

FERNANDA FERREIRA ROSSI

**ANÁLISE NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO
DINÂMICO DE UMA VIGA ENGASTADA-LIVRE OBTIDA POR
MANUFATURA ADITIVA**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2019

FERNANDA FERREIRA ROSSI

**ANÁLISE NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO DINÂMICO
DE UMA VIGA ENGASTADA-LIVRE OBTIDA POR MANUFATURA ADITIVA**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **bacharel em engenharia mecânica**.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientadora: Profa. Dra. Elaine Gomes Assis.

UBERLÂNDIA - MG

2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por tudo.

Aos meus pais e familiares por me apoiarem sempre.

À Profa. Dra. Elaine Gomes Assis por se dispor a me orientar.

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica por consentir a realização deste trabalho e conceder a infraestrutura necessária para tal.

Ao Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Junior, à Profa. Dra. Núbia dos Santos Saad, à Dra. Karina Mayumi Tsuruta, ao técnico do Laboratório de Projetos Mecânicos “Prof. Henner Alberto Gomide” Diego Augusto Alves e ao técnico do Laboratório de CAD “Márcio Melazo” Eurico Marques Salgado, por colaborarem com o desenvolvimento do presente trabalho.

Aos meus amigos da engenharia mecânica, em especial Guilherme Bernardes Rodrigues, João Pedro Bernardes Amaral, Leopoldo Francisco Dantas, Vítor da Silva Medeiros, Nanci Aparecida da Silveira Fujimori, Lurian Souza Vieira e Dulles Araújo Gomes, por me acompanharem ao longo da graduação.

Aos meus amigos Mariana Leal Cunha, Valdeir Antônio Ribeiro Júnior, Augusto Pereira Salgado, Natália Morais Naves, Camila Lima Severino, Marcella Almeida Rubens, Marília Leal Cunha, Nathália Junqueira Franco, Jenifer Herrera Rahmer e Larissa Chagas de Oliveira, por sincera amizade.

Em geral, a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, muito obrigada.

ROSSI, F. F., **Análise numérico-experimental do comportamento dinâmico de uma viga engastada-livre obtida por manufatura aditiva**. 2019. 132 p. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica de análise numérica para determinar soluções aproximadas de problemas regidos por equações diferenciais. Neste trabalho, o principal objetivo é aplicá-lo no desenvolvimento de uma rotina computacional, elaborada em ambiente MATLAB[®], para a análise estrutural dinâmica de uma viga engastada-livre. Além disso, com o presente trabalho também se propõe simular o comportamento dinâmico da viga através do software ANSYS[®] e realizar ensaios experimentais em protótipos fabricados pelo processo de manufatura aditiva. Como forma de verificação, os resultados obtidos a partir das simulações em MATLAB[®] são comparados com os resultados analíticos e via ANSYS[®]. Em seguida, os resultados correspondentes à modelagem computacional dos protótipos são comparados com os resultados obtidos via análise modal experimental, e para analisar a influência do parâmetro “orientação de impressão” no comportamento dinâmico dos protótipos, os resultados experimentais são comparados entre si. Ao finalizar o trabalho, conclui-se que: como esperado por Costa (2006), a teoria de Euler-Bernoulli (MATLAB[®]) tende a superestimar as frequências naturais, especialmente para os modos de ordem mais elevada; e a diferença entre os resultados computacionais e os experimentais é devida ao amortecimento não ser considerado na modelagem computacional dos protótipos e, com relação aos ensaios experimentais, ao engaste não ser perfeito.

Palavras-chave: *Método dos Elementos Finitos, análise estrutural dinâmica, viga engastada-livre, manufatura aditiva, análise modal experimental.*

ROSSI, F. F., **Numerical-experimental analysis of the dynamic behavior of a cantilever beam obtained by additive manufacturing**. 2019. 132 p. Undergraduate Thesis in Mechanical Engineering, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The Finite Element Method (FEM) is a technique of numerical analysis to determine approximate solutions of problems governed by differential equations. In this work, the main goal is to apply it in the development of a numerical routine, elaborated in MATLAB[®], for the dynamic structural analysis of a cantilever beam. Furthermore, with the present work is also proposed to model the dynamic behavior of the beam through ANSYS[®] software and to perform experimental tests on prototypes made by the additive manufacturing process. As a way of verifying, the results obtained from the simulations in MATLAB[®] are compared with the analytical and by ANSYS[®] results. Subsequently, the results corresponding to the numerical modeling of the prototypes are compared with the results obtained by experimental modal analysis, and to analyze the influence of the “printing orientation” parameter in the dynamic behavior of the prototypes, the experimental results are compared to each other. At the end of the work, it is concluded that: as expected by Costa (2006), Euler-Bernoulli’s theory (MATLAB[®]) tends to overestimate the natural frequencies, especially for the higher order modes; and the difference between the numerical and experimental results is due to the damping not to be considered in the numerical modeling of the prototypes and, with respect to the experimental tests, to the clamp not to be perfect.

Keywords: *Finite Element Method, dynamic structural analysis, cantilever beam, additive manufacturing, experimental modal analysis.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 -	Viga no caso mais geral, transmitindo forças axiais, momentos fletores, forças cortantes e momentos torçores (adaptada de ALVES FILHO, 2006).	8
Figura 2.2 -	Elemento finito de viga (adaptada de ALVES FILHO, 2006). .	9
Figura 2.3 -	Forças nodais e os correspondentes deslocamentos virtuais para uma condição externa arbitrária imposta ao elemento de viga (ALVES FILHO, 2006).	13
Figura 2.4 -	Montagem da matriz de rigidez da estrutura a partir das matrizes de rigidez dos elementos (adaptada de ALVES FILHO, 2008).	16
Figura 2.5 -	Sistema massa-mola representando o movimento da massa fixada à extremidade da viga na direção horizontal (ALVES FILHO, 2008).	18
Figura 2.6 -	Visão do caso real e do modelo para análise das vibrações livres amortecidas (adaptada de ALVES FILHO, 2008).	21
Figura 2.7 -	Vibração livre amortecida (adaptada de ALVES FILHO, 2008).	22
Figura 2.8 -	Estrutura real e modelo para estudo do movimento forçado da massa fixada à extremidade da viga na direção vertical (ALVES FILHO, 2008).	24
Figura 2.9 -	Vibração livre amortecida e vibração forçada superpostas (ALVES FILHO, 2008).	28
Figura 2.10 -	Chapa de aço apoiada nas extremidades e alguns de seus modos possíveis de vibração natural e respectivas frequências naturais (adaptada de ALVES FILHO, 2008).	33
Figura 2.11 -	Hipótese da Superposição Modal (adaptada de ALVES FILHO, 2008).	34

Figura 2.12 -	Exemplo de vibrações naturais de uma estrutura (ALVES FILHO, 2008).	36
Figura 2.13 -	Estrutura real e um modo genérico qualquer de vibração dela, caracterizado pela frequência ω_i (ALVES FILHO, 2008).	41
Figura 2.14 -	Autovetores representando o mesmo modo de vibrar da estrutura (adaptada de ALVES FILHO, 2008).	42
Figura 2.15 -	Sistema de um grau de liberdade sob a ação de uma carga de impacto (ALVES FILHO, 2008).	47
Figura 3.1 -	Passos envolvidos em uma análise de elementos finitos (adaptada de TSCHIPTSCHIN, 2011).	53
Figura 3.2 -	Restrições correspondentes à extremidade engastada da viga.	55
Figura 3.3 -	Força $F(t)$ aplicada à extremidade livre da viga.	55
Figura 3.4 -	Fluxograma correspondente à etapa de pré-processamento.	56
Figura 3.5 -	Procedimento para cálculo dos primeiros modos de vibrar e das correspondentes frequências naturais da estrutura.	59
Figura 3.6 -	Procedimento para cálculo das FRFs da estrutura.	60
Figura 3.7 -	Procedimento para cálculo do fator de participação de cada modo de vibrar na resposta dinâmica da estrutura ao carregamento de impacto.	62
Figura 3.8 -	Procedimento para cálculo da resposta dinâmica da estrutura ao carregamento de impacto.	63
Figura 3.9 -	Protótipos fabricados pelo processo de manufatura aditiva. ...	69
Figura 3.10 -	Esquema genérico da técnica de FDM (RAULINO, 2011).	71
Figura 3.11 -	Impressora 3D FDM Cliever CL2 Pro Plus (CLIEVER, 2018).	72
Figura 3.12 -	Filamento PLA Cliever (LEROY MERLIN, 2018).	72
Figura 3.13 -	Orientação de impressão do protótipo 1 (dimensões em mm).	73
Figura 3.14 -	Orientação de impressão do protótipo 2 (dimensões em mm).	74
Figura 3.15 -	Bancada experimental.	75
Figura 3.16 -	Configuração inicial dos ensaios de tração.	77
Figura 3.17 -	Geometria dos corpos de prova (dimensões em mm).	79
Figura 3.18 -	Orientação de impressão dos corpos de prova.	79

Figura 3.19 -	Curvas tensão-deformação dos corpos de prova.	80
Figura 4.1 -	Gráfico do erro relativo das cinco primeiras frequências naturais da viga em balanço para diferentes densidades de malha (teoria e MATLAB®).	83
Figura 4.2 -	Cinco primeiros modos de vibrar da viga em balanço para uma malha constituída por 75 elementos finitos.	84
Figura 4.3 -	Gráfico do erro relativo das cinco primeiras frequências naturais da viga em balanço para diferentes densidades de malha (MATLAB® e ANSYS®).	85
Figura 4.4 -	FRFs computacionais da extremidade livre da viga em balanço.	87
Figura 4.5 -	Gráfico da força aplicada à extremidade livre da viga em balanço no domínio da frequência.	88
Figura 4.6 -	Resposta dinâmica da extremidade livre da viga em balanço ao carregamento de impacto.	89
Figura 4.7 -	FRF computacional e experimental da extremidade livre do protótipo 1.	91
Figura 4.8 -	Função de coerência do protótipo 1.	91
Figura 4.9 -	FRF computacional e experimental da extremidade livre do protótipo 2.	92
Figura 4.10 -	Função de coerência do protótipo 2.	92
Figura 4.11 -	FRFs experimentais da extremidade livre dos protótipos.	93

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 -	Parâmetros de impressão dos protótipos.	73
Tabela 3.2 -	Módulo de elasticidade dos corpos de prova.	80
Tabela 4.1 -	Dimensões da viga.	82
Tabela 4.2 -	Propriedades do aço (LALANNE, BERTHIER, DER HAGOPIAN, 1984).	82
Tabela 4.3 -	Cinco primeiras frequências naturais da viga em balanço (teoria e MATLAB®) e correspondentes erros relativos.	83
Tabela 4.4 -	Cinco primeiras frequências naturais da viga em balanço (MATLAB® e ANSYS®) e correspondentes erros relativos.	85
Tabela 4.5 -	Parâmetros referentes à análise harmônica da viga em balanço.	86
Tabela 4.6 -	Parâmetros referentes à análise transiente da viga em balanço.	88
Tabela 4.7 -	Dimensões dos protótipos.	90
Tabela 4.8 -	Propriedades do material dos protótipos (Tabela 3.2 e TORRES et al., 2015).	90
Tabela 4.9 -	Parâmetros referentes à análise harmônica dos protótipos. ...	90

LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT: Associação Brasileira de Normas Técnicas

APDL: *ANSYS Parametric Design Language*

CAD: *Computer-Aided Design*

CAM: *Computer-Aided Manufacturing*

CAPP: *Computer-Aided Process Planning*

FDM: *Fused Deposition Modeling*

FEMEC: Faculdade de Engenharia Mecânica

GUIDE: *Graphical User Interface Development Environment*

LMEst: Laboratório de Mecânica de Estruturas “Prof. José Eduardo Tannús Reis”

LPM: Laboratório de Projetos Mecânicos “Prof. Henner Alberto Gomide”

MEF: Método dos Elementos Finitos

NBR: Norma Brasileira Regulamentadora

PLA: Políácido láctico

PTV: Princípio dos Trabalhos Virtuais

UFU: Universidade Federal de Uberlândia

LISTA DE SÍMBOLOS

A, U, U_0	- Amplitude máxima da resposta
$[B(x)]$	- Matriz deslocamento-deformação
c	- Amortecimento do sistema
c_c	- Amortecimento crítico
c_i	- Amortecimento generalizado para o modo i de vibração
$[C]$	- Matriz de amortecimento da estrutura
$[D]$	- Matriz de elasticidade ou matriz dinâmica
$[D_i]$	- Matriz dinâmica associada à determinação do i -ésimo modo de vibrar
E	- Módulo de elasticidade longitudinal
$f_i(t)$	- Força generalizada para o modo i de vibração
f_n	- Frequência natural do sistema
$\{f\}$	- Matriz-coluna das forças nodais atuantes no elemento
F_0	- Amplitude máxima da excitação
$F(t)$	- Força excitadora externa
$\{F(t)\}$	- Matriz das cargas nodais
I	- Momento de inércia em relação à linha neutra
$[I]$	- Matriz identidade
k	- Rigidez do sistema
k_i	- Rigidez generalizada para o modo i de vibração
$[k]^e$	- Matriz de rigidez do elemento

$[K]$	- Matriz de rigidez da estrutura
L	- Comprimento do elemento
m	- Massa do sistema ou quantidade de elementos finitos da malha
m_i	- Massa generalizada para o modo i de vibração
$M(x)$	- Momento fletor atuante na viga
$[M]^e$	- Matriz de massa consistente do elemento
$[M]$	- Matriz de massa da estrutura
$[N(x)]$	- Função de forma do elemento finito
r	- Relação de frequências
$[S_{i-1}]$	- Matriz de limpeza correspondente à convergência do processo iterativo para o i -ésimo modo de vibrar
$t, \bar{t}$	- Tempo
t_1	- Tempo de duração da carga de impacto
u	- Função horária da elongação
$\dot{u}$	- Função horária da velocidade
$\ddot{u}$	- Função horária da aceleração
$u_{GH}(t)$	- Solução geral da equação diferencial homogênea de segunda ordem
$u_p(t)$	- Solução particular da equação diferencial não homogênea de segunda ordem
$u(t)$	- Solução geral da equação diferencial linear completa a coeficientes constantes
$U(t)$	- Função horária da elongação do Movimento Harmônico Simples
$\{U(t)\}$	- Matriz dos deslocamentos nodais
$\{\dot{U}(t)\}$	- Matriz das velocidades nodais
$\{\ddot{U}(t)\}$	- Matriz das acelerações nodais
v_1, v_2	- Deslocamentos lineares nodais do elemento

$v(x)$	- Função de deslocamentos
$v'(x)$	- Inclinação da viga
$v''(x)$	- Curvatura da viga
$\{v''(x)^*\}$	- Curvatura virtual imposta indiretamente à viga
y	- Distância da linha neutra
y_i	- Coordenada generalizada para o modo i de vibração
$y_1, y_2, \dots, y_n$	- Fatores de participação dos modos de vibrar na resposta dinâmica ao carregamento externo
α, β	- Constantes do amortecimento de Rayleigh
$\{\delta\}$	- Matriz dos deslocamentos nodais
$\{\delta^*\}$	- Matriz-coluna dos deslocamentos nodais virtuais
ε	- Deformação normal
ζ	- Fator de amortecimento
θ_1, θ_2	- Deslocamentos angulares nodais do elemento
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$	- Autovalores do sistema
$[\rho]$	- Matriz que considera a densidade do material que constitui o elemento
σ	- Tensão normal
τ_{externo}	- Trabalho virtual externo
τ_{interno}	- Trabalho virtual interno
φ_0, ψ	- Ângulo de fase inicial
ϕ	- Ângulo de fase
$\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_n\}$	- Autovetores do sistema
χ	- Fator de amplificação dinâmica
ω	- Frequência de excitação imposta ao sistema
ω_d	- Frequência natural amortecida
ω_n	- Frequência angular natural do sistema

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 OBJETIVO PRINCIPAL	2
1.2 OBJETIVOS SECUNDÁRIOS	2
1.3 JUSTIFICATIVA	2
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1 MEF EM ANÁLISE ESTRUTURAL ESTÁTICA	5
2.1.1 Conceitos importantes para a montagem da matriz de rigidez de qualquer elemento finito	6
2.1.1.1 Interpolação	6
2.1.1.2 Trabalho e energia interna de deformação	6
2.1.2 Método geral para a montagem da matriz de rigidez do elemento de viga	7
2.1.2.1 Elemento de viga	7
2.1.2.2 Matriz de rigidez do elemento de viga com apenas rigidez à flexão	9
2.1.3 Procedimento para a montagem da matriz de rigidez da estrutura	16
2.2 MEF EM ANÁLISE ESTRUTURAL DINÂMICA	17
2.2.1 Sistema massa-mola – vibrações livres não amortecidas	18
2.2.2 Sistema massa-mola-amortecedor – vibrações livres amortecidas	21
2.2.3 Sistema massa-mola-amortecedor – vibrações forçadas amortecidas	23
2.2.4 Vibração livre amortecida e vibração forçada superpostas	28
2.2.5 Equilíbrio dinâmico de sistemas com vários graus de liberdade	29
2.2.5.1 Consideração da massa distribuída no elemento: matriz de massa consistente	30
2.2.5.2 Considerações em relação à montagem da matriz de amortecimento da estrutura	31
2.2.6 Solução das equações de equilíbrio em análise dinâmica pelo Método da Superposição Modal	32
2.2.6.1 Análise Modal	35
2.2.6.2 Método de Stodola	41
2.2.6.3 Determinação do fator de participação de cada modo de vibrar na resposta dinâmica	45

2.2.7	Resposta dinâmica à carga de impacto	47
2.2.8	Complemento ao cálculo da resposta dinâmica	50
2.2.8.1	Método do Deslocamento Modal	51
3	METODOLOGIA	52
3.1	SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS	52
3.1.1	MATLAB®	53
3.1.1.1	Pré-processamento	54
3.1.1.2	Processamento	56
3.1.1.2.1	<i>Modos e frequências naturais de vibração da estrutura</i>	57
3.1.1.2.2	<i>Resposta dinâmica da estrutura à excitação harmônica (FRFs)</i>	60
3.1.1.2.3	<i>Resposta dinâmica da estrutura ao carregamento de impacto</i>	61
3.1.1.3	Pós-processamento	63
3.1.2	ANSYS®	64
3.1.2.1	Análise modal	65
3.1.2.2	Análise harmônica	66
3.1.2.3	Análise transiente	67
3.2	PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS	68
3.2.1	Impressão 3D	69
3.2.1.1	Técnica de FDM	70
3.2.1.2	Parâmetros de impressão	72
3.2.2	Ensaio experimentais	74
3.2.2.1	Bancada experimental	75
3.2.3	Ensaio de tração	76
3.2.3.1	Módulo de elasticidade	77
3.2.3.2	Corpos de prova	78
3.2.3.3	Curvas tensão-deformação	79
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	81
4.1	SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS	81
4.1.1	Modos e frequências naturais de vibração da viga em balanço	81
4.1.2	Resposta dinâmica da viga em balanço à excitação harmônica (FRFs)	86
4.1.3	Resposta dinâmica da viga em balanço ao carregamento de impacto	87
4.2	PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS	89
4.2.1	Comparação entre as FRFs computacionais e experimentais	89
4.2.2	Comparação entre as FRFs experimentais	93
5	CONCLUSÕES	95
6	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	97

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	98
8 BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR	103
APÊNDICE A	107
A.1 SCRIPT	107
A.2 FUNÇÕES	113
A.2.1 Matriz de rigidez da viga em balanço	113
A.2.2 Matriz de massa da viga em balanço	114
A.2.3 Modos e frequências naturais de vibração da viga em balanço	115
A.2.4 Fatores de participação da resposta dinâmica da viga em balanço ao carregamento de impacto	117

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

De acordo com Campos (2006):

O Método dos Elementos finitos foi desenvolvido em 1909 por Walter Ritz (1878-1909) para determinar a solução aproximada de problemas em mecânica dos sólidos deformáveis, onde o funcional energia era aproximado por funções conhecidas com coeficientes a serem determinados. Em 1943, Richard Courant (1888-1972) aumentou consideravelmente as possibilidades do método de Ritz introduzindo funções lineares especiais definidas sobre regiões triangulares e aplicou o método para a solução de problemas de torção. Sendo incógnitas, os valores das funções nos pontos nodais das regiões triangulares foram determinados. Assim, a principal restrição das funções de Ritz – a satisfação das condições de contorno – foi eliminada. O método de Ritz, junto com as modificações de Courant, é similar ao MEF proposto por Ray William Clough Jr. muitos anos depois. Coube a Clough (1960) introduzir, pela primeira vez, o termo elemento finito no artigo *The finite element method in plane stress analysis*. Se, inicialmente, o MEF fora desenvolvido como um método de simulação baseado em computação para análise de estruturas aeroespaciais, no final dos anos 60 passou a ser utilizado para a simulação de problemas não estruturais em fluidos, termomecânica e eletromagnetismo. Embora o método tenha sido extensivamente usado no campo das estruturas mecânicas, hoje tem sido aplicado satisfatoriamente como uma técnica conveniente e bem estabilizada para a solução computacional de problemas complexos em diferentes campos da engenharia: civil, mecânica, nuclear, biomédica, hidrodinâmica, condução de calor, geomecânica, entre outros.

O MEF é um método numérico aproximado para análise de diversos fenômenos físicos que ocorrem em meios contínuos, e que são descritos através de equações diferenciais, com determinadas condições de contorno, e possivelmente com condições iniciais.

A ideia principal do método consiste em dividir o domínio do problema em um número finito de subdomínios, denominados elementos. Os elementos finitos

conectam-se entre si através de nós ou pontos nodais. Ao conjunto, constituído por elementos e nós, dá-se o nome de malha.

Segundo Souza (2003), a precisão do método depende da quantidade de nós e elementos, e do tamanho e tipo dos elementos presentes na malha. Um dos aspectos mais importantes do MEF diz respeito à sua convergência. Embora se trate de um método aproximado, pode-se demonstrar que em uma malha consistente, à medida que o tamanho dos elementos finitos tende a zero, e conseqüentemente, a quantidade de nós tende a infinito, a solução obtida converge para a solução exata do problema.

1.1 OBJETIVO PRINCIPAL

Este trabalho objetiva desenvolver uma rotina computacional em ambiente MATLAB® para a análise estrutural dinâmica de uma viga engastada-livre, tendo por base elementos finitos.

1.2 OBJETIVOS SECUNDÁRIOS

- Estudar os conceitos que embasam o Método dos Elementos Finitos.
- Simular o comportamento dinâmico da viga através do software ANSYS®.
- Realizar ensaios experimentais em protótipos fabricados pelo processo de manufatura aditiva.
- Comparar os resultados computacionais obtidos a partir das simulações em MATLAB® com os resultados analíticos e via ANSYS®.
- Comparar os resultados correspondentes à modelagem computacional dos protótipos com os resultados obtidos via análise modal experimental.
- Analisar a influência do parâmetro “orientação de impressão” no comportamento dinâmico dos protótipos, comparando os resultados experimentais entre si.

1.3 JUSTIFICATIVA

Vigas são estruturas lineares que trabalham em posição horizontal ou inclinada, assentadas em um ou mais apoios e que têm a função de suportar carregamentos e esforços diversos. A análise de vigas é bastante comum em problemas de engenharia, tornando-se fundamental o estudo de sua formulação. O MEF demonstra, várias vezes, ser uma técnica numérica muito utilizada para a solução de problemas em engenharia envolvendo vigas estruturais (SANTADE, 2012).

O Método dos Elementos Finitos é atualmente definido como um método matemático para a solução de equações diferenciais. Em muitos casos práticos, o MEF é a única ferramenta capaz de fornecer uma solução aceitável, ainda que aproximada. Devido às suas características de flexibilidade e estabilidade numérica, ele pode ser facilmente implementado em um sistema computacional, fato que explica a sua grande popularidade nos dias atuais (NEPOMUCENO, 2015).

A utilização de softwares de simulação proporciona ao projetista conceber diversas soluções de projeto e permite a sua avaliação em diferentes condições de operação. No entanto, para que as ferramentas computacionais executem o seu papel de forma eficiente, elas devem representar o comportamento do sistema real com a maior fidelidade possível (REZENDE, 2006).

Por mais sofisticado que seja o modelo computacional de um sistema, este não é capaz de representar todos os aspectos particulares do sistema real como folgas, imperfeições nos materiais e defeitos de fabricação. Assim, a construção de um protótipo, mesmo que em escala reduzida, e a realização de ensaios experimentais é inevitável. Um protótipo viabiliza a complementação e validação do modelo computacional, uma vez que este prevê com maior confiança os aspectos cinemáticos e dinâmicos do sistema real (REZENDE, 2003).

A tecnologia de impressão 3D tem conquistado cada vez mais espaço em diversos ramos da indústria. Seja desenvolvendo protótipos, peças finais, ou ferramentas especializadas e individualizadas, as impressoras 3D diminuem tempos e custos de produção em larga escala e estão transformando a lógica dos processos industriais, definitivamente.

O filamento PLA (poliácido láctico) é um dos principais filamentos para impressora 3D. Produzido a partir de fontes renováveis como o milho e a cana de açúcar, o PLA é um material biodegradável, compostável e reciclável, que não

possui nenhum tipo de resíduo tóxico. Além disso, é o filamento de mais fácil manuseio, suportado por quase todas as impressoras 3D do mercado.

O presente trabalho está estruturado em capítulos e, além desta introdução, é desenvolvido da seguinte forma:

CAPÍTULO II: Apresenta a revisão bibliográfica do Método dos Elementos Finitos em análise estrutural estática e dinâmica.

CAPÍTULO III: Apresenta a metodologia proposta para o desenvolvimento das simulações computacionais e procedimentos experimentais do trabalho.

CAPÍTULO IV: Apresenta os resultados obtidos e uma breve discussão dos mesmos.

CAPÍTULO V: Apresenta as principais e mais relevantes conclusões do trabalho.

CAPÍTULO VI: Apresenta as propostas para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta a revisão bibliográfica do Método dos Elementos Finitos em análise estrutural estática e dinâmica.

2.1 MEF EM ANÁLISE ESTRUTURAL ESTÁTICA

Há diversas situações práticas em que a hipótese de adotar um modelo estático de elementos finitos corresponde à realidade do problema de engenharia. É o caso das estruturas que estão sujeitas a carregamentos que não variam com o tempo, ou variam tão lentamente, que em cada instante é correto considerá-los estáticos (ALVES FILHO, 2008).

Os elementos mais simples – molas, treliças e vigas – permitem a aplicação do método direto para determinar a sua matriz de rigidez. Esse método baseia-se em promover relações diretas entre as forças nodais aplicadas no elemento e os deslocamentos nodais equivalentes (ALVES FILHO, 2006).

Nos casos bi e tridimensionais, a obtenção da matriz de rigidez do elemento através do método direto torna-se inviável e, portanto, propõe-se um procedimento geral para a determinação da matriz de rigidez de qualquer elemento finito. Os conceitos de rigidez do elemento e rigidez da estrutura continuam presentes, porém a determinação dos termos de rigidez para os elementos bi e tridimensionais é feita de forma aproximada (ALVES FILHO, 2006).

2.1.1 Conceitos importantes para a montagem da matriz de rigidez de qualquer elemento finito

2.1.1.1 Interpolação

Em diversas aplicações de engenharia depara-se com situações em que os valores de uma dada função $f(x)$ para um dado conjunto de valores discretos da variável x são conhecidos. Entretanto, não se dispõe de uma expressão analítica capaz de calcular o valor da função para um valor de x arbitrário (ALVES FILHO, 2006).

O procedimento de interpolação baseia-se no esboço de uma curva suave definida a partir dos pontos já conhecidos. A curva é então utilizada como a função representativa da lei de variação de determinada grandeza dentro do intervalo em estudo. O fato de a função adotada conduzir a aproximações razoáveis é o bastante para que a mesma seja considerada adequada (ALVES FILHO, 2006).

Tendo em mente que encontrar a função de interpolação utilizada como uma aproximação está vinculada à determinação de certas constantes, a definição do grau do polinômio e a consequente representação da função de interpolação de forma única estão relacionadas ao número de pontos conhecidos (ALVES FILHO, 2006).

As técnicas de interpolação mostram-se muito presentes na análise dos modelos discretizados pelo MEF. Nestas aplicações tem-se o conhecimento dos deslocamentos nodais e, a partir das funções de interpolação determinadas com base no conhecimento do número de graus de liberdade do elemento, é possível obter os deslocamentos dentro do elemento de forma aproximada (ALVES FILHO, 2006).

2.1.1.2 Trabalho e energia interna de deformação

Na configuração deformada de qualquer elemento finito identificam-se as forças nodais presentes e os respectivos deslocamentos. A ação de uma força e o correspondente deslocamento remete ao conceito de trabalho de uma força, que retrata fisicamente a transferência de energia ao sistema (ALVES FILHO, 2006).

A energia externa introduzida ao elemento finito é estimada a partir do trabalho das forças nodais, em conjunto com os respectivos deslocamentos. O armazenamento dessa energia dá-se na forma de energia de deformação dentro do elemento e, como a energia de deformação está vinculada à configuração deformada do elemento, a função de interpolação representativa dessa configuração deve respeitar uma condição de energia (ALVES FILHO, 2006).

Assim, a determinação da rigidez do elemento finito, mesmo que em caráter aproximado, dá-se com base no cálculo da energia de deformação a partir da condição deformada do elemento e na igualdade dessa energia com o trabalho externo. A aproximação da resposta do modelo ao comportamento real da estrutura está condicionada à representação do comportamento interno de cada elemento. Dessa forma, o elemento discreto que modela um dado trecho da estrutura entre os pontos nodais deve ser muito bem definido, já que sua especificação reflete na função de interpolação utilizada e, conseqüentemente, na determinação do campo de deslocamentos dentro do elemento (ALVES FILHO, 2006).

2.1.2 Método geral para a montagem da matriz de rigidez do elemento de viga

2.1.2.1 Elemento de viga

Segundo a ABNT NBR 6118 (2014), vigas são elementos lineares em que a flexão é predominante. Elementos lineares são aqueles em que o comprimento longitudinal supera em pelo menos três vezes a maior dimensão da seção transversal, sendo também denominados barras.

Da Resistência dos Materiais, entende-se viga como uma barra reta, de comprimento muito maior que as dimensões de sua seção transversal, capaz de transmitir, além de forças axiais, momentos fletores nos planos que contêm seus dois eixos principais do plano da seção transversal da viga, forças cortantes nos mesmos planos de ação dos momentos fletores, e momentos torçores em relação ao eixo dos centros de torção da viga, como representa a Figura 2.1 (ALVES FILHO, 2006).

