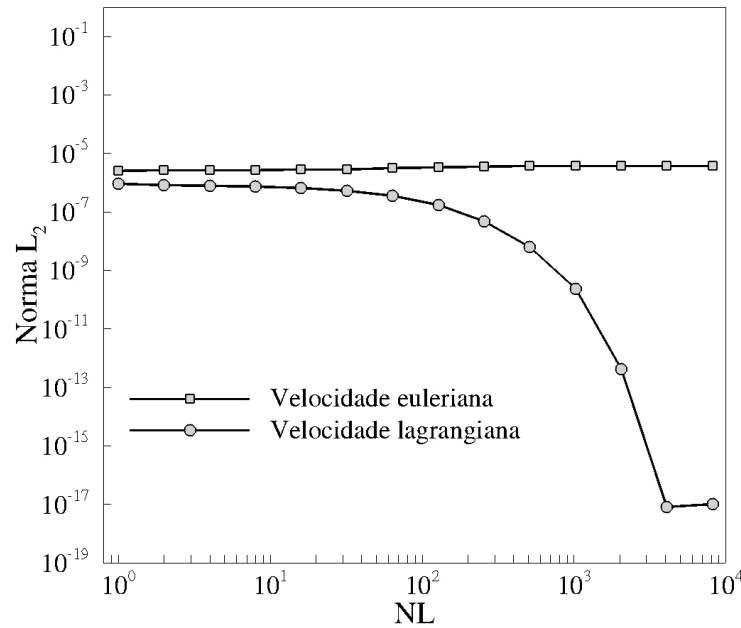
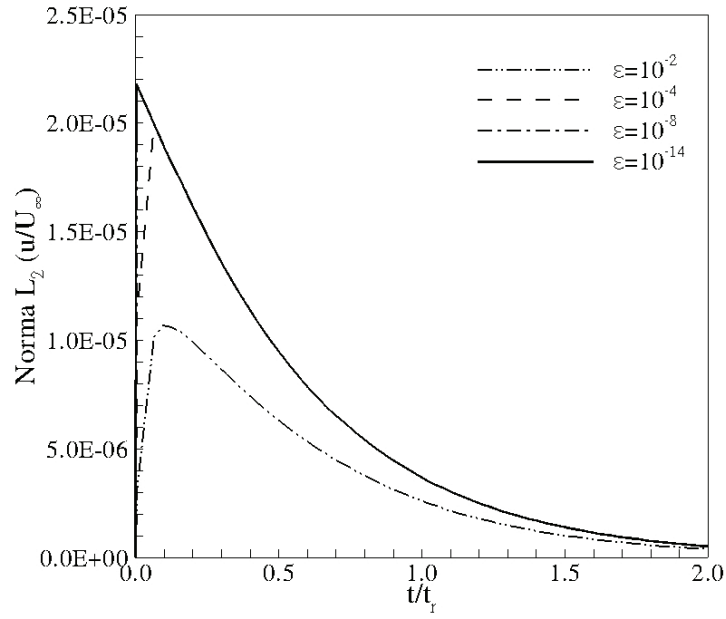
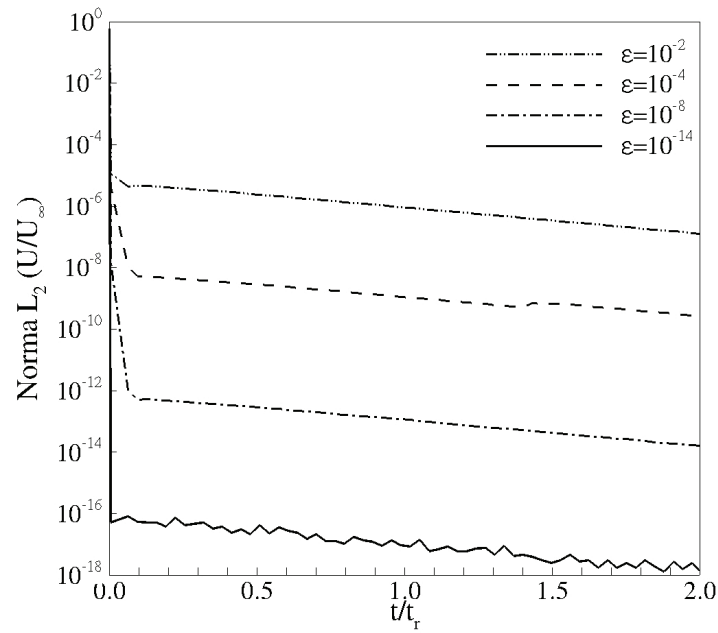


Figura 4.12: Norma L_2 da componente horizontal da velocidade.

O resultado da norma L_2 para a componente horizontal da velocidade euleriana foi pouco influenciada pelo processo de múltipla forçagem, convergindo para um determinado valor, neste caso $L_2(u/U_\infty) = 3,67 \cdot 10^{-6}$, a partir de $NL = 512$. Esse valor não se alterou mais, mesmo aumentando o número de ciclos. A partir de $NL = 128$ ciclos, os resultados do erro sobre a fronteira decaíram de forma exponencial, atingindo erros de arredondamento de máquina com $NL > 4096$ ciclos.



(a)



(b)

Figura 4.13: Evolução temporal da norma L_2 da componente horizontal de velocidade (a) euleriana (u/U_∞) e (b) lagrangiana (U/U_∞).

Este resultado mostra que o campo euleriano deixa de ser influenciado a partir de um determinado número de ciclos. Entretanto, as condições de contorno, impostas através do campo de força, passam a ser cada vez melhor calculadas.

O número de ciclos para o qual o campo de velocidade euleriano deixa de sofrer a influência da múltipla imposição da força é dependente do escoamento analisado, do número

de pontos de colocação eulerianos e do passo de tempo utilizados. A fim de evitar a dependência desses parâmetros para descobrir qual é o número mínimo de ciclos, recomenda-se utilizar o critério de parada do processo de ciclagem, ε , definido na Eq. 3.31. Na Fig. 4.13 apresenta-se os resultados da evolução temporal da norma L_2 quando se modifica esse critério de parada.

Da mesma forma, como observado nas simulações onde utilizou-se o número de ciclos fixo, se observa uma convergência do erro no domínio euleriano, Fig. 4.13 (a), nas curvas com $\varepsilon = 10^{-8}$ e $\varepsilon = 10^{-14}$ os resultados são os mesmos. Por outro lado, consegue-se diminuir, de maneira significativa, o erro no domínio lagrangiano, Fig. 4.13 (b). Quando se utiliza $\varepsilon = 10^{-14}$ obtém-se o erro da ordem de $\varepsilon = 10^{-16}$ (erro de arredondamento de máquina para dupla precisão).

Cabe ressaltar que os resultados para o erro da componente vertical da velocidade e do campo de pressão são semelhantes aos apresentados para a componente horizontal de velocidade.

4.2 Validação da metodologia proposta

4.2.1 Escoamentos sobre degraus 2D

4.2.1.1 Características gerais

Essa geometria é uma das mais utilizadas para validar novas metodologias devido à simplicidade geométrica e ao alto controle do ponto de descolamento da camada limite na entrada da expansão. Por outro lado, o escoamento que se forma após o descolamento é muito complexo. Estão presentes na literatura tanto estudos experimentais (LEE; MATEESCU, 1998; ARMALY et al., 1983; EATON; JOHNSTON, 1980. (Rept. MD-39)) quanto numéricos (GARTLING, 1990; SILVEIRA-NETO et al., 1993; LE; MOIN; KIM, 1997). Na Fig. 4.14 mostram-se as características físicas globais e qualitativas esperadas desse problema e na Fig. 4.15 são apresentadas as características geométricas. A geometria da Fig. 4.15 é caracterizada por um canal de entrada de comprimento L_{in} e altura $(W - h)$. O degrau tem uma altura h e o canal de saída tem comprimento L e altura W . A razão W/h é chamada razão de expansão.

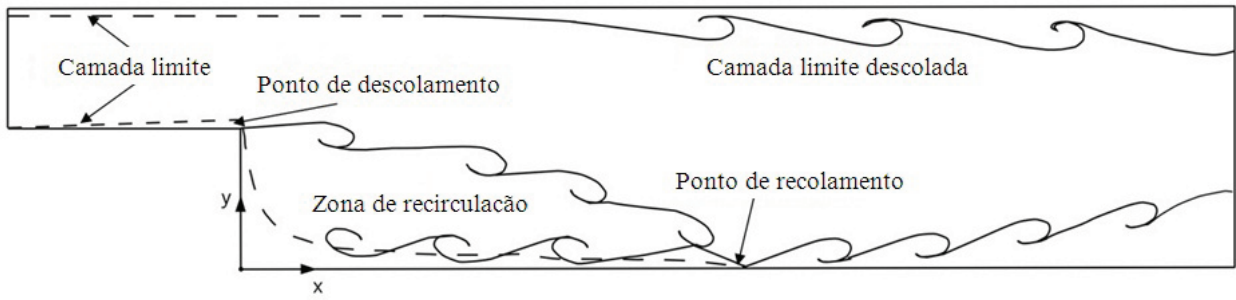


Figura 4.14: Expansão brusca: características físicas globais.

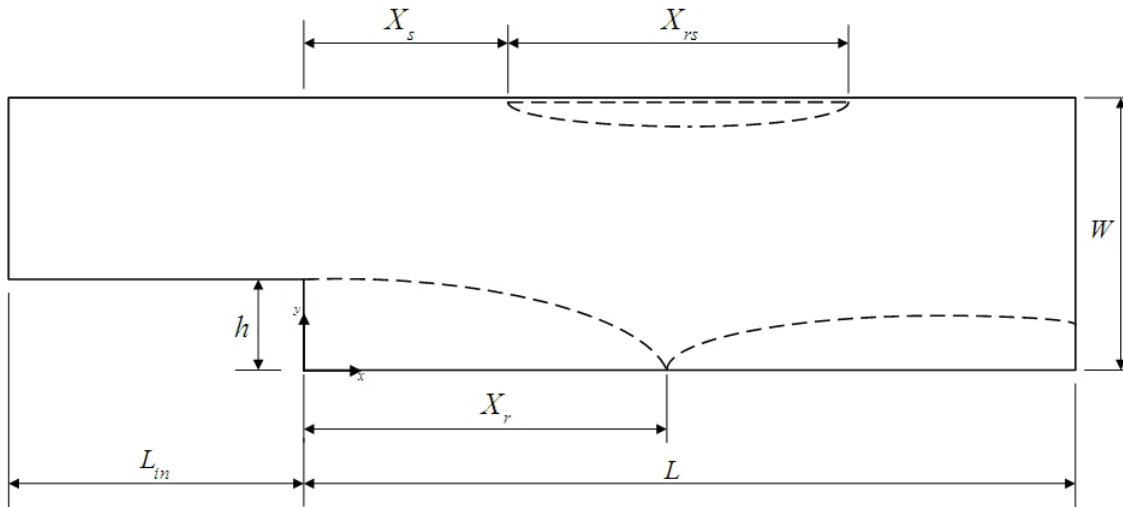


Figura 4.15: Expansão brusca: características geométricas.

Na Fig. 4.14, o escoamento se desenvolve da esquerda para a direita. Na entrada, desenvolve-se as camadas limite inferior e superior. A inferior descola no ponto de expansão $(0, h)$, o qual é fixo, independente do escoamento a montante. Uma vez que acontece o descolamento nesse ponto, forma-se uma camada cisalhante, que se caracteriza por um campo médio inflexional de velocidade, o que proporciona o aparecimento de instabilidades de Kelvin-Helmholtz ($K - H$). Essas instabilidades são transportadas e se chocam contra a parede inferior em um ponto, denominado ponto de recolamento, indicado na Fig. 4.15 pelo comprimento X_r . Este ponto deve ser determinado estatisticamente, uma vez que, via de regra, o escoamento é instável. As instabilidades $K - H$ que colidem contra a parede inferior podem ser transportadas na direção da saída, ou serem capturadas pela recirculação, à esquerda do ponto de colisão.

Após o ponto de recolamento da camada limite existe uma forte interação entre as estruturas $K - H$ e a parede. Por outro lado, em escoamentos que passam por uma ex-

pansão brusca a pressão cai e, logo após, ela se recupera, formando um gradiente adverso de pressão. Em função disso, a camada limite superior descola, gerando instabilidades também na vizinhança da parede superior.

Assim, percebe-se que, apesar da simplicidade geométrica do problema (Fig. 4.15), encontra-se, uma série de instabilidades de diferentes naturezas (Fig. 4.14). Encontra-se também, a interação entre elas e as paredes, bem como, com a camada limite que se desenvolve após o ponto de recolamento. Como será visto mais adiante, a interação com as paredes gera pares de estruturas contra-rotativas que atravessam o canal, criando interação de estruturas originárias de uma parede, com a parede oposta. Resulta-se, assim, um escoamento muito complexo do ponto de vista físico, o que o caracteriza como um caso para a realização de testes rigorosos para validação e aplicação de uma nova metodologia.

Observando a Fig. 4.14, é notório o fato que o escoamento é não periódico em todas as direções. A fim de aplicar a metodologia *IMERSPEC* para simulação e análise desse problema, propõe-se utilizar, no presente trabalho, a periodização do escoamento.

Como ilustrado na Fig. 4.16, mostra-se o domínio físico Ω_{PhD} , linha cheia, o qual está imerso em um domínio periódico Ω_{PeD} , representado pela linha tracejada. O domínio físico não periódico é delimitado por uma fronteira Γ_{PhD} e o domínio com condições de contorno periódicas é delimitado pela fronteira Γ_{PeD} . A fronteira interna Γ_{PhD} é caracterizada fisicamente por “condições de contorno” específicas, tais como, velocidade imposta na entrada e nas laterais do domínio Ω_{PhD} . Na saída, Γ_{PeD} e Γ_{PhD} são coincidentes, portanto a condição de periodicidade é imposta. Devido a condição de contorno periódica na saída do domínio Ω_{PhD} , dois artifícios numéricos são utilizados para modelar o escoamento para a entrada do domínio Ω_{PhD} , um deles é uma zona de amortecimento, representada pela região *BZ* da Fig. 4.16 e o outro é a denominado zona de forçagem, apresentada na região *FZ* da Fig. 4.16.

Essas condições, neste novo contexto, ou nesta nova forma de representar uma condição de contorno, passam a ser modeladas pelo termo fonte de força que aparece na Eq. 3.1. Esse campo euleriano de força, $\vec{f}$, é avaliado a partir do campo lagrangiano de força, $\vec{F}$, obtido utilizando-se o modelo de múltipla imposição da força, que está apresentado na seção de metodologia. Enfatiza-se que, nos limites externos Γ_{PeD} , a condição de periodicidade é utilizada para todas as variáveis.

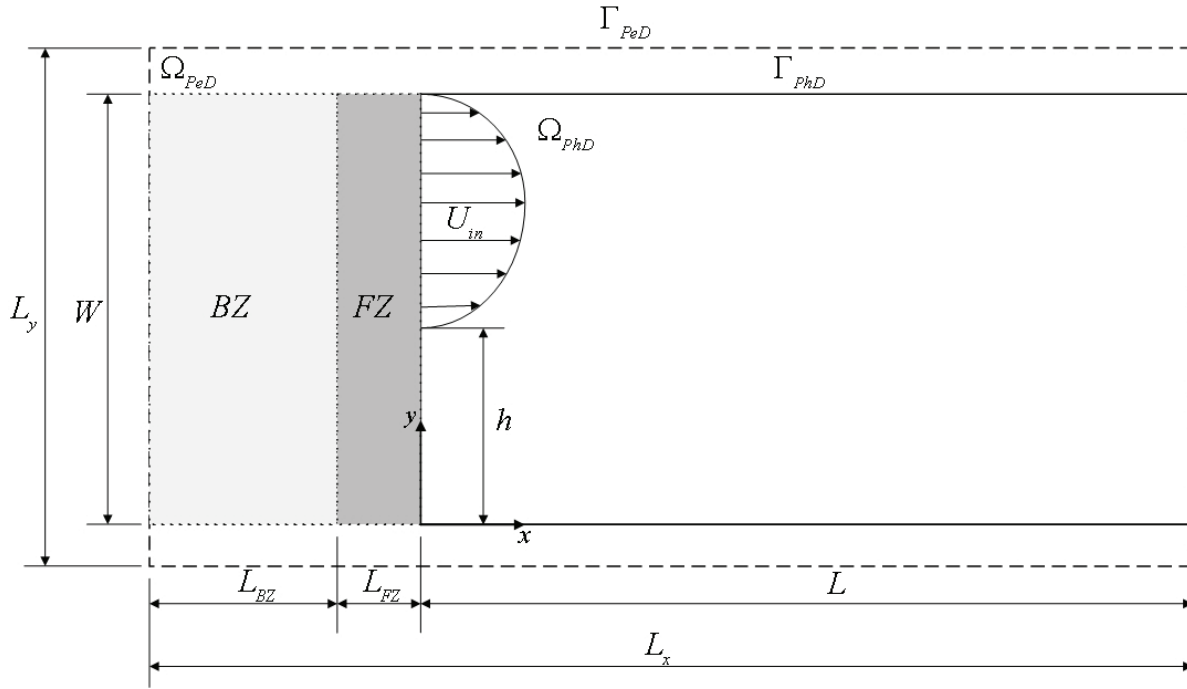


Figura 4.16: Domínio periódico que enclausura o problema de uma expansão brusca.

Devido à condição de periodicidade, quando se utiliza o método pseudo-espectral de Fourier, as instabilidades físicas que saem por uma face do domínio (Ω_{PeD}) são reinjetadas na outra face, como ilustrado na Fig. 4.17. Nesta figura, observa-se os turbilhões gerados pelo escoamento sobre um degrau, saírem do domínio de cálculo (Fig. 4.17 b) e serem reinjetados do outro lado (Fig. 4.17 a). Para evitar que estas instabilidades prejudiquem a imposição, via campo de força, da velocidade na entrada física do domínio, é feito o amortecimento dessas instabilidades através de uma zona de amortecimento (BZ) e também é utilizada uma região de forçagem (FZ), a fim de alinhar o escoamento antes que ele atinja a região de interesse. Estas regiões são mostradas nas Fig. 4.16. O procedimento de forçagem é feito sobre toda a região FZ (Figs. 4.16) a cada passo de tempo. Assim, garante-se que a velocidade fica imposta indiretamente, por meio do campo de força ao longo de toda essa região. Esse procedimento pode ser utilizado mesmo para impor um campo de velocidade aleatório que simule uma condição de entrada turbulenta.

A função de amortecimento (JOSLIN; STREETT; CHANG, 1991) serve para conduzir o escoamento, na zona de amortecimento (BZ), de forma suave e a uma dada velocidade alvo. Essa função é dada por:

$$BZ_i = \phi(x) (Q_i - Q_i^{ta}), \quad (4.12)$$

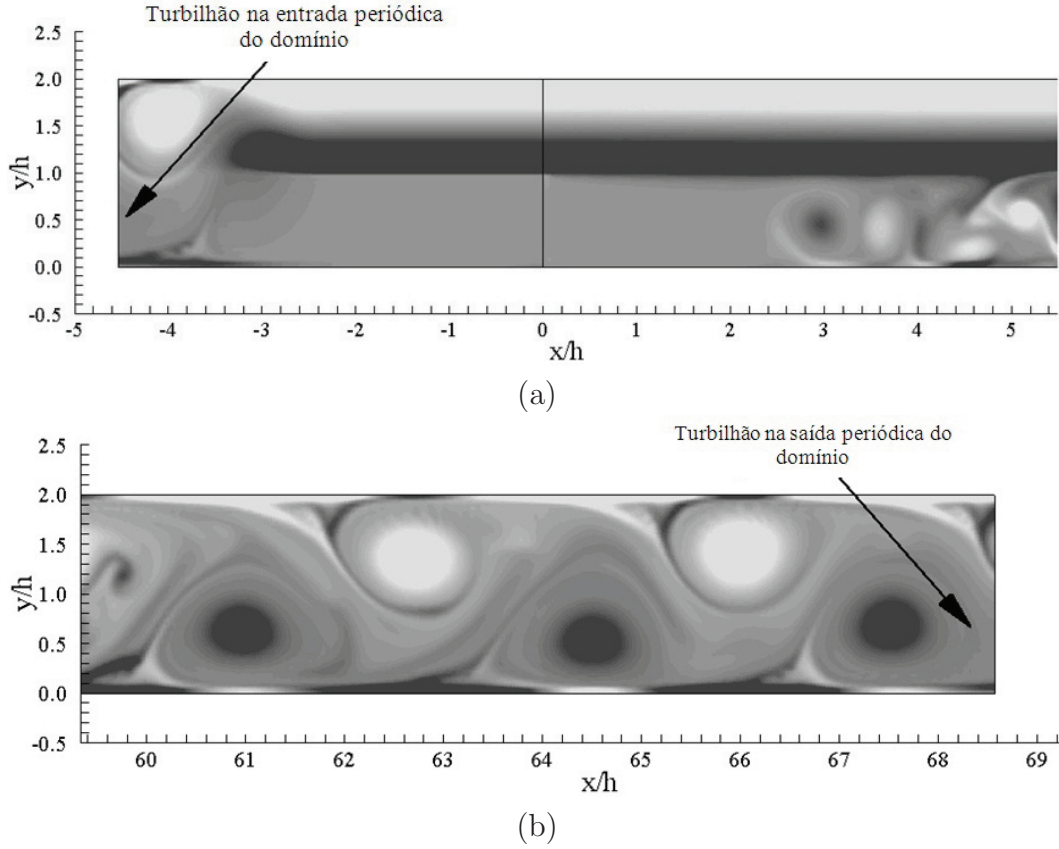


Figura 4.17: Detalhe das condições de contorno periódicas na direção do escoamento principal sobre um degrau a $Re_h = 6000$.

onde Q_i^{ta} é a solução alvo. Q_i é a solução obtida da equação de Navier-Stokes para os campos das componentes de velocidade. A função estiramento ou amortecimento dos vórtices, ϕ , é dada por:

$$\phi = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(4 - 8 \frac{x_{sB} - x}{x_{sB} - x_{fB}} \right) \right], \quad (4.13)$$

onde x_{sB} e x_{fB} são, respectivamente, o início e o final da zona de amortecimento.

Após o cálculo de BZ_i pela Eq. 4.12, este campo é levado para o espaço espectral, obtendo-se $\widehat{BZ}_i$, projetado sobre o plano π , através do operador projeção, Eq. 3.43, e subtraído da velocidade estimada, $\widehat{u}_i^*(\vec{k}, t)$, isto é:

$$\widehat{u}_i^*(\vec{k}, t) \leftarrow \widehat{u}_i^*(\vec{k}, t) - \widehat{BZ}_i(\vec{k}, t). \quad (4.14)$$

Através da Eq. 4.14 obtém-se a velocidade estimada já contabilizada com o efeito da zona de amortecimento.

O conjunto composto pelo domínio físico, pela zona de amortecimento, pela zona de forçagem, juntamente com as condições de contorno periódicas, pode ser entendido fisicamente como um túnel de vento de circuito fechado (Fig. 4.18).

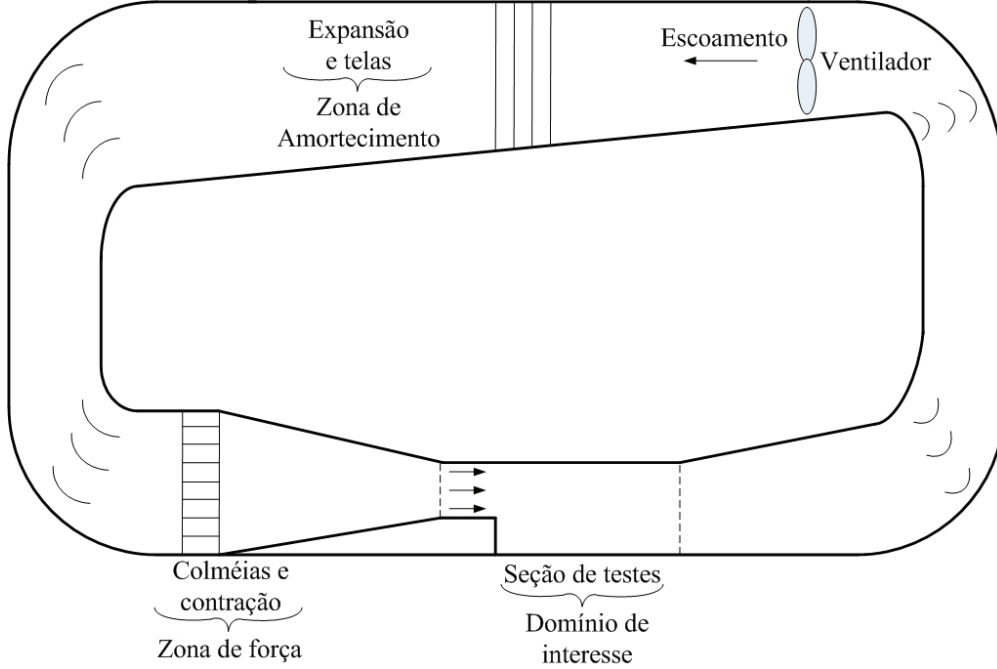


Figura 4.18: Túnel de vento de circuito fechado comparado com o domínio de cálculo da Fig. 3.7 usado na metodologia IMERSPEC.

A zona de amortecimento é análoga ao sistema expansão e telas. A zona de forçagem faz o papel de alinhar o escoamento, semelhante à colméia e à contração. O domínio de interesse, Ω_{PhD} (Fig. 3.7), modela a seção de teste do túnel de vento. Finalmente, as condições de contorno periódicas modelam o circuito fechado.

Todas as simulações apresentadas nesta seção foram realizadas utilizando-se para a discretização temporal, o método de Runge-Kutta de quarta ordem de convergência no tempo com coeficientes otimizados, proposta em Allampalli et al. (2009). Foi também utilizado o critério $CFL = 0,75$ (COURANT; FRIEDRICHS; LEWY, 1967). O domínio de cálculo se apresenta de acordo com a Fig. 4.16 e suas dimensões são dadas em função da altura do degrau $h = 0,5$ [m]; $Lx/h = 73,14$; $Ly/h = 2,29$; $W/h = 2,0$; $L_{BZ}/h = 3,73$ e $L_{FZ}/h = 0,53$. A viscosidade cinemática é dada por $\nu = U_\infty h / Re_h$ [m^2/s], onde Re_h é o número de Reynolds e U_∞ é a velocidade de referência, que corresponde à velocidade média ($\bar{U}$) do perfil de entrada $U_{in}(y)$ (Eq. 4.15), isto é, $U_\infty = \bar{U} = 1,0$ [m/s].

Enfatiza-se que na região FZ da Fig. 4.16 é feita uma forçagem utilizando o campo de força avaliado com o modelo de fronteira imersa, a fim de gerar o alinhamento das linhas de corrente. No presente trabalho, o perfil de velocidade a ser modelado pela forçagem é dado por:

$$U_{in}(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq y \leq h \\ -24(W - y)(h - y) & \text{se } h < y \leq W \end{cases} . \quad (4.15)$$

A Eq. 4.15 modela o perfil de entrada, sendo este o mesmo proposto no trabalho de Lee e Mateescu (1998) e corresponde a um escoamento desenvolvido em um duto, cuja velocidade média é $\bar{U} = 1,0 \text{ [m/s]}$. Para a zona de amortecimento, Eq. 4.12, o perfil alvo é a velocidade de entrada, isto é, $Q_x^{ta} = U_{in}(y)$, (Eq. 4.15) na direção do escoamento e $Q_y^{ta} = 0$ na direção transversal ao escoamento.

4.2.1.2 Escoamento sobre degrau a $Re_h = 400$

Na presente seção utilizou-se $Re_h = 400$ e o domínio de cálculo definido anteriormente, discretizado com $Nx = 2048$ e $Ny = 64$ nós de colocação nas direções x e y , respectivamente. Quanto aos parâmetros do método de múltipla forçagem, usou-se, como critério de parada, o número máximo de ciclos $NL = 200$ ou $\varepsilon = 10^{-5}$. Esta simulação foi realizada em um microcomputador cujo processador *Core2Quad* tem $2,66 \text{ GHz}$ de velocidade de processamento e $4,0 \text{ Gb}$ de memória RAM disponíveis, levando, aproximadamente, 15 h para simular 100 s físicos e utilizou 150 Mb de RAM.

Nas Figs. 4.19 e 4.20 são apresentadas a componente do campo de velocidade na direção do escoamento assim como as linhas de corrente, após um tempo suficiente ($tU_\infty/h = 400$) para que o escoamento entrasse em regime permanente. Nestas figuras observam-se o domínio completo de cálculo, incluindo-se a zona de amortecimento e a zona de forçagem.

