



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA QUÍMICA



Uma Contribuição ao Estudo da Sedimentação Gravitacional em Batelada

Fábio de Oliveira Arouca

Uberlândia
2007



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA QUÍMICA



Uma Contribuição ao Estudo da Sedimentação Gravitacional em Batelada

Fábio de Oliveira Arouca

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Química, Área de Concentração e Desenvolvimento de Processos Químicos.

Uberlândia
2007

Uma Contribuição ao Estudo da Sedimentação Gravitacional em Batelada

Tese de Doutorado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Química em 16/08/2007.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Jorge Ribeiro Damasceno
Orientador - PPG-EQ/UFU

Prof. Dr. Luís Cláudio Oliveira Lopes
Co-Orientador - PPG-EQ/UFU

Prof. Dr. Carlos Henrique Ataíde
PPG-EQ/UFU

Prof. Dr. Adilson José de Assis
PPG-EQ/UFU

Prof^a. Dr^a. Sandra Helena Vieira de Carvalho
UFAL

Dr^a. Sílvia Cristina Alves França
CETEM

Dedicatória

Aos meus pais *Edson Peres Arouca* e *Maria Valéria de Oliveira Arouca* que, com muita sabedoria, souberam entender e ensinar os verdadeiros valores da vida.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter permitido grandes conquistas em minha vida, sendo minha força nos momentos difíceis e me dando a alegria de estar sempre cercado por pessoas especiais as quais gostaria de expressar meus mais sinceros agradecimentos:

Gostaria de agradecer meus pais Edson e Valéria que entenderam as dificuldades da vida como um motivo a mais pra lutar e mudar a história, da forma mais simples, mas cheia de amor e carinho.

Agradeço ao meu irmão e amigo Thales que muito me ensinou com suas vitórias e seu jeito simples de viver.

À minha namorada Aline Marques Moraes que me ensinou que viver é muito mais do que imaginava e que a vida sempre é mais colorida quando é vivida com amor.

Ao meu amigo Damasceno, professor que respeito e admiro, sou muito grato pela confiança e pelos ensinamentos, principalmente aqueles que, antes de tudo, me tornaram cidadão.

Ao professor Luís Cláudio pela orientação no trabalho e pela oportunidade de interpretar a vida com outros olhos.

Ao meu amigo Fran Sérgio Lobato pela amizade verdadeira independente das circunstâncias e pelos ensinamentos durante todo o período de convivência.

À minha família e a família de minha namorada pela consideração e apoio.

Aos professores Carlos Ataíde e Marcos Barrozo pela contribuição neste trabalho e acima de tudo pela amizade do dia-a-dia.

Aos amigos Aderjane, Reimar, Ballu, Edu, Fabiana, Marina, Cláudia, Márcia, Juliana e Flávia.

Aos secretários Silvino e José Henrique por seu profissionalismo e por sua amizade.

Por fim agradeço a todos aqueles que colaboraram para o sucesso deste trabalho.

*“A morte do homem começa no instante
em que ele desiste de aprender”.*

(Albino Teixeira)

SUMÁRIO

Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xxi
Simbologia	xxiii
Resumo	xxvii
Abstract	xxix
1 Introdução	1
2 Revisão Bibliográfica	5
3 Modelagem da Sedimentação	23
3.1 Modelo de Kynch (1952)	23
3.1.1 Teoria da Sedimentação	23
3.1.2 Caráter Parabólico do Equacionamento de Kynch	25
3.1.3 Análise da Teoria de Kynch	26
3.2 Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo	30
3.2.1 Desenvolvimento da Teoria das Misturas para o Caso da Separação Sólido-Líquido	30
3.3 Teoria Constitutiva	35

3.3.1	Hipóteses Constitutivas	35
3.3.2	Tensão nos Sólidos	39
3.3.3	Força Resistiva	40
3.4	Modelo de d'Ávila (1978)	42
3.4.1	Desenvolvimento do Equacionamento	42
3.4.2	Caráter Hiperbólico do Equacionamento de d'Ávila	45
3.4.3	O Problema de Fronteira Móvel e as Condições de Salto	48
3.4.4	Análise do Modelo de d'Ávila (1978)	53
3.5	Modelo de Concha e Bascur (1977)	62
3.6	Modelo de Burger e Concha (1998)	65
3.6.1	Desenvolvimento do Equacionamento	65
3.6.2	Análise do Modelo de Burger e Concha (1998)	72
3.7	Modelo matemático alternativo	78
3.7.1	Introdução	78
3.7.2	Desenvolvimento do Equacionamento	79
3.7.3	Análise do Modelo Alternativo para o caso da Sedimentação em Batelada	82
4	Materiais e Métodos	87
4.1	Sistema experimental	87
4.2	Aplicação do Am^{241} como fonte radioativa e a detecção de raios γ	93
4.3	Otimização de parâmetros do sistema experimental	94
4.3.1	Determinação da voltagem ótima	94
4.3.2	Determinação do intervalo de energia	96
4.3.3	Determinação do tempo de resolução do sistema	97
4.4	Técnica de Atenuação de Raios Gama	98
4.4.1	A equação de Lambert	98
4.4.2	Faixa de máxima sensibilidade da TARG aplicada à seleção do radioisótopo	100
4.5	Determinação das condições de referência para os ensaios em proveta	103

4.6	Levantamento da curva de calibração para as suspensões estudadas	104
4.7	Propriedades físicas dos sólidos	105
4.7.1	Determinação das densidades dos sólidos	106
4.8	Determinação das densidades superficiais dos sólidos (σX)	110
4.9	Análise do erro associado às medidas de concentração de sólidos	112
4.9.1	Determinação da representatividade ótima da concentração local baseada na média amostral da contagem de pulsos	112
4.9.2	Análise do erro associado ao tempo de contagem de pulsos	114
4.10	Monitoramento da concentração volumétrica de sólidos $\varepsilon_s(z, t)$	114
4.11	Monitoramento da concentração volumétrica de sólidos $\varepsilon_s(z)$	116
4.11.1	Obtenção das distribuições de concentrações em sedimentos	116
4.12	Equações constitutivas para o espessamento e filtração	117
4.12.1	Obtenção das equações constitutivas para tensão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso utilizando a metodologia desenvolvida por Damasceno (1992)	117
4.12.2	Determinação da permeabilidade de sistemas diluídos	119
4.13	Comportamento de sistemas sólido-líquidos	121
4.13.1	Avaliação da dinâmica de queda de partículas sólidas imersas em meio fluido	121
4.13.2	Avaliação da compressibilidade de sedimentos formados a partir da separação de partículas com diferentes propriedades físicas	123
4.13.3	Avaliação do efeito da distribuição de tamanhos de amostras de sólidos sobre a dinâmica de sedimentação e compressibilidade do sistema	124
4.13.4	Avaliação do efeito da forma da partícula sobre a dinâmica de sedimentação e compressibilidade do sistema	124
5	Resultados e Discussões	127
5.1	Otimização dos Testes Experimentais e Sistematização dos Erros	127
5.1.1	Otimização de medidas de centralidade e espalhamento de uma amostra de dados	127
5.1.2	Análise do erro associado ao intervalo de tempo de contagem de pulsos	129

5.1.3	Avaliação de medidas para condições de referências do branco da proveta através da variabilidade dos dados por imperfeições dos recipientes de testes	131
5.2	Sedimentação em batelada: Resultados experimentais	134
5.2.1	Análise do comportamento de sistemas sólido-líquidos com base nas propriedades físicas dos materiais sólidos	134
5.2.2	As regiões da sedimentação em batelada: Análise dinâmica das distribuições de concentrações	152
5.2.3	Curvas de equi-concentrações	157
5.3	Equações Constitutivas	161
5.3.1	Determinação da permeabilidade do meio poroso de suspensões aquosas diluídas	161
5.3.2	Determinação de equações constitutivas para a pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso	168
5.4	Simulação numérica da sedimentação em campo gravitacional	184
5.4.1	Métodos numéricos e adaptativos para a resolução de modelos matemáticos para a sedimentação	184
5.4.2	Simulação numérica do modelo de Burger e Concha (1998)	187
5.4.3	Simulação numérica do modelo alternativo	200
6	Conclusões e Sugestões	233
6.1	Conclusões	233
6.2	Sugestões para trabalhos futuros	235
	Referências Bibliográficas	237
	Anexo A	243
	Fundamentos da estatística aplicados no tratamento de dados experimentais . .	243
	Anexo B	249
	Métodos Numéricos e Adaptativos	249
	Apêndice A	255
	Resultados das Simulações Numéricas	255

Apêndice B	265
-------------------	------------

Programação Computacional	265
-------------------------------------	-----

LISTA DE FIGURAS

1.1	Sedimentador convencional em operação	2
3.1	Curva da sedimentação em batelada na qual são apresentadas as linhas de equi-concentração previstas pela teoria de Kynch (1952).	27
3.2	Regiões da sedimentação em batelada.	28
3.3	Comparação dos sedimentos formados a partir da sedimentação de sólido incompressível (A) e sólido compressível (B)	29
3.4	Regiões da sedimentação em batelada: interfaces	49
3.5	As descontinuidades da sedimentação em batelada	55
3.6	Comparação entre modelos matemáticos e o fenômeno físico real	60
3.7	Comportamento da tensão efetiva nos sólidos	74
3.8	Gráfico da função fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch f_{bk}	76
3.9	Caso particular de coeficiente de difusão $\alpha(\varepsilon_s)$ da Equação (3.249)	78
3.10	Curvas típicas de pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso	83
3.11	Regiões específicas da sedimentação em batelada e as descontinuidades da variável concentração volumétrica de sólidos	83
4.1	Esquema geral da unidade experimental de aplicação de radioisótopos	88
4.2	Coluna de sedimentação e sistema fonte-deteção de radiação	89
4.3	Válvula fotomultiplicadora e os módulos do sistema de deteção	90
4.4	Vista esquemática do sistema de deteção de raios γ	91

4.5	Vista do agitador usado na homogeneização das suspensões	92
4.6	Detalhes do SCA e do discriminador de voltagem da fonte de alta tensão e do amplificador	94
4.7	Determinação da voltagem ótima	95
4.8	Espectro de emissão do Amerício	96
4.9	Probabilidade de absorção de radiação por um meio físico qualquer	99
4.10	Curvas de calibração para suspensões aquosas dos materiais sólidos	105
4.11	Distribuição de tamanhos de partículas de caulim	109
4.12	Densidades superficiais de suspensões aquosas	113
4.13	Teste de sedimentação em proveta para determinação da permeabilidade .	120
4.14	Escoamento laminar ao redor de partículas com diferentes formas	122
4.15	Consolidação de partículas irregulares (A) e regulares (B) no sedimento . .	123
5.1	Análise do desvio padrão amostral das contagens de pulsos	128
5.2	Médias e desvios de contagens de pulsos para diversos intervalos de tempo	130
5.3	Desvios percentuais das contagens de pulsos para diversos intervalos de tempo	131
5.4	Distribuição da contagem de pulsos ao longo do recipiente de testes A . . .	132
5.5	Distribuição da contagem de pulsos ao longo do recipiente de testes B . . .	133
5.6	Análise visual das partículas sólidas utilizando microscópio ótico: caulim (A), carbonato de cálcio (B) e microesferas de vidro (C)	136
5.7	Monitoramento de interfaces superiores em testes de sedimentação em batelada	137
5.8	Diagramas de distribuições em sedimentos de caulim (A), carbonato de cálcio (B) microesferas de vidro (C)	139
5.9	Pressões nos sólidos em sedimentos de caulim (A), carbonato de cálcio (B) microesferas de vidro (C)	140
5.10	Monitoramento da interface superior em testes de sedimentação batelada .	142
5.11	Distribuição de concentrações: amostra original	143
5.12	Distribuição de concentrações: amostra classificada por peneiras ($d < 38\mu\text{m}$)	143
5.13	Pressão nos sólidos versus concentração local das suspensões ($\varepsilon_{s0} = 8\%$) . .	144

5.14	Monitoramento da interface superior em testes de sedimentação batelada para caulim e microesfera de vidro	146
5.15	Distribuições de concentrações em sedimentos de caulim	147
5.16	Distribuições de concentrações em sedimentos de microesferas de vidro . . .	148
5.17	Pressão nos sólidos versus concentração local de suspensões de caulim ($\varepsilon_{s0}=8\%$)	149
5.18	Pressão nos sólidos versus concentração local de suspensões de microesferas de vidro ($\varepsilon_{s0}=8\%$)	149
5.19	Curvas típicas da concentração volumétrica local como função do tempo . .	153
5.20	Variação da concentração volumétrica local com o tempo na região I	153
5.21	Variação da concentração volumétrica local com o tempo na região II . . .	154
5.22	Monitoramento da concentração de sólidos ao longo do tempo para a posição de 9 cm acima da base da coluna	155
5.23	Variação da concentração volumétrica local com o tempo na região III . . .	156
5.24	Distribuições de concentração em função da posição e do tempo para testes de sedimentação em batelada de suspensões aquosas de CaCO_3 a 3% em volume	157
5.25	Superfície de distribuições de $\varepsilon_s(z, t)$ (a) e contornos de equi-concentrações (b)	159
5.26	Curvas de equi-concentrações para suspensões aquosas de CaCO_3 (3%) determinadas utilizando-se todos os pontos experimentais coletados	160
5.27	Curvas de equi-concentrações para suspensões aquosas de CaCO_3 (3%) determinadas a partir das médias das concentrações locais	160
5.28	Monitoramento da interface descendente em suspensões aquosas de caulim nas concentrações iniciais de 2 e 3% em volume, respectivamente	161
5.29	Monitoramento da interface descendente em suspensões aquosas de caulim nas concentrações iniciais de 4 e 5% em volume, respectivamente	162
5.30	Monitoramento da interface descendente em suspensões aquosas de carbonato de cálcio nas concentrações iniciais de 2 e 3% em volume, respectivamente	162
5.31	Monitoramento da interface descendente em suspensões aquosas de carbonato de cálcio nas concentrações iniciais de 4 e 5% em volume, respectivamente	163
5.32	Monitoramento da interface descendente em suspensões aquosas de microesferas de vidro nas concentrações iniciais de 4 e 5% em volume, respectivamente	164

5.33	Monitoramento de suspensões de caulim nas concentrações iniciais de 2, 3, 4 e 5% em volume	164
5.34	Monitoramento de suspensões de carbonato de cálcio nas concentrações iniciais de 2, 3, 4 e 5% em volume	165
5.35	Monitoramento de suspensões de microesferas de vidro nas concentrações iniciais de 4 e 5% em volume	165
5.36	Distribuições de concentrações em sedimentos de caulim $\varepsilon_{s0}=12\%$ na condição de decantação natural das partículas (condição de não-escoamento) .	169
5.37	Distribuições de concentrações em sedimentos de caulim $\varepsilon_{s0}=12\%$ na condição de percolação do líquido sob a matriz porosa	169
5.38	Pressão nos sólidos como função da concentração local para suspensões aquosas de caulim em $\varepsilon_{s0}=12\%$	172
5.39	Parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos em suspensões aquosas de caulim por diferentes metodologias	174
5.40	Parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos em uma faixa específica de concentrações	175
5.41	Parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos em diversas estimativas iniciais de regressão	176
5.42	Derivada da pressão nos sólidos de Tiller e Leu (1980) em termos da concentração local	178
5.43	Análise de sensibilidade dos parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980)	178
5.44	Modelo de potências proposto para a equação constitutiva da pressão nos sólidos	180
5.45	Permeabilidade do meio poroso de suspensões aquosas de caulim ($\varepsilon_{s0}=12\%$)	182
5.46	Equação constitutiva para a permeabilidade do meio poroso de suspensões aquosas de caulim	183
5.47	Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as equações constitutivas de Been e Sills (1981) para o tempo de 20.000 s . .	190
5.48	Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as equações constitutivas de Been e Sills (1981) para o tempo de 50.000 s . .	191
5.49	Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as equações constitutivas de Been e Sills (1981) para os tempos de 4.900, 9.900, 19.900, 29.900, 39.900 e 50.000 s	191
5.50	Deslocamento das interfaces ao longo do tempo	192
5.51	Contornos de concentrações para a simulação numérica do estudo experimental de Been e Sills (1981)	193

5.52	Comportamento da região de compactação. Curvas de equi-concentração para o caso relativo ao experimento A de Been e Sills (1981) $\varepsilon_s=(0,125; 0,15 \text{ e } 0,175)$, curvas vermelha, azul e preta respectivamente	193
5.53	Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as equações constitutivas de Been e Sills (1981) Exp. B para os tempos de 1.900, 4.900, 9.900, 14.900 e 20.000 s	195
5.54	Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as equações constitutivas de Becker (1982) para os tempos de 4.900, 9.900, 14.900 e 19.900, 29.900 e 40.000 s	196
5.55	Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as equações constitutivas de Tiller et al. (1991) para os tempos de 400, 700, 900 e 1.500 e 2.000 s	197
5.56	Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as equações constitutivas de Dreher (1997) para os tempos de 9.900, 19.900, 29.900, 39.900 e 50.000 s	199
5.57	Esquema da malha inicial para o problema unidimensional da sedimentação em batelada ($t=0$)	202
5.58	Gráfico da função $\Gamma(\varepsilon_s)$	212
5.59	Gráfico do coeficiente de difusão $D(\varepsilon_s)$	213
5.60	Simulação numérica preliminar para suspensões aquosas de caulim 2% na posição 2 cm	214
5.61	Simulação numérica preliminar para suspensões aquosas de caulim 2% na posição 3 cm	215
5.62	Equações constitutivas $\hat{f}_{bk}^I$ e $\hat{f}_{bk}^{II}$ para caulim	217
5.63	Avaliação da sensibilidade do parâmetro ε_{sm} no modelo generalizado de Michael e Bolger	218
5.64	Comparação entre as funções f_{bk} e $-\Gamma$ para o sistema proposto	219
5.65	Avaliação do comportamento da função f_{bk} em termos das restrições impostas pelo modelo	220
5.66	Gráfico da função f_{bk} experimental para suspensões diluídas	221
5.67	Variação da concentração em função do tempo para as posições 1 e 3 cm acima da base ($\varepsilon_{s0}=2\%$)	223
5.68	Variação da concentração em função do tempo para as posições 5 e 9 cm acima da base ($\varepsilon_{s0}=2\%$)	224
5.69	Análise do efeito do refinamento na solução numérica do modelo	224

5.70	Variação da concentração em função do tempo para as posições 2 e 4 cm acima da base ($\varepsilon_{s0}=3\%$)	225
5.71	Variação da concentração em função do tempo para as posições 8 e 10 cm acima da base ($\varepsilon_{s0}=3\%$)	226
5.72	Variação da concentração em função do tempo para as posições 2 e 5 cm acima da base ($\varepsilon_{s0}=5\%$)	227
5.73	Variação da concentração em função do tempo para as posições 7 e 16 cm acima da base ($\varepsilon_{s0}=5\%$)	228
5.74	Apresentação da malha móvel para $N=11$ e $\tau=10^{-3}$	230
5.75	Solução numérica do modelo alternativo pelo método de <i>Moving Mesh</i> . . .	231
A.1	Concentração em função do tempo nas posições 1 e 2 cm ($\varepsilon_{s0}=2\%$)	255
A.2	Concentração em função do tempo nas posições 3 e 4 cm ($\varepsilon_{s0}=2\%$)	256
A.3	Concentração em função do tempo nas posições 5 e 6 cm ($\varepsilon_{s0}=2\%$)	256
A.4	Concentração em função do tempo nas posições 7 e 8 cm ($\varepsilon_{s0}=2\%$)	256
A.5	Concentração em função do tempo nas posições 9 e 10 cm ($\varepsilon_{s0}=2\%$)	257
A.6	Concentração em função do tempo nas posições 1 e 2 cm ($\varepsilon_{s0}=3\%$)	257
A.7	Concentração em função do tempo nas posições 3 e 4 cm ($\varepsilon_{s0}=3\%$)	257
A.8	Concentração em função do tempo nas posições 5 e 6 cm ($\varepsilon_{s0}=3\%$)	258
A.9	Concentração em função do tempo nas posições 7 e 8 cm ($\varepsilon_{s0}=3\%$)	258
A.10	Concentração em função do tempo nas posições 9 e 11 cm ($\varepsilon_{s0}=3\%$)	258
A.11	Concentração em função do tempo nas posições 12 e 13 cm ($\varepsilon_{s0}=3\%$)	259
A.12	Concentração em função do tempo nas posições 1 e 3 cm ($\varepsilon_{s0}=5\%$)	259
A.13	Concentração em função do tempo nas posições 4 e 6 cm ($\varepsilon_{s0}=5\%$)	259
A.14	Concentração em função do tempo nas posições 8 e 9 cm ($\varepsilon_{s0}=5\%$)	260
A.15	Concentração em função do tempo nas posições 10 e 11 cm ($\varepsilon_{s0}=5\%$)	260
A.16	Concentração em função do tempo nas posições 12 e 13 cm ($\varepsilon_{s0}=5\%$)	260
A.17	Concentração em função do tempo nas posições 14 e 15 cm ($\varepsilon_{s0}=5\%$)	261
A.18	Concentração em função do tempo nas posições 17 e 18 cm ($\varepsilon_{s0}=5\%$)	261
A.19	Concentração em função do tempo nas posições 19 e 20 cm ($\varepsilon_{s0}=5\%$)	261

A.20 Resultados da simulação numérica do modelo de Burger e Concha (1998) em malha variável	262
A.21 Comportamento da malha variável para a solução do modelo de Burger e Concha (1998)	263

LISTA DE TABELAS

4.1	Determinação do tempo morto	97
4.2	Composição das microesferas de vidro	107
4.3	Parâmetros do modelo RRB	108
4.4	Coefficientes de atenuação mássicos para raios γ com energia de 60 keV . .	111
4.5	Valores teóricos de σX para suspensões aquosas em diversas concentrações volumétricas e $y=6,2$ cm	112
5.1	Contagens de pulsos médios para diferentes intervalos de tempos	129
5.2	Análise estatística do teste de hipóteses	134
5.3	Valores de permeabilidade de meios porosos médios ($\bar{k}$)	167
5.4	Parâmetros da equação de Arouca (2003)	170
5.5	Parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos ($\varepsilon_{s0}=12\%$)	173
5.6	Parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos obtidos por Silva (2004)	173
5.7	Parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos para a faixa de concentrações $0 \leq \varepsilon_s \leq 0,25$	175
5.8	Cálculos das derivadas da pressão nos sólidos em termos dos parâmetros de Tiller e Leu (1980)	179
5.9	Parâmetros de ajuste do modelo de potências para a pressão nos sólidos . .	180
5.10	Parâmetros de ajuste da equação de Tiller e Leu (1980) para a permeabi- lidade do meio poroso	183

5.11 Valores da função f_{bk} para baixas concentrações 221

A.1 Quadro de análise de variância 247

SIMBOLOGIA

Os principais símbolos utilizados neste trabalho foram:

a	-coeficiente difusivo	$M^0L^0T^{-1}$
a	-parâmetro da Equação de Arouca (2003)	$M^0L^0T^0$
a	-parâmetro do modelo de potências para a pressão	$M^1L^{-1}T^{-2}$
A_u	-área unitária do sedimentador	$M^0L^2T^0$
b	-parâmetro da Equação de Arouca (2003)	$M^0L^0T^0$
b	-parâmetro do modelo de potências para a pressão	$M^0L^0T^0$
b	-vetor intensidade de campo	$M^0L^0T^0$
B	-inclinação da curva de calibração	$M^0L^0T^0$
c	-parâmetro da Equação de Arouca (2003)	$M^0L^0T^0$
c_0	-parâmetro da Equação (3.72)	$M^0L^{-2}T^0$
c_1	-parâmetro da Equação (3.72)	$M^0L^{-2}T^0$
CP	-contagem de pulsos	$M^0L^0T^{-1}$
d	-diâmetro característico	$M^0L^1T^0$
d'	-parâmetro do modelo RRB	$M^0L^1T^0$
$d\%$	-desvio padrão percentual	$M^0L^0T^0$
d_{50}	-diâmetro de corte de 50%	$M^0L^1T^0$
d_{100}	-diâmetro de corte de 100%	$M^0L^1T^0$
$d_{63,2}$	-diâmetro de corte de 63,2%	$M^0L^1T^0$
d_v	desvio padrão da contagem de pulsos	$M^0L^0T^{-1}$
D	-coeficiente de difusão	$M^0L^0T^{-1}$
$\bar{D}$	-diâmetro médio de <i>Sauter</i>	$M^0L^1T^0$
e	-vetor normal à superfície singular	$M^0L^0T^0$
f	-função densidade de fluxo de sólido	$M^0L^0T^{-1}$
f_{bk}	-fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch	$M^0L^0T^{-1}$
F_{obs}	- F de Fisher observado	$M^0L^0T^0$
F_b	-força de campo	$M^0L^1T^{-2}$
F_i	-força que atua no componente i	$M^0L^1T^{-2}$
F_l	-força de interação	$M^0L^1T^{-2}$

(*Continua na próxima página*)

F_r	-número de <i>Froude</i>	$M^0L^0T^0$
F_s	-força de superfície	$M^0L^1T^{-2}$
g	-constante gravitacional	$M^0L^1T^{-2}$
h_{mf}	-espaçamento da malha fixa	$M^0L^0T^0$
I	-intensidade do feixe após a passagem pelo meio físico	$M^0L^0T^0$
I	-matriz identidade	$M^0L^0T^0$
I_A	-contagem de pulsos que atravessam o blocos A	$M^0L^0T^0$
I_{AB}	-contagem de pulsos que atravessam os blocos A e B	$M^0L^0T^0$
I_B	-contagem de pulsos que atravessam o blocos B	$M^0L^0T^0$
I_G	-medida do <i>background</i>	$M^0L^0T^0$
I_0	-intensidade do feixe antes da passagem pelo meio físico	$M^0L^0T^0$
k	-permeabilidade do meio poroso	$M^0L^2T^0$
k_0	-parâmetro da equação de Tiller e Leu (1980) para k	$M^0L^2T^0$
L	-altura máxima da coluna de sedimentação	$M^0L^1T^0$
l	-vetor campo de interação	$M^0L^0T^0$
m	-força resistiva	$M^1L^{-2}T^{-2}$
M	-função de monitoramento (<i>Moving Mesh</i>)	$M^0L^0T^0$
m	-massa	$M^1L^0T^0$
m_{susp}	-massa da suspensão	$M^1L^0T^0$
m_b	-parte hidrostática (força resistiva)	$M^1L^{-2}T^{-2}$
m_d	-parte dinâmica (força resistiva)	$M^1L^{-2}T^{-2}$
m_i	-massa do constituinte i	$M^0L^0T^0$
n	-vetor unitário normal à superfície S	$M^0L^0T^0$
n	-parâmetro do modelo RRB	$M^0L^0T^0$
p	-pressão no poro	$M^0L^0T^0$
P_{s0}	-pressão do sólido em ε_{s0}	$M^1L^{-1}T^{0-2}$
P_{sc}	-pressão crítica	$M^1L^{-1}T^{-2}$
P_a	-parâmetro da equação de Tiller e Leu (1980) para P_s	$M^1L^{-1}T^{-2}$
P_f	-pressão no líquido	$M^1L^{-1}T^{-2}$
p_i	-pressão (parte arbitrária do tensor)	$M^1L^{-1}T^{-2}$
P_i	-pressão no constituinte i	$M^1L^{-1}T^{-2}$
P_s	-pressão nos sólidos	$M^1L^{-1}T^{-2}$
P'_s	-derivada primeira da pressão nos sólidos	$M^1L^{-1}T^{-2}$
P_T	-pressão total	$M^1L^{-1}T^{-2}$
q	-velocidade superficial da mistura	$M^0L^1T^{-1}$
q_f	-velocidade superficial do líquido	$M^0L^1T^{-1}$
q_s	-velocidade superficial do sólido	$M^0L^1T^{-1}$
R	-contagem corrigida de pulsos	$M^0L^0T^{-1}$
R_0	-contagem corrigida de pulsos (branco da proveta)	$M^0L^0T^{-1}$
S	-superfície	$M^0L^0T^0$
SM	-função de suavização da malha (<i>Moving Mesh</i>)	$M^0L^0T^0$
t	-tempo	$M^0L^0T^1$
T_f^E	-tensão extra no constituinte líquido	$M^1L^{-1}T^{-2}$
T_s^E	-tensão extra no constituinte sólido	$M^1L^{-1}T^{-2}$
t_c	-tempo de contagem de pulsos	$M^0L^0T^1$
T_f	-tensor tensão no constituinte líquido	$M^1L^{-1}T^{-2}$

(*Continua na próxima página*)

T'_i	-tensão extra (parte constituinte do tensor)	$M^1L^{-1}T^{-2}$
t_L	-tempo da tangente da curva na camada crítica	$M^0L^0T^1$
T_s	-tensor tensão no constituinte sólido	$M^1L^{-1}T^{-2}$
u	-concentração volumétrica (variável computacional)	$M^0L^0T^0$
U	-velocidade de sedimentação livre	$M^0L^1T^{-1}$
u^*	-ponto de máximo da função Γ	$M^0L^0T^0$
u^*	-ponto de mínimo da função f_{bk}	$M^0L^0T^0$
U^*	-velocidade de deslocamento da descontinuidade	$M^0L^1T^{-1}$
$U_{1,2}^*$	-velocidade da interface descendente	$M^0L^1T^{-1}$
$U_{3,4}^*$	-velocidade da interface ascendente	$M^0L^1T^{-1}$
u_∞	-parâmetro da Equação (2.16)	$M^0L^1T^{-1}$
u_0	-concentração volumétrica inicial (variável computacional)	$M^0L^0T^0$
u_1	-concentração volumétrica no topo (variável computacional)	$M^0L^0T^0$
u_c	-concentração crítica (variável computacional)	$M^0L^0T^0$
V	-volume da mistura	$M^0L^3T^0$
v_∞	-velocidade de queda da partícula no infinito	$M^0L^1T^{-1}$
v_{s0}	-velocidade inicial de sedimentação	$M^0L^1T^{-1}$
v_{stk}	-velocidade terminal de <i>Stokes</i>	$M^0L^1T^{-1}$
V_{susp}	-volume da suspensão	$M^3L^0T^0$
v_f	-velocidade intersticial do líquido	$M^0L^1T^{-1}$
V_f	-volume do líquido	$M^0L^3T^0$
v_i	-velocidade intersticial do componente i	$M^0L^1T^{-1}$
V_i	-volume do constituinte i	$M^0L^3T^0$
$V_k(\varepsilon_s)$	-velocidade das equi-concentrações	$M^0L^1T^{-1}$
v_r	-velocidade relativa sólido-líquido	$M^0L^1T^{-1}$
v_s	-velocidade intersticial do sólido	$M^0L^1T^{-1}$
V_s	-volume do sólido	$M^0L^0T^0$
x	- variável espacial	$M^0L^1T^0$
X	-densidade superficial	$M^0L^0T^0$
y	-espessura do meio físico	$M^0L^1T^0$
Y	-fração mássica das partículas	$M^0L^0T^0$
z	-posição	$M^0L^1T^0$
$z_{1,2}$	-posição da interface descendente	$M^0L^1T^0$
$z_{3,4}$	-posição da interface ascendente	$M^0L^1T^0$
α	-função isotrópica escalar	$M^0L^0T^0$
α_0	-função escalar isotrópica	$M^0L^0T^0$
α_1	-função escalar isotrópica	$M^0L^0T^0$
α_2	-função escalar isotrópica	$M^0L^0T^0$
α_n	-função escalar isotrópica	$M^0L^0T^0$
$\bar{\rho}_i$	-concentração mássica do constituinte i	$M^1L^{-3}T^0$
$1/\beta$	-parâmetro da equação de Tiller e Leu (1980) para P_s	$M^0L^0T^0$
$\Delta\rho$	-variação das massas específicas dos constituintes	$M^1L^{-3}T^0$
ε_{fc}	-porosidade crítica	$M^0L^0T^0$
ε_{s0}	-concentração volumétrica inicial	$M^0L^0T^0$
ε_{sc}	-concentração crítica do sólido	$M^0L^0T^0$
ε_{sc}	-parâmetro da equação de Tiller e Leu (1980)	$M^0L^0T^0$

(*Continua na próxima página*)

ε_{sf}	-concentração da alimentação	$M^0L^0T^0$
ε_{sm}	-concentração máxima do sólido	$M^0L^0T^0$
ε_{su}	-concentração da lama	$M^0L^0T^0$
ε_f	-porosidade	$M^0L^0T^0$
ε_i	-fração volumétrica do constituinte i	$M^0L^0T^0$
ε_s	-concentração volumétrica de sólidos	$M^0L^0T^0$
η	-parâmetro da equação de Tiller e Leu (1980) para k	$M^0L^0T^0$
γ	-função isotrópica escalar	$M^0L^0T^0$
Γ	-parâmetro do modelo matemático alternativo	$M^0L^0T^{-1}$
$\hat{f}_{bk}$	-fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch	$M^0L^1T^{-1}$
λ	-raiz característica	$M^0L^0T^0$
λ_1	-raiz característica	$M^0L^0T^0$
λ_2	-raiz característica	$M^0L^0T^0$
μ	-viscosidade do líquido	$M^1L^{-1}T^{-1}$
ω_f	-fração mássica do líquido	$M^0L^0T^0$
ω_i	-fração mássica do constituinte i	$M^0L^0T^0$
ω_s	-fração mássica do sólido	$M^0L^0T^0$
Ψ	-propriedade volumérica	$M^0L^{-3}T^0$
ρ_f	-massa específica do líquido	$M^1L^{-3}T^0$
ρ_s	-massa específica do sólido	$M^1L^{-3}T^0$
$\sigma(E)$	-coeficiente de atenuação mássico	$M^{-1}L^2T^0$
σ_e	-tensão efetiva no sólido	$M^1L^{-1}T^{-2}$
σ'_e	-derivada primeira da tensão efetiva nos sólidos	$M^1L^{-1}T^{-2}$
$(\sigma X)_{susp}$	-densidade superficial da suspensão	$M^0L^0T^0$
τ	-tempo morto	$M^0L^0T^1$

RESUMO

Sedimentadores são equipamentos que utilizam a força gravitacional como agente separador de partículas sólidas suspensas em correntes líquidas de processos industriais. O uso comum dos sedimentadores em indústrias químicas desperta o interesse no desenvolvimento de estudos cada vez mais elaborados sobre o assunto. A sedimentação em batelada é o ponto de partida para o projeto de unidades industriais contínuas. A operação que consiste na separação de uma suspensão sólido-líquido pode ter sua representação fenomenológica através da introdução da Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo com a aplicação das equações da continuidade e do movimento para ambos os constituintes sólido e líquido e pelo conhecimento de equações constitutivas relativas a cada sistema em particular. O conhecimento da concentração de partículas por sua vez é de extrema importância para a descrição do fenômeno. Para suspensões bem diluídas a concentração de sólidos pode ser medida por técnicas de amostragem, mas a extensão de tal técnica para suspensões mais concentradas não conduz a bons resultados. Neste trabalho estudou-se o fenômeno da sedimentação em batelada de suspensões aquosas de diferentes materiais sólidos, utilizando uma técnica não destrutiva baseada na medida de atenuação de raios gama. À medida que o feixe de radiação atravessa o meio físico como função da concentração local em diversas posições verticais do recipiente, fazia-se a leitura indireta da concentração local sem necessitar de amostragem por alíquotas da suspensão. O processo de sedimentação em batelada apresenta como característica a formação de regiões distintas, como a de líquido clarificado, a de sedimentação livre e a de compactação, separadas por fronteiras móveis que variam com o tempo e que por sua vez aumentam o grau de complexidade da modelagem do fenômeno. Para a descrição do fenômeno é necessário a obtenção de equações constitutivas para pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso, ambas dependentes da concentração local de sólidos. Para tanto, um modelo matemático para a sedimentação unidimensional foi aprimorado pela introdução de conceitos físicos do modelo de D'Ávila (1978) na abordagem matemática do trabalho de Burger e Concha (1998). O sistema de equações algébrico-diferenciais foi resolvido utilizando-se o pacote computacional DASSL disponível no *Scilab*[®], empregando-se para tanto o método de Diferenças Finitas acoplado ao método MUSCL de segunda ordem e o método das linhas (MOL). As equações de *Moving Mesh* foram acopladas ao sistema original a fim de aumentar a precisão do problema pela estimativa da derivada da função em cada passo de integração, que por sua vez tornava possível a adaptação a malha móvel em regiões

próximas as descontinuidades do fenômeno, caracterizando o problema híbrido pelo uso de malhas fixa e móvel. Por fim, resultados experimentais do monitoramento da concentração volumétrica de sólidos como função da posição no sedimentador e do tempo de separação foram usados para a validação do modelo. Os resultados das simulações numéricas mostraram que o modelo misto hiperbólico-parabólico apresentado descreve adequadamente o fenômeno físico em todo o seu domínio sem que haja a necessidade do uso de condições de salto nas fronteiras móveis. Além disso, observou-se que qualidade da solução é melhor para sistemas pouco permeáveis e a qualidade das simulações se restringe a qualidade das equações constitutivas obtidas para o material sólido. Diversos resultados em análises estáticas e dinâmicas do comportamento de sistemas sólido-líquidos tornaram possível a descrição física da sedimentação em batelada com base em propriedades específicas dos materiais sólidos. Uma rigorosa avaliação na obtenção de equações constitutivas apontou que o modelo de Tiller e Leu (1980) é dependente de uma estimativa inicial adequada para os parâmetros da equação e com base nos resultados foi apresentado um modelo de potências biparamétrico para a tensão nos sólidos. O uso de equações constitutivas cada vez mais precisas se mostrou como o ponto fundamental na descrição fenomenológica da sedimentação em batelada.

ABSTRACT

Settlers are equipments that uses the gravitational force as separating agent of suspended solid particle in liquid chains of industrial processes. The frequent use of the settlers in chemical industries is the reason of the interest on the development of studies on the subject. The batch sedimentation is the starting point for the project of continuous industrial units. The operation that consists on the separation of a solid-liquid suspension may have its phenomenological representation through the introduction of the Mixtures' Theory of Continuum Mechanics with the application of the continuity and movement equations for both the solid and liquid constituent and for the knowledge of constitutive equations to each system in particular. The knowledge of the particle concentration is of extreme importance for the description of the phenomenon. For diluted suspensions the solid concentration can be measured by sampling techniques, but the extension of such technique for more concentrated suspensions does not lead to the good results. In this work the batch sedimentation phenomena was studied in aqueous suspensions of different solid materials, using one not destructive technique based on the measure of gamma rays attenuation. Once the radiation beam crosses the environment as function of the local concentration for several vertical positions of the container, indirect measurements of the local concentration were done without the use of sampling for aliquot of the suspension. The batch sedimentation process presents as particular characteristic the formation of distinct regions, as the clean liquid, the free settling and the compacting region, each one separated for mobile borders that vary with the time and that increase the degree of complexity of the modelling of the phenomenon. For the description of the phenomenon it is necessary to determine the constituent equations for the pressure in solids and the permeability of the porous media, both as a function of the local solid concentration. So, a mathematical model for the unidimensional sedimentation was improved by the introduction of physical concepts of the model by D'Ávila (1978) in the mathematical techniques introduced by Burger e Concha (1998). The differential-algebraic equations system was solved using the available computational package DASSL in the *Scilab*®, using the method of Finite Differences connected to the second order method MUSCL and the method of the lines (MOL). The Moving Mesh equations had been connected to the original system in order to increase the resolution of the problem for the estimate of the derivatives of the function on each step of integration. It became possible the adaptative mesh at the regions next to the discontinuities of the phenomenon, characterizing the hy-

brid problem for fixed and adaptative meshes. Finally, experimental results of volumetric solid concentration as function of the position and the time of separation had been used for the validation of the model. The results of the numerical simulations had shown that the presented hyperbolic-parabolic mixed model adequately describes the physical phenomenon in all its domain without the necessity of the use of jump conditions on the mobile borders. Moreover, it was observed that quality of the solution is better for systems with low permeabilities and the quality of the simulations was restricted to the quality of the constituent equations for the solid material. Several results in static and dynamic analyses of the behavior of solid-liquids systems had become possible the physical description of the batch sedimentation based on the specific properties of the solid materials. A rigorous evaluation of the constituent equations pointed that the model of Tiller e Leu (1980) depends on the initial estimative of the adjusted parameters of the equation. According to analysis of the results it was possible to present a biparametric power model for the tension in solids. The use of good constitutive equations is the point of fundamental importance for the phenomenological description of the batch sedimentation.

CAPÍTULO 1

Introdução

EDIMENTADORES são equipamentos projetados para promover a separação das fases sólida e fluida em suspensões cujo interesse comercial varia desde a purificação ou clarificação de uma corrente líquida ao processo de concentração de materiais particulados. A separação basicamente ocorre pela ação do campo gravitacional sobre as diferenças de densidades dos constituintes da mistura. Tais equipamentos são bastante comuns em indústrias químicas, estações de tratamento de água e efluentes líquidos e unidades de beneficiamento de minérios, motivo que desperta o crescente interesse no desenvolvimento de estudos cada vez mais elaborados sobre o assunto.

É comum classificar os sedimentadores em dois grupos: os clarificadores, com produção de lamas de baixas concentrações e os espessadores, nos quais o produto de interesse é a fase sólida e que se caracterizam pela produção de lamas altamente concentradas. A Figura 1.1 apresenta a foto de um sedimentador convencional em uma unidade de beneficiamento de minério.

A maneira mais simples e eficiente para o estudo das condições operacionais de sedimentadores em escala laboratorial consiste basicamente de testes de sedimentação em batelada de suspensões com concentrações iniciais previamente estabelecidas.

O conhecimento das concentrações de partículas é de fundamental importância para o estudo de processos de sedimentação. As concentrações locais de sólidos de suspensões muito diluídas podem ser determinadas através de técnicas de simples amostragem. Entretanto, a extensão de tal técnica para suspensões mais concentradas não conduz a re-



Figura 1.1: Sedimentador convencional em operação.

sultados satisfatórios uma vez que provoca perturbações no sistema. Uma alternativa para o monitoramento de concentrações é a utilização de técnicas mais elaboradas baseadas em medidas não invasivas.

O presente trabalho se trata de um estudo teórico-experimental da sedimentação em batelada que emprega a técnica de atenuação de radiações de altas energias, tal como os raios γ , como ferramenta no desenvolvimento do trabalho, tornando possível a medição de concentrações sem que haja interferência no processo de separação.