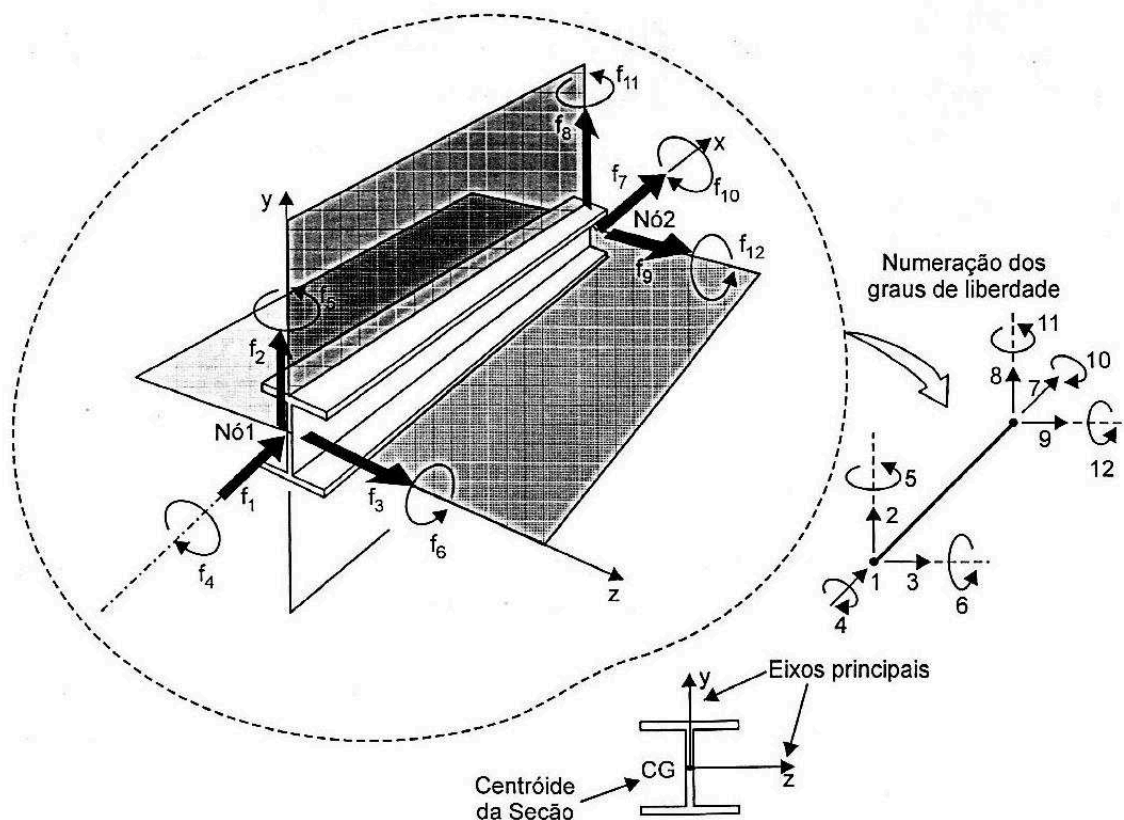


Figura 2.1 - Viga no caso mais geral, transmitindo forças axiais, momentos fletores, forças cortantes e momentos torçores (adaptada de ALVES FILHO, 2006).

Da teoria da Resistência dos Materiais, sabe-se que as forças axiais f_1 e f_7 da Figura 2.1 dependem apenas dos seus respectivos deslocamentos. Desse modo, no âmbito da análise linear, assumindo pequenos deslocamentos, as ações de flexão e torção não afetam as forças axiais presentes. O mesmo é válido para os momentos torçores f_4 e f_{10} . Entretanto, em relação à ação dos momentos fletores, é necessário um cuidado especial na aplicação desse conceito. Somente se houver a coincidência entre os planos xy e xz e os eixos principais da seção transversal da viga, permitir-se-á considerar que os momentos fletores e as forças cortantes nos dois planos são independentes entre si e, portanto, dependentes apenas dos seus correspondentes deslocamentos (ALVES FILHO, 2006).

Assim, define-se como eixo x local do elemento, o eixo passante pelos centroides das seções transversais ao longo da viga, e como eixos y e z , os eixos passantes pelo centroide da seção e coincidentes com os eixos principais, conforme ilustra a Figura 2.1. Essa escolha torna possível a formulação do elemento de viga por meio do estudo isolado de seus componentes de rigidez – rigidez axial, rigidez à

flexão no plano xy , rigidez à flexão no plano xz e rigidez à torção –, já que os mesmos são independentes entre si (ALVES FILHO, 2006).

2.1.2.2 Matriz de rigidez do elemento de viga com apenas rigidez à flexão

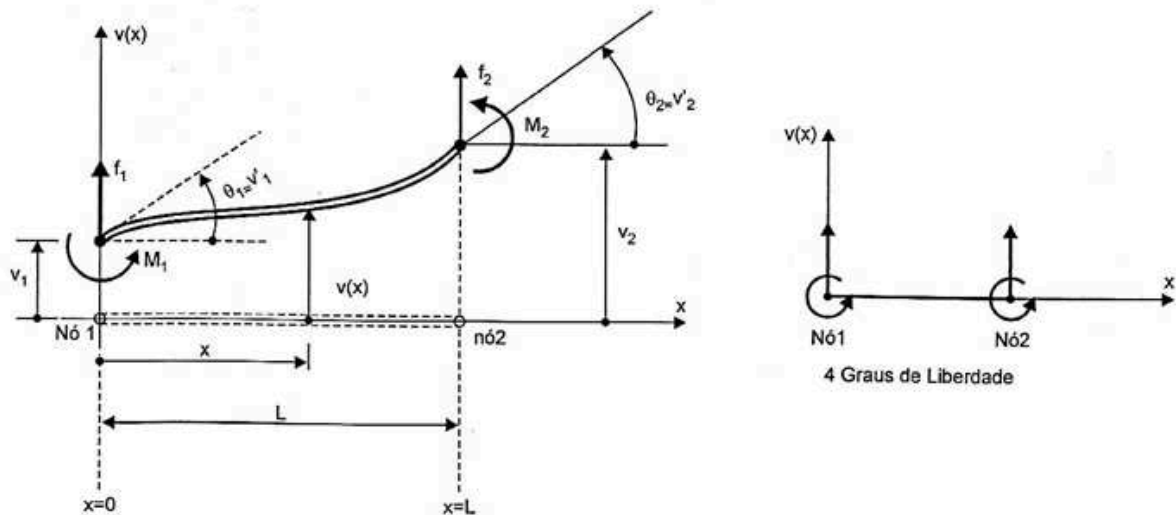


Figura 2.2 - Elemento finito de viga (adaptada de ALVES FILHO, 2006).

A Figura 2.2 representa um elemento finito de viga submetido somente a ações de flexão no plano xy . Os deslocamentos lineares v_1 e v_2 na direção y e os deslocamentos angulares θ_1 e θ_2 determinam os 4 graus de liberdade conhecidos para esse elemento (ALVES FILHO, 2006).

A princípio, é necessário especificar a função de deslocamentos que defina de forma única o campo de deslocamentos dentro do elemento, em termos dos graus de liberdade dos nós. Essa função deve representar a configuração deformada do elemento o mais próxima possível do seu comportamento real. A função polinomial é muito utilizada como função de interpolação, sendo o grau do polinômio limitado pelo número de coeficientes possíveis de se determinar (ALVES FILHO, 2006).

Como o elemento de viga apresenta 4 graus de liberdade, sua função de deslocamentos é da forma:

$$v(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot x^3. \quad (2.1)$$

Por motivos de armazenamento computacional, convém representar a Equação (2.1) na forma matricial. Assim:

$$v(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = [H(x)] \cdot \{C\} . \quad (2.2)$$

Do mesmo modo que houve a formulação dos deslocamentos lineares, pode-se expressar a inclinação da viga ponto a ponto na condição deformada, já que a inclinação é dada pela primeira derivada dos deslocamentos. Ao derivar $v(x)$, tem-se:

$$v'(x) = C_2 + 2 \cdot C_3 \cdot x + 3 \cdot C_4 \cdot x^2 . \quad (2.3)$$

A representação matricial das Equações (2.1) e (2.3) é dada por:

$$\{\delta(x)\} = \begin{Bmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2 \cdot x & 3 \cdot x^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} . \quad (2.4)$$

Após a formulação das funções de interpolação para o elemento de viga, determinam-se as constantes em função dos valores conhecidos de deslocamentos nodais (ALVES FILHO, 2006).

De início, substituem-se os valores conhecidos de deslocamentos nodais nas funções de interpolação representadas matricialmente em (2.4). Conforme a Figura 2.2, para $x=0$, tem-se $v=v_1$ e $v'=\theta_1=v'_1$, e para $x=L$, tem-se $v=v_2$ e $v'=\theta_2=v'_2$. Assim:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v'_1 \\ v_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2 \cdot L & 3 \cdot L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = [A] \cdot \{C\} , \quad (2.5)$$

ou:

$$\{C\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta\} . \quad (2.6)$$

Substituindo (2.6) em (2.2), obtém-se:

$$v(x) = [H(x)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} = [N(x)] \cdot \{\delta\} . \quad (2.7)$$

A matriz $[N(x)]$, denominada função de forma do elemento finito, estabelece o comportamento do elemento, isto é, a partir dos deslocamentos nodais, permite o cálculo dos deslocamentos dentro do elemento e, portanto, define a forma pela qual se estabelece a interpolação do campo de deslocamentos (ALVES FILHO, 2006).

Também a partir dos deslocamentos nodais, calculam-se as deformações internas no elemento. Da teoria de vigas, sabe-se que as deformações por flexão estão associadas à curvatura apresentada pela viga ao longo do seu comprimento, e que a curvatura está associada à segunda derivada dos deslocamentos. Desse modo:

$$\text{Curvatura} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I} = \frac{d^2 v}{dx^2} = v''(x) ; \quad (2.8)$$

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I} \cdot y = y \cdot v''(x) . \quad (2.9)$$

Ao derivar a Equação (2.3), calcula-se $v''(x)$. Assim:

$$v''(x) = 2 \cdot C_3 + 6 \cdot C_4 \cdot x . \quad (2.10)$$

Representando a Equação (2.10) na notação matricial, tem-se:

$$v''(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \cdot x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} . \quad (2.11)$$

Substituindo (2.6) em (2.11), obtém-se:

$$v''(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \cdot x \end{bmatrix} \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} = [B(x)] \cdot \{\delta\} . \quad (2.12)$$

Assim como a função de forma, a matriz deslocamento-deformação – matriz $[B(x)]$ – constitui um dos conceitos mais importantes na formulação da matriz de rigidez de qualquer elemento finito. Ela permite, a partir dos deslocamentos nodais, o cálculo das deformações dentro do elemento e, portanto, define o modo pelo qual se estabelece o campo de deformações dentro deste (ALVES FILHO, 2006).

Das Equações (2.8) ou (2.9), pode-se expressar o momento fletor interno à viga por:

$$M(x) = E \cdot I \cdot v''(x) . \quad (2.13)$$

Substituindo (2.12) em (2.13), obtém-se:

$$M(x) = E \cdot I \cdot [B(x)] \cdot \{\delta\} = [S(x)] \cdot \{\delta\} . \quad (2.14)$$

A expressão (2.14) permite determinar as forças internas dentro do elemento a partir dos deslocamentos nodais.

Da teoria de vigas, o cálculo das tensões ao longo de uma seção transversal é dado por:

$$\sigma = \frac{M(x)}{I} \cdot y. \quad (2.15)$$

De posse das expressões anteriores, é possível determinar os deslocamentos, as deformações, as forças internas e as tensões dentro do elemento. No entanto, é necessário que os deslocamentos nodais sejam conhecidos, pois se efetuaram as interpolações com base nestes (ALVES FILHO, 2006).

A partir da matriz de rigidez da estrutura e do carregamento atuante é possível determinar os deslocamentos nodais. Porém, é necessário conhecer as matrizes de rigidez dos elementos, já que a montagem da matriz de rigidez da estrutura depende destas (ALVES FILHO, 2006).

A determinação da matriz de rigidez de qualquer elemento torna-se possível com os conceitos de trabalho e energia de deformação. Utiliza-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais para estabelecer a condição de equivalência entre as forças internas atuantes no elemento e as forças nodais estaticamente equivalentes (ALVES FILHO, 2006).

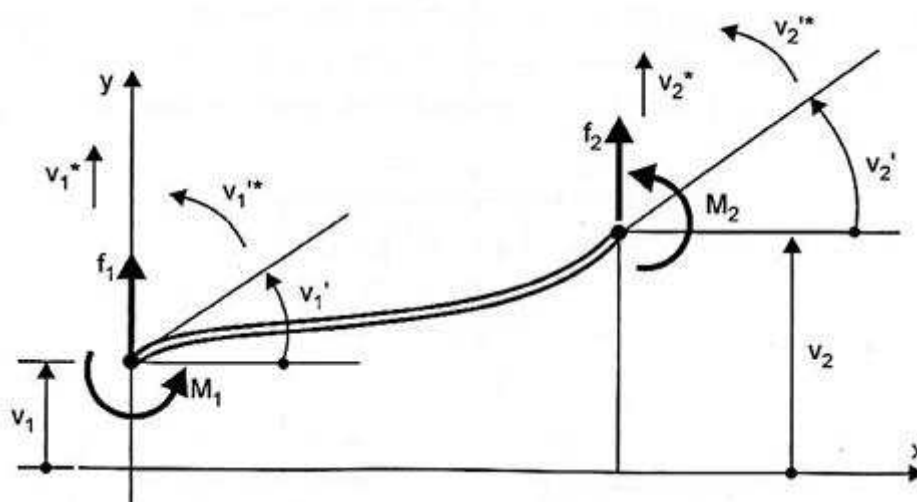


Figura 2.3 - Forças nodais e os correspondentes deslocamentos virtuais para uma condição externa arbitrária imposta ao elemento de viga (ALVES FILHO, 2006).

A Figura 2.3 apresenta uma condição externa arbitrária imposta ao elemento de viga, representada por um conjunto de deslocamentos nodais, conhecidos como deslocamentos virtuais, e as correspondentes forças nodais atuantes. Sob a ação

dos deslocamentos virtuais admite-se que as forças nodais se mantêm constantes (ALVES FILHO, 2006).

De início, efetua-se o cálculo do trabalho virtual externo obtido através do conhecimento das forças nodais e dos correspondentes deslocamentos virtuais. Assim:

$$\tau_{externo} = f_1 \cdot v_1^* + M_1 \cdot v_1'^* + f_2 \cdot v_2^* + M_2 \cdot v_2'^* . \quad (2.16)$$

A expressão (2.16) contabiliza o produto das forças pelos respectivos deslocamentos e o produto dos momentos pelos respectivos ângulos.

A representação matricial da Equação (2.16) é dada por:

$$\tau_{externo} = \begin{bmatrix} v_1^* & v_1'^* & v_2^* & v_2'^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \{\delta^*\}^T \cdot \{f\} . \quad (2.17)$$

A imposição de deslocamentos virtuais aos nós do elemento corresponde uma condição deformada virtual interna do elemento. Sabe-se que a deformação por flexão de uma viga está associada à curvatura. Assim, para uma curvatura virtual arbitrária, associada à condição arbitrária externa imposta, é possível contabilizar o trabalho interno, decorrente da ação do momento fletor atuante ao longo da viga e o correspondente ângulo que caracteriza a curvatura ao longo da viga (ALVES FILHO, 2006).

Para um trecho de comprimento dx do elemento, a parcela diferencial de trabalho interno é calculada por:

$$d\tau_{interno} = M \cdot d\theta . \quad (2.18)$$

Ao integrar a Equação (2.18) no intervalo de $x=0$ até $x=L$, contabiliza-se o trabalho total ao longo de todo o elemento. Assim:

$$\tau_{interno} = \int_0^L M \cdot d\theta . \quad (2.19)$$

Da teoria de vigas, tem-se:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \Rightarrow d\theta = \frac{dx}{\rho} = dx \cdot v''(x) . \quad (2.20)$$

No cálculo do trabalho virtual interno, consideram-se os deslocamentos virtuais associados às forças internas. Dessa forma, ao substituir (2.20) em (2.19), obtém-se:

$$\tau_{intemo} = \int_0^L M \cdot d\theta = \int_0^L \left\{ v''(x)^* \right\}^T \cdot M(x) \cdot dx . \quad (2.21)$$

Sabe-se que:

$$\left\{ v''(x)^* \right\}^T = \left([B] \cdot \left\{ \delta^* \right\} \right)^T = \left\{ \delta^* \right\}^T \cdot [B]^T . \quad (2.22)$$

E, substituindo (2.12) em (2.13), tem-se:

$$M(x) = E \cdot I \cdot [B] \cdot \left\{ \delta \right\} . \quad (2.23)$$

A partir das expressões (2.21), (2.22) e (2.23), chega-se a:

$$\tau_{intemo} = \int_0^L \left\{ \delta^* \right\}^T \cdot [B]^T \cdot E \cdot I \cdot [B] \cdot \left\{ \delta \right\} \cdot dx . \quad (2.24)$$

Durante qualquer deslocamento virtual imposto ao elemento, o trabalho externo total realizado pelas forças nodais deve igualar-se ao trabalho interno total realizado pelas forças internas (ALVES FILHO, 2006). Ao igualar as expressões (2.17) e (2.24) e considerar os deslocamentos virtuais arbitrários com valor unitário, obtém-se, então:

$$\left\{ f \right\} = \left[\int_0^L [B]^T \cdot E \cdot I \cdot [B] \cdot dx \right] \cdot \left\{ \delta \right\} . \quad (2.25)$$

Na expressão anterior, o termo entre colchetes representa o coeficiente entre as forças nodais e os deslocamentos nodais para um elemento de viga. É então a matriz de rigidez do elemento (ALVES FILHO, 2006).

A expressão (2.25) desenvolvida a partir do elemento de viga pode ser generalizada e representa o procedimento geral para o cálculo da matriz de rigidez de qualquer elemento finito. Assim, a matriz de rigidez de qualquer elemento finito é dada por:

$$[k]^e = \int_{volume} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dVol . \quad (2.26)$$

2.1.3 Procedimento para a montagem da matriz de rigidez da estrutura

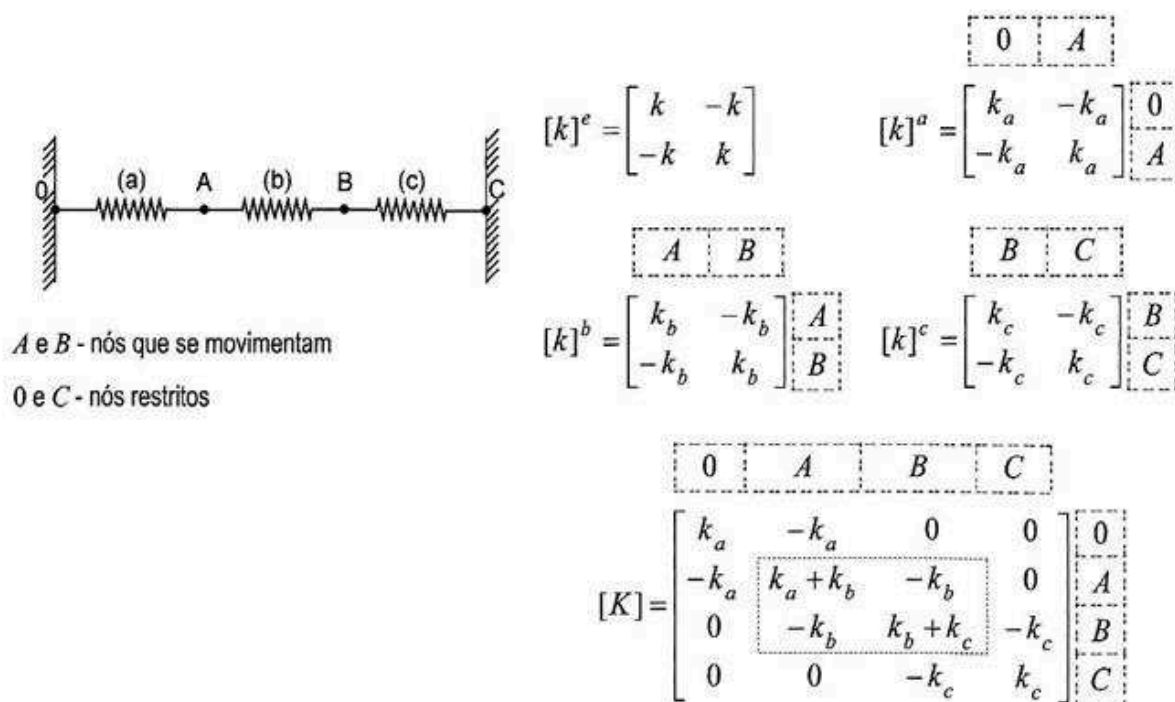


Figura 2.4 - Montagem da matriz de rigidez da estrutura a partir das matrizes de rigidez dos elementos (adaptada de ALVES FILHO, 2008).

A Figura 2.4 representa um procedimento prático, em que a partir da definição do posicionamento de cada elemento na montagem completa de elementos do modelo, é possível obter a matriz de rigidez da estrutura. Entende-se esse

procedimento como uma regra de montagem que envolve, basicamente, as seguintes etapas (ALVES FILHO, 2008):

- Representar a matriz de rigidez de cada elemento do modelo, identificando por meio de um vetor de localização do elemento, a posição de cada elemento na montagem, isto é, entre quais nós o elemento considerado trabalha. Essa ideia pode ser generalizada para elementos como vigas, placas, sólidos, etc. No entanto, nas aplicações mais gerais é necessário identificar entre quais graus de liberdade o elemento considerado trabalha.
- Representar a matriz de rigidez da estrutura, identificando também por meio de um vetor de localização da estrutura, os nós com os quais a estrutura trabalha, ou seja, todos os nós do modelo. Nos casos mais gerais, identificar os graus de liberdade da estrutura.
- Adicionar os termos I, J da matriz de rigidez de cada elemento aos correspondentes locais I, J da matriz de rigidez da estrutura, pois ambos referem-se ao mesmo sistema de referência.

2.2 MEF EM ANÁLISE ESTRUTURAL DINÂMICA

Na prática, existem diversas situações de engenharia em que a hipótese de adotar um modelo estático de elementos finitos está muito distante de representar a situação real de uso da estrutura. Sob a ação de carregamentos dinâmicos, que variam rapidamente com o tempo, as estruturas exibem um comportamento bastante diferente do apresentado quando sujeitas a carregamentos estáticos. A atuação de cargas dinâmicas promove em seus componentes variações consideráveis de velocidade e, portanto, acelerações (ALVES FILHO, 2008).

Segundo Alves Filho (2008), o estudo do comportamento dinâmico de uma estrutura pode ser realizado por meio da sua simulação como uma montagem de elementos finitos. Entretanto, a abordagem dinâmica deve considerar a presença de forças de inércia que se manifestam nas massas distribuídas na estrutura, de acordo com o Princípio Fundamental da Dinâmica (Segunda Lei de Newton).

Para propósitos de análise dinâmica, a princípio, o modelo discretizado da estrutura deve considerar inúmeros sistemas massa-mola, que contabilizam ponto a ponto nodal a rigidez da estrutura e a massa associada. Assim, estudar o comportamento dinâmico de cada grau de liberdade da estrutura é estudar o sistema

massa-mola que o representa. Esta será a base para a montagem do problema dinâmico de toda a estrutura (ALVES FILHO, 2008).

2.2.1 Sistema massa-mola – vibrações livres não amortecidas

Quando se aplica uma força externa a um sistema mecânico perturbando o seu equilíbrio estático estável e, logo após, remove-se esta força, o sistema vibra em torno da sua posição original de equilíbrio. As vibrações experimentadas pelo sistema após a remoção da força externa perturbadora são denominadas vibrações livres, pois não são mantidas por nenhuma fonte excitadora externa ao sistema (ALVES FILHO, 2008).

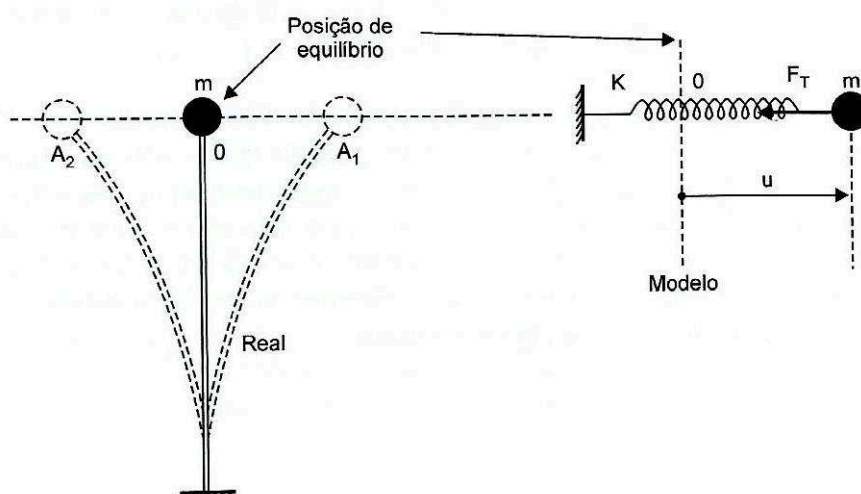


Figura 2.5 - Sistema massa-mola representando o movimento da massa fixada à extremidade da viga na direção horizontal (ALVES FILHO, 2008).

Considere-se o sistema massa-mola da Figura 2.5. De acordo com o Princípio Fundamental da Dinâmica, e levando em conta a projeção da resultante (força elástica) no eixo do movimento, tem-se:

$$F_T = -k \cdot u = m \cdot a \quad . \quad (2.27)$$

Sabendo que a aceleração é dada pela segunda derivada do espaço em relação ao tempo $\left(a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} = \ddot{u}\right)$, a Equação (2.27) pode ser escrita da seguinte forma:

$$-k \cdot u = m \cdot \ddot{u} \Rightarrow \ddot{u} = -\frac{k}{m} \cdot u , \quad (2.28)$$

ou agrupando os termos, tem-se:

$$m \cdot \ddot{u} + k \cdot u = 0 . \quad (2.29)$$

Resta determinar uma função u que satisfaça a Equação (2.29). Observando a Equação (2.28), verifica-se que a função primitiva u deve ser escolhida de modo que a sua segunda derivada, isto é, $\ddot{u}$, seja igual ao valor da própria função u multiplicada por uma constante $\frac{k}{m}$, e com o sinal contrário (ALVES FILHO, 2008).

A função harmônica apresenta a propriedade característica de ter a sua segunda derivada oposta e proporcional à função primitiva. Sendo assim, pode-se dizer que a solução da Equação (2.29) é do tipo:

$$u = A \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t + \varphi_0) . \quad (2.30)$$

Na equação anterior, tanto a amplitude como o ângulo de fase inicial são definidos a partir das condições iniciais impostas ao sistema.

Derivando-se a Equação (2.30), tem-se:

$$\ddot{u} = -\omega_n^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t + \varphi_0) . \quad (2.31)$$

Se a função (2.30) satisfaz a equação diferencial (2.29), pode-se substituir as expressões (2.30) e (2.31) nesta equação. Assim:

$$m \cdot \left[-\omega_n^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t + \varphi_0) \right] + k \cdot \left[A \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t + \varphi_0) \right] = 0 . \quad (2.32)$$

A expressão anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$(k \cdot A - m \cdot \omega_n^2 \cdot A) \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t + \varphi_0) = 0 . \quad (2.33)$$

A Equação (2.33) é o produto de dois termos, uma constante e uma função seno, e para que essa equação seja satisfeita, pelo menos um destes fatores deve ser nulo. A função seno varia e só é nula para alguns valores de t . Portanto, para todos os valores de t a equação diferencial será sempre satisfeita se e somente se o termo constante for nulo (ALVES FILHO, 2008). Dessa forma, tem-se a condição para a Equação (2.33) ser satisfeita:

$$k \cdot A - m \cdot \omega_n^2 \cdot A = 0 . \quad (2.34)$$

Isolando ω_n em (2.34), obtém-se:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} . \quad (2.35)$$

A partir da expressão anterior, a frequência de oscilação do sistema massa-mola é calculada por:

$$f_n = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} . \quad (2.36)$$

É interessante observar que a frequência de oscilação do sistema massa-mola não depende da amplitude de oscilação, e sim das características naturais do sistema, isto é, da inércia e da elasticidade, sendo, portanto, denominada frequência natural do sistema. Tal propriedade só é válida dentro dos limites da Lei de Hooke. Isso quer dizer que a mola mantém-se no regime elástico, e que as deflexões são pequenas, garantindo o comportamento elástico-linear (ALVES FILHO, 2008).

2.2.2 Sistema massa-mola-amortecedor – vibrações livres amortecidas

Na prática, em condições reais, as vibrações livres de um sistema mecânico não se mantêm indefinidamente. Após alguns ciclos, o movimento oscilatório tende a se extinguir em decorrência da perda de energia mecânica devida à presença de resistências internas e externas, representadas pelos atritos internos e nos suportes. Enfim, os sistemas mecânicos estão sujeitos ao fenômeno de amortecimento (ALVES FILHO, 2008).

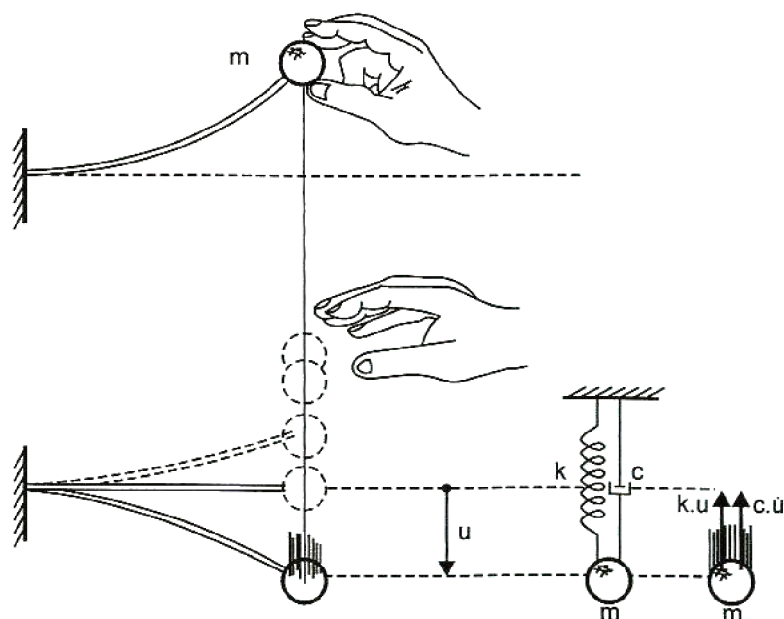


Figura 2.6 - Visão do caso real e do modelo para análise das vibrações livres amortecidas (adaptada de ALVES FILHO, 2008).

Considere-se o sistema de um grau de liberdade massa, mola e amortecedor apresentado na Figura 2.6. Se a massa m for deslocada da sua posição de equilíbrio e abandonada, ela vibrará livremente. Porém, as vibrações se extinguem após um certo tempo devido à presença do amortecimento.

A equação diferencial que traduz o comportamento do sistema é dada por:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = 0 . \quad (2.37)$$

Logo, a solução desta equação resolve o problema das vibrações livres com amortecimento.