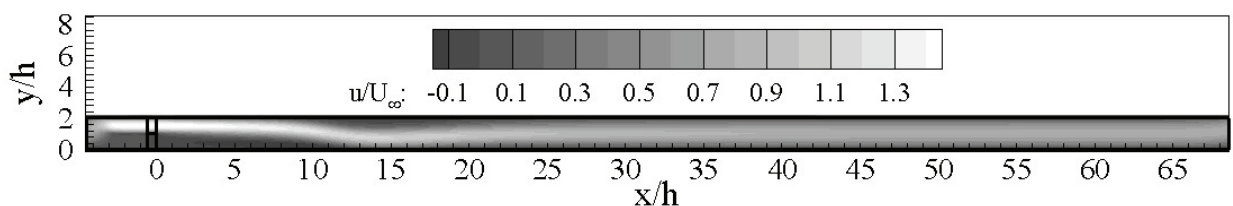


Figura 4.19: Campo de velocidade horizontal sobre o degrau a $Re_h = 400$ e $tU_\infty/h = 400$.

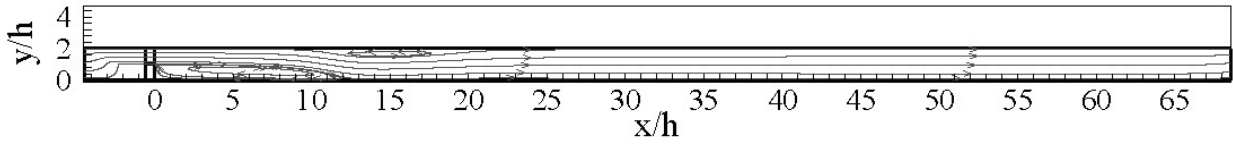


Figura 4.20: Linhas de corrente sobre o degrau a $Re_h = 400$ e $tU_\infty/h = 400$.

Na Fig. 4.21, observam-se as duas recirculações provenientes dos descolamentos das duas camadas limite (inferior e superior). Essas recirculações são esperadas para $Re_h = 400$. Deve-se notar um pequeno desvio nas linhas de corrente na região de saída do domínio na 4.20. Esse comportamento das linhas de corrente, que será explicado com mais detalhes no decorrer dessa seção, é a influência das condições de contorno periódicas e da zona de amortecimento que está posicionada na entrada do domínio.

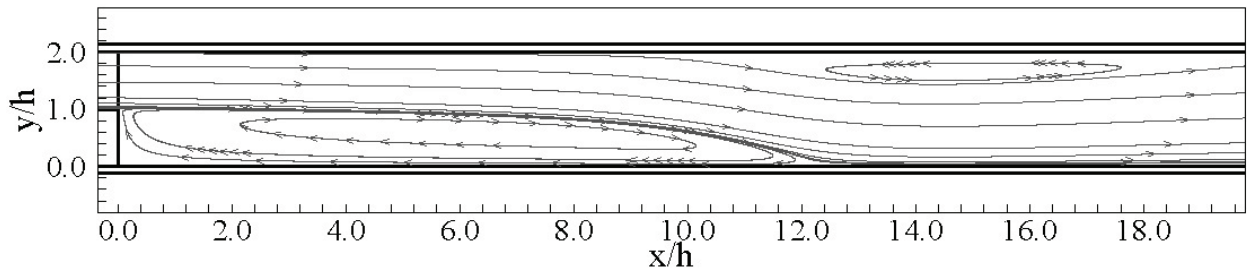


Figura 4.21: Detalhes das linhas de corrente sobre o degrau a $Re_h = 400$ em $tU_\infty/h = 400$.

Na Fig. 4.22 (a), as linhas de corrente mostram que o escoamento recupera a velocidade alvo dada na entrada da zona de amortecimento. Na zona de forçagem, o escoamento alinha-se corretamente para gerar o perfil de entrada do domínio físico, $U_{in}(y)$.

Tendo em vista evidenciar a importância da zona de forçagem apresenta-se na Fig. 4.22 (b) a distribuição da componente de velocidade horizontal obtida na posição $y/h = 1,49$. Apresenta-se a comparação entre duas simulações, uma usando a zona de forçagem ($L_{ZF}/h = 0,26$) e outra sem usar a zona de forçagem, *i.e.*, $L_{ZF}/h = 0,0$. Observa-se que a simulação sem zona de forçagem apresenta uma distribuição de $u(x)$ crescente e que não atinge a solução de referência dada pela Eq. 4.15.

Enquanto que a simulação com a zona de forçagem apresenta uma distribuição de velocidade constante com x e igual ao valor esperado, indicando a importância de se usar a zona de forçagem. A oscilação que aparece após $x/h = 0,0$ já está dentro do domínio de cálculo e é resultado da expansão brusca.

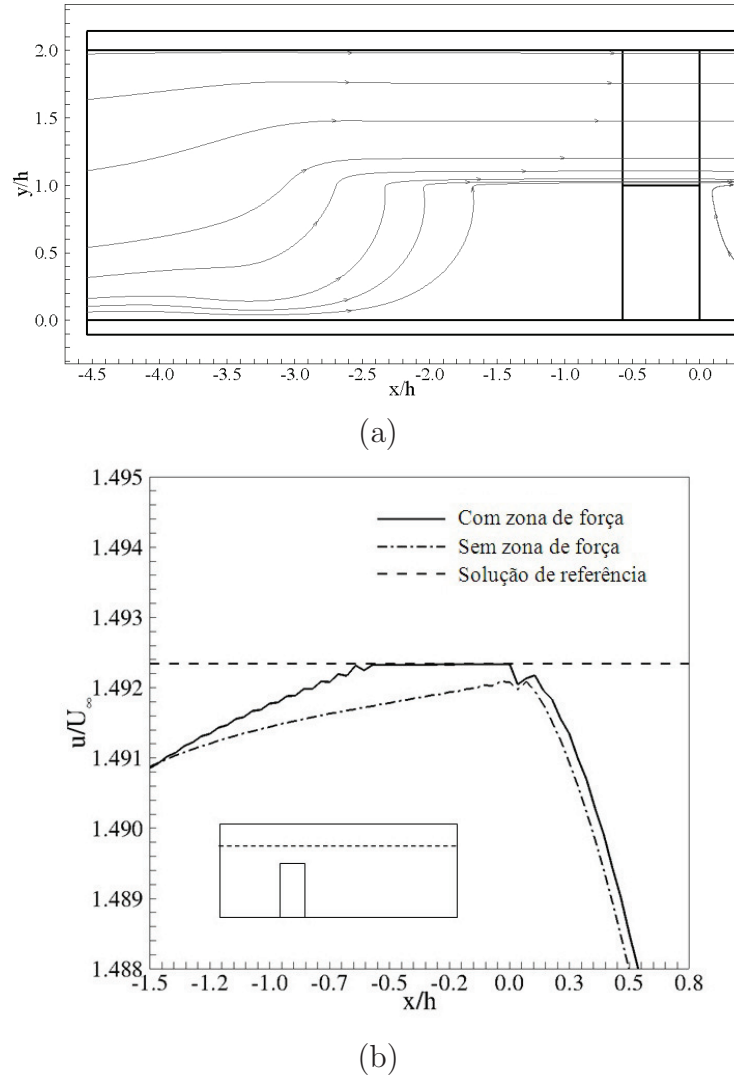
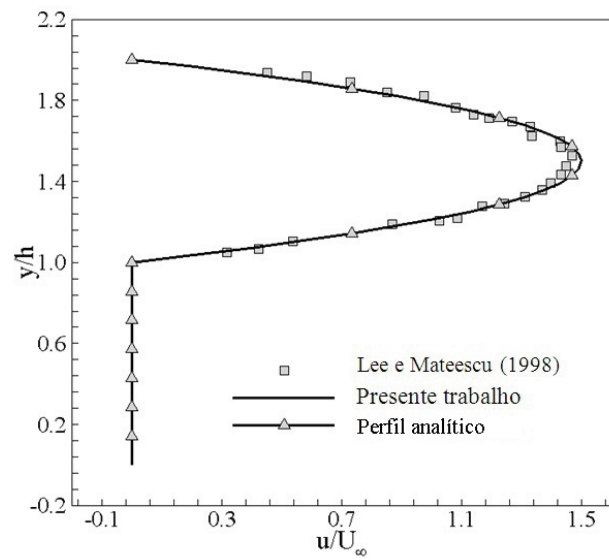


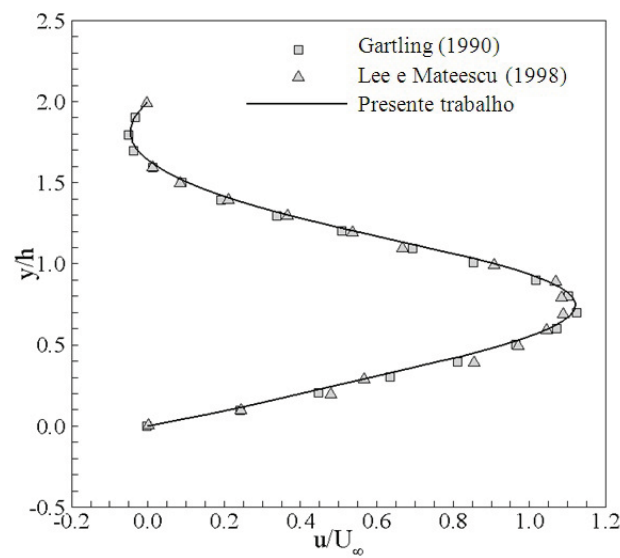
Figura 4.22: Detalhes da linhas de corrente na zona de amortecimento (a); Perfil da componente de velocidade horizontal em $y/h=1,49$ (b); a $Re_h = 400$ e $tU_\infty/h = 400$.

Na Fig. 4.23 são feitas comparações entre os resultados do presente trabalho com os resultados experimentais de Lee e Mateescu (1998) e os resultados numéricos de Gartling (1990).

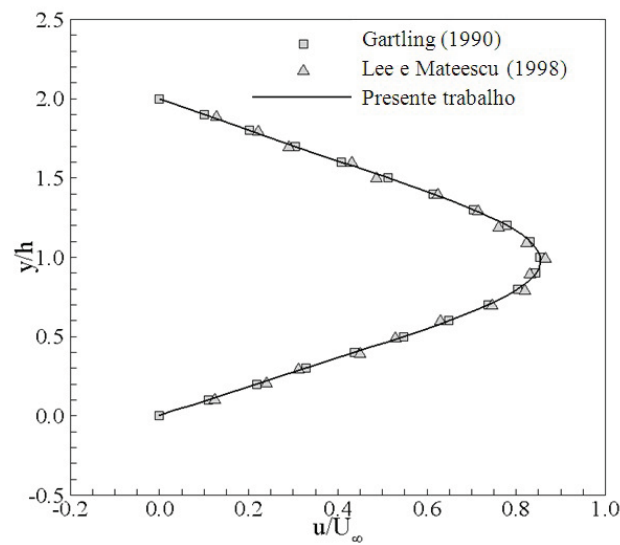
Observa-se uma excelente concordância entre os perfis de velocidade retirados na entrada do domínio e em duas estações no interior do domínio. É importante enfatizar que o perfil da Fig. 4.23, que modela a “condição de contorno” de entrada, foi forçado pela metodologia de fronteira imersa, no interior do domínio periódico. Os perfis para as outras duas estações ($x/h = 14,0$ e $x/h = 30,0$) são resultados obtidos da simulação com a metodologia IMERSPEC.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.23: Comparação dos perfis da componente de velocidade horizontal do presente trabalho com o trabalho experimental de Lee e Mateescu (1998) e com o trabalho numérico de Gartling (1990), em (a) $x/h = 0, 0$; (b) $x/h = 14, 0$; (c) $x/h = 30, 0$.

A norma L_2 , que mede a diferença entre o perfil recuperado na entrada do domínio e a Eq. 4.15, foi calculada, obtendo-se 10^{-5} , a qual é apresentada na Fig. 4.24. Isso mostra que a condição de contorno, imposta de forma virtual, atinge valores muito próximos da condição experimental.

4.2.1.3 Influência do refinamento da malha

As próximas simulações mostram como a solução do problema se comporta com o refinamento da malha. Utilizou-se o mesmo domínio de cálculo, com os mesmos critérios do método de múltipla forçagem da seção anterior, porém foram feitas três simulações com diferentes números de pontos de colocação no domínio euleriano. Tem-se na Fig. 4.24 a norma L_2 das componentes horizontal e vertical de velocidade na estação de entrada ($x/h = 0, 0$).

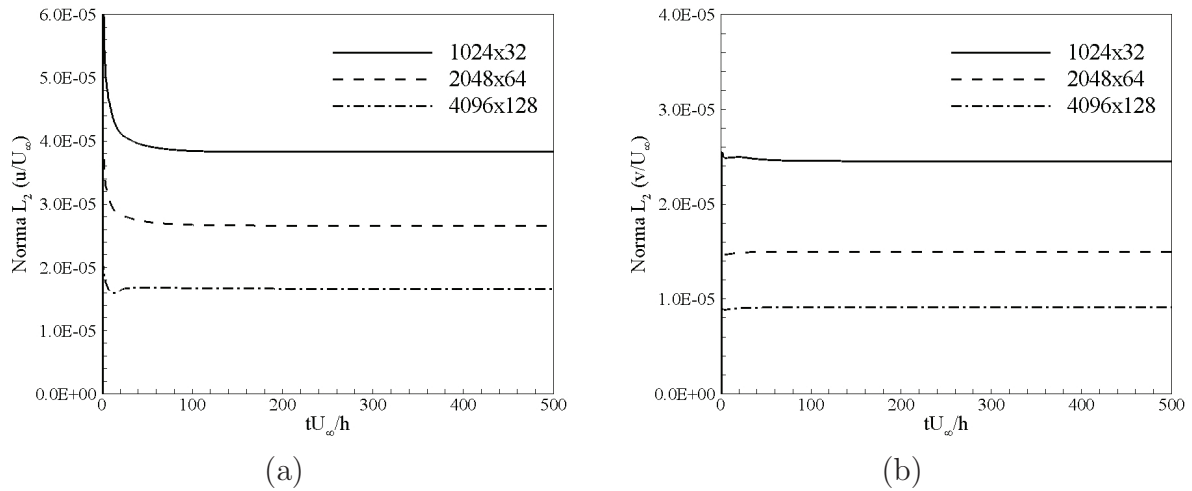
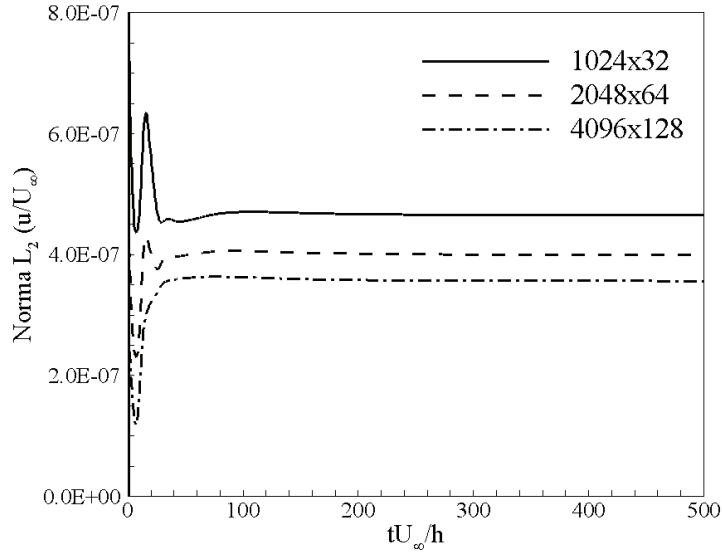


Figura 4.24: Evolução temporal da norma L_2 dos perfis de velocidade na entrada, da componente horizontal (a) e da componente vertical (b).

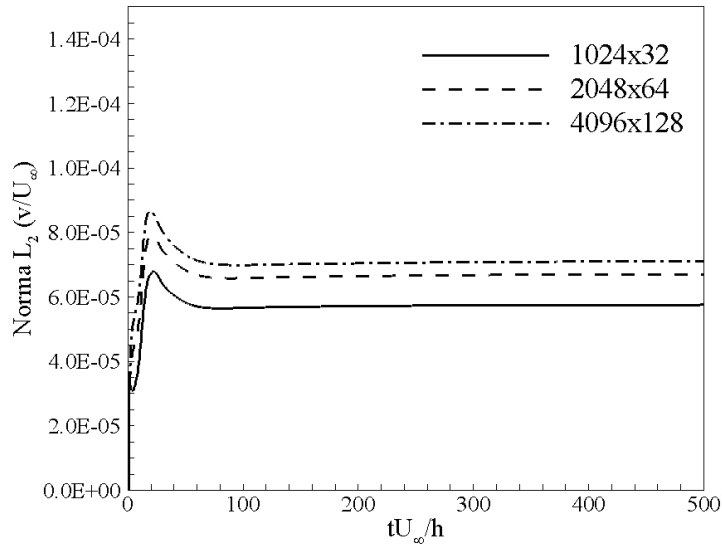
Reforça-se a idéia de que a norma L_2 , calculada sobre as fronteiras, mede a distância que o valor calculado para a velocidade está de um valor de referência, que é o perfil experimental de velocidade. Nas paredes, a norma mede o erro entre a solução calculada e a condição de não-deslizamento. Na entrada, à medida que se refina a malha, os erros sobre as fronteiras diminuem, como mostrado na Fig. 4.24.

Sobre a parede inferior, a componente de velocidade vertical apresenta um aumento do erro, como pode ser visto na Fig. 4.25. Esse resultado não era esperado e isto acontece

devido o número de nós de colocação aumentar no lado externo ao domínio, possibilitando o aparecimento de recirculações externas, como pode ser visto na Fig. 4.26, onde a norma L_2 aumenta nesta região. Essas recirculações, Fig. 4.26 (c), influenciam negativamente o comportamento da velocidade sobre as fronteiras.



(a)



(b)

Figura 4.25: Evolução temporal da norma L_2 na parede inferior da componente de velocidade horizontal (a) e vertical (b).

No entanto, esse fato não é grave, pois o erro continua em excelentes níveis de acurácia, refletindo uma ótima aproximação da condição de não-deslizamento. Além disso, a Fig. 4.25 mostra a tendência à independência da norma L_2 quanto ao refinamento da malha.

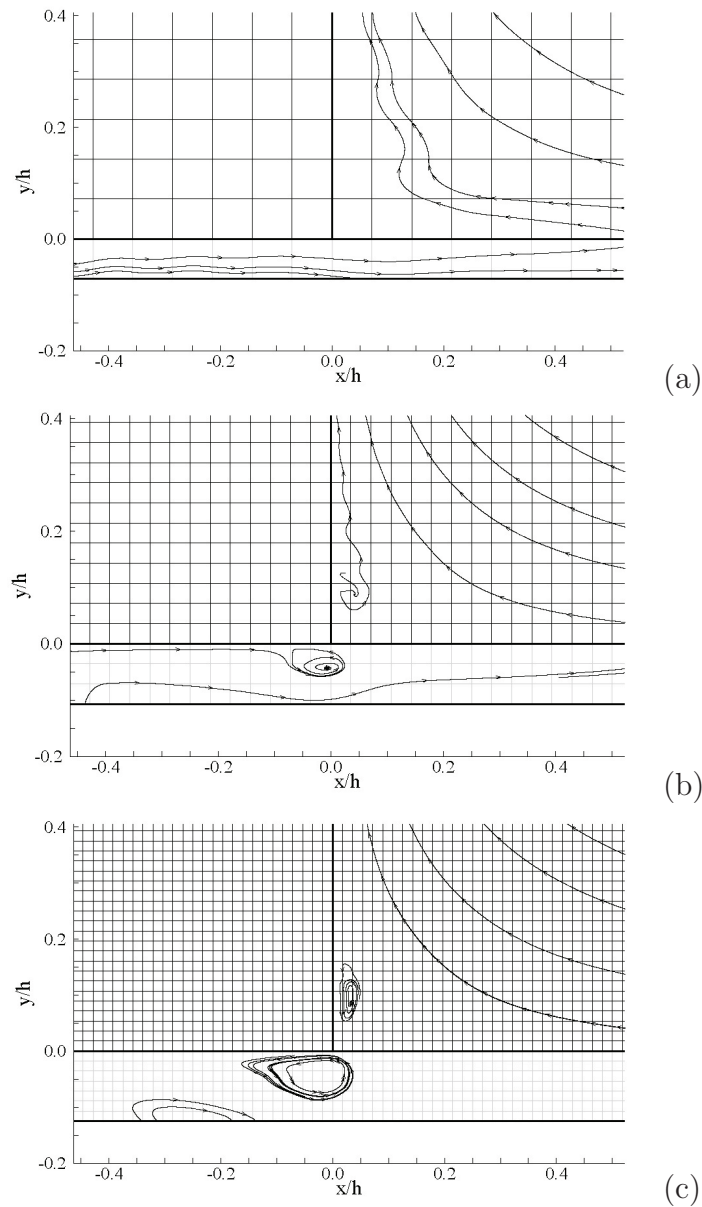


Figura 4.26: Influência do refinamento da malha no escoamento complementar: (a) 1024×32 ; (b) 2048×64 ; (c) 4096×128 .

Na Tab. 4.1 apresenta-se uma comparação da posição dos pontos de recolamento inferior (x_r), descolamento superior (x_s) e recolamento superior (x_{rs}), utilizando diferentes malhas, com o trabalho experimental de Lee e Mateescu (1998), o qual utilizou uma matriz de anemômetros de fio quente, e com o trabalho numérico de Gartling (1990), no qual resolveu-se as equações de Navier-Stokes, para escoamentos incompressíveis, utilizando o método dos elementos finitos de Galerkin, com 40×400 elementos distribuídos em uma malha não uniforme. Foi obtida uma ótima concordância entre os resultados. Observa-se que com o

refinamento da malha, de forma geral, os resultados tendem a se aproximar da referência numérica.

Tabela 4.1: Comparação da posição do ponto de recolamento para diferentes malhas a $Re_h = 400$.

Pontos de colocação	x_r/h	x_s/h	x_{rs}/h
1024x32	12,06	10,47	20,15
2048x64	12,16	10,12	20,51
4096x128	12,19	9,94	20,70
Experimental (LEE; MATEESCU, 1998)	12,90	10,30	20,50
Numérico (GARTLING, 1990)	12,20	9,70	20,96

Nos resultados apresentados na Tab. 4.1 também marcou-se o tempo de processamento de 10 iterações fixando-se o número de ciclos em $NL = 200$. Nesse tempo de processamento, não se levou em conta o processo de escrita dos arquivos de saída. Estes resultados foram todos simulados em um computador com processador *Intel core2Quad* (Q8400) com 2,66 [GHz] de velocidade e 4,0 [GiB] de memória RAM. O sistema operacional é o *OpenSuse Linux* versão 11.3. Os resultados dos tempos de simulação estão apresentados na Tab. 4.2.

Tabela 4.2: Tempo de processamento de CPU para 10 iterações no tempo e $NL = 200$ para diferentes malhas.

Pontos de colocação	Tempo CPU [s]	Memória RAM [MB]
1024x32=32.768	14,45	20
2048x64=131.072	79,70	80
4096x128=524.288	372,42	320

O intuito da Tab. 4.2 é apenas dar uma idéia do quanto de tempo de CPU e memória RAM são gastos nas simulações. Observa-se que o gasto de memória é linear com o aumento do número de nós de colocação, uma vez que se utilizou alocação de memória estática. Neste caso com $NL = 200$ iterações o tempo de CPU também teve um acréscimo linear em relação ao aumento do número de pontos de colocação.

4.2.1.4 Influência do número de ciclos do método da múltipla forçagem direta

Nesta seção, a influência do número de ciclos do método da múltipla forçagem (NL) foi testada com uma discretização com $Nx = 2048$ e $Ny = 64$ nós de colocação. Foi utilizado o

número de ciclos, NL , como critério de parada. A fim de visualizar o efeito da imposição das condições de contorno, a Fig. 4.27 mostra a evolução do perfil da componente de velocidade horizontal, dentro do processo de ciclagem, na entrada do domínio, *i.e.*, em $x/h = 0,0$ e para $t = \Delta t$, ou seja, no primeiro passo de tempo. Observa-se a condição inicial, $u/U_\infty = 1,0$ para $it = 0$, linha pontilhada da Fig. 4.27, e como ela evolui para a condição de entrada dada pela Eq. 4.15, em função do número de iterações.

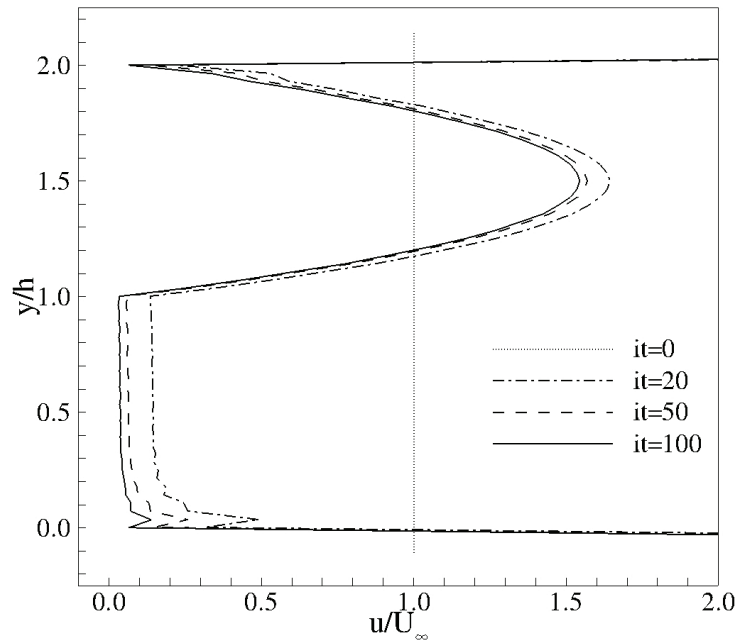
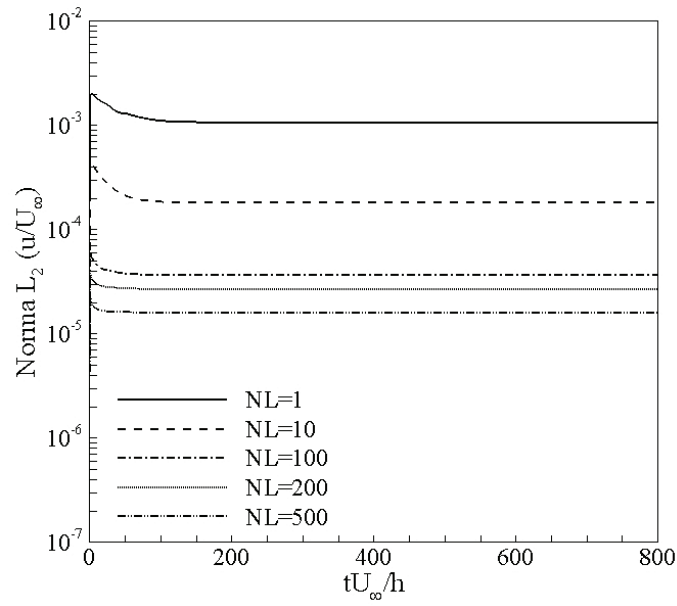


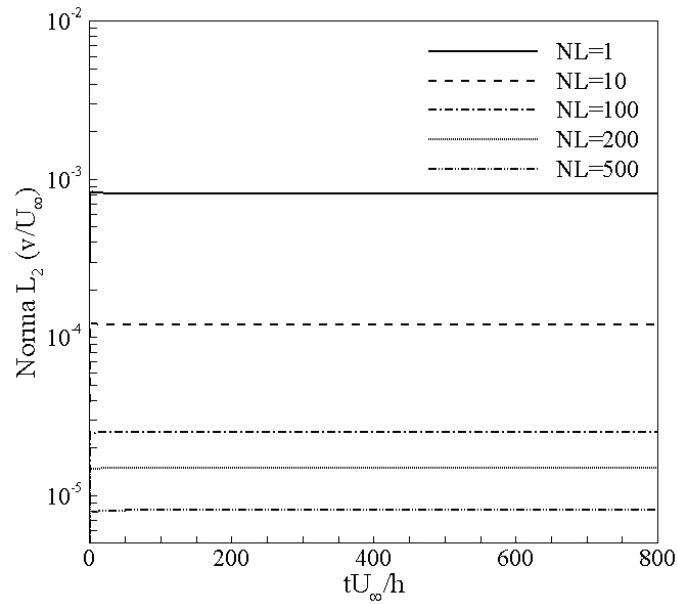
Figura 4.27: Evolução do perfil da componente de velocidade horizontal na entrada do domínio, dentro do processo de ciclagem, no primeiro passo de tempo da simulação, utilizando a metodologia IMERSPEC.

Na comparação entre os erros obtidos sobre o perfil de entrada, calculados por meio da norma L_2 das componentes de velocidade horizontal e vertical, apresentados na Fig. 4.28, observa-se uma queda gradual do erro conforme se aumenta o número de ciclos. O mesmo ocorre com os erros na fronteira inferior, mostrados na Fig. 4.29. Esse comportamento é o esperado, uma vez que a força que representa a fronteira fica melhor calculada com o aumento do número de ciclos.