A principal contribuição do trabalho sob o ponto de vista experimental ocorre pela execução de testes estáticos e dinâmicos para o monitoramento de sistemas sólido-líquidos isotérmicos e não-reacionais, tal como a sedimentação gravitacional em batelada. Tais ensaios permitem a determinação de distribuições de concentrações locais de sólidos como função da posição e do tempo em recipientes de testes. O amplo conjunto de resultados obtidos abrange desde a determinação de equações constitutivas necessárias para a simulação de um modelo matemático à descrição física do comportamento do fenômeno em termos das variáveis envolvidas.

Concomitantemente ao desenvolvimento do trabalho experimental, modelos matemáticos da literatura foram analisados e utilizados para o desenvolvimento de um modelo fenomenológico alternativo que contribui para a descrição teórica da sedimentação. O modelo de caráter misto hiperbólico-parabólico obtido se baseia nos princípios da Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo e em trabalhos inter-relacionados de diferentes autores. A solução numérica do problema consiste da resolução de um conjunto de equa-

ções algébrico-diferencial que emprega métodos numéricos acoplados, tais como o método das Diferenças Finitas e *Moving Mesh* juntamente com o algoritmo de aproximação espacial MUSCL de segunda ordem, contribuindo no aspecto numérico inovador da classe de problemas de soluções descontínuas.

A finalização do trabalho ocorre com a validação do modelo matemático proposto para a sedimentação tomando-se como base os resultados experimentais de testes de sedimentação em batelada. Por fim, análises específicas do comportamento de materiais particulados nas avaliações dinâmicas de separação e acomodação dos sedimentos foram exploradas para uma descrição fidedigna do fenômeno.

A estrutura do trabalho está distribuída da seguinte forma:

Capítulo 2: apresenta uma revisão bibliográfica que contempla os principais trabalhos sobre a sedimentação e sua importância na evolução do desenvolvimento do assunto;

Capítulo 3: descreve alguns modelos matemáticos para a sedimentação iniciando pela descrição e análise do célebre trabalho “Uma teoria da Sedimentação” por Kynch (1952) e evoluindo gradualmente até apontar a importância do uso da Teoria das Misturas na descrição do fenômeno. Por outro lado as abordagens matemáticas que simplificam o grau de complexidade da resolução numérica do problema são exploradas, convergindo por fim em um modelo alternativo apresentado neste trabalho;

Capítulo 4: apresenta a descrição dos materiais particulados utilizados no desenvolvimento do trabalho experimental, assim como os equipamentos e recursos disponíveis. A metodologia experimental, os planejamentos estatísticos e otimização dos recursos do sistema também são descritos em detalhes;

Capítulo 5: aponta e discute os resultados obtidos no estudo teórico-experimental da sedimentação gravitacional em batelada.

Capítulo 6: apresenta as principais conclusões obtidas neste trabalho, assim como sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

Revisão Bibliográfica



ESTE CAPÍTULO são apresentadas as publicações mais representativas no que diz respeito à contribuição ao estudo da sedimentação em campo gravitacional e a evolução do tema ao longo dos anos.

Os primeiros registros de estudos da sedimentação gravitacional de partículas sólidas em meio aquoso são do início do século XX por Hazem (1904) *apud* Damasceno (1992), Burger e Concha (1998). O autor mostrou que o tempo de residência não é um fator importante no projeto de sedimentadores e que a quantidade de sólidos removidos depende da área da seção transversal do tanque, das propriedades do material sólido e é inversamente proporcional ao fluxo através do tanque. A invenção do espessador contínuo Dorr em 1905 marca o início da era moderna do espessamento.

O projeto de sedimentadores começou a se consolidar e se tornar mais bem elaborado a partir de bases científicas aplicadas por Mishler (1912) que propôs que a área da seção transversal do equipamento fosse calculada a partir da velocidade ascensional do líquido, suposta igual à velocidade de sedimentação das partículas.

Um dos estudos pioneiros em processos de separação sólido-líquido que aborda o fenômeno da sedimentação em batelada foi apresentado por Coe e Clevenger (1916), que objetivaram explicar melhor o mecanismo do processo. A partir de testes de sedimentação em batelada, os autores propuseram uma expressão para calcular a capacidade de sedimentadores contínuos a partir de resultados obtidos em diversos ensaios de sedimentação em proveta para concentrações que compreendiam uma faixa que variava da concentra-

ção de alimentação à retirada na lama. Desta forma, a velocidade superficial de sólidos alimentados em um sedimentador, q_s , pode ser obtida pela Equação (2.1),

$$q_s = \frac{v_{s0}}{\frac{1}{\varepsilon_{s0}} - \frac{1}{\varepsilon_{su}}} \quad (2.1)$$

na qual v_{s0} é a velocidade inicial de sedimentação em um ensaio de sedimentação em batelada, ε_{s0} é a concentração inicial no ensaio e ε_{su} é a concentração da lama. Foram realizados diversos ensaios em proveta nos quais feitas medidas de concentração e velocidade inicial de sedimentação.

Comings (1940) fazendo uso de um protótipo contínuo concluiu que a metodologia proposta por Coe e Cleverger (1916) só produz resultados satisfatórios quando ocorre formação de sedimentos incompressíveis. Todavia, o procedimento desenvolvido por Coe e Cleverger (1916) perdurou até meados do século XX sem que nenhuma teoria consistente para a sedimentação tivesse sido enunciada até então.

Em 1952, G. L. Kynch, um matemático da Universidade de Birmingham na Inglaterra apresentou seu célebre trabalho “Uma Teoria da Sedimentação” (KYNCH, 1952). Sua teoria é puramente cinemática e baseia-se na propagação de ondas de mesma concentração. Segundo Kynch (1952) o fenômeno da sedimentação é unidimensional e apresenta como característica principal o aumento da concentração com o tempo no sentido do fundo do recipiente. O autor propôs um equacionamento simples para descrever a sedimentação em batelada utilizando apenas a equação da continuidade para o componente sólido:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial q_s}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

em $0 \leq z \leq L$ e $t > 0$, sendo ε_s equivalente a concentração volumétrica de sólidos, q_s a função velocidade superficial dos sólidos dada pela relação $q_s = \varepsilon_s v_s$, t é o tempo de sedimentação e z a posição medida a partir da base da coluna de suspensão de altura L .

Seu estudo baseou-se no monitoramento da interface descendente e no conhecimento da concentração inicial em um teste de proveta. Assim Kynch (1952) descreveu a velocidade de sedimentação das partículas na dispersão como função exclusiva da concentração volumétrica de sólidos e que a mesma tende a zero quando a concentração tende ao seu valor máximo. A solução de seu modelo é a representação matemática de ondas de equi-concentrações que se deslocam em um movimento de ascensão surgindo no sentido da base ao topo do sedimento. A teoria apresenta ainda a descrição de quatro regiões distintas do fenômeno da sedimentação em batelada: região de líquido clarificado, região de sedimentação livre, região de transição e região de formação do sedimento.

Kynch (1952) trouxe simplificações substanciais ao projeto de sedimentadores contínuos pela facilidade de execução dos experimentos que produzem resultados satisfatórios principalmente para o caso de formação de sedimentos incompressíveis ou suspensões diluídas. O projeto de sedimentadores utilizando o método de Kynch necessita de um único teste de proveta com concentração inicial igual à concentração de alimentação no sedimentador, ε_{sf} , enquanto a metodologia proposta por Coe e Clevenger (1916) necessitaria de vários ensaios com a concentração inicial variando da concentração de alimentação à concentração da lama. O modelo matemático de Kynch (1952) será apresentado e discutido com maiores detalhes no Capítulo 3, Modelagem da Sedimentação.

Estudos baseados na teoria de Kynch (1952) continuaram surgindo ao longo dos anos, como é o caso de Talmage e Fitch (1955), que desenvolveram um procedimento gráfico para o cálculo da área da seção transversal de sedimentadores. Em seu estudo propuseram a existência de uma camada crítica no interior do sedimentador, na qual o peso efetivo dos sólidos que sedimentam é equilibrado pela força de arraste do líquido ascendente. Assim obtiveram a seguinte equação de projeto,

$$A_u = \frac{1}{q_s} = \frac{t_L}{\varepsilon_{s0} z_0} \quad (2.3)$$

na qual A_u é a área unitária do sedimentador (área por unidade de vazão volumétrica de alimentação) e t_L o tempo determinado pela interseção da tangente à curva de sedimentação na camada crítica com a linha que representa a concentração da lama,

$$z = z_u = \frac{\varepsilon_{s0} z_0}{\varepsilon_{su}} \quad (2.4)$$

Talmage e Fitch (1955) concluíram que as velocidades de sedimentação calculadas através dos métodos de Coe e Clevenger (1916) e de Kynch (1952) apresentam concordância entre os dois procedimentos somente para o caso de suspensões diluídas.

Shannon et al. (1970) desenvolveram um modelo para a sedimentação contínua e em batelada segundo a teoria de Kynch (1952). Assim como Kynch, interpretaram que durante o processo de sedimentação ocorre uma propagação de ondas de concentração do fundo do sedimentador para cima. Realizaram diversas experiências onde relacionaram a velocidade de sedimentação com a concentração e compararam os seus resultados com os estimados por algumas correlações existentes na literatura. Concluíram que a teoria por eles desenvolvida conduzia a resultados satisfatórios.

Fitch (1966) apresentou um estudo no qual os métodos de projeto de sedimentadores eram analisados e comparados e dentre suas avaliações concluiu que a teoria de Kynch não apresenta bons resultados para sedimentos compressíveis.

Scott (1968, 1970) *apud* Damasceno (1992) e Ruiz (2000), obteve equações empíricas para a sedimentação em batelada relacionando a velocidade de sedimentação com a concentração local de sólidos para faixas de concentrações bem definidas: baixas concentrações (de 0,006 a 0,05 g/cm³), concentrações intermediárias (de 0,05 a 0,21 g/cm³) e altas concentrações (acima de 0,21 g/cm³). A partir de seus ensaios, realizados sob diversas condições de agitação e não agitação, concluiu que se pode projetar sedimentadores contínuos a partir destes testes para suspensões com baixas concentrações de sólidos. Concluiu que ensaios com agitação promovem melhores resultados em simulações das condições operacionais dos sedimentadores, e que, no caso de sedimentos compressíveis, a altura da suspensão no equipamento afeta a concentração da lama, fato que não ocorre em sedimentos incompressíveis.

Diversos testes de sedimentação em batelada de materiais compressíveis foram realizados por Harris et al. (1975) e as análises gráficas das curvas típicas dos resultados mostraram que as curvas de sedimentação apresentavam formato de *S*-invertido sem a presença da região de velocidade constante. Para isso utilizaram suspensão fosfática diluída com pequenas quantidades de partículas mais grossas. Os resultados mostraram ainda que mesmo sem a adição de agente floculante houve formação de pequenos agregados de partículas. Várias regiões foram identificadas na curva de sedimentação. Cada região indicava um mecanismo de sedimentação específico predominante numa faixa de concentração. O trabalho apresentou formulações de modelos matemáticos simples para o fenômeno.

Fitch (1975a, 1975b, 1975c) apresentaram uma revisão sobre as teorias da sedimentação consolidadas na literatura até o presente momento. Os trabalhos apontaram as principais fontes de erros nos projetos de sedimentadores. A avaliação de Fitch foi dividida em três partes:

1. Teoria da sedimentação por zona
2. Teoria da compressão
3. Procedimentos de projeto de sedimentadores.

Lennertz et al. (1975) mostraram, através da comparação de resultados teóricos com os obtidos em experiências num protótipo de sedimentador contínuo que o método de Kynch possibilita melhor estimativa para a capacidade do sedimentador que o de Coe e Clevenger (1916).

Adorján (1975) a partir das equações da continuidade e do movimento propôs um modelo matemático para a sedimentação contínua demonstrando a influência da altura

do sedimento sobre o projeto. Percebeu que ensaios de sedimentação em batelada não fornecem todas as informações necessárias para o projeto de sedimentadores quando o material em questão é compressível. A partir da análise de seus resultados indicou que existe uma faixa limitada de capacidades para a qual o sedimentador pode operar produzindo uma determinada concentração de lama, o que o levou a definir um fator de carga.

Certamente um dos equacionamentos mais rigorosos que descrevem a sedimentação em batelada tenha sido o apresentado por D'Ávila (1976). D'Ávila mostrou que, como no fundo do recipiente tanto a velocidade do fluido quanto a velocidade do sólido devem ser nulas, o problema da sedimentação em batelada pode ser abordado apenas pela resolução das equações da continuidade e do movimento relativas ao sólido adotando hipóteses constitutivas relativas à tensão nos sólidos e à força resistiva a fim de tornar o sistema determinado. Segundo D'Ávila, os tensores tensões nos constituintes sólido e líquido são funções apenas da porosidade do meio. Com tais suposições aplicou a Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo formulando um modelo matemático que descreve teoricamente o processo de sedimentação em batelada através da resolução do seguinte sistema de equações adimensionalizadas:

$$-M \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial T} + (1 - \varepsilon_f) \frac{\partial V}{\partial Z} - V \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial Z} = 0 \quad (2.5)$$

$$(1 - \varepsilon_f) \left(M \frac{\partial V}{\partial T} + V \frac{\partial V}{\partial Z} \right) + K \frac{dP}{d\varepsilon_f} \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial Z} = -AV + B(1 - \varepsilon_f) \quad (2.6)$$

$$V = \frac{v_s}{v_{s0}}, \quad T = \frac{t}{t_0}, \quad Z = \frac{z}{z_0}, \quad P = \frac{P_s}{P_{s0}} \quad (2.7)$$

$$M = \frac{z_0}{v_{s0}t_0}, \quad K = \frac{P_0}{\rho_s v_{s0}}, \quad A = \frac{\mu z_0}{\rho_s v_{s0} k(\varepsilon_f)}, \quad B = \frac{(\rho_s - \rho_f) g z_0}{\rho_s v_{s0}^2}, \quad (2.8)$$

D'Ávila demonstrou que o sistema de equações diferenciais anterior apresenta caráter hiperbólico, prevendo o deslocamento de duas interfaces, uma descendente e outra ascendente, representadas pelas Equações (2.9) e (2.10) respectivamente, o que satisfaz o modelo físico.

$$\frac{dZ}{dT} = \frac{1}{M} \left(V - \sqrt{-K \frac{dP}{d\varepsilon_f}} \right) \quad (2.9)$$

$$\frac{dZ}{dT} = \frac{1}{M} \left(V + \sqrt{-K \frac{dP}{d\varepsilon_f}} \right) \quad (2.10)$$

O autor demonstrou também que a hipótese de Kynch (1952), na qual a velocidade de sedimentação é função apenas da concentração local, implica numa modificação do sistema de equações diferenciais que descreve o fenômeno, que passa a apresentar um caráter parabólico, sendo prevista apenas a ascensão da interface inferior. O modelo matemá-

tico de D'Ávila (1976) será apresentado e discutido com maiores detalhes no Capítulo 3, Modelagem da Sedimentação.

D'Ávila e Sampaio (1977a) enunciaram os teoremas de representação das tensões dos componentes de uma suspensão e da força resistiva para diversas condições de dependência funcional. Demonstraram que, se o tensor tensão nos sólidos é função apenas da porosidade da suspensão, ele apresenta apenas componentes relacionados à compressão. Em seu trabalho, os autores propuseram algumas equações de estado para a tensão nos sólidos no caso da sedimentação.

D'Ávila e Sampaio (1977b) estudaram o projeto de sedimentadores a partir da solução numérica do sistema de equações diferenciais, estabelecido por D'Ávila (1976), usando uma equação constitutiva para a tensão nos sólidos linear em relação à porosidade. Os valores da velocidade de sedimentação e da concentração volumétrica, obtidos por meio da resolução do sistema que necessariamente satisfazia à curva de sedimentação experimental, eram utilizados na equação da capacidade do sedimentador, sendo o valor mínimo adotado no projeto. Esta metodologia não levava em conta os efeitos da compressibilidade do sedimento, que, conforme demonstrado por Adorján (1976), são extremamente importantes.

D'Ávila e Sampaio (1977c) estudaram a influência das equações constitutivas para a tensão nos sólidos no projeto de sedimentadores. Resolveram diversas vezes o problema de valor inicial associado ao sistema proposto por D'Ávila (1976), utilizando em cada caso uma equação constitutiva diferente. Consideraram as condições estabelecidas no ponto crítico (encontro das duas interfaces), determinado pela resolução do primeiro problema de valor inicial, como as condições iniciais de um novo problema de valor inicial, correspondendo a um segundo estágio no processo de sedimentação. Compararam suas soluções com o ensaio experimental e, como resultado, escolheram a equação quadrática da tensão com relação à porosidade como sendo a que leva a melhores resultados.

Concha e Bascur (1977) desenvolveram uma formulação para a sedimentação que resultou numa única equação diferencial parcial não linear dada pela Equação (2.11). Tal equação foi obtida com a substituição da velocidade relativa isolada da equação do movimento para os sólidos sem termos inerciais, na equação da continuidade para os sólidos. Para que a Equação (2.11) seja resolvida é necessário o conhecimento de equações constitutivas para a pressão nos sólidos e permeabilidade do meio.

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} = & G(\varepsilon_f) \frac{dP_s}{d\varepsilon_f} \frac{\partial^2 \varepsilon_f}{\partial z^2} + \left(\frac{dP_s}{d\varepsilon_f} \frac{\partial G(\varepsilon_f)}{\partial \varepsilon_f} + G(\varepsilon_f) \frac{\partial^2 P_s}{\partial \varepsilon_f^2} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} \right)^2 + \\
 & + \left(q(t) + g(\rho_s - \rho_f) \frac{d}{d\varepsilon_f} (G(\varepsilon_f) (1 - \varepsilon_f)) \right) \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

na qual

$$G(\varepsilon_f) = \frac{(1 - \varepsilon_f) k(\varepsilon_f)}{\mu} \quad (2.12)$$

O modelo matemático de Concha e Bascur (1977) será apresentado e discutido com maiores detalhes no Capítulo 3, Modelagem da Sedimentação.

Hamacher (1978) realizou testes de sedimentação em batelada com o uso da Técnica de Atenuação de Raios Gama, obtendo distribuições de concentrações ao longo das colunas de sedimentação. Hamacher determinou equações empíricas para descrever a variação da concentração como uma função da posição e do tempo. Seus estudos concentraram-se nas regiões de sedimentação livre e de compactação e, através do desenvolvimento das equações da continuidade e do movimento concluiu que a velocidade de sedimentação e a pressão nos sólidos não podiam ser expressas apenas como funções da concentração local de sólidos.

Hamacher (1978) concluiu também que os termos da aceleração local e convectiva da equação do movimento são desprezíveis quando comparados aos demais termos.

Um conjunto de equações constitutivas para a tensão nos sólidos e permeabilidade do meio bastante utilizado até os dias atuais foi proposto por Tiller e Leu (1980), que obtiveram resultados para sedimentos compressíveis. Os pesquisadores realizaram ensaios de adensamento em células de compressão e permeabilidade determinando parâmetros envolvidos nas equações constitutivas. Indicaram ainda uma forma de se determinar tais parâmetros a partir de dados de porosidade e permeabilidade médias.

Tiller (1981) revisou a teoria da sedimentação de Kynch (1952). O autor estudou o problema da sedimentação em batelada admitindo que as características se originam da superfície do sedimento, e não do fundo do recipiente como afirmava Kynch (1952). O estudo focou o acompanhamento do crescimento do sedimento, procurando interpretar graficamente todos os parâmetros envolvidos no fenômeno, de modo a obter uma expressão a ser utilizada como condição de contorno para a equação diferencial não linear de segunda ordem por ele estabelecida. Tiller (1981) mostrou que sua metodologia produz bons resultados apenas para sistemas pouco compressíveis. Entretanto, seus resultados não têm aplicabilidade prática, uma vez que é necessário monitorar o crescimento do sedimento, o que nem sempre é possível devido à dificuldade de visualização da interface do sedimento em suspensões opacas.

Fitch (1983) *apud* Damasceno (1992), estudando a estabilidade das descontinuidades de concentração em ensaios de sedimentação em batelada, demonstrou que as características partem tangencialmente à superfície do recipiente. Sugeriu uma maneira de determinar a altura do sedimento em função do tempo através da localização do ponto

crítico (encontro das duas interfaces) em ensaios de sedimentação em proveta com mesma concentração inicial, porém com diversas alturas de coluna de suspensão. Em seu trabalho, Fitch generalizou o método de Kynch para o cálculo da área da seção transversal de sedimentadores.

Wakeman e Holdich (1984), através de ensaios de sedimentação em batelada nos quais a concentração foi estudada como uma função da posição e do tempo, determinaram valores da pressão nos sólidos através de uma técnica não destrutiva baseada em medidas da diferença de potencial elétrico ao longo do recipiente. Seu sistema era composto por várias resistências elétricas axialmente distribuídas e a diferença de potencial medida entre cada par de resistências podia ser determinada com o auxílio de um voltímetro digital controlado por um computador. Através da variação da concentração de sólidos como função da posição e do tempo, Wakeman e Holdich (1984) determinaram a velocidade de sedimentação e pressão nos sólidos. Concluíram, analogamente a Hamacher (1978), que as forças inerciais, da equação do movimento, podem ser desprezadas em relação aos demais termos da equação e observaram ainda que seus resultados para a pressão nos sólidos só eram confiáveis na região de compressão.

Damasceno e Massarani (1986) estudaram a sedimentação contínua em campo gravitacional e desenvolveram um equipamento dotado de um fundo filtrante. O foco do estudo era projetar um equipamento com uma capacidade maior que os sedimentadores convencionais já existentes. Os pesquisadores propuseram um método para o cálculo da capacidade deste sedimentador com base na teoria de Kynch (1952). Através de balanços de massa para os componentes da mistura, no equipamento, chegaram a uma equação de projeto para o sedimentador filtrante.

Damasceno et al. (1987) realizaram experimentos em um sedimentador filtrante e concluíram que o modelo proposto por Damasceno e Massarani (1986) estima com boa precisão o desempenho de tais equipamentos, além do que ficou comprovado um aumento substancial na capacidade do sedimentador filtrante.

Um estudo teórico bastante consistente da sedimentação em batelada foi realizado por Concha e Bustos (1987), que propuseram uma modificação da condição de contorno implícita na teoria de Kynch (1952), $\varepsilon_s(z=0, t) = \varepsilon_{sm}$, visando levar em consideração as características compressíveis do sistema. A nova condição seria:

$$\left. \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{(\rho_s - \rho_f) g \varepsilon_s}{\frac{dP_s}{d\varepsilon_s}}, (z=0, t) \quad (2.13)$$

onde ε_s é a concentração volumétrica de sólidos, ρ_s é a densidade de sólidos, ρ_f é a densidade do líquido, g é a aceleração da gravidade e P_s é a pressão nos sólidos. Tal

condição foi estabelecida utilizando-se a equação do movimento para o sólido em $z = 0$, onde a velocidade dos sólidos é nula. Resolveram numericamente o problema e observaram que, para suspensões floculentas, o seu método e o de Kynch (1952) conduzem a resultados divergentes. Os resultados mostraram que a teoria de Kynch só é válida para o caso de concentrações menores que uma concentração crítica. Concluíram que sua sistemática conseguia descrever melhor a sedimentação em batelada, mostrando ainda que, no caso de suspensões muito compressíveis as características não são linhas retas, como sugeriu Kynch.

Concha e Bustos (1987) realizaram um estudo baseado na solução numérica do modelo dinâmico para a sedimentação em batelada de suspensões floculentas, no qual foi mostrada a influência dos parâmetros na pressão em sólidos e nas linhas de equi-concentrações. Admitindo a fração volumétrica e a velocidade intersticial do sólido como sendo funções da posição e do tempo e definindo a velocidade superficial dos sólidos como sendo $q_s = v_s \varepsilon_s$ obtiveram as seguintes equações:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial q_s}{\partial z} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial q_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{q_s^2}{\varepsilon_s} + \frac{P_s(\varepsilon_s)}{\rho_s} \right] = \frac{\Delta \rho g \varepsilon_s}{\rho} + \frac{\Delta \rho g q_s}{\rho_s U(\varepsilon_s)} \quad (2.15)$$

na qual ε_s é a densidade do sólido, $\Delta \rho$ é a diferença de densidade sólido-líquido. Nestas equações as funções $U(\varepsilon_s)$ e $P_s(\varepsilon_s)$ representam respectivamente a velocidade de sedimentação livre e a pressão em sólidos.

Concha e Bustos (1987) consideraram ainda as seguintes funções:

$$U(\varepsilon_s) = u_\infty (1 - \varepsilon_s)^{\alpha+1} \quad (2.16)$$

$$P_s = a \exp(b \varepsilon_s) \quad (2.17)$$

na qual u_∞ , a e b são parâmetros experimentais. A condição inicial e as condições de contorno utilizadas foram:

$$\varepsilon_s(z > 0, t = 0) = \varepsilon_{s0}$$

$$q_s(z > 0, t = 0) = \varepsilon_{s0} U(\varepsilon_{s0})$$

$$q_s(z = 0, t > 0) = 0$$

Utilizando o método de diferenças finitas para resolver as Equações (2.14) e (2.15), Concha e Bustos (1987) determinaram as curvas de equi-concentrações. Os resultados obtidos indicaram que, para as características próximas da concentração inicial o comportamento é linear com o tempo mas à medida que as concentrações atingem valores

elevados observa-se uma discrepância com a teoria de Kynch (1952) que deve ser válida apenas para suspensões diluídas.

Tiller e Chen (1988), inspirados nas idéias de Adorján (1976), propuseram um modelo para descrever o escoamento no interior do sedimento, semelhante ao adotado na teoria de filtração. A resolução numérica desse modelo confirmou as conclusões de Adorján, com relação à existência de uma faixa operacional para a capacidade de sedimentadores.

Chen (1988) ampliou o modelo de Tiller e Chen (1988) para a sedimentação unidimensional em regime transiente e simulou situações como, por exemplo, as modificações entre dois estados estacionários. Demonstrou que um sedimentador pode operar diversos dias em regime transiente até alcançar um novo estado estacionário e apresentou alternativas operacionais para minimizar esse tempo.

Landman et al. (1988) efetuaram um estudo da operação estacionária de espessadores observando o efeito da variação da área da seção transversal do equipamento sobre seu desempenho. Foram estabelecidas, através de simulações numéricas, as diferenças fundamentais de comportamento entre os espessadores cilíndricos e cônicos e com seções convergente e divergente em relação à seção transversal da região de alimentação. Os resultados obtidos demonstraram que, para um dado valor de concentração da lama, necessita-se de um sedimento maior quando se opera com espessadores de seção convergente e mais baixo quando a seção é divergente, ambos em relação ao sedimento necessário em espessadores cilíndricos operando nas mesmas condições. Como principal conclusão afirmaram, apoiados em resultados de simulações numéricas, que o espessador com seção divergente é mais eficiente que os de seções constante (cilíndricos) ou convergente, não apresentando qualquer limite superior para a concentração de lama, ao contrário dos últimos.

Damasceno et al. (1989), utilizando uma fonte monoenergética colimada de raios γ (Am^{241}) obtiveram a distribuição de concentrações em um sedimentador contínuo de seção retangular. Em seus experimentos, observaram zonas de perturbação e estagnação, indicadas por fortes desvios nas curvas de concentração constante, notadamente nas regiões de entrada e próxima a bomba de lama.

Damasceno e Massarani (1990) efetuaram um estudo experimental sobre o projeto de sedimentadores pelo método de Kynch (1952). Tomando por base ensaios de sedimentação em proveta com diversas alturas de colunas de suspensão, calcularam o diâmetro de sedimentadores para produzir diversas concentrações de lama. Seus resultados demonstraram que o valor calculado para o diâmetro depende da altura da coluna de suspensão, principalmente para os casos de altas concentrações de lama. Os autores presumiram que tal fato ocorre devido a não consideração da região de sedimento pela teoria de Kynch e

inferiram que o uso de tal metodologia só deve ser indicado ao projeto de sedimentadores que devem produzir lamas muito diluídas, para as quais o sedimento não está presente, como no caso de clarificadores. Além disso, verificaram que, para o projeto de sedimentadores utilizando este método, deve-se realizar um ensaio de sedimentação em proveta, cuja altura da coluna de suspensão seja igual a altura do sedimentador.

Font (1990) apresentou um método para o cálculo da altura do sedimento em um espessador contínuo, levando em consideração apenas as variações das alturas das interfaces ascendente e descendente, em relação ao tempo, obtidas em ensaios de sedimentação em batelada. A sistemática proposta não necessita do suporte de ensaios de adensamento em células de compressão e permeabilidade para descrever a região de compressão, mas pressupõe o conhecimento da variação da altura do sedimento com o tempo em ensaios de sedimentação em batelada, fato que raramente ocorre na prática.

Waters e Galvin (1991) *apud* Damasceno (1992) determinaram curvas da velocidade superficial dos sólidos através de estudos de sedimentação semi-contínua considerando medidas de concentração em várias alturas de um leito de sólidos sedimentados. Como resultado verificaram que a curva da velocidade superficial dos sólidos depende da vazão de sólidos alimentados e que o método de Kynch (1952) só produz resultados razoáveis quando o fluxo de sólidos alimentados é grande. O procedimento introduzido pelos autores faz uso de medidas destrutivas, o que interfere na qualidade final dos resultados. Além disso, pressupõe que o fluxo de sólidos é função apenas da concentração local, fato que só é aceitável quando a tensão nos sólidos é desprezível, o que ocorre apenas em sistemas muito diluídos. Segundo Damasceno (1992), tal metodologia deve produzir poucas informações adicionais àquelas obtidas a partir do método de Kynch (1952) e, considerando as dificuldades experimentais introduzidas, é bastante questionável a sua utilização devido à alta relação entre o esforço experimental despendido e o benefício obtido.

Damasceno et al. (1991) utilizaram a técnica de raios gama para a determinação dos parâmetros de equações constitutivas para a tensão nos sólidos e permeabilidade do meio, supostos funções apenas da concentração local de sólidos. Realizaram experimentos estáticos para a determinação de pressão nos sólidos e dinâmicos para a determinação da permeabilidade do sistema ambos baseados no conhecimento da distribuição de concentrações ao longo do sedimento formado. Os resultados apresentaram um alto grau de reprodutibilidade e um pequeno desvio padrão para o caso da tensão nos sólidos. Para o caso da permeabilidade observou-se um aumento considerável da dispersão dos pontos experimentais provavelmente devido ao fato das condições de escoamento no interior do recipiente de teste não serem unidimensionais, conforme considerado.

Damasceno (1992) realizou um estudo teórico sobre o espessamento contínuo no qual as funções pressão nos sólidos e permeabilidade do sistema foram obtidas através de en-

saos de sedimentação monitorados pela técnica de atenuação de raios gama (DAMASCENO et al., 1991), partindo do pressuposto que tais variáveis dependem apenas da porosidade local de sólidos, como afirma um grande número de autores. De posse de tais equações efetuou simulações das operações de espessadores em regime permanente e transiente que demonstraram que apresentam um tempo de resposta a alterações em suas condições operacionais. O autor concluiu que a altura do sedimento é um parâmetro de grande importância no projeto de sedimentadores, ao contrário do que supunham muitos pesquisadores. Outra conclusão deste trabalho foi a de que os termos inerciais da equação do movimento podem ser desprezados para o caso do espessamento contínuo.

Damasceno e Massarani (1993) compararam diferentes metodologias utilizadas no projeto de sedimentadores através dos métodos de Coe e Clevenger (1916), Kynch (1952) e Tiller e Chen (1988). Os resultados mostraram que os métodos de Coe e Clevenger (1916) e de Kynch (1952) conduzem a resultados satisfatórios para a região de sedimentação propriamente dita, enquanto o método de Tiller e Chen (1988) é aplicável à estudos na região de compressão. Para materiais pouco compressíveis o método de Kynch (1952) é o indicado, seja pela simplicidade do método como pelos bons resultados comprovados. O método de Tiller e Chen (1988) também pode ser utilizado com confiabilidade para o projeto, porém mostra que, para a determinação das propriedades do sedimento, os ensaios de sedimentação em proveta não são suficientes, sendo indicado o uso de ensaios de adensamento, no caso de sedimentos compressíveis. Font e Ruiz (1993) utilizaram testes de sedimentação em batelada e aplicaram seus resultados na simulação de espessadores contínuos em regime transiente, monitorando a interface sólido-líquido sobrenadante, a interface do sedimento e as linhas de equi-concentrações. Uma das conclusões de seu trabalho foi que os testes em batelada podem ser aplicados também para o espessamento contínuo, considerando o deslocamento das linhas características do fundo até a superfície do sedimento e das linhas divergentes de concentração nos sólidos na zona de compressão. Os autores observaram que embora seja conhecido que nos testes em batelada a altura da zona de compressão é maior do que a observada no espessamento contínuo, as diferenças entre estas medidas não foram significativas para a análise final. O método de Font e Ruiz (1993) é válido para casos em que a concentração da lama está compreendida entre a concentração da suspensão de alimentação e a concentração de lama no ensaio em batelada.

Tiller et al. (1995) estudaram a sedimentação aliada a filtração. Os autores compararam os resultados com os balanços materiais com base apenas no volume de filtrado e que desprezavam o fluxo de sedimentação e concluíram que o valor da resistência média específica da torta formada é bem superior ao valor quando são incluídos os efeitos da sedimentação. Esta teoria, onde se combina a sedimentação tradicional e a torta da filtração está de acordo com os resultados obtidos por um estudo experimental em um

CATSCAN - Computerized Axial Tomographic Scanner.

Uma metodologia experimental simples para estimar parâmetros de diferentes equações constitutivas para a pressão nos sólidos foi desenvolvida por França et al. (1995). Testes em provetas foram realizados para diversas concentrações iniciais de sólidos nos quais valores médios de concentração eram obtidos a partir do conhecimento das alturas finais do sedimento em tubos de diferentes diâmetros. A resolução da equação do movimento para a fase sólida permitiu obter a distribuição de concentrações do sólido. A integração desta distribuição forneceu o valor médio da concentração do sólido, que por sua vez era confrontado, de forma iterativa, com os dados obtidos experimentalmente. Os resultados obtidos pelos autores reproduziram bem os apresentados por Damasceno (1992).

França (1996) estudou a sedimentação contínua com alimentação próxima à base do equipamento. Tal modificação na configuração do equipamento reduziu o fenômeno da sedimentação, dando lugar a um processo semelhante à filtração. Os experimentos de sedimentação contínua mostraram que a mudança proporcionou um aumento de 25% na capacidade do espessador. Parâmetros das equações da pressão nos sólidos e da força resistiva que o fluido exerce na matriz sólida foram estimados a partir das propriedades do sedimento através de ensaios em proveta e ensaios de fluidização homogênea, respectivamente.

A importância do uso de testes de sedimentação em batelada para o projeto e dimensionamento de sedimentadores contínuos foi avaliada por Font e Laveda (1996) que propuseram um modelo para o projeto de sedimentadores contínuos. A partir dos testes, a área por unidade de vazão volumétrica e a altura da lama puderam ser calculadas para diferentes concentrações de sólido na lama em um sedimentador contínuo em um intervalo específico.

Ruiz et al. (1997a) aplicaram a técnica de atenuação de raios gama no estudo do processo de sedimentação em batelada a fim de mapear as concentrações de sólidos como função da posição e do tempo durante ensaios em proveta. Os resultados obtidos permitiram observar as quatro regiões apresentadas por Kynch (1952).

Ruiz et al. (1997b) utilizaram a técnica de atenuação de raios gama para a obtenção da distribuição de tamanhos de partículas de sólidos pulverulentos. Os experimentos basearam-se no estudo da sedimentação em batelada de suspensões aquosas diluídas do sólido. Os testes realizados visavam obter as condições na qual conseguia-se uma maior precisão na obtenção dos resultados quando comparados com os obtidos pela técnica da proveta LADEQ (SILVA; MEDRONHO, 1986).

Perez et al. (1998) desenvolveram um modelo matemático com caráter parabólico

para simular a sedimentação em batelada na faixa de compressão e obtiveram resultados da simulação numérica aplicando-se o método das diferenças finitas. Através de equações constitutivas apropriadas, os autores resolveram o problema de condições iniciais e de contorno para determinar a pressão nos sólidos em diferentes posições ao longo do sedimento.

Burger e Concha (1998) desenvolveram um modelo fenomenológico para a sedimentação em campo gravitacional de suspensões floculentas. O modelo unidimensional consiste de uma equação diferencial parcial hiperbólica de primeira ordem para a sedimentação propriamente dita e uma equação diferencial parcial de segunda ordem com caráter parabólico para concentrações locais superiores a concentração crítica do material sólido utilizado na separação. Os resultados da simulação numérica foram obtidos através do método das diferenças finitas e o grande avanço no desenvolvimento de seu modelo certamente reside no fato de que os problemas contínuo e batelada podem ser resolvidos em todo o domínio do espaço e do tempo sem haver a necessidade de divisão do problema em subdomínios de fronteiras móveis. No caso do processo em batelada, os resultados numéricos obtidos foram comparados com resultados experimentais, apresentando boa concordância. Para o caso do espessamento contínuo, foram simuladas situações de partida e mudança de estado estacionário. Entretanto, nenhum estudo experimental foi realizado em sedimentadores contínuos com o objetivo de validar o modelo proposto. O modelo matemático de Burger e Concha (1998) será apresentado e discutido com maiores detalhes no Capítulo 3, Modelagem da Sedimentação.

Zheng e Bagley (1999) simularam numericamente o processo de sedimentação em batelada e puderam verificar a variação da altura da interface sobrenadante da suspensão com o tempo, assim como a distribuição de concentrações de sólidos com o tempo. Verificaram que os resultados obtidos na simulação e os resultados experimentais, presentes na literatura para diferentes materiais e diferentes concentrações iniciais, apresentaram boa concordância entre si. Concluíram que o modelo desenvolvido tem várias vantagens para a simulação do processo de sedimentação em batelada comparado com outros métodos presentes na literatura, pois ele requer menos parâmetros.

Freitas et al. (1999) analisaram o desempenho de espessadores contínuos com geometrias do tipo cônico-convergente, cônico-divergente e cilíndrica. Os ensaios visavam verificar como se comportava a capacidade de espessadores com a variação em sua geometria. Através da comparação dos resultados obtidos experimentalmente e dos obtidos por simulações computacionais, observaram que os espessadores cilíndricos apresentavam capacidades menores que as dos espessadores cônico-divergentes, porém maiores que as dos espessadores cônico-convergentes. Concluíram, sobretudo que, quanto maior o valor absoluto do ângulo do vértice cônico maior a diferença entre as capacidades dos sistemas

cônico e cilíndrico.

França et al. (1999), apresentaram uma metodologia para estimar os parâmetros de equações para a pressão nos sólidos e a permeabilidade do sistema. Foram feitas simulações computacionais baseadas em um modelo da sedimentação em batelada que considerava a existência de duas regiões distintas durante os testes: as regiões de sedimentação livre e de compactação, acopladas através de equações de balanço de massa global e restrição das alturas. Os parâmetros destas equações eram estimados através do ajuste entre os resultados do modelo e dados experimentais da curva de sedimentação em batelada. Os valores calculados de alturas da região de compactação no sedimentador contínuo se aproximaram bastante dos valores teórico-experimentais por eles obtidos.

Ruiz (2000) estudou o fenômeno da sedimentação em batelada com o auxílio da técnica de atenuação de raios gama em suspensões aquosas com concentrações iniciais variando de 2 a 3% em volume. Obteve as distribuições de concentrações com a posição e o tempo durante ensaios de sedimentação em batelada e a partir do conhecimento do perfil de concentrações empregou técnicas numéricas na análise nas equações da continuidade e do movimento para o sólido. O autor concluiu que a velocidade de sedimentação dos sólidos só pode ser descrita como função única da concentração local de sólidos para sedimentos pouco compressíveis. Mostrou ainda que a pressão nos sólidos não pode ser relacionada, como afirma a grande maioria dos trabalhos, como função apenas da concentração local de sólidos e que tal suposição só poderia ser utilizada para baixas concentrações volumétricas.

Burger et al. (2000) publicaram um artigo através do qual compararam diversas teorias que têm sido empregadas para interpretar as medidas experimentais da sedimentação floculenta, publicadas por diversos pesquisadores, e desenvolveram um modelo fenomenológico através de simulações dos dados disponíveis. O modelo matemático foi resolvido numericamente usando as equações constitutivas envolvidas no fenômeno e os seus resultados foram comparados com os dos respectivos autores. Concluíram que, para todos os estudos envolvidos, a teoria fenomenológica predizia corretamente o comportamento experimental de diversas suspensões floculentas.

Freitas (2002) realizou um estudo experimental em sedimentadores filtrantes operando continuamente e em estado estacionário. Os ensaios foram conduzidos em um protótipo com cerca de 100 cm de altura e área da seção transversal de 160 cm², utilizando suspensão aquosa de sulfato de bário. Foi observado, que para os sedimentadores filtrantes, a região de operação contínua ocorre em uma faixa de vazões maiores que as do sedimentador convencional e que a escolha de um meio filtrante de resistência adequada pode promover um aumento significativo em sua capacidade.

Arouca (2003) motivado pelo trabalho de Damasceno (1992), estudou o fenômeno

de sedimentação em batelada, utilizando suspensões aquosas de caulim, monitorada por meio da Técnica de Atenuação de Raios Gama, permitindo a obtenção da distribuição de concentrações em sedimentos através de ensaios estáticos. Com os dados experimentais obtidos, admitindo que a pressão nos sólidos e a permeabilidade do meio poroso eram funções exclusivas da concentração local de sólidos, o autor determinou os parâmetros de equações constitutivas de pressão nos sólidos e permeabilidade.

Burger e Concha (2002, 2003) revisaram os estudos em sedimentação e espessamento desenvolvidos no século XX, indicando as principais contribuições para o seu desenvolvimento ao longo do século passado, citando resumidamente grandes teorias, como a Teoria da Sedimentação de Kynch (1952) assim como sua extensão para a sedimentação contínua. Os autores conduziram a revisão através de uma perspectiva histórica que contempla os principais acontecimentos em períodos que se iniciam com a invenção e o projeto de espessadores 1900-1940, a descoberta dos parâmetros operacionais mais importantes em 1940-1950, a formulação da teoria da sedimentação que prevaleceu fortemente de 1950-1970, a teoria fenomenológica ocorrida nas décadas de 70 e 80 e a teoria matemática até os dias atuais. Burger e Concha propuseram exemplos numéricos para a simulação da sedimentação em batelada e para o espessamento contínuo de suspensões floculentas.