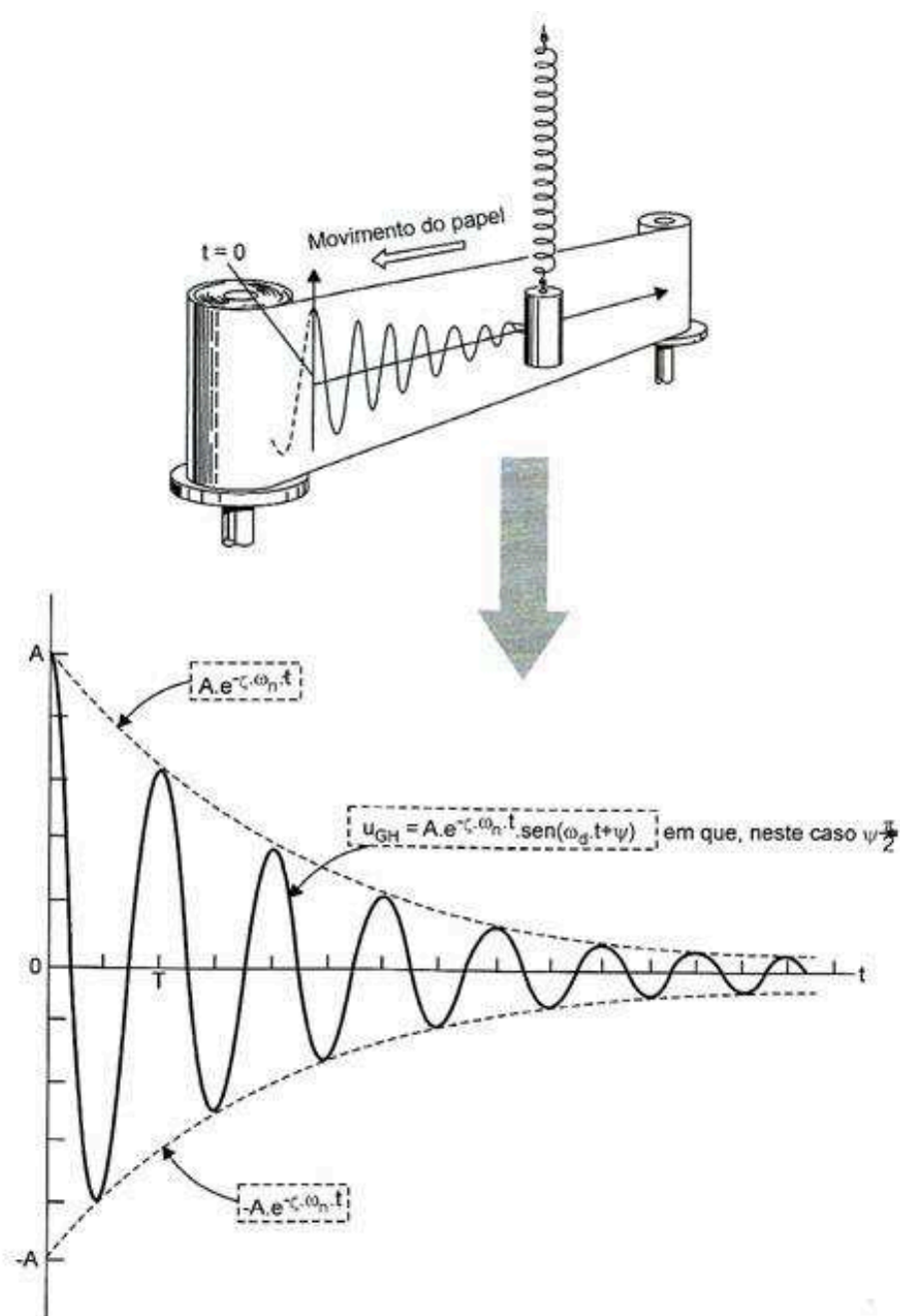


Figura 2.7 - Vibração livre amortecida (adaptada de ALVES FILHO, 2008).

A Figura 2.7 ilustra o movimento amortecido da massa m na extremidade da mola. Fisicamente, a massa apresenta movimento oscilatório cuja amplitude é decrescente com o tempo e tem a tendência de se extinguir. Essa amplitude decresce em cada ciclo de acordo com uma lei exponencial. O gráfico em linha cheia da Figura 2.7 representa como a elongação varia com o tempo. A curva

tracejada limita a amplitude do movimento, e corresponde a uma função exponencial decrescente (ALVES FILHO, 2008).

Matematicamente, a curva tracejada que traduz o decaimento é representada por uma função do tipo $A \cdot e^{-p \cdot t}$. A taxa ou a rapidez com que esse decaimento ocorre é determinada pela constante p . No caso das vibrações amortecidas, a constante p é dada pelo produto de um termo relacionado ao amortecimento (ζ) pela frequência natural do sistema (ω_n), ou seja, a curva tracejada é representada por $A \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t}$ (ALVES FILHO, 2008).

O fenômeno de vibrações é descrito por uma função senoidal, que traduz a sua característica oscilatória, e o decaimento devido ao amortecimento é especificado pela função exponencial decrescente. Assim, o resultado desses dois efeitos é representado pelo produto das duas funções (ALVES FILHO, 2008). Traduzindo matematicamente esse fenômeno, tem-se:

$$u_{GH}(t) = A \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \text{sen}(\omega_d \cdot t + \psi), \quad (2.38)$$

onde $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_n$.

A função dada em (2.38) pode ser interpretada como um movimento harmônico de frequência ω_d e cuja amplitude é $A \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t}$. Ou seja, a Equação (2.38) representa a equação de um movimento harmônico cuja amplitude variável decresce exponencialmente com o tempo. O movimento descrito por essa função é denominado movimento transiente do sistema (ALVES FILHO, 2008).

2.2.3 Sistema massa-mola-amortecedor – vibrações forçadas amortecidas

Quando a estrutura está vibrando sob a ação de um carregamento dinâmico, as massas estão sujeitas a vibrações forçadas. Para entender o comportamento dinâmico da estrutura, é importante entender o comportamento dinâmico de cada nó do modelo, ou, mais genericamente, de cada grau de liberdade (ALVES FILHO, 2008).

Existem diversos tipos de carga dinâmica e a abordagem matemática adequada para se estabelecer a solução do problema dinâmico, passa inicialmente

pelo reconhecimento do tipo de carregamento que solicita a estrutura. Em particular, o estudo do comportamento da estrutura sob a ação de cargas senoidais constitui a base para entender como a estrutura se comporta sob o efeito de todos os outros tipos de carregamentos em sistemas lineares (ALVES FILHO, 2008).

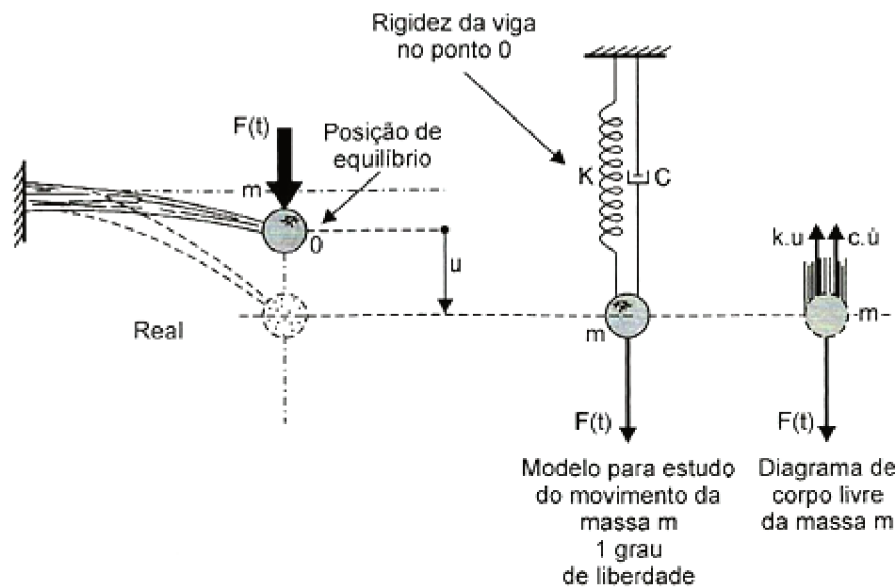


Figura 2.8 - Estrutura real e modelo para estudo do movimento forçado da massa fixada à extremidade da viga na direção vertical (ALVES FILHO, 2008).

Considere-se o sistema massa-mola-amortecedor apresentado na Figura 2.8. A massa, a mola e o amortecedor representam no modelo a inércia m , a rigidez k e o mecanismo de perda de energia c em um grau de liberdade da estrutura, que agora estará sujeito à ação de uma força externa $F(t)$.

A partir do Diagrama de Corpo Livre da massa m e da aplicação da 2ª Lei de Newton, chega-se à equação do movimento. Considerando a projeção da resultante no eixo do movimento, tem-se:

$$F(t) - k \cdot u - c \cdot \dot{u} = m \cdot \ddot{u} . \quad (2.39)$$

A equação que traduz o comportamento do sistema é dada por:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = F(t) . \quad (2.40)$$

A resposta do sistema depende do modo particular segundo o qual o agente externo lhe solicita. A cada modo particular de impor uma vibração forçada ao sistema resultará um modo particular de responder à excitação. Os matemáticos costumam então dizer que a solução da Equação (2.40) é uma solução particular da equação diferencial, pois a cada particular tipo de função $F(t)$ excitadora corresponderá uma particular solução da equação diferencial (ALVES FILHO, 2008).

Supondo que a força varia de acordo com uma função senoidal, ou seja, $F(t) = F_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$, escreve-se:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = F_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) . \quad (2.41)$$

Como a excitação é senoidal, a resposta também será senoidal. De forma geral, pode-se representar a resposta senoidal da seguinte forma:

$$u_p(t) = B_1 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) + B_2 \cdot \cos(\omega \cdot t) . \quad (2.42)$$

A frequência angular ω presente nas Equações (2.41) e (2.42) corresponde à frequência de excitação imposta pelo agente externo. É, portanto, completamente independente de ω_n .

Calculando as derivadas primeira e segunda da função $u_p(t)$, obtêm-se:

$$\dot{u}_p(t) = B_1 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) - B_2 \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) ; \quad (2.43)$$

$$\ddot{u}_p(t) = -B_1 \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) - B_2 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) . \quad (2.44)$$

Como $u_p(t)$ é uma solução particular da equação do movimento, ela verificará a equação ao ser substituída nela. Substituindo (2.42), (2.43) e (2.44) em (2.41), tem-se:

$$\begin{aligned}
 & -m \cdot B_1 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) - m \cdot B_2 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) + c \cdot B_1 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) - \\
 & -c \cdot B_2 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) + k \cdot B_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + k \cdot B_2 \cdot \cos(\omega \cdot t) = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) .
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Ao agrupar os coeficientes das funções seno e cosseno dos dois membros da equação e igualar esses coeficientes, pois os dois membros são iguais, obtém-se:

$$\begin{cases} (k - m \cdot \omega^2) \cdot B_1 - c \cdot \omega \cdot B_2 = F_0 ; \\ c \cdot \omega \cdot B_1 + (k - m \cdot \omega^2) \cdot B_2 = 0 . \end{cases} \tag{2.46}$$

Resolvendo o sistema anterior, encontram-se as duas incógnitas B_1 e B_2 . Substituindo os seus valores na Equação (2.42), tem-se a solução particular da equação do movimento, ou seja, como a massa se desloca ao longo do tempo ao ser submetida à força senoidal. Assim:

$$u_p(t) = \frac{(k - m \cdot \omega^2) \cdot F_0}{\left\{ (k - m \cdot \omega^2)^2 + (c \cdot \omega)^2 \right\}} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \frac{(-c \cdot \omega) \cdot F_0}{\left\{ (k - m \cdot \omega^2)^2 + (c \cdot \omega)^2 \right\}} \cdot \cos(\omega \cdot t) . \tag{2.47}$$

A Equação (2.42) pode ser escrita da seguinte forma:

$$u_p(t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) , \tag{2.48}$$

em que:

$$U = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m \cdot \omega^2)^2 + (c \cdot \omega)^2}} , \tag{2.49}$$

$$\phi = \arctg \frac{-c \cdot \omega}{k - m \cdot \omega^2} , \tag{2.50}$$

e, portanto:

$$u_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m \cdot \omega^2)^2 + (c \cdot \omega)^2}} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi) . \quad (2.51)$$

Convém representar a vibração forçada de modo adimensional. Antes, porém, é necessário definir o fator de amortecimento ζ e a relação de frequências r .

O fator de amortecimento ζ é uma grandeza adimensional que representa o amortecimento presente no sistema comparado ao amortecimento crítico. Assim:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega_n} . \quad (2.52)$$

A relação de frequências r expressa a relação entre a frequência de excitação ω e a frequência natural ω_n . Desse modo:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} . \quad (2.53)$$

Dividindo o numerador e o denominador da expressão (2.49) por k , introduzindo a constante k do denominador na raiz e realizando as substituições necessárias, obtém-se:

$$U = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot r)^2}} . \quad (2.54)$$

Observa-se que o deslocamento máximo da resposta senoidal será dado por $\frac{F_0}{k}$ multiplicado por um fator que é o termo $\frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot r)^2}}$, denominado fator de amplificação dinâmica e representado por χ . Fisicamente, esse fator representa a correção da resposta estática pelo fato de existirem forças de inércia presentes no sistema (ALVES FILHO, 2008).

Dividindo o numerador e o denominador da expressão (2.50) por k e realizando as substituições necessárias, ϕ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\phi = \arctg \frac{-2 \cdot \zeta \cdot r}{1 - r^2} . \quad (2.55)$$

A partir das expressões (2.54) e (2.55), a solução particular da equação diferencial (2.41) é dada por:

$$u_p(t) = \frac{F_0}{k} \cdot \chi \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \phi) , \quad (2.56)$$

onde $\phi = \arctg \frac{2 \cdot \zeta \cdot r}{1 - r^2} .$

2.2.4 Vibração livre amortecida e vibração forçada superpostas

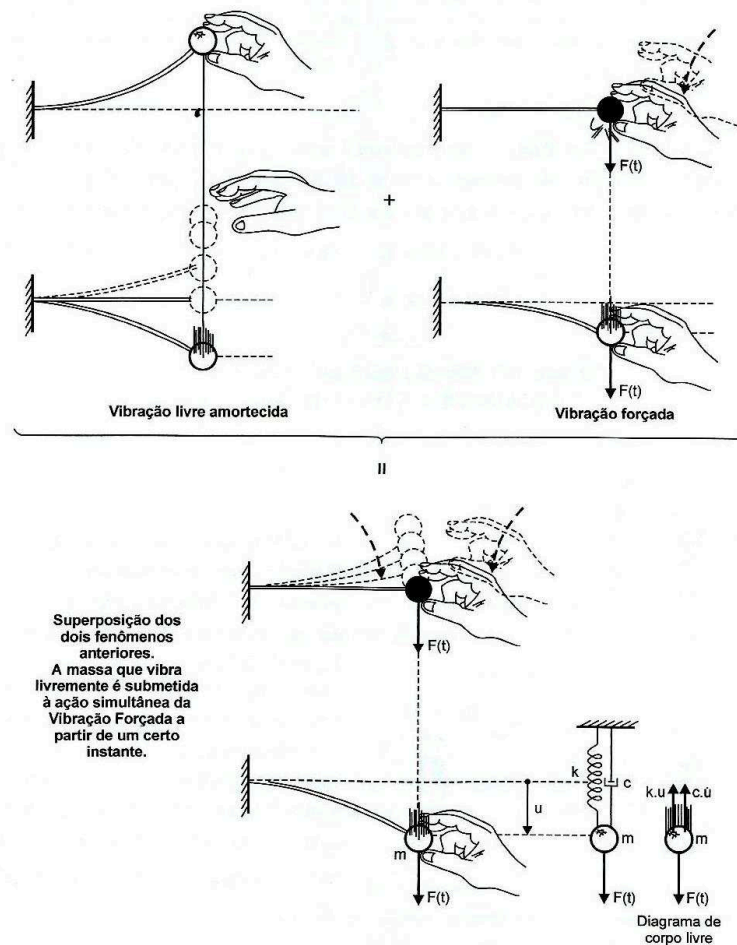


Figura 2.9 - Vibração livre amortecida e vibração forçada superpostas (ALVES FILHO, 2008).

A Figura 2.9 representa o caso mais geral, em que a massa vibra livremente e, a partir de um determinado instante, é submetida simultaneamente a uma vibração forçada. Simbolicamente, pode-se escrever:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = 0 + F(t) . \quad (2.57)$$

Os matemáticos dizem que a solução geral da equação diferencial completa a coeficientes constantes (2.57) é dada pela solução geral da equação homogênea correspondente (vibração livre), mais uma solução particular da equação (vibração forçada). Ou seja, a solução geral da Equação (2.57) corresponde à solução da vibração livre superposta à solução da vibração forçada (ALVES FILHO, 2008).

De posse das Equações (2.38) e (2.56), a resposta do sistema de um grau de liberdade ao carregamento harmônico é dada no caso mais geral por:

$$u(t) = A \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \text{sen}(\omega_d \cdot t + \psi) + \frac{F_0}{k} \cdot \chi \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \phi) . \quad (2.58)$$

2.2.5 Equilíbrio dinâmico de sistemas com vários graus de liberdade

Sabe-se que, de forma simplificada, o modelo discretizado da estrutura para propósito dos estudos da análise dinâmica é composto por inúmeros sistemas massa-mola-amortecedor, que contabilizam ponto a ponto nodal a rigidez da estrutura, a massa associada e o amortecimento presente. Sob a ação das forças externas que solicitam a estrutura, deve-se prever qual é o comportamento dela. Para isso é preciso entender o que ocorre em cada nó, ou mais propriamente, em cada grau de liberdade da estrutura, para posteriormente entender o comportamento dinâmico do conjunto (ALVES FILHO, 2008).

A Equação (2.40) traduz o comportamento dinâmico de cada grau de liberdade da estrutura. No entanto, em problemas reais de aplicação do MEF os modelos discretizados apresentam milhares de graus de liberdade e, conseqüentemente, milhares de equações diferenciais serão geradas (ALVES FILHO, 2008).

À semelhança da análise estática, as inúmeras equações diferenciais geradas a partir da condição de equilíbrio dinâmico de cada grau de liberdade com massa são resolvidas com o auxílio de computadores. A maneira mais eficiente de armazenar essas informações e processá-las é por meio de matrizes, muito utilizadas nos procedimentos do MEF (ALVES FILHO, 2008).

As milhares de equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico dos inúmeros nós da estrutura são representadas de forma compacta pela equação matricial:

$$[M] \cdot \{\ddot{U}(t)\} + [C] \cdot \{\dot{U}(t)\} + [K] \cdot \{U(t)\} = \{F(t)\} . \quad (2.59)$$

Deve-se ter em mente que essas milhares de equações diferenciais não são independentes entre si, assim como os movimentos dos milhares de nós do modelo. Do mesmo modo que o movimento de um nó está acoplado ao movimento de outros nós, as equações diferenciais que traduzem esses movimentos também estão. Se essas equações fossem independentes entre si, não haveria problema. Embora houvesse a necessidade de resolver milhares delas, bastaria estabelecer uma rotina que resolvesse milhares de equações diferenciais individuais usando as soluções já conhecidas, uma após a outra, independentemente (ALVES FILHO, 2008).

2.2.5.1 Consideração da massa distribuída no elemento: matriz de massa consistente

Na análise estática desenvolve-se o cálculo dos deslocamentos de uma estrutura utilizando um modelo discretizado, considerando somente os deslocamentos nodais do modelo para a representação da configuração deformada da estrutura inteira. Na montagem do sistema de equações de equilíbrio, fazendo uso da linguagem matricial, consideram-se as cargas atuando apenas nos nós do modelo. Porém, nas estruturas reais o carregamento age não somente nos nós, mas, na maioria dos casos, entre os nós dos elementos (ALVES FILHO, 2008).

A partir do conceito de cargas nodais equivalentes, ou seja, cargas que, atuando somente nos nós do modelo, produzem o mesmo efeito na estrutura que as cargas distribuídas nos vãos dos elementos, um software de elementos finitos

transforma um carregamento distribuído no vão de uma viga ou, em geral, entre os nós dos elementos, em cargas nodais equivalentes, e pode gerar, então, as equações algébricas que permitirão o cálculo dos deslocamentos nodais (ALVES FILHO, 2008).

As forças de inércia que atuam no vão dos elementos também podem ser transformadas em forças nodais equivalentes, representando adequadamente o fato de que tais forças não estão originalmente concentradas nos nós (ALVES FILHO, 2008).

Para avaliar as forças de inércia dentro dos elementos é necessário conhecer as acelerações dentro deles. O conhecimento das acelerações dentro dos elementos pode ser adquirido com base no conhecimento das acelerações nodais, utilizando os procedimentos de interpolação de forma idêntica à análise estática (ALVES FILHO, 2008).

A ideia de utilizar a mesma função de forma que descreve o deslocamento interno dos elementos em termos de deslocamentos nodais, para fornecer também a aceleração interna em termos de acelerações nodais, conduz ao conceito da matriz de massa consistente do elemento, dada por:

$$[M]^e = \int_{V^e} [N]^T \cdot [\rho] \cdot [N] \cdot dV^e . \quad (2.60)$$

Assim como na análise estática a matriz de rigidez da estrutura é obtida com base na matriz de rigidez de cada elemento por processo direto de montagem, na análise dinâmica a matriz de massa da estrutura é obtida com base na matriz de massa de cada elemento por processo direto de montagem, considerando-se, adicionalmente, as massas concentradas originalmente nos nós (ALVES FILHO, 2008).

2.2.5.2 Considerações em relação à montagem da matriz de amortecimento da estrutura

A matriz de amortecimento $[C]$, em geral, não é montada a partir das matrizes de amortecimento dos elementos, tal como é feito para as matrizes de rigidez e massa. É que, do ponto de vista prático, é muito difícil, se não impossível,

determinar para a montagem geral dos elementos, as características de amortecimento de cada elemento isoladamente, pois as propriedades de amortecimento dependem da frequência (ALVES FILHO, 2008).

Um modelo bastante utilizado para avaliação da matriz de amortecimento é o amortecimento de Rayleigh ou amortecimento proporcional, que contabiliza a matriz de amortecimento $[C]$ como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, isto é:

$$[C] = \alpha \cdot [K] + \beta \cdot [M] . \quad (2.61)$$

Demonstra-se que a relação entre α e β , o fator de amortecimento ζ e a frequência natural ω é dada por:

$$\zeta = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha \cdot \omega + \frac{\beta}{\omega} \right) . \quad (2.62)$$

As constantes α e β podem ser determinadas tomando-se, por exemplo, dois fatores de amortecimento ζ_1 e ζ_2 em duas frequências diferentes ω_1 e ω_2 , resolvendo-se um sistema de duas equações com duas incógnitas.

2.2.6 Solução das equações de equilíbrio em análise dinâmica pelo Método da Superposição Modal

Há certas situações físicas, como, por exemplo, ao abordar sistemas lineares, em que a resolução do sistema de equações diferenciais pode ser efetuada através do Método da Superposição Modal. A ideia do método consiste em transformar o sistema e apresentá-lo de forma equivalente. Essa forma corresponde, na prática, ao desacoplamento do sistema de equações. Enfim, o sistema pode ser resolvido tratando de um sistema equivalente desacoplado, em que é possível resolver vários problemas independentes uns dos outros e superpor os resultados desses problemas independentes para obter a resposta de interesse (ALVES FILHO, 2008).

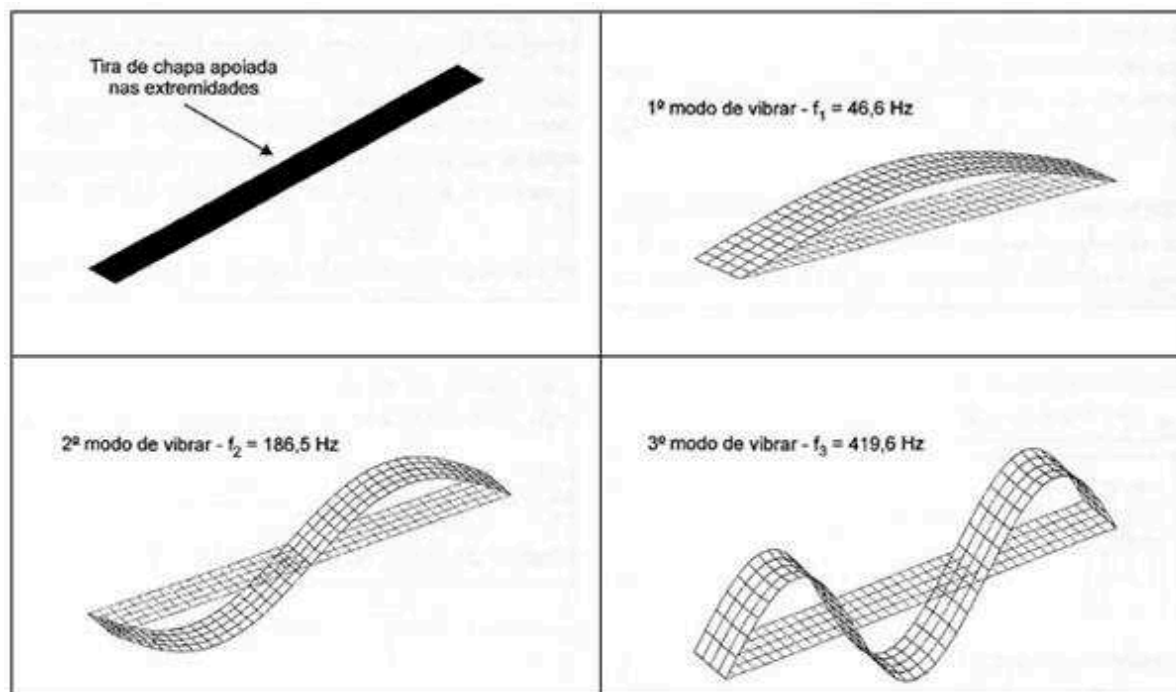


Figura 2.10 - Chapa de aço apoiada nas extremidades e alguns de seus modos possíveis de vibração natural e respectivas frequências naturais (adaptada de ALVES FILHO, 2008).

A Figura 2.10 representa uma viga apoiada nas suas extremidades em que diversas condições iniciais diferentes de deformação foram impostas. Removendo a força perturbadora externa, em cada caso o modo de vibrar será diferente, isto é, desde que as condições iniciais em que a viga é abandonada variem caso a caso, as vibrações livres podem assumir diversos perfis deformados diferentes.

Surge, então, o conceito de vibrações naturais. O nome natural refere-se ao fato de que os modos possíveis de vibrar de uma estrutura e as correspondentes frequências de vibração de cada modo dependem somente dos parâmetros inerentes ao sistema, tais como a distribuição de massa, a rigidez da estrutura nos seus diversos pontos e as condições de apoio (ALVES FILHO, 2008).

Um sistema discreto com n graus de liberdade apresenta n modos possíveis naturais de vibração e a cada um desses modos associa-se uma frequência de vibração.

Em sistemas lineares, ao tentar determinar o comportamento dinâmico de uma estrutura ao carregamento externo, o primeiro passo é determinar os seus modos e frequências naturais, é a denominada Análise Modal. A Análise Modal reflete o

comportamento dinâmico básico da estrutura e constitui uma indicação de como responderá ao carregamento dinâmico agente sobre ela.

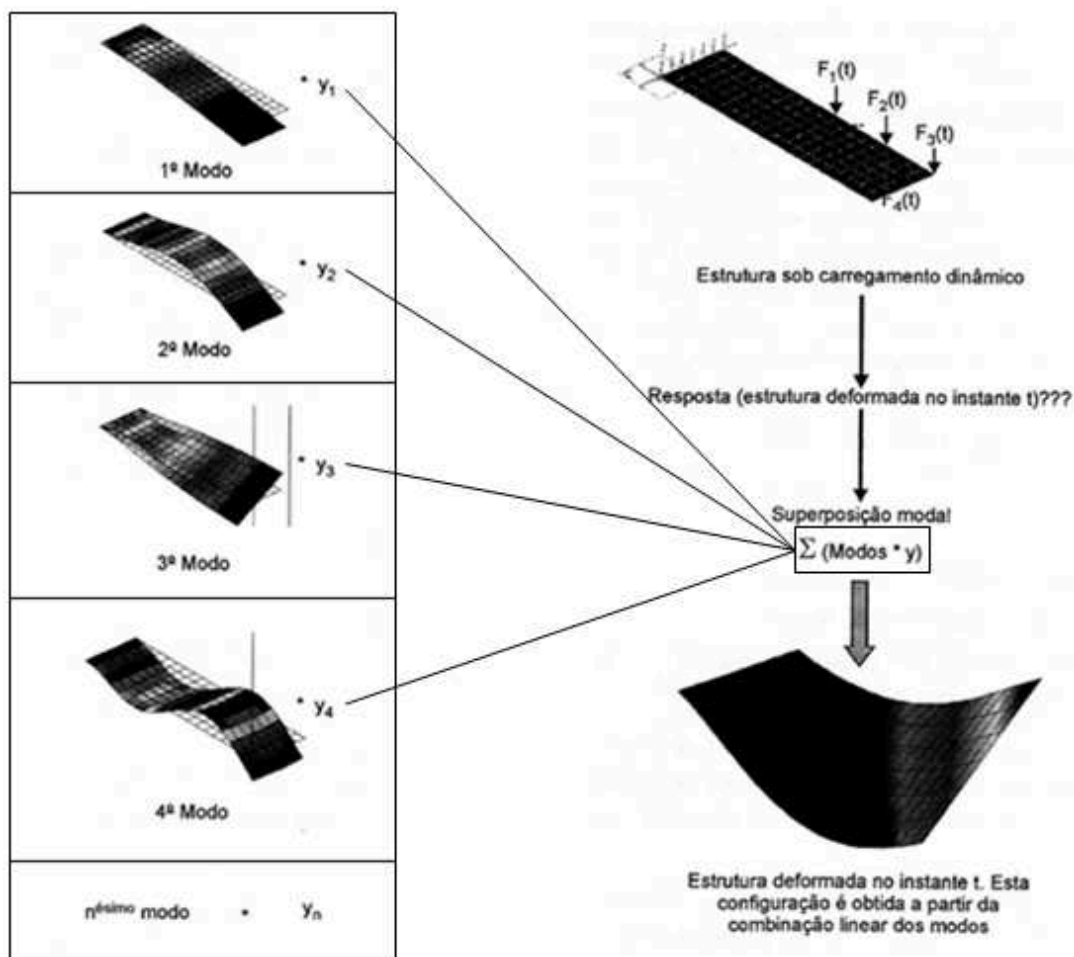


Figura 2.11 - Hipótese da Superposição Modal (adaptada de ALVES FILHO, 2008).

A chave da determinação da resposta dinâmica está fundamentada na hipótese da Superposição Modal. A Figura 2.11 ilustra a ideia dessa hipótese. É representada uma estrutura e seus diversos modos possíveis de vibração. A estrutura está sujeita ao carregamento dinâmico, indicado pelas forças $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ e $F_4(t)$ que atuam nos nós representados. Deseja-se determinar a configuração deformada da estrutura em um instante t qualquer (ALVES FILHO, 2008).

Conforme a hipótese da Superposição Modal, a configuração deformada em um dado instante pode ser obtida somando-se as configurações de cada modo de vibrar, resultando na configuração deformada da estrutura. Essa soma de configurações é uma combinação linear dos modos naturais de vibração da estrutura. Cada modo de vibrar vem nessa soma, multiplicado por um coeficiente

que representa a importância do correspondente modo no cálculo da resposta, ou seja, o peso ou o fator de participação daquele modo no cálculo da resposta dinâmica. Esses pesos associados a cada modo variam de instante para instante, de forma que, ao se efetuar a combinação linear, em cada instante, tem-se uma resposta diferente. Assim, é possível construir o histórico da estrutura ao longo do tempo (ALVES FILHO, 2008). Em resumo, pode-se representar:

$$\begin{aligned} \text{RESPOSTA DINÂMICA} &= (1^\circ \text{ MODO}) \cdot y_1 + (2^\circ \text{ MODO}) \cdot y_2 + \dots + (n^\circ \text{ MODO}) \cdot y_n = \\ &= \sum (\text{MODOS} \cdot y) . \end{aligned} \quad (2.63)$$

A obtenção da resposta dinâmica da estrutura ao carregamento externo passa pela execução de duas etapas (ALVES FILHO, 2008):

- Cálculo dos modos e frequências naturais de vibração da estrutura – Análise Modal.
- Determinação do fator de participação de cada modo de vibrar na resposta $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, por intermédio do desacoplamento das equações de equilíbrio.

Em relação ao cálculo dos modos e frequências naturais de vibração da estrutura, o amortecimento não será considerado. Em primeiro lugar, porque nas aplicações de vibrações em estruturas, o amortecimento presente é pequeno. Complementarmente, as frequências naturais e os modos de vibrar de uma estrutura praticamente independem do amortecimento quando esse é pequeno. Além disso, o tratamento matemático das vibrações livres sem amortecimento é bem mais simples do que as vibrações livres amortecidas. Por outro lado, mesmo sendo pequeno o amortecimento presente, ele tem forte influência na resposta da estrutura sob a ação do carregamento dinâmico (ALVES FILHO, 2008).