O problema em se aumentar o número de ciclos é que o custo computacional aumenta, como apresentado na Tab. 4.4. Portanto, deve-se procurar uma solução de compromisso entre precisão necessária na fronteira e tempo de processamento.



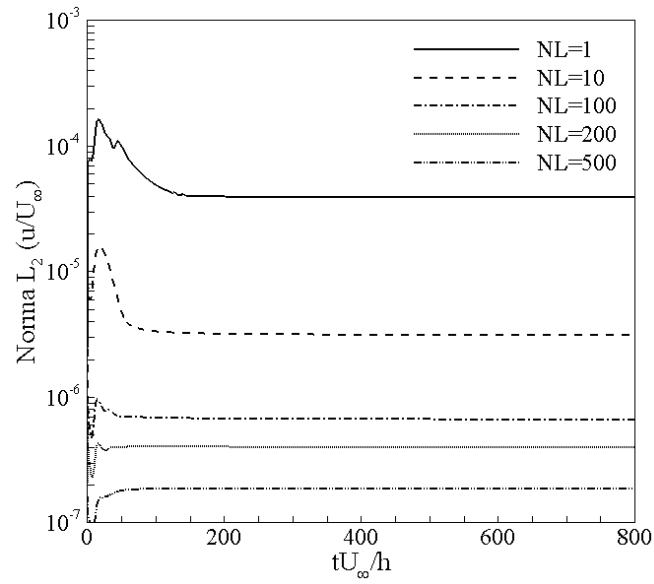
(a)



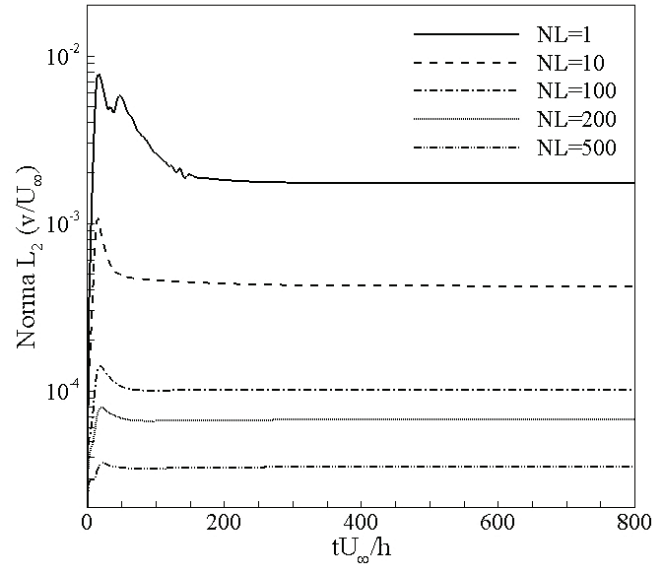
(b)

Figura 4.28: Evolução temporal da norma L_2 no perfil de entrada da componente de velocidade horizontal (a) e velocidade vertical (b).

A Tab. 4.3 mostra a comparação da posição dos pontos de recolamento inferior e superior e do ponto de descolamento superior, de acordo com o aumento do número de ciclos (NL) e os trabalhos de Lee e Mateescu (1998) e Gartling (1990). Os resultados indicam que a partir de 10 ciclos essas posições se alteram muito pouco em comparação entre elas. No entanto, não é recomendável simular com apenas um único ciclo, já que o resultado fica bem longe do esperado, mostrando a importância da ciclagem na metodologia proposta.



(a)



(b)

Figura 4.29: Evolução temporal da norma L_2 na parede inferior da componente de velocidade horizontal (a) e vertical (b).

A Tab. 4.4 mostra o tempo gasto de processamento em CPU para 10 iterações no tempo físico, aumentando o número de iterações do processo de ciclagem. A memória RAM utilizada permanece a mesma, 80 [MB] que corresponde a simulação com $2048 \times 64 = 131.072$ pontos de colocação.

Observando a Tab. 4.4 observa-se um aumento significativo com relação ao tempo de CPU quando se aumenta o número de ciclos do processo iterativo. Portanto, é importante ponderar entre a acurácia requerida e o tempo necessário para obtê-la.

Tabela 4.3: Comparação da posição dos pontos de recolamento e descolamento para diferentes números de ciclos do método de multipla forçagem.

Número de ciclos (NL)	x_r/h	x_s/h	x_{rs}/h
1	15,17	13,93	20,98
10	12,52	10,67	20,53
100	12,20	10,20	20,47
200	12,18	10,14	20,50
500	12,16	10,08	20,56
Experimental (LEE; MATEESCU, 1998)	12,90	10,30	20,50
Numérico (GARTLING, 1990)	12,20	9,70	20,96

Tabela 4.4: Tempo de processamento de CPU para 10 iterações no tempo e $N_x = 2048$ e $N_y = 64$.

Número de ciclos (NL)	Tempo CPU [s]
1	6,65
10	9,92
100	42,96
200	79,70
500	189,75

4.2.1.5 Diferentes números de Reynolds

Utilizando uma malha de 2048×64 nós de colocação e os critérios do método de multipla forçagem com $NL = 200$, variou-se o número de Reynolds das simulações, obtendo-se os resultados apresentados na Fig. 4.30.

A Fig. 4.30 apresenta os campos instantâneos da componente de vorticidade na direção z , perpendicular ao plano xy da Fig. 4.16, para os diferentes Re_h simulados. Observa-se que até $Re_h = 600$, o escoamento comporta-se de maneira estável em todo o domínio, ou seja, sem oscilações. Para as simulações com $800 < Re_h < 2500$, o comportamento do escoamento torna-se instável, passando pela fase de transição. Nesta faixa é possível observar turbilhões contra-rotativos se alternando entre as paredes superior e inferior. Para $Re_h = 3000$ e $Re_h = 6000$, o comportamento das estruturas turbilhonares começa a se tornar muito instável, ampliando o espectro de energia cinética como mostrado na Fig. 4.32. Dependendo da posição observada no interior do domínio percebe-se um comportamento caótico, como pode ser visualizado nas Figs. 4.31 e 4.32.

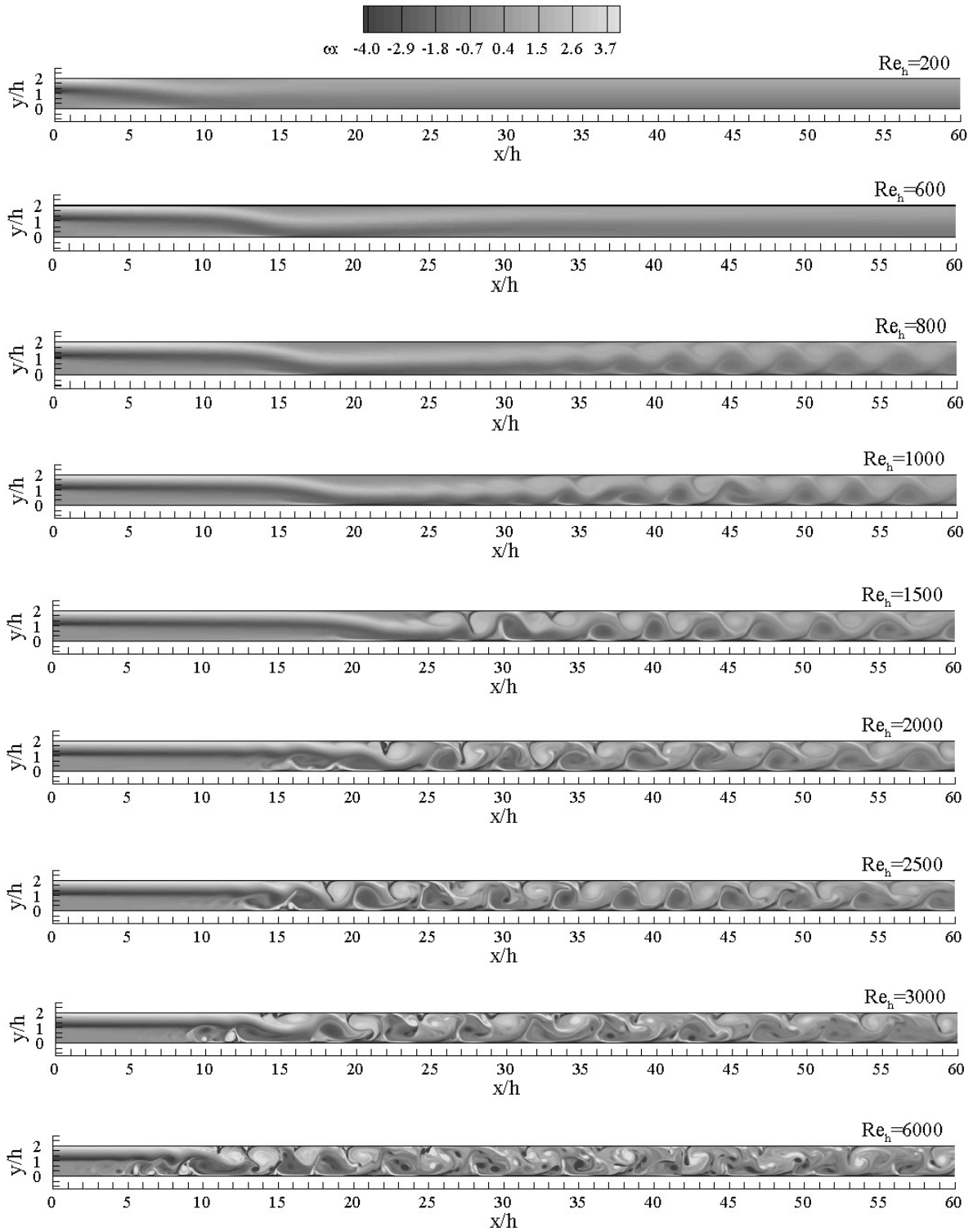


Figura 4.30: Campos instantâneos da componente de vorticidade, na direção z , (ω_z) para diferentes Re_h no instante $tU_\infty/h = 800, 0$.

A Tab. 4.5 mostra a comparação entre os pontos de recolamento inferior, x_r/h , para diferentes números de Reynolds. Observa-se que há concordância entre os resultados do pre-

sente trabalho e os do experimento de Lee e Mateescu (1998) até $Re_h = 400$. Para números de Reynolds maiores que 400, os resultados começam a se afastar do experimento. Isso se deve à falta da terceira dimensão, uma vez que estas simulações são bidimensionais, enquanto que, fisicamente, para $Re_h > 400$, os efeitos tridimensionais começam a se manifestar. Este fato, já esperado, também foi observado no trabalho de Armaly et al. (1983). Os resultados tridimensionais obtidos no presente trabalho também demonstram isso e será mostrado nas próximas seções.

Tabela 4.5: Comparação da posição do ponto de recolamento na parede inferior (x_r/h) para diferentes números de Re_h .

Re_h	Lee e Mateescu (1998)	Presente trabalho
200	8,30	8,50
250	9,10	9,71
300	10,30	10,64
350	11,10	11,39
400	12,90	12,18
450	13,20	12,61
500	15,50	13,50

A Fig. 4.31 mostra os gráficos de duas sondas temporais, uma posicionada em $(x; y) = (14, 0; 1, 5)$, Fig. 4.31 (a), e outra em $(x; y) = (40, 0; 1, 5)$, Fig. 4.31 (b). Elas mostram que para $Re_h = 400$, o comportamento temporal da componente de velocidade horizontal é praticamente constante a partir de $tU_\infty/h = 400$, representando um regime estável. Já para $Re_h = 1000$, dependendo da posição de amostragem, por exemplo, na posição $(x; y) = (40, 0; 1, 5)$, é possível observar um regime temporal instável de velocidade. Para $Re_h = 6000$, esse regime passa a ser caótico.

Para ficar mais claro o comportamento da Fig. 4.31 (b), é feita uma análise do espectro de energia das simulações realizadas a $Re_h = 1000$ e $Re_h = 6000$, a qual é apresenta na Fig. 4.32. A densidade espectral da energia cinética dos sinais $u(t)$ e $v(t)$ é dada pela Eq. 4.16

$$Ek = \int_0^\infty E(St)dSt = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} \right), \quad (4.16)$$

onde Ek é a densidade espectral de energia cinética turbulenta, obtida a partir da transformada de Fourier de $u'(t)$ e $v'(t)$, sendo u' e v' flutuações das velocidades horizontal e vertical, respectivamente e $St = h/(tU_\infty)$ é o número de Strouhal, ou frequência adimensional. Os

gráficos dos espectros de energia foram obtidos a partir da evolução temporal apresentada na Fig. 4.31 (b) entre os instantes de tempo $400 < tU_\infty/h < 800$.

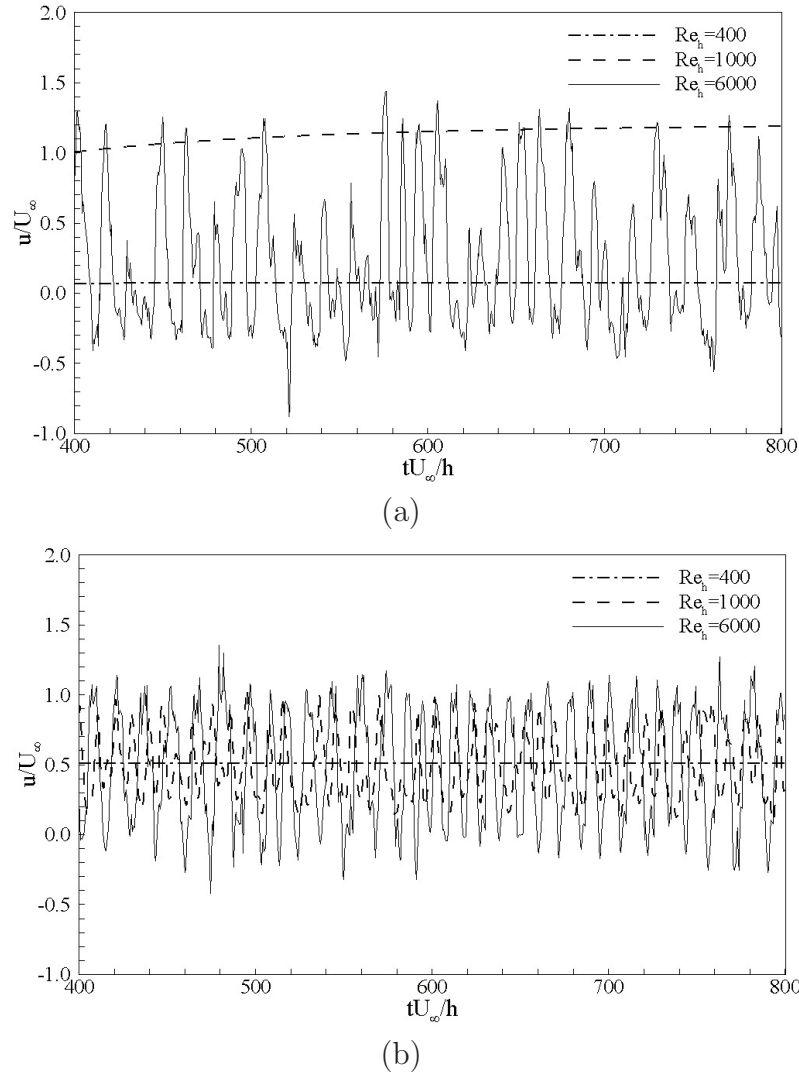


Figura 4.31: Evolução temporal da componente de velocidade horizontal na posição $(x; y) = (14, 0; 1, 5)$ (a) e $(x; y) = (40, 0; 1, 5)$ (b).

Observa-se na Fig. 4.32 que para $Re_h = 6000$ há uma maior energia nesse ponto do escoamento do que para $Re_h = 1000$. Ambos apresentam um espectro de frequências caracterizando comportamentos instáveis e caóticos dos escoamentos. Não tem, no entanto, uma natureza turbulenta, uma vez que as simulações são bidimensionais.

Na Fig. 4.33, observa-se que o máximo resíduo de massa, ou seja, o quanto a solução da equação da continuidade se afastou de zero, da simulação através de uma expansão brusca a $Re_h = 6000$, apresenta-se da ordem de 10^{-16} obtendo erros de arredondamento de máquina, para toda a simulação, mostrando que o método da projeção utilizado consegue atingir alta

acurácia para o campo de divergente da velocidade. É importante frisar que esse resultado é obtido sem a necessidade de resolver a equação de Poisson para a pressão.

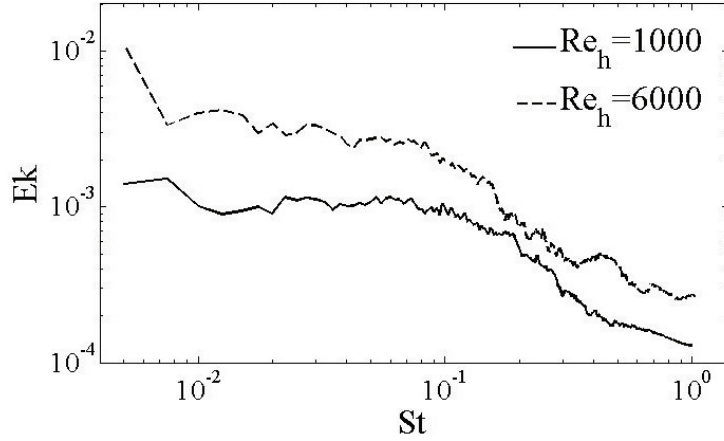


Figura 4.32: Densidade espectral de energia turbulenta obtido através da análise espectral das sondas de velocidade temporal mostradas na Fig. 4.31 (b) para $Re_h = 1000$ e $Re_h = 6000$.

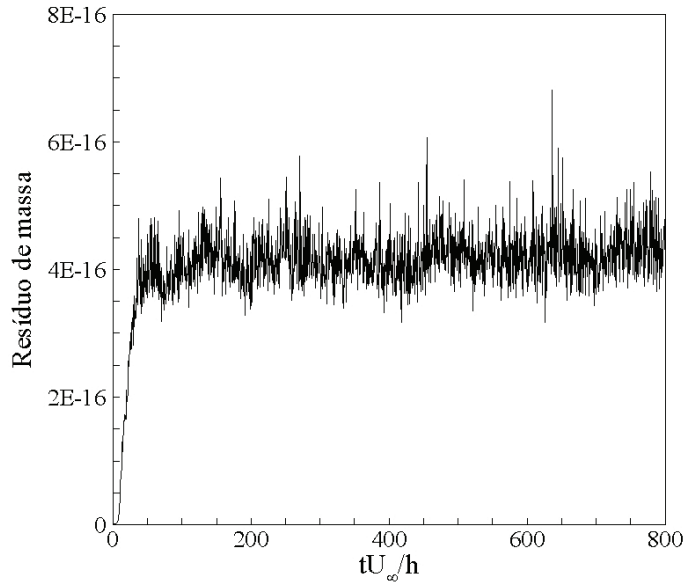


Figura 4.33: Evolução temporal do máximo resíduo de massa para a simulação através da expansão brusca a $Re_h = 6000$.

A Fig. 4.34 mostra a evolução temporal do campo da componente de vorticidade ω_z , para $Re_h = 6000$. Em $tU_\infty/h = 0$ tem-se o campo de vorticidade na condição inicial. Em $tU_\infty/h = 20,0$ o escoamento começa a se desestabilizar gerando instabilidades de Kelvin-Helmoltz à jusante da expansão brusca. De $tU_\infty/h = 40,0$ até $tU_\infty/h = 80,0$ observa-se a formação de recirculações nas paredes superior e inferior. Em $tU_\infty/h = 100,0$ o escoamento já

está completamente desenvolvido, apresentando um padrão caótico de formação e transporte de estruturas turbilhonares.

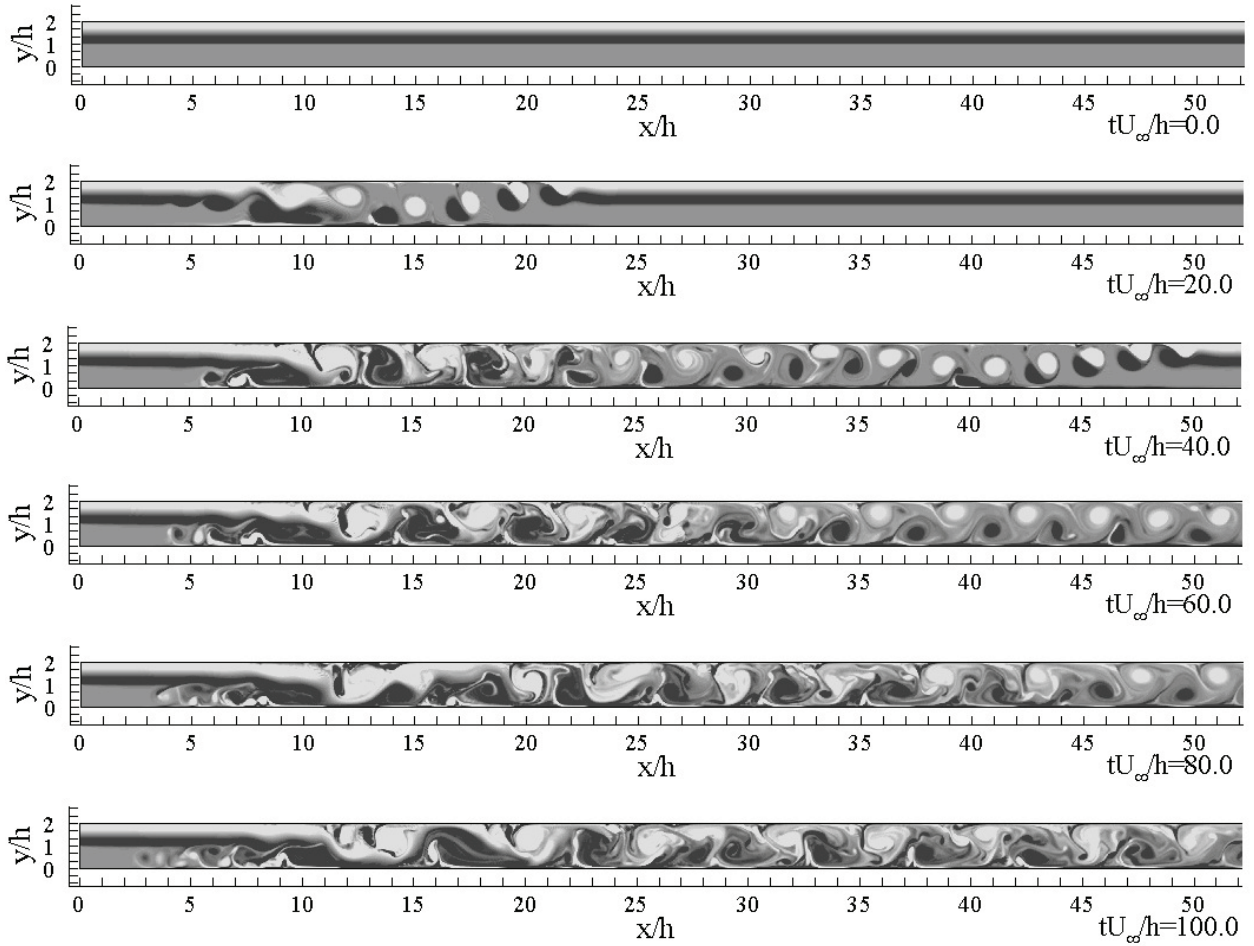


Figura 4.34: Campos instantâneos de vorticidade (ω) em diferentes tempos para $Re_h = 6000$.

A Fig. 4.35 mostra detalhes desta simulação em $tU_\infty/h = 100.0$. É possível observar a riqueza de estruturas geradas pelas interações do escoamento com as paredes, produzindo turbilhões contra-rotativos. Também, observam-se estruturas que são bombeadas para o interior do canal, colidindo com outras que viajam em direção oposta. A camada cisalhante pode ser vista após a expansão. Em média o campo de velocidade é inflexional, em consequência, perturbações são amplificadas e são geradas instabilidades de Kelvin-Helmoltz, como pode ser visualizado na Fig. 4.35 (a). Podem ser vistas também interações fortes das estruturas turbilhonares com as paredes, Fig. 4.35 (b). Efeitos interessantes, como estiramento de vórtices e bombeamento gerado por pares contra-rotativos, podem ser vistos na Fig. 4.35 (c).

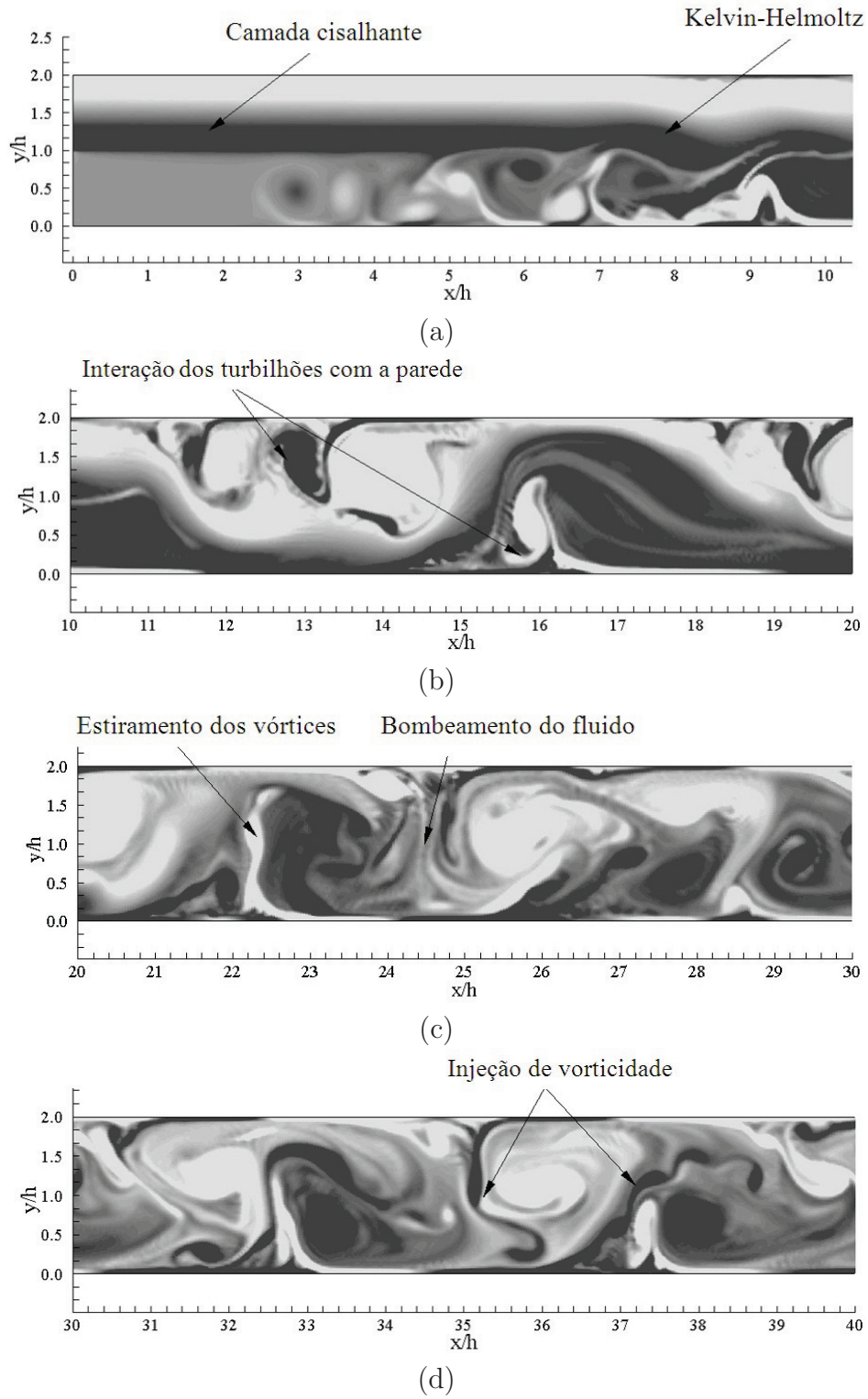


Figura 4.35: Detalhes do escoamento da Fig. 4.34 com $Re_h = 6000$ em $tU_\infty/h = 100, 0$.

Na Fig. 4.35 (d), são observados detalhes de injeção de vorticidade que se propaga para o interior do domínio. A multiplicidade de escalas apresentadas na Fig. 4.35 são detalhes tipicamente obtidos quando se utiliza métodos com alta acurácia.

4.2.2 Escoamento sobre degrau 3D

Uma vez validada a metodologia IMERSPEC no código bidimensional, ela foi estendida e implementada no código tridimensional desenvolvido no trabalho de Moreira (2007). Esse código possui as mesmas características que o código bidimensional, além de contar com a implementação de modelos de turbulência submalha e, também, de ser paralelizado, com particionamento do domínio de cálculo.

A princípio, esse código foi desenvolvido para estudar os efeitos de diferentes modelos de turbulência em jatos tridimensionais em desenvolvimento temporal, de forma que o método pseudo-espectral de Fourier pudesse ser aplicado em todas as direções. Com a implementação da metodologia IMERSPEC neste código, ele é utilizado para simular jatos turbulentos em desenvolvimento espacial.