Burger et al. (2003) estudaram a teoria fenomenológica do espessamento contínuo de suspensões floculentas variando a geometria da área da seção transversal do equipamento e apresentam um algoritmo numérico empregado em simulações espessadores contínuos. Algumas restrições foram demonstradas pelos cálculos do estado estacionário o que permitiu otimizar os projetos de espessadores.

Silva (2004) desenvolveu um estudo para a sedimentação contínua através de equipamentos com duas diferentes configurações: divergente, cuja área da seção transversal aumenta linearmente com a profundidade e o convencional, cuja área da seção transversal se mantém constante. Os resultados experimentais obtidos no estudo revelaram que a capacidade dos clarificadores foi mais influenciada pela variação da área da seção transversal do que os espessadores, e que os mecanismos envolvidos na operação de clarificadores e espessadores são muito distintos. A fim de comparar resultados experimentais com outros obtidos através de simulações numéricas, o autor realizou um estudo experimental para a determinação de equações constitutivas para a pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso e confrontou seus resultados com aqueles obtidos por Arouca (2003).

Arouca et al. (2005a) desenvolveram um estudo de técnicas para medidas de distribuição de tamanhos de partículas a partir de testes de sedimentação em batelada e compararam os resultados obtidos através de duas diferentes metodologias tradicionais: a Técnica de Atenuação de Raios Gama e a Técnica da Proveta LADEQ. A influência da drenagem das suspensões através das duas técnicas também foi alvo de estudo. Os

resultados obtidos mostraram que o uso de bomba peristáltica em ambas as metodologias conduziu a diferenças significativas entre os valores obtidos para os parâmetros dos modelos de tamanhos de partículas.

Arouca e Damasceno (2005a) avaliaram a eficiência da Técnica de Atenuação de Raios Gama para caracterizar sistemas sólido-líquidos. Usando resultados experimentais de testes de sedimentação em batelada com caulim e admitindo a concentração local como uma função da curva de atenuação, os autores aplicaram a técnica para determinação de parâmetros de equações constitutivas para pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso.

Arouca e Damasceno (2005b) utilizaram a Técnica de Atenuação de Raios Gama no monitoramento de concentrações como função da posição e do tempo em testes dinâmicos de sedimentação em batelada. Os resultados obtidos pelos autores permitiram um mapeamento completo de uma coluna de sedimentação e a caracterização de regiões distintas do fenômeno. Os resultados obtidos permitem a validação de modelos matemáticos para a sedimentação unidimensional.

Arouca e Damasceno (2005c) desenvolveram uma linha de pesquisa em processos de separação baseada no comportamento experimental de materiais particulados em meios aquosos como função de propriedades físicas dos sólidos, tais como a forma, a distribuição de tamanhos e a densidade de partículas. Os resultados obtidos pelos autores mostram a importância dos efeitos das variáveis na dinâmica de sedimentação e na acomodação de partículas em sedimentos formados a partir de testes de sedimentação em batelada.

Diversos trabalhos têm sido publicados na literatura sobre o tema em estudo, sendo grande parte dele voltados para a modelagem da sedimentação e uma pequena minoria focada em trabalhos experimentais, seja para validação de modelos matemáticos ou configuração e dimensionamento de novos equipamentos.

A revisão bibliográfica apresentada neste capítulo contempla os principais trabalhos para a evolução da tese de doutorado e que, por sua vez, são notáveis devido a sua significativa contribuição ao estudo da sedimentação em campo gravitacional.

CAPÍTULO 3

Modelagem da Sedimentação



ESTE CAPÍTULO são apresentados e comentados alguns modelos matemáticos representativos para a descrição do fenômeno da sedimentação e a contribuição de cada autor é mencionada em detalhes. Além disso, é sugerido um modelo alternativo a partir dos princípios da mecânica do contínuo para o problema unidimensional da sedimentação. O problema envolve a resolução de uma equação diferencial parcial quasi-linear de segunda ordem do tipo parabólica que se degenera em uma equação hiperbólica de primeira ordem quando a concentração de sólidos é menor que a crítica no intervalo de valores da solução numérica. O modelo utilizado é baseado nas abordagens de D'Ávila (1978) e Burger e Concha (1998) e difere deste último por levar em consideração além da compressibilidade do sistema pelo seu próprio peso também o conceito de permeabilidade do meio poroso.

3.1 Modelo de Kynch (1952)

3.1.1 Teoria da Sedimentação

Em 1952 Kynch desenvolveu a primeira teoria para a sedimentação. Tal teoria é puramente cinemática e descreve a sedimentação de partículas sólidas em um meio líquido como um fenômeno de propagação de ondas. Kynch estabeleceu que descontinuidades do processo devem aparecer como ondas de choque que se propagam em um meio contínuo e

desta forma propôs um equacionamento simples para descrever a sedimentação em batelada utilizando apenas a equação da continuidade para o componente sólido. Seu estudo baseou-se no monitoramento da interface descendente e no conhecimento da concentração inicial em um único teste de proveta.

Kynch conduziu seu trabalho admitindo as seguintes hipóteses:

- A sedimentação é um fenômeno unidimensional, uma vez que a concentração de partículas é admitida como sendo uniforme em uma mesma camada horizontal;
- A concentração aumenta com o tempo no sentido da base da coluna de dispersão;
- A velocidade de sedimentação tende a zero quando a concentração tende ao seu valor máximo;
- A velocidade de sedimentação de todas as partículas na dispersão depende apenas da concentração local de sólidos;
- Os efeitos de parede são desprezíveis;
- As partículas são de mesmo tamanho e forma.

Conhecendo-se a concentração inicial e o comportamento da interface descendente é conveniente introduzir a velocidade superficial da partícula na suspensão ou fluxo de partículas, ou seja, o número de partículas que atravessam uma seção horizontal do recipiente de dispersão por unidade de área por unidade de tempo,

$$q_s = \varepsilon_s v_s \quad (3.1)$$

sendo ε_s a concentração volumétrica de sólidos e v_s sua velocidade intersticial.

Uma vez que se assume por hipótese que a velocidade de sedimentação de todas as partículas na dispersão depende apenas da concentração local de sólidos e que a concentração de partículas é uniforme em uma mesma camada horizontal, o fluxo de partículas é também uma função exclusiva da concentração. A velocidade superficial torna-se desta forma uma função complexa de ε_s , uma vez que, sob o ponto de vista analítico, à medida que a concentração volumétrica aumenta até seu valor máximo a velocidade de sedimentação decresce continuamente de um valor finito v_{s0} a zero.

Definindo z como sendo a altura de uma camada uniforme qualquer acima da base da coluna de altura L de sedimentação das partículas e sabendo que o fluxo q_s varia com z , presumidamente sabe-se que a concentração também varia e a relação entre as duas é obtida através da equação da continuidade.

Assim Kynch (1952) utilizando suas suposições descreveu a suspensão como um meio no qual a concentração de sólidos varia continuamente com o tempo da mesma forma que a velocidade superficial dos sólidos varia com a posição ao longo da coluna e utilizou a equação da continuidade para os sólidos ao descrever o fenômeno em sua forma unidimensional, 3.2, válida no domínio $0 \leq z \leq L$, $0 \leq t$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial q_s}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

Como $\varepsilon_s = \varepsilon_s(z, t)$ e $v_s = v_s(\varepsilon_s)$ pode-se afirmar, dado que $q_s = q_s(\varepsilon_s)$ ou

$$\frac{\partial q_s}{\partial z} = \frac{dq_s}{d\varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} \quad (3.3)$$

que por sua vez substituída na 3.2 fornece

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + V(\varepsilon_s) \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

na qual

$$V(\varepsilon_s) = \frac{dq_s}{d\varepsilon_s} \quad (3.5)$$

Em seu trabalho, o autor não explicitou as condições iniciais e de contorno para a resolução da Equação (3.4), que por interpretação de seu artigo podem ser facilmente deduzidas:

$$\varepsilon_s(t = 0, z) = \varepsilon_{s0} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_s(t > 0, z = 0) = \varepsilon_{sm} \quad (3.7)$$

para $0 \leq z \leq L$ e $0 \leq t$, onde ε_{s0} e ε_{sm} são respectivamente as concentrações inicial e máxima observadas no processo de sedimentação em batelada e L é a altura da coluna de suspensão nos ensaios de sedimentação.

3.1.2 Caráter Parabólico do Equacionamento de Kynch

Segundo a teoria de Kynch (1952) cujas considerações foram baseadas apenas na lei da conservação de massa, o processo de sedimentação é inteiramente determinado a partir da equação da continuidade para o componente sólido, não levando em consideração o conhecimento detalhado de forças que atuam no sistema sólido-líquido. Isto significa que o balanço de forças fornecido pela equação do movimento não foi utilizado e, portanto, os efeitos inerciais, a força de interação entre os constituintes sólido e líquido e os efeitos gravitacionais não foram levados em consideração. Tal situação confere caráter parabólico ao estudo em questão, prevendo apenas o movimento da interface inferior.

A classificação da equação da continuidade desenvolvida por Kynch para a sedimentação em batelada pode ser feita utilizando-se o método das características. Tal método baseia-se na degeneração de equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias determinando as curvas da solução no plano $z - t$. Em geral qualquer curva no plano $z - t$ pode ser expressa na forma paramétrica por $z = z(r)$ e $t = t(r)$, sendo r um parâmetro que fornece uma medida da distância ao longo da curva. Assim pode-se escrever que $\varepsilon_s(z, t) = \varepsilon_s(z(r), t(r))$ ou ainda $\varepsilon_s(r)$. Logo, ao aplicar a regra da cadeia,

$$\frac{d\varepsilon_s}{dr} = \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} \frac{dz}{dr} + \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} \frac{dt}{dr} \quad (3.8)$$

e comparando-se os termos das Equações (3.6) e (3.8) é possível obter:

$$\frac{dt}{dr} = 1 \quad (3.9)$$

$$\frac{dz}{dr} = V(\varepsilon_s) \quad (3.10)$$

$$\frac{d\varepsilon_s}{dr} = 0 \quad (3.11)$$

sendo que as Equações (3.9) e (3.10) são as chamadas equações características.

Resolvendo-se a Equação (3.9) em $t = 0$ e $r = 0$ obtém-se $t = r$, que por sua vez quando substituída na Equação (3.10) ao eliminar a dependência paramétrica fornece:

$$\frac{dz}{dt} = V(\varepsilon_s) \quad (3.12)$$

Tal expressão, Equação (3.12), representa a velocidade de ascensão $V(\varepsilon_s)$ de ondas de mesma concentração ou equi-concentração. Admitindo-se como condição inicial $z(t = 0) = 0$, sua forma integrada resulta em uma equação de reta. Tal expressão, Equação (3.13), passa pela origem dos tempos e representa matematicamente a posição em função do tempo de ondas de equi-concentração que se deslocam em um movimento de ascensão surgindo no sentido da base ao topo do sedimento. Assim, no modelo de Kynch (1952) apenas características ascendentes são previstas, o que confere o caráter parabólico ao problema.

$$z = V(\varepsilon_s) t \quad (3.13)$$

3.1.3 Análise da Teoria de Kynch

Apesar do modelo de Kynch (1952) representar razoavelmente o fenômeno da sedimentação em batelada, sua teoria não é completa. Apenas a interface ascendente é descrita matematicamente enquanto a interface descendente pode ser prevista somente mediante

análise empírica. Em outras palavras sua teoria prevê apenas a propagação de ondas de concentração do fundo do recipiente até o topo do sedimento, com velocidades $V_k(\varepsilon_s)$.

Uma curva de típica de ensaio de sedimentação em batelada pode ser observada na Figura 3.1 na qual a posição da interface superior é função do tempo como mostra a Equação (3.14):

$$\frac{dz}{dt} = -v_s(\varepsilon_s) \quad (3.14)$$

Pela análise da Figura 3.1 pode-se observar que existe uma região delimitada pelos pontos

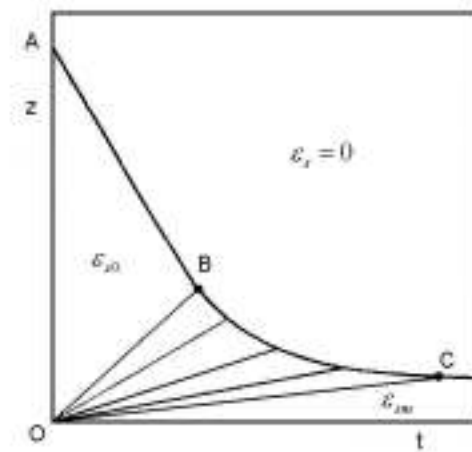


Figura 3.1: Curva da sedimentação em batelada na qual são apresentadas as linhas de equi-concentração previstas pela teoria de Kynch (1952).

AOB na qual a concentração de sólidos permanece constante e igual à concentração inicial, uma região BOC onde as características são representadas por linhas retas partindo da origem com inclinações que variam de $V_k(\varepsilon_{s0})$ a $V_k(\varepsilon_{sm})$, uma região abaixo da reta OC na qual a concentração atinge seu valor máximo e uma região acima da curva ABC em que predomina líquido clarificado. Qualquer uma das características apresentadas na Figura 3.1, também conhecida como curva de equi-concentração, representa uma camada ascendente de concentração constante, ε_s , que surge da base do recipiente ($z = 0$) sendo atravessada por partículas sólidas que caem com velocidade $v_k(\varepsilon_s)$ e se deslocando até o encontro com a interface descendente. Desta forma a teoria proposta por Kynch indica a existência de quatro regiões distintas na sedimentação em batelada:

Região de líquido clarificado: não há presença de sólidos ($\varepsilon_s = 0$);

Região de sedimentação livre: a concentração de sólidos é igual a concentração inicial e a velocidade de sedimentação é constante ($\varepsilon_s = \varepsilon_{s0}$, $v_s = v_{s0}$);

Região de transição: ocorre um aumento na concentração de ε_{s0} a ε_{sm} e a velocidade de sedimentação decresce de v_{s0} a $v_s = 0$;

Região de formação de sedimento: a concentração de sólidos é máxima e igual a ε_{sm} enquanto a velocidade de sedimentação é nula.

As regiões da sedimentação são apresentadas na Figura 3.2:

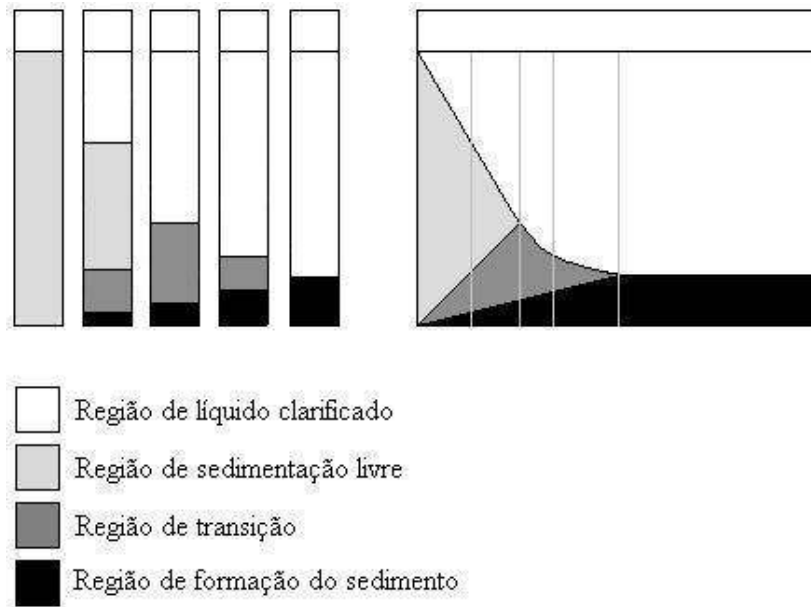


Figura 3.2: Regiões da sedimentação em batelada.

A teoria de Kynch descreve bem a sedimentação de partículas sólidas incompressíveis tais como esferas de vidro e a sedimentação de partículas minerais não floculantes. O problema da extensão do uso de tal teoria nas indústrias baseia-se grosseiramente no fato de que as lamas industriais são compressíveis em maior ou menor grau.

Sedimentos compressíveis não podem ser descritos por tal teoria, uma vez que a acomodação das partículas envolve a presença de forças que não são levadas em consideração no modelo matemático. Desta forma pode-se admitir que para suspensões reais todas as condições estipuladas por Kynch são válidas, uma vez que sua validade seja restrita para concentrações de sólidos menores ou iguais a uma concentração crítica ε_{sc} . Tal concentração seria a mais alta concentração obtida por testes de sedimentação. A Figura 3.3 ilustra a diferença entre o sedimento incompressível de Kynch e o sedimento compressível de lamas reais em termos da concentração do sedimento.

A compressibilidade é característica de cada tipo de material que constitui o sedimento e pode ser influenciada por diversos fatores, dentre os quais os mais significativos são: a forma da partícula, sua massa específica e a distribuição de tamanhos da amostra.

A principal discrepância entre a teoria de Kynch e o comportamento da sedimentação de qualquer suspensão floculada é observada além do ponto de compressão, ou seja, de

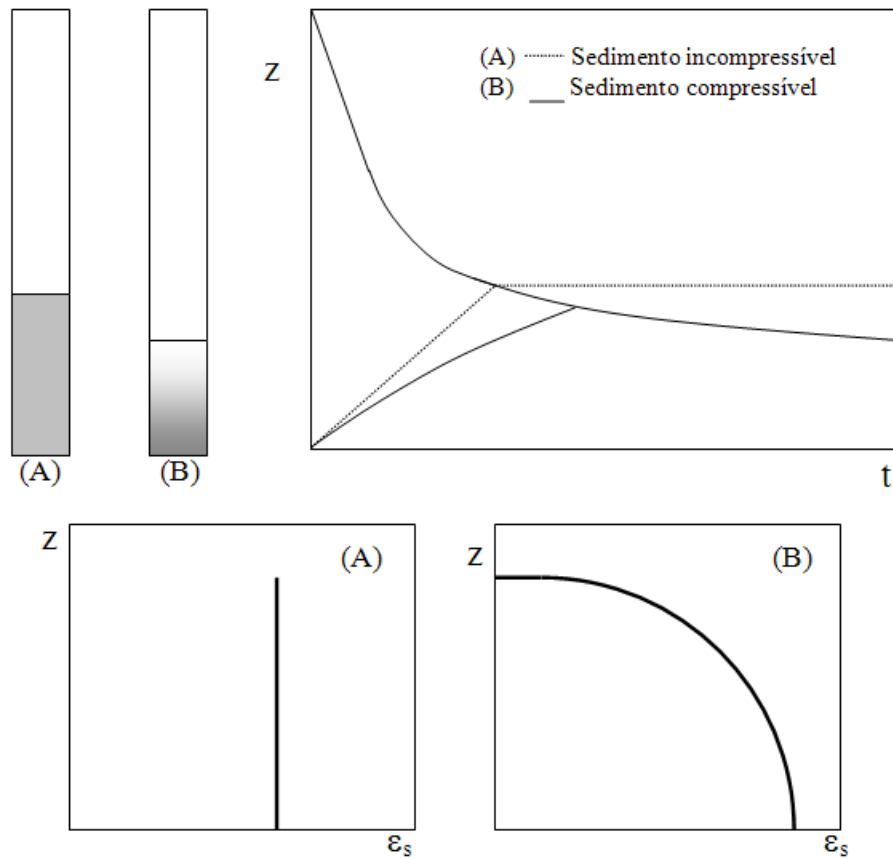


Figura 3.3: Comparação dos sedimentos formados a partir da sedimentação de sólido incompressível (A) e sólido compressível (B)

pois que a concentração dos sólidos que se encontram imediatamente abaixo da interface descendente alcança seu valor crítico ϵ_{sc} . Em sua teoria a sedimentação termina nesse ponto enquanto na prática deve continuar por um longo tempo.

Sob um ponto de vista grosseiro, o modelo de Kynch (1952) para suspensões floculadas é válido somente para $\epsilon_s \leq \epsilon_{sc}$ sendo que depois de tal ponto o mesmo não poderia ser aplicado uma vez que as partículas sedimentadas na concentração crítica mantêm uma certa quantidade de líquido que só poderia ser expelida do sedimento por meio de compressão. A altura dos sólidos sedimentados comprime camadas imediatamente inferiores aumentando sua concentração.

O fim do período de sedimentação na teoria de Kynch, sob um ponto de vista matemático, é caracterizado por linhas retas que partem da origem dos tempos com inclinações que dependem da concentração local de sólidos, sendo que a máxima concentração é equivalente à concentração no ponto crítico. É importante ainda ressaltar que Kynch admitiu que na base da coluna ($z = 0$) há uma descontinuidade que cresce extremamente rápido na concentração a partir da concentração inicial até a possível concentração máxima, ou

seja:

$$\varepsilon_s(z=0, t=0) = \varepsilon_{s0} \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_s(z=0, t=0^+) = \varepsilon_{sc} = \varepsilon_{sm} \quad (3.16)$$

Pode-se esperar que a teoria de Kynch represente razoavelmente a sedimentação de suspensões floculadas incompressíveis ou pouco compressíveis, no entanto sua aplicação na decantação de sólidos compressíveis não conduz a bons resultados para concentrações maiores que a do ponto de compressão.

3.2 Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo

Kynch (1952) foi o pioneiro no desenvolvimento de um modelo matemático para a sedimentação em batelada ao fazer uso apenas da equação da continuidade para o constituinte sólido. A sedimentação foi basicamente definida como um meio contínuo de propagação de ondas de choque e possuía uma representação puramente cinemática, não levando em consideração a conservação da quantidade de movimento pelo balanço de forças na partícula. Tal teoria abordou um equacionamento com caráter parabólico ao prever apenas o deslocamento de camadas ascendentes de equi-concentração. A simplicidade de seu método para o projeto de sedimentadores motivou pesquisadores no campo a desenvolverem métodos similares baseados na teoria de Kynch (1952), mas que levariam em conta o balanço de forças e a compressão do sedimento. Em 1978 d'Ávila desenvolveu uma abordagem consistente aplicando a teoria das misturas da mecânica do contínuo na representação fenomenológica da sedimentação em batelada. A grande contribuição a partir do uso da teoria das misturas certamente se deve ao fato de que a compressão dos sólidos é levada em consideração no modelo e a existência de duas descontinuidades que se propagam em sentidos opostos é então verificada teoricamente.

3.2.1 Desenvolvimento da Teoria das Misturas para o Caso da Separação Sólido-Líquido

A Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo tem sido utilizada com sucesso na descrição de sistemas particulados, (D'ÁVILA, 1978). Tal teoria pressupõe que cada partícula de suspensão em uma dada região do espaço é ocupada ao mesmo tempo por todos os seus constituintes. O meio é considerado contínuo e a partícula sólida perde sua identidade, comportando-se como um fluido hipotético.

A concentração mássica de um constituinte da mistura é definida pela Equação (3.17),

$$\bar{\rho}_i = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V} = \frac{dm_i}{dV} \quad (3.17)$$

na qual m_i é a massa do constituinte i contida no volume V da mistura.

Na modelagem de sistemas sólido-líquidos é conveniente introduzir as frações volumétricas dos constituintes i s, representando i , neste caso, cada fase.

$$\varepsilon_i = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta V_i}{\Delta V} = \frac{dV_i}{dV} \quad (3.18)$$

O subscrito i representa neste caso os constituintes: sólido (s) e a fase fluida (f). Se a mistura for binária e constituída por um sólido e um fluido, tem-se que o volume total da mistura é dado pela soma do volume de seus constituintes,

$$V = V_s + V_f \quad (3.19)$$

e por sua vez a relação entre as frações volumétricas é dada pela Equação (3.20)

$$\varepsilon_s + \varepsilon_f = 1 \quad (3.20)$$

Denotando-se por ρ_s e ρ_f as massas específicas dos constituintes sólido e líquido puros, respectivamente, a relação entre as concentrações mássicas e as frações volumétricas é dada pela Equação (3.21):

$$\bar{\rho}_i = \rho_i \varepsilon_i \quad (3.21)$$

As Equações da Continuidade para os Constituintes da Mistura

Tomando-se uma propriedade volumétrica qualquer $\psi(x, t)$ associada a uma mistura, o Teorema do Transporte de Reynolds pode ser escrito como mostra a Equação (3.22), (DAMASCENO, 2002),

$$\frac{D}{Dt} \iiint \psi[x(t), t] dV = \iiint \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_x dV + \iint (\psi v) \cdot n dS \quad (3.22)$$

onde t é o tempo, V é o volume, x é a posição, v é a velocidade da partícula de fluido e n é o vetor normal-unitário à superfície S . Desta forma, o primeiro membro da equação apresenta as variações da grandeza ψ segundo as concepções de Lagrange, cuja derivada substantiva indica a variação da propriedade com o tempo tomando-se como base um referencial que acompanha as partículas de fluido, e o segundo membro da equação apresenta as variações dessa mesma propriedade com relação à coordenadas espaciais fixas

(concepções de Euler).

Para o caso específico da separação sólido-líquido, na qual um conjunto de partículas no interior de um volume material se move com velocidade v , como, por definição não ocorre entrada ou saída de massa no seu interior, admitindo que não ocorre reação química, como é o caso da sedimentação em batelada, e assumindo-se a grandeza volumétrica como sendo equivalente à concentração mássica de um componente, ou seja $\psi = \bar{\rho}_i$, pode-se escrever a Equação (3.22) como:

$$\frac{D}{Dt} \iiint \bar{\rho}_i dV = \iiint \left. \frac{\partial \bar{\rho}_i}{\partial t} \right|_x dV + \iint (\bar{\rho}_i v_i) \cdot n dS \quad (3.23)$$

Como não ocorrem entradas ou saídas de material no volume material, pode-se dizer que o primeiro membro da Equação (3.23) é nulo e a mesma pode ser reescrita como:

$$\iiint \frac{\partial \bar{\rho}_i}{\partial t} dV + \iint (\bar{\rho}_i v_i) \cdot n dS = 0 \quad (3.24)$$

Aplicando-se o Teorema da Divergência de Gauss, no qual transformam-se integrais de superfície em integrais de volume e vice-versa, $\iint (\bar{\rho}_i v_i) \cdot n dS = \iiint \nabla \cdot \bar{\rho}_i v_i dV$, obtém-se:

$$\iiint \left\{ \frac{\partial \bar{\rho}_i}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho}_i v_i \right\} dV = 0 \quad (3.25)$$

Entretanto, como $dV \neq 0$ e substituindo-se a relação apresentada pela Equação (3.21), a equação da continuidade para o constituinte i é dada por:

$$\frac{\partial \rho_i \varepsilon_i}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_i \varepsilon_i v_i = 0 \quad (3.26)$$

Levando-se em consideração que na sedimentação há a presença de duas fases, sólida e fluida, as equações da continuidade para ambos os constituintes são respectivamente:

$$\frac{\partial \rho_s \varepsilon_s}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_s \varepsilon_s v_s = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \rho_f \varepsilon_f}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_f \varepsilon_f v_f = 0 \quad (3.28)$$

As Equações do Movimento para os Constituintes da Mistura

As equações do movimento que modelam o fenômeno da sedimentação binária para seus constituintes sólido e líquido são obtidas analogamente aplicando-se o Teorema do Transporte de Reynolds Damasceno (2002), Equação (3.22), ao introduzir a propriedade volu-

métrica como sendo $\psi = \bar{\rho}_i v_i$:

$$\frac{D}{Dt} \iiint \bar{\rho}_i v_i dV = \iiint \left. \frac{\partial (\bar{\rho}_i v_i)}{\partial t} \right|_x dV + \iint (\bar{\rho}_i v_i v_i) \cdot n dS \quad (3.29)$$

Desta forma, pode-se interpretar o primeiro membro da Equação (3.29) como sendo o termo que representa a variação da quantidade de movimento com o tempo do volume material estudado. Assim pode-se escrever a relação dada pela Equação (3.30), pela aplicação da segunda lei de Newton que afirma que se existe uma resultante de forças no volume material ocorre uma mudança na quantidade de movimento do mesmo com o tempo,

$$\frac{D}{Dt} \iiint \bar{\rho}_i v_i dV = \frac{D(mv)_i}{Dt} = \sum_j (F_j)_i \quad (3.30)$$

onde F_j são as forças que atuam no componente i presente no volume material. Substituindo-se a Equação (3.30) na Equação (3.29) tem-se:

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}_i v_i) dV + \iint (\bar{\rho}_i v_i v_i) \cdot n dS = \sum_j (F_j)_i \quad (3.31)$$

Assim, torna-se importante conhecer as diversas forças que atuam sobre o constituinte i no volume material. Sabe-se ainda, através da Física Clássica que dois grupos distintos de forças podem atuar no volume material:

As FORÇAS DE CAMPO (F_b), que são aquelas que atuam sobre o constituinte i , contido no volume material, sem que haja contato físico. Tais forças têm sua expressão matemática dada pela Equação (3.32),

$$F_b = \iiint (\bar{\rho}_i b) dV \quad (3.32)$$

onde b é o vetor intensidade do campo.

As FORÇAS DE SUPERFÍCIE (F_s), que são aquelas que atuam sobre o constituinte i contido no volume material através do contato físico por suas fronteiras. Tais forças têm sua expressão matemática dada pela Equação (3.33),

$$F_s = \iint T_i \cdot n dS \quad (3.33)$$

onde T_i é o tensor tensão no constituinte i . A força F_s , representada pela Equação (3.33), exprime a força exercida por todas as partículas do componente i sobre uma partícula do mesmo componente.

A Teoria das Misturas prevê a existência de uma outra força atuante num sistema

multicomposto: é a força exercida sobre uma partícula do constituinte i , pelos demais componentes diferentes de i contidos no volume material. Tal força é chamada de FORÇA DE INTERAÇÃO (F_l) e é extremamente relevante para o caso da sedimentação em batelada para concentrações iniciais superiores a 1% em volume (ALLEN, 1981). A expressão matemática desta força é dada pela Equação (3.34):

$$F_l = \iiint (\bar{\rho}_i l_i) dV \quad (3.34)$$

onde l equivale ao vetor campo de interação.

Desta forma o somatório das forças que atuam sobre o componente i é dado por:

$$\sum_j (F_j)_i = \iiint (\bar{\rho}_i b) dV + \iint T_i \cdot n dS + \iiint (\bar{\rho}_i l_i) dV \quad (3.35)$$

que, por sua vez, quando substituído na Equação (3.31) fornece:

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}_i v_i) dV + \iint (\bar{\rho}_i v_i v_i) \cdot n dS = \iiint (\bar{\rho}_i b) dV + \iint T_i \cdot n dS + \iiint (\bar{\rho}_i l_i) dV \quad (3.36)$$

A aplicação do Teorema da Divergência de Gauss à equação anterior produz:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}_i v_i) + \nabla \cdot (\bar{\rho}_i v_i v_i) = \bar{\rho}_i b + \nabla \cdot T_i + \bar{\rho}_i l_i \quad (3.37)$$

que através dos conceitos de álgebra tensorial pode ser reescrita como:

$$v_i \frac{\partial \bar{\rho}_i}{\partial t} + \bar{\rho}_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \bar{\rho}_i v_i \cdot \nabla v_i + v_i \nabla \cdot \bar{\rho}_i v_i = \bar{\rho}_i b + \nabla \cdot T_i + \bar{\rho}_i l_i \quad (3.38)$$

sendo que o primeiro membro da Equação (3.38) pode ter os termos semelhantes agrupados, como mostra a Equação (3.39).

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}_i v_i) + \nabla \cdot \bar{\rho}_i v_i v_i = \bar{\rho}_i \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \cdot \nabla v_i \right] + v_i \left[\frac{\partial \bar{\rho}_i}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho}_i v_i \right] \quad (3.39)$$

O termo entre colchetes na segunda parcela do segundo membro é nulo, uma vez que é a expressão da equação da continuidade para o componente i ; logo, por simplificações obtém-se a expressão dada pela Equação (3.40) após a substituição da relação apresentada pela Equação (3.21):

$$\rho_i \varepsilon_i \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \cdot \nabla v_i \right] = \rho_i \varepsilon_i b + \nabla \cdot T_i + \rho_i \varepsilon_i l_i \quad (3.40)$$

Sabe-se de acordo com a terceira lei de Newton, que a soma das forças de interação

deve ser nula, $\sum_i \rho_i \varepsilon_i l_i = 0$, e assim para a mistura binária de constituintes sólido e líquido,

$$\rho_f \varepsilon_f l_f = -\rho_s \varepsilon_s l_s \quad (3.41)$$

Para o caso de sistemas sólido-líquido pode-se definir o termo de interação entre as partículas através da força resistiva, equivalente a força exercida pelo fluido sobre a matriz porosa a menos da força de empuxo, apresentada pela Equação (3.42).

$$m = \rho_f (1 - \varepsilon_f) b - \rho_f \varepsilon_f l_f \quad (3.42)$$

onde m passará a representar, doravante, a força resistiva, incluindo de certa forma o efeito de empuxo. Conseqüentemente pela substituição da Equação (3.41) na expressão anterior, pode-se desdobrar a força de interação sobre o sólido em duas parcelas:

$$\rho_s \varepsilon_s l_s = m - \rho_f (1 - \varepsilon_f) b \quad (3.43)$$

Assim as equações do movimento aplicadas ao fenômeno da separação sólido-líquido, como no caso da sedimentação em batelada, na qual a força de campo atuante é a aceleração da gravidade, são dadas pelas Equações (3.44) e (3.45), respectivamente para o sólido e para o líquido.

$$\rho_s \varepsilon_s \left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \cdot \nabla v_s \right] = \nabla \cdot T_s + m + (\rho_s - \rho_f) \varepsilon_s g \quad (3.44)$$

$$\rho_f \varepsilon_f \left[\frac{\partial v_f}{\partial t} + v_f \cdot \nabla v_f \right] = \nabla \cdot T_f - m + \rho_f g \quad (3.45)$$

A modelagem de sistemas sólido-líquidos pode ser efetuada resolvendo-se simultaneamente as equações dos balanços de massa e de quantidade de movimento linear, Equações (3.27), (3.28), (3.44) e (3.45), obtidas através da Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo. Entretanto, a resolução do sistema exige a elaboração de uma teoria constitutiva para a incorporação de hipóteses relativas às tensões nos sólidos e no líquido e à força resistiva.

3.3 Teoria Constitutiva

3.3.1 Hipóteses Constitutivas

A resolução simultânea das equações da continuidade e do movimento para os componentes sólido e líquido pode ser determinada lançando mão de hipóteses constitutivas relativa

às tensões nos constituintes da mistura e à força resistiva. Para tanto, D'Ávila e Sampaio (1977a) elaboraram uma teoria constitutiva complexa onde enunciaram e demonstraram três teoremas de representação das tensões dos componentes de uma suspensão e da força resistiva. D'Ávila e Sampaio consideraram como hipótese básica o fato do sistema sólido-fluido ser um meio isotrópico e indicaram que os tensores tensão podem ser representados da seguinte forma:

$$T_i = -p_i I - T'_i \quad (3.46)$$

onde p_i e T'_i são respectivamente, a pressão (parte arbitrária do tensor) e a tensão extra (parte constitutiva do tensor). O termo T'_i representa a parcela dinâmica do tensor tensão e $p_i I$ representa sua parte estática, sendo I a matriz identidade. Sendo assim, para o caso do sistema tridimensional em coordenadas cartesianas, como é o caso da sedimentação, a representação é dada por:

$$\begin{bmatrix} T_{xx,i} & T_{xy,i} & T_{xz,i} \\ T_{yx,i} & T_{yy,i} & T_{yz,i} \\ T_{zx,i} & T_{zy,i} & T_{zz,i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_i & 0 & 0 \\ 0 & p_i & 0 \\ 0 & 0 & p_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T'_{xx,i} & T'_{xy,i} & T'_{xz,i} \\ T'_{yx,i} & T'_{yy,i} & T'_{yz,i} \\ T'_{zx,i} & T'_{zy,i} & T'_{zz,i} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

onde i representa os constituintes sólido (s) e líquido (f).

Por simetria do tensor tensão pode-se escrever:

$$T_{xy,i} = T_{yx,i} \quad (3.48)$$

$$T_{xz,i} = T_{zx,i} \quad (3.49)$$

$$T_{yz,i} = T_{zy,i} \quad (3.50)$$

Três teoremas principais enunciados por D'Ávila e Sampaio (1977a) em sua teoria constitutiva são apresentados a seguir:

Teorema 1 Se a tensão extra no constituinte da mistura depende apenas da porosidade do meio, então o tensor tensão total possui apenas componentes normais à superfície de contato, que dependem apenas da porosidade, isto é,

$$T_i(\varepsilon_f) = -P_i(\varepsilon_f) I \quad (3.51)$$

Teorema 2 Se a tensão extra no constituinte da mistura e a força resistiva dependem do gradiente de porosidade e da porosidade do meio, então o tensor tensão total e a força resistiva são dados, respectivamente, por:

$$T_i(\varepsilon_f, \nabla \varepsilon_f) = -P_i(\varepsilon_f, |\nabla \varepsilon_f|) I + \gamma(\varepsilon_f, |\nabla \varepsilon_f|) \nabla \varepsilon_f \otimes \nabla \varepsilon_f \quad (3.52)$$

$$m(\varepsilon_f, |\nabla \varepsilon_f|) = \alpha(\varepsilon_s, |\nabla \varepsilon_f|) \nabla \varepsilon_f \quad (3.53)$$

onde $\otimes$ representa o operador produto tensorial.

Teorema 3 Se a tensão extra no constituinte da mistura e a força resistiva dependem da velocidade relativa líquido-sólido, $v_r = v_f - v_s$, e da porosidade do meio, então a tensão total e a força resistiva são dadas por:

$$T_i(\varepsilon_f, v_r) = -P_i(\varepsilon_f, |v_r|) I + \gamma(\varepsilon_f, |v_r|) v_r \otimes v_r \quad (3.54)$$

$$m(\varepsilon_f, v_r) = \alpha(\varepsilon_f, |v_r|) v_r \quad (3.55)$$

O teorema 1 da teoria constitutiva revela que se a tensão extra no constituinte da mistura for uma função exclusiva da porosidade do meio então o tensor tensão é uma pressão estática aplicada na superfície no constituinte da mistura. Sendo assim o sistema de tensores representado pela Equação (3.47) é reduzido a:

$$\begin{bmatrix} T_{xx,i} & T_{xy,i} & T_{xz,i} \\ T_{yx,i} & T_{yy,i} & T_{yz,i} \\ T_{zx,i} & T_{zy,i} & T_{zz,i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 \\ 0 & P_i & 0 \\ 0 & 0 & P_i \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

que quando aplicado ao caso particular da sedimentação binária unidimensional com escoamento na direção cartesiana z , é dado por:

$$T_{xz,i} = 0 \quad (3.57)$$

$$T_{yz,i} = 0 \quad (3.58)$$

$$T_{zz,i} = -P_i \quad (3.59)$$

O termo $\nabla \cdot T_i$ na equação do movimento, Equação (3.40), fica reduzido à $-\nabla P_i$. Como $P_i = P_i(\varepsilon)$, o uso da regra da cadeia nos permite escrever:

$$-\nabla P_i = -\frac{\partial P_i}{\partial \varepsilon_i} \nabla \varepsilon_i \quad (3.60)$$

Levando-se em consideração os teoremas 1, 2 e 3 da teoria constitutiva apresentada por D'Ávila e Sampaio (1977a) é possível elaborar experimentos para determinar as funções isotrópicas escalares P_i , α e γ . Tal procedimento visa incorporar equações constitutivas para as tensões nos constituintes da mistura e para a força resistiva no sistema de equações obtido pela aplicação da Teoria das Misturas para a modelagem do fenômeno. Para que tal sistema possa ser determinado, o grau de liberdade do mesmo deve ser nulo.

Na separação sólido-líquido são 15 as equações disponíveis para estudar o problema tridimensional:

- 2 (duas) equações da continuidade representadas pelas Equações (3.27) e (3.28);
- 6 (seis) equações do movimento representadas pelas Equações (3.44) e (3.45) para cada direção do plano cartesiano;
- 1 (uma) que apresenta o somatório das frações volumétricas dos constituintes representada pela Equação (3.20);
- 6 (seis) equações equivalentes aos tensores apresentadas pelas Equações (3.19) a (3.21), sendo três para cada constituinte.

Em contrapartida são 29 variáveis a serem determinadas:

- 2 (duas) as frações volumétricas dos constituintes, dadas por ε_f e ε_s ;
- 6 (seis) os componentes das velocidades intersticiais, v_f e v_s nas direções x , y e z ;
- 3 (três) da força resistiva, representada nas Equações (3.44) e (3.45) por m , para cada direção x , y e z ;
- 18 (dezoito) tensores, representados por T_{xx} , T_{xy} , T_{xz} , T_{yx} , T_{yy} , T_{yz} , T_{zx} , T_{zy} , e T_{zz} , para cada componente sólido e líquido.

Para que o sistema seja determinado é necessário, portanto, o conhecimento de 14 equações a fim de se modelar o fenômeno da sedimentação em batelada.

Para o caso particular de um escoamento unidimensional através de um meio poroso, como é o caso da sedimentação em batelada, o número de equações que descrevem o fenômeno é reduzido para nove, sendo:

- 2 (duas) equações da continuidade representadas pelas Equações (3.27) e (3.28);
- 2 (duas) equações do movimento representadas pelas Equações (3.44) e (3.45);
- 1 (uma) equação da soma das frações volumétricas representada pela Equação (3.20);
- 4 (quatro) para os tensores representadas pelas Equações (3.57) e (3.58) para cada constituinte.

Por sua vez apenas 11 variáveis devem ser especificadas:

- 2 (duas) frações volumétricas, dadas por ε_f e ε_s ;
- 2 (duas) velocidades intersticiais, v_f e v_s na direção do escoamento;
- 1 (uma) força resistiva, representada nas Equações (3.44) e (3.45) por m ;
- 6 (seis) tensores, representados por T_{xz} , T_{yz} e T_{zz} no caso particular de escoamento na direção z do plano cartesiano.

Portanto, havendo ONZE VARIÁVEIS A SEREM DETERMINADAS e apenas NOVE EQUAÇÕES DISPONÍVEIS, torna-se necessário a incorporação de outras DUAS EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS para a resolução do problema. No caso do tensor $T_i = T_i(\varepsilon_s)$, de acordo com o Teorema 1 da Teoria Constitutiva de D'Ávila e Sampaio (1977a), só existirá um componente da tensão, no caso de escoamento unidimensional, apresentado pela Equação (3.59). Desta forma, as duas equações constitutivas necessárias para descrever a sedimentação unidimensional são relativas à pressão nos sólidos e à força resistiva.