2.2.6.1 Análise Modal

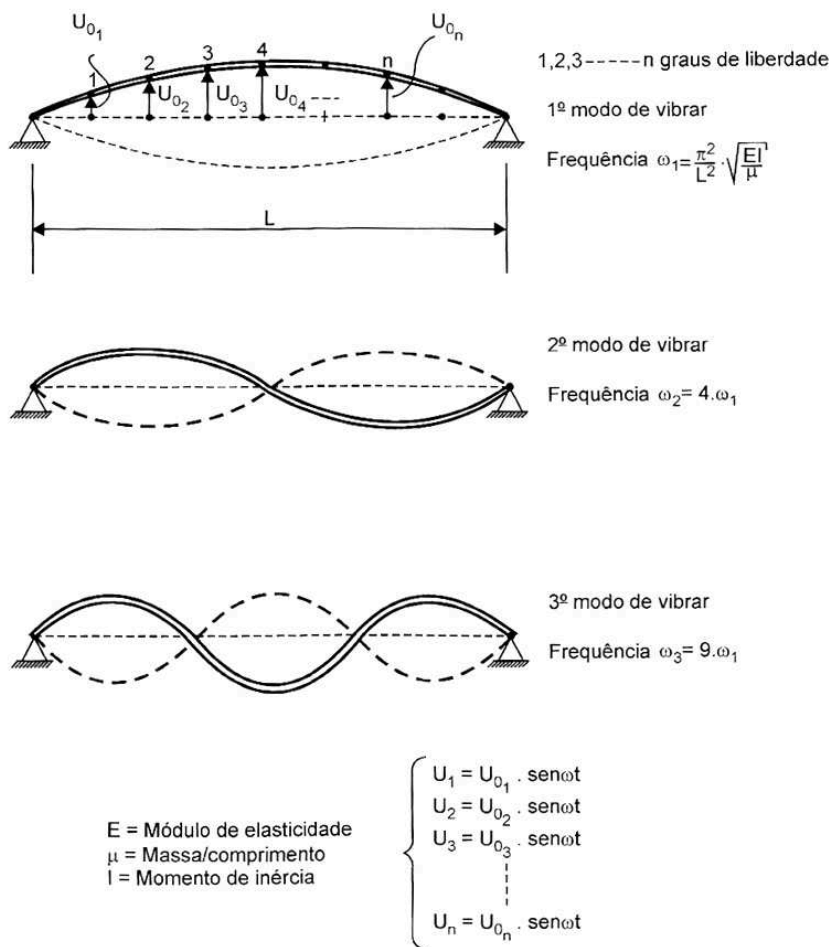


Figura 2.12 - Exemplo de vibrações naturais de uma estrutura (ALVES FILHO, 2008).

Sabe-se que o sistema de n graus de liberdade pode ser representado pela rigidez e massa associada a cada grau de liberdade. Assim, cada grau de liberdade apresenta um movimento de vibração livre semelhante ao sistema massa-mola, e executa durante uma vibração livre um Movimento Harmônico Simples (ALVES FILHO, 2008).

Se a estrutura for discretizada por n graus de liberdade, cada grau de liberdade descreve em cada modo de vibrar um movimento dado por uma função horária do tipo $U(t) = U_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$, sendo ω a frequência natural. A particularidade é que cada grau de liberdade pode ter uma amplitude diferente na sua vibração livre, conforme mostra a Figura 2.12 (ALVES FILHO, 2008).

Para a estrutura discretizada com n graus de liberdade pode-se, resumidamente, estabelecer que:

$$\{U(t)\} = \begin{Bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{01} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \\ U_{02} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \\ \vdots \\ U_{0n} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{01} \\ U_{02} \\ \vdots \\ U_{0n} \end{Bmatrix} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) . \quad (2.64)$$

De forma compacta, pode-se escrever:

$$\{U(t)\} = \{U_0\} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) . \quad (2.65)$$

Baseando-se no estudo do sistema com um grau de liberdade, nota-se que a equação diferencial (2.29) representa as vibrações livres sem amortecimento do sistema massa-mola. A versão matricial dessa equação, aplicada aos milhares de graus de liberdade da estrutura, pode ser obtida por considerações semelhantes em relação ao amortecimento, que é pequeno ($c=0 \Rightarrow \zeta=0$), e à inexistência de forças externas na vibração livre ($\{F(t)\}=0$) (ALVES FILHO, 2008). Assim:

$$[M] \cdot \{\ddot{U}(t)\} + [K] \cdot \{U(t)\} = 0 . \quad (2.66)$$

A equação matricial (2.65) corresponde à solução das equações diferenciais dos n graus de liberdade e, portanto, sua substituição na Equação (2.66) deve satisfazê-la para qualquer valor do tempo t . Antes da substituição, deve-se calcular a derivada segunda da função $\{U(t)\}$. Lembrando que $\{U_0\}$ é constante, obtém-se:

$$\{\ddot{U}(t)\} = -\{U_0\} \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) . \quad (2.67)$$

Fazendo a substituição, tem-se:

$$-[M] \cdot \{U_0\} \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) + [K] \cdot \{U_0\} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) = 0 . \quad (2.68)$$

Simplificando a Equação (2.68):

$$-[M] \cdot \{U_0\} \cdot \omega^2 + [K] \cdot \{U_0\} = 0. \quad (2.69)$$

Obteve-se a Equação (2.69) substituindo a solução da vibração livre sem amortecimento nas equações diferenciais que descrevem essa vibração. Assim, (2.69) é a própria equação de equilíbrio dinâmico do sistema vibrando harmonicamente (ALVES FILHO, 2008). Melhorando a apresentação da equação, chega-se em:

$$([K] - \omega^2 \cdot [M]) \cdot \{U_0\} = 0. \quad (2.70)$$

O significado físico da Equação (2.70) é de suma importância. Cada modo de vibrar da estrutura representada na Figura 2.12 tem um perfil próprio e uma frequência própria. Cada uma das frequências associadas aos respectivos modos é representada por ω , e o perfil associado a cada modo é representado por um vetor $\{U_0\}$. A Equação (2.70) somente é satisfeita para alguns valores particulares de ω e $\{U_0\}$, que são os vetores associados a cada modo e as respectivas frequências naturais (ALVES FILHO, 2008).

A solução trivial da Equação (2.70) ocorre quando $\{U_0\} = 0$. Ela sempre será satisfeita para essa condição. Nesse caso, o perfil da estrutura corresponde à situação em que nenhuma deformação inicial é imposta à estrutura, consequentemente não promovendo vibrações livres (ALVES FILHO, 2008).

A solução não trivial ocorre para $[K] - \omega^2 \cdot [M] = \{0\}$. Essa operação matricial somente será satisfeita para alguns valores de ω , que são as frequências naturais. Essa relação só será possível quando o determinante da matriz $[K] - \omega^2 \cdot [M]$ for nulo. Ao montar o determinante da matriz $[K] - \omega^2 \cdot [M]$ e igualá-lo a zero, será gerada uma equação que terá ω^2 como incógnita. O grau dessa equação depende das dimensões das matrizes e, consequentemente, do número de graus de liberdade da estrutura. Em função do grau dessa equação, serão geradas várias raízes que permitirão definir as diversas frequências naturais de um sistema de vários graus de liberdade. É por essa razão que a equação gerada dessa forma é

denominada equação de frequência do sistema (ALVES FILHO, 2008). Resumidamente:

$$\det([K] - \omega^2 \cdot [M]) = 0 . \quad (2.71)$$

É comum representar $\lambda = \omega^2$, assim a equação de frequência ficará:

$$\det([K] - \lambda \cdot [M]) = 0 . \quad (2.72)$$

Segundo Alves Filho (2008), os valores de λ que verificam a Equação (2.72) estão associados às características próprias da estrutura, que são suas frequências naturais, e são denominados autovalores do sistema $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

A cada autovalor λ_i corresponde um modo de vibrar da estrutura, que está associado a um perfil relacionado a esse modo. O perfil do modo correspondente pode ser representado por um vetor com os deslocamentos que definem esse perfil. Esse vetor define, portanto, uma característica própria da estrutura nesse modo, ou uma autocaracterística. Esse perfil é denominado autovetor (ALVES FILHO, 2008). Assim, para um modo i de vibrar:

$$([K] - \lambda_i \cdot [M]) \cdot \{\phi_i\} = \{0\} . \quad (2.73)$$

Os modos principais de vibração de sistemas com dois ou mais graus de liberdade são ortogonais entre si e constituem uma base. É impossível expressar um dos modos de vibrar como uma combinação linear dos outros. No entanto, a configuração deformada da estrutura em qualquer instante pode ser representada pela soma dos modos principais (ALVES FILHO, 2008).

Desta forma, quando são necessárias n coordenadas independentes para definir as posições das massas de um sistema, caracterizando um sistema com n graus de liberdade, vale a propriedade de ortogonalidade dos autovetores em relação às matrizes de massa e rigidez (ALVES FILHO, 2008). Assim, para dois modos de vibrar diferentes i e j , representados pelos seus respectivos autovetores, pode-se escrever:

$$\{\phi_j\}^T \cdot [K] \cdot \{\phi_i\} = 0 ; \quad (2.74)$$

$$\{\phi_j\}^T \cdot [M] \cdot \{\phi_i\} = 0 . \quad (2.75)$$

Para um modo genérico qualquer de vibração da estrutura, caracterizado pela frequência ω_i , verifica-se que o produto $\{\phi_i\}^T \cdot [K] \cdot \{\phi_i\}$ resulta em um termo de rigidez e o produto $\{\phi_i\}^T \cdot [M] \cdot \{\phi_i\}$ resulta em um termo de inércia (massa). Em resumo:

$$k_i = \{\phi_i\}^T \cdot [K] \cdot \{\phi_i\} ; \quad (2.76)$$

$$m_i = \{\phi_i\}^T \cdot [M] \cdot \{\phi_i\} . \quad (2.77)$$

Portanto, a cada modo i de vibração associa-se uma massa m_i e uma rigidez k_i que representam esse modo. Pode-se construir um sistema auxiliar generalizado com essa massa e essa rigidez, de modo que $\lambda_i = \omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i}$, conforme ilustra a Figura 2.13 (ALVES FILHO, 2008).

A massa m_i e a rigidez k_i que representam toda a estrutura para o cálculo do autovalor λ_i são denominadas, respectivamente, massa generalizada e rigidez generalizada para o modo i de vibração. Nesses sistemas, as coordenadas da massa são dadas pela grandeza y_i , e são denominadas coordenadas generalizadas (ALVES FILHO, 2008).

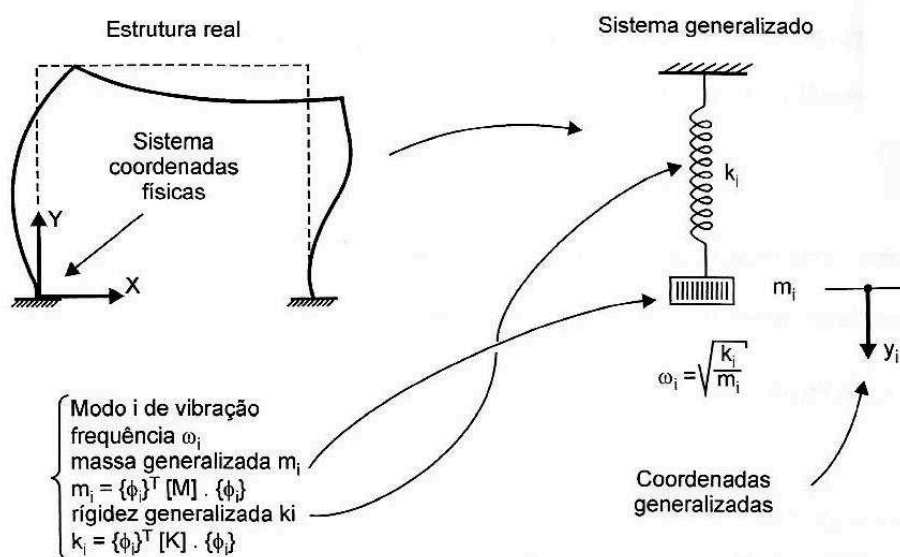


Figura 2.13 - Estrutura real e um modo genérico qualquer de vibração dela, caracterizado pela frequência ω_i (ALVES FILHO, 2008).

2.2.6.2 Método de Stodola

Sabe-se que a resposta estrutural dinâmica pode ser determinada a partir do conhecimento dos modos e frequências naturais da estrutura. A resolução da equação de frequência $\det([K] - \lambda \cdot [M]) = 0$ e da equação de equilíbrio $([K] - \lambda_i \cdot [M]) \cdot \{\phi_i\} = \{0\}$ permitem determinar, respectivamente, os autovalores e autovetores.

A resolução manual da equação de frequência é bastante viável em sistemas com um pequeno número de graus de liberdade. Em problemas reais de aplicação do MEF, com centenas ou milhares de graus de liberdade, essa forma de resolver o polinômio característico $p(\lambda) = \det([K] - \lambda \cdot [M])$ torna-se impraticável. Surgem então os processos iterativos para solução dos problemas de autovalor e autovetor na prática de aplicação do MEF (ALVES FILHO, 2008).

O Método de Stodola é um procedimento iterativo de análise que permite a extração dos modos e frequências naturais da estrutura. O ponto central que conceitua esse método é o entendimento da Equação (2.73) (ALVES FILHO, 2008). Efetuando os produtos matriciais e separando os membros, tem-se:

$$[K] \cdot \{\phi_i\} = [M] \cdot \{\phi_i\} \cdot \lambda_i . \quad (2.78)$$

A expressão anterior ainda pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{\phi_i\} = [K]^{-1} \cdot [M] \cdot \{\phi_i\} \cdot \lambda_i = [D] \cdot \{\phi_i\} \cdot \lambda_i . \quad (2.79)$$

O produto matricial $[K]^{-1} \cdot [M]$ representa as características dinâmicas da estrutura contabilizando a rigidez e inércia dela, sendo por isso denominado matriz dinâmica $[D]$ (ALVES FILHO, 2008).

A Equação (2.79) não é verificada para qualquer valor de λ_i ou qualquer vetor $\{\phi_i\}$. Essa equação será verificada somente para os pares correspondentes de autovalores λ_i e os respectivos autovetores $\{\phi_i\}$, ou seja, os verdadeiros modos e frequências naturais da estrutura (ALVES FILHO, 2008).

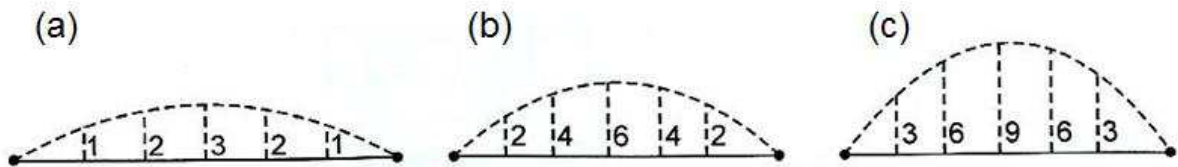


Figura 2.14 - Autovetores representando o mesmo modo de vibrar da estrutura (adaptada de ALVES FILHO, 2008).

A Figura 2.14 ilustra três perfis associados ao primeiro modo de vibrar da estrutura. Em todos os casos as frequências de oscilações serão iguais à frequência do primeiro modo de vibrar, já que ela não depende da amplitude, no âmbito do problema linear. O caso (a) representa um dos perfis associados a esse modo. Se a estrutura for afastada com essa configuração da posição de equilíbrio, ela irá vibrar de modo que cada grau de liberdade manterá a amplitude igual a: $U_1=1$; $U_2=2$; $U_3=3$; $U_4=2$; $U_5=1$. Nos casos (b) e (c), a situação é a mesma, porém o afastamento da posição de equilíbrio é proporcionalmente maior em ambos.

Pode-se dizer então que os autovetores dos casos (a), (b) e (c) da Figura 2.14 representam o mesmo modo de vibrar. Embora, numericamente, não seja válido

dizer que esses deslocamentos são iguais, em termos de autovetores pode-se dizer que eles são iguais, pois representam a configuração deformada do mesmo modo de vibrar.

A propriedade dos autovetores enuncia que um autovetor multiplicado por uma constante corresponde ao mesmo autovetor (ALVES FILHO, 2008). Levando-a em conta, pode-se escrever:

$$\{\phi_i\} = [D] \cdot \{\phi_i\} \cdot \lambda_i \Rightarrow \{\phi_i\} = [D] \cdot \{\phi_i\} . \quad (2.80)$$

Na Equação (2.80), $\{\phi_i\}$ no primeiro membro da equação e $\{\phi_i\}$ no segundo membro da equação são os mesmos autovetores, já que no segundo membro $\{\phi_i\}$ foi multiplicado pela constante λ_i e o autovetor multiplicado por uma constante não se altera. O autovetor do segundo membro contém embutida em todos os termos a constante λ_i . Ao dividir todos os termos de $[D] \cdot \{\phi_i\}$ do segundo membro da equação pelos correspondentes termos de $\{\phi_i\}$ do primeiro membro da equação, obtém-se, portanto, o valor de λ_i (ALVES FILHO, 2008).

A ideia anterior é o ponto de partida para iniciar o Método de Stodola. Como não se sabe qual é o primeiro modo de vibrar da estrutura, elege-se um autovetor qualquer que possa representar esse modo. Calcula-se então $[D] \cdot \{\phi_i\}$ e, em seguida, dividem-se todos os termos de $[D] \cdot \{\phi_i\}$ do segundo membro da equação pelos correspondentes termos de $\{\phi_i\}$ do primeiro membro da equação, obtendo-se o valor de λ_i . Somente se todas as divisões feitas termo a termo dos autovetores forem iguais a λ_i , o autovetor proposto será o autovetor verdadeiro, pois em um modo de vibrar verdadeiro da estrutura todos os pontos oscilam com a mesma frequência, ou seja, têm o mesmo autovalor (ALVES FILHO, 2008).

Assim, a partir de uma primeira hipótese do modo de vibrar pode-se iniciar um procedimento iterativo, de maneira que a segunda hipótese seja baseada na primeira estimativa proposta melhorada. Demonstra-se que a aplicação do Método de Stodola, tal como explicado, converge para o primeiro modo de vibrar (ALVES FILHO, 2008). Genericamente, tem-se:

$$\{\phi_i\}^{(k+1)} = [D] \cdot \{\phi_i\}^{(k)} . \quad (2.81)$$

Após o cálculo de $\{\phi_i\}^{(k+1)}$, pode-se efetuar as divisões:

$$\frac{U_1^k}{U_1^{k+1}}; \frac{U_2^k}{U_2^{k+1}}; \dots; \frac{U_n^k}{U_n^{k+1}} . \quad (2.82)$$

Se todos esses quocientes forem iguais, significa que a configuração atribuída na iteração ora efetuada corresponde a um modo verdadeiro de vibrar, e o quociente será o autovalor procurado. Porém, se os diversos quocientes forem diferentes, o autovetor gerado será tomado como estimativa inicial para a próxima iteração (ALVES FILHO, 2008).

Por questões de armazenamento no computador, o vetor é normalizado, ou seja, dividem-se todos os termos associados a cada grau de liberdade por um valor constante, o que não altera o autovetor (ALVES FILHO, 2008).

Demonstra-se que, por intermédio de uma matriz denominada matriz de limpeza, é possível excluir o primeiro modo do processo de convergência, passando o processo iterativo a convergir para o segundo modo. Analogamente, excluindo o primeiro e o segundo modos do processo de convergência, é possível obter a convergência para o terceiro modo etc. (ALVES FILHO, 2008).

Define-se que a matriz de limpeza $[S_{i-1}]$ correspondente à convergência do processo iterativo para o i-ésimo modo é dada por:

$$[S_{i-1}] = [I] - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\{\phi_j\} \cdot \{\phi_j\}^T \cdot [M]}{m_j} , \quad (2.83)$$

onde, em um sistema discreto com n graus de liberdade, $2 \leq i \leq n$.

A matriz dinâmica associada à determinação do i-ésimo modo de vibrar pelo Método de Stodola é dada por:

$$[D_i] = [D] \cdot [S_{i-1}] . \quad (2.84)$$

Baseando-se na Equação (2.81) e na matriz dinâmica associada ao i -ésimo modo, obtém-se:

$$\{\phi_i\}^{(k+1)} = [D_i] \cdot \{\phi_i\}^{(k)} . \quad (2.85)$$

A partir da Equação (2.85), o procedimento para obtenção do i -ésimo modo segue os mesmos passos utilizados na determinação do primeiro modo de vibrar pelo Método de Stodola.

2.2.6.3 Determinação do fator de participação de cada modo de vibrar na resposta dinâmica

Estabelecendo a hipótese da Superposição Modal, tem-se:

$$\begin{aligned} \{U(t)\} &= \begin{Bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{Bmatrix} = y_1 \cdot \begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \\ \vdots \\ U_{n1} \end{Bmatrix} + y_2 \cdot \begin{Bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \\ \vdots \\ U_{n2} \end{Bmatrix} + \cdots + y_n \cdot \begin{Bmatrix} U_{1n} \\ U_{2n} \\ \vdots \\ U_{nn} \end{Bmatrix} = \\ &= y_1 \cdot \{\phi_1\} + y_2 \cdot \{\phi_2\} + \cdots + y_n \cdot \{\phi_n\} = \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot \{\phi_i\} . \end{aligned} \quad (2.86)$$

Segundo essa hipótese, a resposta dinâmica é dada pela Equação (2.86). Se esta equação for substituída na equação de equilíbrio dinâmico, ela deve satisfazê-la (ALVES FILHO, 2008). Portanto, substituindo (2.86) em (2.59) e calculando as derivadas primeira e segunda, obtém-se:

$$\begin{aligned} [M] \cdot \ddot{y}_1 \cdot \{\phi_1\} + [M] \cdot \ddot{y}_2 \cdot \{\phi_2\} + \cdots + [M] \cdot \ddot{y}_n \cdot \{\phi_n\} + [C] \cdot \dot{y}_1 \cdot \{\phi_1\} + [C] \cdot \dot{y}_2 \cdot \{\phi_2\} + \cdots + \\ + [C] \cdot \dot{y}_n \cdot \{\phi_n\} + [K] \cdot y_1 \cdot \{\phi_1\} + [K] \cdot y_2 \cdot \{\phi_2\} + \cdots + [K] \cdot y_n \cdot \{\phi_n\} = \{F(t)\} . \end{aligned} \quad (2.87)$$

A Equação (2.87) pode ser bastante simplificada por intermédio da propriedade de ortogonalidade aplicada às matrizes de rigidez, massa e amortecimento – a matriz de amortecimento definida pela Equação (2.61) também atende à propriedade

de ortogonalidade – (ALVES FILHO, 2008). Para um modo genérico i , ao multiplicar a Equação (2.87) nos dois membros por $\{\phi_i\}^T$, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \{\phi_i\}^T \cdot [M] \cdot \ddot{y}_1 \cdot \{\phi_1\} + \{\phi_i\}^T \cdot [M] \cdot \ddot{y}_2 \cdot \{\phi_2\} + \dots + \{\phi_i\}^T \cdot [M] \cdot \ddot{y}_n \cdot \{\phi_n\} + \\ & + \{\phi_i\}^T \cdot [C] \cdot \dot{y}_1 \cdot \{\phi_1\} + \{\phi_i\}^T \cdot [C] \cdot \dot{y}_2 \cdot \{\phi_2\} + \dots + \{\phi_i\}^T \cdot [C] \cdot \dot{y}_n \cdot \{\phi_n\} + \\ & + \{\phi_i\}^T \cdot [K] \cdot y_1 \cdot \{\phi_1\} + \{\phi_i\}^T \cdot [K] \cdot y_2 \cdot \{\phi_2\} + \dots + \{\phi_i\}^T \cdot [K] \cdot y_n \cdot \{\phi_n\} = \{\phi_i\}^T \cdot \{F(t)\} . \end{aligned} \quad (2.88)$$

Nos produtos matriciais do primeiro membro em que $\{\phi_i\}^T$ for multiplicado por um autovetor diferente de $\{\phi_i\}$, o produto será zero pela propriedade de ortogonalidade dos autovetores em relação às matrizes de rigidez, massa e amortecimento. No primeiro membro só não será zero o produto de $\{\phi_i\}^T$ pelo próprio $\{\phi_i\}$. Assim, de todas as parcelas do primeiro membro somente restará:

$$\{\phi_i\}^T \cdot [M] \cdot \ddot{y}_i \cdot \{\phi_i\} + \{\phi_i\}^T \cdot [C] \cdot \dot{y}_i \cdot \{\phi_i\} + \{\phi_i\}^T \cdot [K] \cdot y_i \cdot \{\phi_i\} = \{\phi_i\}^T \cdot \{F(t)\} . \quad (2.89)$$

A partir da ideia de massa e rigidez generalizada, introduzem-se os conceitos de amortecimento generalizado e força generalizada para um dado modo de vibrar (ALVES FILHO, 2008). Assim:

$$c_i = \{\phi_i\}^T \cdot [C] \cdot \{\phi_i\} ; \quad (2.90)$$

$$f_i(t) = \{\phi_i\}^T \cdot \{F(t)\} . \quad (2.91)$$

Então, a Equação (2.89) pode ser escrita da seguinte forma:

$$m_i \cdot \ddot{y}_i(t) + c_i \cdot \dot{y}_i(t) + k_i \cdot y_i(t) = f_i(t) . \quad (2.92)$$

O fator de participação do modo genérico i no cálculo da resposta dinâmica pode ser determinado a partir da solução de um sistema massa, mola, amortecedor e força externa dado pela Equação (2.92) (ALVES FILHO, 2008).

O procedimento de cálculo da resposta dinâmica transforma o problema de coordenadas físicas em coordenadas generalizadas, modificando um conjunto de n equações simultâneas em um conjunto de n equações desacopladas. Assim, é possível determinar o fator de participação de cada modo de vibrar resolvendo uma equação escalar para cada modo, ou seja, um sistema de um grau de liberdade em coordenadas generalizadas (ALVES FILHO, 2008).

2.2.7 Resposta dinâmica à carga de impacto

A resposta dinâmica de um sistema linear de vários graus de liberdade passa pela resolução de alguns sistemas generalizados de um grau de liberdade. Sabe-se que a força generalizada para cada modo de vibrar é dada por $f_i(t) = \{\phi_i\}^T \cdot \{F(t)\}$, sendo $\{F(t)\}$ a força variável com o tempo aplicada na estrutura. Como $\{\phi_i\}^T$ é constante, a força generalizada $f_i(t)$ tem a mesma forma ou lei de variação dos componentes de $\{F(t)\}$ (ALVES FILHO, 2008).

Se a carga $\{F(t)\}$ for de impacto, pode-se dizer sem dúvida que $f_i(t)$ terá a mesma forma ou lei de variação dos componentes de $\{F(t)\}$. Então, nesse caso, a carga generalizada aplicada ao sistema de um grau de liberdade também será de impacto. Assim, para calcular a resposta dinâmica, deve-se saber resolver o sistema de um grau de liberdade para carga de impacto (ALVES FILHO, 2008).

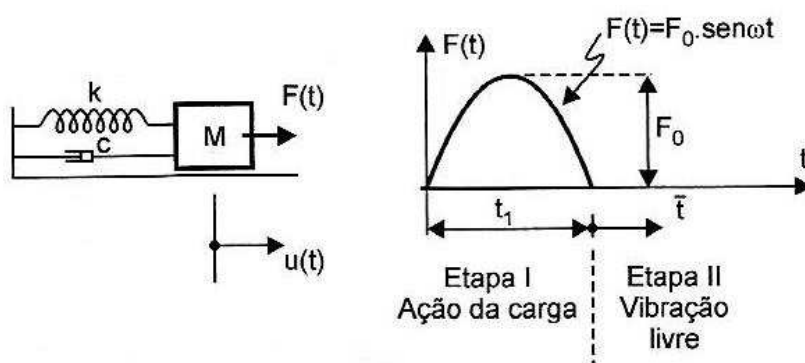


Figura 2.15 - Sistema de um grau de liberdade sob a ação de uma carga de impacto (ALVES FILHO, 2008).

A Figura 2.15 representa um sistema de um grau de liberdade sob a ação de uma carga de impacto. Ele pode ser um dos sistemas generalizados associados à estrutura. Para iniciar o estudo de cargas de impacto, admite-se que o gráfico da força em função do tempo seja um trecho de uma senoide.

Durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq t_1$ a estrutura estará sujeita ao carregamento harmônico. A resposta do sistema de um grau de liberdade ao carregamento harmônico é dada no caso mais geral pela expressão (2.58), em que a primeira parcela corresponde ao transitório e a segunda corresponde à vibração permanente (ALVES FILHO, 2008). Alternativamente, a resposta do sistema pode ser expressa por:

$$u(t) = e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \cdot [A_1 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + A_2 \cdot \text{sen}(\omega_d \cdot t)] + \frac{F_0}{k} \cdot \chi \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \phi) . \quad (2.93)$$

No estudo da carga de impacto será desconsiderado o amortecimento, portanto $\zeta = 0$. Assim, lembrando que $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_n$, $\chi = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot r)^2}}$ e $\phi = \arctg \frac{2 \cdot \zeta \cdot r}{1 - r^2}$, a Equação (2.93) ficará:

$$u(t) = [A_1 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + A_2 \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t)] + \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - r^2} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) . \quad (2.94)$$

Inicialmente, o sistema encontra-se em repouso e sem deformação. Portanto, substituindo $t = 0$ na Equação (2.94), tem-se:

$$u(0) = 0 = [A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 0] + \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - r^2} \cdot 0 \Rightarrow A_1 = 0 . \quad (2.95)$$

Derivando em relação ao tempo a Equação (2.94) já com $A_1 = 0$, obtém-se a equação da velocidade. Assim:

$$\dot{u}(t) = [A_2 \cdot \omega_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t)] + \frac{F_0}{k} \cdot \frac{\omega}{1 - r^2} \cdot \cos(\omega \cdot t) . \quad (2.96)$$

Levando-se em conta na Equação (2.96) a condição de velocidade nula para $t = 0$, tem-se:

$$\dot{u}(0) = 0 = \left[A_2 \cdot \omega_n \cdot 1 \right] + \frac{F_0}{k} \cdot \frac{\omega}{1-r^2} \cdot 1 \Rightarrow A_2 = -\frac{F_0}{k} \cdot \frac{\omega/\omega_n}{1-r^2} = -\frac{F_0}{k} \cdot \frac{r}{1-r^2} . \quad (2.97)$$

Ao substituir as constantes A_1 e A_2 na Equação (2.94), obtém-se a resposta dinâmica ao carregamento de impacto durante o período de ação da carga (ALVES FILHO, 2008). Logo:

$$u(t) = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1-r^2} \cdot \left[\text{sen}(\omega \cdot t) - r \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t) \right] . \quad (2.98)$$

A Equação (2.98) representa a resposta não amortecida durante o intervalo de tempo em que atua a carga de impacto (ALVES FILHO, 2008). A velocidade da massa durante a ação da carga de impacto é dada pela derivada primeira em relação ao tempo de (2.98), ou seja:

$$\dot{u}(t) = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1-r^2} \cdot \left[\omega \cdot \cos(\omega \cdot t) - r \cdot \omega_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t) \right] . \quad (2.99)$$

Imediatamente após a ação da carga de impacto, a massa ocupa a posição dada pela Equação (2.98) para $t = t_1$. Ou seja, a condição final referente à ação do carregamento passa a ser a condição inicial referente à vibração livre. Assim, a vibração livre que se inicia a partir de $t = t_1$ depende da posição $u(t_1)$ dada por (2.98) e da velocidade $\dot{u}(t_1)$ dada por (2.99) (ALVES FILHO, 2008).

Para facilitar o equacionamento das vibrações livres não amortecidas, é conveniente começar a contagem dos tempos a partir do início desse fenômeno. Então, introduz-se uma nova variável $\bar{t} = t - t_1 \geq 0$ (ALVES FILHO, 2008).