Para maiores detalhes desta implementação vide o trabalho de Moreira (2010). No contexto do presente trabalho, o código tridimensional foi utilizado para validar a metodologia 3D, analisando escoamentos através de uma expansão brusca.

O domínio de cálculo é baseado na Fig. 4.16 e adimensionalizado pela altura, h , do degrau. Suas dimensões são: $h = 0,5 [m]$, $L_x/h = 54,86$, $L_y/h = 2,29$, $W/h = 2,0$; $L_{BZ}/h = 3,60$ e $L_{FZ}/h = 0,70$. Foram simulados dois números de Reynolds, $Re_h = 400$ e $Re_h = 1000$, a terceira dimensão tem comprimento $L_z/h = 2,29$ e $L_z/h = 9,16$, respectivamente, para cada um dos números de Reynolds simulados e a condição de periodicidade foi imposta nesta direção. O perfil na região da forçagem (L_{FZ}/h) é dado pela Eq. 4.15 e é imposto ao longo de toda a direção z . Além disso, foi imposta uma perturbação aleatória P no plano de entrada, dada pela Eq. 4.17:

$$U_{FI} = U_{\infty} + P10^{-4}, \quad (4.17)$$

onde P , é um número aleatório que varia na faixa de $-1 \leq P \leq 1$ e é dado pelo modelo de geração de números aleatórios proposto por Smirnov, Shi e Celik (2001). Esse gerador

de números aleatórios visa modelar o ruído físico que existe na entrada do túnel de vento a montante da seção de testes do experimento. As outras componentes de velocidade na impostas na região de entrada, V_{FI} e W_{FI} são dadas, respectivamente pelas Eqs. 4.18 e 4.19:

$$V_{FI} = P10^{-4}, \quad (4.18)$$

$$W_{FI} = P10^{-4}, \quad (4.19)$$

É importante observar que nestas simulações foi necessário utilizar o filtro da Eq. 3.65 nos campos de velocidade. As simulações tridimensionais mostraram-se mais sensíveis ao fenômeno de Gibbs. Para a simulação realizada a $Re_h = 400$, o domínio foi discretizado com $N_x = 768$, $N_y = 32$ e $N_z = 32$ e para a integração temporal, utilizou-se um $CFL = 0,5$.

Uma comparação com o trabalho experimental de Lee e Mateescu (1998) e com os resultados bidimensionais apresentados na Fig. 4.23 do presente trabalho, a qual tem 64×2048 nós de colocação eulerianos nas direções x e y , repectivamente e utilizou 200 iterações no processo de múltipla imposição da força é apresentada na Fig. 4.36.

Observa-se que os perfis da componente de velocidade longitudinal da simulação tridimensional concordam muito bem, tanto com os resultados bidimensionais, quanto com os resultados experimentais (LEE; MATEESCU, 1998). O fato dos resultados $2D$ e $3D$ serem similares já era esperado, uma vez que, para $Re_h = 400$, o escoamento é fisicamente bidimensional.

Da mesma forma, a posição dos pontos de recolamento inferior e superior e descolamento superior, também estão em acordo com os resultados experimentais, como mostra a Tab. 4.6.

Tabela 4.6: Comparação da posição dos pontos de recolamento e descolamento para o escoamento sobre degrau a $Re_h = 400$, a simulação bidimensional foi realizada utilizando 1024×64 nós de colocação eulerianos e 200 iterações no processo de ciclagem.

Trabalhos	x_r/h	x_s/h	x_{rs}/h
IMERSPEC 2D	12,16	10,12	20,51
IMERSPEC 3D	11,70	11,30	19,10
Experimental (LEE; MATEESCU, 1998)	12,90	10,30	20,50

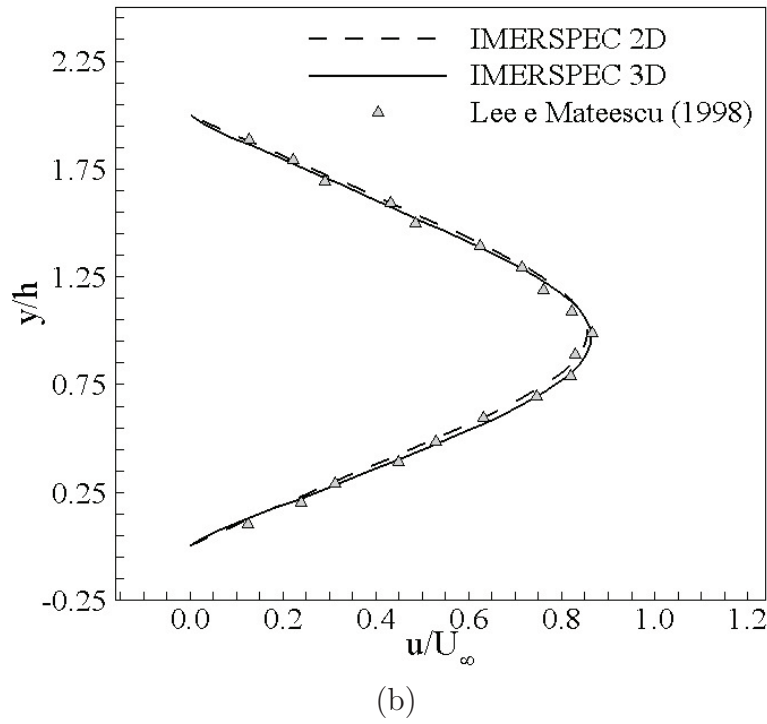
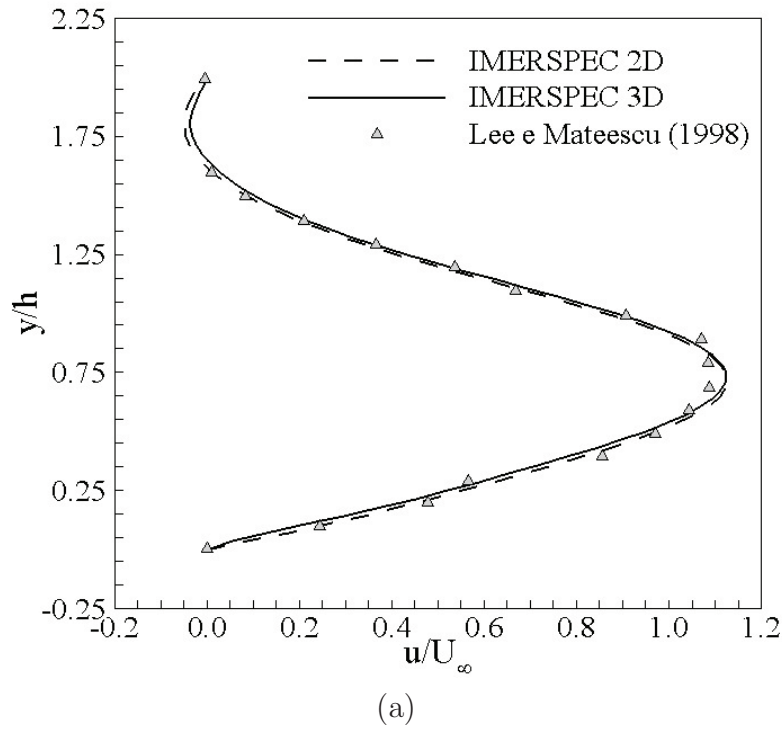


Figura 4.36: Perfis de velocidade longitudinal em $tU_\infty/h = 100,0$ nas posições (a) $(x/h; z/h) = (7, 0; 1, 0)$ e (b) $(x/h; z/h) = (15, 0; 1, 0)$ comparados com os resultados experimentais de Lee e Mateescu (1998) e com os resultados da simulação bidimensional apresentados na Fig. 4.23.

Isto era o esperado, uma vez que, a $Re_h = 400$ o escoamento é, praticamente, estável e não apresenta componente de velocidade na direção transversal, mesmo com uma perturbação imposta. O escoamento a $Re_h = 1000$ foi simulado com o mesmo número de pontos de colocação, $N_x = 768$, $N_y = 32$ e $N_z = 32$, porém, ele possui, na direção transversal ao escoamento, uma quantidade de pontos de colocação que gera espaçamentos diferentes, ou seja, $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z/2$. Na Fig. 4.37, observa-se os campos da componente vorticidade do escoamento através da expansão brusca, ω_z , visualizado em diferentes ângulos.

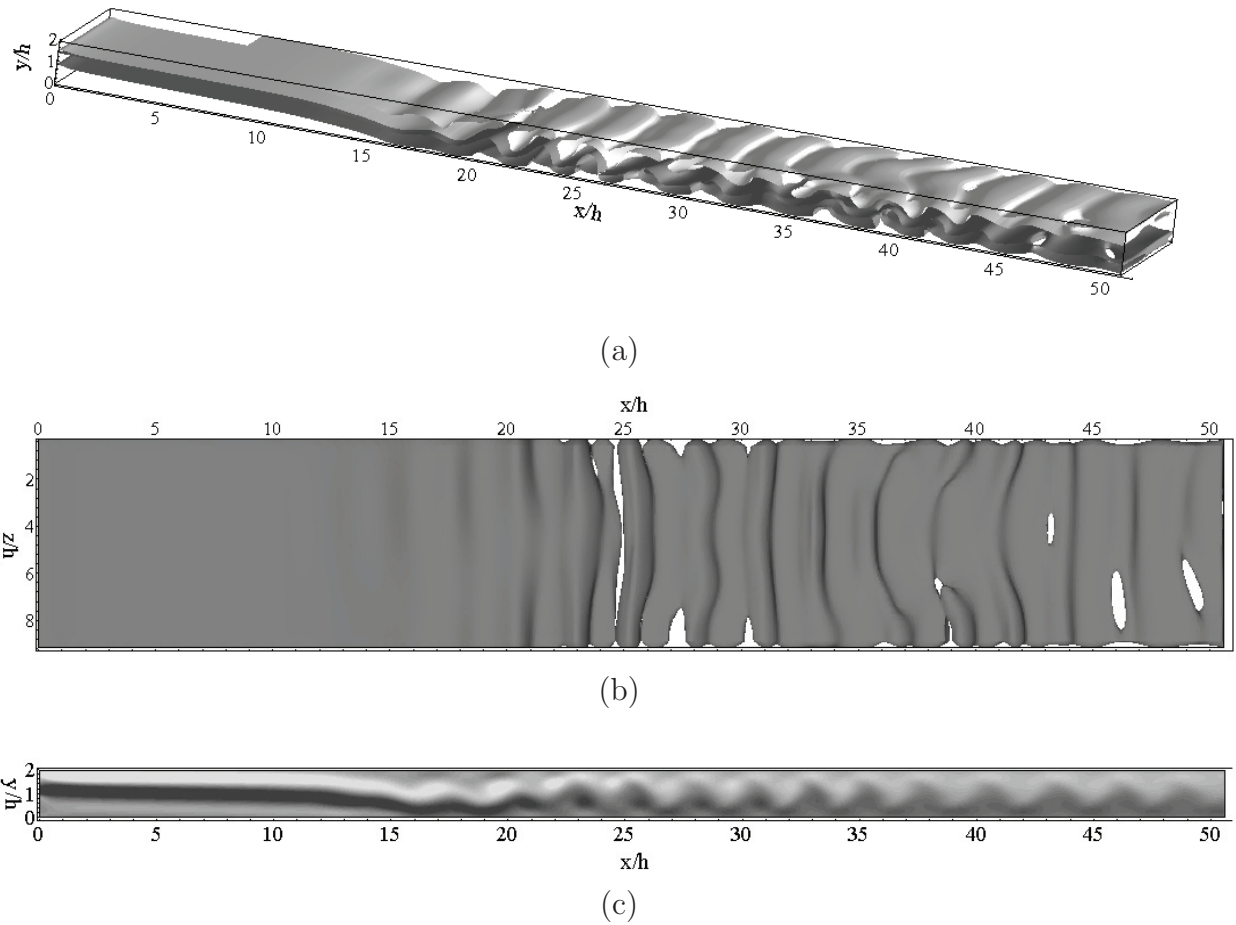


Figura 4.37: Escoamento sobre um degrau a $Re_h = 1000$ em $tU_\infty/h = 100,0$. (a) Iso-superfícies da componente de vorticidade $\omega_z = -1,0$ (escura) e $\omega_z = 1,0$ (clara); (b) Iso-superfícies da componente de vorticidade $\omega_z = -1,0$; (c) Plano da componente de vorticidade no centro do domínio $-1,0 < \omega_z < 1,0$.

O escoamento, como pode ser notado, forma uma recirculação a jusante da expansão e, após o ponto de recolamento inferior, ele passa pela fase de transição, podendo-se visualizar

na Fig. 4.37 (a) e (c) estruturas do tipo Kelvin-Helmoltz. Depois desta região, observa-se a interação das estruturas turbilhonares com as paredes superior e inferior. Na Fig. 4.37 (b), os turbilhões gerados começam a oscilar na direção z - característica típica da fase de transição à turbulência.

Na Tab. 4.7, é feita uma comparação entre as posições médias dos pontos de recolamento inferior (x_r), superior (x_s), e do ponto de descolamento superior (x_{rs}). Observa-se concordância com os dados experimentais de Lee e Mateescu (1998) na posição dos pontos x_r e x_s .

Tabela 4.7: Comparação da posição média dos pontos de recolamento e descolamento para o escoamento sobre degrau a $Re_h = 1000$.

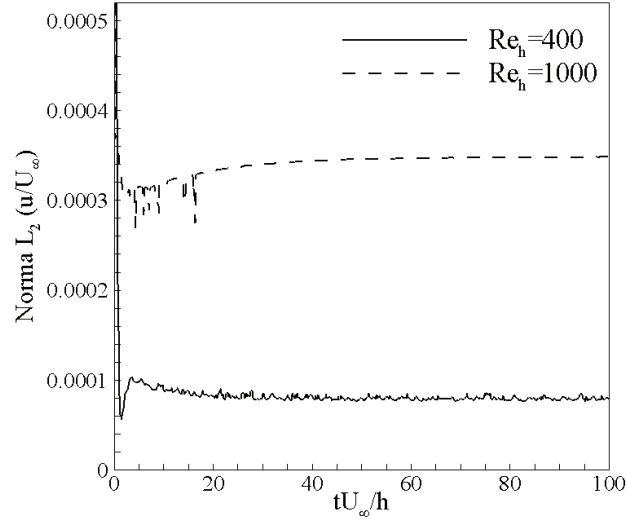
Trabalhos	x_r/h	x_s/h	x_{rs}/h
IMERSPEC 2D	18,10	15,15	36,09
IMERSPEC 3D	12,42	16,31	19,36
Experimental (LEE; MATEESCU, 1998)	12,80	9,70	18,40

Em comparação com a simulação bidimensional, utilizando uma malha com 2048×64 nós de colocação, esses pontos ficam muito defasados, mostrando que o escoamento a este número de Reynolds, já apresenta fortes características tridimensionais. Fica clara a necessidade de se simular os efeitos $3D$ presentes fisicamente.

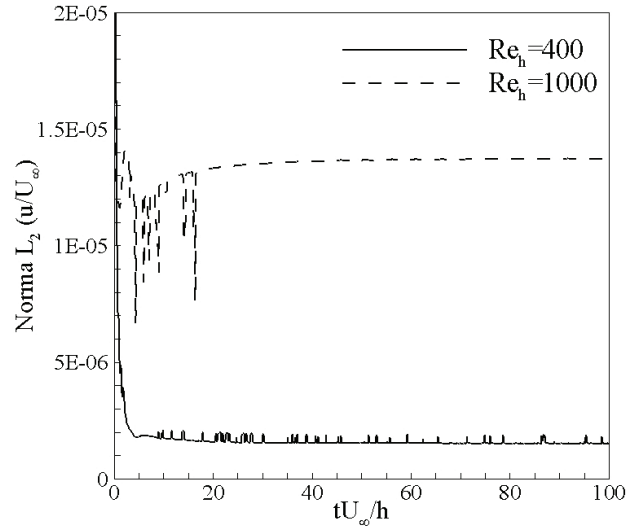
A posição média dos pontos de descolamento superior, x_s/h , mostrou-se longe das demais e isto pode ser explicado devido, principalmente, à resolução da malha utilizada e do processo de filtragem utilizado para $Re_h = 1000$. Isso fica claro, quando se compara com os resultados do escoamento a $Re_h = 400$, Tab. 4.6. Nas simulações a $Re_h = 400$ os resultados ficaram próximos do que se esperaria para este caso, ou seja, mesmo utilizando a filtragem, não se perdeu informação para reconstruir os campos de velocidade do escoamento. Já quando se aumentou o número de Reynolds, $Re_h = 1000$, obteve-se um resultado menos representativo da física, pois quando se filtra os campos de velocidade, ao mesmo tempo em que se evita o fenômeno de Gibbs, também perdem-se algumas informações do escoamento. Este tipo de problema pode ser resolvido refinando-se a malha, ou utilizando um filtro de acurácia mais elevada que o apresentado na Eq. 3.65 (CANUTO et al., 2006).

Por último, apresentam-se os erros da componente de velocidade longitudinal, através

da norma L_2 , no plano de entrada, Fig. 4.38 (a), e no plano da parede inferior, Fig. 4.38 (b).



(a)



(b)

Figura 4.38: Evolução temporal da norma L_2 da velocidade longitudinal (a) no plano de entrada ($z/h = 0$) e (b) no plano da parede inferior ($y = 0$).

Observa-se que os erros apresentam-se mais elevados, na ordem de 10^{-4} , no plano de entrada do escoamento, devido à maior influência dos turbilhões que saem do domínio e são injetados na entrada, enquanto que na parede inferior, o erro é da ordem de 10^{-5} . Os erros da parede superior não foram apresentados, pois são da mesma ordem que os da parede inferior. Os erros das demais componentes de velocidade têm valores intermediários aos apresentados.

4.3 Fronteira não coincidente

4.3.1 Escoamento sobre cilindro circular bidimensional

Os escoamentos sobre cilindros imersos é outro problema clássico da Mecânica dos Fluidos, os quais são muito usados para validar códigos e metodologias numéricas. Encontram-se referências a respeito do assunto, tanto de simulações experimentais (ZDRAVKOVICH, 1997; OKAJIMA et al., 2007), quanto numéricas (SAIKI; BIRIGEN, 1996; LIMA-E-SILVA; SILVEIRA-NETO; DAMASCENO, 2003; BONFIGLI, 2010).

Para as simulações desta seção, o domínio de cálculo (Ω_{PeD}) é ilustrado na Fig. 4.39. Da mesma forma que na seção dos escoamentos sobre degraus, o domínio é dividido em três regiões: zona de amortecimento, com comprimento $L_{BZ} = 13D$, zona de forçagem, com $L_{FZ} = 2D$ e domínio físico (Ω_{PhD}) com $L = 35D$, perfazendo o comprimento do domínio total $L_x = 60D$, onde $D = 1,0 [m]$ é o diâmetro do cilindro. Na direção vertical, o domínio tem comprimento total $L_y = 30D$.

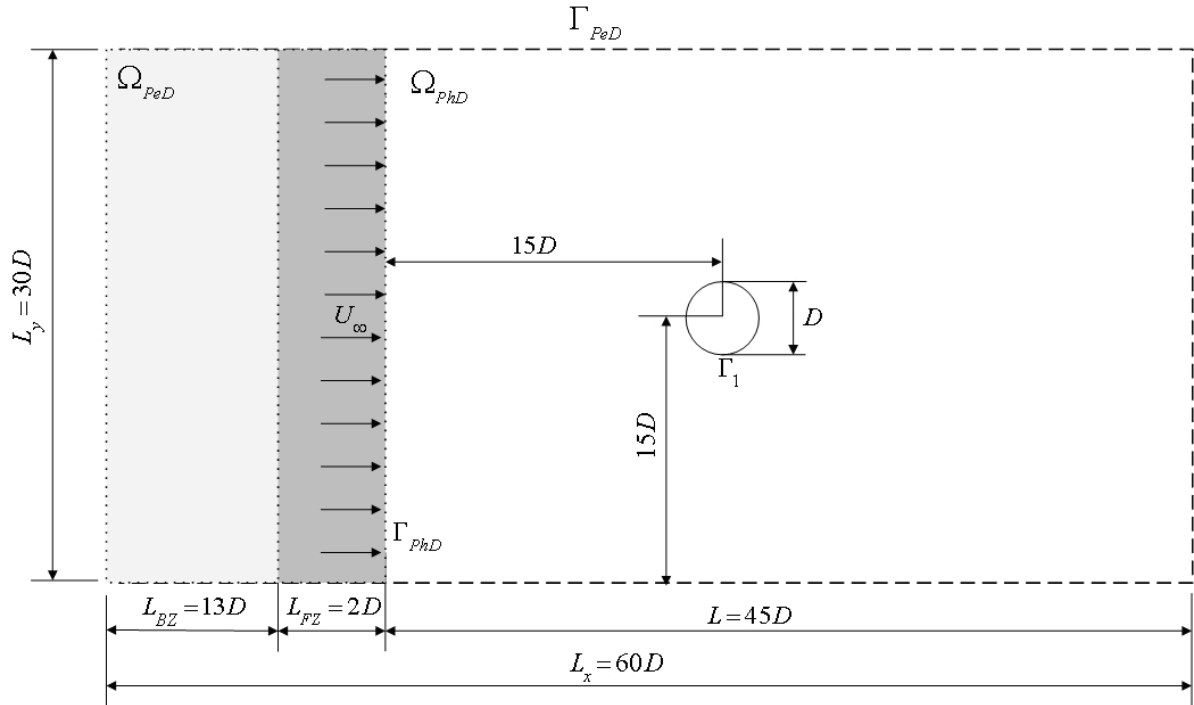


Figura 4.39: Domínio de cálculo para as simulações de escoamentos sobre cilindros.

Diferentemente das simulações sobre degrau, onde só havia condições de contorno em que os domínios lagrangiano e euleriano coincidem, nas simulações desta seção, os pontos

lagrangianos que definem o cilindro, Γ_1 da Fig. 4.39, não coincidem com os nós de colocação da discretização do domínio euleriano. Apenas os pontos do contorno Γ_{phD} são coincidentes com a malha euleriana.

A velocidade de referência é a velocidade do perfil uniforme na entrada, a qual é constante, $U_\infty = 1,0 [m/s]$, a massa específica é $\rho = 1,0 [kg/m^3]$ e a viscosidade cinemática é calculada baseada no número de Reynolds do escoamento, $Re_D = U_\infty D/\nu$. Para avançar no tempo, foi utilizado o critério de $CFL = 0,2$. Com isto, calcula-se o passo de tempo, Δt , de acordo com a Eq. 3.63 e o parâmetro de controle do processo iterativo do método da múltipla imposição da força foi definido usando a Eq. 3.31 com $\varepsilon = 10^{-3}$. Na zona de amortecimento foi utilizada a Eq. 4.12 com velocidade alvo igual ao próprio perfil de velocidade na entrada, ou seja, $Q_x^{ta} = U_\infty$, na direção do escoamento e $Q_y^{ta} = 0,0$, na direção transversal ao escoamento.

Os parâmetros analisados neste problema são o coeficiente de arrasto, Cd , Eq. 4.20, determinado pela força que o fluido exerce sobre o corpo imerso na direção do escoamento e o coeficiente de sustentação, Cl , determinado pela força que atua no cilindro na direção perpendicular ao perfil de entrada sobre a interface, dado pela Eq. 4.21. Outro parâmetro analisado é o número de Strouhal (St), determinado pela frequência de liberação de vórtices a jusante do cilindro (Eq. 4.22). Este parâmetro é importante em problemas de interação fluido-estrutura, uma vez que a frequência de liberação de vórtices pode excitar a estrutura na frequência natural da mesma. Por exemplo, em pilares de pontes e asas de aeronaves, se a frequência de desprendimento de vórtices for próxima à algumas das frequências naturais pode haver o colapso da mesma. Assim, têm-se:

$$Cd = \frac{2Fc_x}{\rho AU_\infty^2}, \quad (4.20)$$

$$Cl = \frac{2Fc_y}{\rho AU_\infty^2}, \quad (4.21)$$

$$St = \frac{frD}{U_\infty}, \quad (4.22)$$

onde Fc_x e Fc_y são as forças calculadas através do somatório, apresentado na Eq. 3.33. A é a área da interface imersa projetada sobre o plano normal ao escoamento. No caso bidimensional essa área considera a dimensão perpendicular à superfície, igual à unidade. A

frequência fr de desprendimento dos vórtices é dada pela análise do espectro de frequências do coeficiente de sustentação, Cl .

4.3.1.1 Escoamento sobre cilindro a $Re_D = 40$

Na Fig. 4.40, apresenta-se o campo de pressão, para a simulação de um escoamento sobre o cilindro a $Re_D = 40$, com o domínio de cálculo discretizado no comprimento L_x (Fig. 4.39) com $N_x = 1024$ nós de colocação e no comprimento L_y , com $N_y = 512$ nós de colocação.

Observa-se na Fig. 4.40 a zona de amortecimento e a zona de forçagem destacadas conforme a Fig. 4.39. Para $Re_D = 40$, o escoamento é laminar e estável e duas recirculações são formadas a jusante do cilindro. Essas recirculações são apresentadas em detalhe na Fig. 4.41, onde visualiza-se as linhas de corrente contornando o cilindro imerso e, devido à região de gradiente adverso de pressão a jusante do cilindro, as duas camadas limite descolam-se e formam-se as duas recirculações. Observa-se que as linhas de corrente acompanham precisamente a superfície do cilindro, mostrando que a condição de contorno de não deslizamento está sendo bem modelada. Esse é um resultado da modelagem “múltipla imposição da força” para o cálculo iterativo do campo de força lagrangiano.

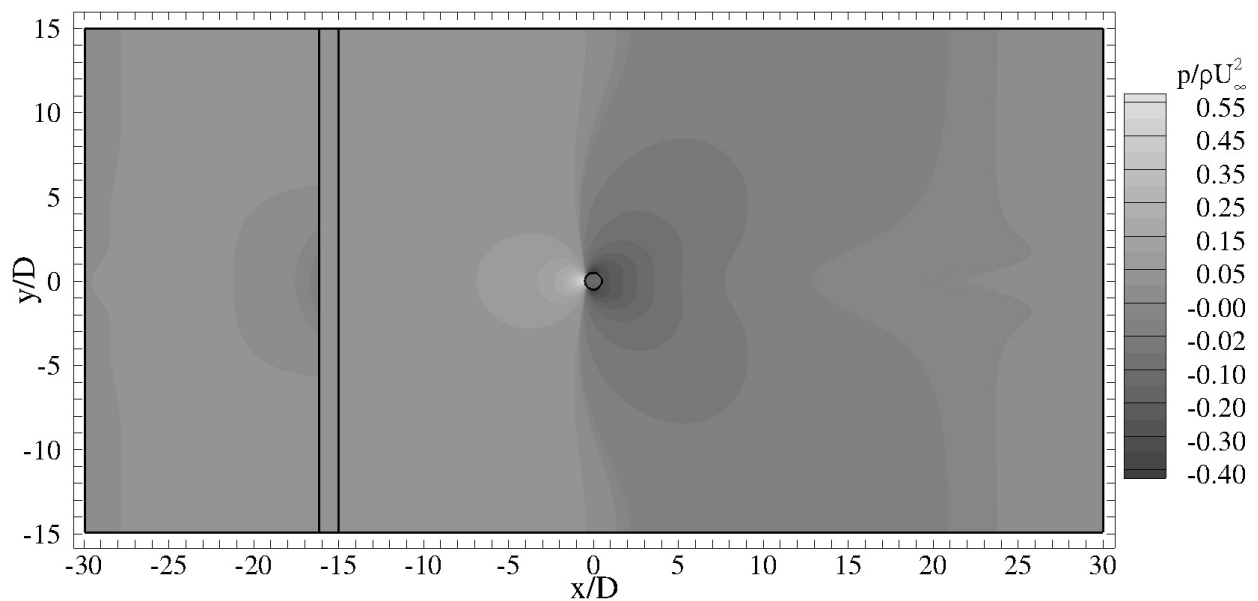


Figura 4.40: Campo de pressão do escoamento sobre cilindro a $Re_D = 40$ em $tU_\infty/D = 500$.