3.3.2 Tensão nos Sólidos

O sistema de equações diferenciais obtido pela aplicação da Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo pode ser utilizado para modelar cada uma das três regiões bifásicas existentes no processo de sedimentação em batelada (regiões de sedimentação livre, de transição e de formação do sedimento, apresentadas na Figura 3.2). Entretanto, as equações constitutivas são específicas para cada região.

A região de sedimentação livre, cuja velocidade de queda da partícula é constante, é caracterizada por uma fraca interação sólido-sólido, o que indica um efeito negligenciável da tensão nos sólidos. Na região de formação do sedimento a interação sólido-sólido por sua vez é extremamente significativa, acarretando um forte efeito de tensão nos sólidos seguido pela compactação das partículas pela ação de seu próprio peso. A região de transição por sua vez possui características em comum com as demais regiões e normalmente costuma-se considerar que a tensão nos sólidos é desprezível. Sendo as regiões distintas entre si, é presumível que as equações que governam o fenômeno também o sejam.

Em 1978 d'Ávila apresentou algumas classes de funções $P_s(\varepsilon_s)$ por ele denominadas equações de estado e se restringiu à aplicação do Teorema 1 da teoria constitutiva de D'Ávila e Sampaio (1977a) quando baseou-se na dependência da pressão nos sólidos como uma função exclusiva da porosidade local.

No caso particular de suspensões suficientemente diluídas ou no início do processo da sedimentação, não obstante firmando-se sempre na hipótese razoável da formação de

pequenos gradientes de porosidade e de velocidade para a região de sedimentação livre, D'Ávila (1978) apresentou exemplos de equações para a pressão nos sólidos para tal região:

$$P_s = P_{sc} \frac{\varepsilon_{fc}}{(1 - \varepsilon_{fc})} \frac{(1 - \varepsilon_f)}{\varepsilon_f} \quad (3.61)$$

$$P_s = \rho_s v_{stk}^2 (1 - \varepsilon_{fc}) \frac{(1 - \varepsilon_f)}{(1 - \varepsilon_{fc})} \quad (3.62)$$

onde P_{sc} e ε_{fc} representam a pressão nos sólidos e a porosidade no ponto crítico (ponto de compressão) e v_{stk} é a velocidade terminal de Stokes. Com base em certos fatos físicos da sedimentação em batelada, por exemplo, $P_s = 0$ quando $\varepsilon_f = 1$ e $P_s = P_{sc}$ em $\varepsilon_f = \varepsilon_{fc}$, levou d'ÁVILA a supor a pressão nos sólidos linear em ε_f pela aplicação da Equação (3.63) para $n = 1$:

$$P_s = P_{sc} \left(\frac{1 - \varepsilon_f}{1 - \varepsilon_{fc}} \right)^n \quad (3.63)$$

ou ainda utilizando uma condição adicional em $\varepsilon_f = 1$ em que $\partial P_s / \partial \varepsilon_f = 0$ considerando a forma quadrática para a pressão fazendo $n = 2$ na expressão anterior. Analogamente, obteve uma expressão cúbica para a pressão nos sólidos aplicando a condição $\partial^2 P_s / \partial \varepsilon_f^2 = 0$ em $\varepsilon_f = 1$ fazendo $n = 3$.

A grande maioria dos trabalhos sugere que a tensão nos sólidos na região de sedimentação livre seja desprezível, $P_s = 0$, e não utilizam equações constitutivas para a pressão em tal região, apenas negligenciando o efeito de interação sólido-sólido na equação do movimento.

Para a região de compressão, a equação constitutiva mais comumente utilizada foi proposta por Tiller e Leu (1980):

$$P_s = P_a \left[\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sc}} \right)^{\frac{1}{\beta}} - 1 \right] \quad (3.64)$$

na qual P_a , ε_{sc} e β são parâmetros determinados experimentalmente, sendo que $(1 - \varepsilon_{s0})$ representa a porosidade no início da zona de compressão, cuja pressão local é assumida como sendo nula.

3.3.3 Força Resistiva

A representação da força resistiva tornou-se essencial para a determinação do sistema de equações que governam o fenômeno da separação sólido-líquido. Uma vez que a força resistiva leva em consideração a força exercida pelo fluido sobre a matriz porosa e a força de empuxo, um grande número de autores assume a mesma como sendo uma função da

porosidade do meio e da velocidade relativa entre os constituintes da mistura.

O Teorema 3 da Teoria constitutiva de D'Ávila e Sampaio (1977a) apresenta uma expressão para a força resistiva, Equação (3.55), bastando especificar uma forma adequada para a função escalar isotrópica $\alpha(\varepsilon_f, v_r)$, denominada de resistividade do meio poroso.

A resistividade do meio poroso pode ser representada matematicamente por uma expansão em série de Taylor em termos de $|v_r|$, como foi feito por Thirriot et al. (1973), D'Ávila (1978) e Damasceno (1992):

$$\alpha(\varepsilon_f, v_r) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\varepsilon_f) (|v_r|)^n \quad (3.65)$$

e por sua vez a expressão para a força resistiva passa a ser:

$$m(\varepsilon_f, v_r) = v_r \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\varepsilon_f) (|v_r|)^n \quad (3.66)$$

que para o caso particular de um escoamento unidimensional pode ser simplificada como mostra a Equação (3.67).

$$m(\varepsilon_f, v_r) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\varepsilon_f) (v_r)^{n+1} \quad (3.67)$$

Expandindo-se os termos do somatório apresentado na Equação (3.67) tem-se:

$$m(\varepsilon_f, v_r) = \alpha_0(\varepsilon_f) v_r + \alpha_1(\varepsilon_f) v_r^2 + \alpha_2(\varepsilon_f) v_r^3 + \dots + \alpha_n(\varepsilon_f) v_r^{n+1} + \dots \quad (3.68)$$

que para o caso de um escoamento lento em regime Darcyano, ou seja $Re \ll 1$, os termos que contém a velocidade relativa em ordens superiores a v_r^2 em diante são desprezíveis e podem ser negligenciados truncando-se o somatório em seu primeiro termo. Assim, a expressão para a força resistiva se reduz a:

$$m(\varepsilon_f, v_r) = \alpha_0(\varepsilon_f) v_r \quad (3.69)$$

bastando-se determinar o coeficiente α_0 através de ensaios experimentais.

Um grande número de experimentos formulados para o caso de escoamento lento e unidimensional em meios porosos aponta para a lei de Darcy:

$$m = \frac{\mu \varepsilon_f}{k(\varepsilon_f)} (v_f - v_s) \quad (3.70)$$

na qual μ é a viscosidade do fluido e k a permeabilidade do meio poroso, que por sua vez

em geral é admitida como uma função exclusiva da porosidade. Tal expressão, Equação (3.70), mostra que para se determinar a força resistiva é necessário especificar uma equação constitutiva para a permeabilidade do meio poroso.

Assumindo-se a hipótese que k é função apenas da porosidade então é possível obter expressões para tal função através da realização de experimentos em laboratório. Tiller e Leu (1980) desenvolveram através de ensaios experimentais uma expressão simples para a permeabilidade do meio:

$$k = k_0 \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sc}} \right)^{-\eta} \quad (3.71)$$

onde k_0 , ε_{sc} e η são parâmetros experimentais. Tal expressão é bastante citada na literatura por conduzir a bons resultados em uma ampla faixa de porosidades.

Arouca (2003) apresentou uma expressão para a permeabilidade do meio obtida através de ensaios de sedimentação em batelada determinada para uma elevada faixa de concentrações de sólidos:

$$k = \frac{1}{c_0 + c_1 \varepsilon_s} \quad (3.72)$$

na qual c_0 e c_1 são parâmetros que podem ser obtidos através de ensaios experimentais.

Assim sendo, a modelagem de sistemas sólido-líquidos pode ser efetuada pela resolução simultânea das equações da continuidade e do movimento para os constituintes da mistura ao incorporar equações constitutivas para a pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso ao problema.

3.4 Modelo de d'Ávila (1978)

3.4.1 Desenvolvimento do Equacionamento

As equações que modelam o fenômeno da sedimentação podem ser obtidas a partir da aplicação da Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo e do Teorema do Transporte de Reynolds aos balanços de massa e quantidade de movimento linear e de hipóteses constitutivas para a pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso, como foi apresentado nas seções anteriores.

O modelo de d'Ávila merece destaque pela grande contribuição ao estudo da sedimentação ao ser o pioneiro no desenvolvimento de uma abordagem dinâmica fazendo uso da Teoria das Misturas. D'Ávila utilizou as equações da continuidade e do movimento para os constituintes da mistura para descrever a região de sedimentação propriamente dita durante a sedimentação em batelada.

Para a simplificar a análise do problema o autor considerou as seguintes hipóteses no modelo:

- A sedimentação é um fenômeno unidimensional;
- As fases da mistura são incompressíveis;
- Os tensores tensões nos constituintes sólido e líquido são funções exclusivas da porosidade do meio;
- Os efeitos de paredes são desprezíveis.

Sob tais considerações e lançando mão do teorema 1 da Teoria Constitutiva de D'Ávila e Sampaio (1977a), as expressões da conservação de massa e de quantidade de movimento, Equações (3.27), (3.28), (3.44) e (3.45), se reduzem a:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_s v_s}{\partial z} = 0 \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_f v_f}{\partial z} = 0 \quad (3.74)$$

$$\rho_s \varepsilon_s \left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial z} \right] = -\frac{dP_s}{dz} + m + (\rho_s - \rho_f) \varepsilon_s g \quad (3.75)$$

$$\rho_f \varepsilon_f \left[\frac{\partial v_f}{\partial t} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial z} \right] = -\frac{dP_f}{dz} - m + \rho_f g \quad (3.76)$$

A soma das Equações (3.73) e (3.74) leva a:

$$\frac{\partial (\varepsilon_s + \varepsilon_f)}{\partial t} + \frac{\partial (\varepsilon_s v_s + \varepsilon_f v_f)}{\partial z} = 0 \quad (3.77)$$

em contrapartida, da relação apresentada pela Equação (3.20) das frações volumétricas, a expressão anterior se reduz a:

$$\frac{\partial ((1 - \varepsilon_f) v_s + \varepsilon_f v_f)}{\partial z} = 0 \quad (3.78)$$

e por definição,

$$((1 - \varepsilon_f) v_s + \varepsilon_f v_f) = q(t) \quad (3.79)$$

na qual equivale a velocidade superficial da mistura. Entretanto d'Ávila considerou uma restrição cinemática existente na base da coluna de sedimentação ($z = 0$) em que as velocidades dos constituintes são nulas, $v_s = v_f = 0$, ou seja $q(t) = 0$, determinando uma expressão que relaciona ambas as velocidades:

$$v_f = -\frac{(1 - \varepsilon_f)}{\varepsilon_f} v_s \quad (3.80)$$

Tal expressão, Equação ((3.80), pode ser aplicada em todos as posições da coluna de sedimentação visto que a velocidade superficial total é função exclusiva do tempo e não da posição. A grande vantagem de se utilizar tal equação reside no fato de que os perfis de velocidades e as distribuições de porosidades dos constituintes sólido e líquido podem ser obtidos pelas equações da continuidade e do movimento referentes a apenas um dos constituintes e mais a restrição cinemática, diminuindo o grau de complexidade do problema.

Ao fazer uso do teorema 3 da teoria constitutiva de D'Ávila e Sampaio (1977a), em que a força resistiva é uma função da porosidade local e da velocidade relativa dos constituintes, d'Ávila utilizou a expressão dada pela Equação (3.70) para m , aplicando a relação fornecida pela Equação (3.80):

$$m = -\frac{\mu\varepsilon_f}{k(\varepsilon_f)} \left(\frac{(1-\varepsilon_f)}{\varepsilon_f} v_s + v_s \right) \quad (3.81)$$

que pode ser manipulada algebricamente obtendo-se:

$$m = -\frac{\mu v_s}{k(\varepsilon_f)} \quad (3.82)$$

Com isso, o fenômeno da sedimentação em batelada pode ser descrito através da resolução das equações dos balanços de massa e de quantidade de movimento para o constituinte sólido.

A equação da continuidade para o sólido, Equação (3.73), pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial(1-\varepsilon_f)}{\partial t} + \frac{\partial(1-\varepsilon_f)v_s}{\partial z} = 0 \quad (3.83)$$

ou ainda,

$$-\frac{\partial\varepsilon_f}{\partial t} + (1-\varepsilon_f)\frac{\partial v_s}{\partial z} - v_s\frac{\partial\varepsilon_f}{\partial z} = 0 \quad (3.84)$$

A equação do movimento para o sólido, Equação (3.75), fica reduzida a:

$$\rho_s(1-\varepsilon_f) \left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P_s}{\partial z} - \frac{\mu v_s}{k(\varepsilon_f)} + (\rho_s - \rho_f)(1-\varepsilon_f)g \quad (3.85)$$

mas como $\varepsilon_f = \varepsilon_f(z, t)$ e visto que $P_s = P_s(\varepsilon_f)$, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial P_s}{\partial z} = \frac{dP_s}{d\varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} \quad (3.86)$$

que quando substituída na Equação (3.85) fornece a expressão final para a equação de

conservação da quantidade de movimento para o constituinte sólido:

$$\rho_s (1 - \varepsilon_f) \left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial z} \right] + \frac{dP_s}{d\varepsilon_f} \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} = -\frac{\mu v_s}{k(\varepsilon_f)} + (\rho_s - \rho_f) (1 - \varepsilon_f) g \quad (3.87)$$

Ao propor o sistema, d'Ávila adimensionalizou as Equações (3.84) e (3.87) adotando as seguintes variáveis:

$$V = \frac{v_s}{v_{s0}} \rightarrow \partial V = \frac{\partial v_s}{v_{s0}} \rightarrow V = \frac{v_s}{v_{s0}} \quad (3.88)$$

$$T = \frac{t}{t_0} \rightarrow \partial T = \frac{\partial t}{t_0} \rightarrow t_0 \partial T = \partial t \quad (3.89)$$

$$Z = \frac{z}{z_0} \rightarrow \partial Z = \frac{\partial z}{z_0} \rightarrow z_0 \partial Z = \partial z \quad (3.90)$$

$$P = \frac{P_s}{P_0} \rightarrow \partial P = \frac{\partial P_s}{P_0} \rightarrow P_0 \partial P = \partial P_s \quad (3.91)$$

Substituindo-se as Equações (3.88) a (3.91) na Equação (3.84) da conservação da massa, multiplicando ambos os membros da expressão por z_0/v_{s0} e após as devidas simplificações chega-se a:

$$-M \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial T} + (1 - \varepsilon_f) \frac{\partial V}{\partial Z} - V \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial Z} = 0 \quad (3.92)$$

na qual $M = \frac{z_0}{v_{s0} t_0}$.

De forma análoga procede-se a adimensionalização da equação do movimento para o sólido, Equação (3.87). Multiplicando-se ambos os membros da expressão por $z_0 (v_{s0}^2 \rho_s)^{-1}$ e após as devida manipulações algébricas:

$$(1 - \varepsilon_f) \left(M \frac{\partial V}{\partial T} + V \frac{\partial V}{\partial Z} \right) + S \frac{dP}{d\varepsilon_f} \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial Z} = -AV + B(1 - \varepsilon_f) \quad (3.93)$$

na qual $M = \frac{z_0}{v_{s0} t_0}$, $S = \frac{P_0}{\rho_s v_{s0}}$, $A = \frac{\mu z_0}{\rho_s v_{s0} k(\varepsilon_f)}$, $B = \frac{(\rho_s - \rho_f) g z_0}{\rho_s v_{s0}^2}$.

O modelo de d'Ávila, constituído pelas Equações (3.92) e (3.93), compreende a teoria de Kynch (1952) como um caso particular de sua abordagem em que os efeitos de pressão ou o balanço de força no sistema são negligenciados.

3.4.2 Caráter Hiperbólico do Equacionamento de d'Ávila

Certamente o grande avanço no desenvolvimento fenomenológico da sedimentação ocorreu a partir da aplicação da teoria das misturas. Desde então, com a compressão dos sólidos sendo levada em consideração verifica-se matematicamente a existência de duas descon- tinuidades que se propagam em sentidos opostos: a interface ascendente e a descendente.

Tais discontinuidades podem ser determinadas para a abordagem de D'Ávila (1978), ao resolver o sistema de Equações (3.92) e (3.93). Um sistema quasi-linear de equações diferenciais parciais de primeira ordem, como é caso em questão, pode ser resolvido ao reescrever as expressões na forma geral:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial T} + \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial Z} = c_i \quad (3.94)$$

com $i = (1, 2, 3 \dots, n)$, onde a_{ij} , b_{ij} e c_i devem depender de T , Z , u_1 , u_2 , ..., u_n . Se o sistema é independente de u_1 , u_2 , ..., u_n , o sistema é chamado de quasi-linear.

O sistema de equações também pode ser escrito na forma matricial:

$$Au_T + Bu_Z = C \quad (3.95)$$

As Equações (3.92) e (3.93) que governam o fenômeno da sedimentação segundo a descrição de d'Ávila podem ser escritas na forma matricial da Equação (3.95) como segue:

$$\begin{bmatrix} -V & (1 - \varepsilon_f) \\ S \frac{dP}{d\varepsilon_f} & V(1 - \varepsilon_f) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial Z} \\ \frac{\partial V}{\partial Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & M(1 - \varepsilon_f) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial T} \\ \frac{\partial V}{\partial T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

com $H = AV + B(1 - \varepsilon_f)$.

Para a determinação das características do sistema na Equação (3.96) é necessário definir o polinômio característico dado pela forma geral:

$$F(\lambda) = \det(A - B\lambda) \quad (3.97)$$

onde $F(\lambda)$ é a função característica e $\det(A - B\lambda)$ refere-se ao determinante da operação matricial obtida por $(A - B\lambda)$. As raízes características são obtidas igualando-se $F(\lambda)$ a zero.

Desta forma, pode-se calcular o determinante da matriz resultante da operação $(A - B\lambda)$, com A e B equivalentes as matrizes dos coeficientes das Equações (3.92) e (3.93), ao escrever a expressão:

$$\det \left(\begin{bmatrix} -V & (1 - \varepsilon_f) \\ S \frac{dP}{d\varepsilon_f} & V(1 - \varepsilon_f) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -M\lambda & 0 \\ 0 & M(1 - \varepsilon_f)\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.98)$$

ou ainda,

$$\det \left(\begin{bmatrix} -V + M\lambda & (1 - \varepsilon_f) \\ S \frac{dP}{d\varepsilon_f} & V(1 - \varepsilon_f) - M(1 - \varepsilon_f)\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.99)$$

Resolvendo-se o determinante é possível obter a seguinte expressão:

$$M^2\lambda^2 - 2MV\lambda + \left(S\frac{dP}{d\varepsilon_f} + V^2\right) = 0 \quad (3.100)$$

Tal expressão, Equação (3.100), é equivalente a função característica do sistema de equações proposto por d'Ávila, cujas raízes λ são dada por:

$$\lambda_1 = \frac{1}{M} \left(V + \sqrt{-S\frac{dP}{d\varepsilon_f}} \right) \quad (3.101)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{M} \left(V - \sqrt{-S\frac{dP}{d\varepsilon_f}} \right) \quad (3.102)$$

na qual λ_1 e λ_2 são raízes reais e distintas, o que confere ao sistema constituído pelas Equações (3.92) e (3.93) um carácter hiperbólico. Com $\lambda = dZ/dT$ pode-se escrever:

$$\left. \frac{dZ}{dT} \right|_{desc} = \frac{1}{M} \left(V - \sqrt{-S\frac{dP}{d\varepsilon_f}} \right) \quad (3.103)$$

$$\left. \frac{dZ}{dT} \right|_{asc} = \frac{1}{M} \left(V + \sqrt{-S\frac{dP}{d\varepsilon_f}} \right) \quad (3.104)$$

D'Ávila, portanto constituiu um sistema de equações diferenciais que diferentemente de Kynch (1952) apresenta carácter hiperbólico, prevendo o deslocamento de duas interfaces, uma descendente e outra ascendente, representadas respectivamente pelas Equações (3.103) e (3.104), satisfazendo o modelo físico.

O novo sistema constituído pelas Equações (3.103) e (3.104) é um problema de valor inicial associado às seguintes condições iniciais:

$$T = 0 : \quad V = V_0(\varepsilon_f), \quad \varepsilon_f = \varepsilon_{f0}(Z) \quad (3.105)$$

Tal problema foi resolvido por d'Ávila utilizando o método das características com o algoritmo de Smith e McCall (1970) *apud* D'Ávila (1978). Os resultados forneceram os valores de $V(Z, T)$ e $\varepsilon_f(Z, T)$ para a região de sedimentação propriamente dita (região de sedimentação livre ilustrada na Figura 3.2).

3.4.3 O Problema de Fronteira Móvel e as Condições de Salto

D'Ávila demonstrou a enorme importância em se considerar o efeito da pressão nos sólidos ao levar em consideração o balanço de forças no constituinte da mistura. O autor resolveu o problema da sedimentação em batelada para a região de sedimentação propriamente dita, região delimitada pelas duas interfaces: ascendente e descendente. O método utilizado não possibilita informações a respeito da região de compressão uma vez que o problema se encerra no ponto de encontro das duas descontinuidades. Entretanto, d'Ávila descreve o fenômeno da sedimentação em batelada como um problema de fronteira móvel, no qual as descontinuidades se deslocam no espaço delimitando três regiões distintas:

- Região de líquido clarificado (Região I);
- Região de sedimentação propriamente dita (Região II);
- Região de compressão (Região III).

Cada região delimitada pelas descontinuidades pode ser modelada isoladamente utilizando as equações da continuidade e do movimento obtidas pela teoria das misturas, além da incorporação de equações constitutivas apropriadas em cada caso. No entanto, as descontinuidades, por serem superfícies singulares, não admitem o uso das equações de conservação.

D'Ávila e Sampaio (1977a) apresentaram as chamadas equações de salto, equações que relacionam as propriedades das regiões permitindo que o problema seja resolvido por sistemas independentes ligados por condições de contornos comuns entre as mesmas. Tal problema possui subdomínios variáveis que caracterizam um problema de fronteira móvel.

As equações de salto foram obtidas por D'Ávila e Sampaio (1977a) pela aplicação do Teorema do Transporte de Reynolds a volumes materiais que apresentam superfícies singulares. As expressões para o balanço de massa para os constituintes sólido e líquido nas descontinuidades são respectivamente:

$$([\bar{\rho}_s v_s] - [\bar{\rho}_s] U^*) \cdot e = 0 \quad (3.106)$$

$$([\bar{\rho}_f v_f] - [\bar{\rho}_f] U^*) \cdot e = 0 \quad (3.107)$$

e para o balanço de quantidade de movimento,

$$([\bar{\rho}_s v_s \otimes (v_s - U^*) - T_s]) \cdot e = 0 \quad (3.108)$$

$$([\bar{\rho}_f v_f \otimes (v_f - U^*) - T_f]) \cdot e = 0 \quad (3.109)$$

para o sólido e líquido, respectivamente, nas quais U^* é a velocidade de deslocamento da descontinuidade e os colchetes representam os saltos das variáveis por elas delimitadas. O operador $\otimes$ denota o produto tensorial e e equivale ao vetor normal à superfície singular.

A Figura 3.4 apresenta o problema de subdomínios com fronteiras móveis representadas pelas interfaces descendente e ascendente indicadas pelos índices (1,2) e (3,4) respectivamente. As equações de salto aplicadas a tais descontinuidades são desenvolvidas na seqüência.

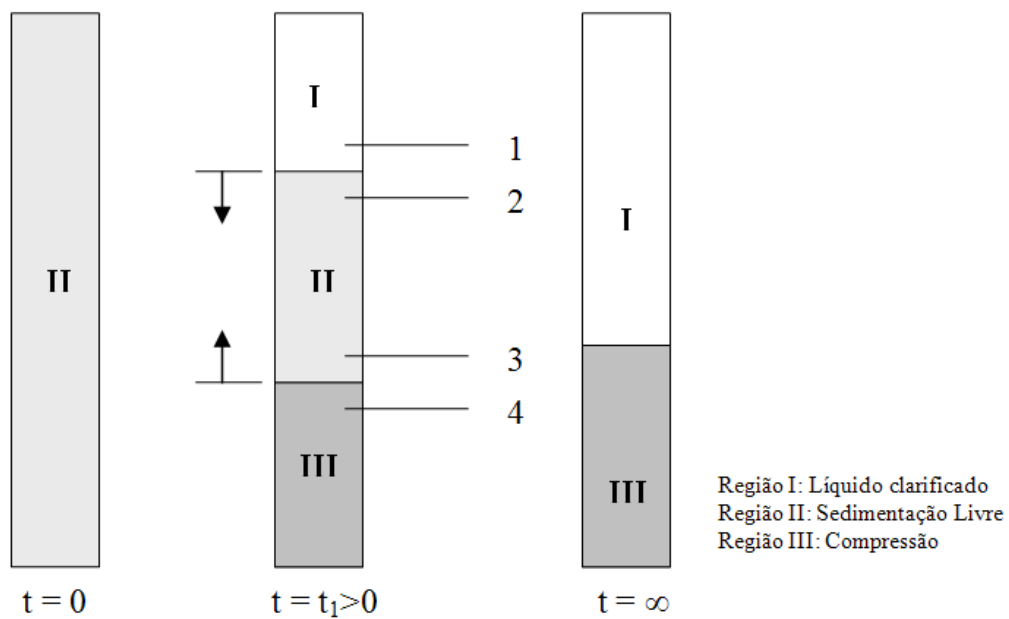


Figura 3.4: Regiões I, II e III da sedimentação em batelada delimitadas pelas descontinuidades: interface descendente (1,2) e ascendente (3,4).

A equação de salto do balanço material aplicado na superfície singular da interface descendente (1,2) é obtida desenvolvendo-se a Equação (3.106) para o constituinte sólido:

$$\bar{\rho}_{s1}v_{s1} - \bar{\rho}_{s2}v_{s2} = (\bar{\rho}_{s1} - \bar{\rho}_{s2})U_{1,2}^* \quad (3.110)$$

na qual a concentração mássica é dada por $\bar{\rho}_{si} = \rho_s(1 - \varepsilon_{fi})$, Equação (3.21), com o subscrito i válido para denotar as regiões 1 e 2, e $U_{1,2}^*$ equivale a velocidade da interface descendente. Reescrevendo a Equação (3.110) obtém-se:

$$(1 - \varepsilon_{f1})v_{s1} - (1 - \varepsilon_{f2})v_{s2} = (\varepsilon_{f2} - \varepsilon_{f1})U_{1,2}^* \quad (3.111)$$

para o sistema é isotérmico e incompressível.

Para o constituinte líquido a equação da conservação da massa aplicada na interface descendente é obtida pela Equação (3.107):

$$\bar{\rho}_{f1}v_{f1} - \bar{\rho}_{f2}v_{f2} = (\bar{\rho}_{f1} - \bar{\rho}_{f2})U_{1,2}^* \quad (3.112)$$

sendo $\bar{\rho}_{li} = \rho_l \varepsilon_{li}$, o que permite escrever a equação do salto entre 1 e 2 na Figura 3.4 como:

$$\varepsilon_{f1}v_{f1} - \varepsilon_{f2}v_{f2} = (\varepsilon_{f1} - \varepsilon_{f2})U_{1,2}^* \quad (3.113)$$

Por suposições inferidas a partir do fenômeno físico, dos quais admiti-se que na região de líquido clarificado a fração volumétrica do constituinte líquido é $\varepsilon_{f1} = 1$, enquanto sua velocidade intersticial é nula, $v_{f1} = 0$, a Equação (3.111) para o sólido se reduz a:

$$U_{1,2}^* = v_{s2} \quad (3.114)$$

enquanto a Equação (3.113) fica reduzida a:

$$-\varepsilon_{f2}v_{f2} = (1 - \varepsilon_{f2})U_{1,2}^* \quad (3.115)$$

ou de outra forma,

$$U_{1,2}^* = -\frac{\varepsilon_{f2}}{(1 - \varepsilon_{f2})}v_{f2} \quad (3.116)$$

A Equação (3.114) mostra, como se é esperado, que a velocidade de queda da interface descendente é a mesma velocidade dos sólidos nela contidos. As Equações (3.114) e (3.116) mostram que as velocidades do líquido e do sólido têm direções opostas como prevê o modelo físico. A combinação de tais equações fornece a Equação (3.117), válida na interface superior:

$$\varepsilon_{f2}v_{f2} + (1 - \varepsilon_{f2})v_{s2} = 0 \quad (3.117)$$

ou ainda,

$$v_{f2} = \frac{(1 - \varepsilon_{f2})}{\varepsilon_{f2}}v_{s2} \quad (3.118)$$

cuja relação entre as velocidades é análoga a expressão apresentada pela Equação (3.80) obtida através da restrição cinemática na base da coluna de sedimentação.

A equação de salto do balanço material aplicado na interface ascendente, superfície singular que denota o salto das variáveis entre as áreas 3 e 4 da Figura 3.4, é obtida desenvolvendo-se a Equação (3.106) pela substituição da Equação (3.21):

$$(1 - \varepsilon_{f3})v_{s3} - (1 - \varepsilon_{f4})v_{s4} = (\varepsilon_{f4} - \varepsilon_{f3})U_{3,4}^* \quad (3.119)$$

para o sólido, e

$$\varepsilon_{f3}v_{f3} - \varepsilon_{f4}v_{f4} = (\varepsilon_{f3} - \varepsilon_{f4})U_{3,4}^* \quad (3.120)$$

para o líquido, nas quais $U_{3,4}^*$ é a velocidade de ascensão da interface inferior.

Admitindo-se a suposição com fundamentos físicos, que na Região III (índice 4 da Figura 3.4) as velocidades intersticiais de ambos os constituintes sólido e líquido são nulas, $v_{f4} = v_{s4} = 0$, as Equações (3.119) e (3.120) se reduzem a:

$$U_{3,4}^* = -\frac{(1 - \varepsilon_{f3})}{(\varepsilon_{f3} - \varepsilon_{f4})}v_{s3} \quad (3.121)$$

$$U_{3,4}^* = \frac{\varepsilon_{f3}}{(\varepsilon_{f3} - \varepsilon_{f4})}v_{l3} \quad (3.122)$$

para o sólido e o líquido respectivamente.

A combinação das Equações (3.121) e (3.122) fornece a Equação (3.123), válida na interface inferior.

$$(1 - \varepsilon_{f3})v_{s3} + \varepsilon_{f3}v_{f3} = 0 \quad (3.123)$$

ou ainda,

$$v_{f3} = \frac{(1 - \varepsilon_{f3})}{\varepsilon_{f3}}v_{s3} \quad (3.124)$$

que, como era previsto, também é análoga a Equação (3.80) obtida através da restrição cinemática na base da coluna de sedimentação.

A análise dos saltos de pressão nas descontinuidades das regiões I, II e III para os constituintes sólido e líquido pode ser desenvolvida pela aplicação das equações de salto no balanço de quantidade de movimento linear.

Para o caso de escoamento unidimensional, e lançando mão do teorema 1 da Teoria Constitutiva de D'Ávila e Sampaio (1977a) que demonstra que se tensão extra no constituinte da mistura for uma função exclusiva da porosidade do meio então o tensor tensão é uma pressão estática aplicada na superfície no constituinte da mistura, as Equações (3.108) e (3.109) são reescritas como:

$$([\rho_s(1 - \varepsilon_f)v_s(v_s - U^*)]) = -[P_s] \quad (3.125)$$

$$([\rho_f\varepsilon_f v_f(v_f - U^*)]) = -[P_f] \quad (3.126)$$

nas quais os colchetes denotam o salto das variáveis por elas delimitadas.

Os saltos das pressões nos constituintes sólido e líquido nas regiões delimitadas pela interface descendente (1,2) podem ser obtidos de forma semelhante, utilizando no caso as

equações da conservação do movimento dadas pelas Equações (3.125) e (3.126):

$$\rho_s (1 - \varepsilon_{f1}) v_{s1} (v_{s1} - U_{1,2}^*) - \rho_s (1 - \varepsilon_{f2}) v_{s2} (v_{s2} - U_{1,2}^*) = -P_{s1} + P_{s2} \quad (3.127)$$

para o constituinte sólido e,

$$\rho_f \varepsilon_{f1} v_{f1} (v_{f1} - U_{1,2}^*) - \rho_f \varepsilon_{f2} v_{f2} (v_{f2} - U_{1,2}^*) = -P_{f1} + P_{f2} \quad (3.128)$$

para o constituinte líquido.

Admitindo-se a forte suposição de que a região de líquido clarificado é predominantemente constituída por líquido, $\varepsilon_{f1} = 1$ e que o mesmo encontra-se parado, $v_{f1} = 0$, é correto afirmar que pela ausência de partículas sólidas $v_{s1} = 0$ e $P_{s1} = 0$. Aplicando-se as suposições e conhecendo-se a Equação (3.114), a Equação (3.131) se reduz a:

$$[P_s]_{12} = 0 \quad (3.129)$$

A Equação (3.129) indica que não ocorre salto na pressão do sólido entre as regiões I e II.

Conhecendo-se a relação obtida na Equação (3.116) a Equação (3.128) fica:

$$-\rho_f \varepsilon_{f2} v_{f2} \left(v_{f2} + \left(\frac{\varepsilon_{f2}}{(1 - \varepsilon_{f2})} v_{f2} \right) \right) = -P_{f1} + P_{f2} \quad (3.130)$$

ou após as devidas manipulações algébricas

$$[P_f]_{12} = \frac{\varepsilon_{f2}}{(1 - \varepsilon_{f2})} \rho_f v_{f2}^2 \quad (3.131)$$

Tal expressão, Equação (3.131), mostra que o salto da pressão no líquido é uma função da porosidade do meio e da energia cinética do líquido. Como $\varepsilon_{f2} < 1$ e $P_{f1} > P_{f2}$ ocorre um salto na pressão do líquido, mas não ocorre um salto na pressão do sólido.

Aplicando-se as Equações (3.125) e (3.126) da conservação de quantidade de movimento na interface ascendente (3,4) pode-se escrever:

$$\rho_s (1 - \varepsilon_{f3}) v_{s3} (v_{s3} - U_{3,4}^*) - \rho_s (1 - \varepsilon_{f4}) v_{s4} (v_{s4} - U_{3,4}^*) = -P_{s3} + P_{s4} \quad (3.132)$$

para o sólido, e

$$\rho_f \varepsilon_{f3} v_{f3} (v_{f3} - U_{3,4}^*) - \rho_f \varepsilon_{f4} v_{f4} (v_{f4} - U_{3,4}^*) = -P_{f3} + P_{f4} \quad (3.133)$$

para o líquido.

Admitindo-se suposições fundamentadas no fenômeno físico em que as velocidades intersticiais dos componentes sólido e líquido são nulas na região de compressão (região III da Figura 3.4), ou seja, $v_{s4} = v_{f4} = 0$, a Equação (3.132) se reduz a:

$$\rho_s (1 - \varepsilon_{f3}) v_{s3} (v_{s3} - U_{3,4}^*) = -P_{s3} + P_{s4} \quad (3.134)$$

para o constituinte sólido. Substituindo-se a Equação (3.121) obtém-se:

$$P_{s4} = P_{s3} + \rho_s (1 - \varepsilon_{f3}) v_{s3} \left(v_{s3} + \frac{(1 - \varepsilon_{f3})}{(\varepsilon_{f3} - \varepsilon_{f4})} v_{s3} \right) \quad (3.135)$$

ou ainda, após manipulações algébricas chega-se a:

$$P_{s4} = P_{s3} + \frac{(1 - \varepsilon_{f3})(1 - \varepsilon_{f4})}{(\varepsilon_{f3} - \varepsilon_{f4})} \rho_s v_{s3}^2 \quad (3.136)$$

e uma vez que $\varepsilon_{f4} < \varepsilon_{f3}$ obtém-se que $P_{s4} < P_{s3}$. D'Ávila não explicita em seu trabalho que P_{s3} , mas tal suposição é natural de sua teoria uma vez que não há salto na pressão nos sólidos entre as regiões de líquido clarificado e sedimentação livre e que esta última região se caracteriza pelo fraco efeito de interação entre os sólidos que por d'Ávila foi negligenciado.

Analogamente para o constituinte líquido, obedecendo-se as suposições, pode-se reescrever a Equação (3.133) como:

$$\rho_f \varepsilon_{f3} v_{f3} (v_{f3} - U_{3,4}^*) = -P_{f3} + P_{f4} \quad (3.137)$$

e substituindo-se a relação apresentada pela Equação (3.121):

$$P_{f4} = P_{f3} + \rho_f \varepsilon_{f3} v_{f3} \left(v_{f3} + \frac{(1 - \varepsilon_{f3})}{(\varepsilon_{f3} - \varepsilon_{f4})} v_{f3} \right) \quad (3.138)$$

ou ainda,

$$P_{f4} = P_{f3} - \frac{\varepsilon_{f4} \varepsilon_{f3}}{(\varepsilon_{f3} - \varepsilon_{f4})} \rho_f v_{f3}^2 \quad (3.139)$$

Uma vez que $\varepsilon_{f4} < \varepsilon_{f3}$ pela Equação (3.139) nota-se que $P_{f4} < P_{f3}$. Desta forma, ocorre salto nas pressões do sólido e do líquido na interface inferior.

3.4.4 Análise do Modelo de d'Ávila (1978)

Certamente d'Ávila foi responsável por um grande avanço no desenvolvimento de projetos de sedimentadores uma vez que apresentou uma abordagem fundamentada na Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo. Até então predominava a teoria cinemática de

Kynch (1952) para a sedimentação, cujo princípio se baseia na propagação de ondas de mesma concentração que partem da base da coluna de sedimentação. D'Ávila (1978) incorporou o balanço de forças nos constituintes da mistura ao problema e com isso constituiu um equacionamento hiperbólico cujo resultado permitiu a verificação matemática de duas descontinuidades que se propagam em sentidos opostos: as interfaces ascendente e descendente, satisfazendo o modelo físico.

Kynch (1952) discutiu em sua teoria a existência de quatro regiões no fenômeno da sedimentação em batelada: líquido clarificado, sedimentação livre, transição e formação do sedimento (Figura 3.2). Em seu trabalho d'Ávila admitiu a sedimentação como um fenômeno caracterizado pela formação de três destas regiões, desprezando a existência da região de transição e descrevendo a região de formação de sedimento como uma região na qual ocorre a compactação do sólido (Figura 3.4). Segundo d'Ávila, tais regiões são delimitadas por descontinuidades que se propagam em sentidos opostos, mas que podem ser modeladas independentemente e relacionadas entre si por condições de salto das variáveis dependentes.

D'Ávila resolveu o problema da sedimentação em batelada apenas para a região de sedimentação livre através do método das características. Para as demais regiões o autor afirmou a validade das equações da continuidade e do movimento para os constituintes da mistura e indicou que as mesmas poderiam ser utilizadas em cada uma das regiões bastando especificar equações constitutivas em cada caso. Tal problema não foi resolvido por d'Ávila, entretanto o autor apresentou em seu trabalho as suposições por ele utilizadas e devidas condições de salto das variáveis que relacionam as regiões.

As descontinuidades previstas no modelo de d'Ávila são superfícies singulares que se deslocam no domínio do espaço como funções do tempo, sendo $z_{1,2}(t)$ e $z_{3,4}(t)$ as posições das interfaces descendente e ascendente, respectivamente, em um dado tempo t . A Figura 3.5 apresenta o esquema da coluna de sedimentação com a origem das posições na sua base e altura máxima da suspensão em $z = L$.

Para efeito de identificação do equacionamento serão admitidos os sobrescritos *I*, *II* e *III* para denotar as regiões de líquido clarificado, sedimentação propriamente dita e compressão, respectivamente. Por interpretação do modelo de d'Ávila, sabe-se que a região de líquido clarificado é assumida como sendo constituída predominantemente por líquido, $\varepsilon_f^I = 1$ e conseqüentemente $\varepsilon_s^I = 0$. Segundo as suposições assumidas, à medida que cada partícula sólida é depositada na região de compressão, um mesmo volume de líquido entra na região de líquido clarificado através da fronteira com a região de sedimentação propriamente dita. Imediatamente após a entrada do volume de líquido na região I, o mesmo perde energia cinética e assume velocidade nula, $v_f^I = 0$. Uma vez admitida a ausência de sólidos nesta região, obviamente a pressão nos sólidos e sua velocidade

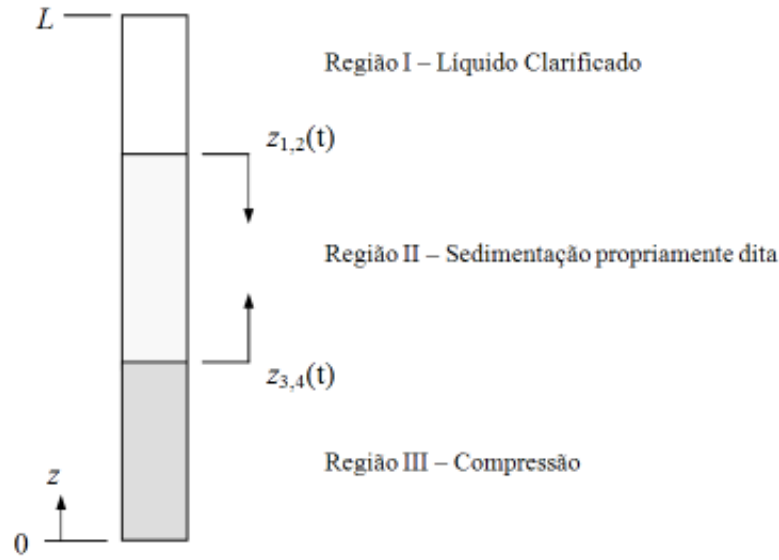


Figura 3.5: As discontinuidades da sedimentação em batelada.

intersticial também são supostamente nulas, $P_s^I = 0$ e $v_s^I = 0$.

A região de líquido clarificado surge no instante de tempo $t = 0^+$, em que a primeira partícula de sólido é depositada na região de compressão. O domínio espacial da região I é variável em uma das fronteiras, e sua dimensão é necessariamente uma função do tempo de acordo com a posição $z_{1,2}(t)$ da interface descendente, caracterizando um problema de fronteira móvel. Assim o domínio da região de líquido clarificado é $z_{1,2}(t) < z \leq L$, sendo L a altura máxima da coluna de sedimentação. O volume de líquido clarificado aumenta a medida que a interface descendente se propaga com velocidade $U_{1,2}^*$ no sentido da base da coluna de sedimentação.