Com base na Equação (2.30), pode-se representar o que ocorre com a massa imediatamente após a ação da carga de impacto (ALVES FILHO, 2008). Alternativamente, a resposta do sistema nos instantes $t \geq t_1$ pode ser expressa por:

$$u(\bar{t}) = A'_1 \cdot \cos(\omega_n \cdot \bar{t}) + A'_2 \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot \bar{t}) . \quad (2.100)$$

Para $\bar{t} = 0$ sabe-se que $u(\bar{t} = 0) = u(t_1)$ e $\dot{u}(\bar{t} = 0) = \dot{u}(t_1)$. Portanto, substituindo $\bar{t} = 0$ na Equação (2.100), tem-se:

$$u(\bar{t} = 0) = u(t_1) = A'_1 \cdot 1 + A'_2 \cdot 0 \Rightarrow A'_1 = u(t_1) . \quad (2.101)$$

Derivando (2.100) em relação ao tempo, obtém-se a velocidade $\dot{u}(\bar{t})$ válida após a ação da carga de impacto. Ou seja:

$$\dot{u}(\bar{t}) = -A'_1 \cdot \omega_n \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot \bar{t}) + A'_2 \cdot \omega_n \cdot \cos(\omega_n \cdot \bar{t}) . \quad (2.102)$$

Assim, substituindo $\bar{t} = 0$ na Equação (2.102):

$$\dot{u}(\bar{t} = 0) = \dot{u}(t_1) = -A'_1 \cdot \omega_n \cdot 0 + A'_2 \cdot \omega_n \cdot 1 \Rightarrow A'_2 = \frac{\dot{u}(t_1)}{\omega_n} . \quad (2.103)$$

Ao substituir as constantes A'_1 e A'_2 na Equação (2.100), obtém-se a resposta dinâmica ao carregamento de impacto após o período de ação da carga (ALVES FILHO, 2008). Logo:

$$u(\bar{t}) = u(t_1) \cdot \cos(\omega_n \cdot \bar{t}) + \frac{\dot{u}(t_1)}{\omega_n} \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot \bar{t}) . \quad (2.104)$$

A velocidade da massa após a ação da carga de impacto é dada por:

$$\dot{u}(\bar{t}) = -u(t_1) \cdot \omega_n \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot \bar{t}) + \dot{u}(t_1) \cdot \cos(\omega_n \cdot \bar{t}) . \quad (2.105)$$

2.2.8 Complemento ao cálculo da resposta dinâmica

O Método da Superposição Modal, utilizando as propriedades de ortogonalidade de $[K]$, $[M]$ e $[C]$ e independência linear dos autovetores, desacopla a Equação (2.59) e utiliza os autovetores na solução do problema. Com base nas propriedades anteriores foi possível expressar o vetor $\{U(t)\}$ como combinação linear dos autovetores, conforme a Equação (2.86) (ALVES FILHO, 2008).

A princípio, com o objetivo de calcular a resposta dinâmica, todos os modos de vibrar do sistema são contabilizados na Equação (2.86). Na prática, entretanto, para sistemas com um número n de milhares de graus de liberdade é impraticável fazer o cálculo dos n milhares de modos de vibrar. Normalmente, só alguns modos de vibrar são calculados (ALVES FILHO, 2008).

2.2.8.1 Método do Deslocamento Modal

Calcular os autovetores de todos os n modos de vibrar da estrutura é um trabalho proibitivo. Entretanto, em muitos problemas estruturais, os modos de vibrar que têm alta frequência têm pouca participação na resposta estrutural dinâmica e na composição da Equação (2.86); apenas alguns modos de baixa frequência são necessários (ALVES FILHO, 2008). Assim, somente as primeiras equações do tipo (2.92) são montadas e resolvidas de modo que:

$$\{U(t)\} \approx \sum_{i=1}^m y_i(t) \cdot \{\phi_i\}, \text{ com } m \ll n. \quad (2.106)$$

No entanto, o Método do Deslocamento Modal pode apresentar dificuldade em representar os modos de deslocamento quase estático quando $m \ll n$ é pequeno. A resposta quase estática é aquela obtida quando a frequência de excitação aplicada é menor que aproximadamente um terço da frequência natural mais baixa da estrutura (ALVES FILHO, 2008).

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

Este capítulo apresenta a metodologia proposta para o desenvolvimento das simulações computacionais e procedimentos experimentais do trabalho.

3.1 SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

O processo de solução de problemas através do MEF é comumente dividido em três etapas principais: o pré-processamento, o processamento e o pós-processamento. O processamento computacional, etapa intermediária onde o computador efetivamente realiza os cálculos da análise numérica, faz a separação entre as etapas de pré-processamento e pós-processamento, em que é necessária a participação do engenheiro para a elaboração das condições de análise e interpretação dos resultados obtidos, respectivamente (TSCHIPTSCHIN, 2011).

A Figura 3.1 apresenta uma visão abrangente dos principais passos contidos nessas três etapas.

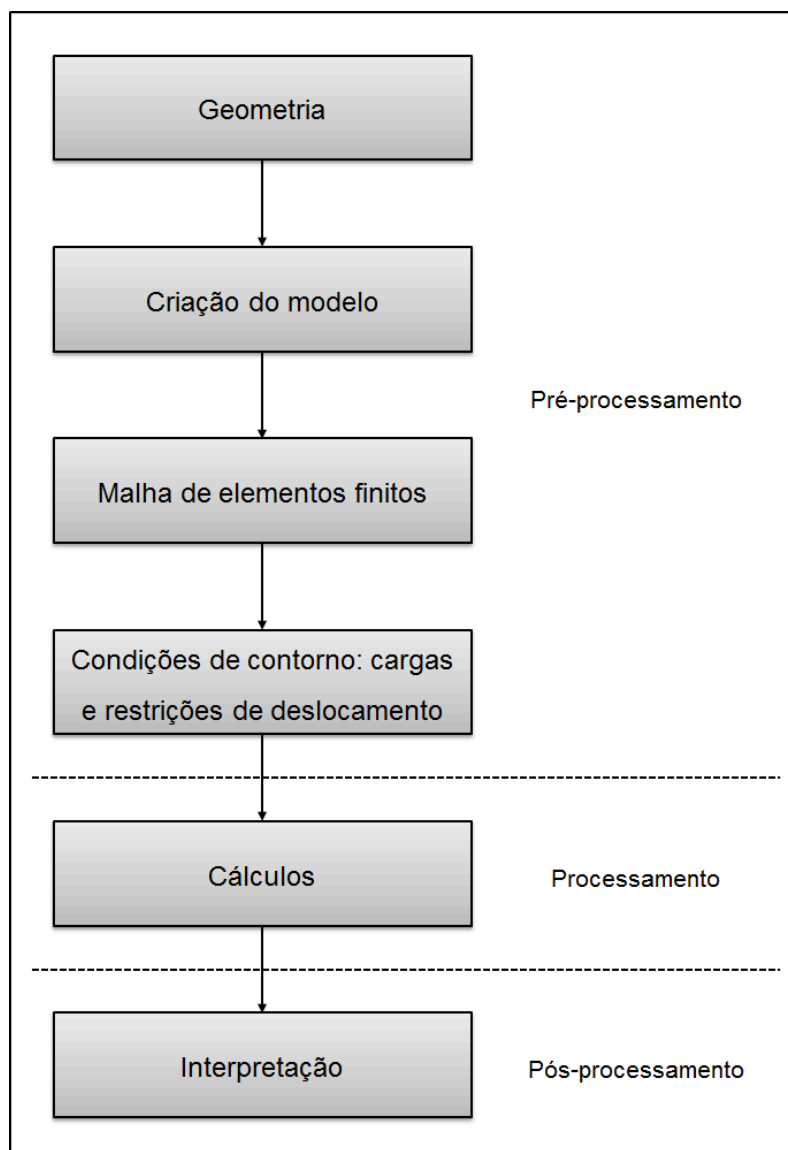


Figura 3.1 - Passos envolvidos em uma análise de elementos finitos (adaptada de TSCHIPTSCHIN, 2011).

Embora a Figura 3.1 ilustre um fluxo contínuo com início e fim, frequentemente as atividades que circundam uma análise de elementos finitos criam um *loop*, conectando a interpretação dos resultados com a geometria e, conseqüentemente, a uma nova análise (TSCHIPTSCHIN, 2011).

3.1.1 MATLAB®

O MATLAB® (*MATrix LABoratory*) é um ambiente de programação de alto nível, possuindo características de aplicativo (facilidade para o usuário) e de linguagem de programação (flexibilidade). Ao contrário de linguagens clássicas como C e Fortran,

no ambiente MATLAB® o usuário não se preocupa com itens como declaração de variáveis, alocação de memória, utilização de ponteiros e outras tarefas de rotina (FARINA; POSSER, 1999).

Algumas das características deste software são (LÁZARO, 2015):

- grande número de fontes, tutoriais e guias;
- referência no que tange à capacidades programáticas e de cálculo;
- visualização de gráficos em 2D e 3D;
- grande número de funções matemáticas disponíveis na biblioteca;
- possibilidade de importação de arquivos de diferentes tipos;
- atualmente existem módulos que permitem cálculo simbólico;
- capacidade de criação de janelas programáticas para interface gráfica a partir de código ou da ferramenta interna de criação de interface gráfica (GUIDE);
- simulação gráfica de multi-domínios;
- capacidade de cálculo vetorial, matricial, polinomial, etc.

3.1.1.1 Pré-processamento

Nesta etapa, o usuário define as dimensões (comprimento L , altura h e largura b) e as propriedades do material da viga (módulo de elasticidade longitudinal E e massa específica ρ). Em seguida, ele fornece a subdivisão de elementos m para que a malha de elementos finitos seja gerada.

A estrutura é discretizada em elementos de viga formulados com base no modelo de Euler-Bernoulli (formulação clássica). Neste modelo, o cisalhamento e a inércia de rotação são desprezados, e se supõe que as seções transversais planas permaneçam sempre planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da viga, após sua deformação.

A partir da matriz de rigidez e massa de cada elemento, por processo direto de montagem, obtêm-se as matrizes de rigidez e massa da estrutura, respectivamente. A equação matricial que traduz o equilíbrio dinâmico da estrutura, desconsiderando-se o amortecimento presente, é então dada por:

$$[M] \cdot \{\ddot{U}(t)\} + [K] \cdot \{U(t)\} = \{F(t)\} . \quad (3.1)$$

No entanto, a Equação (3.1) só pode ser resolvida após a aplicação das condições de contorno (restrições e carregamento).

Quanto às restrições, a viga apresenta uma de suas extremidades engastada e, portanto, tanto o deslocamento v como a rotação θ no engaste são nulos, conforme ilustra a Figura 3.2.

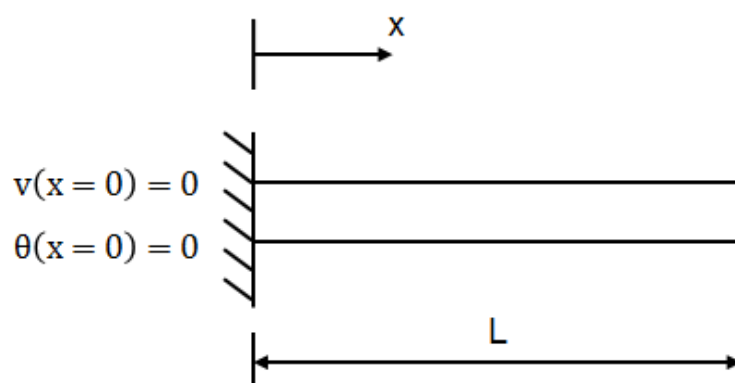


Figura 3.2 - Restrições correspondentes à extremidade engastada da viga.

Para cada restrição, a linha e a coluna correspondentes devem ser eliminadas das matrizes de rigidez e massa da estrutura.

Quanto ao carregamento, a extremidade livre da viga está sujeita à ação de uma força $F(t)$, conforme mostra a Figura 3.3.

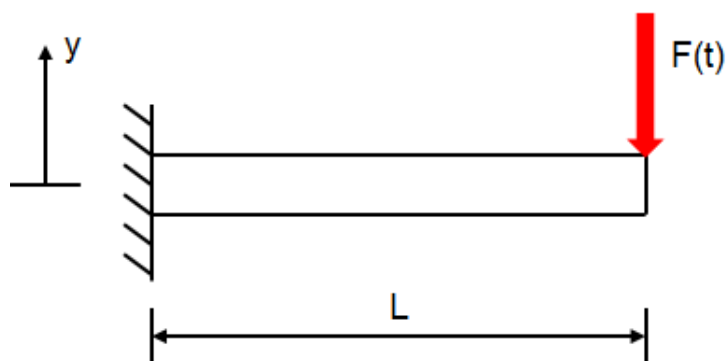


Figura 3.3 - Força $F(t)$ aplicada à extremidade livre da viga.

A Figura 3.4 apresenta um fluxograma que resume a etapa de pré-processamento.

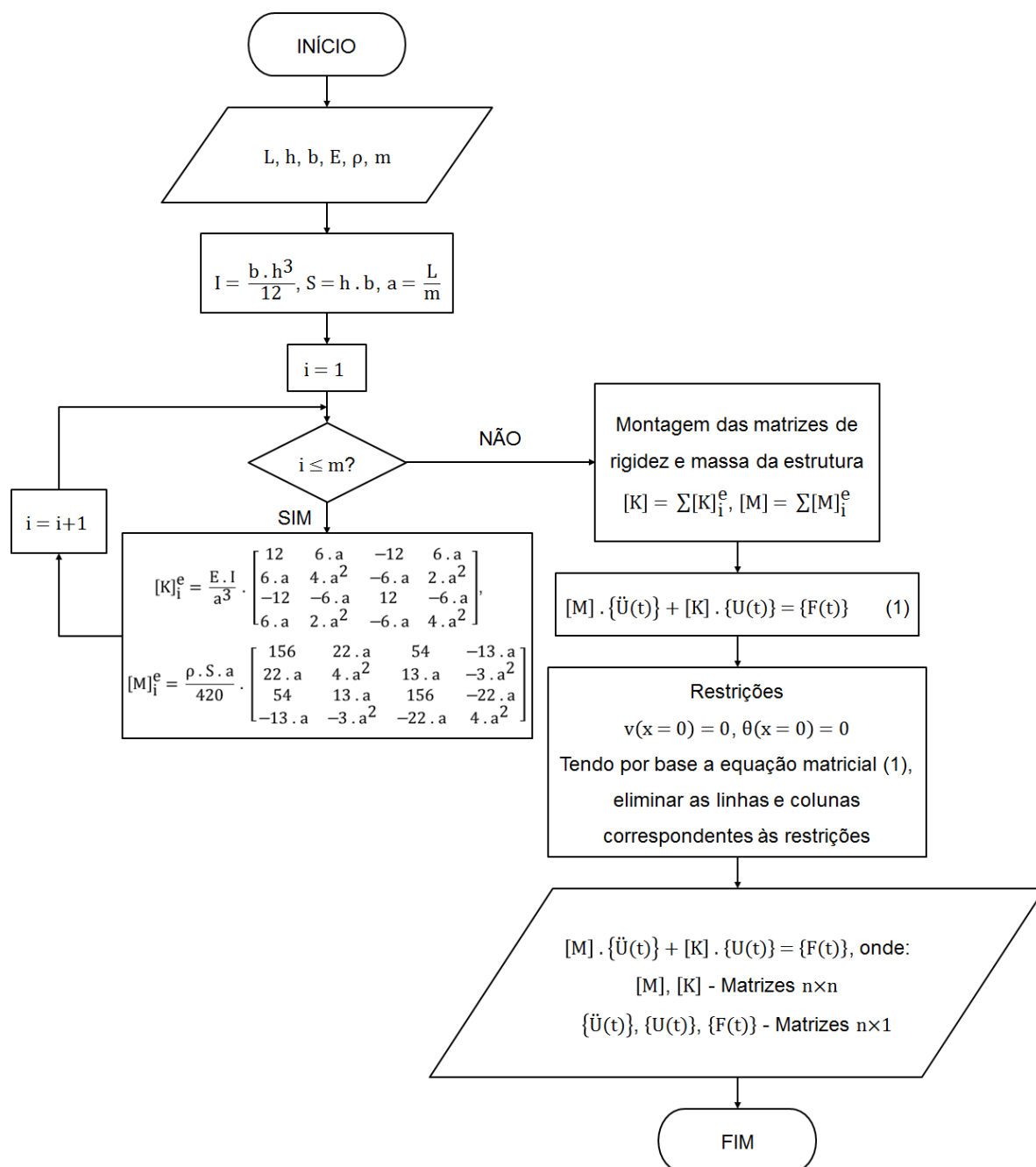


Figura 3.4 - Fluxograma correspondente à etapa de pré-processamento.

3.1.1.2 Processamento

Tendo por base o Método da Superposição Modal, a rotina computacional calcula a resposta dinâmica da estrutura, tanto à excitação harmônica como ao carregamento de impacto. Tal método consiste em:

- Calcular os modos e frequências naturais de vibração da estrutura.

- Determinar o fator de participação de cada modo de vibrar na resposta dinâmica.

3.1.1.2.1 *Modos e frequências naturais de vibração da estrutura*

Através do Método de Stodola, obtêm-se os primeiros modos de vibrar e as correspondentes frequências naturais da estrutura. O primeiro modo de vibrar e a correspondente frequência natural são calculados conforme a sequência de passos apresentada a seguir:

- 1) Atribuir à variável k o valor zero.
- 2) Estimar o autovetor $\{\phi_1\}^{(k)}$.
- 3) Calcular a matriz dinâmica $[D]$, a partir do produto matricial $[K]^{-1} \cdot [M]$.
- 4) Calcular o autovetor $\{\phi_1\}^{(k+1)}$, a partir da Equação (2.81).
- 5) Dividir os termos do autovetor $\{\phi_1\}^{(k)}$ pelos correspondentes do autovetor $\{\phi_1\}^{(k+1)}$.
- 6) Comparar os quocientes: são aproximadamente iguais entre si?
 - Se sim, o autovetor $\{\phi_1\}^{(k)}$ corresponde ao primeiro modo de vibrar, e a raiz quadrada do quociente corresponde à frequência natural associada a esse modo.
 - Se não, normalizar o autovetor $\{\phi_1\}^{(k+1)}$, dividindo os termos por uma constante, incrementar uma unidade à variável k e reiniciar o processo a partir do passo 4.

O modo genérico i e a correspondente frequência natural são calculados conforme a sequência de passos apresentada a seguir:

- 1) Atribuir à variável k o valor zero.
- 2) Estimar o autovetor $\{\phi_i\}^{(k)}$.
- 3) Calcular a matriz de limpeza $[S_{i-1}]$, a partir da Equação (2.83).
- 4) Calcular a matriz dinâmica $[D_i]$, a partir da Equação (2.84).
- 5) Calcular o autovetor $\{\phi_i\}^{(k+1)}$, a partir da Equação (2.85).

6) Dividir os termos do autovetor $\{\phi_i\}^{(k)}$ pelos correspondentes do autovetor $\{\phi_i\}^{(k+1)}$.

7) Comparar os quocientes: são aproximadamente iguais entre si?

- Se sim, o autovetor $\{\phi_i\}^{(k)}$ corresponde ao i -ésimo modo de vibrar, e a raiz quadrada do quociente corresponde à frequência natural associada a esse modo.
- Se não, normalizar o autovetor $\{\phi_i\}^{(k+1)}$, dividindo os termos por uma constante, incrementar uma unidade à variável k e reiniciar o processo a partir do passo 5.

A Figura 3.5 apresenta um fluxograma que resume o procedimento para cálculo dos primeiros modos de vibrar e das correspondentes frequências naturais da estrutura.

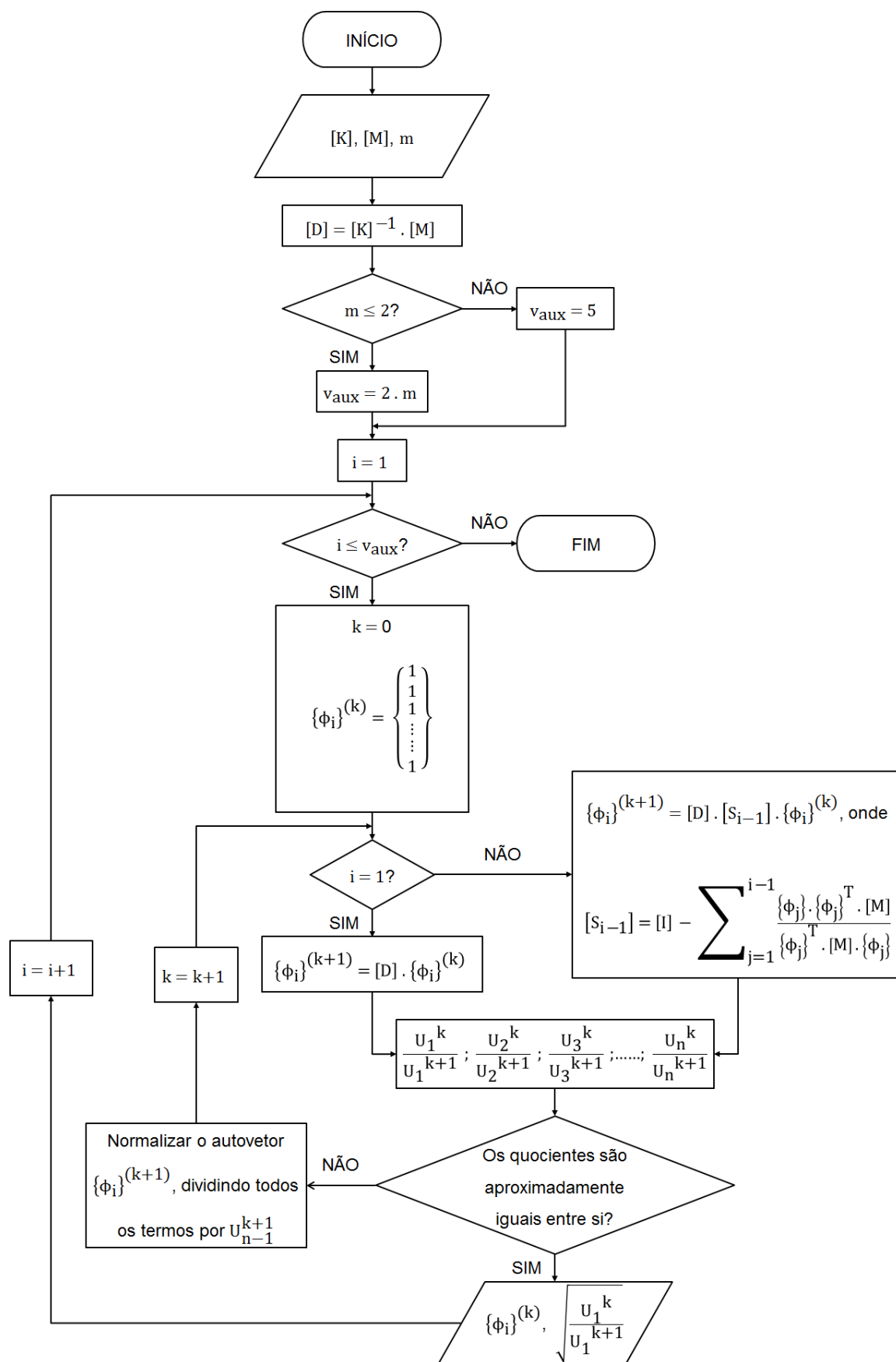


Figura 3.5 - Procedimento para cálculo dos primeiros modos de vibrar e das correspondentes frequências naturais da estrutura.

3.1.1.2.2 Resposta dinâmica da estrutura à excitação harmônica (FRFs)

A resposta em regime permanente de um sistema massa-mola-amortecedor excitado harmonicamente é dada pela Equação (2.56). De modo análogo, para sistemas com vários graus de liberdade, o fator de participação do modo genérico i , desconsiderando-se o amortecimento, é igual a:

$$y_i = \frac{F_0}{k_i} \cdot \frac{1}{(1-r_i^2)} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) . \quad (3.2)$$

De posse dos modos de vibrar e correspondentes fatores de participação, obtém-se a resposta dinâmica da estrutura, conforme a Equação (2.106). No domínio da frequência, a resposta dinâmica é dada por:

$$\frac{\{U(\omega)\}}{F_0} \approx \sum_{i=1}^m \frac{1}{k_i \cdot (1-r_i^2)} \cdot \{\phi_i\}, \text{ com } m \ll n . \quad (3.3)$$

A Figura 3.6 apresenta um fluxograma que resume o procedimento para cálculo das FRFs da estrutura.

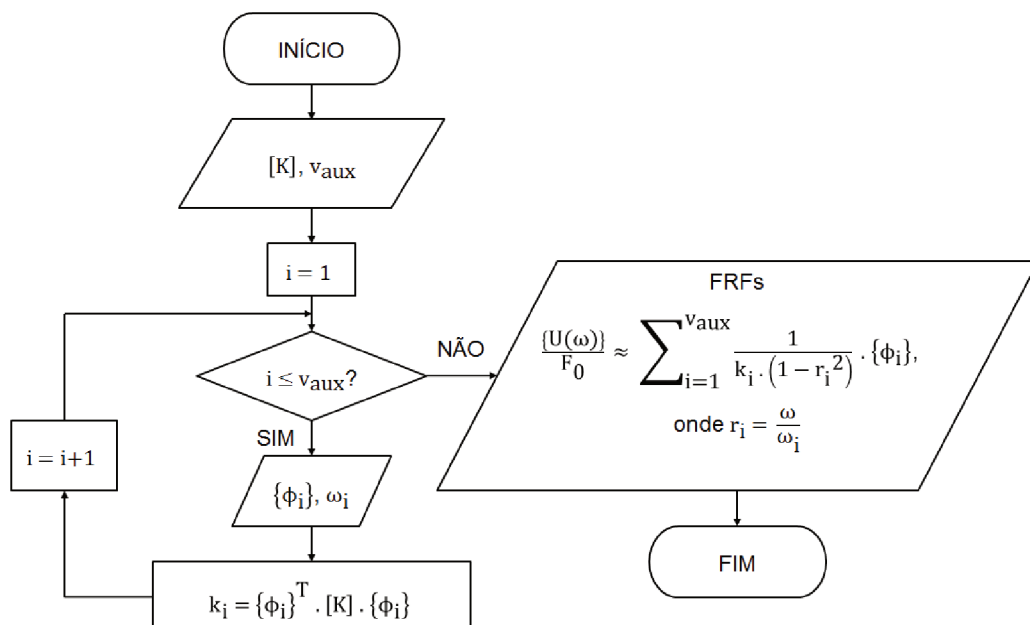


Figura 3.6 - Procedimento para cálculo das FRFs da estrutura.

3.1.1.2.3 *Resposta dinâmica da estrutura ao carregamento de impacto*

Após o cálculo dos modos de vibrar e frequências naturais da estrutura, determina-se o fator de participação de cada modo na resposta dinâmica. A viga está sujeita à ação de um carregamento de impacto em sua extremidade livre e, portanto, o fator genérico y_i é calculado conforme a sequência de passos apresentada a seguir:

- 1) Calcular a rigidez k_i associada ao modo i de vibração, a partir da Equação (2.76).
- 2) Calcular a relação de frequências r_i , a partir da Equação (2.53).
- 3) Determinar o fator de participação do i -ésimo modo no cálculo da resposta à carga de impacto durante a ação da carga ($0 \leq t \leq t_1$), a partir da Equação (2.98).
- 4) Calcular $y_i(t_1)$ e $\dot{y}_i(t_1)$, a partir das Equações (2.98) e (2.99), respectivamente.
- 5) Definir a variável $\bar{t} = t - t_1$.
- 6) Determinar o fator de participação do i -ésimo modo no cálculo da resposta à carga de impacto após a ação da carga ($t \geq t_1$), a partir da Equação (2.104).

A Figura 3.7 apresenta um fluxograma que resume o procedimento para cálculo do fator de participação de cada modo de vibrar na resposta dinâmica da estrutura ao carregamento de impacto.

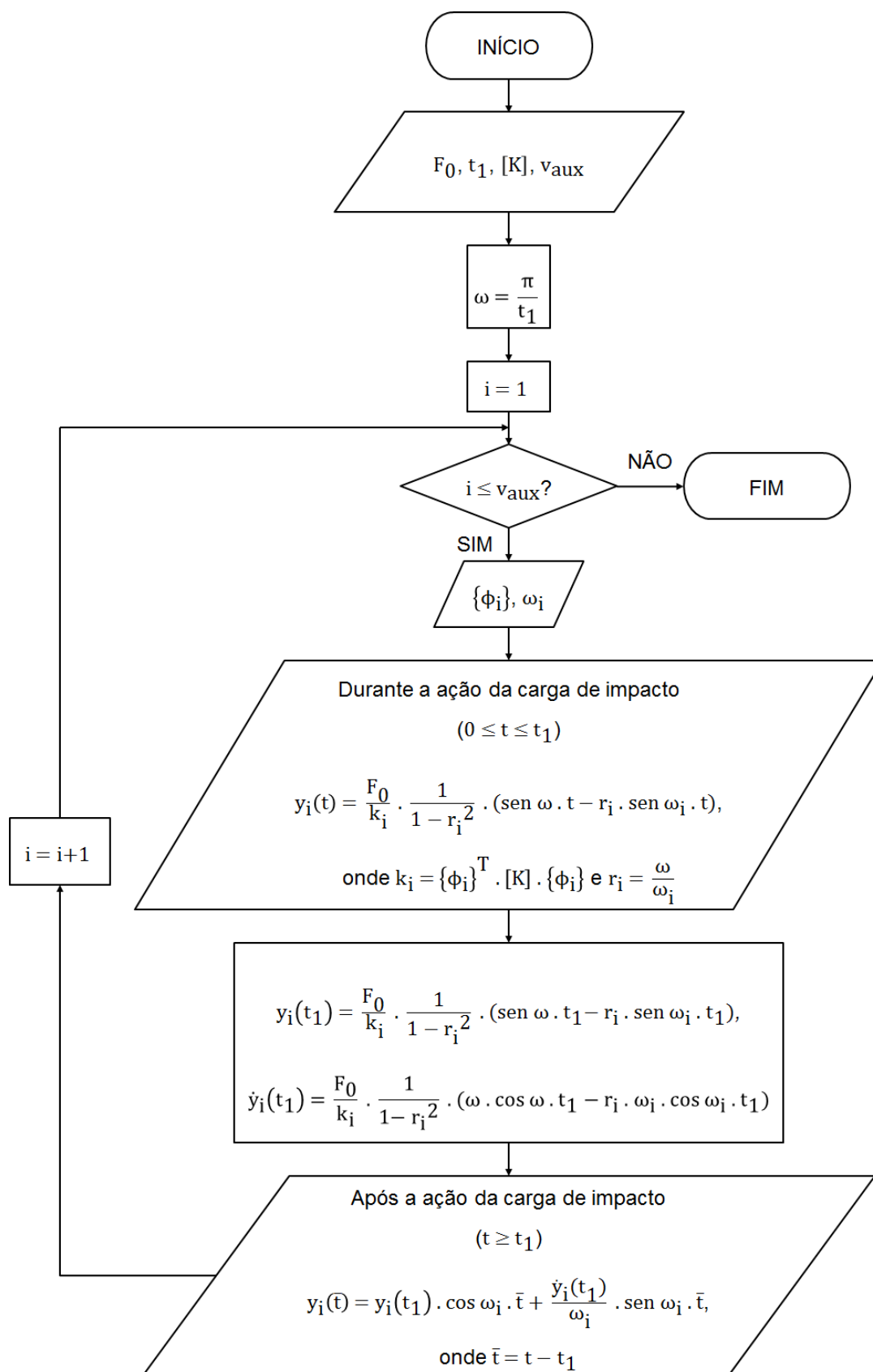


Figura 3.7 - Procedimento para cálculo do fator de participação de cada modo de vibrar na resposta dinâmica da estrutura ao carregamento de impacto.