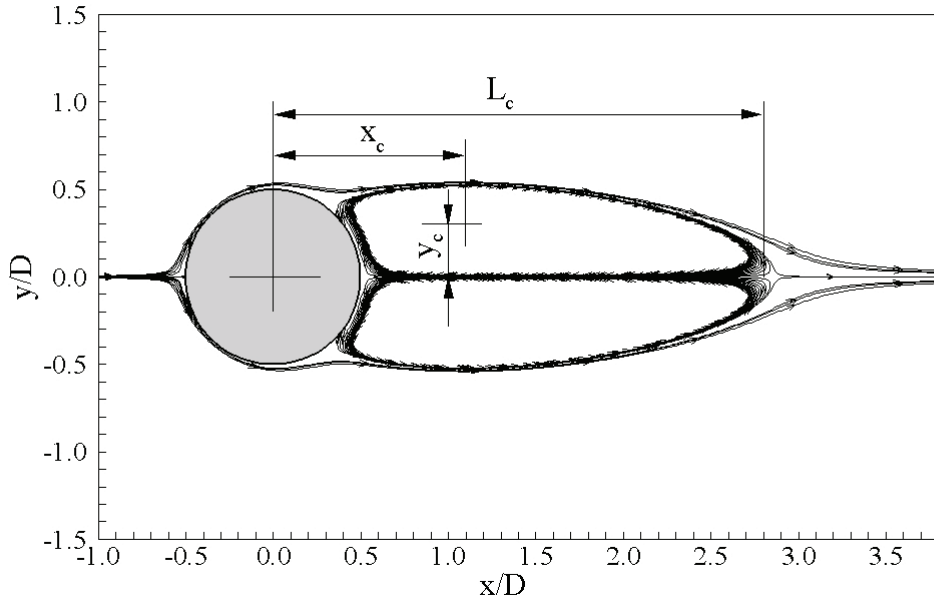


Figura 4.41: Linhas de corrente sobre um cilindro imerso em um escoamento a $Re_D = 40$ em $tU_\infty/D = 500$.

Na Fig. 4.42, são mostrados os vetores velocidade na região do corpo imerso. É possível observar o escoamento complementar, recirculações no interior do cilindro, gerado pelo campo de força, $f_i(\vec{x}, t)$. Estas recirculações internas, diferentemente das recirculações geradas nas simulações da Fig. 4.26, auxiliam na modelagem virtual da fronteira imersa.

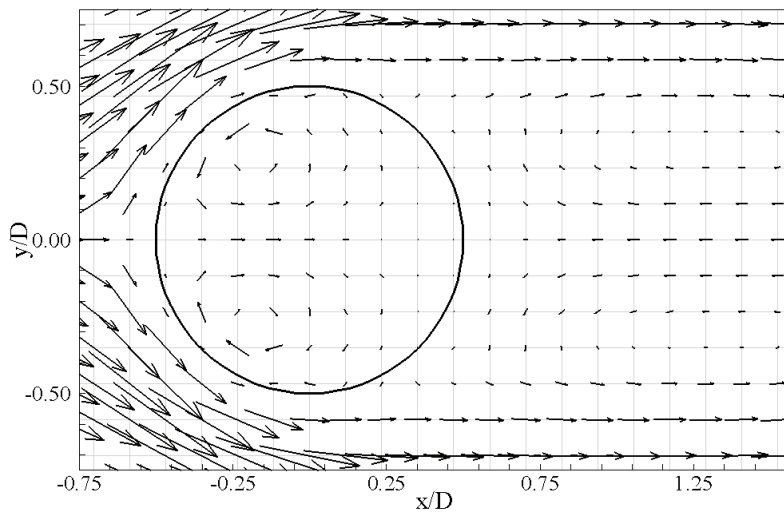


Figura 4.42: Vetores velocidade sobre um cilindro imerso em um escoamento a $Re_D = 40$ em $tU_\infty/D = 500$.

A Tab. 4.8 mostra os resultados encontrados nos trabalhos experimentais de Tritton (1959), Coutanceau (1977) e nos trabalhos numéricos de Lima-E-Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003), os quais utilizaram o modelo físico virtual para representar o cilindro e diferenças finitas de segunda ordem de convergência para modelar as equações de Navier-Stokes. Xu (2008) e Bonfigli (2010) utilizaram o método da interface imersa, onde as condições de contorno do corpo imerso são modeladas através de funções analíticas que representam saltos e utilizaram diferenças finitas de segunda e quarta ordens de convergência espacial, respectivamente. Compara-se o coeficiente de arrasto, Cd , dado pela Eq. 4.20, a posição do centro das recirculações $(x_c; y_c)$ e a posição do ponto de estagnação a jusante do cilindro, L_c , (Fig. 4.41).

Tabela 4.8: Comparação entre diferentes trabalhos da posição do centro das recirculações, $(x_c; y_c)$, posição do ponto de estagnação a jusante do cilindro, L_c e o coeficiente de arrasto para o escoamento sobre um cilindro a $Re_D = 40$.

Trabalhos	x_c	y_c	L_c	Cd
Tritton (1959)	-	-	-	1,59
Coutanceau (1977)	1,26	0,29	2,63	-
Lima-E-Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003)	-	-	3,00	1,54
Xu (2008)	1,22	0,30	2,74	1,66
Bonfigli (2010)	1,21	0,29	2,75	1,57
Presente trabalho	1,26	0,31	2,87	1,58

Os resultados encontrados no presente trabalho, na Tab. 4.8, apresentam-se em concordância com os demais, tanto para a posição do centro das recirculações, quanto para posição do ponto de estagnação e, também, para o coeficiente de arrasto.

Para verificar a ordem de convergência espacial da metodologia, fez-se uma análise de refinamento de malha, ou seja, o domínio da Fig. 4.39 foi discretizado com diferentes números de pontos de colocação. Estes resultados foram comparados com o trabalho de Bonfigli (2010) e estão apresentados na Tab. 4.9.

Analisando a Tab. 4.9, observa-se que, de maneira geral, todas as quantidades analisadas estão convergindo com o refinamento da malha para os resultados de referência. Observa-se uma boa concordância com Bonfigli (2010), o qual utilizou uma malha com espaçamento de $\Delta x = \Delta y = 0,02 [m]$. A simulação mais refinada do presente trabalho, com

2048×1024 nós de colocação, o espaçamento é de $\Delta x = \Delta y = 0,03 [m]$.

Tabela 4.9: Refinamento de malha, comparação da posição do centro das recirculações, $(x_c; y_c)$, da posição do ponto de estagnação, L_c , e do coeficiente de arrasto para o escoamento sobre um cilindro a $Re_D = 40$.

$N_x \times N_y$	x_c	y_c	L_c	Cd
512×256	1,29	0,32	3,06	1,62
1024×512	1,26	0,31	2,87	1,58
2048×1024	1,23	0,29	2,78	1,57
Bonfigli (2010)	1,21	0,29	2,75	1,57

A Fig. 4.43 mostra os erros sobre a interface imersa, através da norma L_2 , das componentes de velocidade horizontal e vertical, os quais variam entre 10^{-4} e 10^{-5} .

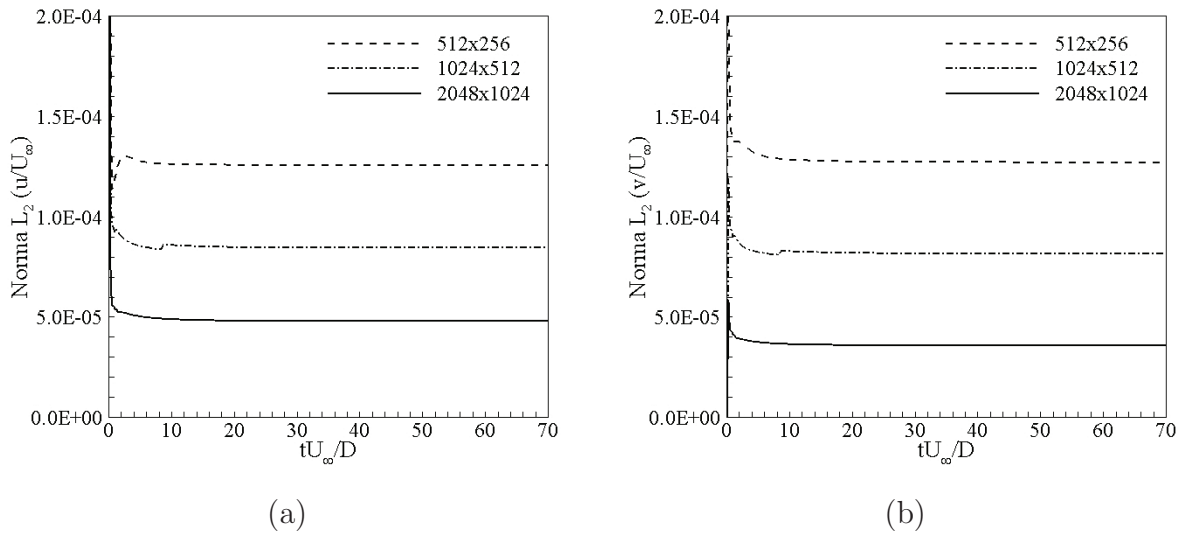
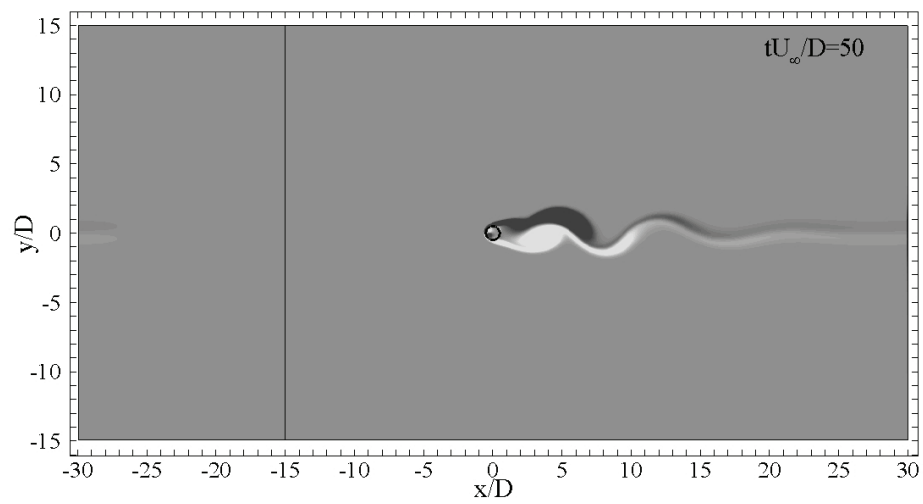
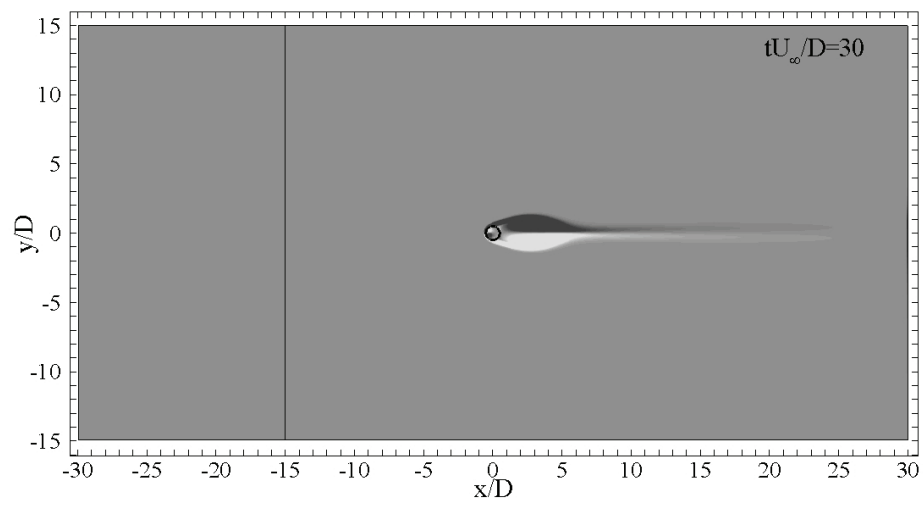
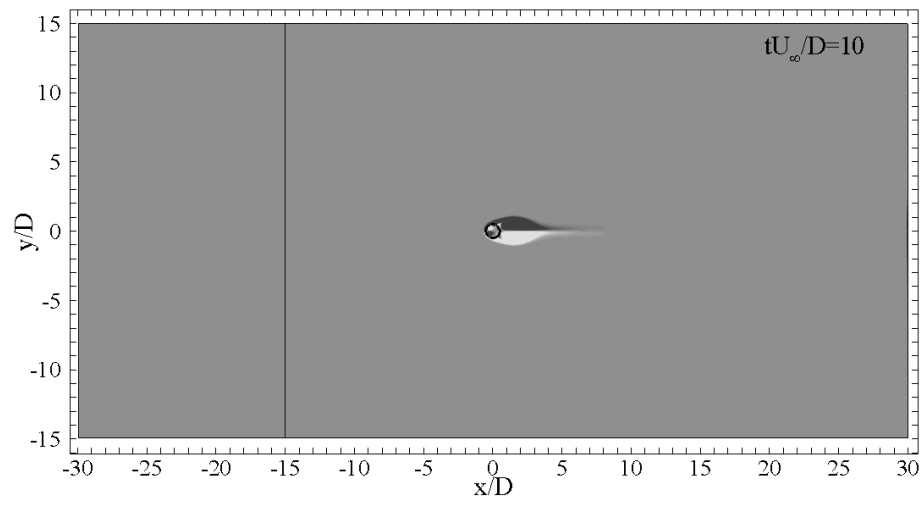


Figura 4.43: Evolução temporal da norma L_2 das componentes de velocidade (a) horizontal (b) vertical, sobre o cilindro imerso.

4.3.1.2 Escoamento sobre cilindro com diferentes números de Reynolds

Nesta seção foi utilizado um domínio de cálculo discretizado no comprimento L_x (Fig. 4.39) com $N_x = 1024$ nós de colocação e no comprimento L_y , com $N_y = 512$ nós de colocação, $CFL = 0,2$ e variou-se o número de Reynolds do escoamento a partir de $Re_D = 100$ até $Re_D = 300$. Na Fig. 4.44 a evolução temporal dos campos instantâneos de vorticidade (ω) é apresentada para $Re_D = 300$.



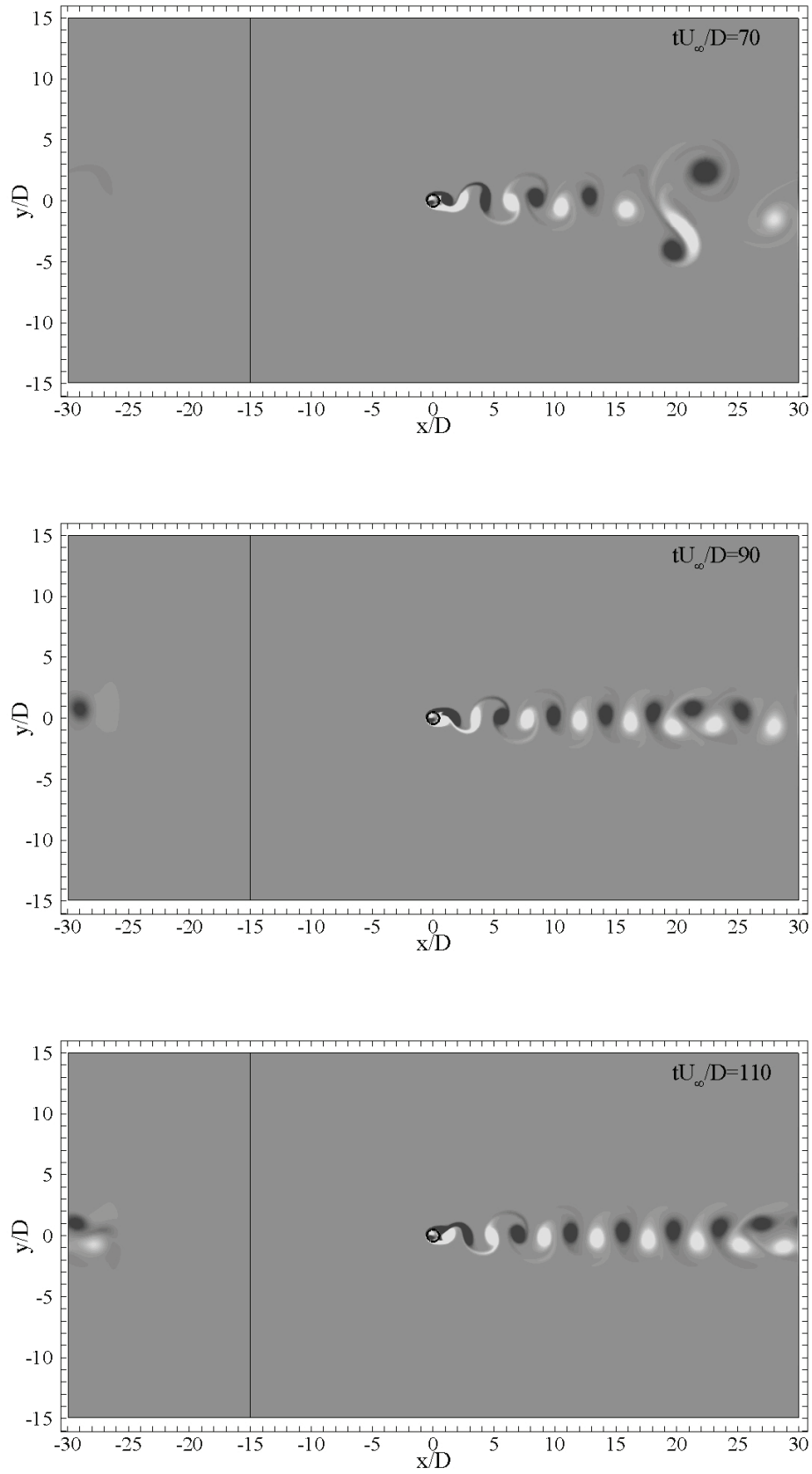


Figura 4.44: Campos instantâneos da componente de vorticidade perpendicular ao plano xy , $-1, 0 \leq \omega_z \leq 1, 0$, em um escoamento sobre um cilindro circular, a $Re_D = 300$.

Observa-se na Fig. 4.44, em $tU_\infty/D = 10$ até $tU_\infty/D = 30$ a formação de duas recirculações a jusante do cilindro. Após isso em $tU_\infty/D = 50$ as primeiras instabilidades se manifestam, fazendo oscilar as recirculações. Em $tU_\infty/D = 70$ as primeiras recirculações são transportadas e começa-se a formação da esteira de von Karman.

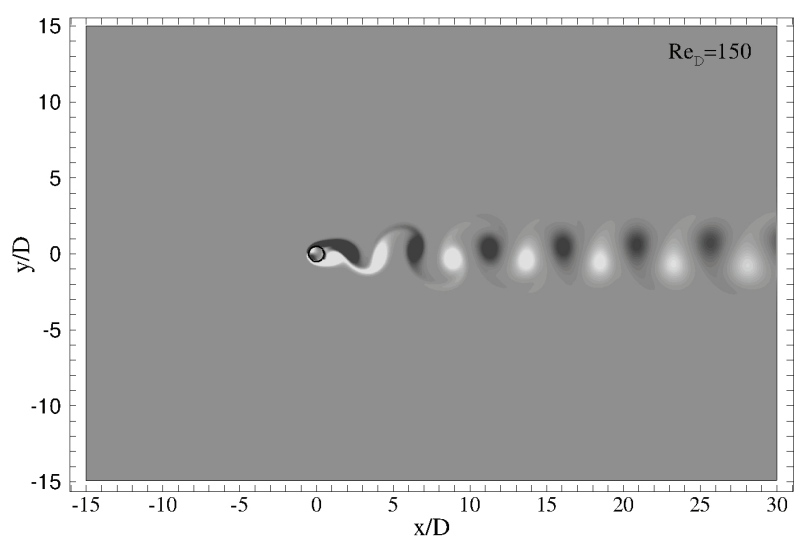
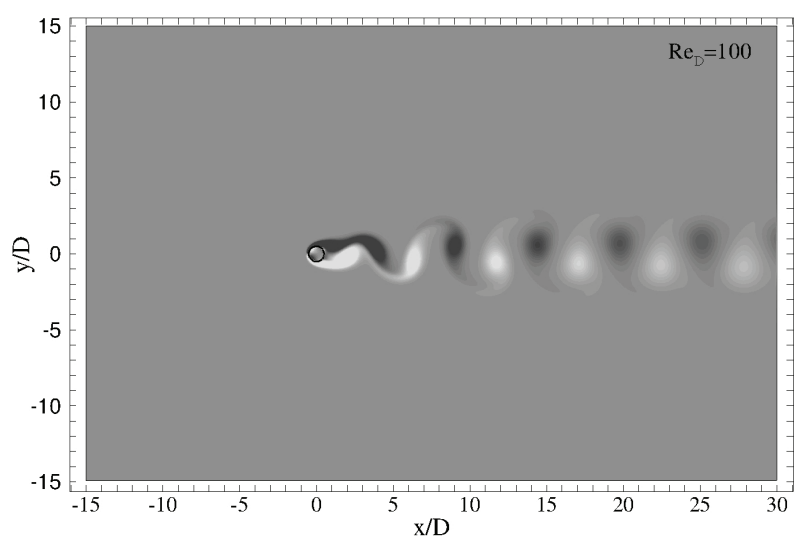
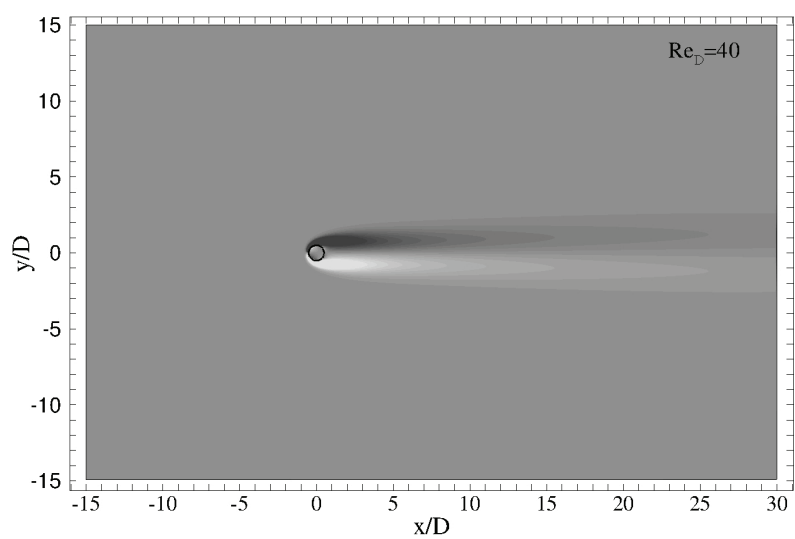
É interessante observar a influência da zona de amortecimento a partir de $tU_\infty/D = 70$. Observa-se que os turbilhões gerados a jusante do cilindro são transportados para fora do domínio de cálculo e, devido às condições de periodicidade, são reinjetados na face da entrada do domínio. Quando eles atingem a zona de amortecimento são dissipados, de forma que influenciem o mínimo possível na região onde é imposta a condição de contorno da entrada.

Na Fig. 4.45, são mostrados os campos instantâneos da componente ω_z de vorticidade, apenas no domínio de interesse (Ω_{PhD}), para os diferentes números de Reynolds simulados. Observa-se na Fig. 4.45, que o escoamento a $Re_D = 40$ é estável, enquanto os escoamentos das demais simulações apresentam instabilidades e formam a esteira de von Kármán.

Com o aumento do número de Reynolds, começa a aumentar a velocidade de liberação dos turbilhões a jusante do cilindro. Esta característica é dada, quantitativamente, pelo número de Strouhal, Eq. 4.22. O qual é determinado a partir das curvas apresentadas na Fig. 4.48. Essas curvas representam a evolução temporal do coeficiente de sustentação, Cl , dado pela Eq. 4.21, o qual está diretamente ligado ao desprendimento do vórtices a jusante do cilindro.

Então aplica-se a FFT sobre cada uma das curvas, entre os instantes $200 \leq tU_\infty/h \leq 350$, desta forma obtém-se o espectro de frequências, o qual é apresentado na curva da Fig. 4.46.

A Tab. 4.10 mostra uma comparação do número de Strouhal com outros autores. É possível observar que os resultados do presente trabalho estão dentro da faixa apresentada na literatura. Para representar a geometria do cilindro bidimensional Lima-E-Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003) utilizou o modelo físico virtual, Xu (2008) utiliza o método da interface imersa. Lai e Peskin (2000) utiliza a Eq. 2.1, em que o cilindro é representado através de fibras elásticas e Le, Khoo e Peraire (2006) calcula a força lagrangiana implicitamente. As equações de Navier-Stokes utilizadas nestes trabalhos são discretizadas através de diferenças finitas de segunda ordem de convergência.



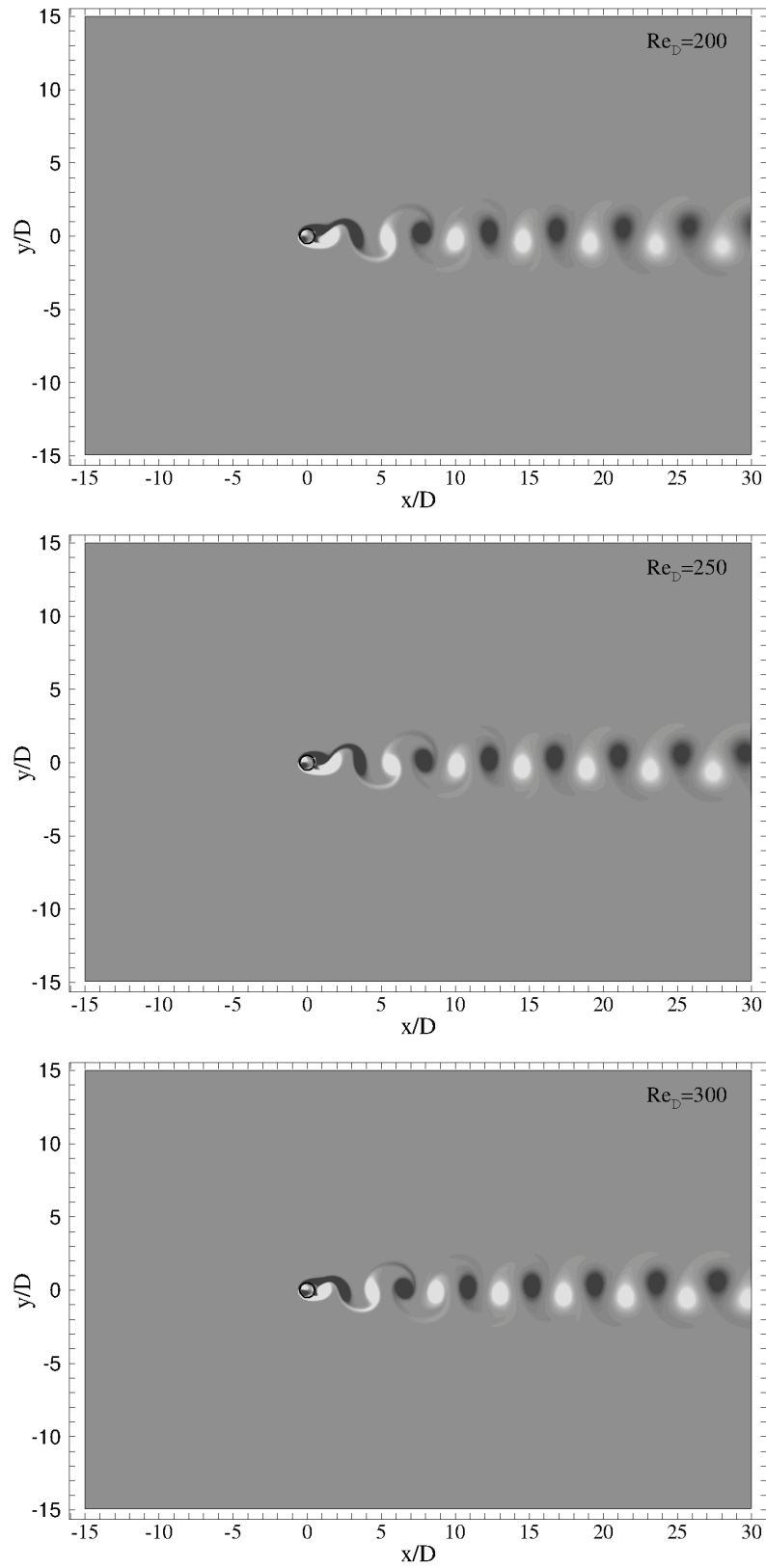


Figura 4.45: Campo da componente de vorticidade, ω_z , $-1, 0 \leq \omega_z \leq 1, 0$, em um escoamento sobre um cilindro circular com diferentes números de Reynolds em $tU_\infty/D = 300$.

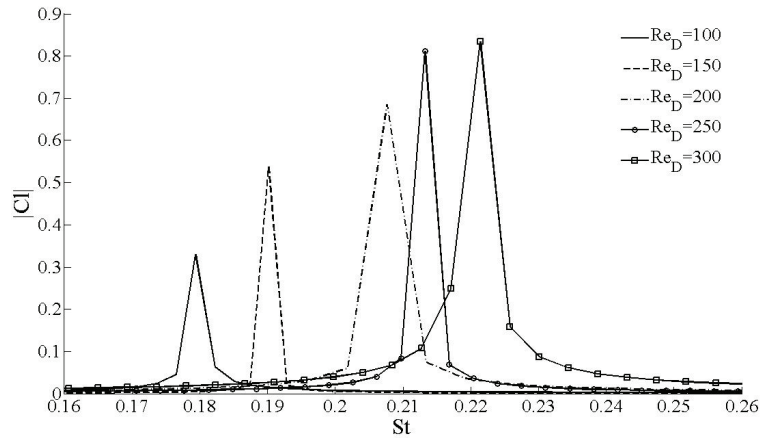


Figura 4.46: Determinação do número de Strouhal (frequência de formação de vórtices).