D'Ávila apresenta a região de sedimentação propriamente dita ou sedimentação livre talvez como sendo a mais importante a ser descrita pelo modelo. É nesta região que efetivamente ocorre o fenômeno da separação sólido-líquido. Tal região, segundo d'Ávila, é caracterizada por um fraco efeito de interação entre os sólidos para baixas concentrações volumétricas iniciais, o que permite que as partículas decantem livremente em seu percurso. Tal suposição leva o autor a negligenciar a pressão nos sólidos nesta região, $P_s^{II} = 0$.

O domínio espacial da região de sedimentação livre é uma função do tempo que depende das posições $z_{1,2}(t)$ e $z_{3,4}(t)$ das interfaces descendentes e ascendentes, que se propagam com velocidades $U_{1,2}^*$ e $U_{3,4}^*$, respectivamente. O problema é de domínio variável com duas fronteiras móveis: as interfaces descendente e ascendente, $z_{3,4}(t) < z < z_{1,2}(t)$. O fenômeno da sedimentação se encerra quando toda a suspensão sólido-líquido é separada, com o desaparecimento da região de sedimentação propriamente dita e o encontro das interfaces em $z_{1,2} = z_{3,4}$. É importante ressaltar também que a velocidade de queda da

interface superior é equivalente a velocidade de sólidos nela contidos e que tal constatação é válida no início da região II.

As equações de salto de d'Ávila mostram que não ocorre salto na pressão dos sólidos entre as regiões I e II, $P_s^I = P_s^{II}$, mas no entanto é verificado um salto da pressão no líquido que por sua vez é função da porosidade do meio e da energia cinética do líquido. A pressão no líquido na região de sedimentação livre é inferior à pressão no líquido na região de líquido clarificado pela Equação (3.131), uma vez que $\varepsilon_f^{II} < 1$, assim $P_f^I > P_f^{II}$.

A restrição cinemática existente na base da coluna de sedimentação, apresentada por d'Ávila através da Equação (3.80), parte do pressuposto de que não há saída ou entrada de material na base da coluna de sedimentação em batelada e que, portanto as velocidades intersticiais dos constituintes são nulas em $z=0$. Assim, d'Ávila mostrou através da soma das equações da continuidade dos constituintes da mistura que a velocidade superficial total é nula e não é função da posição, mas apenas do tempo, $q(t) = 0$. Tal constatação permite que a relação entre as velocidades intersticiais dos constituintes, Equação (3.80), seja válida em todas as posições da coluna de sedimentação, inclusive no domínio da região de sedimentação propriamente dita.

Ao modelar a região de sedimentação propriamente dita por um equacionamento independente, sabe-se que seu domínio varia através do deslocamento das fronteiras móveis e que nas fronteiras superior e inferior ocorre saída do constituinte líquido para a região de líquido clarificado e do constituinte sólido depositado na região de compressão respectivamente. A velocidade superficial que o constituinte líquido deixa a região II em direção à região I é dada por:

$$q_f^{II} = \varepsilon_f^{II} v_f^{II} \quad (3.140)$$

enquanto a velocidade superficial do sólido é dada por:

$$q_s^{II} = \varepsilon_s^{II} v_s^{II} \quad (3.141)$$

e obedecendo-se as suposições da restrição cinemática tem-se que a velocidade superficial total na região II é dada por:

$$q = q_f^{II} + q_s^{II} = 0 \quad (3.142)$$

Desta forma, mesmo ocorrendo variação de massa na região de sedimentação propriamente dita pela saída de material em suas fronteiras, a aplicação da relação entre as velocidades intersticiais v_f e v_s fornecida pela restrição cinemática, Equação (3.80), é válida.

Obedecendo-se as suposições admitidas por d'Ávila é possível escrever o sistema de equações que modelam a região de sedimentação propriamente dita. A equação da conti-

nuidade para o constituinte sólido, análoga a Equação (3.84), é dada por:

$$-\frac{\partial \varepsilon_f^{II}}{\partial t} + (1 - \varepsilon_f^{II}) \frac{\partial v_s^{II}}{\partial z} - v_s^{II} \frac{\partial \varepsilon_f^{II}}{\partial z} = 0 \quad (3.143)$$

A equação do movimento para o sólido, Equação (3.85), fica reescrita como:

$$\rho_s (1 - \varepsilon_f^{II}) \left[\frac{\partial v_s^{II}}{\partial t} + v_s^{II} \frac{\partial v_s^{II}}{\partial z} \right] = -\frac{\mu v_s^{II}}{k^{II}(\varepsilon_f^{II})} + (\rho_s - \rho_f) (1 - \varepsilon_f^{II}) g \quad (3.144)$$

uma vez que, por suposição $P_s^{II} = 0$, sendo necessária a especificação de uma equação constitutiva apropriada para a permeabilidade do meio poroso na região II, $k^{II} = k^{II}(\varepsilon_f^{II})$.

A fração volumétrica de sólidos pode ser obtida através da relação entre as frações:

$$\varepsilon_f^{II} + \varepsilon_s^{II} = 1 \quad (3.145)$$

e a velocidade intersticial do líquido através da equação derivada da restrição cinemática:

$$v_f^{II} = -\frac{(1 - \varepsilon_f^{II})}{\varepsilon_f^{II}} v_s^{II} \quad (3.146)$$

A modelagem da região de sedimentação propriamente dita pode ser realizada através do sistema constituído pelas Equações (3.143) e (3.144) mais a incorporação de uma equação constitutiva para a permeabilidade. O domínio do problema é $z_{3,4}(t) < z < z_{1,2}(t)$ e $0 \leq t \leq T$, sendo T o tempo de encontro das interfaces. As frações volumétricas na região II variam no domínio $\varepsilon_{i2}^{II} \leq \varepsilon^{II} \leq \varepsilon_{i3}^{II}$ enquanto as velocidades são obtidas em $v_{i2}^{II} \leq v^{II} \leq v_{i3}^{II}$, com o subscrito i representando os constituintes sólido e líquido e os índices 2 e 3 denotando as respectivas regiões da Figura 3.4.

A terceira região da sedimentação em batelada é definida por D'Ávila como região de compressão. A região III é caracterizada pelo contato íntimo entre as partículas sólidas e conseqüentemente o relevante efeito da tensão nos sólidos.

Segundo d'Ávila as partículas sólidas que são separadas no final da região II são imediatamente depositadas no sedimento formado, o que permite assumir a suposição de que as velocidades de ambos os constituintes são nulas, $v_s^{III} = v_f^{III} = 0$. Tal consideração descaracteriza a definição de região de compressão, uma vez que o sólido que é depositado sobre o sedimento não possui velocidade a partir de então. Isso significa dizer que líquido presente no sedimento não está sendo expelido do interior do meio poroso e desta forma, quando é assumido que as velocidades são nulas na região III, equivale dizer que efeito de compactação do sedimento é desprezado. Sendo assim a região III torna-se semelhante à

região de formação do sedimento do modelo de Kynch.

As equações de salto mostram que ocorre descontinuidades nas pressões no sólido e no líquido quando se passa da região II para a região III.

A região III é delimitada por uma fronteira fixa e outra móvel, $0 \leq z < z_{3,2}(t)$, e surge no instante $t = 0^+$ em que a primeira partícula sólida é depositada. A posição da interface ascendente é representada por $z_{3,2}(t)$, em um dado instante t . Tal descontinuidade se desloca em um movimento de ascensão, indo em direção ao topo do recipiente, e a medida que se distancia, maior é a quantidade de sólidos separados no fenômeno. A fronteira fixa encontra-se na base do recipiente e por sua vez, na origem das posições, na qual a concentração de sólidos é máxima.

Admitindo-se a suposição de velocidades nulas dos constituintes na região III é possível simplificar o sistema de equações que modelam a região. A equação da continuidade para o constituinte sólido, dada pela Equação (3.84), fica reduzida a:

$$\frac{\partial \varepsilon_f^{III}}{\partial t} = 0 \quad (3.147)$$

que é análoga a equação da continuidade para o constituinte líquido.

A equação do movimento para o sólido, Equação (3.85), pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial P_s^{III}}{\partial z} = (\rho_s - \rho_f) (1 - \varepsilon_f^{II}) g \quad (3.148)$$

sendo que por suposição $v_s^{III} = v_f^{III} = 0$. A pressão nos sólidos na região III pode ser determinada com a especificação de uma equação constitutiva apropriada.

Pela regra da cadeia, como é então:

$$\frac{\partial P_s^{III}}{\partial z} = \frac{dP_s^{III}}{d\varepsilon_f^{III}} \frac{\partial \varepsilon_f^{III}}{\partial z} \quad (3.149)$$

que quando aplicada na Equação (3.148) fornece:

$$\frac{dP_s^{III}}{d\varepsilon_f^{III}} \frac{\partial \varepsilon_f^{III}}{\partial z} = (\rho_s - \rho_f) (1 - \varepsilon_f^{II}) g \quad (3.150)$$

A fração volumétrica de sólidos pode ser obtida através da relação entre as frações:

$$\varepsilon_f^{III} + \varepsilon_s^{III} = 1 \quad (3.151)$$

O domínio do problema é $0 \leq z < z_{3,4}(t)$ e $0^+ \leq t \leq T$, sendo T o tempo de encontro

das interfaces.

Pela análise do equacionamento de d'Ávila para a região III nota-se através da equação da continuidade, Equação (3.147) que a fração volumétrica dos constituintes não é função do tempo, mas apenas das posições. A Equação (3.150) da conservação da quantidade do movimento nesta região mostra que existe um gradiente de pressão no sedimento pela própria ação da força peso dos sólidos. O sólido depositado exerce pressão sobre as camadas imediatamente inferiores, gerando o gradiente de concentração, mas, no entanto o volume do sedimento não varia através da compactação dos sólidos, uma vez que as velocidades dos constituintes no sedimento são nulas no modelo. O gradiente de concentrações no sedimento obtido através da Equação (3.150) da conservação da quantidade de movimento é dado por:

$$\frac{\partial \varepsilon_f^{III}}{\partial z} = \frac{\Delta \rho g (1 - \varepsilon_f^{II})}{\frac{dP_f^{III}}{d\varepsilon_f^{III}}} \quad (3.152)$$

e pode ser obtido uma vez especificada uma equação constitutiva para a pressão nos sólidos.

A modelagem da sedimentação em batelada pode ser realizada resolvendo-se simultaneamente os sistemas desenvolvidos para cada região e relacionando-os através das equações de salto:

$$\varepsilon_f^{II} v_f^{II} + (1 - \varepsilon_f^{II}) v_s^{II} = 0 \quad (3.153)$$

$$P_s^I = P_s^{II} \quad (3.154)$$

$$P_f^{II} = P_f^I + \frac{\varepsilon_f^{II}}{(1 - \varepsilon_f^{II})} \rho_l (v_f^{II})^2 \quad (3.155)$$

equivalente respectivamente às Equações (3.117), (3.129) e (3.131) para a interface descendente, em $z = z_{1,2}(t)$ e,

$$(1 - \varepsilon_f^{II}) v_s^{II} + \varepsilon_f^{II} v_f^{II} = 0 \quad (3.156)$$

$$P_s^{III} = P_s^{II} + \frac{(1 - \varepsilon_f^{II})(1 - \varepsilon_f^{III})}{(\varepsilon_f^{II} - \varepsilon_f^{III})} \rho_s (v_s^{II})^2 \quad (3.157)$$

$$P_f^{III} = P_f^{II} - \frac{\varepsilon_f^{III} \varepsilon_f^{II}}{(\varepsilon_f^{II} - \varepsilon_f^{III})} \rho_f (v_f^{II})^2 \quad (3.158)$$

para a interface ascendente, em $z = z_{3,4}(t)$, sendo as últimas reescritas a partir das Equações (3.123), (3.136) e (3.139).

D'Ávila contribuiu significativamente no desenvolvimento de sedimentadores através de seu trabalho ao prever matematicamente a formação de duas descontinuidades que se propagam em sentidos opostos, complementando a teoria de Kynch (1952). A Figura 3.6 apresenta uma comparação entre os resultados esperados a partir das teorias de Kynch e

de d'Ávila e o modelo físico real.

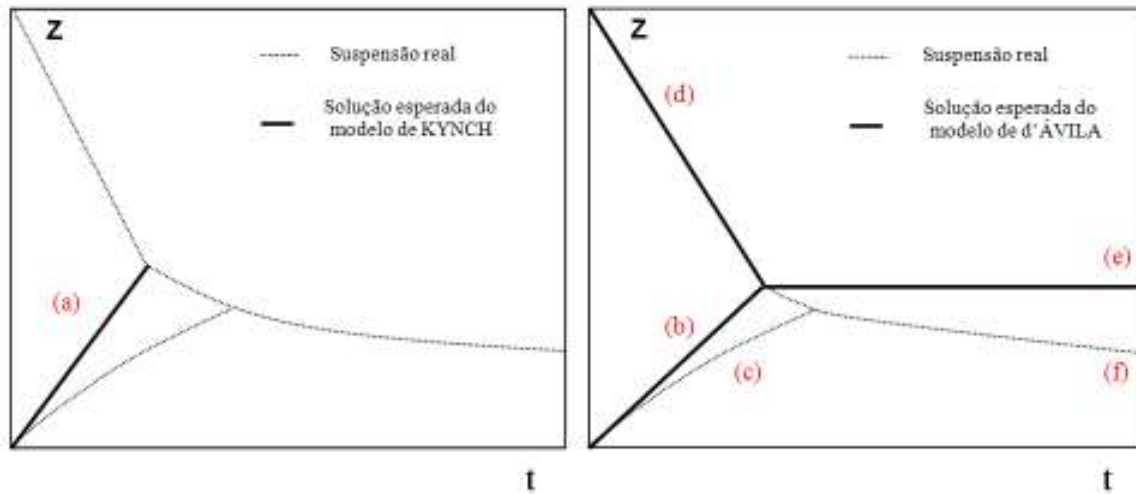


Figura 3.6: Comparação dos modelos de Kynch (1952) e d'Ávila (1978) com o fenômeno físico real.

Como pode ser observado através da Figura 3.6, é de se esperar que o modelo de d'Ávila seja satisfatório ao prever as duas interfaces da sedimentação, (b) e (d) na figura, ao contrário do modelo de Kynch que, devido ao seu caráter parabólico, prevê apenas a propagação de ondas de concentração ascendentes, denotadas por (a).

Apesar do caráter hiperbólico do modelo de d'Ávila satisfazer o modelo físico, nota-se em (e) da Figura 3.6 que o sedimento formado não se deforma com o tempo, ou seja, não ocorre a compactação dos sólidos, como em (f) do fenômeno físico real. Tal constatação se deve ao fato de que d'Ávila supôs em sua teoria que as velocidades intersticiais dos constituintes sólido e líquido na região de compressão são nulas. Assim uma vez que uma partícula sólida qualquer é separada na região de sedimentação propriamente dita e imediatamente depositada sobre o sedimento formado, forma-se um sedimento cada vez maior que não se deforma com o tempo. É de se esperar também que da mesma forma como ocorre no modelo de Kynch, denotado por (a) na Figura 3.6, o modelo de d'Ávila apresente a representação gráfica da interface ascendente como uma reta em (b) que não se deforma com o efeito da compressão, como é verificado no fenômeno físico real em (c). O deslocamento da interface descendente enquanto presente na região de sedimentação propriamente dita é denotada por (d) na figura.

A suposição de ausência de pressão nos sólidos na região de sedimentação propriamente dita não conduz a uma boa aproximação. Segundo Allen (1981), para que não ocorram efeitos de concentração na dinâmica de queda das partículas, a concentração volumétrica inicial da suspensão deve ser inferior a 1%. Isso significa que mesmo em baixas concentrações volumétricas iniciais o efeito populacional pode ser significativo e

conseqüentemente o efeito da tensão nos sólidos começa a se destacar. Uma forma de se contornar tal problema seria admitir no modelo a existência da tensão nos sólidos na região de sedimentação propriamente dita, ou seja $P_s^{II} \neq 0$, uma vez que a fase sólida está presente na região e que a pressão no constituinte, apesar de pequena, não pode ser negligenciada. Seria correto admitir a pressão nos sólidos como sendo um valor desconhecido, porém constante e não nulo, sendo que sua representação matemática pode ser explicitada na forma:

$$\frac{dP_s^{II}}{d\varepsilon_s^{II}} = 0 \quad (3.159)$$

Analisando o modelo de d'Ávila verifica-se que o fenômeno da sedimentação se encerra no encontro das interfaces (b) e (d) na Figura 3.6. A partir deste ponto o sedimento não varia mais com tempo, significando que todas as partículas sólidas já foram separadas. Uma forma de contornar a discrepância do modelo em relação ao fenômeno físico é invalidar a suposição de que as velocidades dos constituintes da mistura são nulas na região de compressão de d'Ávila e reescrever as equações da continuidade e do movimento para a região III explicitando as velocidades dos constituintes. Sob tal consideração as Equações (3.153) e (3.154) para o constituinte sólido podem ser reescritas na forma:

$$-\frac{\partial \varepsilon_f^{III}}{\partial t} + (1 - \varepsilon_f^{III}) \frac{\partial v_s^{III}}{\partial z} - v_s^{III} \frac{\partial \varepsilon_f^{III}}{\partial z} = 0 \quad (3.160)$$

para a equação da continuidade e,

$$\begin{aligned} \rho_s (1 - \varepsilon_f^{III}) \left[\frac{\partial v_s^{III}}{\partial t} + v_s^{III} \frac{\partial v_s^{III}}{\partial z} \right] = \\ - \frac{\partial P_s^{III}}{\partial \varepsilon_s^{III}} \frac{\partial \varepsilon_s^{III}}{\partial z} - \frac{\mu v_s^{III}}{k^{III}(\varepsilon_f^{III})} + (\rho_s - \rho_f) (1 - \varepsilon_f^{III}) g \end{aligned} \quad (3.161)$$

como a expressão da equação do movimento.

O novo sistema necessita da incorporação de equações constitutivas para a pressão nos sólidos $P_s^{III}(\varepsilon_s^{III})$ e para a permeabilidade do meio poroso $k^{III}(\varepsilon_f^{III})$.

As equações de salto por sua vez também necessitam de correções pelas novas suposições. A Equação (3.123) deve ser reescrita levando em conta as velocidades intersticiais não nulas dos constituintes nas expressões das Equações (3.119) e (3.120). A combinação das Equações (3.119) e (3.120) fornece a nova expressão válida para o salto na interface ascendente em substituição à Equação (3.156):

$$(1 - \varepsilon_f^{II}) v_s^{II} - (1 - \varepsilon_f^{III}) v_s^{III} - \varepsilon_f^{III} v_f^{III} + \varepsilon_f^{II} v_f^{II} = 0 \quad (3.162)$$

Analogamente as Equações (3.157) e (3.158) devem ser substituídas respectivamente

pelas Equações (3.163) e (3.164), derivadas das Equações (3.132) e (3.133) levando em consideração as novas suposições adotadas e as Equações (3.119) e (3.120):

$$P_s^{III} = P_s^{II} + \rho_s (1 - \varepsilon_f^{II}) v_s^{II} \left(v_s^{II} - \frac{(1 - \varepsilon_f^{II}) v_s^{II} - (1 - \varepsilon_f^{III}) v_s^{III}}{(\varepsilon_f^{III} - \varepsilon_f^{II})} \right) + \\ - \rho_s (1 - \varepsilon_f^{III}) v_s^{III} \left(v_s^{III} - \frac{(1 - \varepsilon_f^{II}) v_s^{II} - (1 - \varepsilon_f^{III}) v_s^{III}}{(\varepsilon_f^{III} - \varepsilon_f^{II})} \right) \quad (3.163)$$

para a pressão no sólido, e

$$P_f^{III} = P_f^{II} + \rho_f \varepsilon_f^{II} v_f^{II} \left(v_f^{II} - \frac{\varepsilon_f^{II} v_f^{II} - \varepsilon_f^{III} v_f^{III}}{(\varepsilon_f^{II} - \varepsilon_f^{III})} \right) + \\ - \rho_f \varepsilon_f^{III} v_f^{III} \left(v_f^{III} - \frac{\varepsilon_f^{II} v_f^{II} - \varepsilon_f^{III} v_f^{III}}{(\varepsilon_f^{II} - \varepsilon_f^{III})} \right) \quad (3.164)$$

para a pressão no líquido.

3.5 Modelo de Concha e Bascur (1977)

Apesar da abordagem apresentada por D'Ávila (1978) ter sido resolvida apenas para a região de sedimentação propriamente dita do processo em batelada, sua aplicação para as demais regiões se mostra bem satisfatória em relação ao fenômeno físico. Concha e Bascur (1977), citados por D'Ávila (1978) e Damasceno (1992), desenvolveram uma abordagem visando estender o modelo de d'Ávila para a sedimentação contínua ao utilizarem além das hipóteses de d'Ávila, também a consideração de que os termos de aceleração na equação do movimento para o constituinte sólido podem ser desprezados no modelo. As equações da continuidade para os constituintes líquido e sólido são respectivamente:

$$\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_f v_f}{\partial z} = 0 \quad (3.165)$$

$$-\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} + (1 - \varepsilon_f) \frac{\partial v_s}{\partial z} - v_s \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} = 0 \quad (3.166)$$

A modificação em relação ao modelo de D'Ávila (1978) ocorre na equação do movimento para o constituinte sólido, ao considerar nulos os termos de aceleração na Equação (3.75):

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial z} = 0 \quad (3.167)$$

simplificando a equação do movimento para o constituinte sólido na forma:

$$\frac{\partial P_s}{\partial z} = m + (\rho_s - \rho_f) (1 - \varepsilon_f) g \quad (3.168)$$

Analogamente a d'Ávila, Concha e Bascur apontaram a Lei de Darcy para a força resistiva, como na Equação (3.70). Assim a Equação (3.168) fica:

$$\frac{\partial P_s}{\partial z} = \frac{\mu \varepsilon_f}{k(\varepsilon_f)} v_r + (\rho_s - \rho_f) (1 - \varepsilon_f) g \quad (3.169)$$

sendo que a velocidade relativa pode ser explicitada na Equação (3.169):

$$v_r = \frac{k(\varepsilon_f)}{\mu \varepsilon_f} \left(\frac{\partial P_s}{\partial z} - (\rho_s - \rho_f) (1 - \varepsilon_f) g \right) \quad (3.170)$$

A restrição cinemática pode ser obtida da mesma forma proposta por d'Ávila, Equação (3.79):

$$\varepsilon_f v_f + (1 - \varepsilon_f) v_s = q(t) \quad (3.171)$$

sendo $q(t)$ a velocidade superficial da mistura que para o caso da sedimentação contínua não é nula. Isolando-se v_f na Equação (3.171) e como por definição $v_r = v_f - v_s$, pode-se escrever após as devidas manipulações, a velocidade intersticial do sólido como:

$$v_s = q(t) - v_r \varepsilon_f \quad (3.172)$$

Uma simplificação importante utilizada na abordagem de Concha e Bascur (1977) foi a aplicação da Equação (3.172) na Equação (3.166) da continuidade para o constituinte sólido, eliminando a dependência da velocidade intersticial do sólido. Assim a Equação (3.166) pode ser reescrita como:

$$-\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} ((1 - \varepsilon_f) q(t) - v_r \varepsilon_f) = 0 \quad (3.173)$$

que após algumas manipulações algébricas toma a forma

$$-\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} - q(t) \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} - \frac{\partial (1 - \varepsilon_f) v_r \varepsilon_f}{\partial z} = 0 \quad (3.174)$$

Substituindo-se a Equação (3.170) na Equação (3.174) obtém-se:

$$-\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} - q(t) \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left((1 - \varepsilon_f) \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial P_s}{\partial z} - (\rho_s - \rho_f) (1 - \varepsilon_f) g \right) \right) = 0 \quad (3.175)$$

Fazendo $G = \frac{k}{\mu} (1 - \varepsilon_f)$ e invertendo os sinais de ambos os membros da equação obtém-se:

$$\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} + q(t) \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \left(\frac{\partial P_s}{\partial z} - (\rho_s - \rho_f) (1 - \varepsilon_f) g \right) \right) = 0 \quad (3.176)$$

Como $G = G(\varepsilon_f)$, a Equação (3.176) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} + q(t) \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} + G \frac{d^2 P_s}{dz^2} + \\ & + \left(\frac{\partial P_s}{\partial z} - (\rho_s - \rho_f) (1 - \varepsilon_f) g \right) \frac{dG}{d\varepsilon_f} \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} + G (\rho_s - \rho_f) g \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (3.177)$$

Admitindo-se que $P_s = P_s(\varepsilon_f)$ e $\varepsilon_f = \varepsilon_f(z, t)$ é correto escrever, pela regra da cadeia que:

$$\frac{\partial P_s}{\partial z} = \frac{dP_s}{d\varepsilon_f} \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} \quad (3.178)$$

e,

$$\frac{\partial^2 P_s}{\partial z^2} = \frac{d^2 P_s}{d\varepsilon_f^2} \left(\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} \right)^2 + \frac{dP_s}{d\varepsilon_f} \frac{\partial^2 \varepsilon_f}{\partial z^2} \quad (3.179)$$

que quando substituídas na Equação (3.177) fornecem:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} + q(t) \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} + G \left(\frac{d^2 P_s}{d\varepsilon_f^2} \left(\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} \right)^2 + \frac{dP_s}{d\varepsilon_f} \frac{\partial^2 \varepsilon_f}{\partial z^2} \right) + \\ & + \left(\frac{dP_s}{d\varepsilon_f} \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} - (\rho_s - \rho_f) (1 - \varepsilon_f) g \right) \frac{dG}{d\varepsilon_f} \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} + G (\rho_s - \rho_f) g \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (3.180)$$

O rearranjo da Equação (3.180) fornece:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} = & G \frac{dP_s}{d\varepsilon_f} \frac{\partial^2 \varepsilon_f}{\partial z^2} + \left(G \frac{d^2 P_s}{d\varepsilon_f^2} + \frac{dP_s}{d\varepsilon_f} \frac{dG}{d\varepsilon_f} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} \right)^2 + \\ & + \left(q(t) - (\rho_s - \rho_f) g \frac{d}{d\varepsilon_f} ((1 - \varepsilon_f) G) \right) \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.181)$$

Para a resolução da Equação (3.181) deve-se estabelecer as devidas condições iniciais e de contorno para cada região do problema de fronteira móvel além da especificação de equações constitutivas para a pressão nos sólidos e permeabilidade do meio.

Para o caso específico da sedimentação em batelada a Equação (3.181) é simplificada fazendo-se $q(t)=0$.

3.6 Modelo de Burger e Concha (1998)

3.6.1 Desenvolvimento do Equacionamento

Ao aplicar os princípios da Mecânica do Contínuo, Burger e Concha (1998) desenvolveram uma teoria fenomenológica para a sedimentação de suspensões floculadas que leva em conta a compressibilidade do sistema por seu próprio peso. Um grande diferencial do modelo desenvolvido pelos autores certamente está no fato de que seu equacionamento descreve o processo completo da sedimentação contínua e batelada em todo o domínio espacial, eliminando o problema de regiões de fronteiras móveis e diminuindo o grau de complexidade do método numérico para resolução do problema. A dependência de equações constitutivas caracteriza o comportamento específico do material por regiões definidas a cada passo de integração como funções da concentração do sólido.

Burger e Concha (1998) admitiram as seguintes hipóteses simplificadoras durante o desenvolvimento do equacionamento:

- As partículas sólidas são pequenas em relação às dimensões do sedimentador e possuem a mesma densidade;
- Os constituintes sólido e líquido são incompressíveis e não ocorre transferência de massa entre eles;
- A suspensão é inteiramente floculada antes do início da sedimentação;
- O constituinte sólido descreve um movimento de compressão unidimensional;
- Ambos os constituintes sólido e líquido apresentam comportamento elástico de fluidos viscosos;
- O único campo de forças atuante no sistema é o campo de forças gravitacional.

A suspensão pode ser considerada um meio contínuo formado por dois constituintes. A hipótese de que a fase líquida comporta-se como um fluido viscoso é baseada na hipótese de que o atrito associado com a interação líquido-líquido é muito menor que aquela associada com a interação sólido-líquido. Pela Mecânica do Contínuo o constituinte sólido perde sua identidade e passa a se comportar com fluido elástico, desde que uma concentração específica dos sólidos esteja associada com cada altura do sólido no sedimento.

As hipóteses simplificadoras conduzem a quatro equações escalares que descrevem o fenômeno:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial (\varepsilon_s v_s)}{\partial z} = 0 \quad (3.182)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 0 \quad (3.183)$$

$$\rho_s \left[\frac{\partial (\varepsilon_s v_s)}{\partial t} + \frac{\partial (\varepsilon_s v_s^2)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p_s}{\partial z} - \rho_s \varepsilon_s g + \beta(\varepsilon_s) \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} - \alpha(\varepsilon_s) v_r \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned} \rho_f \left[\frac{\partial ((1 - \varepsilon_s) v_f)}{\partial t} + \frac{\partial ((1 - \varepsilon_s) v_f^2)}{\partial z} \right] = \\ = -\frac{\partial p_f}{\partial z} - \rho_f (1 - \varepsilon_s) g - \beta(\varepsilon_s) \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} + \alpha(\varepsilon_s) v_r \end{aligned} \quad (3.185)$$

nas quais v_i são as velocidades intersticiais, ρ_i as massas específicas dos constituintes, e p_i as pressões das fases, representado i neste caso s e f para as fases sólida e fluida, respectivamente, q é a velocidade superficial da mistura que pode ser controlada externamente, $v_r = v_s - v_f$ é a velocidade relativa sólido-líquido, g é a aceleração da gravidade, $\alpha(\varepsilon_s)$ e $\beta(\varepsilon_s)$ são funções escalares que definem a força de interação sólido líquido por unidade de volume.

Assim como Damasceno (1992), Burger e Concha (1998) mostraram que os termos inerciais presentes nos balanços de forças para ambos os constituintes são desprezíveis e podem ser negligenciados. Para tanto os autores introduziram variáveis características no equacionamento: a altura da coluna de sedimentação assumida como sendo $H \approx 1$ m, a velocidade de queda de uma partícula sólida, $v_\infty \approx 10^{-4} \text{ ms}^{-1}$, tempo de queda necessário para a partícula sólida atravessar o sedimentador, $t_0 = \frac{H}{v_\infty} \approx 10^4 \text{ s}$. Ao reescrever as Equações (3.182) a (3.185) com variáveis adimensionais usando tais quantidades, os lados esquerdos das equações dos balanços de quantidade de movimento irão apresentar o número de Froude do escoamento como um fator que poderá ser negligenciado, $F_r = \frac{v_\infty^2}{Hg} \approx 10^{-9}$. Sob tal suposição as Equações (3.184) e (3.185) pode ser simplificadas respectivamente nas formas:

$$\frac{\partial p_s}{\partial z} = -\rho_s \varepsilon_s g + \beta(\varepsilon_s) \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} - \alpha(\varepsilon_s) v_r \quad (3.186)$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial z} = -\rho_f (1 - \varepsilon_s) g - \beta(\varepsilon_s) \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} + \alpha(\varepsilon_s) v_r \quad (3.187)$$

As variáveis teóricas p_s e p_f são substituídas por variáveis experimentais p (pressão no poro) e σ_e e (tensão efetiva no sólido). Desta forma a pressão total P_T é apresentada na Equação (3.188).

$$P_T(z, t) = p_s(z, t) + p_f(z, t) = p(z, t) + \sigma_e(z, t) \quad (3.188)$$

Admitindo-se que a porosidade volumétrica no sedimento é equivalente a porosidade

superficial, obtém-se:

$$p_s = \varepsilon_s p + \sigma_e \quad (3.189)$$

$$p_f = (1 - \varepsilon_s) p \quad (3.190)$$

que quando aplicadas nas Equações (3.186) e (3.187) fornecem:

$$\frac{\partial (\varepsilon_s p)}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\rho_s \varepsilon_s g + \beta(\varepsilon_s) \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} - \alpha(\varepsilon_s) v_r \quad (3.191)$$

$$\frac{\partial [(1 - \varepsilon_s) p]}{\partial z} = -\rho_f (1 - \varepsilon_s) g - \beta(\varepsilon_s) \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} + \alpha(\varepsilon_s) v_r \quad (3.192)$$

para as fases sólida e fluida, respectivamente.

Considerando-se a Equação (3.192) no equilíbrio, obtido em $t \rightarrow \infty$ numa coluna de sedimentação, nas quais as velocidades de ambos os constituintes são iguais $v_s = v_f \approx 0$, a mesma pode ser reescrita na forma:

$$(1 - \varepsilon_s) \frac{\partial p}{\partial z} - p \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} = -\rho_f (1 - \varepsilon_s) g - \beta(\varepsilon_s) \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} \quad (3.193)$$

e assumindo-se que $\nabla p = -\rho_f g$, é possível determinar a função escalar $\beta(\varepsilon_s)$ como sendo:

$$\beta(\varepsilon_s) = p(\varepsilon_s) \quad (3.194)$$

Aplicando-se a Equação (3.194) na Equação (3.192), a última se reduz a:

$$(1 - \varepsilon_s) \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_f (1 - \varepsilon_s) g + \alpha(\varepsilon_s) v_r \quad (3.195)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_f g + \frac{\alpha(\varepsilon_s) v_r}{(1 - \varepsilon_s)} \quad (3.196)$$

A pressão excessiva no poro, medida experimentalmente, é dada pela Equação (3.197).

$$p_e = p - \rho_f g (H - z) \quad (3.197)$$

Uma expressão para a derivada parcial da pressão no poro em relação à coordenada espacial z pode ser derivada após as devidas manipulações algébricas na Equação (3.197) fornecendo:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p_e}{\partial z} - \rho_f g \quad (3.198)$$

Igualando-se as Equações (3.196) e (3.198) obtém-se:

$$\frac{\partial p_e}{\partial z} = \frac{\alpha(\varepsilon_s) v_r}{(1 - \varepsilon_s)} \quad (3.199)$$

Reescrevendo a Equação (3.191) ao substituir a Equação (3.194) chega-se a seguinte expressão:

$$\varepsilon_s \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\rho_s \varepsilon_s g - \alpha(\varepsilon_s) v_r \quad (3.200)$$

e após a substituição da Equação (3.198) fornece:

$$\varepsilon_s \left(\frac{\partial p_e}{\partial z} - \rho_f g \right) + \frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\rho_s \varepsilon_s g - \alpha(\varepsilon_s) v_r \quad (3.201)$$

ou ainda, ao introduzir $\Delta\rho = \rho_s - \rho_f$ a expressão anterior fica:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\varepsilon_s \frac{\partial p_e}{\partial z} - \Delta\rho g \varepsilon_s - \alpha(\varepsilon_s) v_r \quad (3.202)$$

Multiplicando-se ambos os membros da Equação (3.199) por ε_s e relacionando-se a expressão resultante com a Equação (3.202) é possível obter:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\frac{\alpha(\varepsilon_s) v_r}{(1 - \varepsilon_s)} \varepsilon_s - \Delta\rho g \varepsilon_s - \alpha(\varepsilon_s) v_r \quad (3.203)$$

ou ainda, após as devidas manipulações,

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\frac{\alpha(\varepsilon_s) v_r}{(1 - \varepsilon_s)} - \Delta\rho g \varepsilon_s \quad (3.204)$$

Conseqüentemente o comportamento específico do material da suspensão é descrito pela escolha apropriada das funções $\alpha(\varepsilon_s)$ e $\sigma_e(\varepsilon_s)$ na Equação (3.204).

Sabe-se ainda que a velocidade superficial da mistura, q , é equivalente a soma das velocidades superficiais dos constituintes, que para o caso da sedimentação binária é dada por:

$$q = q_s + q_f = \varepsilon_s v_s + (1 - \varepsilon_s) v_f \quad (3.205)$$

ou ainda,

$$q = \varepsilon_s (v_s - v_f) + v_f \quad (3.206)$$

mas, como por definição $v_r = v_s - v_f$, pode-se obter uma expressão a partir da Equação (3.206) para a velocidade relativa sólido-líquido como função da velocidade superficial da mistura:

$$v_r = \frac{q - v_f}{\varepsilon_s} \quad (3.207)$$

Em contrapartida retomando-se a Equação (3.204) ao isolar a velocidade relativa em tal expressão obtém-se:

$$v_r = -\frac{(1 - \varepsilon_s)}{\alpha(\varepsilon_s)} \left(\Delta\rho\varepsilon_s g + \frac{\partial\sigma_e}{\partial z} \right) \quad (3.208)$$

A comparação entre as Equações (3.207) e (3.208) fornece a igualdade:

$$\frac{q - v_f}{\varepsilon_f} = -\frac{(1 - \varepsilon_s)}{\alpha(\varepsilon_s)} \left[\Delta\rho\varepsilon_s g + \frac{\partial\sigma_e}{\partial z} \right] \quad (3.209)$$

Multiplicando-se ambos os membros da Equação (3.209) por $(1 - \varepsilon_s)$ e rearranjando:

$$q - v_f(1 - \varepsilon_s) - q\varepsilon_s = -\frac{(1 - \varepsilon_s)^2 \varepsilon_s}{\alpha(\varepsilon_s)} \left(\Delta\rho\varepsilon_s g + \frac{\partial\sigma_e}{\partial z} \right) \quad (3.210)$$

mas pela Equação (3.205) sabe-se que:

$$\varepsilon_s v_s = q - (1 - \varepsilon_s) v_f \quad (3.211)$$

que quando comparada com o primeiro membro da Equação (3.210) fornece:

$$\varepsilon_s v_s = q\varepsilon_s - \frac{(1 - \varepsilon_s)^2 \varepsilon_s}{\alpha(\varepsilon_s)} \left(\Delta\rho\varepsilon_s g + \frac{\partial\sigma_e}{\partial z} \right) \quad (3.212)$$

Tal expressão, Equação (3.212), é substituída na equação da continuidade para o constituinte sólido da mistura, Equação (3.182), fornecendo a expressão:

$$\frac{\partial\varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[q\varepsilon_s - \frac{(1 - \varepsilon_s)^2 \varepsilon_s}{\alpha(\varepsilon_s)} \left(\Delta\rho\varepsilon_s g + \frac{\partial\sigma_e}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (3.213)$$

Desenvolvendo-se o termo entre colchetes da Equação (3.209) chega-se a:

$$\frac{\partial\varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[q\varepsilon_s - \frac{(1 - \varepsilon_s)^2 \varepsilon_s^2 \Delta\rho g}{\alpha(\varepsilon_s)} - \frac{(1 - \varepsilon_s)^2 \varepsilon_s}{\alpha(\varepsilon_s)} \frac{\partial\sigma_e}{\partial z} \right] = 0 \quad (3.214)$$

Os autores introduziram a função $\hat{f}_{bk}$ conhecida como fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch definida na Equação (3.215):

$$\hat{f}_{bk}[\varepsilon_s(z, t)] = -\frac{(1 - \varepsilon_s)^2 \varepsilon_s^2 \Delta\rho g}{\alpha(\varepsilon_s)} \quad (3.215)$$

e a função densidade de fluxo sólido $\hat{f}$ apresentada na Equação (3.216):

$$\hat{f}[\varepsilon_s(z, t), t] = q(t) \varepsilon_s + \hat{f}_{bk}(\varepsilon_s) \quad (3.216)$$

Desta forma, relacionando as Equações (3.214), (3.215) e (3.216), após algumas manipulações algébricas, obtém-se a expressão:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial \hat{f}(\varepsilon_s, t)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{(1 - \varepsilon_s)^2 \varepsilon_s}{\alpha(\varepsilon_s)} \frac{\partial \sigma_e}{\partial z} \right] = 0 \quad (3.217)$$

Isolando-se $\alpha(\varepsilon_s)$ na Equação (3.215) obtém-se a expressão:

$$\alpha(\varepsilon_s) = -\frac{\Delta \rho g (1 - \varepsilon_s)^2 \varepsilon_s^2}{\hat{f}_{bk}(\varepsilon_s)} \quad (3.218)$$

Substituindo-se a Equação (3.218) na Equação (3.217) encontra-se a expressão:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial \hat{f}(\varepsilon_s, t)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{\hat{f}_{bk}(\varepsilon_s)}{\Delta \rho g \varepsilon_s} \frac{\partial \sigma_e}{\partial z} \right] \quad (3.219)$$

Os autores apresentam as equações constitutivas como funções exclusivas da concentração local. Desta forma, como $\sigma_e = \sigma_e(\varepsilon_s)$ e $\varepsilon_s = \varepsilon_s(z, t)$, pela regra da cadeia é correto escrever que:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} = \sigma'_e \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} \quad (3.220)$$

Assim a Equação (3.219) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial \hat{f}(\varepsilon_s, t)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{\hat{f}_{bk}(\varepsilon_s)}{\Delta \rho g \varepsilon_s} \sigma'_e \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} \right] \quad (3.221)$$

Tal expressão, Equação (3.221), é resultado da análise matemática desenvolvida para o caso da sedimentação unidimensional. Burger e Concha (1998) introduziram novas variáveis ao equacionamento visando a adimensionalização da variável independente espacial.

As novas variáveis adotadas para a adimensionalização foram:

$$q(t) = \frac{\hat{q}(t)}{L} \quad (3.222)$$

$$f_{bk}(\varepsilon_s) = \frac{\hat{f}_{bk}(\varepsilon_s)}{L} \quad (3.223)$$

$$f(\varepsilon_s, t) = \frac{\hat{f}(\varepsilon_s, t)}{L} \quad (3.224)$$

$$f(\varepsilon_s) = \frac{\hat{f}(\varepsilon_s)}{L} \quad (3.225)$$

e considerando-se ainda a adimensionalização da variável independente espacial

$$x = \frac{z}{L} \quad (3.226)$$

pode-se escrever que,

$$u(x, t) = \varepsilon_s(Lx, t) \quad (3.227)$$

nas quais L equivale a altura do nível da alimentação para o caso da sedimentação contínua e a altura máxima da suspensão para o caso da sedimentação em batelada.