A resposta dinâmica da estrutura é obtida a partir da Equação (2.106). A Figura 3.8 apresenta um fluxograma que resume o procedimento para cálculo da resposta dinâmica da estrutura ao carregamento de impacto.

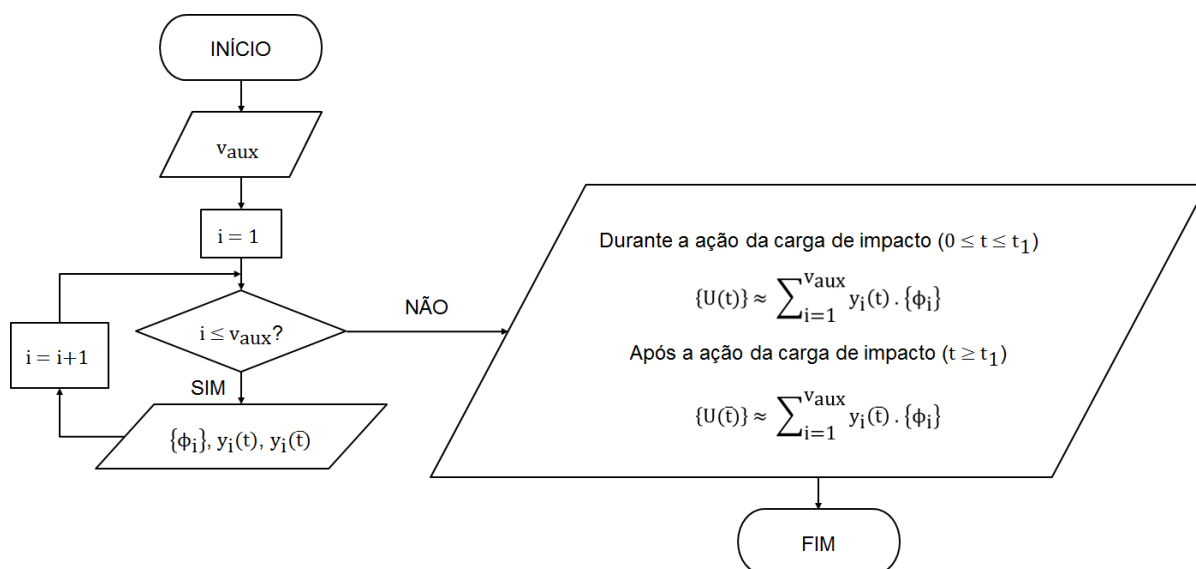


Figura 3.8 - Procedimento para cálculo da resposta dinâmica da estrutura ao carregamento de impacto.

3.1.1.3 Pós-processamento

Nesta etapa resume-se a visualização e análise dos resultados obtidos.

a) Visualização dos resultados:

- Exibição em formato numérico dos primeiros modos de vibrar e das correspondentes frequências naturais.
- Plotagem dos primeiros modos de vibrar.
- Plotagem da resposta dinâmica da estrutura à excitação harmônica (FRFs).
- Plotagem da resposta dinâmica da estrutura ao carregamento de impacto.
- Animação do modelo.

b) Análise dos resultados.

A interpretação correta dos resultados requer que sejam levadas em conta as suposições e simplificações na construção do modelo matemático, a construção do modelo de elementos finitos e a resolução do modelo de elementos finitos (IST SISTEMAS, 2011, apud SILVA, 2013).

3.1.2 ANSYS®

O ANSYS® é um programa de simulação computacional multidisciplinar para resolver problemas de engenharia em geral. Sendo constantemente desenvolvido e atualizado, é uma ferramenta extremamente poderosa para a solução de problemas de diversas naturezas. Especificamente para a parte estrutural, existem sete tipos de análises possíveis: estática, modal, harmônica, transiente, espectral, flambagem linearizada e subestruturação.

Neste trabalho, o foco são as análises modal, harmônica e transiente, desenvolvidas na plataforma ANSYS® Mechanical APDL. A sequência de comandos executada na etapa de pré-processamento, comum às três análises, é apresentada a seguir:

- “Main Menu”>> “Preferences”;
- “Structural”>> “OK”;
- “Main Menu”>> “Preprocessor”>> “Element Type”>> “Add/Edit/Delete”;
- “Add...”>> “Beam”>> “2 node 188”>> “OK”>> “Close”.

O elemento Beam188 é um elemento de barra linear, de dois nós, com seis graus de liberdade por nó, que abrangem translações e rotações nas direções x , y e z . O elemento baseia-se na teoria de vigas de Timoshenko.

Timoshenko (1921) propôs uma teoria de vigas que adiciona tanto o efeito de cisalhamento quanto o efeito de rotação ao modelo de Euler-Bernoulli. O modelo de Timoshenko foi (e ainda é) a maior melhoria para aproximação da resposta de vigas não esbeltas e para altas frequências, onde os efeitos do cisalhamento e da inércia de rotação não podem ser desprezados (COSTA, 2006).

- “Main Menu”>> “Preprocessor”>> “Material Props”>> “Material Models”;
- “Structural”>> “Linear”>> “Elastic”>> “Isotropic”;
- Inserir o módulo de elasticidade em “EX”>> Inserir o coeficiente de *Poisson* em “PRXY”>> “OK”;
- “Structural”>> “Density”;
- Inserir a massa específica em “DENS”>> “OK”>> Fechar a janela;
- “Main Menu”>> “Preprocessor”>> “Sections”>> “Beam”>> “Common Sections”;

- Selecionar o formato de seção retangular em “Sub-Type”>> Selecionar a opção “Centroid” em “Offset To”>> Inserir as dimensões da seção em “B” e “H”>> “OK”;
- “Main Menu”>> “Preprocessor”>> “Modeling”>> “Create”>> “Keypoints”>> “In Active CS”;
- Inserir as coordenadas do engaste em “X,Y,Z”>> “Apply”;
- Inserir as coordenadas da extremidade livre em “X,Y,Z”>> “OK”;
- “Main Menu”>> “Preprocessor”>> “Modeling”>> “Create”>> “Lines”>> “Lines”>> “Straight Line”;
- Selecionar os nós 1 e 2>> “OK”;
- “Main Menu”>> “Preprocessor”>> “Meshing”>> “Size Cntrl”>> “Manual Size”>> “Lines”>> “All Lines”;
- Inserir a subdivisão de elementos em “NDIV”>> “OK”;
- “Main Menu”>> “Preprocessor”>> “Meshing”>> “Mesh”>> “Lines”;
- “Pick All”;
- “Main Menu”>> “Preprocessor”>> “Loads”>> “Define Loads”>> “Apply”>> “Structural”>> “Displacement”>> “On Nodes”;
- Selecionar o nó 1>> “OK”;
- Selecionar a opção “All DOF” em “DOFs to be constrained”>> “OK”;
- “Main Menu”>> “Preprocessor”>> “Loads”>> “Define Loads”>> “Apply”>> “Structural”>> “Displacement”>> “On Nodes”;
- Selecionar todos os outros nós>> “OK”;
- Selecionar as opções “UX”, “UZ”, “ROTX” e “ROTY” em “DOFs to be constrained”>> “OK”.

Após a etapa de pré-processamento, a sequência de comandos executada difere de acordo com o tipo de análise.

3.1.2.1 Análise modal

A sequência de comandos executada para dar continuidade à análise modal é apresentada a seguir:

- “Main Menu”>> “Solution”>> “Analysis Type”>> “New Analysis”;
- “Modal”>> “OK”;

- “Main Menu”>> “Solution”>> “Analysis Type”>> “Analysis Options”;
- Selecionar a opção “Block Lanczos” em “[MODOPT]”>> Inserir o número de modos a serem extraídos em “No. of modes to extract”>> “OK”;
- “OK”;
- “Main Menu”>> “Solution”>> “Solve”>> “Current LS”;
- “OK”;
- “CLOSE”;
- Fechar a janela.

Para obter as frequências naturais:

- “Main Menu”>> “General Postproc”>> “List Results”>> “Detailed Summary”.

Para plotar os modos de vibrar:

- “Main Menu”>> “General Postproc”>> “Read Results”>> Selecionar o modo de vibrar que se deseja visualizar;
- “Main Menu”>> “General Postproc”>> “Plot Results”>> “Contour Plot”>> “Nodal Solu”;
- Selecionar a opção “Y-Component of displacement” em “DOF Solution”>> “OK”.

3.1.2.2 Análise harmônica

A sequência de comandos executada para dar continuidade à análise harmônica é apresentada a seguir:

- “Main Menu”>> “Solution”>> “Analysis Type”>> “New Analysis”;
- “Harmonic”>> “OK”;
- “Main Menu”>> “Solution”>> “Load Step Opts”>> “Time/Frequenc”>> “Freq and Substeps”;
- Inserir o intervalo de frequência que se deseja avaliar em “[HARFRQ]”>> Inserir o número de passos a serem executados em “[NSUBST]”>> Selecionar a opção “Stepped” em “[KBC]”>> “OK”;
- “Main Menu”>> “Solution”>> “Define Loads”>> “Apply”>> “Structural”>> “Force/Moment”>> “On Nodes”;
- Selecionar o nó 2>> “OK”;

- Selecionar a opção “FY” em “Direction of force/mom”>> Selecionar a opção “Constant value” em “Apply as”>> Inserir a magnitude da força em “VALUE”>> “OK”;
- “Main Menu”>> “Solution”>> “Solve”>> “Current LS”;
- “OK”;
- “CLOSE”;
- Fechar a janela.

Para plotar as FRFs:

- “Main Menu”>> “TimeHist Postpro”;
- Selecionar o botão “Add Data”;
- “Nodal Solution”>> “DOF Solution”>> “Y-Component of displacement”>> “OK”;
- Selecionar o nó que se deseja visualizar o gráfico da FRF>> “OK”>> Selecionar o botão “Graph Data”>> Fechar a janela.

3.1.2.3 Análise transiente

A sequência de comandos executada para dar continuidade à análise transiente é apresentada a seguir:

- “Main Menu”>> “Solution”>> “Analysis Type”>> “New Analysis”;
- “Transient”>> “OK”;
- Selecionar a opção “Full” em “[TRNOPT]”>> “OK”;
- “Utility Menu”>> “Parameters”>> “Functions”>> “Define/Edit ...”;
- Selecionar a opção “Multivalued function based on regime variable”>> Selecionar a opção “TIME” em “Regime Var”>> Definir o valor da função nos intervalos desejados>> Salvar o arquivo>> Fechar a janela;
- “Utility Menu”>> “Parameters”>> “Functions”>> “Read From File ...”;
- Selecionar o arquivo previamente salvo>> “Abrir”;
- Definir um nome para a função>> “OK”;
- “Main Menu”>> “Solution”>> “Define Loads”>> “Apply”>> “Structural”>> “Force/Moment”>> “On Nodes”;
- Selecionar o nó 2>> “OK”;

- Selecionar a opção “FY” em “Direction of force/mom”>> Selecionar a opção “Existing Table” em “Apply as”>> “OK”;
- Selecionar a função>> “OK”;
- “Main Menu”>> “Solution”>> “Analysis Type”>> “Sol’n Controls”;
- Inserir o tempo total da simulação em “Time at end of loadstep”>> Selecionar a opção “Time increment”>> Inserir o incremento de tempo em “Time step size”>> Selecionar a opção “Write every substep” em “Frequency:”>> “OK”;
- “Main Menu”>> “Solution”>> “Solve”>> “Current LS”;
- “OK”;
- “CLOSE”;
- Fechar a janela.

Para plotar os deslocamentos nodais em função do tempo:

- “Main Menu”>> “TimeHist Postpro”;
- Selecionar o botão “Add Data”;
- “Nodal Solution”>> “DOF Solution”>> “Y-Component of displacement”>> “OK”;
- Selecionar o nó que se deseja visualizar o gráfico do deslocamento nodal em função do tempo>> “OK”>> Selecionar o botão “Graph Data”>> Fechar a janela.

3.2 PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

Além das simulações computacionais, este trabalho também propõe realizar ensaios experimentais em protótipos fabricados pelo processo de manufatura aditiva, conforme apresenta a Figura 3.9.

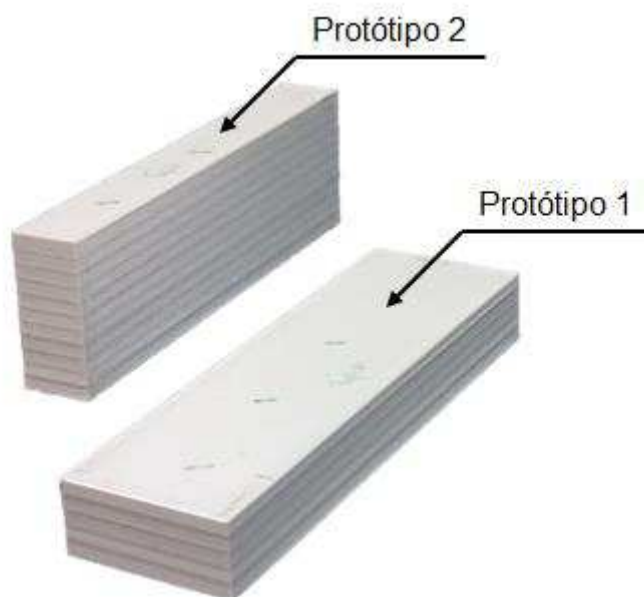


Figura 3.9 - Protótipos fabricados pelo processo de manufatura aditiva.

Os protótipos são produzidos pelo técnico Diego Augusto Alves, com o equipamento e a matéria-prima disponíveis no Laboratório de Projetos Mecânicos “Prof. Henner Alberto Gomide” (LPM), da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU).

3.2.1 Impressão 3D

A prototipagem rápida foi o primeiro processo de fabricação capaz de criar objetos tridimensionais camada por camada utilizando CAD (*Computer-Aided Design*). Ao contrário das técnicas convencionais de processamento, a manufatura aditiva produz a peça final adicionando material. Além disso, faz uso eficiente de matérias-primas, possibilitando a fabricação de peças de alta complexidade geométrica com mínimo gasto de material (HUANG et al., 2013, GROSS et al., 2014, apud COUTINHO, 2017).

Pode-se dizer que nos processos de prototipagem rápida realizam-se cinco etapas básicas (ALMEIDA, 2007):

- criação de um modelo CAD da peça que está sendo projetada;
- conversão do arquivo CAD em formato STL, próprio para máquinas de prototipagem;

- fatiamento do arquivo STL em finas camadas transversais ou *slicing*;
- construção física do protótipo;
- limpeza e acabamento do protótipo.

3.2.1.1 Técnica de FDM

Entre as técnicas de manufatura aditiva, a técnica de FDM é a mais frequentemente utilizada para a fabricação de peças de polímeros no mundo moderno, devido à sua capacidade de produzir formas geométricas complexas com facilidade e rapidez sem o uso de ferramentas ou moldes, com menor custo e maior segurança (LE DUIGOU et al., 2016, MOHAMED et al., 2016, TORRES et al., 2016, apud COUTINHO, 2017).

O processo FDM baseia-se na deposição de camadas resultantes do aquecimento, por volta de 200°C, e amolecimento de filamentos (arames) de material termoplástico. Simultaneamente, outros fios amolecidos formam o suporte para as superfícies suspensas do modelo, a fim de oferecer sustentação (RAULINO, 2011).

A plataforma da máquina de FDM onde se deposita o material movimenta-se no eixo Z e o cabeçote extrusor, composto por dois bicos (um para alimentar as camadas do modelo e o outro para o suporte), movimenta-se no plano XY. Os arames são direcionados por guias rotativas e ficam estocados dentro da máquina, em ambiente a vácuo aquecido, para evitar que a umidade forme bolhas no material e impeça a continuidade da deposição (RAULINO, 2011).

O software, que é composto por CAD/CAPP/CAM, não é integrado à máquina. Esta é conectada a um computador com o sistema que monitora os comandos de construção. Cada camada possui um planejamento de rota por onde o bico extrusor deposita os fios fundidos. Após finalizar uma fatia, a plataforma desce uma distância equivalente à espessura da camada e o cabeçote inicia a deposição seguinte (RAULINO, 2011).

A Figura 3.10 apresenta o esquema genérico da técnica de FDM.

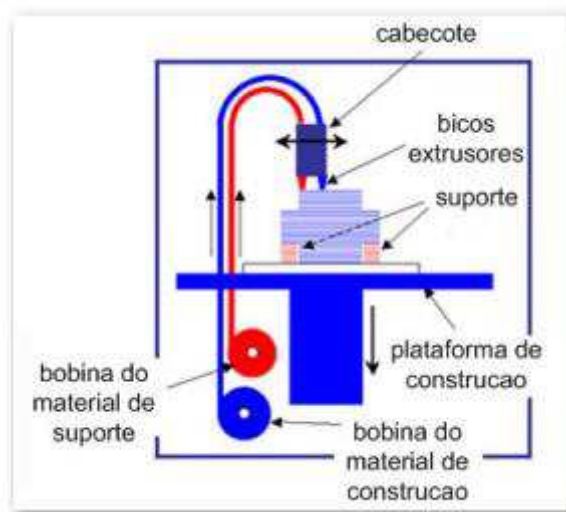


Figura 3.10 - Esquema genérico da técnica de FDM (RAULINO, 2011).

Os arames destinados à confecção podem ser de poliéster, polipropileno, ABS, elastômeros ou cera, enquanto o material de suporte é uma mistura de ABS e cal. Esses materiais conferem durabilidade e resistência ao protótipo (RAULINO, 2011).

O polilático (PLA) é um poliéster alifático produzido por síntese química a partir de ácido láctico obtido por fermentação bacteriana de glicose extraída do milho, fonte renovável. O mesmo é um polímero termoplástico, semicristalino ou amorfo, biocompatível e biodegradável, com uso potencial na confecção de embalagens, itens de descarte rápido, fibras têxteis e diversas aplicações na área médica. Entretanto, o PLA possui elevada fragilidade e rigidez o que o impede de ser utilizado em algumas aplicações (BRITO et. al., 2012).

As Figuras 3.11 e 3.12 apresentam o equipamento e a matéria-prima utilizados na fabricação dos protótipos, respectivamente.



Figura 3.11 - Impressora 3D FDM Cliever CL2 Pro Plus (CLIEVER, 2018).



Figura 3.12 - Filamento PLA Cliever (LEROY MERLIN, 2018).

Para fixar a peça na impressora 3D costuma-se utilizar produtos para aumentar a sua aderência à mesa de impressão, como o adesivo líquido A.Bond da fabricante 3D Fila. Esse recurso confere maior estabilidade à peça, resultando em um bom acabamento no produto final.

3.2.1.2 Parâmetros de impressão

Antes da confecção dos protótipos é necessário parametrizar as condições de impressão para que o software CAM divida o modelo em camadas e defina o caminho de impressão, segundo os parâmetros determinados. A Tabela 3.1 apresenta os parâmetros de impressão dos protótipos.

Tabela 3.1 - Parâmetros de impressão dos protótipos.

Parâmetros de impressão	
Tipo de preenchimento	Hexagonal
Percentual de preenchimento interno (%)	90
Diâmetro do bico (mm)	0,35
Espessura das paredes (perímetros)	3
Altura entre camadas (mm)	0,25

As Figuras 3.13 e 3.14 apresentam a orientação de impressão dos protótipos 1 e 2, respectivamente.

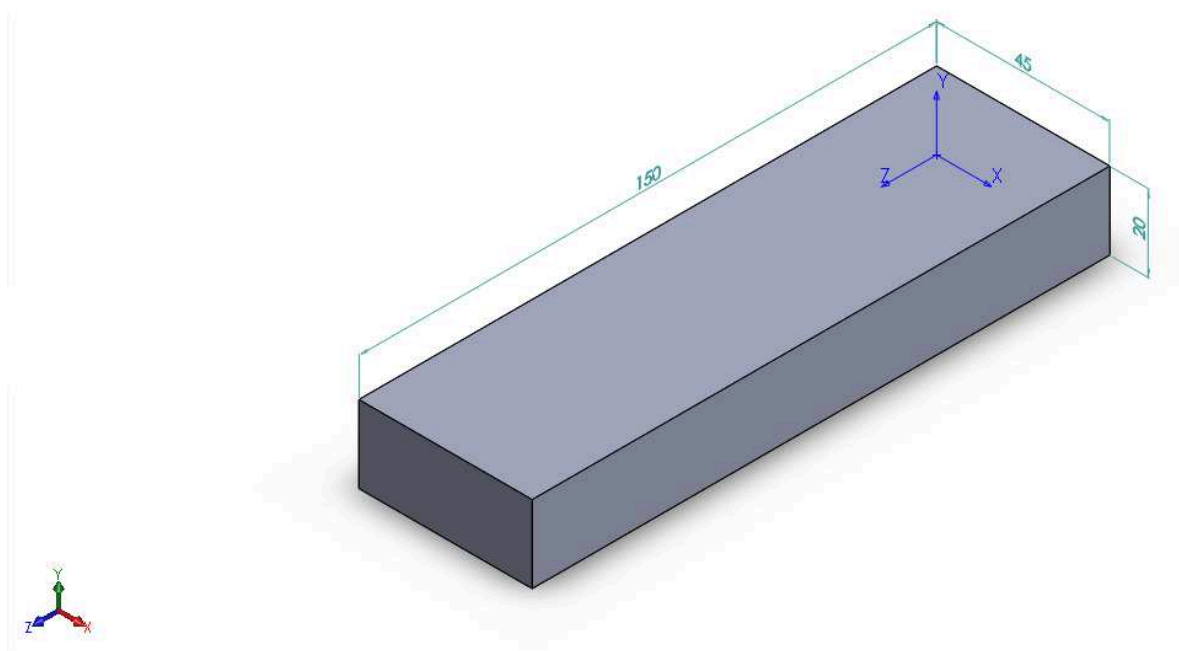


Figura 3.13 - Orientação de impressão do protótipo 1 (dimensões em mm).

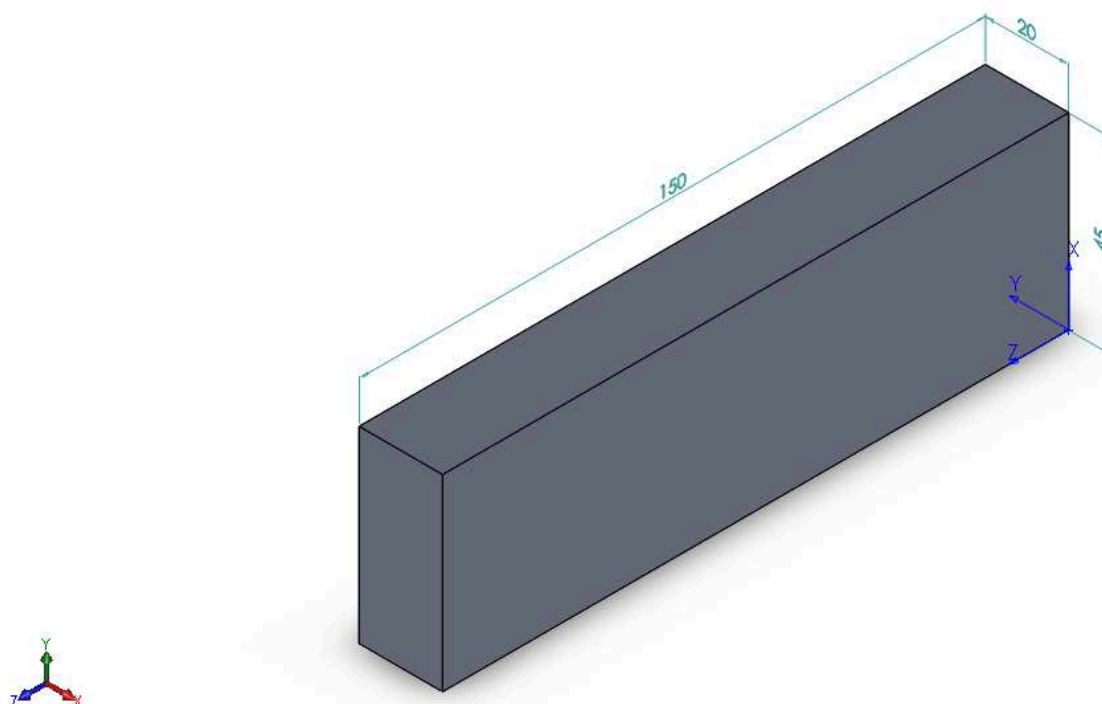


Figura 3.14 - Orientação de impressão do protótipo 2 (dimensões em mm).

3.2.2 Ensaios experimentais

A Análise Modal Experimental tornou-se uma poderosa ferramenta de análise para a determinação de características dinâmicas das estruturas. Através de dados experimentais, ela busca determinar as frequências naturais, fatores de amortecimento modais e modos de vibração. Dentre as aplicações da Análise Modal Experimental, a mais comum é a validação de um modelo teórico para determinada estrutura. Mediante ensaios experimentais são obtidas as características da resposta do sistema, que são geralmente dadas através de Funções de Resposta em Frequência (FRFs) ou resposta impulsiva (MAIA et al., 1997, apud LIMA, 2006).

As formas mais usuais de excitação em análise modal utilizam atuador (*shaker*) ou martelo instrumentado (impacto). O martelo de impacto produz uma excitação do tipo transiente, geralmente imposta manualmente. Esta pode ser uma forma conveniente e bastante acessível para excitar estruturas pequenas. O martelo possui uma ponta localizada na cabeça, em que se pode variar a sua rigidez de acordo com a faixa de frequência de interesse a ser excitada.

Ao excitar a estrutura com o martelo de impacto, a mesma apresenta em uma ampla faixa de frequência de excitação, que faz com que a estrutura vibre em suas

frequências de ressonância. Através do uso de um sistema de aquisição, contendo pelo menos dois canais de entrada, que meça a resposta de vibração da estrutura (tipicamente medida com um acelerômetro) e a força de impacto de entrada, obtém-se uma FRF, que identifica as frequências de ressonância.

O processamento de dados é feito com um analisador de sinais, capaz de fornecer as características de resposta da estrutura no domínio do tempo e da frequência. Para isto, utilizam-se as técnicas da transformada de Fourier. As FRFs obtidas nas diversas aquisições de dados são submetidas ao processo de *averaging* (média), pois este procedimento permite reduzir o nível de ruído presente nos dados (EWINS, 2000, apud LIMA, 2006).

3.2.2.1 Bancada experimental

A Figura 3.15 apresenta a bancada experimental utilizada para a obtenção das FRFs. Os ensaios são realizados pelo Prof. Aldemir Aparecido Cavalini Junior, no Laboratório de Mecânica de Estruturas “Prof. José Eduardo Tannús Reis” (LMEst), da FEMEC da UFU.



Figura 3.15 - Bancada experimental.

Os equipamentos que compõem a bancada experimental são:

- analisador de sinais *Agilent* modelo 35670A (4 canais);

- martelo de impacto com ponteira de borracha e célula de carga PCB modelo 086C01 com sensibilidade nominal 11,2 mV/N;
- acelerômetro PCB modelo 352C22 com sensibilidade nominal 1,070 mV/m/s²;
- mesa inercial;
- torno de bancada;
- cabos e conectores.

A condição de contorno imposta à viga é do tipo engastada-livre. Isso é possível com a utilização de um torno de bancada fixo à mesa inercial, que permite o engaste de uma das extremidades da viga.

A viga é excitada por um martelo de impacto conectado ao canal 1 do analisador de sinais. A resposta é adquirida por um acelerômetro posicionado na extremidade livre da viga, porém do lado oposto ao da excitação. O acelerômetro está conectado ao canal 2 do analisador de sinais. Pode-se, assim, extrair a FRF pontual da viga em balanço, computando a razão entre os espectros da resposta e força de excitação. Além disso, obtém-se, também, a função de coerência entre os dois sinais, que quantifica qual parcela da resposta ocorreu devida à excitação. Para uma boa estimativa da FRF, a função de coerência deve estar próxima do valor unitário.

Com o objetivo de reduzir a influência de erros aleatórios que contaminam as respostas e as excitações medidas, as FRFs são obtidas computando a média de vinte impactos.

3.2.3 Ensaios de tração

Segundo Callister (2002, apud MORAIS, 2016), em um ensaio de tração, o corpo de prova é submetido a um esforço que tende a alongá-lo até a ruptura. Geralmente, o ensaio é realizado num corpo de prova de forma e dimensões padronizadas, para que os resultados obtidos possam ser comparados ou, se necessário, reproduzidos. O corpo de prova é fixado numa máquina de ensaios que aplica forças crescentes na sua direção axial, sendo medidas as deformações correspondentes através de um extensômetro acoplado à máquina. O ensaio é conduzido até que ocorra a ruptura do material (ensaio destrutivo).

Nas máquinas de ensaio de tração, a carga é aplicada mediante o deslocamento de uma das garras onde o corpo de prova encontra-se fixado. Durante o ensaio, uma célula de carga e um extensômetro medem, respectivamente, a carga e o alongamento do corpo de prova. A partir destas medições, obtém-se ao final do ensaio a curva tensão-deformação do material (PARMENTIER, 2007, apud MORAIS, 2016).

Neste trabalho os ensaios de tração são executados pela Profa. Núbia dos Santos Saad, no LMEst, em uma máquina servo-hidráulica MTS modelo 647 com célula de carga de capacidade máxima de 100 kN, interligada ao software TestWorks®. Os ensaios são realizados de acordo com a norma ASTM D638-10 (*Standard test method for tensile properties of plastics*), com velocidade de deslocamento de 5 mm/min. Para quantificar os alongamentos correspondentes às cargas axiais aplicadas, um extensômetro MTS modelo 634.31F-24 com base de medida de 20 mm é acoplado à região central do corpo de prova. A Figura 3.16 apresenta a configuração inicial dos ensaios de tração.

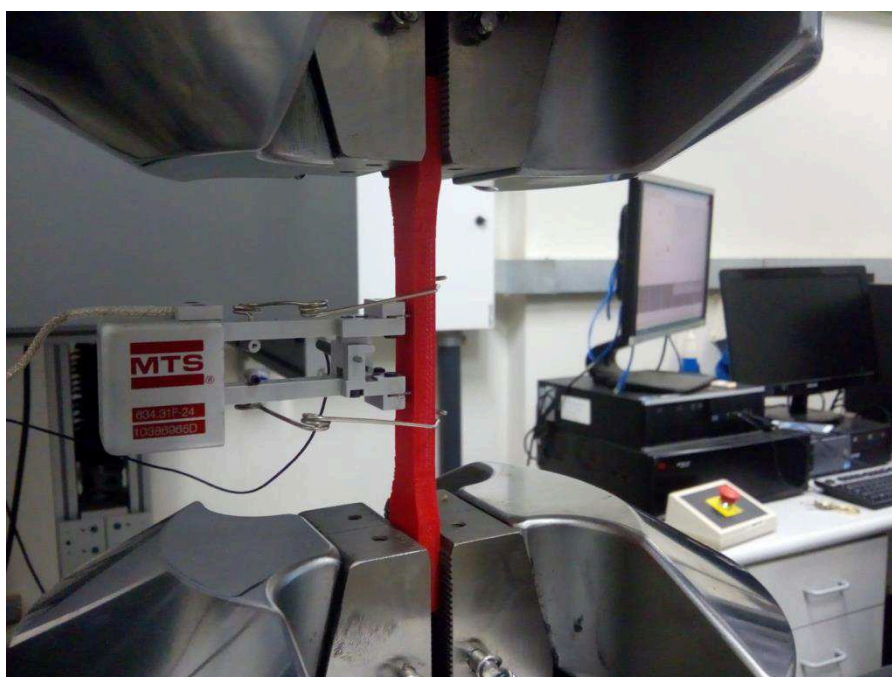


Figura 3.16 - Configuração inicial dos ensaios de tração.