Na Fig. 4.47 é mostrada a evolução temporal do coeficiente de arrasto (Eq. 4.20) para as simulações com $Re_D = 100$ e $Re_D = 300$. Observa-se, que em um primeiro instante, existe uma queda de Cd , pois há a formação das recirculações. Após esta etapa, essas recirculações são liberadas e existe, também, um comportamento oscilatório deste coeficiente. O mesmo comportamento oscilatório é observado na evolução temporal do coeficiente de sustentação, Fig. 4.48.

Tabela 4.10: Número de Strouhal dos escoamentos sobre cilindro circular para diferentes números de Reynolds.

Re_D	100	150	200	250	300
Lima-E-Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003)	0,160	0,175	-	-	0,190
Lai e Peskin (2000)	0,165	0,184	-	-	-
Xu (2008)	0,171	-	0,202	-	-
Le, Khoo e Peraire (2006)	0,160	-	0,192	-	-
presente trabalho	0,179	0,190	0,208	0,213	0,221

Quando se compara as Fig. 4.47 (a) com (b), observa-se que a liberação dos turbilhões a $Re_D = 300$, começa antes que a $Re_D = 100$, como esperado. Na Tab. 4.11 é mostrada uma comparação com diferentes autores do coeficiente de arrasto médio, obtido através da média da curva da Fig. 4.47 a partir de $tU_\infty/D = 200$. Uma boa concordância com os demais autores é observada na Tab. 4.11. Na comparação apresentada para a simulação com $Re_D = 300$ se observa uma diferença maior entre os resultados do presente trabalho e de Lima-E-Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003). Essa diferença se deve ao fato que Lima-

E-Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003) utilizaram diferenças finitas de segunda ordem na discretização das equações de Navier-Stokes enquanto que o presente trabalho usa o método pseudo-espectral.

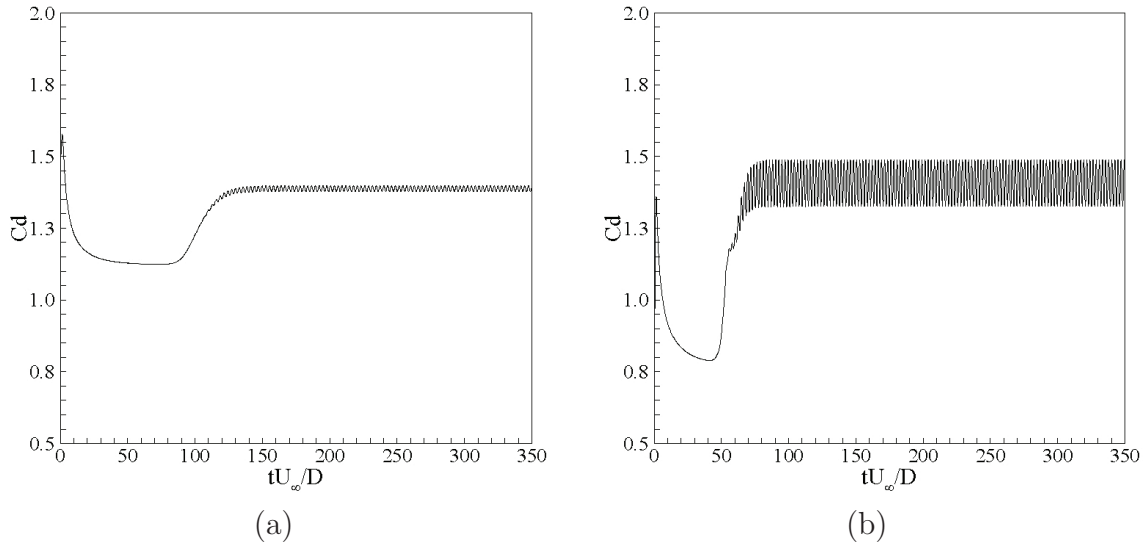


Figura 4.47: Evolução temporal do coeficiente de arrasto das simulações com (a) $Re_D = 100$ e (b) $Re_D = 300$.

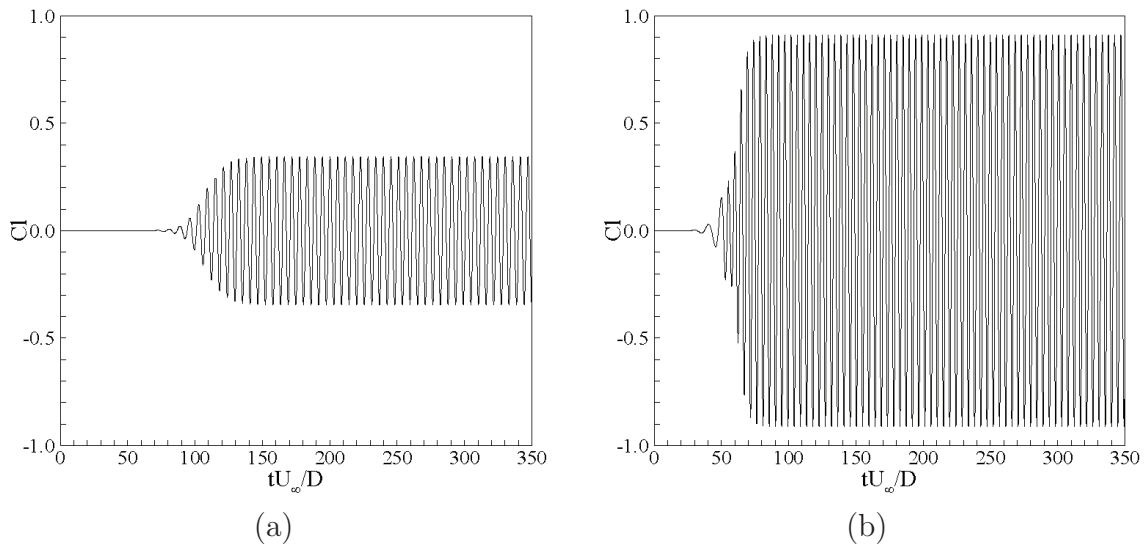


Figura 4.48: Evolução temporal do coeficiente de sustentação das simulações com (a) $Re_D = 100$ e (b) $Re_D = 300$.

Na Tab. 4.12, apresenta-se a média quadrática da flutuação (RMS) da curva da Fig. 4.48 calculada a partir de $tU_\infty/D = 200$. Este valor é comparado com os demais autores mostrando-se dentro da faixa esperada. Porém para $Re_D = 300$, o valor de $\overline{C_l'}$ é mais alto

Tabela 4.11: Coeficiente de arrasto médio dos escoamentos sobre cilindro circular para diferentes números de Reynolds.

Re_D	100	150	200	250	300
Lima-E-Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003)	1,39	1,37	-	-	1,22
Lai e Peskin (2000)	1,44	1,44	-	-	-
Xu e Wang (2006)	1,42	-	1,42	-	-
Le, Khoo e Peraire (2006)	1,39	-	1,38	-	-
presente trabalho	1.39	1.37	1.39	1.40	1.41

que o apresentado por Lima-E-Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003).

Tabela 4.12: Flutuação média do coeficiente de sustentação dos escoamentos sobre cilindro circular para diferentes números de Reynolds.

Re_D	100	150	200	250	300
Lima-E-Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003)	0,20	0,25	-	-	0,27
Lai e Peskin (2000)	0,33	0,58	-	-	-
Xu e Wang (2006)	0,34	-	0,66	-	-
Le, Khoo e Peraire (2006)	0,34	-	0,68	-	-
presente trabalho	0,33	0,54	0,69	0,81	0,84

4.3.2 Interação fluido-estrutura: queda livre de um corpo rígido

Problemas que envolvem interação fluido-estrutura (FSI) são um desafio para pesquisadores de CFD, pois é preciso um modelo para o fluido, outro modelo para a estrutura e um terceiro modelo para a interação entre o fluido e a estrutura. Normalmente, procedimentos de remalhagem, refinamento localizado, abordagens lagrangianas são utilizados. Dentre as metodologias existentes, a fronteira imersa foi desenvolvida, especificamente, para simular este tipo de problema (PESKIN, 1972). Ela evita a necessidade de remalhagem e facilita a obtenção das forças fluido-dinâmicas que agem sobre a estrutura.

A fim de demonstrar a aplicabilidade da metodologia IMERSPEC em problema deste tipo, será apresentada a queda livre de um corpo rígido, com forma circular, em um meio fluido. Este fenômeno também pode ser classificado como um escoamento bifásico, onde uma das fases é um sólido e outra, é um líquido. Compreendê-lo é de grande interesse para as indústrias químicas, farmacêuticas, alimentícias, além de englobar fenômenos geofísicos importantes (WAN; TUREK, 2007). No presente trabalho, não se objetiva explorar o problema

fisicamente e, sim, utilizá-lo para verificar as potencialidades da metodologia proposta. O domínio de cálculo é mostrado na Fig. 4.49.

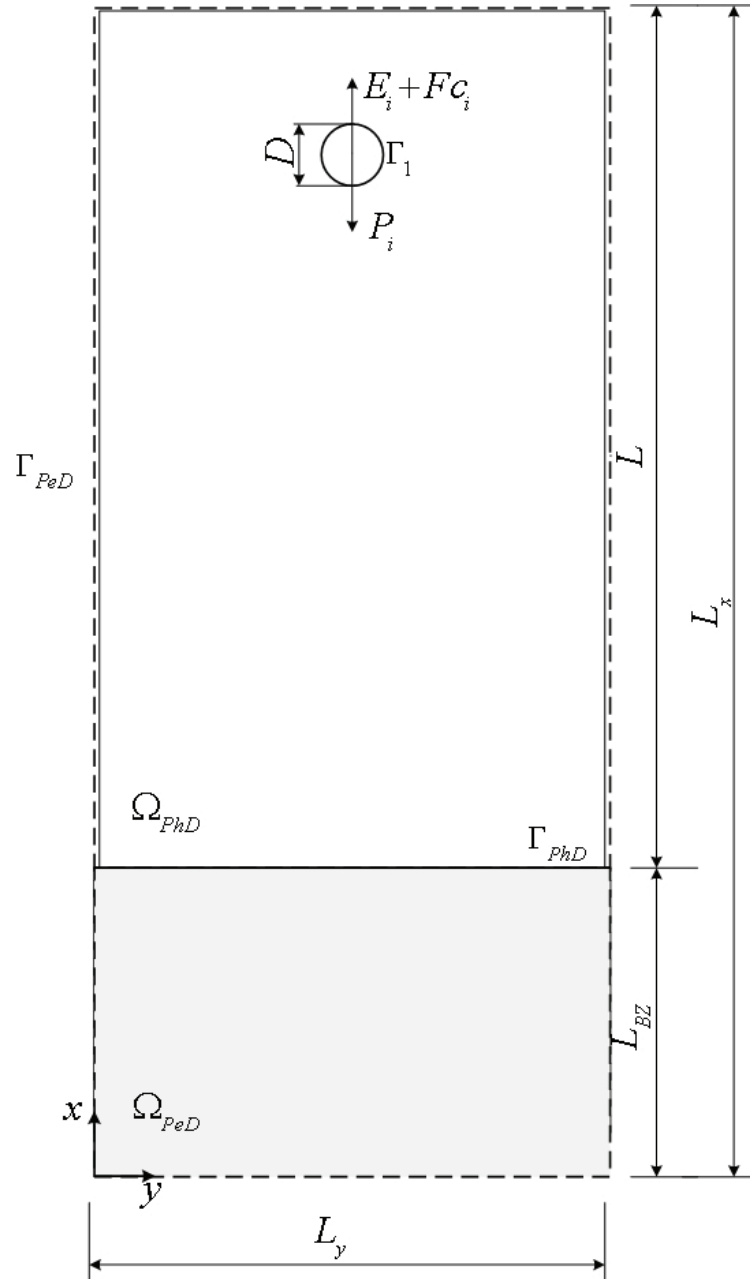


Figura 4.49: Esboço do domínio de cálculo utilizado nas simulações da queda de um corpo rígido em um meio fluido.

Na Fig. 4.49 são impostas condições de contorno periódicas (Γ_{PeD} - linhas tracejadas) em todas as faces do domínio Ω_{PeD} . O domínio físico é dado por Ω_{PhD} e é definido na região delimitada pela interface Γ_{PhD} . Observa-se que o usuário da metodologia tem liberdade de definir os domínios Ω_{PhD} e Ω_{PeD} , com suas respectivas fronteiras, Γ_{PhD} e Γ_{PeD} , como

melhor lhe parecer. Na presente seção, o domínio físico (Ω_{PhD}) tem fronteiras periódicas nas laterais e uma fronteira periódica superior e uma parede que modela o fundo de um reservatório. Nenhuma dificuldade ocorrerá para se modelar paredes laterais, de forma a se ter um reservatório com uma parede no fundo e duas laterais. Isto é apenas uma questão de montagem do domínio de interesse. Cabe ainda observar que o domínio físico não necessita ser cartesiano. O domínio periódico, no entanto, é sempre cartesiano.

O domínio lagrangiano, Γ_1 , inserido em Ω_{PhD} , representa o corpo rígido, a qual é liberada a partir do repouso, e começa a se movimentar, no sentido negativo da direção x , até atingir o fundo do recipiente, Γ_{PhD} . Essa parede será modelada com um campo de força e desacelerará o movimento do corpo em queda livre.

Para trabalhar com interação fluido-estrutura, foi adotada a abordagem particionada (CAMPREGHER, 2005; BORGES, 2010), na qual, no mesmo passo de tempo, resolvem-se primeiro as equações do fluido e depois as equações de movimento da estrutura. A dinâmica de movimentação do fluido é modelada pelas Eqs. 3.37 e 3.57, as quais são resolvidas usando a metodologia IMERSPEC - desenvolvida no presente trabalho.

As equações que regem o movimento do corpo rígido são as equações de Newton-Euler aplicadas sobre um corpo rígido, Eqs. 4.23 e 4.24. As forças externas consideradas que agem sobre o corpo são: o peso, P_i ; o empuxo, E_i ; e as componentes de força fluido-dinâmicas, Fc_i dadas pela Eq. 3.33. A representação esquemática dessas forças pode ser visualizada na Fig. 4.49. Poder-se-ia simular o movimento e a interação entre um número finito de corpos, como em Wan e Turek (2007) e Wang, Fan e Luo (2008). Como o problema é bidimensional, aparece uma componente de torque, T_i , na direção i . Esse torque é perpendicular ao plano xy da Fig. 4.49. A força de choque que aparece entre o corpo e a interface inferior é denotada F'_i . Considerando a terceira dimensão do corpo unitária, têm-se:

$$E_i^q + Fc_i^q - P_i^q + F'_i{}^q = M^q \frac{dUp_i^q}{dt}, \quad (4.23)$$

$$T_i^q = I^q \frac{d\omega_i^q}{dt}, \quad (4.24)$$

onde M^q é a massa do corpo q , dada por $M^q = \rho_p^q \pi R^{q2}$, em $[kg]$, I^q é o momento de inércia de massa em relação ao eixo z , dado por $I = (1/2)M^q R^{q2}$ em $[kgm^2]$, ρ_p^q é a massa específica da corpo q , em $[kg/m^3]$, R^q é o raio em $[m]$, Up_i^q é a velocidade do centro de massa, em

$[m/s]$, ω_i^q é a velocidade de rotação em $[rad/s]$. As forças de empuxo (E_i^q) e o peso (P_i^q) são dados pelas Eqs. 4.25 e 4.26:

$$E_i^p = \forall^q \rho g_i, \quad (4.25)$$

$$P_i^q = \forall^q \rho_p^q g_i, \quad (4.26)$$

onde $\forall^q$ é o volume do corpo, ρ é a massa específica do fluido e g_i é a aceleração da gravidade. No presente trabalho foi adotado $g_x = -9,81 [m/s^2]$ e $g_y = 0,0 [m/s^2]$.

As forças hidrodinâmicas resultantes sobre o centro de massa do corpo rígido são calculadas pelo somatório das forças que agem sobre cada ponto lagrangiano, Fc dada na Eq. 3.33, multiplicada pela massa específica do fluido. O torque, T_i^q , é dado pelo somatório do produto vetorial da distância do centro de massa do corpo, até a posição de aplicação da força em um ponto lagrangiano, pelas componentes de força aplicadas neste mesmo ponto lagrangiano, isto é, $\vec{T} = \sum \vec{r} \times \rho \vec{F}c$. Estes detalhes ficam melhor compreendido visualizando a Fig. 4.50.

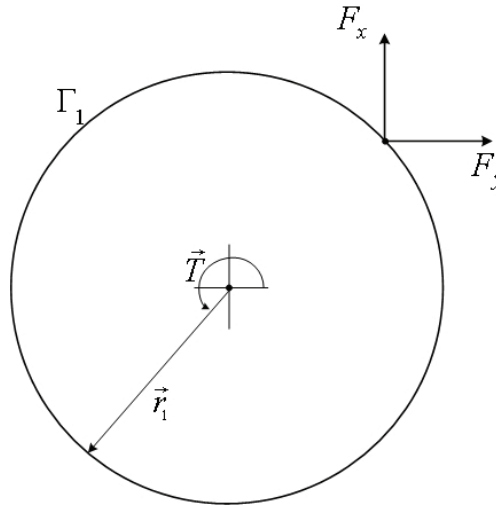


Figura 4.50: Forças fluido-dinâmicas que agem sobre a interface lagrangiana.

Para realizar a transferência de informações da malha lagrangiana para o centro de massa do corpo, torna-se necessário o uso de eixos auxiliares de referências (BORGES, 2010). Para isso, foram utilizados três eixos, que são mostrados na Fig. 4.51, sendo dois deles móveis (Ax_1y_1 e Ax_2y_2) e um fixo (Oxy).

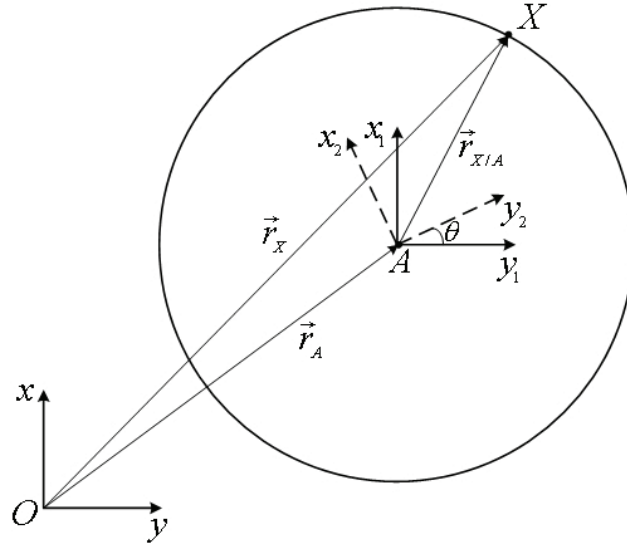


Figura 4.51: Representação esquemática do corpo rígido e os eixos de referência utilizados.

Os eixos Ax_1y_1 , apresentados na Fig. 4.51 estão animados com movimento de translação, definido a partir do cálculo estrutural. Já o sistema de eixos Ax_2y_2 está animado com movimento de rotação, sendo solidário à seção transversal.

A força $F_i'^q$ é dada pela Eq. 4.27 e modela um choque entre um cilindro com raio R_i^q (cilindro) e a interface inferior Γ_{PhD} , e que também pode modelar a interação entre dois ou mais corpos. Essa força de choque é função da distância, d_i , entre o cilindro, propriamente dito, e um cilindro virtual, de raio igual ao do corpo rígido, posicionado tangente à interface, Fig. 4.52.

$$F_i'^q = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_p} (Xc_i^q - X_i') (2R_i^q - d_i) & \text{se } d_i \leq 2R_i^q \\ \frac{1}{\varepsilon_p'} (Xc_i^q - X_i') (2R_i^q + rr - d_i)^2 & \text{se } 2R_i^q \leq d_i < 2R_i^q + rr \\ 0 & \text{se } 2R_i^q + rr \leq d_i \end{cases} \quad (4.27)$$

onde $\varepsilon_p = 5.10^{-5}\Delta x^2$ e $\varepsilon_p' = 5.10^{-3}\Delta x$ são constantes positivas relacionadas à rigidez do corpo e da interface, $rr = 4,0\Delta x$ é a faixa onde a força $F_i'^q$ é válida, Xc_i^q é a posição do centro de massa do corpo rígido e X_i' é a posição do centro de massa do cilindro virtual posicionado abaixo da interface Γ_{PhD} em relação aos eixos cartesianos mostrados na Fig. 4.49.

Substituindo as Eqs. 4.25 e 4.26 na Eq. 4.23 e discretizando no tempo o operador d/dt , com um esquema de Euler explícito de primeira ordem de convergência temporal, obtém-se as componentes de velocidade no centro de massa do corpo rígido e a velocidade angular:

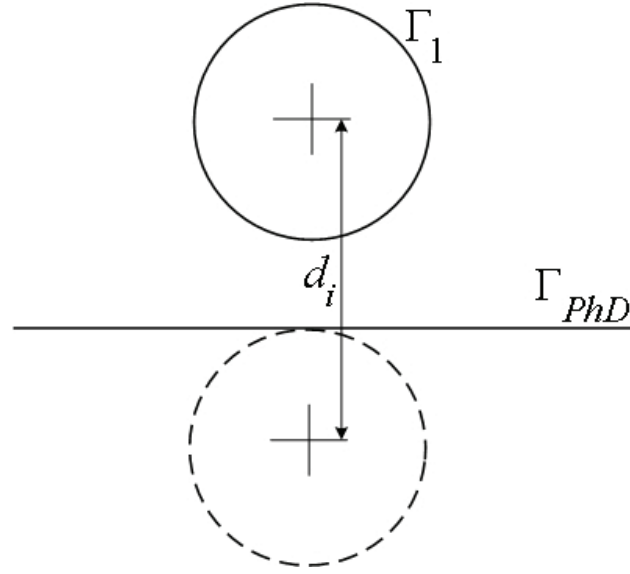


Figura 4.52: Forças que modelam o choque entre o corpo e a interface inferior.

$$\frac{Up_i^{t+\Delta t^q} - Up_i^{t^q}}{\Delta t} = g_i \left(\frac{\rho}{\rho_p^q} - 1 \right) + \frac{Fc_i^q + F_i'^q}{M^q}, \quad (4.28)$$

$$\frac{\omega_z^{t+\Delta t^q} - \omega_z^{t^q}}{\Delta t} = \frac{T_z^q}{I^q}. \quad (4.29)$$

Após obter a velocidade de translação (Eq. 4.28) e a velocidade angular (Eq. 4.29), a velocidade de cada ponto lagrangiano é dada por:

$$U_i^{t+\Delta t} = Up_i^{t+\Delta t} + \omega_z^{t+\Delta t} \times (X_i - X_{c_i}). \quad (4.30)$$

Esse é um exemplo em que a velocidade da fronteira imersa não pode ser imposta. Ela não é conhecida *a priori*. Ela deve ser determinada como resultado da interação fluido-estrutura. Utilizando a Eq. 4.30 obtém-se a velocidade que a interface deve ter no próximo passo de tempo, ou seja, $U_i^{FI} = U_i^{t+\Delta t}$, a qual é usada para calcular a força lagrangiana da Eq. 3.24. A nova posição do centro de massa do corpo rígido é dada por:

$$\frac{Xc_i^{t+\Delta t} - Xc_i^t}{\Delta t} = U_i^{t+\Delta t}. \quad (4.31)$$

O ângulo de rotação, θ (Fig. 4.51), gerado pelo torque da Eq. 4.29, é dado por:

$$\frac{\theta^{t+\Delta t} - \theta^t}{\Delta t} = \omega_z^{t+\Delta t}. \quad (4.32)$$

Para se calcular a nova posição dos pontos lagrangianos, define-se a matriz de transformação, S , necessária para contabilizar o efeito da rotação dado pela Eq. 4.32:

$$S^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \cos(\theta^{t+\Delta t}) & \sin(\theta^{t+\Delta t}) & 0 \\ -\sin(\theta^{t+\Delta t}) & \cos(\theta^{t+\Delta t}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Logo, a nova posição dos pontos lagrangianos é dada por:

$$X_i^{t+\Delta t} = \Delta X_{c_i} + S^{t+\Delta t} r_i^t, \quad (4.34)$$

onde $\Delta X_{c_i} = X_{c_i}^{t+\Delta t} - X_{c_i}^t$.

O domínio de cálculo da Fig. 4.53 tem comprimento $L_x = 16,0$ [m] e $L_y = 2,0$ [m] discretizado com $N_x = 1024$ e $N_y = 128$ nós de colocação. O comprimento da zona de amortecimento $L_{BZ} = 2,0$ [m], ela está posicionada em $0 \leq y \leq 2$, que corresponde ao comprimento L_{BZ} da Fig. 4.49 e $Q_x^t = Q_y^t = 0,0$. O cilindro parte do repouso, tem raio $R = 0,125$ [m], em $t = 0,0$ [s] o seu centro está em $(X_c; Y_c) = (15,0; 1,0)$. A Fig. 4.53 mostra o campo da componente de vorticidade ω_z da queda de um cilindro com massa específica $\rho_p = 1,5$ [kg/m³] em um fluido com coeficiente de viscosidade dinâmica $\mu = 0,01$ kg/(ms) e massa específica $\rho = 1,0$ [kg/m³]. Foi adotado um número de ciclos constantes, $NL = 20$ e na discretização temporal, $CFL = 0,1$.

Observa-se, na Fig. 4.53, que, após o movimento do cilindro começar a acelerar devido ao seu peso, P_i , duas recirculações se formam a jusante dela, como pode ser visto na Fig. 4.53, em $t = 0,5$ [s]. Estas recirculações aumentam em $t = 0,875$ [s] e começam a se desestabilizar a partir de $t = 1,025$ [s]. Neste momento o cilindro sofre a presença da interface inferior através da força de repulsão F'_i (Eq. 4.27), o que pode ser observado em $t = 1,050$ [s]. Os vórtices gerados a jusante do cilindro também começam a se chocar com a interface inferior, e em $t = 1,125$ [s], o cilindro, além de sofrer vários outros choques, também rotaciona sobre a interface inferior, devido ao movimento do fluido gerado por ele mesmo.