A adimensionalização da Equação (3.221) pelas variáveis apresentadas fornece:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{f_{bk}(u) \sigma'_e}{L \Delta \rho g u} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (3.228)$$

Introduzindo-se a notação:

$$a(u) = -\frac{f_{bk}(u) \sigma'_e}{L \Delta \rho g u} \quad (3.229)$$

pode-se reescrever a Equação (3.228) em sua forma final:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (3.230)$$

O problema explorado por Burger e Concha (1998) consiste em resolver a Equação (3.230) no domínio $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq t \leq T$, no qual T equivale ao tempo final de sedimentação. O problema de valor inicial e de contorno teve as seguintes condições apresentadas pelos autores:

$$u(x, t = 0) = u_0(x) \quad (3.231)$$

$$f_{bk}(u) - a(u) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.232)$$

$$u(x = 1, t) = u_1(t) \quad (3.233)$$

Nota-se que a primeira condição trata-se de uma condição inicial ($t = 0$ s) em que é necessário conhecer a distribuição de concentrações iniciais no sedimentador, $u_0(x)$. A segunda condição, apresentada pela Equação (3.232), trata-se da condição de contorno na base do sedimentador ($x = 0$). Em $x = 0$ é correto prescrever que $v_s = v_f = \hat{q}$, seja

para a sedimentação contínua ou batelada, sendo conseqüentemente a velocidade relativa sólido-líquida nula. A segunda condição de contorno, prescrita em $x = 1$, é uma função do tempo que no caso da sedimentação em batelada é nula para $t \geq 0^+$.

3.6.2 Análise do Modelo de Burger e Concha (1998)

O modelo fenomenológico para a sedimentação desenvolvido por Burger e Concha (1998) é fundamentado na Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo como foi feito por D'Ávila (1978). Entretanto a principal discrepância entre ambos os modelos reside na elaboração da teoria constitutiva para os tensores tensões nos constituintes sólido e líquido, respectivamente T_s e T_f e na especificação da força de interação sólido-líquido ou força resistiva m .

Certamente o primeiro passo na derivação do modelo matemático a partir das equações de balanço de massa e quantidade de movimento é a escolha de variáveis constitutivas apropriadas ao fenômeno. A especificação correta de tais variáveis é fundamental para a descrição do comportamento específico do material na representação do modelo matemático.

Burger e Concha (1998) foram guiados pelo trabalho de Truesdel (1965) para a formulação de variáveis constitutivas baseada no Princípio da Equi-Presença que demanda que todas as variáveis constitutivas devem ocorrer em todas equações constitutivas. A aplicação de tal princípio, entre outros, combinados com hipóteses de que as equações constitutivas para T_s , T_f e m são apresentadas nas formas isotrópicas lineares no campo das velocidades, implica em equações constitutivas do tipo:

$$T_s = -p_s I + \mu_s \left(\nabla v_s + (\nabla v_s)^T \right) + \lambda_s (\nabla \cdot v_s) I \quad (3.234)$$

$$T_f = -p_f I + \mu_f \left(\nabla v_f + (\nabla v_f)^T \right) + \lambda_f (\nabla \cdot v_f) I \quad (3.235)$$

$$m = -\alpha v_r + \beta \nabla \varepsilon_s + \gamma \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \cdot \nabla v_r \right) \quad (3.236)$$

nas quais I é a matriz identidade, p_s a pressão na fase sólida, μ_s a viscosidade da fase sólida, p_f a pressão na fase líquida, μ_f a viscosidade da fase líquida, λ_s e λ_f são funções relacionadas às viscosidades das fases, sendo que p_s , μ_s e λ_s são funções escalares de ε_s e ρ_s , ρ_f , e p_f , μ_f e λ_f são funções escalares de ε_s e ρ_f . Não obstante, sendo ρ_s e ρ_f constantes, os autores consideraram as funções escalares como funções exclusivas da concentração local de sólidos, ou seja, $p_s = p_s(\varepsilon_s)$, $p_f = p_f(\varepsilon_s)$, $\mu_s = \mu_s(\varepsilon_s)$, $\mu_f = \mu_f(\varepsilon_s)$, $\lambda_s = \lambda_s(\varepsilon_s)$ e $\lambda_f = \lambda_f(\varepsilon_s)$. Analogamente, $\alpha = \alpha(\varepsilon_s)$, $\beta = \beta(\varepsilon_s)$ e $\gamma = \gamma(\varepsilon_s)$, são funções escalares da Equação (3.236). As Equações (3.234) e (3.235) mostram que ambos os constituintes

sólido e líquido são modelados como fluidos viscosos na Mecânica do Contínuo.

As quantidades p_s e p_f nas Equações (3.234) e (3.235) são respectivamente as pressões no sólido e no fluido equivalentes às partes arbitrárias dos tensores. Os autores definiram através da hipótese básica do sistema sólido-fluido ser um meio isotrópico e indicaram que os tensores tensão podem ser representados da seguinte forma:

$$T_s = -p_s I + T_s^E \quad (3.237)$$

$$T_f = -p_f I + T_f^E \quad (3.238)$$

analogamente como foi representado por D'Ávila (1978). Entretanto as partes constitutivas dos tensores referentes às tensões extras nos constituintes, T_s^E e T_f^E , foram escritas na forma padrão do comportamento linear de fluidos newtonianos:

$$T_s^E = \mu_s \left(\nabla v_s + (\nabla v_s)^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v_s) I \right) \quad (3.239)$$

$$T_f^E = \mu_f \left(\nabla v_f + (\nabla v_f)^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v_f) I \right) \quad (3.240)$$

Cabe ainda ressaltar que as pressões p_s e p_f utilizadas nas Equações (3.234) e (3.235) são variáveis teóricas que não podem ser medidas experimentalmente. Para tanto os autores introduziram as variáveis experimentais pressão no poro p e tensão efetiva no sólido σ_e , como foi apresentado na Equação (3.188).

O conceito tensão efetiva nos sólidos foi desenvolvido para o caso no qual as partículas sólidas encontram-se em contato íntimo permanente umas com as outras. Tal conceito permite concluir que a definição de σ_e na abordagem de Burger e Concha (1998) é equivalente a definição de pressão nos sólidos, P_s , no desenvolvimento de D'Ávila (1978).

Outra característica importante destacada na abordagem de Burger e Concha (1998) trata do conceito desenvolvido sobre o efeito da tensão nos sólidos na região de sedimentação propriamente livre. Para os autores, hipoteticamente, colisões entre partículas sólidas não se desenvolvem na região de sedimentação propriamente dita, mas, no entanto existe o efeito da tensão nos sólidos apesar de pequeno. A tensão efetiva nos sólidos é admitida como sendo constante, porém não nula em tal região, diferentemente do caso abordado por D'Ávila (1978).

Burger e Concha (1998) supuseram a existência de uma concentração volumétrica de sólidos mínima na qual as partículas sólidas iniciam o contato físico umas com as outras, conhecida na literatura como concentração crítica ε_{sc} . Equações constitutivas para

$\sigma_e = \sigma_e(\varepsilon_s)$ podem ser utilizadas no modelo de Burger e Concha desde que a derivada:

$$\sigma'_e(\varepsilon_s) = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_s} > 0 \quad \forall \quad \varepsilon_s > \varepsilon_{sc} \quad (3.241)$$

seja positiva em tais condições. Para concentrações menores ou iguais a crítica a derivada da função tensão nos sólidos é assumida como nula, ou seja, $\sigma'_e(\varepsilon_s) = 0$ para $\varepsilon_s \leq \varepsilon_{sc}$. Desta forma os autores podem assumir que existe efeito de tensão nos sólidos na região de sedimentação livre e que o mesmo é função exclusiva da concentração local, porém a contribuição de tal efeito aparece somente através do seu gradiente nas equações dos balanços.

A Figura 3.7 apresenta o comportamento da tensão efetiva dos sólidos como função da concentração local. Nota-se pela análise da Figura 3.7 que o comportamento σ_e é considerado ser uma função crescente e não-negativa da concentração local.

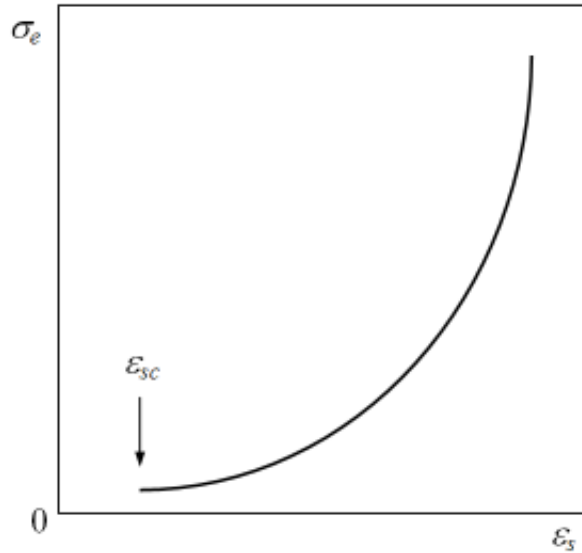


Figura 3.7: Comportamento da tensão efetiva nos sólidos.

Alguns autores consideram que σ_e seja uma função descontínua em ε_{sc} . Tal consideração equivale a dizer que ocorre um salto na pressão dos sólidos entre as regiões de sedimentação propriamente dita e formação do sedimento. Em contrapartida na concepção de outros autores, como é o caso de Burger e Concha (1998), acredita-se que na região de sedimentação propriamente dita os sólidos alcançam várias concentrações volumétricas antes que aconteça o contato íntimo das partículas ou que concentração crítica seja alcançada, fato que garante a continuidade da função σ_e em ε_{sc} .

Parâmetros de equações constitutivas para a tensão efetiva nos sólidos σ_e para cada tipo de sólido podem ser obtidos através de testes experimentais como foi feito por Damasceno (1992), França et al. (1995) e Arouca (2003).

Outra característica particular da abordagem de Burger e Concha (1998) está na especificação da equação constitutiva para determinação da força de interação sólido-líquido (m), Equação (3.236). Analogamente ao Teorema 3 da teoria constitutiva de D'Ávila (1978), os autores apresentam a força de interação sólido-líquido como função da concentração volumétrica local e da velocidade relativa sólido-líquido. Na abordagem de Burger e Concha a força de interação é decomposta em duas partes, uma parte hidrostática m_b e uma parte dinâmica m_d :

$$m = m_b + m_d \quad (3.242)$$

na qual a parte hidrostática é dada por:

$$m_b = \beta \nabla \varepsilon_s \quad (3.243)$$

e a parte dinâmica é apresentada na forma:

$$m_d = -\alpha(\varepsilon_s) v_r + \gamma(\varepsilon_s) \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \cdot \nabla v_r \right) \quad (3.244)$$

É importante ressaltar que a componente dinâmica m_d da força de interação desaparece para $v_r = 0$. Para tal, Burger e Concha (1998) demonstraram que $\beta(\varepsilon_s) = p(\varepsilon_s)$ através da Equação (3.193) quando o equilíbrio é obtido em $t \rightarrow \infty$ e $v_s = v_f = 0$ e que o termo equivalente à função escalar $\beta(\varepsilon_s)$ desaparece naturalmente no modelo. A função $\gamma(\varepsilon_s)$ não precisa ser determinada uma vez que o termo de aceleração presente na Equação (3.244) é desprezível como foi demonstrado por Burger et al. (2000). Desta forma a especificação de uma equação constitutiva para a força de interação sólido-líquido se limita a especificação da função $\alpha(\varepsilon_s)$.

D'Ávila (1978) em seu trabalho apontou a Lei de Darcy para escoamentos lentos e unidimensionais em meios porosos para a determinação da força resistiva. O uso da equação de Darcy no equacionamento, Equação (3.70), permitiu a introdução do importante conceito de permeabilidade do meio poroso ao problema. Desta forma, especificar a força resistiva significou especificar uma equação constitutiva para a permeabilidade do meio poroso. Ao contrário de d'Ávila, Burger e Concha não utilizaram o conceito de permeabilidade do meio poroso de forma explícita em seu problema, mas introduziram uma função $f_{bk} = f_{bk}(\varepsilon_s)$, dada pela Equação (3.215), conhecida como fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch. Em tal abordagem, especificar uma equação constitutiva para f_{bk} é equivalente a especificar $\alpha(\varepsilon_s)$.

A função f_{bk} , que em diversos casos na literatura é determinada experimentalmente

ao invés da função $\alpha(\varepsilon)$, deve satisfazer as seguintes condições (BURGER et al., 2000):

$$f_{bk}(\varepsilon_s = 0) = 0 \quad (3.245)$$

$$f_{bk}(\varepsilon_s) < 0 \quad \forall \quad 0 < \varepsilon_s < \varepsilon_{sm} \quad (3.246)$$

$$f'_{bk}(\varepsilon_s = 0) < 0 \quad (3.247)$$

$$f_{bk}(\varepsilon_s = \varepsilon_{sm}) = 0 \quad (3.248)$$

com ε_{sm} equivalente a concentração de sólidos máxima. Sob tais condições uma curva típica da função f_{bk} é apresentada na Figura 3.8.

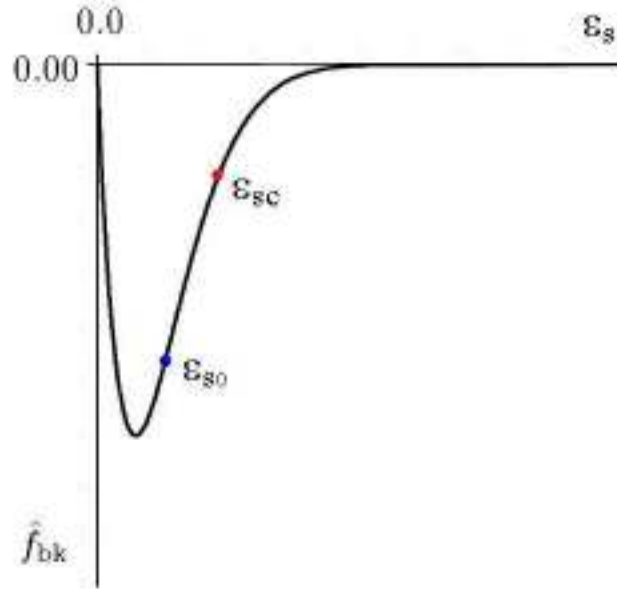


Figura 3.8: Gráfico da função fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch f_{bk} .

Nota-se através da Figura 3.8 que f_{bk} é uma função negativa e contínua em todo o domínio $0 < \varepsilon_s < \varepsilon_{sm}$. O fato da função f_{bk} ser contínua para toda a faixa de concentrações mostra que o conceito adotado por Burger e Concha (1998) para tal função não prevê descontinuidade em ε_{sc} , ou seja, descontinuidades das variáveis entre as regiões de sedimentação propriamente dita e formação do sedimento. Assim sendo o modelo matemático de Burger e Concha também não admite salto na permeabilidade do meio poroso da mesma forma como foi verificado para a tensão efetiva dos sólidos.

É importante destacar também o ponto de inflexão que ocorre em concentrações de sólidos inferiores a concentração inicial ε_{s0} na função f_{bk} . Pelas condições apresentadas nas Equações (3.245) a (3.248) observa-se que a derivada f'_{bk} necessariamente inverte seu sinal em algum ponto do domínio. Concentrações menores que a concentração inicial podem ser de difícil verificação experimental e no entanto são responsáveis por uma considerável

contribuição na forma da função f_{bk} como é verificado na Figura 3.8.

A modelagem de sistemas sólido-líquido através da abordagem de Burger e Concha (1998) consiste, portanto da resolução numérica da equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial f(\varepsilon_s, t)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[a(\varepsilon_s) \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} \right] \quad (3.249)$$

no domínio $0 \leq z \leq 1$ e $0 \leq t \leq T$, sendo que as variáveis $f(\varepsilon_s, t)$ e $a(\varepsilon_s)$ são dadas respectivamente por:

$$f(\varepsilon_s, t) = q(t) \varepsilon_s + f_{bk}(\varepsilon_s) \quad (3.250)$$

$$a(\varepsilon_s) = -\frac{f_{bk}(\varepsilon_s) \sigma'_e(\varepsilon_s)}{L \Delta \rho g \varepsilon_s} \quad (3.251)$$

além da incorporação de equações constitutivas para $\sigma_e = \sigma_e(\varepsilon_s)$ e $f_{bk} = f_{bk}(\varepsilon)$.

A Equação (3.249) é classificada pelos autores como sendo uma equação diferencial parcial quasilinear parabólica podendo se degenerar em uma equação diferencial parcial dependendo do termo $a(\varepsilon_s)$ apresentado na Equação (3.251).

Pela análise dos autores, o termo $a(\varepsilon_s)$, também conhecido como coeficiente de difusão, é nulo para concentrações menores que a concentração crítica, ou seja, $a(\varepsilon_s)$ para $\varepsilon_s < \varepsilon_{sc}$, degenerando a Equação (3.249) na forma:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial f(\varepsilon_s, t)}{\partial z} = 0 \quad (3.252)$$

que apresenta caráter hiperbólico Burger e Concha (1998). Para concentrações volumétricas na faixa $\varepsilon_{sc} \leq \varepsilon_s < 1$ o coeficiente de difusão é positivo, ou seja, $a(\varepsilon_s) > 0$.

Um exemplo da função $a(\varepsilon_s) > 0$ é observada na Figura 3.9.

Verifica-se através da Figura 3.9 a existência de uma descontinuidade na função $a(\varepsilon_s)$ que ocorre em ε_{sc} . Em concentrações menores que a concentração crítica tal função é nula uma vez que $\sigma'_e = 0$ na região de sedimentação propriamente dita. Certamente o aparecimento das descontinuidades que se propagam no fenômeno físico da sedimentação, as interfaces descendente e ascendente, surgem naturalmente no modelo de Burger e Concha pela própria descontinuidade da função $a(\varepsilon_s)$ e tal verificação sustenta a hipótese defendida pelos autores de que as demais variáveis envolvidas são contínuas em todo domínio inclusive em ε_{sc} . Desta forma o salto que deveria ocorrer na função f_{bk} na concentração crítica, como por exemplo pela introdução do conceito de permeabilidade do meio poroso, não ocorre no modelo mas é corrigido por $\sigma'_e = 0$ em concentrações de sólidos menores que a crítica, desaparecendo com o termo relativo na Equação (3.251) ao tornar $a(\varepsilon_s) = 0$.

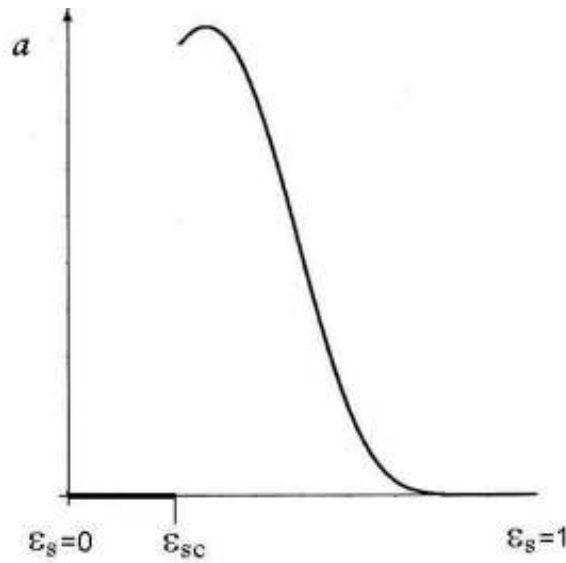


Figura 3.9: Caso particular de coeficiente de difusão $\alpha(\varepsilon_s)$ da Equação (3.249).

O modelo de Burger e Concha (1998) contribuiu significativamente ao estudo do fenômeno da sedimentação principalmente por considerar o efeito de compressibilidade dos sólidos no sedimento e pela verificação das interfaces que se propagam em sentidos opostos. Entretanto a inclusão do conceito de permeabilidade do meio poroso e sua descontinuidade na concentração crítica são de grande importância na descrição física do fenômeno, como foi feito por D'Ávila (1978).

A modelagem da sedimentação unidimensional em batelada pelo equacionamento de Burger e Concha pode ser realizada fazendo $q = 0$ na Equação (3.250) para $f(\varepsilon_s, t)$.

3.7 Modelo matemático alternativo proposto para o caso da sedimentação em batelada

3.7.1 Introdução

A sedimentação unidimensional, inicialmente definida por Kynch (1952) como um meio contínuo de propagação de ondas de choque com representação puramente cinemática, tornou-se melhor representada através da introdução da Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo por D'Ávila (1978), cujo desenvolvimento permitiu prever a existência das duas descontinuidades que se propagam em sentidos opostos.

A contribuição de d'Ávila foi significativa por incorporar os balanços de forças dos constituintes da mistura ao equacionamento e pela conseqüente avaliação dos efeitos de

compressibilidade do sólido por seu próprio peso. O uso da Teoria Constitutiva por D'Ávila e Sampaio (1977a) permitiu ainda a representação do fenômeno através de variáveis físicas que podem ser medidas experimentalmente, como a pressão nos sólidos e força resistiva, conferindo ao problema físico uma representação matemática consistente. A resolução do problema poderia ser obtida através do uso de equações de salto nos domínios variáveis das regiões de fronteiras móveis formadas no fenômeno.

Burger e Concha (1998) apresentaram uma abordagem matemática fundamentada nos princípios da Mecânica do Contínuo, como foi feito inicialmente por D'Ávila (1978), e um grande diferencial do modelo desenvolvido pelos autores certamente está no fato de que seu equacionamento descreve o processo completo da sedimentação contínua e batelada em todo o domínio espacial, eliminando o problema de regiões de fronteiras móveis e diminuindo o grau de complexidade do método numérico para resolução do problema. Entretanto, ao contrário de d'Ávila, Burger e Concha não utilizaram o conceito de permeabilidade do meio poroso de forma explícita em seu problema, mas introduziram uma função $f_{bk}=f_{bk}(\varepsilon_s)$, conhecida como fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch. A partir de tal constatação, não são levados em consideração os saltos das variáveis envolvidas entre as regiões de sedimentação propriamente dita e de compressão, verificados experimentalmente. Certamente a inclusão do conceito de permeabilidade do meio poroso e sua descontinuidade na concentração crítica são de grande importância na descrição física do fenômeno, como foi feito por D'Ávila (1978).

Um modelo matemático alternativo para a sedimentação em batelada é proposto neste trabalho através da combinação dos conceitos de D'Ávila (1978), cujos princípios são inerentes de uma abordagem fenomenológica consistente fisicamente, com conceitos matemáticos utilizados por Burger e Concha (1998) para a resolução do problema da sedimentação, cujos métodos de resolução numérica simplificaram consideravelmente a complexidade do problema, eliminando a necessidade da resolução por regiões de fronteiras móveis e condições de salto.

3.7.2 Desenvolvimento do Equacionamento

As equações da continuidade e do movimento para o constituinte sólido, através da Mecânica do Contínuo, são dadas por (D'ÁVILA, 1978):

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_s v_s}{\partial z} = 0 \quad (3.253)$$

$$\rho_s \varepsilon_s \left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P_s}{\partial z} - \frac{\mu v_s}{k} - \Delta \rho g \varepsilon_s \quad (3.254)$$

para $g=9,8 \text{ m/s}^2$ e sujeitas às seguintes hipóteses simplificadoras:

- O escoamento em meio poroso é lento e o constituinte sólido descreve um movimento de compressão unidimensional;
- Não ocorre transferência de massa entre os constituintes da mistura;
- Os tensores tensões nos constituintes sólido e líquido são funções exclusivas da porosidade do meio;
- Os efeitos de parede são desprezíveis;
- O único campo de forças atuante no sistema é o campo de forças gravitacional.

Damasceno (1992) mostrou através de seu trabalho que os termos inerciais da equação do movimento, Equação (3.254), podem ser desprezados:

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial z} \approx 0 \quad (3.255)$$

A Equação (3.254) pode ser reescrita, isolando-se a velocidade intersticial dos sólidos, na seguinte forma:

$$v_s = \frac{k}{\mu} \left(-\Delta \rho g \varepsilon_s - \frac{\partial P_s}{\partial z} \right) \quad (3.256)$$

Pela regra da cadeia é correto escrever que:

$$\frac{\partial P_s}{\partial z} = \frac{dP_s}{d\varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} = P'_s \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} \quad (3.257)$$

que quando substituída na Equação (3.256) produz:

$$v_s = \frac{k}{\mu} \left(-\Delta \rho g \varepsilon_s - P'_s \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} \right) \quad (3.258)$$

Multiplicando-se ambos os membros da Equação (3.258) pela variável ε_s tem-se:

$$\varepsilon_s v_s = \frac{k \varepsilon_s}{\mu} \left(-\Delta \rho g \varepsilon_s - P'_s \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} \right) \quad (3.259)$$

que por sua vez substituída na equação da continuidade para o constituinte sólido, Equação (3.253) resulta:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k \varepsilon_s}{\mu} \left(-\Delta \rho g \varepsilon_s - P'_s \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (3.260)$$

ou ainda, fazendo-se a adimensionalização da variável espacial, $x=z/L$, e rearranjando-se os termos da Equação (3.260):

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k \Delta \rho g \varepsilon_s}{L \mu} + \frac{k P'_s \varepsilon_s}{L^2 \mu} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} \right] = 0 \quad (3.261)$$

Introduzindo-se a função $\Gamma(\varepsilon_s)$ como sendo:

$$\Gamma(\varepsilon_s) = \frac{k \Delta \rho g \varepsilon_s}{L \mu} \quad (3.262)$$

e ao definir o coeficiente de difusão $D(\varepsilon_s)$ como:

$$D(\varepsilon_s) = \frac{k P'_s \varepsilon_s}{L^2 \mu} \quad (3.263)$$

resulta-se na Equação (3.264):

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma(\varepsilon_s) + D(\varepsilon_s) \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} \right] = 0 \quad (3.264)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma(\varepsilon_s)}{\partial x} - \frac{\partial D(\varepsilon_s)}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} - D(\varepsilon_s) \frac{\partial^2 \varepsilon_s}{\partial x^2} = 0 \quad (3.265)$$

A Equação (3.265) é válida no domínio $0 \leq t \leq T$ e $0 \leq x \leq 1$, sendo $x=z/L$, com L equivalente a altura da coluna da mistura e T o tempo final de sedimentação. Desta forma, tal expressão pode ser resolvida para todo o domínio do problema, bastando-se especificar equações constitutivas para pressão nos sólidos, $P_s = P_s(\varepsilon_s)$, e permeabilidade do meio poroso, $k = k(\varepsilon_s)$, em cada região específica do fenômeno.

O problema pode ser solucionado fazendo-se uso da seguinte condição inicial:

$$\varepsilon_s(x, t = 0) = \varepsilon_{s0}(x) \quad (3.266)$$

e condições de contorno, em $z = 0$ através da Equação (3.254) sabendo-se que em tal ponto é correto afirmar que $v_s = 0$, resultando em:

$$\left. \frac{\partial P_s}{\partial x} \right|_{x=0} = -L \Delta \rho g \varepsilon_s \quad (3.267)$$

ou ainda,

$$\left. \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{L \Delta \rho g \varepsilon_s}{P'_s} \quad (3.268)$$

e em $x=1$ ($z=L$),

$$\varepsilon_s(x = 1) = \varepsilon_{sL}(t) \quad (3.269)$$

sendo $\varepsilon_{sL}(t = 0) = \varepsilon_{s0}$ e $\varepsilon_{sL}(t \geq 0^+) = 0$.

3.7.3 Análise do Modelo Alternativo para o caso da Sedimentação em Batelada

O modelo matemático alternativo desenvolvido para o caso da sedimentação em batelada pode ser resolvido através da Equação (3.265) com a condição inicial e condições de contorno especificadas nas Equações (3.266), (3.268) e (3.269), respectivamente.

A equação diferencial parcial desenvolvida pode ser atribuída a todo domínio da variável espacial, bastando-se para isso especificar adequadamente as hipóteses constitutivas para cada região do fenômeno. A aplicação de uma única equação ao fenômeno permite eliminar o problema matemático de fronteiras móveis e domínios variáveis com o tempo, bem como a necessidade de especificação de condições de salto. Em contrapartida, o uso de variáveis fisicamente mensuráveis tais como pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso confere ao modelo uma melhor representação do fenômeno físico.

D'Ávila (1978) descreveu a pressão nos sólidos como sendo uma função descontínua da concentração volumétrica de sólidos e que tal descontinuidade era evidente entre as regiões de líquido clarificado e sedimentação livre, assim como entre as regiões de sedimentação livre e compressão do sedimento, sendo que no último caso observa-se a propagação da descontinuidade através da concentração crítica, ε_{sc} , da fase sólida. De forma análoga ocorre com a permeabilidade do meio poroso como função da concentração local de sólidos. Tais referências são verificadas experimentalmente.

Diversos pesquisadores, dentre eles Damasceno (1992), Arouca (2003) e Silva (2004), determinaram equações constitutivas a serem incorporadas ao modelo para resolução do problema. Curvas típicas de pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso são apresentadas na Figura 3.10.

Através da Figura 3.10 é possível avaliar o caso da sedimentação em batelada em termos das descontinuidades das variáveis envolvidas e dos sinais das derivadas das funções pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso em cada região específica apresentada na Figura 3.11.

A Região I, definida como região de líquido clarificado, é caracterizada pela predominância da fase líquida. Em tal região a concentração volumétrica de sólidos é nula, $\varepsilon_s = 0$, fato que conseqüentemente leva a ausência de pressão nos sólidos, $P_s = 0$, e permeabilidade do meio poroso infinita, $k \rightarrow \infty$. Uma descontinuidade definida inicialmente por Kynch (1952) como interface descendente delimita as regiões de líquido clarificado e

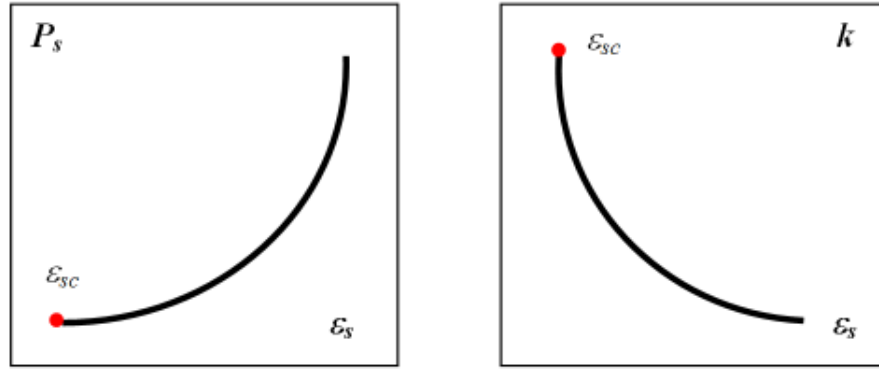


Figura 3.10: Curvas típicas de pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso.

de sedimentação livre, Região II.

A Região II é caracterizada pela presença de partículas sólidas em concentração constante e igual à concentração inicial da suspensão, ε_{s0} , ou seja, $\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z}|_{II} = 0$ e pressão nos sólidos constante desenvolvida como função da concentração inicial dos sólidos, $P_s = P_{s0}$ e $\frac{\partial P_s}{\partial z}|_{II} = 0$. A permeabilidade do meio poroso, sendo função exclusiva da porosidade local, é constante e não nula em tal região e conseqüentemente a derivada da função é dada por $\frac{\partial k}{\partial z}|_{II} = 0$. A Região III por sua vez é definida como região de compressão e formação do sedimento, cuja menor concentração verificada é equivalente a concentração crítica ε_{sc} , é delimitada pela segunda descontinuidade do fenômeno. A concentração local de sólidos aumenta no sentido da base da coluna de sedimentação, ponto de referência da origem das posições, cuja concentração de sólidos observada é máxima no fenômeno. Desta forma $\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z}|_{III} < 0$ e as funções pressão nos sólidos e permeabilidade do meio, de

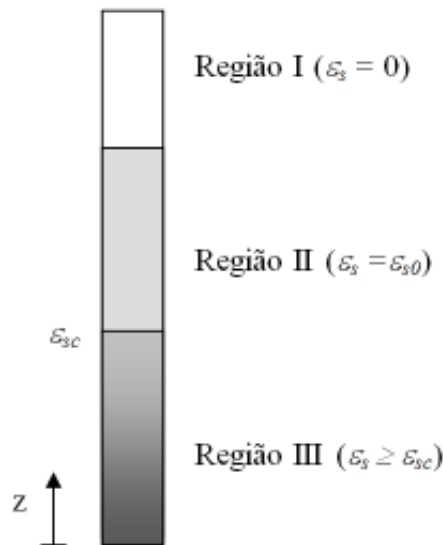


Figura 3.11: Regiões específicas da sedimentação em batelada e as descontinuidades da variável concentração volumétrica de sólidos.

acordo com as curvas típicas da Figura 3.10, desenvolvem suas derivadas como $\frac{\partial P_s}{\partial z}\big|_{III} > 0$ e $\frac{\partial k}{\partial z}\big|_{III} < 0$, respectivamente.

Para o caso específico de suspensões aquosas diluídas, o salto entre as Regiões II e III se torna bastante significativo. A pressão nos sólidos na região de sedimentação livre é constante e não nula, a menos quando desconsiderada por alguns autores, como foi feito por D'Ávila (1978). Burger e Concha (1998) consideraram que a tensão efetiva nos sólidos não deve ser nula, mas sim constante em tal região, ocasionando sua derivada $P'_s(\varepsilon_s) = 0$ objetivando a simplificação do modelo. Desta forma, a Equação (3.265) quando aplicada na região de sedimentação livre pode ser simplificada bastando-se admitir a derivada P'_s como sendo nula. Assim, a expressão se degenera na forma:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma(\varepsilon_s)}{\partial x} = 0 \quad (3.270)$$

aplicada para $\varepsilon_s < \varepsilon_{sc}$.

Fazendo-se analogia entre a abordagem alternativa e abordagem de Burger e Concha (1998) é possível avaliar as semelhanças e discrepâncias entre tais modelos. Reescrevendo-se a Equação (3.254) de D'Ávila (1978) em termos de velocidade relativa dos constituintes e desprezando os termos inerciais da equação, obtém-se:

$$\frac{\partial P_s}{\partial z} = -\Delta \rho g \varepsilon_s + \frac{\mu(1 - \varepsilon_s)}{k} v_r \quad (3.271)$$

na qual v_r é a velocidade relativa líquido-sólido, dada por $v_r = v_f - v_s$.

Burger e Concha (1998) representaram a interação sólido-sólido através da tensão efetiva nos sólidos, σ_e , cuja expressão obtida no modelo foi apresentada na Equação (3.204), dada por:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\Delta \rho g \varepsilon_s - \frac{\alpha(\varepsilon_s) v_r}{(1 - \varepsilon_s)} \quad (3.272)$$

Comparando-se as Equações (3.272) e (3.273) e sabendo-se que, diferentemente da forma adotada por D'Ávila (1978), Burger e Concha (1998) referenciaram a velocidade relativa sólido-líquido como $v_r = v_s - v_f$, torna-se possível determinar $\alpha(\varepsilon_s)$:

$$\alpha(\varepsilon_s) = \frac{\mu(1 - \varepsilon_s)^2}{k} \quad (3.273)$$

Segundo Burger e Concha (1998) a função $f_{bk}(\varepsilon_s)$ introduzida no modelo pode ser expressada na forma da Equação (3.215), dada por:

$$f_{bk}(\varepsilon_s) = -\frac{(1 - \varepsilon_s)^2 \varepsilon_s^2 \Delta \rho g}{\alpha(\varepsilon_s)} \quad (3.274)$$

que quando reescrita ao substituir a Equação (3.273) fornece a função em termos da permeabilidade do meio poroso:

$$f_{bk}(\varepsilon_s) = -\Gamma(\varepsilon_s) = -\frac{k(\varepsilon_s) \Delta \rho g \varepsilon_s^2}{\mu} \quad (3.275)$$

Naturalmente, da Equação (3.251) o coeficiente de difusão $a(\varepsilon_s)$ do modelo de Burger e Concha (1998), dado por:

$$a(\varepsilon_s) = -\frac{f_{bk}(\varepsilon_s) \sigma'_e(\varepsilon_s)}{\Delta \rho g \varepsilon_s} \quad (3.276)$$

pode ser escrito para o modelo alternativo na forma não adimensionalizada:

$$a(\varepsilon_s) = D(\varepsilon_s) = \frac{k(\varepsilon_s) P'_s(\varepsilon_s) \varepsilon_s}{\mu} \quad (3.277)$$

cujas representações se dá em termos de parâmetros empíricos com significados físicos conhecidos.

Conceitos físicos utilizados no modelo de D'Ávila (1978) e a manipulação matemática do modelo de Burger e Concha (1998) unificados numa mesma abordagem, conferem ao problema da sedimentação uma alternativa consistente e simplificada para sua resolução numérica.

O Capítulo 3 apresentou a evolução da descrição fenomenológica ao longo dos anos, assim como descreveu e analisou modelos matemáticos para o caso da sedimentação binária unidimensional, propondo a partir de então, um modelo alternativo para representação do problema.

CAPÍTULO 4

Materiais e Métodos



STE CAPÍTULO apresenta uma descrição detalhada dos equipamentos e demais recursos materiais empregados no desenvolvimento do trabalho, assim como apresenta as metodologias utilizadas nos experimentos.

4.1 Sistema experimental

O sistema experimental utilizado para o monitoramento da concentração de sólidos em testes de sedimentação em batelada consiste basicamente de uma unidade de aplicação de radioisótopos de baixas energias em escala laboratorial, utilizada inicialmente por Ruiz (2000) e Arouca (2003) e adaptada para o desenvolvimento deste trabalho. O sistema experimental foi desenvolvido na Oficina Mecânica da Faculdade de Engenharia Química - FEQ/UFU, cuja concepção e avaliação propiciaram desde então o desenvolvimento de diversos trabalhos publicados na linha de pesquisas de processos de separação.

A unidade experimental consiste de uma fonte de raios gama (γ) proveniente de um cilindro de amerício (Am^{241}) enclausurado no interior de um bloco de chumbo, material que possui um elevado coeficiente de atenuação de raios γ . O bloco tem dimensões 10 cm $\times$ 10 cm $\times$ 5 cm, além de um orifício central de 5mm de diâmetro. A colimação dos raios ocorre através de tal orifício, que por sua vez direciona a radiação em linha reta para o interior de outro bloco de chumbo que contém uma válvula fotomultiplicadora integrante do sistema de detecção. Os colimadores diminuem a divergência do feixe e evitam que a

radiação, espalhada pelo meio atenuador, alcance o detector.

A blindagem da fonte de radiação garante que os demais raios não colimados sejam atenuados pelo chumbo. Tal configuração evita a exposição do operador à radiação. O sistema de detecção é usado para medir a intensidade de radiação transmitida. A fonte é acoplada a uma base móvel vinculada a um sistema de elevação que permite posicionar o sistema colimado fonte-detector na altura desejada de um recipiente cilíndrico de vidro no qual é preparada a suspensão. A blindagem do detector evita que a maior parte da radiação que não seja proveniente da fonte radioativa seja medida.

A Figura 4.1 ilustra o esquema geral da aparelhagem experimental.

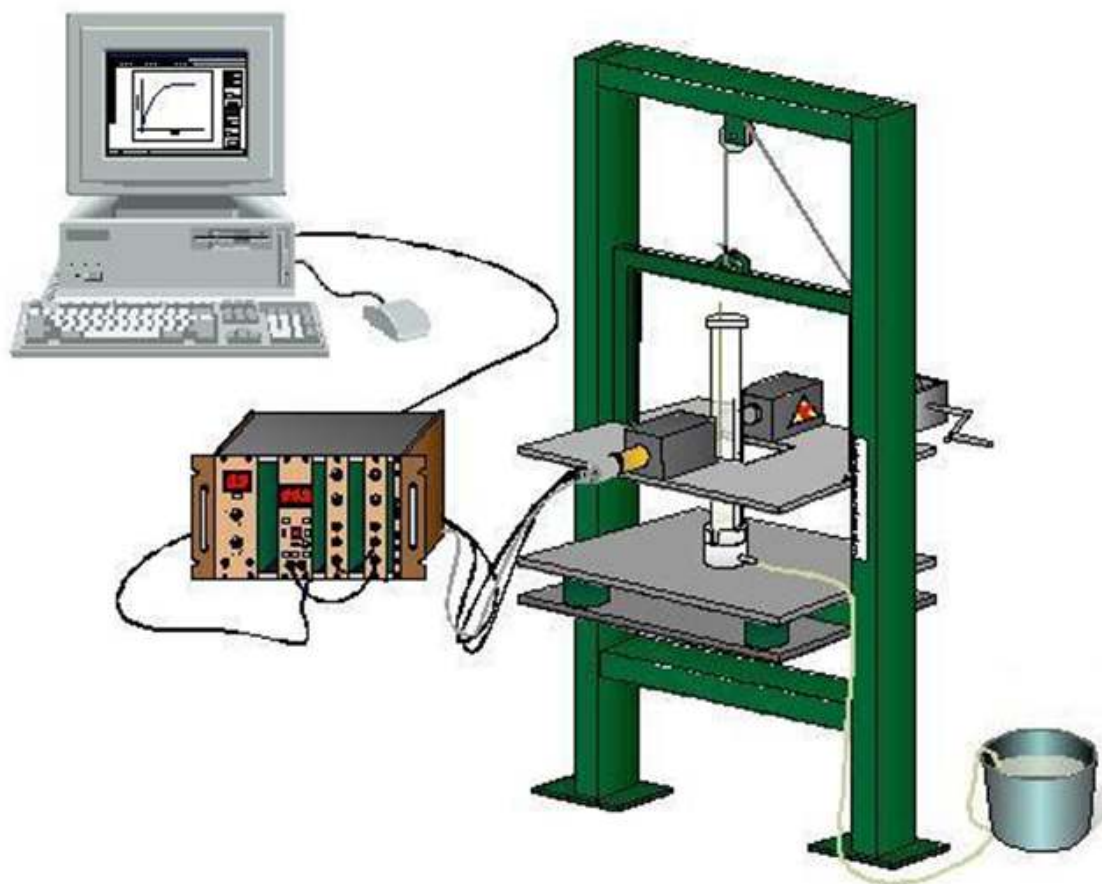


Figura 4.1: Esquema geral da unidade experimental de aplicação de radioisótopos.

Detalhes da unidade experimental de aplicação de radioisótopos são apresentados nas Figuras 4.2 e 4.3.



Figura 4.2: Coluna de sedimentação e sistema fonte-detecção de radiação.



Figura 4.3: Válvula fotomultiplicadora e os módulos do sistema de detecção.