3.2.3.1 Módulo de elasticidade

O módulo de elasticidade, parâmetro que quantifica a rigidez do material, é dado pela razão entre a tensão e a deformação relativa, dentro do limite elástico-linear, em que a deformação é totalmente reversível e diretamente proporcional à tensão normal. A tensão pode ser obtida dividindo-se a força pela área da seção transversal mediana do corpo de prova, e a deformação relativa, dividindo-se a deformação absoluta pelo comprimento útil do corpo de prova. Assim, tem-se:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\Delta F / A_0}{\Delta L / L_0} ; \quad (3.4)$$

onde:

- E : módulo de elasticidade do material constituinte do corpo de prova;
- σ : tensão normal;
- ε : deformação linear;
- ΔF : força aplicada longitudinalmente ao corpo de prova;
- A_0 : área da seção transversal mediana do corpo de prova;
- ΔL : variação do comprimento útil do corpo de prova;
- L_0 : comprimento útil do corpo de prova.

3.2.3.2 Corpos de prova

Os corpos de prova para os ensaios de tração são fabricados conforme a norma ASTM D638-10, com o mesmo equipamento e a matéria-prima utilizados na confecção dos protótipos. As Figuras 3.16 e 3.17 apresentam a geometria e a orientação de impressão dos corpos de prova, respectivamente.

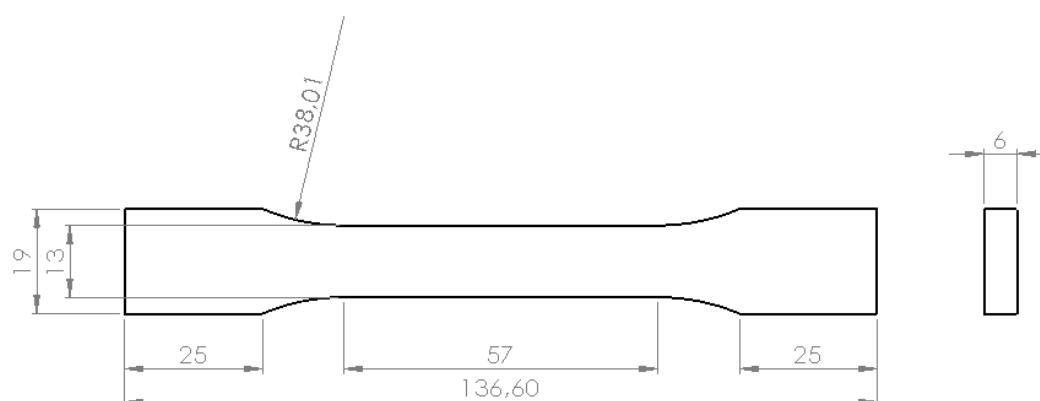


Figura 3.17 - Geometria dos corpos de prova (dimensões em mm).



Figura 3.18 - Orientação de impressão dos corpos de prova.

3.2.3.3 Curvas tensão-deformação

Após a realização dos ensaios de tração, obtêm-se as curvas tensão-deformação e o módulo de elasticidade correspondente à inclinação do trecho elástico-linear dos corpos de prova, conforme mostram a Figura 3.18 e a Tabela 3.2, respectivamente. Pontos no início do ensaio não são considerados para a obtenção do módulo de elasticidade, pois a máquina parte da velocidade inicial zero e ainda não atingiu a velocidade determinada para o ensaio (MENDES, 2007).

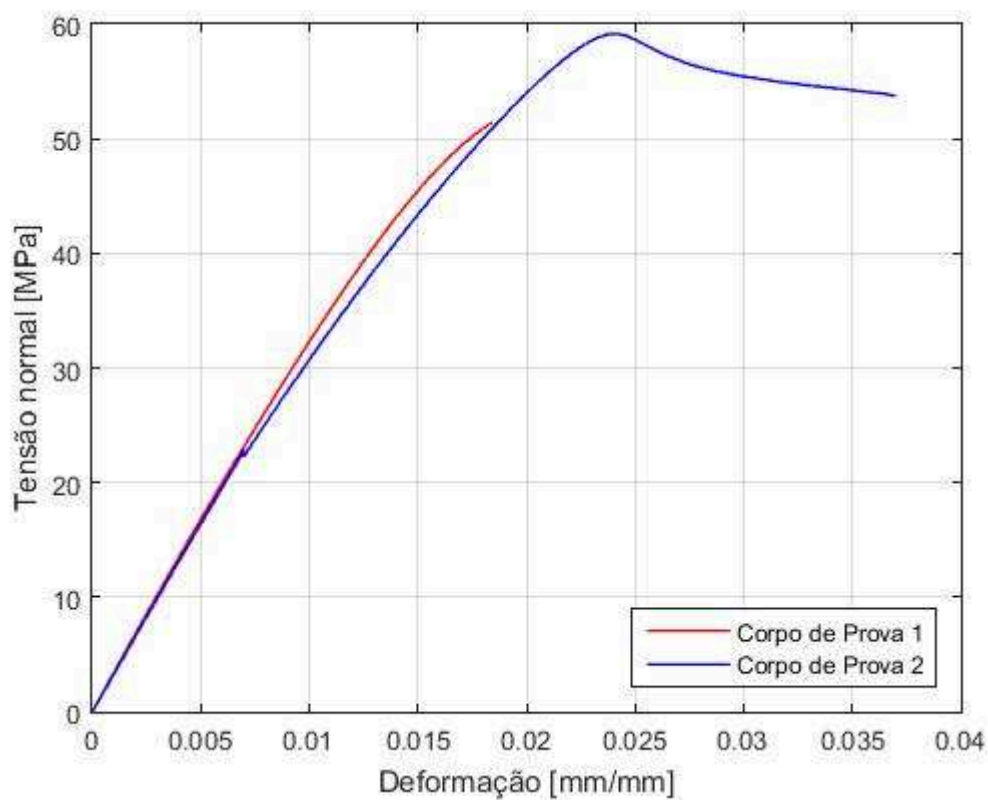


Figura 3.19 - Curvas tensão-deformação dos corpos de prova.

Tabela 3.2 - Módulo de elasticidade dos corpos de prova.

Corpo de prova	Módulo de elasticidade (GPa)
1	3,18
2	3,01

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este capítulo apresenta os resultados obtidos e uma breve discussão dos mesmos.

4.1 SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

4.1.1 Modos e frequências naturais de vibração da viga em balanço

Para determinar computacionalmente os modos e frequências naturais da viga em balanço é necessário definir na etapa de pré-processamento as dimensões da viga e as propriedades do seu material constituinte. Dentre as hipóteses utilizadas na formulação do modelo de Euler-Bernoulli, a viga deve ser uniforme ao longo do seu comprimento e esbelta, composta por um material linear, elástico, isotrópico e homogêneo.

Segundo Mascia (2006), o fator que determina se uma viga é curta ou longa é o seu índice de esbeltez λ , dado por:

$$\lambda = \frac{l_{cr}}{i} = \frac{k \cdot l}{i} ; \quad (4.1)$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} ; \quad (4.2)$$

onde:

- l_{cr} : comprimento de flambagem;
- i : raio de giração;
- k : coeficiente de flambagem (para vigas engastadas-livre, $k = 2$);
- l : comprimento da viga;
- I : momento de inércia da seção transversal;
- A : área da seção transversal.

Com base nas hipóteses do modelo de Euler-Bernoulli, considera-se uma viga de aço para simular em MATLAB®, de dimensões e propriedades conforme mostram as Tabelas 4.1 e 4.2, respectivamente.

Tabela 4.1 - Dimensões da viga.

	Unidade	Valor
Comprimento (L)	m	1
Altura (h)	m	0,05
Largura (b)	m	0,05

Tabela 4.2 - Propriedades do aço (LALANNE, BERTHIER, DER HAGOPIAN, 1984).

	Unidade	Valor
Módulo de elasticidade (E)	GPa	200
Coeficiente de <i>Poisson</i> (ν)	-	0,3
Massa específica (ρ)	kg/m³	7800

Para o aço, valores do índice de esbeltez acima de 105 são característicos de vigas esbeltas (MASCIA, 2006). Assim, a viga em estudo, com índice de esbeltez $\lambda = 138,56$, é classificada como uma viga esbelta.

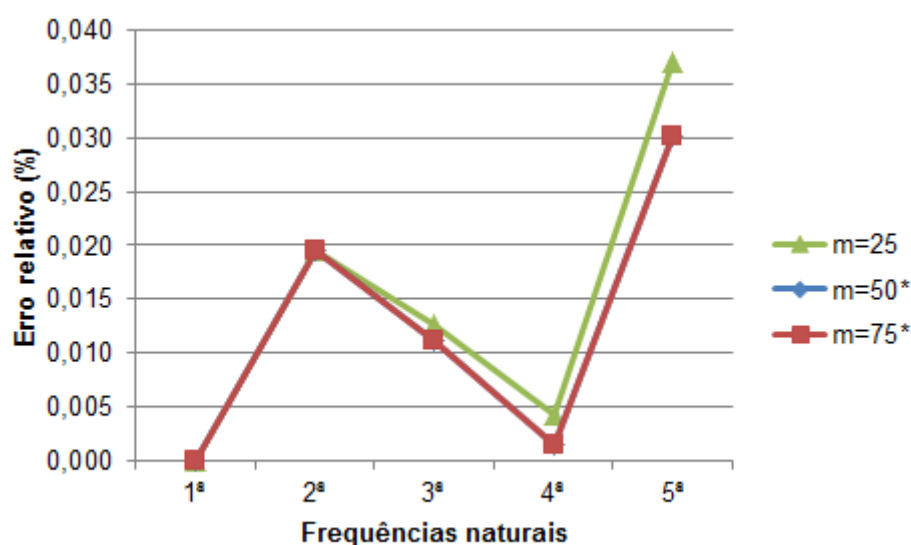
Após a execução da rotina computacional, obtêm-se as primeiras frequências naturais e os correspondentes modos de vibrar da viga em balanço. A fim de

analisar a influência do refinamento da malha de elementos finitos nos valores das frequências naturais, a rotina é executada para diferentes densidades de malha (25, 50 e 75 elementos finitos). A Tabela 4.3 apresenta os resultados analíticos obtidos com a formulação apresentada pelos autores Lalanne, Berthier, Der Hagopian (1984) e os resultados computacionais obtidos com as simulações em MATLAB®.

Tabela 4.3 - Cinco primeiras frequências naturais da viga em balanço (teoria e MATLAB®) e correspondentes erros relativos.

	FREQUÊNCIAS NATURAIS (Hz)				ERROS RELATIVOS (%)		
	Teoria	MATLAB®					
		$m = 25$	$m = 50$	$m = 75$	$m = 25$	$m = 50$	$m = 75$
1ª	40,90	40,90	40,90	40,90	0,000	0,000	0,000
2ª	256,26	256,31	256,31	256,31	0,019	0,019	0,019
3ª	717,60	717,69	717,68	717,68	0,012	0,011	0,011
4ª	1406,35	1406,41	1406,37	1406,37	0,004	0,001	0,001
5ª	2324,14	2325,00	2324,84	2324,84	0,037	0,030	0,030

Para facilitar a visualização dos resultados da Tabela 4.3 constrói-se o gráfico do erro relativo, conforme mostra a Figura 4.1.



* Curvas coincidentes.

Figura 4.1 - Gráfico do erro relativo das cinco primeiras frequências naturais da viga em balanço para diferentes densidades de malha (teoria e MATLAB®).

A partir da Figura 4.1, observa-se que para as cinco primeiras frequências naturais o erro relativo é menor que 0,04%, independentemente da densidade da malha. Para as duas primeiras frequências naturais o erro não se altera com o refinamento da malha. No entanto, para a terceira, quarta e quinta frequências naturais o erro diminui à medida que a densidade da malha aumenta.

O refinamento da malha de elementos finitos proporciona, então, um ganho na precisão dos resultados computacionais, porém, à medida que a densidade da malha aumenta, o tempo de simulação e o volume de armazenamento no computador aumentam consideravelmente e, conseqüentemente, o custo computacional também aumenta.

A Figura 4.2 apresenta os cinco primeiros modos de vibrar da viga em balanço para uma malha constituída por 75 elementos finitos.

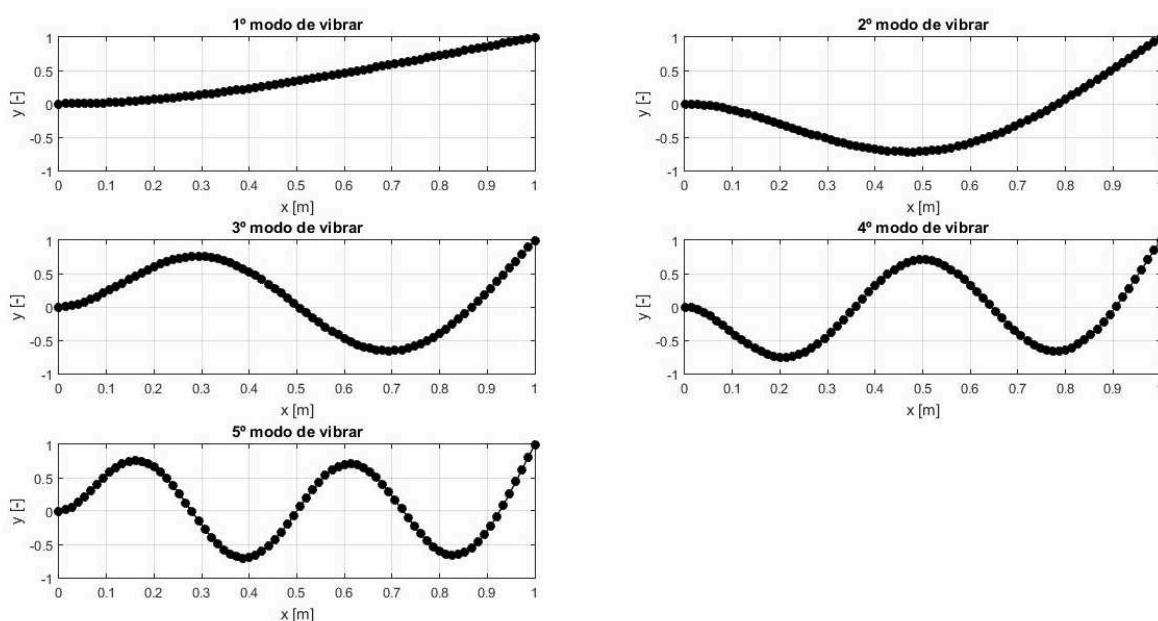


Figura 4.2 - Cinco primeiros modos de vibrar da viga em balanço para uma malha constituída por 75 elementos finitos.

Além das simulações em MATLAB®, utiliza-se o software ANSYS® para a análise modal da viga em estudo. Destaca-se que, assim como em MATLAB®, as simulações são realizadas para diferentes densidades de malha (25, 50 e 75

elementos finitos). A Tabela 4.4 apresenta os resultados computacionais obtidos com as simulações em MATLAB® e via ANSYS®.

Tabela 4.4 - Cinco primeiras frequências naturais da viga em balanço (MATLAB® e ANSYS®) e correspondentes erros relativos.

	FREQUÊNCIAS NATURAIS (Hz)						ERROS RELATIVOS (%)		
	MATLAB®			ANSYS®					
	$m = 25$	$m = 50$	$m = 75$	$m = 25$	$m = 50$	$m = 75$	$m = 25$	$m = 50$	$m = 75$
1ª	40,90	40,90	40,90	40,824	40,820	40,819	0,186	0,196	0,198
2ª	256,31	256,31	256,31	253,73	253,07	252,95	1,017	1,280	1,328
3ª	717,69	717,68	717,68	702,21	697,04	696,08	2,204	2,961	3,103
4ª	1406,41	1406,37	1406,37	1355,0	1335,4	1331,8	3,794	5,315	5,599
5ª	2325,00	2324,84	2324,84	2199,8	2148,2	2138,8	5,691	8,223	8,698

Para facilitar a visualização dos resultados da Tabela 4.4 constrói-se o gráfico do erro relativo, conforme mostra a Figura 4.3.

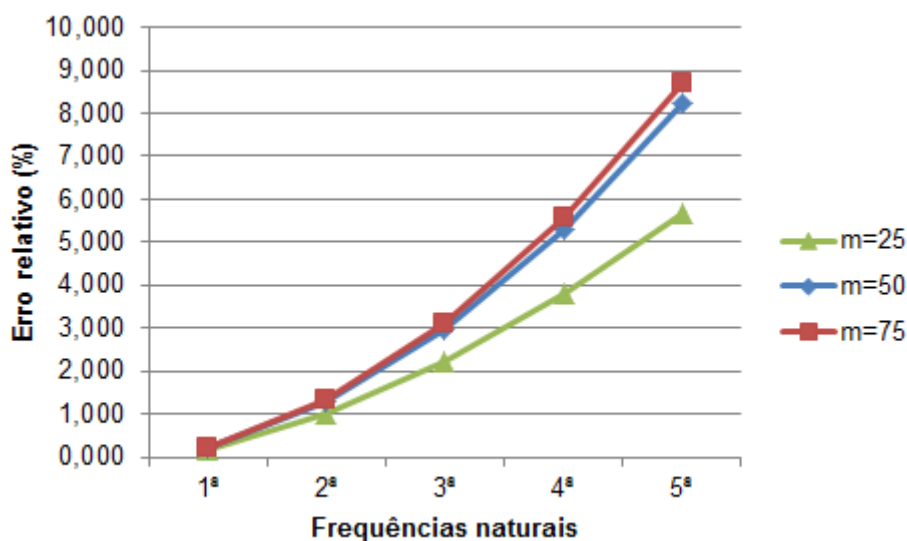


Figura 4.3 - Gráfico do erro relativo das cinco primeiras frequências naturais da viga em balanço para diferentes densidades de malha (MATLAB® e ANSYS®).

A partir da Figura 4.3, percebe-se que a diferença máxima entre a primeira frequência natural do modelo de Euler-Bernoulli (MATLAB®) e a primeira frequência natural do modelo de Timoshenko (ANSYS®) é de apenas 0,2%, aproximadamente.

No entanto, essa diferença aumenta para frequências mais altas, aproximando-se de 9% para a quinta frequência natural.

Segundo Costa (2006), a teoria de Euler-Bernoulli tende a superestimar as frequências naturais, especialmente para os modos de ordem mais elevada. Isso se deve ao fato de o modelo de viga de Euler-Bernoulli desprezar os efeitos de cisalhamento e inércia de rotação, responsáveis por reduzir o valor das frequências naturais, especialmente para frequências elevadas, em que tais efeitos são mais pronunciados. Assim, apesar do modelo de Euler-Bernoulli ser de menor complexidade, este se aplica para vigas esbeltas e baixas frequências naturais.

4.1.2 Resposta dinâmica da viga em balanço à excitação harmônica (FRFs)

A análise harmônica é uma técnica utilizada para determinar a resposta dinâmica de estruturas sob a ação de carregamentos harmônicos. Para a análise harmônica da viga em estudo é necessário definir alguns parâmetros, a critério da autora, apresentados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 - Parâmetros referentes à análise harmônica da viga em balanço.

	Unidade	Valor
Malha de elementos finitos (m)	-	50
Intervalo de frequência (f)	Hz	0 a 300
Incremento de frequência (Δf)	Hz	0,1

Após as simulações computacionais, obtêm-se as FRFs da viga em balanço. A Figura 4.4 apresenta os gráficos, em escala logarítmica, da magnitude da FRF da extremidade livre da viga, ou seja, como varia a razão entre a amplitude de vibração e a amplitude da força excitadora em função da frequência de excitação.

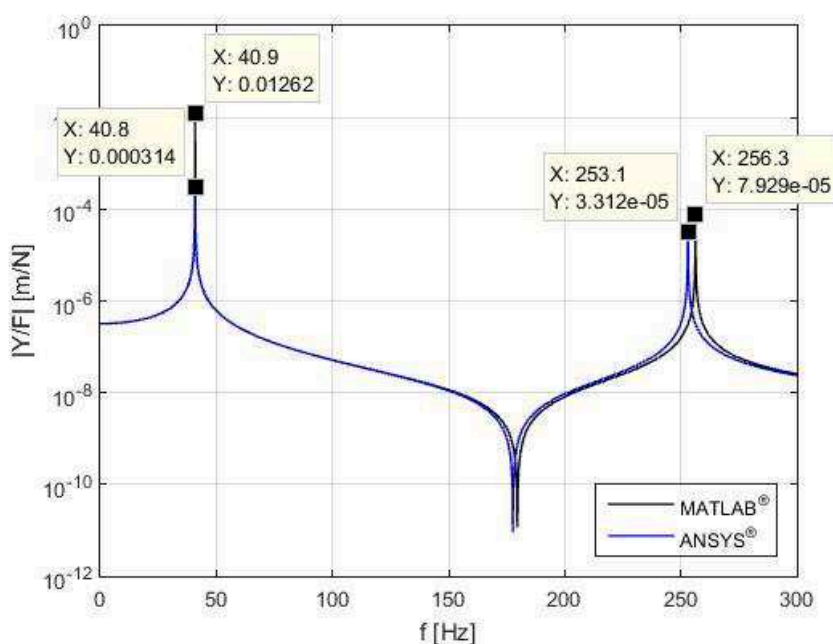


Figura 4.4 - FRFs computacionais da extremidade livre da viga em balanço.

A partir da Figura 4.4, observam-se os picos correspondentes ao primeiro e segundo modos de vibrar da viga. Para amortecimento nulo, quando a frequência de excitação coincide com uma das frequências naturais da estrutura, a razão entre a amplitude de vibração e a amplitude da força excitadora cresce infinitamente. Tal fenômeno é conhecido como ressonância, em que grandes amplitudes de vibração são observadas, mesmo para pequenas amplitudes da força excitadora.

Com o incremento de frequência de 0,1 Hz, a frequência de excitação se aproxima, mas não coincide com nenhuma das frequências naturais da viga, explicando a diferença entre as amplitudes de vibração dos picos das FRFs.

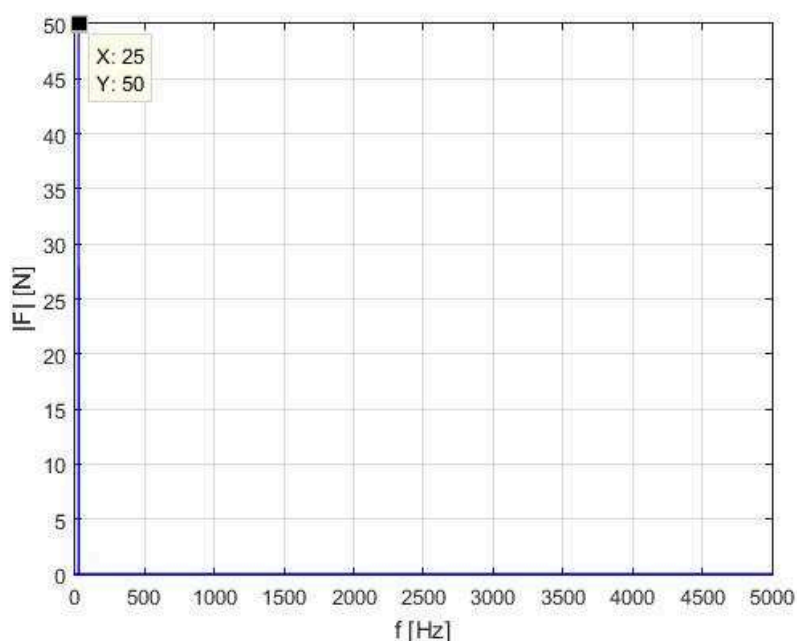
4.1.3 Resposta dinâmica da viga em balanço ao carregamento de impacto

A partir da análise transiente, é possível determinar a resposta dinâmica da viga sob a ação do carregamento de impacto. Antes, porém, é necessário definir alguns parâmetros, a critério da autora, conforme mostra a Tabela 4.6.

Tabela 4.6 - Parâmetros referentes à análise transiente da viga em balanço.

	Unidade	Valor
Malha de elementos finitos (m)	-	50
Amplitude da força de excitação (F_0)	N	50
Tempo de duração do impacto (t_1)	s	0,02
Tempo total da simulação (t_2)	s	0,1
Incremento de tempo (Δt)	s	0,0001

Durante o intervalo de tempo de 0 a 0,02 s, a viga está sujeita ao carregamento harmônico, cujo gráfico da força em função da frequência é apresentado na Figura 4.5.

**Figura 4.5** - Gráfico da força aplicada à extremidade livre da viga em balanço no domínio da frequência.

Após as simulações computacionais, obtém-se a resposta dinâmica da extremidade livre da viga em balanço ao carregamento de impacto, conforme ilustra a Figura 4.6.

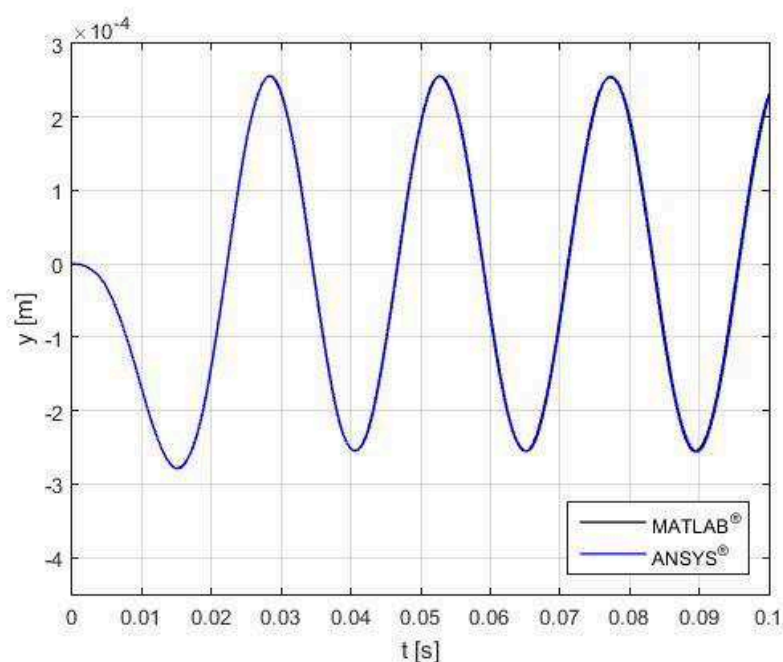


Figura 4.6 - Resposta dinâmica da extremidade livre da viga em balanço ao carregamento de impacto.

A partir da Figura 4.6, percebe-se que, como a viga é excitada por um carregamento de impacto de baixa frequência (25 Hz), os gráficos computacionais correspondentes à resposta dinâmica da sua extremidade livre coincidem. Em ambos, o pico de resposta ocorre durante a ação da carga de impacto (impacto de longa duração) e, após a ação desta, a extremidade livre da viga vibra livremente com a mesma amplitude vibração (vibrações livres não amortecidas).

4.2 PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

4.2.1 Comparação entre as FRFs computacionais e experimentais

O software ANSYS® é também utilizado para a modelagem computacional dos protótipos. As Tabelas 4.7 e 4.8 apresentam as dimensões e as propriedades do material dos protótipos, respectivamente. Destaca-se que, devido ao engastamento dos protótipos, o comprimento a ser considerado nas simulações via ANSYS® é de 0,13 m.

Tabela 4.7 - Dimensões dos protótipos.

	Unidade	Valor
Comprimento (L)	m	0,15
Altura (h)	m	0,02
Largura (b)	m	0,045

Tabela 4.8 - Propriedades do material dos protótipos (Tabela 3.2 e TORRES et al., 2015).

	Unidade	Valor
Módulo de elasticidade do protótipo 1 (E_1)	GPa	3,18
Módulo de elasticidade do protótipo 2 (E_2)	GPa	3,01
Coefficiente de <i>Poisson</i> (ν)	-	0,36
Massa específica (ρ)	kg/m ³	1240

Antes de iniciar a análise harmônica dos protótipos, alguns parâmetros são definidos, a critério da autora, conforme mostra a Tabela 4.9.

Tabela 4.9 - Parâmetros referentes à análise harmônica dos protótipos.

	Unidade	Valor
Malha de elementos finitos (m)	-	75
Intervalo de frequência (f)	Hz	0 a 2048
Incremento de frequência (Δf)	Hz	1

Após a simulação computacional e o ensaio experimental do protótipo 1, obtêm-se as FRFs da sua extremidade livre, apresentadas na Figura 4.7.

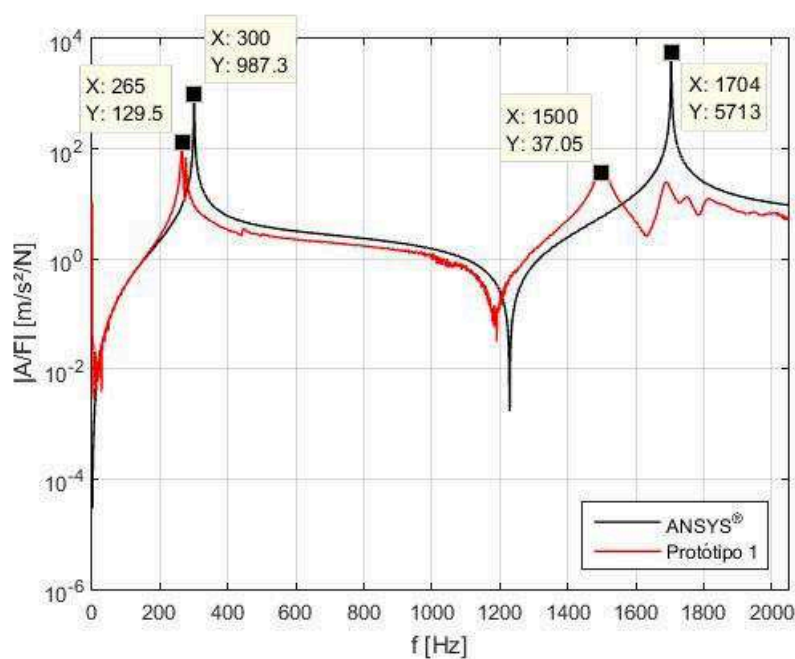


Figura 4.7 - FRF computacional e experimental da extremidade livre do protótipo 1.

Além disso, obtém-se, também, a função de coerência do protótipo 1, conforme mostra a Figura 4.8.

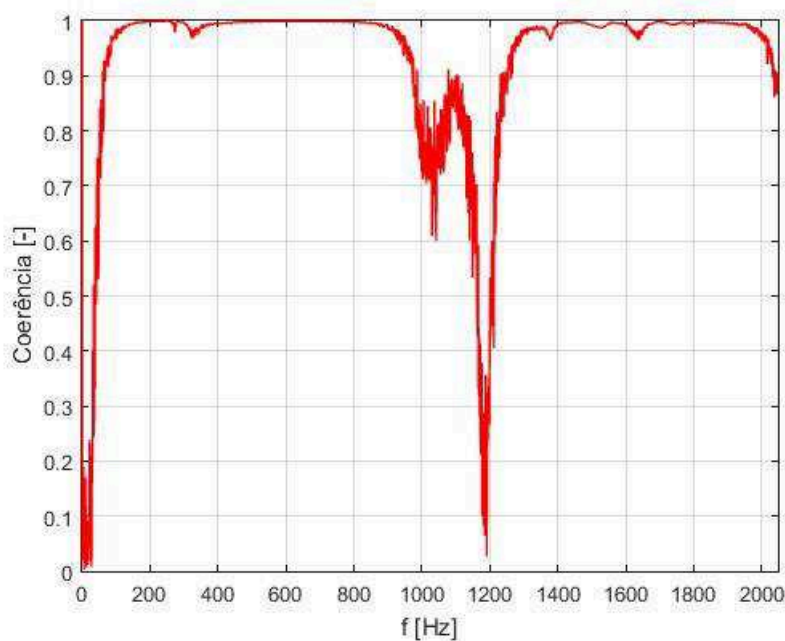


Figura 4.8 - Função de coerência do protótipo 1.