A evolução temporal da posição vertical do centro do cilindro, X_c , é apresentada na Fig. 4.54 (a) enquanto que na Fig. 4.54 (b) é mostrado o gráfico da evolução temporal do número de Reynolds, Re_t , ele é calculado com o módulo da velocidade de queda do cilindro,

segundo Wan e Turek (2007):

$$Re_t = \frac{\rho_p D \sqrt{U_p^2 + V_p^2}}{\mu} \quad (4.35)$$

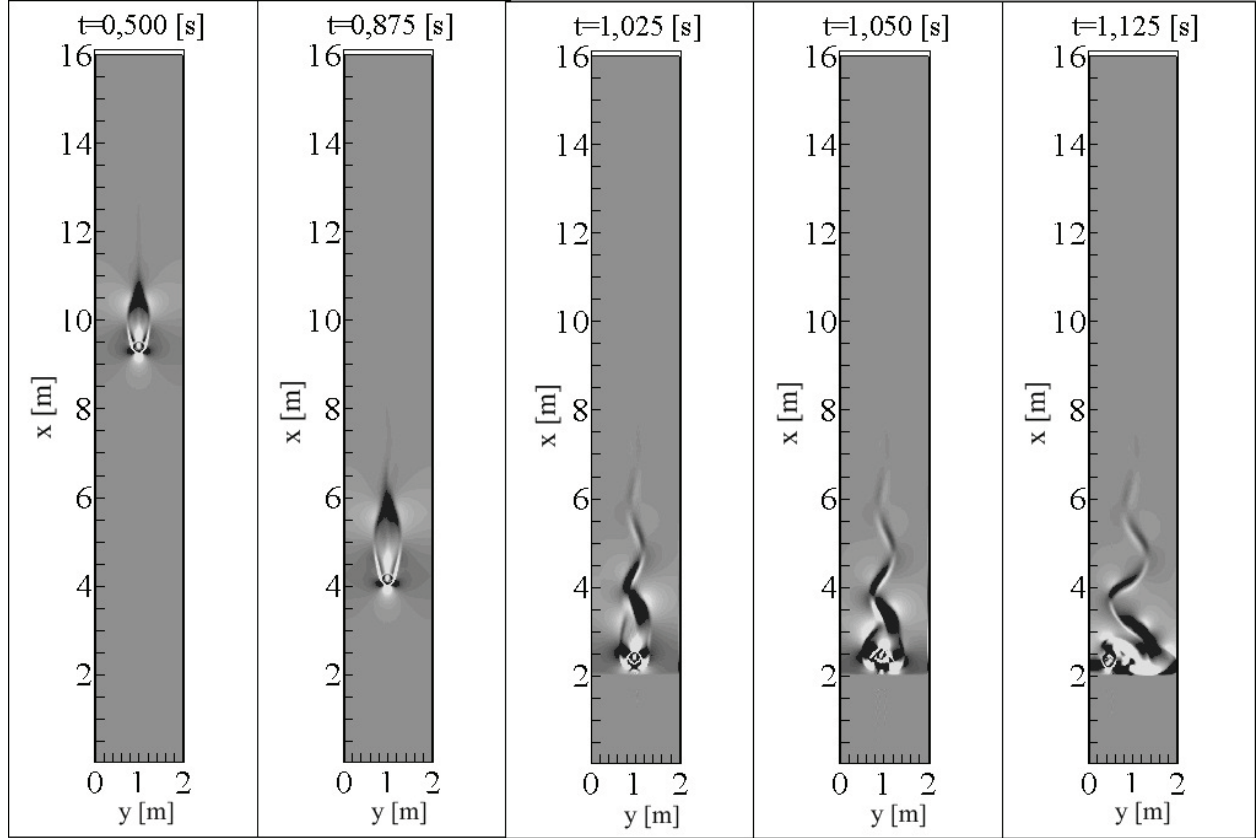
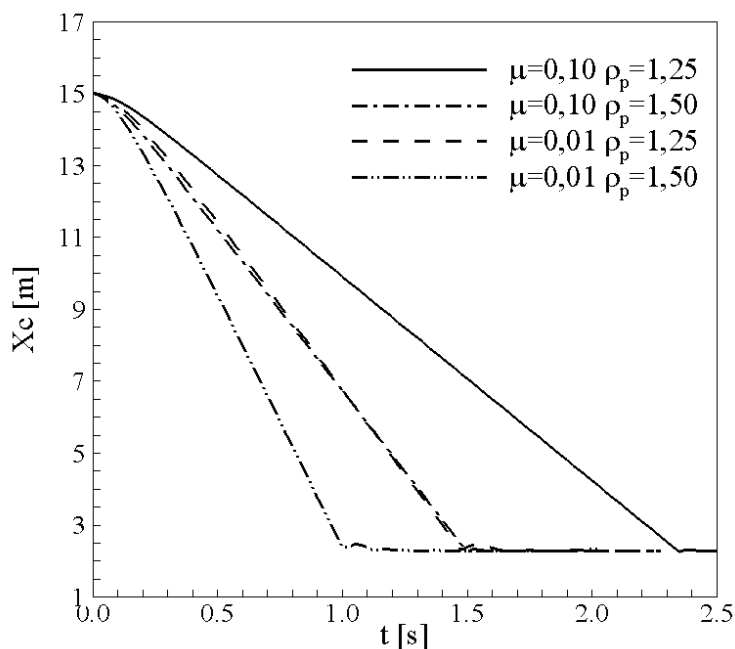


Figura 4.53: Evolução temporal do campo vorticidade da queda de um cilindro com $\rho_p = 1,50 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ em um fluido com $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 0,01 \text{ [kg/(ms)]}$.

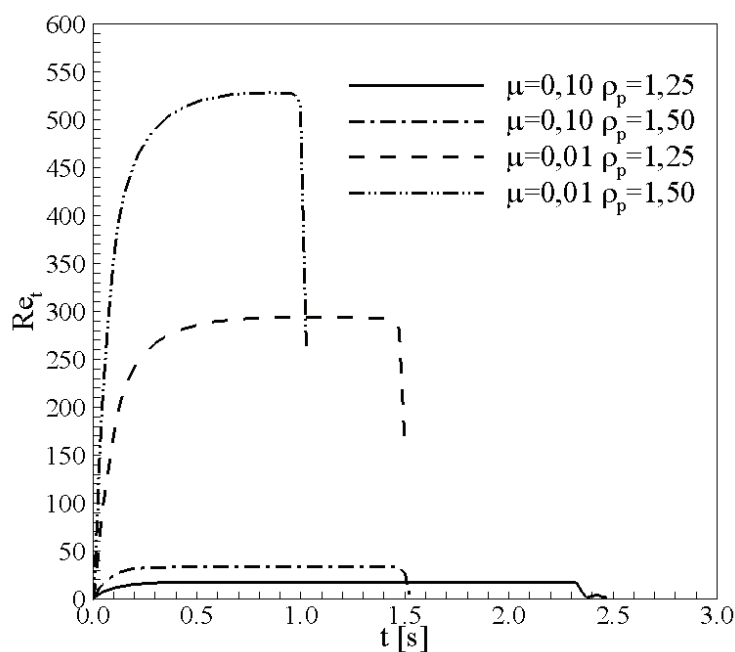
Também nas Figs. 4.54 (a) e (b), são apresentados os resultados para outras simulações realizadas, mudando a massa específica do cilindro e o coeficiente de viscosidade do fluido, para as quatro simulações apresentadas na Fig. 4.54 entre diferentes trabalhos. A Tab. 4.13 mostra a comparação dos valores do número de Reynolds terminal, o qual é definido a partir do momento que o corpo em queda não acelera mais, ou seja, quando a força peso se iguala à força de empuxo e hidrodinâmicas.

Analisando a Tab. 4.13, observa-se concordância entre os resultados. Cabe ressaltar que todos os trabalhos apresentados nesta tabela são numéricos. Especificamente, Uhlmann (2005) utilizou a metodologia da fronteira imersa com a imposição direta da força para representar os corpos rígidos. Wang, Fan e Luo (2008) também usaram a mesma metodologia de Uhlmann (2005), porém com múltipla imposição da força. Em Wan e Turek (2007) é feito

com o método de elementos finitos e contornos fictícios (“Multigrid FEM fictitious boundary method”).



(a)



(b)

Figura 4.54: Evolução temporal (a) da posição vertical do centro do cilindro, X_c , (b) do número de Reynolds, Re_t .

A fim de visualizar com mais detalhes a interação do cilindro com o fundo do reservatório, foi realizada uma outra simulação com as mesmas características que a anterior, com

$\rho_p/\rho = 1,50$ e $\mu = 0,01 \text{ kg/(ms)}$, porém com $L_x = 8 \text{ [m]}$ e $N_x = 512$, mantendo o $L_{BZ} = 2,0 \text{ [m]}$ o cilindro foi posicionado, inicialmente, em $(Xc; Yc) = (6,0; 1,0)$. A partir do momento em que a força de repulsão, F'_i , passa a agir, o cilindro sente a presença da interface inferior e é rebatido na direção contrária - fenômeno que pode ser observado na Fig. 4.55 a partir do instante, $t = 0,35 \text{ [s]}$.

Tabela 4.13: Comparação do número de Reynolds terminal, Eq. 4.35, entre diferentes trabalhos.

	$\mu = 0,10 \text{ [kg/(m/s)]}$		$\mu = 0,01 \text{ [kg/(m/s)]}$	
	$\rho_p/\rho = 1,25$	$\rho_p/\rho = 1,50$	$\rho_p/\rho = 1,25$	$\rho_p/\rho = 1,50$
Wan e Turek (2007)	17,75	32,76	270,77	465,52
Wang, Fan e Luo (2008)	17,31	-	-	503,38
Uhlmann (2005)	-	-	-	495,00
Presente trabalho	17,73	33,62	293,96	527,51

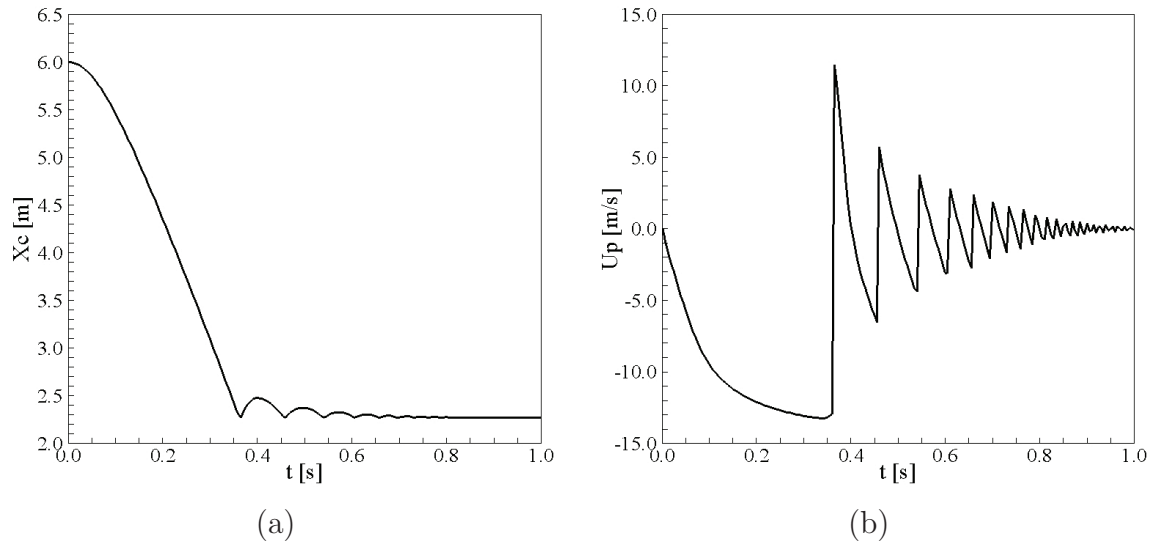


Figura 4.55: Evolução temporal (a) da posição na vertical do centro do cilindro Xc (b) e da componente de velocidade vertical Up para um cilindro com $\rho_p/\rho = 1,5$ movendo-se em um fluido com $\mu = 0,01 \text{ [kg/(ms)]}$.

Comparando a velocidade vertical do centro do cilindro, Up , e a energia cinética de translação, $E_T = 1/2 M(U_p^2 + V_p^2)$, com os resultados de Wan e Turek (2007), observa-se uma concordância razoável entre os resultados, conforme mostra a Fig. 4.56.

As diferenças que aparecem nos gráficos da Fig. 4.56 podem ser explicadas por dois motivos principais: o primeiro é devido as condições de contorno adotadas nas simulações do

presente trabalho, que são periódicas, enquanto que nas simulações de Wan e Turek (2007) foram impostas condições de não deslizamento. O segundo motivo, pode ser o esquema de evolução temporal adotado para o corpo rígido, o qual é de primeira ordem de convergência temporal (Euler explícito) como definido nas Eqs. 4.31 e 4.32. Os cálculos não foram refeitos, pois o objetivo nesse exercício era mostrar a funcionalidade da metodologia para problemas de interação fluido-estrutura.

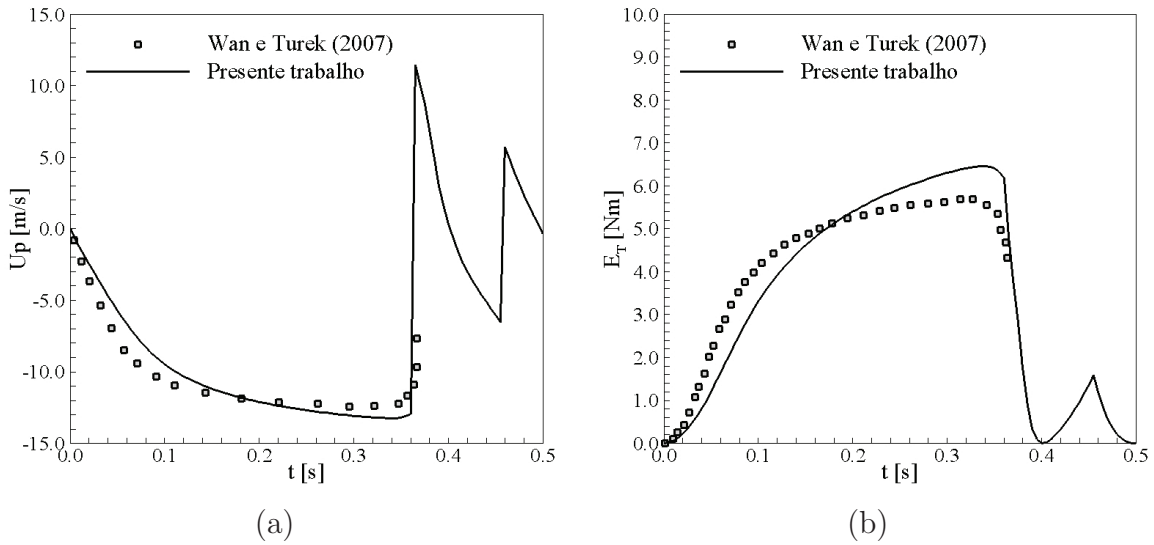
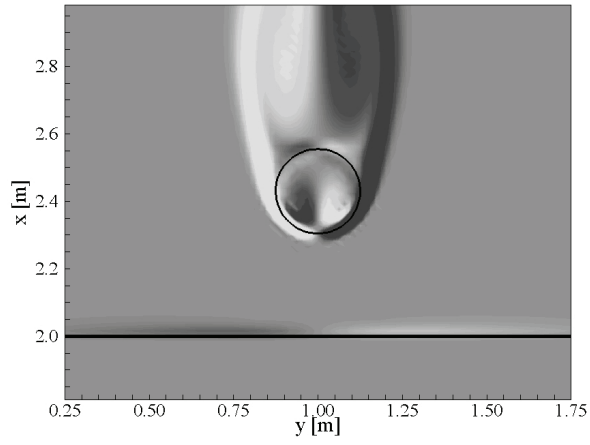


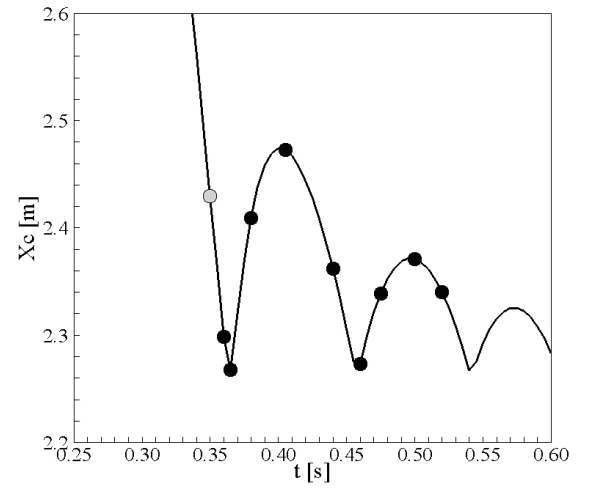
Figura 4.56: Comparação do presente trabalho, com o trabalho de Wan e Turek (2007) da evolução temporal (a) da componente de velocidade vertical, U_p , para um corpo cilíndrico com $\rho_p/\rho = 1,5$ movendo-se em um fluido com $\mu = 0,01$ [kg/(ms)] (b) da energia cinética de translação.

Na Fig. 4.55, observa-se o amortecimento dos múltiplos choques devido à viscosidade do fluido. Nas Figs. 4.57 (a) até (t), observa-se o campo de vorticidade instantâneo gerado pela queda do cilindro em determinados tempos. Pode-se visualizar o processo da colisão do cilindro com a interface inferior. As figuras que aparecem do lado direito da Fig. 4.57 mostram, em detalhe, a Fig. 4.55 (a). O ponto destacado com o círculo vazio representa a posição do cilindro relativa à sua trajetória completa. Apresenta-se, à esquerda, o campo de vorticidade ao redor do cilindro quando ela se encontra próxima ao fundo do reservatório.

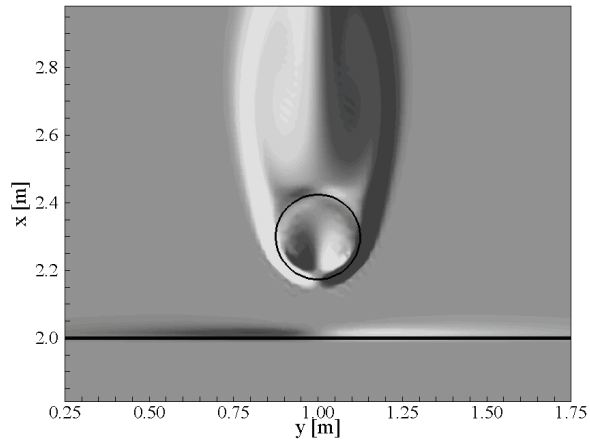
As imagens da Fig. 4.57 (a) e (c), mostram o cilindro se aproximando do fundo, antes de ocorrer o primeiro choque. Em (e), observa-se o primeiro choque.



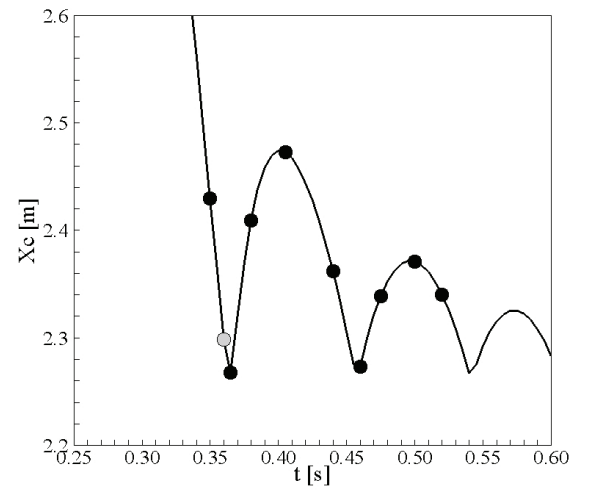
(a)



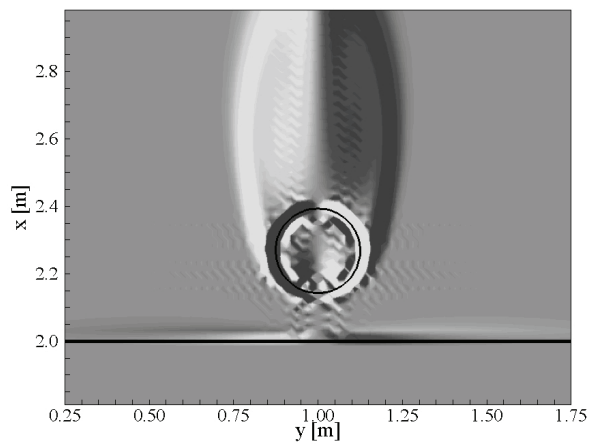
(b)



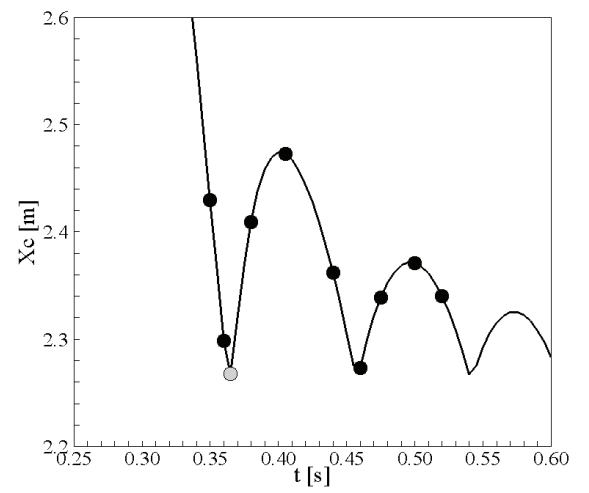
(c)



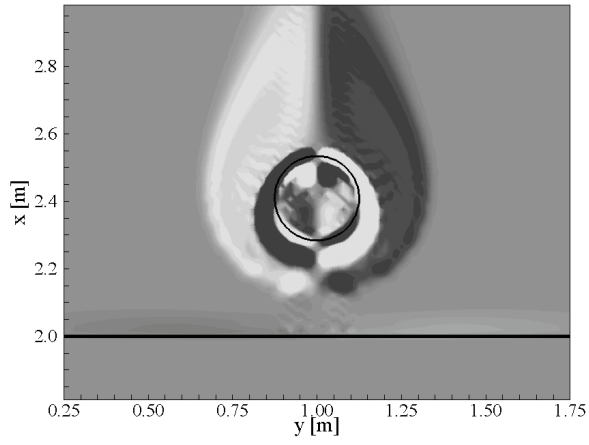
(d)



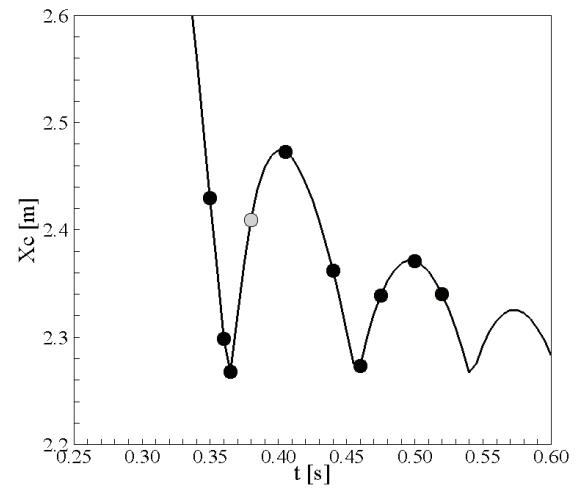
(e)



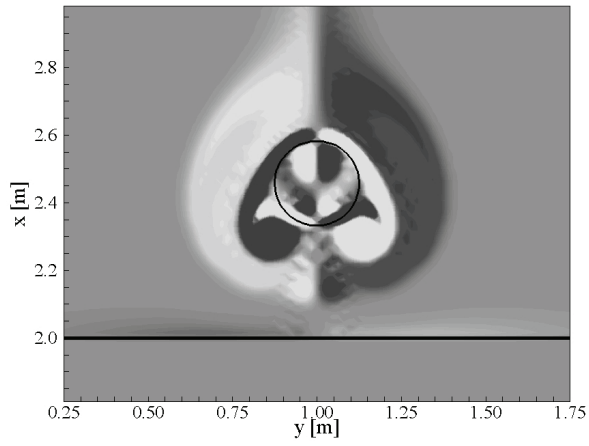
(f)



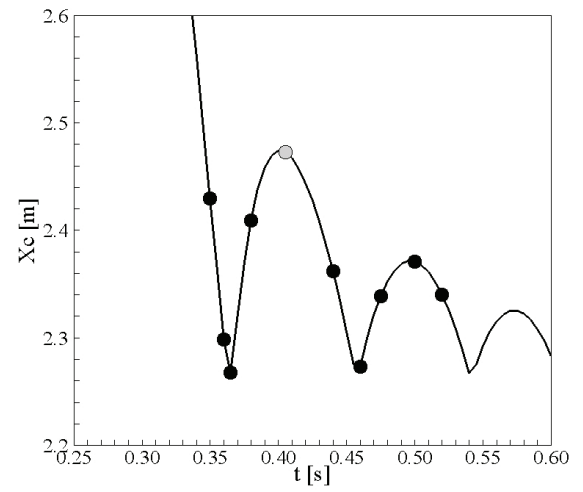
(g)



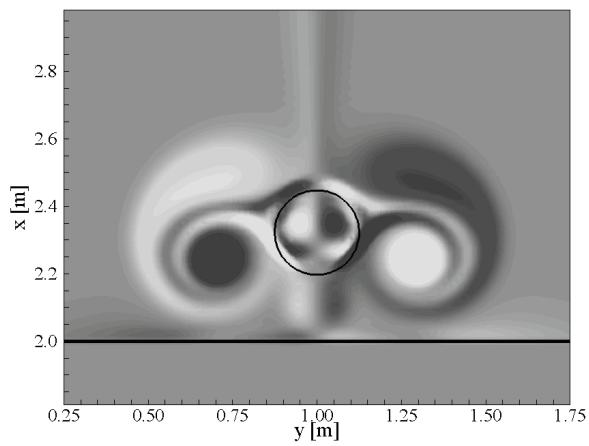
(h)



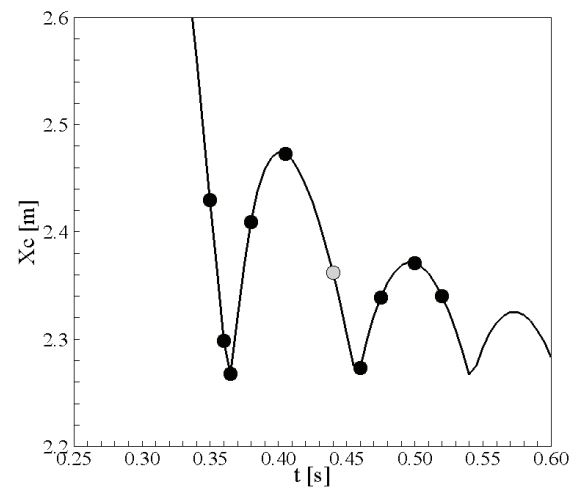
(i)



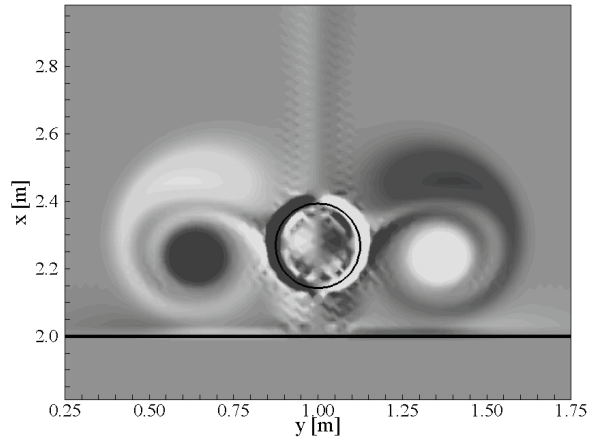
(j)



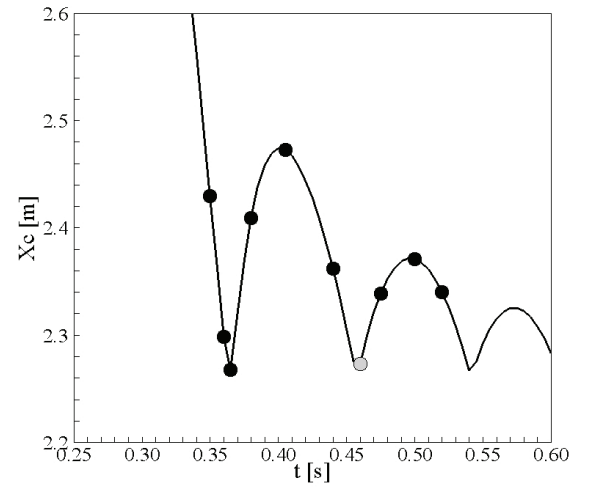
(k)



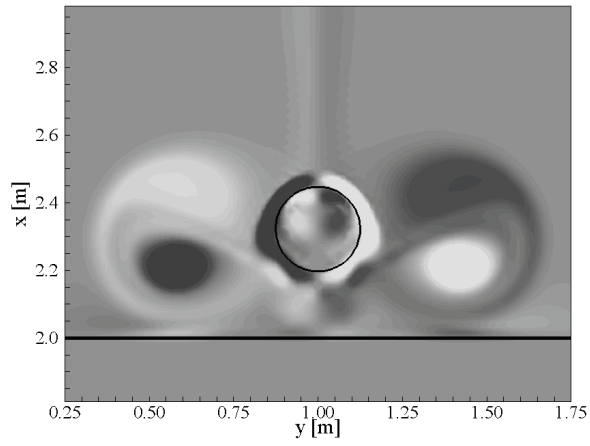
(l)



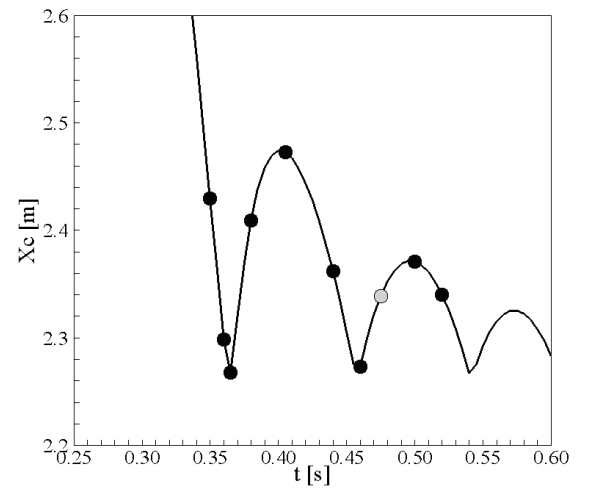
(m)



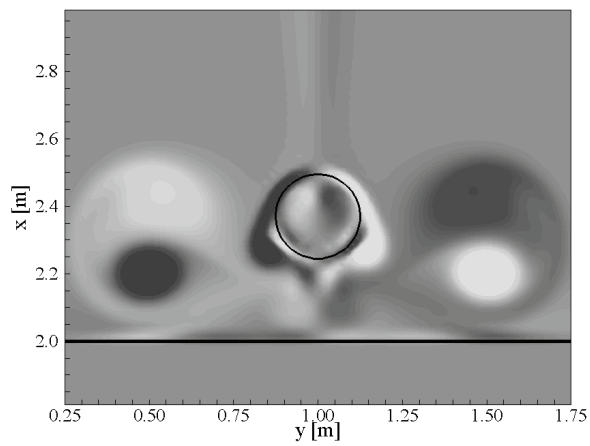
(n)



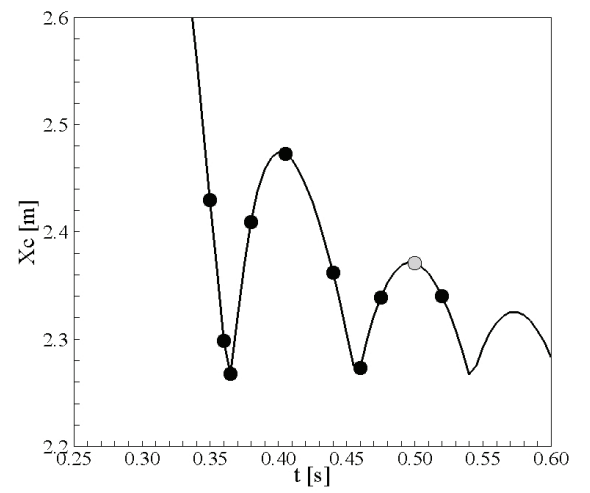
(o)



(p)



(q)



(r)

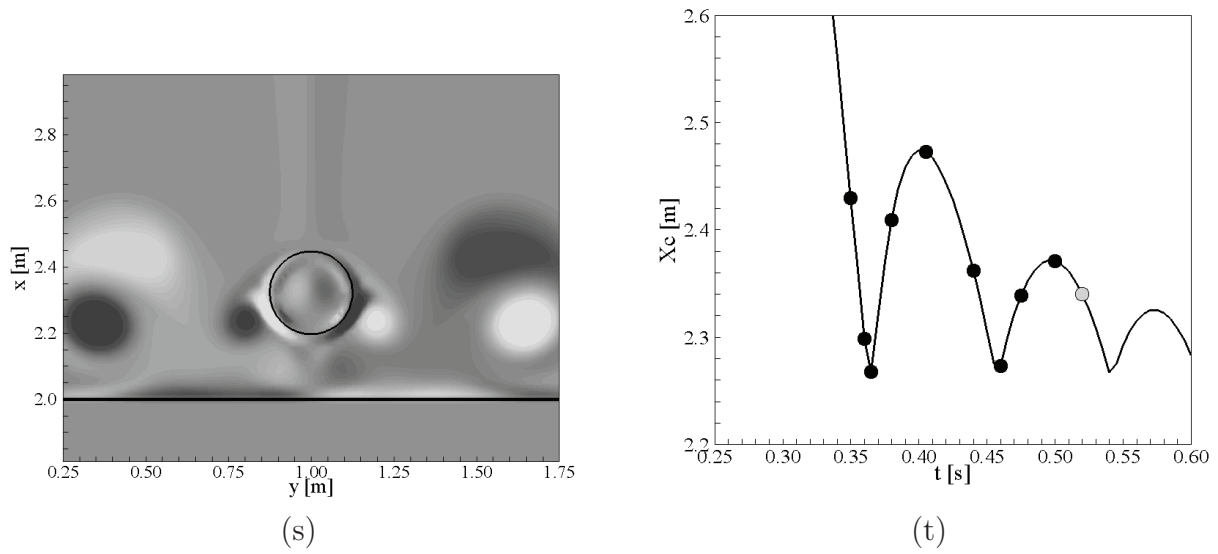


Figura 4.57: Campo de vorticidade instantâneo, evolução do choque do cilindro com a interface inferior.