O sistema de detecção de radiação é constituído pelos seguintes dispositivos:

- Módulo cintilador composto por cristais de iodeto de sódio ativado por tálio, cujos elétrons orbitais interagem com a radiação emitindo radiações eletromagnéticas na faixa da luz visível proporcionais àquela emitida pela fonte radioativa;

- Válvula fotomultiplicadora, constituída por um cátodo fotoelétrico, capaz de transcodificar a luz emitida pelo módulo cintilador em um sinal eletrônico com intensidade proporcional à energia da radiação;
- Pré-amplificador (ORTEC modelo 276) que ajusta a impedância do sistema de modo que os pulsos oriundos da válvula fotomultiplicadora possam ser transmitidos, por meio de cabo coaxial, até o amplificador;
- Amplificador (ORTEC modelo 575A) que aumenta a largura e a amplitude dos pulsos para cerca de 1 ms e até 10 V, respectivamente, de forma proporcional às energias absorvidas pelo cintilador;
- Fonte de alta tensão (ORTEC modelo 556) que fornece tensão estabilizada à válvula fotomultiplicadora;
- Analisador de Canais SCA - Single-Channel Analyzer ou discriminador de voltagens (ORTEC modelo 550A) que estabelece os níveis superior e inferior de uma janela de energia garantindo que a contagem de pulsos esteja definida no intervalo do pico de emissão do radioisótopo;
- Contador de pulsos (ORTEC modelo 071) que faz a contagem dos pulsos liberados pelo discriminador e ainda é dotado de um temporizador que define o tempo de contagem.

O esquema do sistema de detecção é apresentado na Figura 4.4.

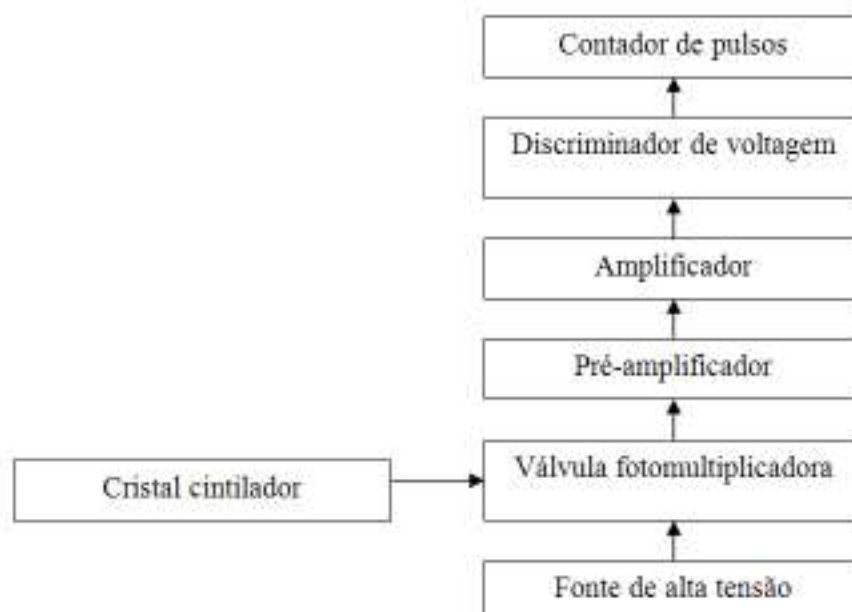


Figura 4.4: Vista esquemática do sistema de detecção de raios γ .

A homogeneização da suspensão é feita com um agitador do tipo axial, constituído por uma haste metálica de cerca de 50 cm de comprimento e uma base cônica perfurada com 5 cm de diâmetro. Segundo Ruiz (2000) a geometria cônica do agitador conduz a uma homogeneização mais perfeita, enquanto geometria cilíndrica, mesmo sob agitações mais vigorosas, sempre apresentava concentrações inferiores à concentração inicial da suspensão. O agitador do tipo axial, semelhante ao utilizado no desenvolvimento do trabalho experimental, é apresentado na Figura 4.5.

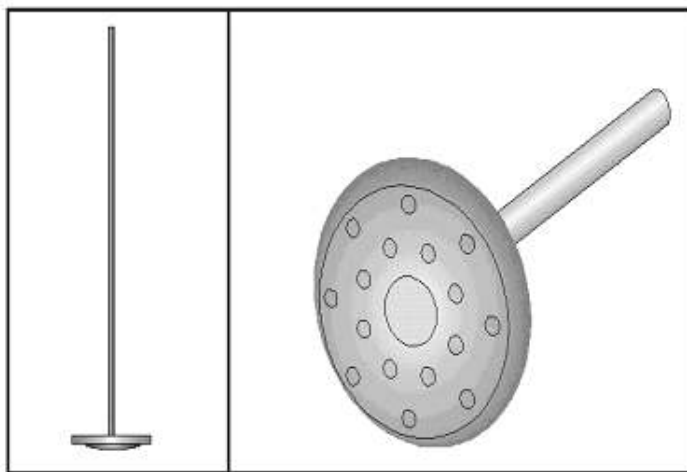


Figura 4.5: Vista do agitador usado na homogeneização das suspensões.

A coluna de suspensão utilizada no monitoramento de concentrações de sólidos em função da posição e do tempo, doravante referida no decorrer do trabalho como recipiente de testes A, é constituída por um cilindro de vidro com diâmetro interno equivalente a 55 mm, espessura 3 mm e altura 350 mm.

O recipiente de testes usado para o levantamento das equações constitutivas, referido no trabalho como recipiente de testes B, foi inicialmente desenvolvido e utilizado por Arouca (2003) é constituído por um tubo cilíndrico de vidro de 850 mm de altura, 55 mm de diâmetro interno e 5 mm de espessura. O recipiente possui em sua parte superior uma tampa provida de rosca que por sua vez é atravessada excentricamente por um tubo cilíndrico de cobre com cerca de 400 mm de altura e 4 mm de diâmetro interno, utilizado para garantir o suprimento de ar ao sistema. A tampa é constituída de PVC revestida internamente por uma borracha que permite a vedação do tubo. A base do recipiente possui um reservatório de cerca de 100 mm de altura que sustenta uma placa porosa sinterizada. A placa apresenta 55 mm de diâmetro e tem como finalidade reter os sólidos no interior do recipiente de testes durante os ensaios permitindo a percolação do líquido. O reservatório é constituído de acrílico dotado de um pequeno tubo em sua parte inferior ligado a uma mangueira de borracha. A saída de líquido pode ser controlada pela presença de uma pequena válvula do tipo globo, presa à outra extremidade da mangueira.

O reservatório é flangeado no tubo permitindo uma eventual troca da placa sinterizada e a limpeza do sistema após os ensaios. O tubo de testes foi projetado para funcionar como um frasco de Mariotte cuja configuração permite que um determinado escoamento ocorra sob condições de vazão constante.

4.2 Aplicação do Am^{241} como fonte radioativa e a detecção de raios γ

O amerício foi o quarto elemento transurânico a ser descoberto na série dos actinídeos, pertence ao grupo 3 da tabela periódica, como resultado de sucessivas reações de captura de nêutrons por isótopos de plutônio (Pu) em reator nuclear. O radioisótopo é artificial, maleável, levemente prateado e perde seu brilho lentamente quando em contato com o ar.

A aplicação do amerício como fonte de raios γ deveu-se aos seguintes fatores apresentados por Hamacher (1978):

- A radiação γ produzida pelo radioisótopo é capaz de atravessar vários centímetros de material líquido ou sólido;
- O amerício 241 possui elevado tempo de meia vida, 432,6 anos, o que elimina a necessidade de correções na contagem de pulsos devido ao decaimento, garantindo a constância na emissão de radiação no período de aquisição de dados experimentais;
- O amerício 241 emite radiação gama com energia intermediária, 60 keV, o que permite ter uma boa sensibilidade mesmo a pequenas variações de concentração.

Para tanto, são diversas as formas de se detectar a radiação gama emitida pelo radioisótopo, dentre elas as mais usuais utilizam detectores de ionização ou cintilação, Gardney e Ely-Jr (1967), Damasceno (1992). Nos detectores de ionização, um gás é ionizado pela radiação e o grau de ionização quantificado. Os detectores de cintilação, como é o caso empregado no sistema experimental, contêm substâncias cujos elétrons orbitais interagem com a radiação sem ocorrência de ionização, mas sim de emissão de radiação eletromagnética na faixa da luz visível. Os elétrons externos são excitados pela radiação gama se deslocando para uma órbita mais externa e, ao retornarem para a condição de estabilidade, descartam a energia excedente na forma de luz visível com energia proporcional aquela cedida pela radiação gama. Para o caso de radiação gama, costuma-se utilizar cristais de iodeto de sódio ativados por tálio. A válvula fotomultiplicadora é constituída por um catodo fotoelétrico capaz de transcodificar a luz emitida pelo cintilador em um sinal eletrônico cuja intensidade é proporcional à energia perdida pela radiação.

4.3 Otimização de parâmetros do sistema experimental

Em uma fase preliminar aos testes de aplicação do radioisótopo e à aquisição de dados através do aparato experimental, torna-se necessário calibrar determinados parâmetros operacionais, em geral importantes para a otimização do sistema de detecção de raios γ tais como: a voltagem ótima da fonte de alta tensão, o intervalo de energia do espectro de emissão do Am^{241} e o tempo de resolução do sistema.

4.3.1 Determinação da voltagem ótima de operação da fonte de alta tensão

A fonte de alta tensão do sistema de detecção deve operar fornecendo tensão estabilizada à válvula fotomultiplicadora. A tensão de operação pode ser otimizada de forma a garantir maior eficiência na contagem de pulsos de radiação através de sinais eletrônicos com intensidade proporcional à energia da mesma. Para tanto, torna-se necessário definir a voltagem ótima de suprimento de energia tal que maximize a contagem de pulsos de radiação.

Para a determinação da voltagem ótima utiliza-se o discriminador SCA (ORTEC modelo 550A) para a definição de um intervalo de energias fixo através dos ajustes dos níveis superior (1) e inferior (2) apresentados na Figura 4.6.



Figura 4.6: Detalhes do SCA e do discriminador de voltagem da fonte de alta tensão e do amplificador.

A configuração do Analisador de Canais SCA (ORTEC modelo 550A) operado no modo NORM, controlador 3 da Figura 4.6, permite que os níveis inferior e superior da janela de energia definam o intervalo de 20 mV a 10 V respectivamente. A voltagem da fonte de alta tensão (ORTEC modelo 556) deve ser gradualmente variada através do ajuste dos controladores 4 e 5 da Figura 4.6, na faixa de 100 a 1300 V, e o número de pulsos detectados são coletados em um intervalo de tempo de 10 s ao se proceder o aumento gradual de energia até 1300 V (Ida) e 5 s durante a diminuição da tensão à 100 V (Volta). Os ganhos fino e grosso do amplificador são ajustados em 4,84 e 4 respectivamente, através dos potenciômetros 6 e 7. A Figura 4.7 apresenta a contagem de pulsos como função da variação da voltagem da fonte de alta tensão.

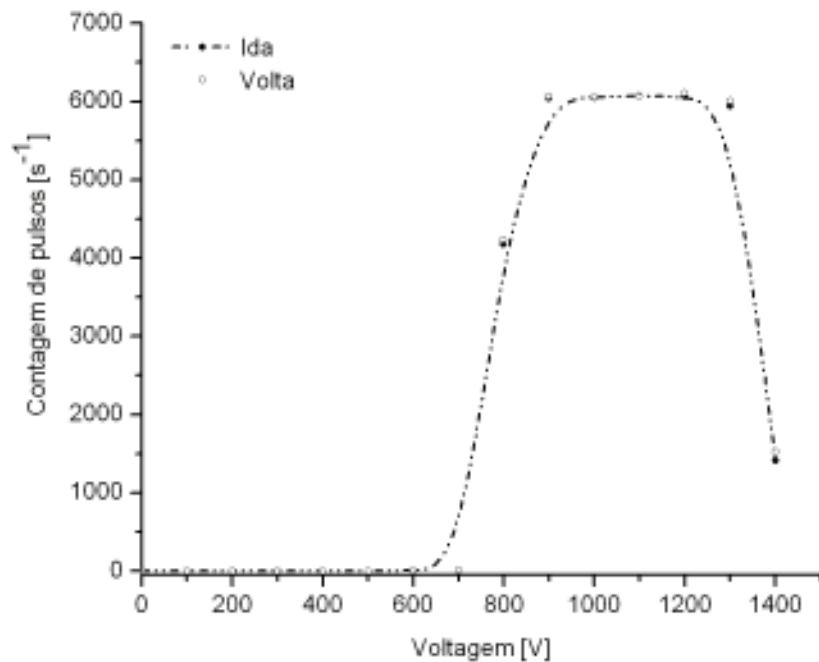


Figura 4.7: Determinação da voltagem ótima.

A voltagem ótima deve ser aquela na qual a contagem do número de radiações que atravessam o meio físico é máxima. Assim sendo, a voltagem ótima da fonte de alta tensão foi arbitrada em 900 V uma vez que a mesma se encontra em um patamar que contém os máximos valores de contagem de pulsos. Valores obtidos na “Ida” ou aumento gradual da energia fornecida, e da “Volta” com a diminuição da tensão até o menor valor mostraram-se idênticos, não apresentando histerese durante a operação. Todavia, qualquer pequena variação que eventualmente ocorra na voltagem pode ser desprezada caso a mesma se encontre no patamar constante, não afetando os resultados finais.

4.3.2 Determinação do intervalo de energia

O espectro de emissão característico é uma particularidade de cada radioisótopo. Conhecer o espectro de emissão do radioisótopo é importante para definição de seu intervalo de máxima emissão, como também para que se torne possível filtrar energias diferentes daquelas produzidas pelo material. É importante que toda a radiação que atinja o detector seja produzida apenas pelo radioisótopo e não por outras fontes externas.

Definida a voltagem ótima da fonte de alta tensão deve-se determinar o intervalo de energia de emissão do Am^{241} . O teste é realizado criando-se um intervalo de energia com mínima amplitude. O potenciômetro 3 do discriminador SCA apresentado na Figura 4.6 é colocado no modo operacional SYM que permite que a janela de energia seja ajustável de 20 mV a 10 V usando os controladores 1 e 2. Desta forma, percorre-se todo o intervalo de 100 a 1000 mV em pequenas janelas igualmente espaçadas de 100 mV nas quais os limites são definidos pelos níveis inferior e superior. Depois de realizadas cinco leituras da contagem de pulsos por um período de 10 segundos, os níveis de energia são aumentados em 100 mV, sendo que sempre o nível inferior toma a posição do superior do intervalo anterior (Ida). Em seguida o intervalo é percorrido fazendo-se o procedimento contrário, no qual sempre o nível superior ocupa a posição do inferior do intervalo anterior (Volta). Calcula-se então a média aritmética de cinco pontos para cada caso. O intervalo de energia ótimo é aquele que contém a máxima emissão de energia do radioisótopo. O espectro de emissão do Am^{241} é ilustrado na Figura 4.8.

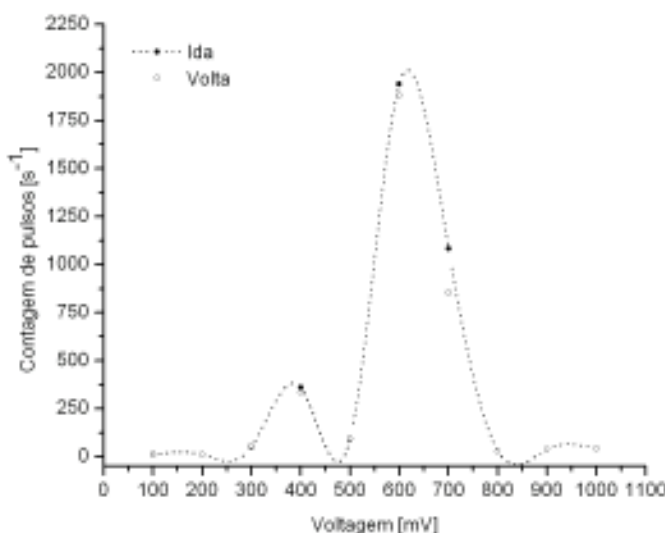


Figura 4.8: Espectro de emissão do Amerício.

Através da Figura 4.8, pode-se observar que uma boa escolha para tal intervalo é aquele compreendido entre 500 e 800 mV, uma vez que equivale a faixa de operação que contém o maior pico de energia emitida pelo Am^{241} .

4.3.3 Determinação do tempo de resolução do sistema

Um outro parâmetro importante ligado ao detector e ao sistema de amplificação é o tempo de resolução do sistema de detecção, ou tempo morto, que equivale ao período de tempo no qual o sistema de detecção de pulsos não consegue distinguir se a radiação que chega até ele pertence a uma ou várias emissões da fonte.

Um método para a determinação do tempo morto é a utilização de duas fontes radioativas de diferentes energias (GARDNEY; ELY-JR, 1967). Porém, não havendo duas fontes disponíveis, pode-se utilizar dois blocos de acrílico de diferentes espessuras como forma de simular as mesmas.

Inicialmente mede-se a contagem de pulsos que alcançam o detector sem que haja nenhum obstáculo entre a fonte e o detector. Em seguida mede-se a contagem obtida com os dois blocos de acrílico juntos como atenuadores de radiação e a diferença entre a primeira e a segunda situação medida é definida como o número de pulsos de duas fontes radioativas I_{AB} . Em seguida coloca-se um dos blocos de acrílico em frente à fonte e faz-se a contagem do número de pulsos emitidos em um certo intervalo de tempo. O total emitido sem nenhum obstáculo, a menos do obtido com o bloco A é a contagem de pulsos I_A simulando uma das fontes. Em seguida repete-se o procedimento para o segundo bloco de acrílico, obtendo-se I_B . Existe ainda a necessidade de coletar o número de pulsos quando a fonte encontra-se lacrada por uma barra de chumbo, denominada contagem do *background*, I_G , que equivale ao número de pulsos de radiação que chegam até o sistema de detecção provenientes de outras fontes que não o radioisótopo. O cálculo do tempo morto é apresentado pela Equação (4.1) (GARDNEY; ELY-JR, 1967):

$$\tau = \frac{I_{AB} - I_A - I_B + I_G}{I_A^2 + I_B^2 - I_{AB}^2} \quad (4.1)$$

A Tabela 4.1 apresenta os resultados obtidos a partir de uma média aritmética das contagens referentes às fontes A e B separadas, das duas juntas e do *background*.

Tabela 4.1: Determinação do tempo morto.

Fonte	Contagem de pulsos [s ⁻¹]
A	4870
B	12131
AB	14730
<i>Background</i>	3

Utilizando-se o procedimento descrito determinou-se $\tau = (49,2 \pm 0,6)$ ms.

4.4 Técnica de Atenuação de Raios Gama (TARG)

A determinação cada vez mais precisa da concentração local de partículas é de fundamental importância para o estudo da sedimentação. Para o caso de suspensões muito diluídas, a concentração de sólidos pode ser medida através das técnicas de amostragem, que são comumente utilizadas em análises granulométricas (HAMACHER, 1978). A extensão de técnicas de amostragem para um estudo de suspensões com concentrações mais elevadas não conduz a resultados satisfatórios, uma vez que perturbam o sistema. O método de amostragem é lento e apresenta dificuldades na passagem de amostras concentradas através de tubos finos, provocando distúrbios no sistema.

Por tais razões procurou-se empregar uma técnica que evite tais problemas. A obtenção de distribuição de concentrações através da introdução de uma técnica não destrutiva baseada na atenuação de radiações de altas energias pode ser possível sem que a mesma interfira no processo de sedimentação. Em princípio, o método baseia-se no fato de que, quando um material é colocado no caminho de um feixe de fótons emitidos por uma fonte de raios γ ou X, a radiação é espalhada de maneira proporcional à concentração de tal material. A metodologia aplicada na Técnica de Atenuação de Raios Gama (TARG) é apresentada na sequência.

4.4.1 A equação de Lambert

A variação da intensidade de um feixe monoenergético colimado de raios γ , com energia E , que incide em um meio físico qualquer, está relacionada com a densidade e a espessura desse meio através da equação de Lambert (GARDNEY; ELY-JR, 1967),

$$I(E) = I_0 \exp(-\sigma(E) \rho y) \quad (4.2)$$

na qual I_0 e I são respectivamente, as intensidades do feixe antes e após a passagem pelo meio físico, ρ é a densidade do meio, y sua espessura e $\sigma(E)$ seu coeficiente de atenuação mássico, que quantifica a probabilidade de absorção de radiação pelo meio.

A Figura 4.9 ilustra a absorção de radiação por um meio físico qualquer. Através da Figura 4.5 observa-se que parte da radiação emitida (A) que atinge o meio físico com intensidade do feixe equivalente a I_0 pode se espalhar (B), ser absorvida pelo material ou atravessar o meio físico sem sofrer espalhamento (C).

Quando o meio físico é uma mistura, σ está relacionado com as propriedades dos

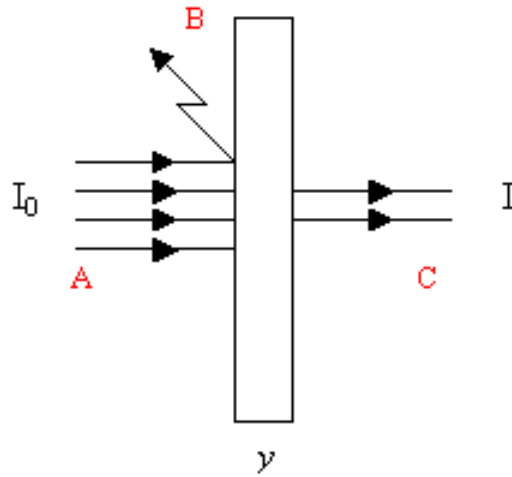


Figura 4.9: Probabilidade de absorção de radiação por um meio físico qualquer.

componentes puros através da Equação (4.3) (GARDNEY; ELY-JR, 1967),

$$\sigma(E) = \sum_{i=1}^n (\sigma_i \omega_i) \quad (4.3)$$

onde ω_i é a fração mássica do componente i e n é o número total de componentes. A fração mássica está relacionada com a fração volumétrica ε_i através da equação:

$$\omega_i = \frac{\rho_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^n (\rho_i \varepsilon_i)} = \frac{\rho_i \varepsilon_i}{\rho} \quad (4.4)$$

Da Equação (4.2) obtém-se:

$$\ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = \sigma \rho y \quad (4.5)$$

que quando combinada com a Equação (4.3) fornece:

$$\ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = \sum_{i=1}^n (\sigma_i \omega_i) \rho y \quad (4.6)$$

A combinação das Equações (4.4) e (4.6) leva a:

$$\ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = y \sum_{i=1}^n (\rho_i \varepsilon_i \sigma_i) \quad (4.7)$$

No caso particular em que o meio no qual incide a radiação é uma suspensão sólido-

líquido, tem-se:

$$\ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = y (\rho_s \sigma_s \varepsilon_s + \rho_f \sigma_f \varepsilon_f) \quad (4.8)$$

na qual os subscritos s e f representam as fases sólida e líquida, respectivamente.

Uma vez que o somatório das frações volumétricas é dado por $\varepsilon_s + \varepsilon_f = 1$, a Equação (4.8) pode ser reescrita na forma:

$$\ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = y \sigma_f \rho_f + (\sigma_s \rho_s - \sigma_f \rho_f) \varepsilon_s y \quad (4.9)$$

na qual os subscritos s e f representam as fases sólida e líquida, respectivamente.

Se for utilizado o estado de referência como sendo a água pura, pode-se reescrever a equação anterior como:

$$\ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = (\sigma_s \rho_s - \sigma_l \rho_l) \varepsilon_s y \quad (4.10)$$

A Equação (4.10) mostra que o logaritmo da atenuação de um feixe monoenergético de raios γ que atravessa um meio físico contendo uma suspensão sólido-líquido é uma função linear da concentração volumétrica dos sólidos nela contidos, ou seja,

$$\ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = B \varepsilon_s \quad (4.11)$$

Por aplicação da Equação (4.11) são realizadas calibrações para o sistema experimental a fim de se relacionar uma dada atenuação à concentração de sólidos na qual incide um feixe de raios γ . A calibração é feita medindo-se as atenuações provocadas por diversas suspensões com concentrações conhecidas e efetuando-se uma regressão linear para estimar o parâmetro B . O procedimento será apresentado com detalhes na seção 4.6.

4.4.2 Faixa de máxima sensibilidade da TARG aplicada à seleção do radioisótopo

Gardney e Ely-Jr (1967) citados por Damasceno (1992) apresentaram um estudo para a determinação da faixa de máxima sensibilidade da técnica de atenuação de raios γ .

A seleção correta do radioisótopo a ser utilizado em experimentos que envolvam a técnica de atenuação de raios gama baseia-se no fato da fonte radioativa possibilitar uma precisão máxima (ou desvio padrão mínimo) nas medidas da densidade superficial $X = \rho y$, sendo y é a espessura do meio físico atenuador.

A equação de Lambert (Eq. (4.2)) pode ser reescrita em termos de taxas de contagens,

$$R = R_0 \exp(-\sigma X) \quad (4.12)$$

onde R é a contagem corrigida dos pulsos que passam pelo meio físico e R_0 é a contagem corrigida dos pulsos que passam pelo meio físico contendo apenas água, sendo a contagem corrigida dada por:

$$R = \frac{I}{(1 - \tau I)} \quad (4.13)$$

na qual I é o número de contagens do sistema de detecção de radiação e τ o tempo morto, ou tempo de resposta do sistema de detecção de radiação.

A Equação (4.12) pode ser reescrita como:

$$X = -\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) \quad (4.14)$$

sendo X é a densidade superficial. Os desvios nas medidas de $X(\delta_X)$ e de $R(\delta_R)$ relacionam-se através da expressão:

$$\delta_X = \left| \frac{\partial X}{\partial R} \right| \delta_R \quad (4.15)$$

A derivada de X em relação a R pode ser obtida diretamente da Equação (4.12):

$$\frac{\partial X}{\partial R} = -\frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) \right] \quad (4.16)$$

ou,

$$\frac{\partial X}{\partial R} = -\frac{1}{\sigma R} \quad (4.17)$$

Substituindo-se a Equação (4.17) na Equação (4.15), tem-se:

$$\delta_X = \frac{\delta_R}{\sigma R} \quad (4.18)$$

O erro associado às taxas de contagens pode ser devido à natureza estatística das emissões ou a erros instrumentais. No primeiro caso, sendo a contagem efetuada através de um contador de pulsos, por exemplo, pode-se mostrar, segundo Gardney e Ely-Jr (1967), que

$$\delta_R = \sqrt{\frac{R}{t}} \quad (4.19)$$

na qual t é o tempo de contagem.

Substituindo-se este resultado na Equação (4.18) obtém-se,

$$\delta_X = \frac{1}{\sigma\sqrt{Rt}} \quad (4.20)$$

que por sua vez, quando combinado com a Equação (4.12), fornece o erro na determinação da densidade superficial:

$$\delta_X = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\exp(\sigma X)}{R_0 t}} \quad (4.21)$$

Para obter o ponto de máxima sensibilidade da técnica de atenuação de raios é necessário determinar o ponto em que δ_X é mínimo. Diferenciando δ_X em relação a σ , obtém-se:

$$\frac{\partial \delta_X}{\partial \sigma} = \sqrt{\frac{\exp(\sigma X)}{R_0 t}} \left(\frac{X}{2\sigma} - \frac{1}{\sigma^2} \right) \quad (4.22)$$

Igualando-se a Equação (4.22) a zero encontra-se o valor que representa um ponto de mínimo ou de máximo, $(\sigma X)=2$.

Para classificar a natureza do ponto, deve-se obter a derivada segunda de δ_X em relação a σ no ponto $\sigma X=2$:

$$\frac{\partial^2 \delta_X}{\partial \sigma^2} = \sqrt{\frac{\exp(2)}{R_0 t}} \left(\frac{X^3}{8} \right) \quad (4.23)$$

e uma vez que

$$\frac{\partial \delta_X}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial^2 \delta_X}{\partial \sigma^2} > 0 \quad (4.24)$$

conclui-se que para $(\sigma X) = 2$, ocorre um ponto de mínimo no erro associado a σX , portanto, há precisão máxima nas contagens.

No caso de serem predominantes os erros instrumentais e, considerando-se que estes independem do coeficiente de atenuação, pode-se escrever,

$$\delta(X) = \frac{\delta(R)}{\sigma R_0 \exp(-\sigma X)} \quad (4.25)$$

Diferenciando a equação anterior em relação a σ e, igualando-se o resultado a zero obtém-se $(\sigma X)=1$, que representa um mínimo no desvio, uma vez que $\frac{\partial^2 \delta_X}{\partial \sigma^2} > 0$ no intervalo de interesse.

Pode-se desta forma selecionar um radioisótopo a ser utilizado em experimentos que se baseiam na aplicação da técnica de atenuação de raios gama levando-se em consideração

as seguintes informações:

- Se os erros estatísticos predominam sobre os erros instrumentais então $(\sigma X)=2$;
- Se os erros instrumentais predominam sobre os erros estatísticos então $(\sigma X)=1$.

4.5 Determinação das condições de referência para os ensaios em proveta

O primeiro passo para a aquisição de dados através da técnica de atenuação de raios gama é definir uma condição de referência através da medida da quantidade de pulsos na ausência de sólidos. Tal referência é denominada branco da proveta (R_0) e corresponde às contagens de pulsos corrigidas com o tempo de resolução do sistema que atingem o detector quando há apenas o tubo de ensaios contendo água destilada.

Segundo Ruiz (2000) ao se realizar experimentos em posições diferentes ao longo da proveta contendo apenas água, os ensaios podem conduzir a resultados diferentes caso a espessura do tubo não seja uniforme por todo o seu comprimento. Para tanto, tornar-se-ia necessária a determinação de diversas condições de referência do branco da proveta (R_0), uma para cada posição previamente definida ao longo do tubo. Os valores encontrados por Ruiz (2000) apresentavam variações de até 7% entre diferentes posições ao longo do recipiente.

Para a determinação da condição de referência para o recipiente de testes A, mede-se a quantidade de pulsos que atingem o detector em 61 posições do recipiente, entre 0 e 30 cm acima da base, em intervalos igualmente espaçados de 0,5 cm. Para cada posição faz-se a contagem de pulsos num intervalo de 5 s por 30 vezes, calculando-se a média e o desvio padrão em cada ponto.

Para as condições de referência do branco da proveta para o recipiente de testes B, faz-se medidas das contagens de pulsos para 50 posições igualmente espaçadas de 0,5 cm ao longo do tubo de vidro, percorrendo a coluna até a posição de 25 cm acima de sua base. Para cada posição realiza-se 30 medidas de contagens de pulsos que atravessavam o meio contendo apenas água destilada. Cada ponto é medido por um intervalo de 5s e a condição de referência local é determinada como sendo a média amostral do conjunto de pontos para aquela posição.

Os resultados indicaram que a contagem de pulsos corrigida para a condição de referência variava para cada posição ao longo de ambos os recipientes de testes A e B, uma vez

constatado através de testes de hipóteses estatísticos que a não uniformidade dos mesmos conduziu a valores de R_0 com diferenças significativas ao longo de seus comprimentos. Os testes estatísticos são apresentados e discutidos no Capítulo 5.

4.6 Levantamento da curva de calibração para as suspensões estudadas

A curva de calibração relaciona a concentração volumétrica dos sólidos na suspensão com a contagem de pulsos de radiação antes e após a passagem pelo meio físico. A representação da curva de calibração foi dada na seção 4.7.1 através da Equação (4.11). A expressão corrigida pelo tempo de resolução do sistema pode ser escrita na forma:

$$\ln \left(\frac{R_0}{R} \right) = B\varepsilon_s \quad (4.26)$$

onde R_0 é a contagem do número de pulsos de radiação que passam pela proveta contendo apenas água (denominado ensaio em branco ou branco da proveta) corrigida pelo tempo morto e distinta para cada posição ao longo dos recipientes de ensaios, R é a contagem corrigida do número de pulsos que passam pelo meio físico, B é uma constante e ε_s a concentração volumétrica de sólidos.

A curva de calibração é a ferramenta principal usada no monitoramento indireto da concentração local de sólidos baseando-se apenas na emissão e atenuação de pulsos. Para se calibrar o sistema utilizando o recipiente de testes A, transfere-se 500 mL de água destilada ao interior do tubo de vidro e, uma vez conhecida a densidade do material pulverulento, adiciona-se a primeira amostra de sólido tal que produza uma concentração volumétrica de sólidos de 1% em volume. Pesa-se outras 14 amostras de sólido tal que a massa de cada uma delas proporcione uma concentração adicional na suspensão de aproximadamente 0,5% em volume. A suspensão é homogeneizada e o número de pulsos que alcançam o detector (R) é medido durante o intervalo de tempo de 5 s. A posição de 10 cm acima da base da coluna é arbitrada para as medições por sofrer menores efeitos das extremidades da suspensão. Tal procedimento é repetido por mais quatro vezes a fim de se obter uma média das medidas por segundo. Ao término de quatro leituras adiciona-se outra amostra de sólido repetindo-se o procedimento descrito até que se seja adicionada a última amostra, a qual produz uma concentração inicial de 8% em volume.

Os valores das contagens de pulsos são corrigidos com o tempo morto de acordo com a Equação (4.13). A partir dos resultados obtidos, procede-se ao tratamento estatístico e posteriormente à regressão linear de $\ln(R_0/R)$ versus concentração volumétrica (ε_s), que

por sua vez fornece o valor da constante de proporcionalidade B .

Os sólidos utilizados para o desenvolvimento do trabalho experimental são: caulim ($\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_5(\text{OH})_4$), carbonato de cálcio (CaCO_3) extraleve comercial, ambos adquiridos em fardos de 50 kg em empresas da região e microesferas de vidro (SiO_2 -72,5%, Na_2O -13,7%, CaO -9,8%) comercializadas pela Potters Industrial Ltda.

A Figura 4.10 apresenta as curvas de calibração para as suspensões aquosas de caulim, carbonato de cálcio e microesferas de vidro.

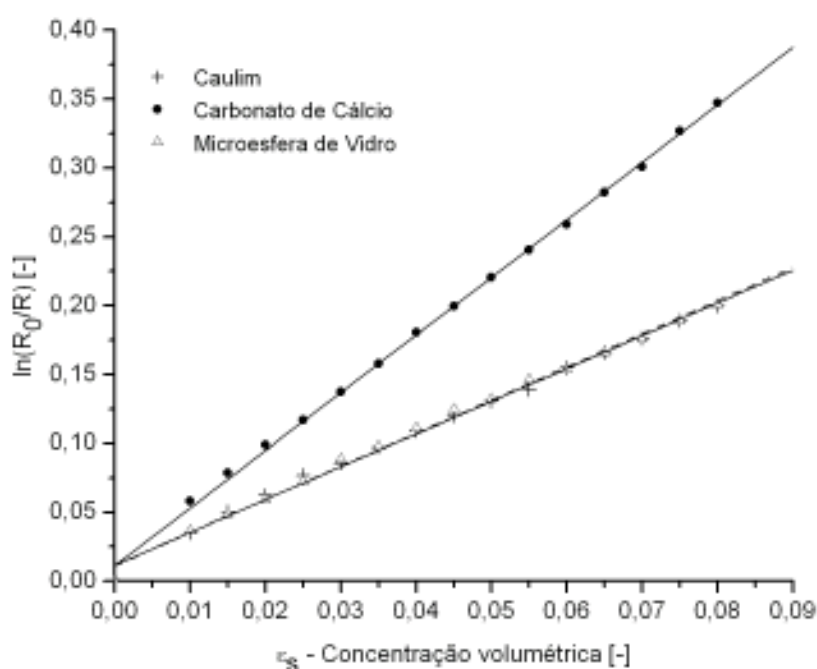


Figura 4.10: Curvas de calibração para suspensões aquosas dos materiais sólidos.

De posse das medidas de atenuação determinadas para cada suspensão aplicando-se o procedimento experimental descrito, calculou-se o valor da constante B por meio de técnicas de regressões lineares. Os valores para a constante B determinados foram: caulim ($2,38 \pm 0,04$), carbonato de cálcio ($4,18 \pm 0,04$) e microesferas de vidro ($2,40 \pm 0,04$).

4.7 Propriedades físicas dos sólidos

Para a realização dos experimentos deu-se preferência ao uso de materiais sólidos comumente encontrados em indústrias da região, de fácil disponibilidade e baixo custo de aquisição, tais como caulim e carbonato de cálcio.

O caulim, $\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_5(\text{OH})_4$, é um minério argiloso fino, de coloração levemente amarelada, cujo principal componente é a caulinita. Apesar de ser encontrado em abundância na natureza, suas reservas comerciais se restringem ao Brasil, ao Reino Unido e aos Estados Unidos. As principais aplicações do caulim são como agentes de enchimento no preparo de papel e na composição das pastas cerâmicas. Em menor escala, o caulim é usado na fabricação de materiais refratários, plásticos, borrachas, tintas, adesivos, cimentos, inseticidas, pesticidas, produtos alimentares e farmacêuticos, catalisadores, absorventes, dentifrícios, clarificantes, fertilizantes, gesso, auxiliares de filtração, cosméticos, produtos químicos, detergentes e abrasivos, além de cargas e enchimentos para diversas finalidades. O caulim utilizado para o desenvolvimento deste trabalho foi adquirido junto a BEMIL - Beneficiadora de Minérios S/A de Contagem (MG).

Outro sólido utilizado nos testes experimentais do trabalho foi o carbonato de cálcio, CaCO_3 . O sólido é um composto cristalino de coloração branca sendo o principal componente de rochas como a pedra calcária, mármore dentre outras formas. Tem características alcalinas e possui pH alto quando em suspensão aquosa. O sólido é resultado da reação do óxido de cálcio (cal virgem) com dióxido de carbono. Suas principais aplicações são produtos manufaturados incluindo o giz, remédios, produtos de tratamentos dentários, além de ser utilizado na agricultura para correção de acidez do solo. O carbonato de cálcio utilizado neste trabalho foi adquirido em um fardo de 50 kg de material comercial extraleve.

Um material sólido fino e de alta esfericidade, microesferas de vidro, fabricado pela Potters Industrial Ltda (Potters Spherglass®) é utilizado em testes de comportamentos dinâmicos de sistemas sólido-líquidos por suas propriedades físicas particulares.

As microesferas de vidro (SiO_2 -72,5%, Na_2O -13,7%, CaO -9,8%) são comercializadas como reforçantes dos sistemas de resinas termoplásticas (polipropileno, policarbonato, nylon, PVC, dentre outros) e termofixas (poliéster insaturado, epóxi, melanina, dentre outros).

4.7.1 Determinação das densidades dos sólidos

Determinação da densidade do carbonato de cálcio

Para a determinação da densidade do carbonato de cálcio utilizou-se o método de picnometria a quente, sendo que valor médio determinado foi $(2,69 \pm 0,05) \text{ g/cm}^3$.

Determinação da densidade do caulim

A densidade do caulim ($\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_5(\text{OH})_4$) foi determinada utilizando-se um picnômetro a gás Hélio, modelo AccuPyc 1330 - Micromeritics, com apoio técnico da Universidade Federal de São Carlos, São Carlos-SP. O valor médio da densidade do caulim é de $(2,577 \pm 0,001)$ g/cm³ determinado a partir de cinco medidas distintas de uma mesma amostra do sólido.

Especificações de propriedades físicas das microesferas de vidro

Para condução dos experimentos com material sólido constituído por microesferas de vidro Potters Spherglass® foram utilizadas propriedades físicas fornecidas pelo fabricante Potters Industrial Ltda.

A densidade das microesferas de vidro fornecida pelo fabricante é $(2,50 \pm 0,01)$ g/cm³. O índice de refração é equivalente a 1,51 e possuem esfericidade mínima de 80%.

A composição típica do sólido é apresentada na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Composição das microesferas de vidro.

Composição	%
SiO ₂	72,5
Na ₂ O	13,7
CaO	9,8
MgO	3,3
Al ₂ O ₃	0,4
FeO/FeO ₃	0,2
K ₂ O	0,1

O produto comercializado tipo AH adquirido junto ao fabricante, apresenta ainda as especificações gerais: peneira ASTM 170-325 e abertura (90-40) mm. A análise de distribuição de tamanhos das partículas será apresentada em detalhes na seção seguinte.

Determinação das distribuições de tamanhos de partículas

Para análise de tamanhos de partículas de amostras de sólidos utilizados no trabalho experimental aplicou-se a técnica da difração laser através do uso do granulômetro Malvern Mastersizer® MicroPlus MAF 5001.

A técnica se baseia na medição do tamanho da partícula quando a mesma é compa-

rada a uma esfera correspondente de mesmo volume (RODRIGUES, 2001). O equipamento utilizado fornece a distribuição de partículas por tamanhos através da difração laser de uma fonte de luz de comprimento de onda fixo. O feixe de laser depara-se com a partícula na célula do equipamento e os ângulos dos raios difratados são medidos por detectores. Os raios difratados espalham-se de maneira proporcional ao tamanho das partículas, sendo que partículas grandes espalham o feixe sob pequenos ângulos enquanto partículas pequenas espalham o feixe sob altos ângulos.

Para realizar uma análise utilizando tal técnica, toma-se uma amostra de sólido de aproximadamente duas gramas, coloca-se em um béquer de 600 mL contendo água deionizada. Adiciona-se ao béquer cinco gotas do defloculante poliacrilato de sódio seguido de 1 minuto sob agitação e ultra-som, a fim de separar partículas eventualmente aglomeradas. A suspensão é analisada pelo equipamento que fornece a distribuição granulométrica da amostra. Cabe ressaltar que o índice de refração do sólido a ser analisado deve ser conhecido e que caso o índice utilizado não seja exato, os resultados conduzirão a uma falsa análise.

A distribuição é caracterizada por uma fração em massa de partículas Y com diâmetro inferior a d , característico de cada tipo de análise. Para a representação das distribuições granulométricas dos sólidos utilizou-se o modelo de parâmetros ajustáveis de Rosin-Rammler-Bennet (RRB) apresentado na Equação (4.3), sendo d' e n determinados por técnicas de regressão não-linear:

$$Y = 1 - \exp \left(- \left(\frac{d}{d'} \right)^n \right) \quad (4.27)$$

A Figura 4.11 apresenta os resultados das análises granulométricas dos sólidos caulim, carbonato de cálcio e microesferas de vidro, respectivamente, obtidos através da técnica de difração laser pelo granulômetro Malvern Mastersizer.

Os parâmetros ajustáveis do modelo RRB das representações de distribuições de tamanhos de partículas do caulim, carbonato de cálcio e microesferas de vidro são apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Parâmetros do modelo RRB.