Nota-se que o fenômeno de Gibbs aparece, devido a magnitude da força de repulsão e também devido as altas derivadas temporais em todas as variáveis dependentes que são calculadas. Em (g), o fenômeno de Gibbs é amortecido, e observa-se o corpo voltando entre os vórtices gerados durante a descida. Em (i), formam-se outras duas recirculações, em sentidos opostos aos das primeiras. Nesse momento, o cilindro para novamente, como assinalado em (j) pelo círculo vazio. Em (k) e (m), o cilindro desce novamente e os quatro vórtices interagem entre si. Em (m), há uma nova colisão com o fundo. Observa-se que no momento do choque, quando o sentido do deslocamento muda de negativo para positivo, ainda resta uma camada de fluido aprisionada entre o corpo e o fundo do reservatório, essa camada de fluido é função da variável rr da Eq. 4.27, nas simulações da presente seção utilizou-se $rr = 4,0\Delta x$, a fim de evitar que a distribuição da força lagrangiana interferisse na imposição da força que modela o fundo do reservatório. Em (o) e (q), o corpo rígido sobe, novamente, porém de forma mais lenta, e produz novos vórtices de intensidades menores que nos momentos anteriores. Em (s), observa-se um novo processo de descida e os primeiros vórtices contra-rotativos começam a se afastar do cilindro e são transportados em direção às laterais do domínio.

Cabe ressaltar que as simulações de interação fluido-estrutura foram apresentadas com o intuito de demonstrar as potencialidades da metodologia desenvolvida no presente trabalho.

Na presente seção as equações de Newton-Euler foram utilizadas para modelar o movimento do corpo. É possível substituir esse modelo estrutural por outro que simule, por exemplo, a flexão de barras ou a movimentação de rotores.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

5.1 Conclusões

O acoplamento entre a metodologia pseudo-espectral de Fourier e a metodologia da fronteira imersa foi desenvolvido e implementado. A metodologia resultante dessa fusão, quando olhada do ponto de vista da metodologia da fronteira imersa, atingiu quarta ordem de convergência espacial. Esta ordem de convergência foi obtida resolvendo-se o problema dos vórtices de Taylor-Green em decaimento. É a primeira vez, levando-se em conta as referências bibliográficas estudadas, que se obtém esta ordem de convergência, utilizando fronteira imersa com distribuição da força. Nas simulações, onde há coincidência entre os pontos lagrangianos com os eulerianos, atingiu-se erros de arredondamento de máquina, mostrando que a imposição de algumas condições de contorno pode ser feita com alta acurácia.

Também utilizando o problema dos vórtices de Taylor-Green em decaimento, foi possível identificar que o processo de interpolação é o responsável por limitar a ordem de convergência da metodologia.

As simulações de escoamentos sobre um degrau e sobre cilindros mostraram resultados condizentes com a física do escoamento e, mais que isso, quando comparados com resultados de outros trabalhos numéricos e experimentais, obtiveram, de forma geral, uma boa concordância.

As simulações sobre o degrau 3D mostram que a metodologia é facilmente estendida

para a terceira dimensão e, além disso, quando se tem os pontos lagrangianos coincidindo com os eulerianos, a paralelização por partição de domínio é feita de maneira direta, mostrando-se muito eficiente em “clusters” com memória compartilhada (MOREIRA, 2010).

Nas simulações da queda livre de uma partícula em um meio fluido foi implementado o algoritmo de acoplamento entre o fluido e a estrutura. Também foram implementadas as equações de Newton-Euler que regem o movimento da partícula. A menos de novos modelos para a movimentação de diferentes tipos de estrutura, o código computacional encontra-se preparado para simular problemas de interação fluido-estrutura bidimensionais.

Comparando a presente tese com o mestrado de Mariano (2007), têm-se como principal inovação o uso do método da múltipla imposição da força (MDF) proposto, no presente trabalho, para a metodologia IMERSPEC, a partir do trabalho de Wang, Fan e Luo (2008). O MDF pode ser visto como um avanço do modelo físico virtual (MFV) desenvolvido em Lima-E-Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003). O MDF mostrou-se mais eficiente computacionalmente, pois, devido ao procedimento de superposição da força, ele torna-se independente do passo de tempo. Dessa forma o passo de tempo fica restrito apenas ao tipo de esquema de avanço temporal utilizado para a solução das equações de Navier-Stokes e não mais devido ao processo de cálculo da força lagrangiana.

O MDF permitiu simular escoamentos sobre geometrias complexas, além de um maior controle da condição de não deslizamento sobre a fronteira imersa. Desta forma é possível conseguir uma acurácia elevada sobre a fronteira às custas do processo de iteração da força.

Do ponto de vista dos métodos espectrais, a metodologia desenvolvida na presente tese permite que o método pseudo-espectral de Fourier (MPEF) seja aplicado também a problemas não periódicos, atingindo uma maior gama de problemas de CFD. A metodologia proposta tem como características positivas a alta precisão e alta taxa de convergência numérica. Outra boa característica é a alta eficiência computacional, quando comparado a outros métodos também de alta ordem. Essa afirmação está apoiada no fato que, ao se trabalhar com as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis, não é preciso resolver o sistema linear (equação de Poisson), uma vez que não se tem mais o acoplamento entre pressão e velocidade. O divergente da velocidade é mantido na ordem de erros de arredondamento de máquina, (10^{-16}). Destaca-se ainda que a ordem de convergência espacial da

pressão, recuperada por pós-processamento, é a mesma que a da velocidade. Normalmente, isso não ocorre quando se utiliza os métodos de acoplamento pressão-velocidade.

Por outro lado, a maior parte do tempo de processamento da metodologia desenvolvida no presente trabalho encontra-se no cálculo do termo advectivo das equações de Navier-Stokes, pois ele é feito de forma pseudo-espectral, ou seja, precisa-se de várias transformações entre os espaços físico e espectral. Mesmo assim, acredita-se que a metodologia proposta é competitiva com outras de alta ordem, principalmente, quando se trabalha com o número de pontos de colocação elevados, por exemplo, em problemas tridimensionais.

Outra característica importante é o fato de, ao aplicar a metodologia para a solução de problemas não periódicos, necessita-se estender o domínio de cálculo, de forma a criar o domínio complementar, o qual deve ser bem trabalhado, pois pode onerar significativamente a simulação. No entanto, com o método da múltipla imposição da força esse processo foi significativamente otimizado, quando comparado com Mariano (2007).

Um comentário deve ser feito com relação a facilidade de implementação da metodologia pseudo-espectral de Fourier, uma vez que as derivadas são calculadas através de produtos. A implementação pode ser feita de forma muito rápida, quando comparada às metodologias de volumes finitos, diferenças finitas e elementos finitos.

Em termos gerais conclui-se que a proposta inicial da tese, ora apresentada, foi atin-gida com sucesso. Apresenta-se como resultado uma nova metodologia que une as vantagens de duas outras, podendo-se destacar: alta ordem de convergência, alta acurácia, eficiência computacional, aplicabilidade em problemas complexos e grande facilidade de implementação. A maior deficiência que ainda permanece é a dificuldade de se lidar com problemas que apresentam comportamentos não suaves, onde se necessita de processos de filtragem adicional.

5.2 Trabalhos futuros

Na presente tese mostrou-se o desenvolvimento, a verificação e a validação de uma nova metodologia. As validações foram realizadas em três problemas de CFD, escoamentos sobre degrau $2D$ e $3D$, escoamentos sobre cilindro e queda livre de um corpo rígido, os resultados

mostraram-se de acordo com a literatura estudada. No entanto, resta ainda uma grande quantidade de novos pontos a serem desenvolvidos e estudados.

No presente trabalho, a metodologia IMERSPEC foi desenvolvida para escoamentos incompressíveis, com propriedades físicas constantes e sem transferência de calor. Propõem-se a extensão da metodologia a escoamentos compressíveis, com propriedades físicas variáveis e a implementação da equação de energia.

No caso de estudar escoamentos compressíveis o método da projeção não será mais utilizado. A informação do campo de pressão deve vir de uma equação de estado. Os produtos de convolução serão mais numerosos, o que, certamente, onerará a metodologia. Quanto a implementação da equação da energia, atenção especial deve ser dada na forma de impor as condições de contorno de temperatura, uma vez que o MDF, foi testado apenas em condições de contorno de velocidade.

No MFLab já se encontram em desenvolvimento dois trabalhos relacionados com propriedades físicas variáveis. Um deles é a aplicação da metodologia IMERSPEC em escoamentos turbulentos (MOREIRA, 2010). Neste caso, o termo difusivo recebe as informações do modelo de turbulência através do coeficiente de viscosidade turbulenta, fazendo com que apareça um coeficiente de viscosidade variável no termo difusivo. O outro trabalho é a aplicação da metodologia IMERSPEC em escoamentos bifásicos (VILLELA et al., 2010). Neste caso, tanto a viscosidade quanto a massa específica são variáveis.

No código tridimensional ainda falta implementar as funções interpolação e distribuição, para se realizar simulações com geometrias não coincidentes. Também seria interessante implementar as subrotinas de interação fluido-estrutura, desenvolvidas no MFLab juntamente com Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEST) da UFU, por Borges (2010), baseada na teoria de vigas de Cosserat.

Outras subrotinas de FFT podem ser utilizadas, uma vez que, no presente trabalho, utilizou-se apenas a FFT de Takahashi (2006). Um outro aspecto está relacionado ao tipo de malha utilizado. No presente trabalho utilizou-se apenas malhas uniformes, visto que a FFT só pode ser aplicada em uma distribuição de pontos de colocação equidistantes. Já está em estudo, no MFLab, a viabilidade de se usar coordenadas generalizadas para refinar a malha próximo a regiões de interesse ou ainda a possibilidade de se usar malha adaptativa.

CAPÍTULO VI

REFERÊNCIAS

- ALLAMPALLI, V.; HIXON, R.; NALLASAMY, M.; SAWYER, S. High-accuracy large-step explicit runge - kutta (*hale - rk*) schemes for computational aeroacoustics. *Journal of Computational Physics*, v. 228, p. 3837–3850, 2009.
- ARMALY, B.; DURST, F.; PEREIRA, J.; SCHONUNG, B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 127, p. 473–496, 1983.
- ARRUDA, J. *Modelagem matemática de escoamentos internos forçados utilizando o Método da Fronteira Imersa e o Modelo Físico Virtual*. 153 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2004.
- BONFIGLI, G. High-order finite-difference implementation of the immersed-boundary technique for incompressible flows (no prelo). *Computers and Fluids*, 2010.
- BORGES, A. *Desenvolvimento de procedimentos de modelagem de interação fluido-estrutura combinando a teoria de vigas de Cosserat e a metodologia de fronteira imersa*. 160 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2010.
- BOYD, J. P. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. New York: DOVER, 2000.
- BRIGGS, W.; HENSON, V. *The DFT*. Philadelphia: SIAM, 1995.

CAMPREGHER, R. *Modelagem matemática tridimensional para problemas de interação fluido-estrutura*. 179 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2005.

CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; ZANG, T. A. *Spectral methods in fluid dynamics*. New York: Spriger Verlag, 1987.

CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; ZANG, T. A. *Spectral methods: fundamentals in single domains*. New York: Spriger Verlag, 2006.

CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; ZANG, T. A. *Spectral methods: evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics*. New York: Spriger Verlag, 2007.

CHORIN, A. J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, v. 22, p. 745–762, 1968.

COOLEY, T. W.; TUKEY, J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, v. 19, p. 297–301, 1965.

COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal*, v. 1, p. 215–234, 1967.

COUTANCEAU, R. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of circular cylinder in uniform translation. part 1 steady flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 79, p. 231–256, 1977.

DA-SILVA, C. F. N. B. *The role of coherent structures in the control and interscale interactions of round, plane and coaxial jets*. Tese (Doutorado) — Institute National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, 2001.

DELVES, L.; HALL, C. An implicit matching procedure for global element calculations. *Journal of Institute of Mathematics Applications*, v. 23, p. 223–234, 1979.

- DEVILLE, M.; MUND, E. Chebyshev pseudospectral solution of second-order elliptic equations with finite element preconditioning. *Journal of Computational Physics*, v. 60, p. 517–533, 1985.
- EATON, J. K.; JOHNSTON, J. P. *Turbulent flow reattachment: an experimental study of the flow and structure behind a backward-facing step*. Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Palo Alto, 1980. (Rept. MD-39).
- ENRIQUES-REMIGIO, S.; SILVEIRA-NETO, A. A new modeling of fluid-structure interaction problems through immersed boundary method/virtual physical model (ibm/vpm). In: *Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 19*. Brasília: ABCM, 2007. 1 CD-ROM.
- FADLUN, E. A.; VERZICCO, R.; ORLANDI, P.; MOHD-YUSOF, J. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations. *Journal of Computational Physics*, v. 161, p. 35–60, 2000.
- FERZIGER, J.; PERIC, M. *Computational methods for fluid dynamics*. New York: Springer, 1996.
- FORTUNA, A. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. São Paulo: EDUSP, 2000.
- GARTLING, D. A test problem for outflow boundary conditions - flow over a backward-facing step. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, v. 11, p. 953–967, 1990.
- GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High Re solutions for incompressible flow using the Navier Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, v. 48, p. 387–411, 1982.
- GOLDSTEIN, D.; ADACHI, T.; SAKATA, H. Modeling a no-slip flow with an external force field. *Journal of Computational Physics*, v. 105, p. 354–366, 1993.
- GOTTLIEB, D.; ORSZAG, S. *Numerical analysis of spectral methods: theory and applications*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1986.

GRIFFITH, B. E.; HORNUG, R. D.; MCQUEEN, D. M.; PESKIN, C. S. An adaptive, formally second order accurate version of the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 223, p. 10–49, 2007.

GRIFFITH, B. E.; PESKIN, C. S. On the order of accuracy of the immersed boundary method: Higher order convergence rates for sufficiently smooth problems. *Journal of Computational Physics*, v. 208, p. 75–105, 2005.

HENDERSON, R. D.; KARNIADAKIS, G. E. Unstructured spectral element methods for simulation of turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, v. 122, p. 191–217, 1995.

HUSSAINI, M.; KOPRIVA, D. A.; PATERA, A. Spectral collocation methods. *Applied Numerical Mathematics*, v. 5, p. 177–208, 1989.

HUSSAINI, M.; ZANG, T. Spectral methods in fluid dynamics. *Annual Review of Fluids Mechanics*, v. 19, p. 339–367, 1987.

JOSLIN, R. D.; STREETT, C. L.; CHANG, C. L. *Validation of 3D Incompressible Spatial Direct Numerical Simulation. Code a comparison with linear Stability and Parabolic Stability Equation theories for Boundary Layer Transition on a Flat Plate*. Langley Research Center - NASA, 1991. 1-45 p. (Report NASA, v. 3205).

KIM, J.; KIM, D.; CHOI, H. An immersed-boundary finite-volume method for simulation of flow in complex geometries. *Journal Computational Physics*, v. 171, p. 132–150, 2001.

KIRBY, R. M.; KARNIADAKIS, G. E. De-aliasing on non-uniform grids: algorithms and applications. *Journal of Computational Physics*, v. 91, p. 249–264, 2003.

KOPRIVA, D. A. A spectral multidomain method for the solution of hyperbolic systems. *Applied Numerical Mathematics*, v. 2, p. 221–241, 1986.

LAI, M.; PESKIN, C. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity. *Journal of Computational Physics*, v. 160, p. 705–719, 2000.

- LE, D. V.; KHOO, B. C.; PERAIRE, J. An immersed interface method for viscous incompressible flows involving rigid and flexible boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 220, p. 109–138, 2006.
- LE, H.; MOIN, P.; KIM, J. Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. *Journal of Fluids Mechanics*, v. 330, p. 349–374, 1997.
- LEE, T.; MATEESCU, D. Experimental and numerical investigation of 2-d backward-facing step flow. *Journal of Fluids and Structures*, v. 12, p. 703–716, 1998.
- LIMA-E-SILVA, A.; SILVEIRA-NETO, A.; DAMASCENO, J. Numerical simulation of two dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 189, p. 351–370, 2003.
- LIMA-E-SILVA, A. L. F. de. *Desenvolvimento e implementação de uma nova metodologia para modelagem de escoamentos sobre geometrias complexas: método da fronteira imersa como modelo físico virtual*. 162 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2002.
- LINNICK, H.; FASEL, H. A high-order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains. *Journal of Computational Physics*, v. 204, p. 157–192, 2005.
- MALISKA, C. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- MARIANO, F. P. *Simulação de escoamentos não-periódicos utilizando as metodologias pseudo-espectral de Fourier e da fronteira imersa acopladas*. 136 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007.
- MARIANO, F. P.; MOREIRA, L. Q.; SILVEIRA-NETO, A. Flow over circular cylinder simulations using Fourier pseudo-spectral method with immersed boundary. In: *Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 20*. Gramado: ABCM, 2009. 1 CD-ROM.
- MARIANO, F. P.; MOREIRA, L. Q.; SILVEIRA-NETO, A. Mathematical modeling of non-periodic flows using Fourier pseudo-spectral and immersed boundary methods. In:

European Conference on Computational Fluid Dynamics, 5. Lisboa: ECCOMAS CFD, 2010. 1 CD-ROM.

MARIANO, F. P.; MOREIRA, L. Q.; SILVEIRA-NETO, A. Simulação de escoamentos sobre degrau usando os métodos pseudo-espectral de Fourier acoplado com o método da fronteira imersa. In: *Escola de Primavera de Transição e Turbulência, 7.* Ilha Solteira: ABCM, 2010. 1 CD-ROM.

MARIANO, F. P.; MOREIRA, L. Q.; SILVEIRA-NETO, A. Simulation of free fall particles using Fourier pseudo-spectral method with immersed boundary method. In: *Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, 13.* Uberlândia: ABCM, 2010. 1 CD-ROM.

MARIANO, F. P.; MOREIRA, L. Q.; SILVEIRA-NETO, A.; SILVA, C. B. da; PEREIRA, J. C. F. A new incompressible Navier-Stokes solver combining Fourier pseudo-spectral and immersed boundary method. *Computer Modeling in Engineering Science*, v. 59, p. 181–216, 2010.

MARK, A.; WACHEN, B. G. M. Derivation and validation of a novel implicit second-order accurate immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 227, p. 6660–6680, 2008.

MATSUDA, T.; SAKAKIBARA, J. On the vortical structure in a round jet. *Physics of Fluids*, v. 17, p. 1–11, 2005.

MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 37, p. 239–261, 2005.

MOHD-YUSOF, J. *Combined immersed boundaries/B-splines methods for simulations of flows in complex geometries*. Center for Turbulence Research, Stanford University, 1997. 317-327 p. (Annual Research Briefs).

MOHD-YUSOF, J. *Development of immersed boundary methods for complex geometries*. Center for Turbulence Research, Stanford University, 1998. 325-336 p. (Annual Research Briefs).

- MORCHOISNE, Y. Inhomogeneous flow calculations by spectral methods: mono-domain and multi-domain techniques. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, p. 181–208, 1984.
- MOREIRA, L. *Simulação de Grandes Escalas de escoamentos cisalhantes livres em transição e turbulentos - Relatório de Qualificação*. Uberlândia, 2010. (Relatório de Qualificação).
- MOREIRA, L. Q. *Simulação de grandes escalas de jatos periódicos temporais utilizando a metodologia pseudo-espectral de Fourier*. 122 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007.
- NAGARAJAN, S.; LELE, S. K.; FERZIGER, J. H. A robust high-order compact method for large eddy simulation. *Journal of Computational Physics*, v. 191, p. 392–419, 2003.
- NÓS, R. L. *Simulações de escoamentos tridimensionais bifásicos empregando métodos adaptativos e modelos de campo de fase*. 179 f. Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.
- OKAJIMA, A.; YASUI, S.; KIWATA, T.; KIMURA, S. Flow induced streamwise oscillation of two circular cylinders in tandem arrangement. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v. 28, p. 552–560, 2007.
- OLIVEIRA, J. E. S. *Método de fronteira imersa aplicado à modelagem matemática e simulação numérica de escoamentos turbulentos sobre geometrias móveis e deformáveis*. 188 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2006.
- ORZAG, S. Spectral methods for problems in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, v. 37, p. 70–92, 1980.
- PATANKAR, S. *Numerical heat transfer and fluid flow*. New York: Hemisphere, 1980.
- PATERA, A. T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, v. 54, p. 468–488, 1984.

PESKIN, C. Flow patterns around heart valves: A numerical method. *Journal of Computational Physics*, v. 10, n. 2, p. 252–271, 1972.

PESKIN, C. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, v. 11, p. 479–517, 2002.

PILLER, M.; STALIO, E. Finite-volume compact schemes on staggered grids. *Journal of Computational Physics*, v. 197, p. 299–340, 2004.

PINHO, F. A. A. *Simulação numérica de grandes escalas em cavidades tridimensionais com tampa deslizante utilizando modelagem dinâmica*. 122 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2006.

POPE, S. *Turbulent flows*. New York: Cambridge University Press, 2000.

RIZALES, J. de J. M. *Aplicação de um método multidomínio espectral na simulação de escoamentos viscosos incompressíveis*. 159 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, Rio de Janeiro, 2005.

ROMA, A. M.; PESKIN, C. S.; BERGER, M. An adaptive version of the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 153, p. 509–534, 1999.

SAIKI, E. M.; BIRIGEN, S. Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: application of a virtual boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 123, p. 450–465, 1996.

SHU, C.; LIU, N.; CHEW, Y. T. A novel immersed boundary velocity correction-lattice Boltzmann method and its application to simulate flow past a circular cylinder. *Journal of Computational Physics*, v. 226, p. 1607–1622, 2007.

SHUKLA, R. K.; TATINENI, M.; ZHONG, X. Very high-order compact finite difference schemes on non-uniform grids for incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, v. 224, p. 1064–1094, 2007.

SILVA, A. R. da. *Modelagem matemática de interação fluido estrutura utilizando o método de fronteira imersa*. 178 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2008.

SILVA, H.; VILLAR, M. Verificação e validação de códigos computacionais. In: *VII Escola de Primavera de Transição e Turbulência*. Ilha Solteira: ABCM, 2010. v. 7, p. 51–94.

SILVEIRA-NETO, A. *Turbulência nos fluidos aplicada*. Uberlândia, 2002. Apostila da Disciplina Mecânica dos Fluidos do Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Uberlândia.

SILVEIRA-NETO, A.; GRAND, D.; METAIS, O.; GONZE, M.; LESIEUR, M. A numerical investigation of the coherent vortices in turbulence behind a backward-facing step. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 256, p. 1–25, 1993.

SMIRNOV, A.; SHI, S.; CELIK, I. Random flow generation technique for large eddy simulations and particle-dynamics modeling. *Journal of Fluids Engineering*, v. 123, p. 359–371, 2001.

SOUZA, A. M. *Análise numérica da transição à turbulência em escoamentos de jatos circulares livres*. 180 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2005.

STOCKIE, J. M. *Analysis and computation of immersed boundaries, with application to pulp fibres*. 154 f. Tese (Doutorado) — Institute of Applied Mathematics, University of British Columbia, Columbia, 1997.

SU, S.; LAI, M.; LIN, C. An immersed boundary technique for simulating complex flows with rigid boundary. *Computers and Fluids*, v. 36, p. 313–324, 2007.

TAKAHASHI, D. A hybrid MPI/OpenMP implementation of a parallel 3-D FFT on SMP clusters. *Lecture Notes in Computer Science*, v. 3911, p. 970–977, 2006.

TAYLOR, G.; GREEN, A. Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proceedings Royal Society London*, v. 158, p. 499–521, 1937.

TORNBERG, A.; ENGQUIST, B. Numerical approximations of singular source terms in differential equations. *Journal of Computational Physics*, v. 200, p. 462–488, 2004.

TREFETHEN, L. *Spectral methods in Matlab*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

TRITTON, D. Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 6, p. 547–567, 1959.

TSENG, Y. H.; FERZIGER, J. H. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, v. 192, p. 596–623, 2003.

UHLMANN, M. An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. *Journal of Computational Physics*, v. 209, p. 448–476, 2005.

UZUN, A. *3-D Large-eddy simulation for jet aeroacoustics*. 233 f. Tese (Doutorado) — Pardue University, Pardue, 2003.

VEDOVOTO, J. M. *Modelagem matemática de simulação numérica de escoamentos incompressíveis sobre geometrias complexas tridimensionais utilizando o método da fronteira imersa*. 125 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007.

VILLAR, M. *Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais*. 233 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007.

VILLELA, M. F. S.; MARIANO, F. P.; VILLAR, M. M.; SILVEIRA-NETO, A. Numerical simulation of two-phase flow using hybrid front-tracking and Fourier spectral methods. In: *Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*, 31. Buenos Aires: CMM, 2010. 1 CD-ROM.

WAN, D.; TUREK, S. An efficient multigrid-fem method for the simulation of solid-liquid two phase flows. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 203, p. 561–580, 2007.

WANG, Z.; FAN, J.; LUO, K. Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 34, p. 283–302, 2008.

XU, S. The immersed interface method for simulating prescribed motion of rigid objects in an incompressible flow. *Journal of Computational Physics*, v. 227, p. 5045–5071, 2008.

XU, S.; WANG, Z. An immersed interface method for simulating the interaction of a fluid with moving boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 216, p. 454–493, 2006.

ZDRAVKOVICH, M. *Flow around circular cylinders: fundamentals*. New York: Oxford Science, 1997.

ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R. *The finite element method solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity*. London: McGraw-Hill, 1991.