Sólido	Parâmetros do Modelo		r^2
	d'	n	
Caulim	$23,43 \pm 0,07$	$1,146 \pm 0,05$	0,999
Carbonato de cálcio	$3,83 \pm 0,02$	$1,70 \pm 0,02$	0,999
Microesferas de vidro	$41,7 \pm 0,5$	$3,4 \pm 0,1$	0,993

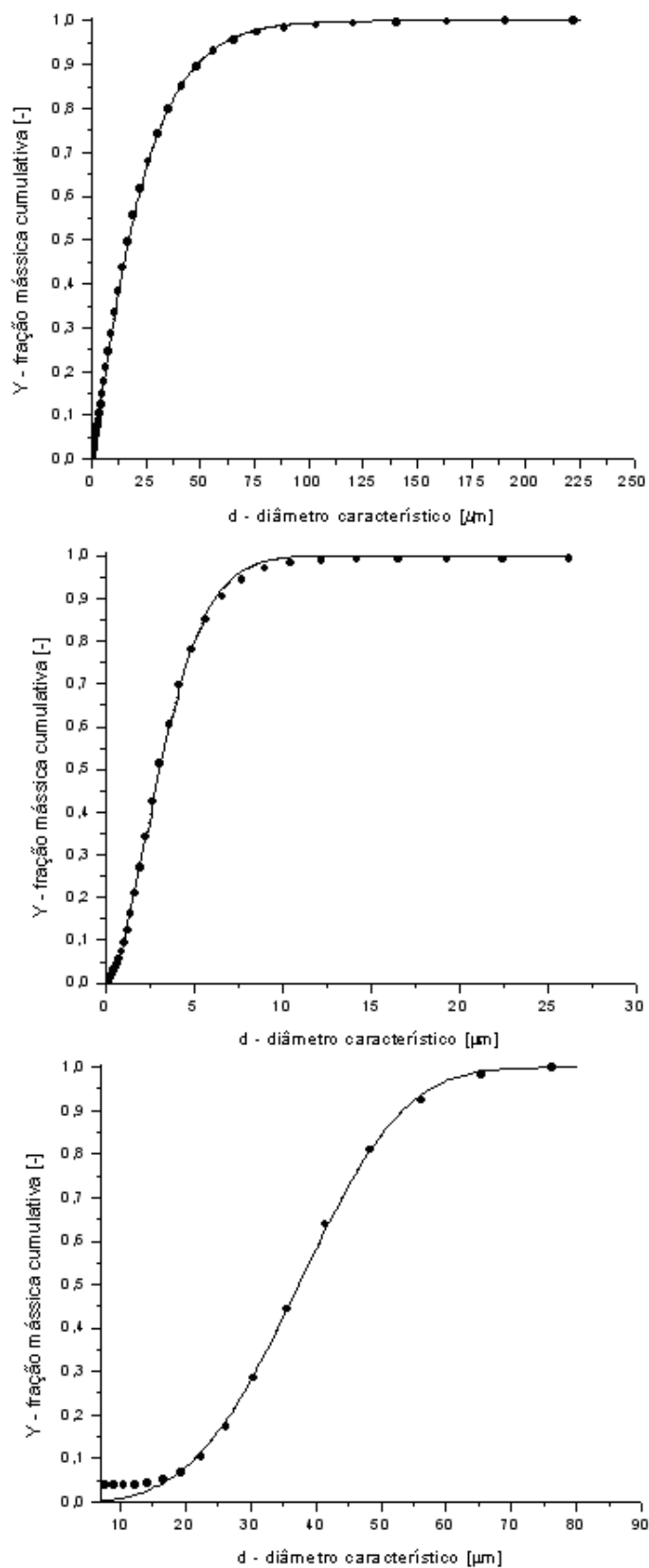


Figura 4.11: Distribuição de tamanhos de partículas de caulim, carbonato de cálcio e microesferas de vidro, respectivamente.

Os coeficientes de correlações quadráticos r^2 para os ajuste dos parâmetros d' e n , apresentados na Tabela 4.3, indicam que, em média, 99% dos dados foram justificados pelos modelos.

4.8 Determinação das densidades superficiais dos sólidos (σX)

O conhecimento do cálculo teórico do coeficiente de atenuação mássico do material é fundamental para a correta utilização da fonte de raios γ (STORM; ISRAEL, 1970). Estes pesquisadores propuseram que, para uma substância composta por n elementos químicos, o coeficiente de atenuação mássico (σ) é dado pela Equação (4.28),

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \omega_i f_i \sigma_{oi} \quad (4.28)$$

na qual ω_i é a fração mássica do elemento i na molécula da substância, f_i e σ_{oi} são, respectivamente, um fator característico e coeficiente de atenuação mássico de cada elemento.

A Tabela 4.4 apresenta o valor teórico para os coeficientes de atenuação mássicos dos sólidos estudados (caulim, carbonato de cálcio e microesferas de vidro), além do coeficiente de atenuação da água, utilizada no preparo das suspensões. Os valores são apresentados para radioisótopos com energias de 60 keV. Os valores de f_i e σ_{oi} foram obtidos em tabelas de dados nucleares apresentadas por Storm e Israel (1970).

Definido-se a densidade superficial da suspensão através da expressão:

$$(\sigma X)_{susp} = \sigma \rho y \quad (4.29)$$

e desenvolvendo-se a Equação (4.28) para o caso da separação binária sólido-líquido, pode-se escrever:

$$(\sigma X)_{susp} = \rho y (w_s \sigma_s + w_f \sigma_f) \quad (4.30)$$

Sendo a densidade da mistura dada por:

$$\rho = \frac{m_{susp}}{V_{susp}} = \frac{m_s + m_f}{V_s + V_f} \quad (4.31)$$

e considerando-se $m_i = \rho_i V_i$, com i representando as fases sólida (s) e fluida (f), e sendo a soma das frações volumétricas dada pela relação $\varepsilon_s + \varepsilon_f = 1$, pode-se reescrever a Equação

Tabela 4.4: Coeficientes de atenuação mássicos para raios γ com energia de 60 keV.

Substância	Elemento	Massa Atômica	ω_i	f_i (átomo $\text{cm}^2/\text{barn.g}$)	σ_{oi} (barn/átomo)	$\omega_i f_i \sigma_{oi}$ (cm^2/g)	σ (cm^2/g)
Caulim $\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_5(\text{OH})_4$	Al	26,98	0,2091	0,02232	12,4	0,0579	0,2385
	Si	28,09	0,2177	0,02144	14,9	0,0695	
	O	15,99	0,5576	0,03764	5,05	0,1060	
	H	1,008	0,0156	0,59750	0,545	0,0051	
Carbonato de Cálcio CaCO_3	Ca	40,08	0,4006	0,01503	43,3	0,2607	0,3729
	C	12,01	0,1200	0,05014	3,5	0,0211	
	O	15,99	0,4794	0,03764	5,05	0,0911	
Microesferas SiO_2 (72,5%) Na_2O (13,7%) CaO (9,8%) MgO (3,3%) Al_2O_3 (0,4%) FeO (0,2%) K_2O (0,1%)	Si	28,09	0,3422	0,02144	14,9	0,1093	0,2721
	Na	22,99	0,1059	0,02620	8,62	0,0239	
	Ca	40,08	0,0660	0,01503	43,3	0,0430	
	Mg	24,31	0,0135	0,02477	10,3	0,0034	
	Al	26,98	0,0036	0,02232	12,4	0,0010	
	Fe	55,85	0,0019	0,01078	111	0,0022	
	K	39,09	0,0013	0,01540	36,7	0,0007	
	O	15,99	0,4656	0,03764	5,05	0,0885	
Água H_2O	H	1,008	0,1120	0,59750	0,545	0,0365	0,2053
	O	15,99	0,8880	0,03764	5,05	0,1688	

(4.31) na forma:

$$\rho = \rho_f + (\rho_s - \rho_f) \varepsilon_s \quad (4.32)$$

A fração mássica do constituinte i está relacionada com a fração volumétrica através da seguinte expressão:

$$w_i = \frac{m_i}{m_{susp}} = \frac{\rho_i \varepsilon_i}{\rho} \quad (4.33)$$

que quando relacionada com a Equação (4.32) fornece:

$$w_s = \frac{\rho_s \varepsilon_s}{\rho_f + (\rho_s - \rho_f) \varepsilon_s} \quad (4.34)$$

para o cálculo da fração mássica do constituinte sólido e,

$$w_f = \frac{\rho_f \varepsilon_f}{\rho_f + (\rho_s - \rho_f) \varepsilon_s} \quad (4.35)$$

para o cálculo da fração mássica do constituinte líquido.

Relacionando-se as Equações (4.30), (4.32), (4.34) e (4.35) obtém-se uma expressão que relaciona a densidade superficial da suspensão $(\sigma X)_{susp}$ com a concentração volumétrica de sólidos ε_s :

$$(\sigma X)_{susp} = y [(\rho_s \sigma_s - \rho_f \sigma_f) \varepsilon_s + \rho_f \sigma_f] \quad (4.36)$$

A Tabela 4.5 apresenta os valores teóricos da densidade superficial $(\sigma X)_{susp}$ para suspensões aquosa de caulim, carbonato de cálcio ou microesferas de vidro para diversas concentrações volumétricas iniciais de sólidos. Para o desenvolvimento dos cálculos, pressupõe-se que as suspensões aquosas dos materiais interagem com radiação gama monoenergética de 60 keV, que é a energia aproximada de emissão do Am^{241} .

Tabela 4.5: Valores teóricos de σX para suspensões aquosas em diversas concentrações volumétricas e $y=6,2$ cm.

ε_s [%]	$(\sigma X)_{susp}$ [-]		
	Caulim	Carbonato de cálcio	Microesferas de vidro
1	1,294	1,318	1,298
2	1,319	1,367	1,327
3	1,344	1,417	1,357
5	1,395	1,516	1,416
7	1,446	1,615	1,475
10	1,522	1,763	1,563
12	1,573	1,862	1,622

Conforme apresentado na seção 4.4.2, a faixa ótima para se obter uma maior precisão dos resultados é aquela na qual $(\sigma X)_{susp}$ está compreendida entre 1 e 2. Uma vez que $(\sigma X)_{susp}$ apresenta valores próximos de 1, os erros instrumentais são muito maiores que os erros estatísticos, e em casos de valores de $(\sigma X)_{susp}$ próximos de 2, a predominância de erros estatísticos é verificada. Por tal motivo pode-se esperar menores erros estatísticos e conseqüentemente bons resultados utilizando-se a técnica de raios γ para suspensões aquosas avaliadas, principalmente para altas concentrações volumétricas.

A Figura 4.12 ilustra as densidades superficiais de suspensões aquosas de caulim, carbonato de cálcio e microesferas de vidro, $(\sigma X)_{susp}$, como funções das concentrações volumétricas dos sólidos.

4.9 Análise do erro associado às medidas de concentração de sólidos

4.9.1 Determinação da representatividade ótima da concentração local baseada na média amostral da contagem de pulsos

A medida de concentração média de sólidos torna-se possível a partir do levantamento da curva de calibração para o sólido em suspensão, além do conhecimento da relação de

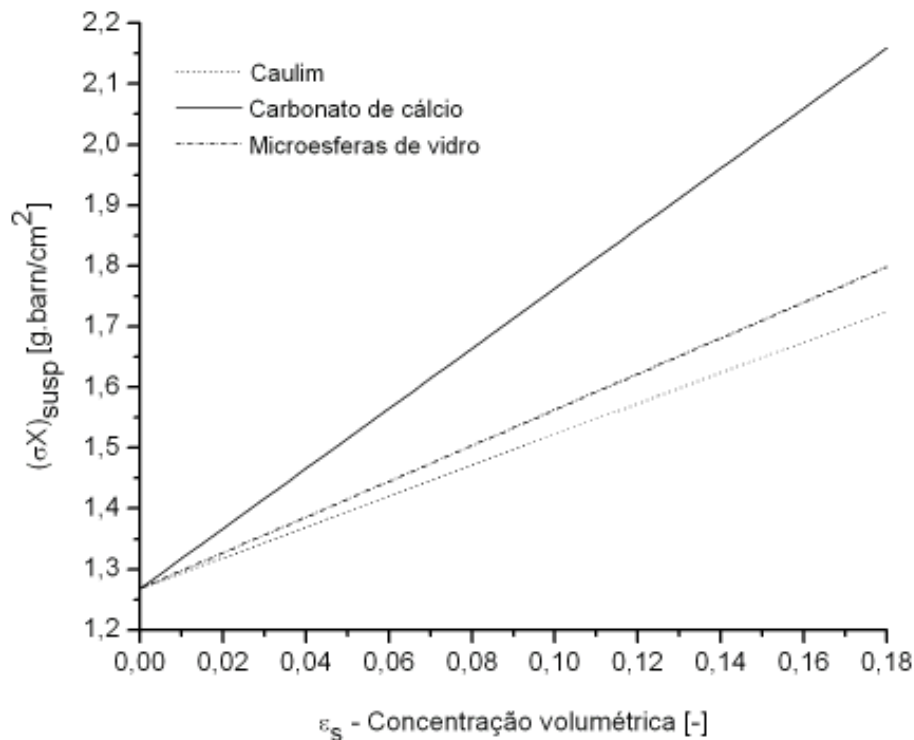


Figura 4.12: Densidades superficiais de suspensões aquosas como funções da concentração.

pulsos de radiação emitidos pela fonte e atenuados pelo meio físico. Entretanto, sabe-se através de conceitos estatísticos, que uma média amostral nem sempre é suficiente para representar a grandeza medida e que, quando um determinado experimento é repetido sob as mesmas condições operacionais os resultados obtidos não são idênticos.

Arouca (2003) propôs uma sistemática experimental fundamentada no Teorema do Limite Central (Anexo A), que tem como objetivo quantificar a variabilidade dos dados de tal forma que se obtenha um número ótimo de pontos aleatórios que minimizem os erros estatísticos das medidas de contagens de pulsos para cálculo da concentração de sólidos. De acordo com tal teorema, sob certas condições na experimentação, a distribuição de erros tende para a normalidade quando o número de medidas é grande.

Para tanto, a aquisição de dados de contagem de pulsos de radiação que atingem o detector é realizada quando nenhum meio atenuante está disposto entre a fonte e o sistema de detecção. Cada ponto coletado de contagem de pulsos que atingem o detector é medido por um período médio de 10 s. Mede-se dois pontos de contagens de pulsos e calcula-se a média aritmética dos mesmos. Em seguida coleta-se outro ponto e procede-se a média dos três primeiros. Tal procedimento é repetido por mais 97 vezes sendo que para cada ponto adicional calcula-se a média amostral e o desvio padrão dos dados. Admite-se como hipótese que um conjunto de 100 pontos de contagens de pulsos corresponderia a

uma amostra grande o suficiente tal que sua medida de centralidade equivale ao valor mais provável da concentração local real. De posse dos resultados experimentais, avalia-se o comportamento gráfico da razão desvio padrão amostral pelo desvio padrão dos 100 pontos *versus* número de pontos coletados. Caso o número de pontos arbitrado para a amostra seja grande o suficiente para representar uma população de dados, a média amostral segue uma distribuição normal e aleatória em torno do valor no qual o desvio é mínimo e igual ao desvio padrão da amostra.

A grande vantagem de se utilizar tal procedimento está na representatividade dos dados que se torna mais coerente através da minimização do erro associado às medidas de concentração de sólidos e conseqüentemente no ganho da reprodutibilidade dos ensaios laboratoriais, que por sua vez se tornam mais precisos.

4.9.2 Análise do erro associado ao tempo de contagem de pulsos

De posse do número ótimo de pontos de uma mesma medida repetida de contagem de pulsos tal que produza a melhor representação da concentração local baseada em sua média amostral, torna-se importante analisar o erro associado ao tempo de duração da medição.

Para tanto, mede-se a contagem de pulsos na ausência de um meio atenuador entre a fonte radioativa e o sistema de detecção por n vezes de uma mesma medida, sendo n o número de pontos ótimo necessários para melhor representatividade da média amostral de contagens de pulsos com mínimos desvios, cujo procedimento é descrito na seção 4.9.1. Cada ponto experimental é medido num intervalo de tempo de 3s por n vezes para o conhecimento da média amostral e desvio padrão. Repete-se o procedimento para intervalos de tempos de 5, 10, 12, 15, 20, 30 e 50 segundos. Procede-se para análise gráfica da estatística descritiva da representatividade de uma mesma medida em diversos tempos de contagens. O tempo ideal avaliado é o que possui o menor intervalo de duração associado com mínimos desvios.

4.10 Monitoramento da concentração volumétrica de sólidos em função da posição e do tempo $\varepsilon_s(z, t)$ em testes de sedimentação em batelada

O conhecimento das distribuições de concentração de sólidos em testes dinâmicos de sedimentação em batelada é fundamental para o dimensionamento de equipamentos que

promovem a separação sólido-líquido. Para tanto, utiliza-se a técnica de atenuação de raios gama no monitoramento de concentrações como função da posição e do tempo. À medida que o feixe de radiação atravessa o meio físico em diversas posições verticais do recipiente é possível se obter as curvas características, ou curvas de equi-concentração, através da atenuação das radiações, não necessitando de amostragem por alíquotas da suspensão.

Os experimentos são realizados utilizando-se o recipiente de testes A, descrito na seção 4.1. Comportamentos dinâmicos de suspensões aquosas dos sólidos em estudo são avaliados a partir de concentrações iniciais de 3% em volume. O volume de líquido utilizado é 500 mL e as medições são realizadas a partir da base do recipiente ($z=0$ cm) em direção ao topo da coluna de suspensão ($z=22$ cm acima da base), em intervalos espaçados de 1 cm.

Para a preparação e realização dos testes de monitoramento da concentração local, pesa-se o material pulverulento de acordo com a concentração volumétrica desejada no ensaio. A proveta é posicionada na altura em que se desejava realizar a medida. Lacra-se o orifício da blindagem da fonte com chumbo para a medida do *background*, que é a radiação que alcança o sistema de detecção proveniente de outras fontes que não o amerício. Com o uso de um balão volumétrico de 500 mL a água é transferida para o interior do recipiente de testes e em seguida se adiciona cuidadosamente o sólido pulverulento a fim de evitar perda de massa. A suspensão é homogeneizada vigorosamente por cerca de um minuto e logo em seguida dá-se partida no sistema de medição.

De posse da condição de referência de branco da proveta na posição na qual a medida era realizada e fazendo-se uso da equação obtida pela curva de calibração para o sólido, determina-se a concentração volumétrica de sólidos local com o decorrer do tempo, corrigida pelo tempo de resolução do sistema. O experimento é encerrado após a passagem da interface descendente no ponto em que são feitas as medições, momento no qual a concentração de sólidos atinge valores próximos de zero. Para o caso das posições próximas a base da proveta, os experimentos são encerrados quando a concentração de sólidos alcança valores elevados que parecem não variar mais com o tempo. Feito isso, altera-se a altura do sistema fonte-detector repetindo os procedimentos descritos anteriormente para cada altura desejada, até que as diversas posições ao longo da coluna de sedimentação tenham sido monitoradas com o tempo.

Com tal procedimento é possível obter a variação da concentração volumétrica de sólidos com o tempo para cada posição do recipiente de testes, $\varepsilon_s = \varepsilon_s(z, t)$.

O mapeamento de concentrações em teste de sedimentação em batelada é importante para o estudo de sistemas de separação sólido-líquidos. Réplicas para diferentes sólidos

serão avaliadas no decorrer do desenvolvimento da tese e serão utilizadas na validação de modelos matemáticos desenvolvidos para o fenômeno.

4.11 Monitoramento da concentração volumétrica de sólidos em função da posição $\varepsilon_s(z)$ em testes de sedimentação em batelada

4.11.1 Obtenção das distribuições de concentrações em sedimentos

Conhecida a curva de calibração para o sistema experimental é possível determinar a concentração local de sólidos na região exata do sedimento que atenua parte do feixe colimado de raios γ que alcança o detector. Para a obtenção das distribuições de concentrações em sedimentos, testes de sedimentação em batelada devem ser realizados numa elevada faixa de concentrações iniciais de forma a se obter sedimentos com grande área efetiva para varredura da radiação.

Para tanto, pesa-se a massa de material tal que se produza uma suspensão aquosa com concentração volumétrica previamente definida. Para os ensaios experimentais de monitoramento de $\varepsilon_s(z)$ utiliza-se o recipiente de testes B descrito na seção 4.1. A saída do líquido é bloqueada pela válvula de controle de vazão na base do sistema. Transfere-se um litro de água destilada para o recipiente de ensaios a partir de um balão volumétrico. O sólido pesado é então despejado cuidadosamente sobre o líquido. A suspensão formada é homogeneizada por três vezes consecutivas de forma a minimizar erros de agitação e garantir a formação de uma suspensão uniforme. Após o procedimento de homogeneização coloca-se cuidadosamente a tampa de vedação do sistema. O sistema é deixado em repouso por um período mínimo de 48 horas para que o processo de decantação seja completado. O tempo de repouso é função da concentração volumétrica e é arbitrado no momento em que se observa a estabilidade da interface descendente em função da posição e do tempo. Depois de alcançar tal condição fixa-se a voltagem em 900 V, posiciona-se a fonte de raios γ na altura desejada a partir da base da proveta e mede-se 30 vezes a contagem de pulsos para cada posição, a fim de se conhecer a média e o desvio padrão. A região do sedimento é percorrida pelo feixe ao longo de seu comprimento, começando-se em 1 cm acima da base da proveta e avançando-se de 1 em 1 cm até que fosse constatada uma variação igual ou superior a 1% de uma posição para a outra. A partir desta posição mede-se de 0,5 em 0,5 cm até o topo do sedimento.

4.12 Equações constitutivas para o espessamento e filtração

4.12.1 Obtenção das equações constitutivas para tensão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso utilizando a metodologia desenvolvida por Damasceno (1992)

De posse das distribuições de concentrações $\varepsilon_s(z)$ obtidas em sedimentos formados a partir de testes de sedimentação em batelada pode-se determinar as funções da pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso, supostas como funções exclusivas da concentração local de sólidos.

Damasceno (1992) desenvolveu uma metodologia que pode ser empregada para determinar as relações da pressão nos sólidos e permeabilidade com a porosidade do meio a partir da consideração das seguintes hipóteses:

- O escoamento através do meio poroso é lento e unidimensional em regime permanente;
- A força resistiva é dada pela lei de Darcy;
- A tensão nos sólidos é função exclusiva da porosidade local;
- Os termos inerciais da equação do movimento dos sólidos são desprezíveis.

Com a adoção de tais suposições, as equações da continuidade, Equações (3.73) e (3.73), e do movimento Equação (3.75) se reduzem a:

$$\frac{d}{dz} (\varepsilon_s v_s) = 0 \quad (4.37)$$

$$\frac{d}{dz} (\varepsilon_f v_f) = 0 \quad (4.38)$$

$$\frac{dP_s}{dz} = \frac{\mu \varepsilon_f}{k(\varepsilon_f)} (v_f - v_s) + (\rho_s - \rho_f) \varepsilon_s g \quad (4.39)$$

A integração das Equações (4.37) e (4.38) leva às relações apresentadas a seguir:

$$\varepsilon_s v_s = q_s = cte \quad (4.40)$$

$$\varepsilon_f v_f = q_f = cte \quad (4.41)$$

Substituindo-se as Equações (4.40) e (4.41) na Equação (4.39) obtém-se,

$$\frac{dP_s}{dz} = \frac{\mu \varepsilon_f}{k(\varepsilon_f)} \left(\frac{q_f}{\varepsilon_f} - \frac{q_s}{\varepsilon_s} \right) + (\rho_s - \rho_f) \varepsilon_s g \quad (4.42)$$

As equações constitutivas para $P_s(\varepsilon_f)$ e $k(\varepsilon_f)$ podem ser determinadas a partir da Equação (4.42) uma vez conhecidas as velocidades superficiais de ambos os constituintes líquido e sólido e a distribuição de concentrações no sedimento (DAMASCENO, 1992).

Para o caso específico de um meio poroso estático formado pela decantação de uma suspensão no interior de um tubo vertical, não ocorrendo percolação de líquido pelo meio poroso, a Equação (4.43) permite obter a relação entre a pressão nos sólidos e a concentração local de sólidos no sedimento,

$$P_s = (\rho_s - \rho_f) g \int_0^L \varepsilon_s(z) dz \quad (4.43)$$

onde z é a distância vertical medida a partir do topo do sedimento de comprimento L . As distribuições de concentrações no sedimentos são obtidas através do procedimento experimental descrito na seção 4.11.

A partir da Equação (4.42) pode-se realizar um novo experimento no qual o líquido é filtrado, sob vazão constante, através do sedimento sustentado por uma placa porosa que por sua vez retém a passagem dos sólidos ($q_s=0$). A permeabilidade local pode ser obtida bastando apenas conhecer a nova distribuição de concentrações que se forma durante a filtração do líquido através da Equação (4.44).

$$k = \frac{\mu q_f}{\frac{dP_s}{d\varepsilon_f} \frac{d\varepsilon_f}{dz} - (\rho_s - \rho_f) \varepsilon_s g} \quad (4.44)$$

Para a nova distribuição de concentrações abre-se a válvula da mangueira abaixo da placa porosa no recipiente de testes B, de modo a permitir um escoamento lento e contínuo. A saída do líquido ocorre por gotejamento sob vazão constante graças ao efeito causado pela admissão de ar ao tubo, que por sua vez funciona como um frasco de Mariotte. A parte inferior do tubo de suprimento de ar fica mergulhada dentro do líquido clarificado, garantindo manter a pressão atmosférica naquele ponto. À medida que o líquido escoar através do sedimento, o ar adentra pelo tubo mantendo a pressão interior constante. Depois de alcançada tal condição, procede-se a novas medidas de concentração. Fixa-se a voltagem em 900 V, posiciona-se a fonte de raios γ na altura desejada a partir da base da proveta e mede-se 30 vezes a contagem de pulsos para cada posição. A região do sedimento deve ser percorrida pelo feixe ao longo de seu comprimento, começando-se em

1 cm acima da base da proveta e avançando-se de 1 em 1 cm até que seja constatada uma variação igual ou superior a 1% de uma posição para a outra. A partir desta posição mede-se de 0,5 em 0,5 cm até o topo do sedimento.

Obtidas as distribuições de concentrações em experimentos mantidos sob as condições de escoamento e não escoamento pode-se determinar as funções da pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso, supostas como funções apenas da concentração local de sólidos.

De posse dos pontos experimentais medidos aplica-se técnicas de regressão não-linear para obtenção da função $\varepsilon_s(z)$. A função referente às pressões nos sólidos é calculada efetuando-se integração da função $\varepsilon_s(z)$ obtida através dos testes não submetidos à percolação do líquido, fazendo-se uso da Equação (4.43). A função permeabilidade por sua vez é determinada através da Equação (4.44).

4.12.2 Determinação da permeabilidade do meio poroso de sistemas diluídos

A permeabilidade de um sistema sólido-líquido pode ser determinada através de diferentes técnicas, dentre as quais destaca-se a atenuação de raios γ utilizada por Damasceno (1992) e Arouca (2003), por ser uma técnica não-invasiva.

Arouca (2003) utilizou a técnica de atenuação de raios gama para estimar parâmetros de uma equação constitutiva para permeabilidade em suspensões aquosas de caulim em altas concentrações empregando a metodologia desenvolvida por Damasceno (1992). Entretanto, a permeabilidade do sistema determinada no trabalho é válida para uma elevada faixa de concentração de sólidos, 26 a 34% em volume. A metodologia desenvolvida por Damasceno (1992) para a determinação de parâmetros de equações constitutivas para a permeabilidade conduz a bons resultados para sistemas concentrados, todavia não pode ser aplicada para concentrações menores que a concentração crítica, por se tratar do monitoramento de sedimentos em testes estáticos.

Silva (2004) utilizou uma metodologia alternativa com o objetivo de determinar uma equação constitutiva válida numa faixa mais ampla, abrangendo principalmente o caso de sistemas diluídos. Tal metodologia teve como base testes de sedimentação em proveta nos quais a interface superior foi monitorada com o tempo, na região de sedimentação livre. A metodologia empregada por Silva (2004) é uma modificação da metodologia desenvolvida por Damasceno (1992) para o caso em que a pressão nos sólidos pode ser desprezada, no entanto difere-se ainda por se tratar de ensaios dinâmicos.

Em um teste de sedimentação em proveta com concentração inicial menor que a concentração crítica observa-se que nos primeiros instantes a interface superior apresenta velocidade de queda constante, como ilustra a Figura 4.13.

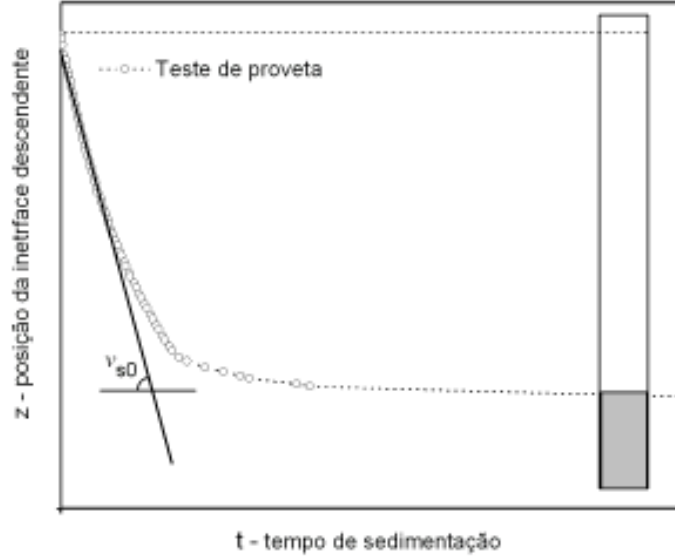


Figura 4.13: Teste de sedimentação em proveta para determinação da permeabilidade.

Tendo em vista que na região de sedimentação livre o efeito de pressão nos sólidos pode ser negligenciável ($P_s \approx 0$) e a velocidade de queda da interface superior é constante e igual a velocidade de queda dos sólidos nela contidos, a equação do movimento para o sólido, Equação (3.75), após as devidas simplificações e explicitando-se k pode ser reescrita na forma:

$$k = \frac{\mu v_s}{(\rho_s - \rho_f) \varepsilon_s g} \quad (4.45)$$

De posse da Equação (4.45) pode-se determinar permeabilidades em meios porosos formados em suspensões de baixas concentrações volumétricas iniciais (sistemas diluídos). Para tanto realizam-se testes de proveta utilizando o recipientes de testes A (descrito na seção 4.1), afixando-se uma escala graduada para o monitoramento do deslocamento da interface superior com o tempo. Cada suspensão com concentração volumétrica de sólidos conhecida é inicialmente homogeneizada no interior da proveta. Aciona-se um cronômetro digital imediatamente depois de cessada a homogeneização. Em seguida, faz-se leituras da posição da interface superior e do tempo correspondente. Ao final do teste, os dados de posição versus tempo são analisados graficamente. Determina-se a velocidade inicial de sedimentação do sólido, v_{s0} , na concentração inicial do teste de proveta, por meio da inclinação da reta na região linear do gráfico. Com v_{s0} e ε_s

conhecidos, calcula-se a permeabilidade, k , através da Equação (4.45), fazendo-se $v_s=v_{s0}$. Repete-se o procedimento para diferentes concentrações iniciais da suspensão.

Considerando a Equação (4.45), e utilizando a equação constitutiva de Tiller e Leu (1980) para a permeabilidade,

$$k = k_o \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sc}} \right)^{-\eta} \quad (4.46)$$

faz-se vários testes em proveta com o objetivo de determinar os pares k e ε_s necessários para a estimativa dos parâmetros da Equação (4.46).

4.13 Comportamento de sistemas sólido-líquidos com base em propriedades físicas dos materiais sólidos

4.13.1 Avaliação da dinâmica de queda de partículas sólidas imersas em meio fluido

A análise dinâmica do comportamento de partículas sólidas em meios porosos, tais como processos de sedimentação, é importante para o dimensionamento cada vez mais preciso de equipamentos que promovem a separação sólido-líquido.

Partículas freqüentemente utilizadas em vários processos industriais quase nunca apresentam formas e tamanhos regulares dificultando consideravelmente a complexidade da descrição do processo.

Diversos fatores podem influenciar na dinâmica de queda de partículas sólidas imersas em meio fluido, dentre eles a forma, distribuição de tamanhos e densidade das partículas. Para tanto, desenvolveram procedimentos experimentais foram desenvolvidos a fim de analisar o comportamento de sistemas sólido-líquido baseando-se na forma, distribuição de tamanhos e densidade para diferentes tipos de partículas sólidas.

A separação das fases sólida e líquida pelo fenômeno da sedimentação ocorre basicamente pela diferença das densidades dos constituintes e pela ação da força gravitacional. Entretanto, quando resultados de testes com diferentes materiais sólidos submetidos às mesmas condições experimentais são comparados, os comportamentos das suspensões certamente são funções do tipo de material utilizado.

Os efeitos relativos aos processos de dispersão da amostra e a forma dos materiais fazem a análise da dinâmica do processo ser bem mais complexa do que parece ser a primeira vista. Uma partícula esférica pequena, homogênea que se desloca sob a ação da

gravidade em um líquido estagnado infinito, sem efeito de parede, teoricamente sofre um menor efeito da resistividade do meio quando comparada com uma partícula de forma irregular ou baixa esfericidade pelo próprio efeito da camada limite. A Figura 4.14 ilustra as linhas de corrente de escoamentos laminares ao redor de diversos tipos partículas sólidas. Naturalmente a resistência ao escoamento de fluidos ao redor de partículas de formas irregulares é bem maior que ao redor de partículas de maior esfericidade.

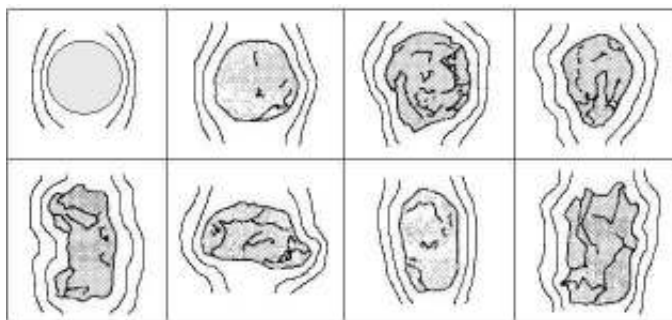


Figura 4.14: Escoamento laminar ao redor de partículas com diferentes formas.

Uma das variáveis que permite avaliar o comportamento da dinâmica de queda de partículas em meio fluido é a velocidade inicial de sedimentação dos sólidos. Através da determinação da velocidade inicial de sedimentação em testes de sedimentação em batelada na região de sedimentação livre, região cujo efeito da tensão nos sólidos é desprezível, avalia-se a dinâmica de quedas de partículas sólidas de diferentes formas e tamanhos.

O teste consiste em medir a velocidade inicial de sedimentação em testes de sedimentação em batelada para diferentes sólidos. Avalia-se o comportamento da separação sólido-líquido através do uso de partículas sólidas com diferentes esfericidades e faixas de distribuições de tamanhos.

Realiza-se uma análise visual das partículas utilizando um microscópio adequado. Os sólidos são classificados por sua forma e distribuição de tamanhos da amostra. Para a determinação das velocidades iniciais de sedimentação das partículas preparam-se suspensões aquosas com concentrações de sólidos iniciais de 4% em volume. Utiliza-se a técnica de atenuação de raios gama nos testes experimentais. A metodologia empregada baseia-se no monitoramento da interface superior em testes de sedimentação em batelada como uma função do tempo para a região de sedimentação livre cujo efeito da tensão nos sólidos é negligenciável (procedimento descrito na seção 4.12.2). Em tal região as partículas sólidas decantam livremente com velocidade constante e igual à velocidade inicial de sedimentação. Realiza-se uma análise gráfica dos resultados utilizando um pacote computacional adequado. A inclinação da parte linear do gráfico z versus t é equivalente a velocidade inicial de sedimentação dos sólidos. Comparam-se as velocidades iniciais de sedimentação realizadas em testes com diferentes sólidos sob as mesmas condições da experimentação.

4.13.2 Avaliação da compressibilidade de sedimentos formados a partir da separação de partículas sólidas com diferentes propriedades físicas

A acomodação das partículas no sedimento formado a partir de testes de sedimentação em batelada certamente é uma função da forma da partícula e de sua distribuição de tamanhos na amostra. A consolidação de partículas de formas irregulares no sedimento certamente ocorre de maneira mais complexa e a acomodação final está diretamente ligada à compressibilidade do sistema que é uma propriedade de cada sólido. A Figura 4.15 apresenta a acomodação de partículas irregulares e regulares em sedimentos.

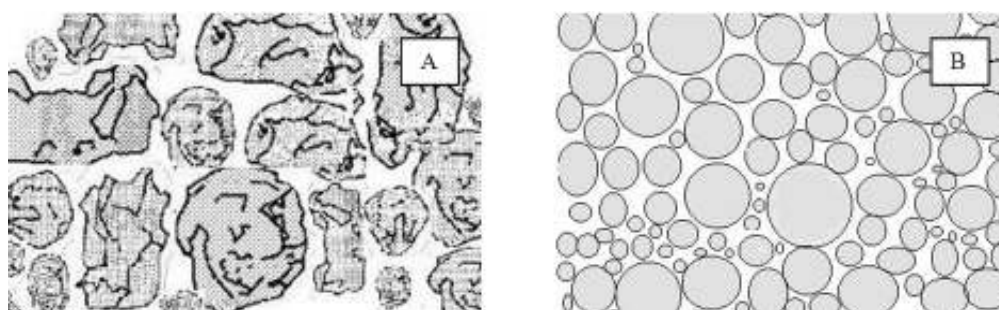


Figura 4.15: Consolidação de partículas irregulares (A) e regulares (B) no sedimento.

O teste consiste em avaliar a compressibilidade de sistemas sólido-líquidos baseando-se na forma, distribuição de tamanhos e densidade de partículas sólidas através do uso da técnica de atenuação de raios gama para amostras de sólidos de diferentes esfericidades e faixas de distribuições de tamanhos.

Realiza-se uma análise visual das partículas utilizando um microscópio adequado. Os sólidos são classificados por sua forma e distribuição de tamanhos da amostra. A partir de testes de sedimentação em batelada para a determinação das distribuições de concentrações nos sedimentos utilizam-se suspensões aquosas com concentrações de 8% em volume para os sólidos em estudo. A concentração local de sólidos é medida em ensaios estáticos de testes em proveta utilizando a técnica de atenuação de raios gama. As medidas das distribuições de concentrações nos sedimentos permitem a análise comparativa da acomodação das partículas. Determinam-se as tensões nos sólidos através da Equação (4.43), utilizando o procedimento descrito na seção 4.12.1. Repete-se três vezes o procedimento descrito a fim de aumentar a confiabilidade dos resultados dos testes para cada sólido.

Os resultados obtidos no levantamento das distribuições de concentrações nos sedimentos formados são comparados entre si, avaliando-se diferenças significativas na compressibilidade do sistema entre testes realizados sob as mesmas condições na experimentação, porém utilizando diferentes sólidos.

4.13.3 Avaliação do efeito da distribuição de tamanhos de amostras de sólidos sobre a dinâmica de sedimentação e compressibilidade do sistema

Para a análise do efeito da distribuição de tamanhos de partículas sobre a dinâmica de sedimentação utilizam-se amostras de um mesmo sólido previamente selecionado em faixas de tamanhos por técnicas de peneiramento.

Pega-se uma amostra de sólido e transfere-se para um conjunto de peneiras vibratórias da série *Tyler* cujas aberturas de peneiras são previamente estipuladas de acordo com a distribuição da amostra inicial. Deixa-se o material sob vibração por um período de 4 h. Repete-se o procedimento até que se acumule quantidade de material suficiente em cada peneira tal que os testes experimentais possam ser conduzidos.

De posse das amostras de sólidos selecionadas em estreitas faixas de distribuições de tamanhos, pode-se proceder aos testes de avaliação do efeito da granulometria sobre a dinâmica de sedimentação e sobre a compressibilidade do sistema. Selecionam-se as amostras retidas na primeira e na última peneira, juntamente com a amostra inicial não peneirada. Para cada uma das três amostras repete-se três vezes o procedimento descrito nas seções 4.13.1 e 4.13.2 para a avaliação do efeito da distribuição de tamanhos na dinâmica de sedimentação e na compressibilidade do sistema, respectivamente. A partir dos resultados obtidos avalia-se a significância da variável estudada.

4.13.4 Avaliação do efeito da forma da partícula sobre a dinâmica de sedimentação e compressibilidade do sistema

A forma da partícula certamente influencia nos efeitos da camada limite desenvolvida durante um escoamento de um fluido ao seu redor, assim como na acomodação final no sedimento em testes de sedimentação em batelada. O objetivo do teste é verificar se o efeito da forma da partícula é significativo na dinâmica de sedimentação e na compressibilidade do meio poroso.

Para a análise do efeito da forma de partículas na dinâmica de sedimentação utilizam-se amostras de dois sólidos com diferentes esfericidades, previamente selecionadas em faixas de tamanhos por técnicas de peneiramento. O procedimento de peneiramento visa isolar o efeito da forma da partícula podendo-se comparar sólidos de diferentes esfericidades em faixas de distribuições de tamanhos semelhantes entre si. O diâmetro médio de Sauter da amostra é adotado como parâmetro para comparação entre duas ou mais distribuições granulométricas.

Pega-se uma amostra de um dos sólidos e transfere-se para um conjunto de peneiras vibratórias da série *Tyler* cujas aberturas de peneiras são previamente estipuladas de acordo com a distribuição da amostra inicial. Deixa-se o material sob vibração por um período de 4 h. Realiza-se o peneiramento até que se acumule quantidade de material suficiente para que os testes experimentais possam ser conduzidos. Repete-se o procedimento para o outro sólido.

De posse das amostras dos sólidos selecionadas em estreitas faixas de distribuições de tamanhos e uma vez que os diâmetros médios de Sauter de cada amostra possuem desvio máximo de 10%, pode-se proceder aos testes de avaliação do efeito isolado da forma da partícula sobre a dinâmica de sedimentação e sobre a compressibilidade do sistema. Para cada uma das amostras de diferentes sólidos repete-se três vezes o procedimento descrito nas seções 4.13.1 e 4.13.2 para a avaliação do forma da partícula na dinâmica de sedimentação e na compressibilidade do sistema, respectivamente. A partir dos resultados obtidos avalia-se a significância da variável estudada.

O Capítulo 4 apresentou os equipamentos, materiais e as metodologias experimentais empregadas no desenvolvimento do presente trabalho.