Após a simulação computacional e o ensaio experimental do protótipo 2, obtém-se as FRFs da sua extremidade livre, apresentadas na Figura 4.9.

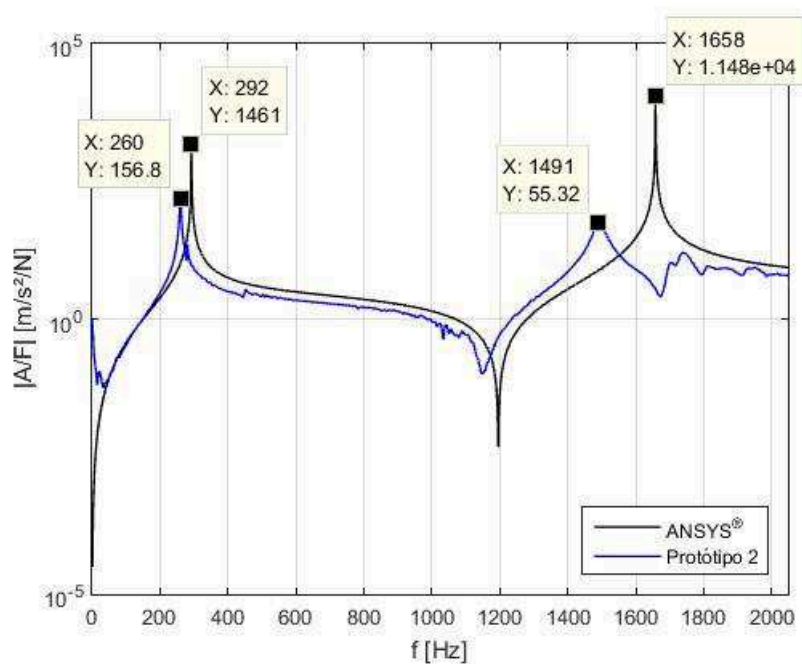


Figura 4.9 - FRF computacional e experimental da extremidade livre do protótipo 2.

Além disso, obtém-se, também, a função de coerência do protótipo 2, conforme mostra a Figura 4.10.

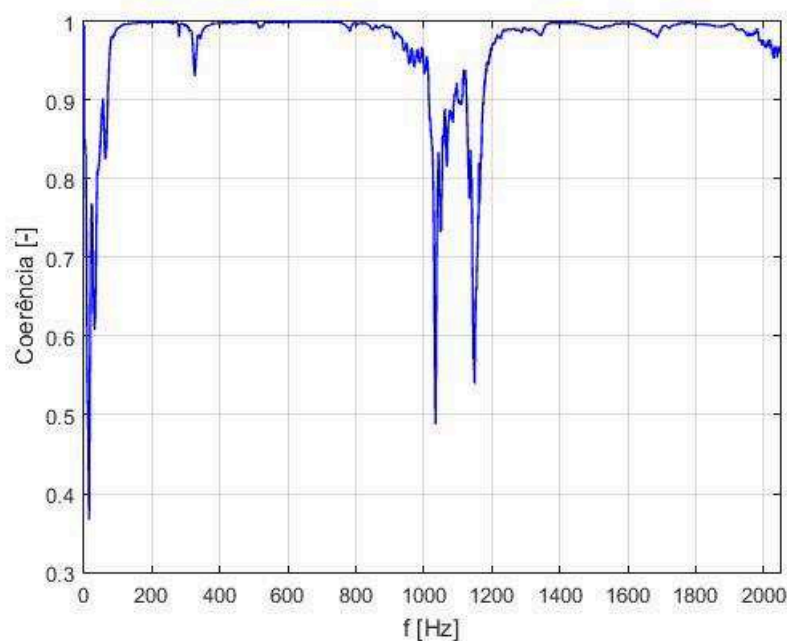


Figura 4.10 - Função de coerência do protótipo 2.

A partir das Figuras 4.8 e 4.10, observa-se que para frequências próximas das frequências naturais experimentais, a função de coerência assume valores próximos da unidade. Segundo Magalhães, Caetano e Cunha (2004), isso já era esperado, pois, próximo às frequências naturais, a amplitude da resposta é mais elevada e, portanto, a relação entre o nível de sinal e o nível de ruído é maior.

As Figuras 4.7 e 4.9 apresentam a magnitude das FRFs computacionais e experimentais em escala logarítmica para melhor visualização dos picos. Ao se compararem as FRFs computacionais com as respectivas FRFs experimentais, percebe-se a diferença entre os gráficos, justificada pelo fato de o amortecimento não ser considerado na modelagem computacional dos protótipos e, com relação aos ensaios experimentais, o engaste não ser perfeito.

4.2.2 Comparação entre as FRFs experimentais

Os resultados experimentais são, também, comparados entre si, conforme apresenta a Figura 4.11.

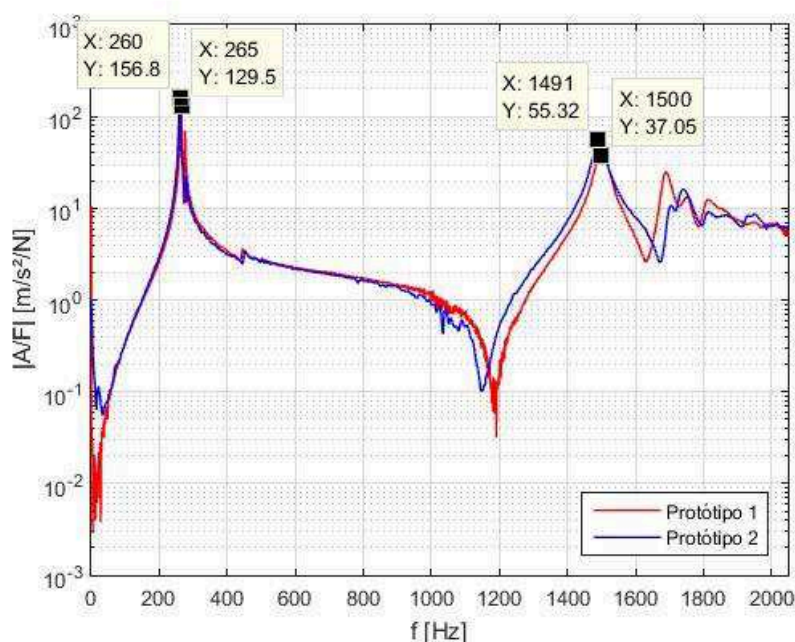


Figura 4.11 - FRFs experimentais da extremidade livre dos protótipos.

A partir da Figura 4.11, observa-se que, para diferentes orientações de impressão do protótipo, as frequências naturais e as correspondentes amplitudes

das FRFs experimentais diferem entre si. Portanto, em consequência do PLA ter suas propriedades mecânicas dependentes do parâmetro “orientação de impressão” (Tabela 3.2), o comportamento dinâmico dos protótipos também é influenciado por tal parâmetro.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Este capítulo apresenta um resumo das principais e mais relevantes conclusões obtidas com a realização deste trabalho.

- O refinamento da malha de elementos finitos proporciona um ganho na precisão dos resultados computacionais, porém, à medida que a densidade da malha aumenta, o tempo de simulação e o volume de armazenamento no computador aumentam consideravelmente e, conseqüentemente, o custo computacional também aumenta.
- Como esperado por Costa (2006), a teoria de Euler-Bernoulli tende a superestimar as frequências naturais, especialmente para os modos de ordem mais elevada. Isso se deve ao fato de o modelo de viga de Euler-Bernoulli desprezar os efeitos de cisalhamento e inércia de rotação, responsáveis por reduzir o valor das frequências naturais, especialmente para frequências elevadas, em que tais efeitos são mais pronunciados. Assim, apesar do modelo de Euler-Bernoulli ser de menor complexidade, este se aplica para vigas esbeltas e baixas frequências naturais.
- Para frequências próximas das frequências naturais a função de coerência assume valores próximos da unidade, pois a amplitude da resposta é mais elevada e, portanto, a relação entre o nível de sinal e o nível de ruído é maior (MAGALHÃES, CAETANO, CUNHA, 2004).
- A diferença entre os resultados computacionais e os experimentais é devida ao amortecimento não ser considerado na modelagem computacional dos

protótipos e, com relação aos ensaios experimentais, ao engaste não ser perfeito.

- Em consequência do PLA ter suas propriedades mecânicas dependentes do parâmetro “orientação de impressão”, o comportamento dinâmico dos protótipos também é influenciado por tal parâmetro.

CAPÍTULO 6

SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

As propostas para trabalhos futuros são apresentadas a seguir.

- Incluir os efeitos de cisalhamento e inércia de rotação na rotina computacional, ou seja, desenvolvê-la com base no modelo de viga de Timoshenko.
- Incluir o amortecimento na modelagem computacional dos protótipos.
- Analisar a influência de outros parâmetros de impressão (tipo e percentual de preenchimento, espessura das paredes, altura das camadas) nas propriedades mecânicas do PLA e no comportamento dinâmico dos protótipos.

CAPÍTULO 7

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Wagner José de. *Otimização estrutural de protótipos fabricados pela tecnologia FDM utilizando o Método dos Elementos Finitos*. EESC/USP, São Carlos, 2007. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18146/tde-05022010-163333/pt-br.php>>. Acesso em: 06 mai. 2018.

ALVES FILHO, Avelino. *Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE*. 4. ed. São Paulo: Érica, 2006.

ALVES FILHO, Avelino. *Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE / Análise Dinâmica*. 2. ed. São Paulo: Érica, 2008.

American Society for Testing and Materials. **ASTM D638-10**: Standard test method for tensile properties of plastics, 2010.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*, NBR 6118. Rio de Janeiro, ABNT, 2014, 238 p. Disponível em: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAgmq8AA/nbr-6118-2014-versao-corrigida-07-08-2014>>. Acesso em: 02 jan. 2017.

BRITO, Gustavo F. et al. Tenacificação do poli(ácido láctico) pela adição do terpolímero (etileno/acrilato de metila/metacrilato de glicidila). *Polímeros*, São Carlos, v. 22, n. 2, 2012. Disponível em:

<http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-14282012000200011>. Acesso em: 27 mai. 2018.

CAMPOS, Marco Donisete de. *O Método de Elementos Finitos aplicado à Simulação Numérica de Escoamentos de Fluidos*. III Bienal da SBM. IME/UFG, 2006. Disponível em: <<http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/poster/marcodonisete.pdf>>. Acesso em: 31 jan. 2018.

CLIEVER. *Impressora 3D CL2 Pro Plus*. Disponível em: <<https://store.cliever.com/impressoras-3d/impressora-3d-cl2-pro-plus/>>. Acesso em: 31 ago. 2018.

COSTA, Sânzara Nhiaia Jardim. *O Modelo de Timoshenko em Vigas Elásticas, Estruturas Offshore e Nanotubos de Carbono através da Resposta Fundamental de Valor Inicial*. IM/UFRGS, Porto Alegre, 2006. Disponível em: <<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/8208/000570583.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 13 mai. 2018.

COUTINHO, Rafaella Rabello Teixeira Perdone. *Avaliação de Parâmetros de Processo nas Propriedades de Peças de PBAT/PLA Fabricadas por Impressão 3D*. Escola Politécnica/UFRJ, Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: <<http://monografias.poli.ufrj.br/monografias/monopoli10021032.pdf>>. Acesso em: 09 abr. 2018.

FARINA, Luciano André; POSSER, Maurício Simões. *MATLAB – Ferramenta matemática para Engenharia*. LACIP/UFRGS. Disponível em: <http://www2.peq.coppe.ufrj.br/Pessoal/Professores/Arge/COQ897/Matlab/apostila_curso_matlab.pdf>. Acesso em: 02 abr. 2018.

LALANNE, Michel, BERTHIER, Patrick, DER HAGOPIAN, Johan. *Mechanical Vibrations for Engineers*. 1984.

LÁZARO, Pedro Palmeira. *Criação de programa informático em ambiente Matlab® para estudo de estruturas planas pelo Método de Elementos Finitos*. ISEP, 2015.

Disponível em:
http://recipp.ipp.pt/bitstream/10400.22/8175/1/DM_PedroLazaro_2015MEM.pdf.
 Acesso em: 02 abr. 2018.

LEROY MERLIN. *Filamento PLA 1,75 mm 1 kg branco Cliever*. Disponível em:
https://www.leroymerlin.com.br/filamento-pla-1,75mm-1kg-branco-cliever_89499403. Acesso em: 31 ago. 2018.

LIMA, Michelline Nery Azevedo. *Testes modais utilizando martelo instrumentado em estruturas de baixas frequências naturais*. UFPB/CT/PPGEM, João Pessoa, 2006.
 Disponível em:
<https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/5322/1/arquivototal.pdf>. Acesso em: 08 jul. 2018.

MAGALHÃES, Filipe; CAETANO, Elsa; CUNHA, Álvaro. Desenvolvimento de software em MATLAB para identificação modal de pontes sob acções ambientais. *6º Congresso Nacional de Sismologia e Engenharia Sísmica* (2004). Disponível em:
http://www.hms.civil.uminho.pt/events/sismica2004/757-766%20c36%20Filipe%20Magalh%C3%A3es%20_10p_.pdf. Acesso em: 11 nov. 2018.

MASCIA, Nilson Tadeu. *Flambagem de Barras*. FEC/UNICAMP, Campinas, 2006.
 Disponível em: <https://www.ebah.com.br/content/ABAAAgRCkAH/flambagem-flambagemdebarras>. Acesso em: 07 fev. 2019.

MENDES, Atahualpa Moura et al. *Relatório de ensaio de tração com materiais poliméricos*. FEM/UNICAMP, Campinas, 2007. Disponível em:
http://www.fem.unicamp.br/~assump/Projetos/2007/Relat_Ensaio_Polimero.pdf.
 Acesso em: 12 ago. 2018.

MORAIS, Vinicius Souza. *Projeto E Construção De Charpy Utilizando A Modelagem Numérica Da Plataforma Ansys® No Estudo Comparativo Entre Ensaio Numéricos E Práticos A Partir De Diferentes Propriedades Mecânicas De Materiais Compósitos*. FEIS/UNESP, Ilha Solteira, 2016. Disponível em:

<https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/143093/morais_vs_dr_ilha.pdf?sequence=3>https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/143093/morais_vs_dr_ilha.pdf?sequence=3>. Acesso em: 12 ago. 2018.

NEPOMUCENO, Erivelton Geraldo. *Métodos Numéricos: Método dos Elementos Finitos*. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. CEFELT-MG/UFSJ, 2015. Disponível em: <https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/nepomuceno/mn/23MN_EDO6.pdf>. Acesso em: 03 jan. 2018.

RAULINO, Bruno Ribeiro. *Manufatura Aditiva: Desenvolvimento de uma Máquina de Prototipagem Rápida Baseada na Tecnologia FDM (Modelagem por Fusão e Deposição)*. FT/UnB, Brasília, 2011. Disponível em: <<http://alvarestech.com/temp/PrototipagemRapida/Relat%F3rio%20TG2%20-%20Bruno%20Ribeiro.pdf>>. Acesso em: 20 mai. 2018.

REZENDE, Jean Carlos; BORGES, José Antônio Ferreira. *Desenvolvimento, Projeto e Construção de um Protótipo de Suspensão Automotiva para Bancada de Laboratório*. 13º POSMEC. FEMEC/UFU, Uberlândia, 2003. Disponível em: <<http://web.posfemec.org/posmec/13/artigos/TRB110.pdf>>. Acesso em: 22 fev. 2018.

REZENDE, Jean Carlos; BORGES, José Antônio Ferreira. *Ensaio Experimentais para Validação de Modelo Numérico/Computacional de Protótipo de ¼ de Veículo*. 16º POSMEC. FEMEC/UFU, Uberlândia, 2006. Disponível em: <<http://web.posfemec.org/posmec/16/PDF/PM16-0104.pdf>>. Acesso em: 08 fev. 2018.

SANTADE, Fransber. *Análises de Estruturas Flexíveis com Materiais Viscoelásticos: Viga Viscoelástica Engastada com Vibração Livre e Forçada*. VI Seminário da Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. FEB/UNESP, Bauru, 2012. Disponível em: <<http://www2.feb.unesp.br/pos/seminario/VISeminario/anais/AC-FransberSantade.pdf>>. Acesso em: 03 jan. 2018.

SILVA, Evandro Pereira da. *Elementos finitos como ferramenta auxiliar na análise estrutural estática de uma colhedora de café do tipo automatizada*. UFLA, Lavras, 2013.

Disponível em:

<<http://repositorio.ufla.br/bitstream/1/962/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O%20Elementos%20finitos%20como%20ferramenta%20auxiliar%20na%20an%C3%A1lise%20estrutural%20est%C3%A1tica%20de.pdf>>. Acesso em: 02 abr. 2018.

SOUZA, Remo Magalhães de. *O Método dos Elementos Finitos aplicado ao Problema de Condução de Calor*. NICAÉ/UFPA, Belém, 2003. Disponível em: <http://www.ufpa.br/nicae/integrantes/remo_souza/TrabPublicados/Apostilas/ApostilaElementosFinitosNiCAE.pdf>. Acesso em: 31 jan. 2018.

TORRES, Jonathan et al. Mechanical Property Optimization of FDM PLA in Shear with Multiple Objectives. *JOM*, v. 67, n. 5, p. 1183-1193, 2015.

TSCHIPTSCHIN, André Paulo. *Método de Elementos Finitos Aplicado à Seleção de Materiais*. METMAT/USP, 2011. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2792809/mod_resource/content/2/Aula_elementos%20finitos.pdf>. Acesso em: 31 jan. 2018.

CAPÍTULO 8

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

ANDRADE, Vinícius Santos. *Análise dinâmica de uma viga engastada excitada por uma fonte não ideal*. EESC/USP, São Carlos, 2009. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18135/tde-11012010-100639/pt-br.php>>. Acesso em: 27 mar. 2018.

AZEVEDO, João J. R. T.; PROENÇA, Jorge Miguel S. F. M. *Dinâmica de Estruturas*. DECivil/IST, Lisboa, 1991. Disponível em: <https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/282093452012962/Dinamica%20de%20Estruturas_1991.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2018.

BAPTISTA JR., Ibernnon Pacheco. *Modelagem Térmica de Modelo Reduzido de Pequena Central Hidrelétrica (PCH)*. DACOC/UTFPR, Pato Branco, 2014. Disponível em: <http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/1980/1/PB_COECI_2013_2_14.pdf>. Acesso em: 16 mai. 2018.

BARROS, Murilo Borges. *Proposição, avaliação numérica e experimental de um absorvedor dinâmico de vibrações multimodal*. FEMEC/UFU, Uberlândia, 2009. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/14845/1/muriilo.pdf>>. Acesso em: 08 jul. 2018.

BIOFABRIS. *PLA: O plástico utilizado para impressões 3D*. 2014. Disponível em: <<http://biofabris.com.br/pt/pla-o-plastico-utilizado-para-impressoes-3d/>>. Acesso em: 05 fev. 2019.

BRISTOT, Leandro Fabris. *Análise da influência de parâmetros de engenharia para a determinação da força crítica de flambagem de um cilindro hidráulico telescópico*. CCET/UCS, Caxias do Sul, 2015. Disponível em: <<https://repositorio.ucs.br/xmlui/bitstream/handle/11338/2084/TCC%20Leandro%20Fabris%20Bristot.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 02 abr. 2018.

CLIEVER. *Qual a Importância do spray fixador na impressão 3D?* 2017. Disponível em: <<https://www.cliever.com/en/blog/post/18/qual-a-importancia-do-spray-fixador-na-impressao-3d->>. Acesso em: 06 fev. 2019.

DALCIN, Gabrieli Bortoli. *Ensaio dos Materiais*. URI, Santo Ângelo, 2007. Disponível em: <http://www.urisan.tche.br/~lemm/arquivos/ensaio_mecanicos.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2018.

INMAN, Daniel J. *Engineering Vibration*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, US, 1996.

LETCHER, Todd; WAYTASHEK, Megan. Material Property Testing of 3D-Printed Specimen in PLA on an Entry-Level 3D Printer. *ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers, 2014.

LWT Sistemas. *As 5 grandes vantagens da impressão 3D para revolucionar a indústria*. 2016. Disponível em: <<http://www.lwtsistemas.com.br/vantagens-da-impressao-3d-revolucionar/>>. Acesso em: 07 fev. 2018.

MAMEDE, Ana Lúcia Grici Zacarin. *Simulações de modelos dinâmicos com amortecimento não proporcional*. EESC/USP, São Carlos, 2008. Disponível em: <http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:YPQJieCCz_AJ:www.abc.org.br/anais/conem/2010/PDF/CON10-1661.pdf+&cd=8&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>. Acesso em: 02 abr. 2018.

MIRLISENNA, Giuseppe. *Método dos Elementos Finitos: O que é?* ESSS. 2016. Disponível em: <<http://www.esss.com.br/blog/2016/01/metodo-dos-elementos-finitos-o-que-e/>>. Acesso em: 02 jan. 2018.

NAKASONE, Paulo Henrique. *Tutorial ANSYS – Análises Modal, Harmônica e Transiente*. PMR/Poli-USP, São Paulo, 2004. Disponível em: <<https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:lmeMkiLfS0YJ:https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php%3Fid%3D1399237+&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>>. Acesso em: 15 jul. 2018.

PAIVA, Guilherme Oliveira Ferraz de et al. *Análise de estruturas utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados*. CONTECC'2016, Foz do Iguaçu. Disponível em: <<http://www.confea.org.br/media/contecc2016/civil/an%C3%A1lise%20de%20estruturas%20utilizando%20o%20m%C3%A9todo%20dos%20elementos%20finitos%20generalizados.pdf>>. Acesso em: 02 abr. 2018.

PEREIRA, Guilherme Martins. *Modelagem e simulação do sistema de geração de energia eólica aplicada em uma torre vertical*. DAS/UFSC, Florianópolis, 2015. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/171481/PFC-20151-GuilhermeMartinsPereira.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 20 mai. 2018.

RIGON, Henrique Chiaradia. *Estudo dos Aspectos Estruturais de Espumas Metálicas*. DEMEC/UFRGS, Porto Alegre, 2014. Disponível em: <<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/109180/000949369.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 13 mai. 2018.

ROSA, Celysa. *Filamentos para impressora 3D: conheça os mais comuns*. Fazedores, 2018. Disponível em: <<http://blog.fazedores.com/filamentos-para-impressora-3d/>>. Acesso em: 05 fev. 2019.

SANTOS, Laura Camelo. *Análise numérica via Ansys do equilíbrio não linear e estabilidade elástica de estruturas com restrições de contato*. DECIV/UFOP, Ouro Preto, 2016. Disponível em: <<http://www.propec.ufop.br/teses-e-dissertacoes/258/analise-numerica-via-ansys-do-equilibrio-nao-linear-e-estabilidade-elastica-de-estruturas-com-restricoes-de-contato>>. Acesso em: 13 mai. 2018.

APÊNDICE A

Este apêndice apresenta os códigos desenvolvidos em linguagem MATLAB® para a simulação do comportamento dinâmico de uma viga em balanço por meio do modelo de viga de Euler-Bernoulli.

A.1 SCRIPT

```
clear all;
close all;
clc;

%Matriz de rigidez e massa da viga em balanço
syms E I a rho S
m=input('Digite a subdivisão de elementos m: m==>');
K=Rigidez(E,I,a,m);
M=Massa(a,rho,S,m);

%Modos e frequências naturais de vibração da viga em balanço
K_inv=inv(K);
D=K_inv*M;
L=1; % [m]
h=0.05; % [m]
b=0.05; % [m]
D=double(subs(D,[E,I,a,rho,S],[2*10^11,(b*h^3)/12,L/m,7800,h*b]));
M_aux=double(subs(M,[a,rho,S],[L/m,7800,h*b]));
K_aux=double(subs(K,[E,I,a],[2*10^11,(b*h^3)/12,L/m]));
[fi_in,omega,m_g,k_g,v_aux]=Modos_de_vibrar(m,D,M_aux,K_aux);
```

```

fi_aux=zeros(2,v_aux);fi_in];
fprintf('\nPrimeiros modos de vibrar\n\n')
disp([num2str(fi_aux,'%0.4f\t\t')])
fprintf('\nPrimeiras frequências naturais de vibração (Hz)\n\n')
disp([num2str(omega/(2*pi),'%0.2f\t\t')])
fprintf('\n')

```

%Plotagem dos primeiros modos de vibrar da viga em balanço

```

figure
x=0:L/m:L;
for k=1:v_aux
    j=0;
    for i=1:2:((m+1)*2-1)
        j=j+1;
        v(j)=fi_aux(i,k);
    end
    if m>2
        subplot(3,2,k)
    else
        subplot(m,2,k)
    end
    plot(x,v,'ko','MarkerFaceColor','k'); hold on
    plot(x,v,'k','linewidth',1)
    ylim([-1,1])
    grid on
    title(['\fontsize{8}',num2str(k),'º modo de vibrar'])
    set(gca,'fontsize',8)
    xlabel('\fontsize{8}x [m]')
    ylabel('\fontsize{8}y [-]')
    hold off
end

```

% Resposta dinâmica da viga em balanço à excitação harmônica (FRFs)

clear v

```

syms OMEGA
for i=1:v_aux
    y(i)=1/(k_g(i)-m_g(i)*OMEGA^2);
end
k=0;
for j=1:2:(m*2-1)
    k=k+1;
    for i=1:v_aux
        if i==1
            v(k)=y(i)*fi_in(j,i);
        else
            v(k)=v(k)+y(i)*fi_in(j,i);
        end
    end
end
end

```

% Plotagem da resposta dinâmica da viga em balanço à excitação harmônica (FRFs)

```

freq=0:0.1:300; % [Hz]
k=0;
for j=1:2:(m*2-1)
    i=0;
    k=k+1;
    for f=0:0.1:300
        i=i+1;
        V(i,k)=double(subs(v(k),OMEGA,2*pi*f));
    end
end
m_aux=m;
j=0;
k=3;
while m_aux>25
    figure
    for i=(1+j*25):(25+j*25)

```

```

subplot(5,5,(i-j*25))
semilogy(freq,abs(V(:,i))/10,'k','linewidth',1)
xlim([min(freq),max(freq)])
grid on
title(['\fontsize{8}FRF GDL ',num2str(k),' - |V_{',num2str(i+1),'}(f)/F|'])
set(gca,'fontsize',8)
xlabel('\fontsize{8}f [Hz]')
ylabel('\fontsize{8}|Y/F| [m/N]')
k=k+2;
end
m_aux=m_aux-25;
j=j+1;
end
figure
aux=1;
while m_aux>aux^2
    aux=aux+1;
end
for i=(1+j*25):m
    subplot(aux,aux,(i-j*25))
    semilogy(freq,abs(V(:,i))/10,'k','linewidth',1)
    xlim([min(freq),max(freq)])
    grid on
    title(['\fontsize{8}FRF GDL ',num2str(k),' - |V_{',num2str(i+1),'}(f)/F|'])
    set(gca,'fontsize',8)
    xlabel('\fontsize{8}f [Hz]')
    ylabel('\fontsize{8}|Y/F| [m/N]')
    k=k+2;
end

%Resposta dinâmica da viga em balanço ao carregamento de impacto
clear y V
Fo=-50; % [N]
t1=0.02; % [s]

```

```

omega_exc=pi/t1;
syms t
y=Impacto(Fo,omega_exc,t1,t,v_aux,omega,k_g);
DELTA=sym(zeros(m*2,2));
for j=1:2
    for i=1:v_aux
        DELTA(:,j)=DELTA(:,j)+y(i,j)*fi_in(:,i);
    end
end

```

%Plotagem da resposta dinâmica da viga em balanço ao carregamento de impacto

```

t2=0.1; % [s]
tempo=0:10^-4:t2; % [s]
k=0;
for j=1:2:(m*2-1)
    i=0;
    k=k+1;
    for t_aux=0:10^-4:t2
        i=i+1;
        if (t_aux<t1)|| (t_aux==t1)
            V(i,k)=double(subs(DELTA(j,1),t,t_aux));
        else
            V(i,k)=double(subs(DELTA(j,2),t,t_aux));
        end
    end
end
end
m_aux=m;
j=0;
k=3;
while m_aux>25
    figure
    for i=(1+j*25):(25+j*25)
        subplot(5,5,(i-j*25))
        plot(tempo,V(:,i),'k','linewidth',1)
    end
    m_aux=m_aux-1;
end

```

```

    xlim([min(tempo),max(tempo)])
    ylim([-max(abs(ylim)),max(abs(ylim))])
    grid on
    title(['\fontsize{8}Resp. dinâmica GDL ',num2str(k),' - V_{',num2str(i+1),'}(t)'])
    set(gca,'fontsize',8)
    xlabel('\fontsize{8}t [s]')
    ylabel('\fontsize{8}y [m]')
    k=k+2;
end
m_aux=m_aux-25;
j=j+1;
end
figure
aux=1;
while m_aux>aux^2
    aux=aux+1;
end
for i=(1+j*25):m
    subplot(aux,aux,(i-j*25))
    plot(tempo,V(:,i),'k','linewidth',1)
    xlim([min(tempo),max(tempo)])
    ylim([-max(abs(ylim)),max(abs(ylim))])
    grid on
    title(['\fontsize{8}Resp. dinâmica GDL ',num2str(k),' - V_{',num2str(i+1),'}(t)'])
    set(gca,'fontsize',8)
    xlabel('\fontsize{8}t [s]')
    ylabel('\fontsize{8}y [m]')
    k=k+2;
end
y_l=max(abs(ylim));

%Animação do modelo
figure
clear V

```

```

for t_aux=0:10^-4:t2
    i=0;
    for j=1:2:(m*2-1)
        i=i+1;
        if (t_aux<t1)||(t_aux==t1)
            V(i)=double(subs(DELTA(j,1),t,t_aux));
        else
            V(i)=double(subs(DELTA(j,2),t,t_aux));
        end
    end
    V_aux=[0,V];
    plot(x,V_aux,'ko','MarkerFaceColor','k'); hold on
    plot(x,V_aux,'k','linewidth',1)
    grid on
    axis([min(x),max(x),-y_l,y_l])
    title('\fontsize{8}Animação do modelo')
    set(gca,'fontsize',8)
    xlabel('\fontsize{8}x [m]')
    ylabel('\fontsize{8}y [m]')
    drawnow
    hold off
end

```

A.2 FUNÇÕES

A.2.1 Matriz de rigidez da viga em balanço

```

function K = Rigidez (E,l,a,m)

```

```

k_e=(E*I)/(a^3)*[12 6*a -12 6*a;
    6*a 4*a^2 -6*a 2*a^2;
    -12 -6*a 12 -6*a;
    6*a 2*a^2 -6*a 4*a^2];
gl=2;

```

```
d=(m+1)*gl;
K=sym(zeros(d,d));
```

```
% Matriz de rigidez da viga em balanço
```

```
for q=0:2:((m-1)*2)
    for j=(1+q):(4+q)
        for i=(1+q):(4+q)
            K(i,j)=K(i,j)+k_e((i-q),(j-q));
        end
    end
end
```

```
% Retirar da matriz de rigidez da viga em balanço os graus de liberdade bloqueados
```

```
K(1,:)=[];
K(:,1)=[];
K(1,:)=[];
K(:,1)=[];

end
```

A.2.2 Matriz de massa da viga em balanço

```
function M = Massa (a,rho,S,m)
```

```
syms x
Hm=[1 x x^2 x^3];
Am=[1 0 0 0;
    0 1 0 0;
    1 a a^2 a^3;
    0 1 2*a 3*a^2];
Am_inv=inv(Am);
Nm=Hm*(Am_inv);
[linhas,colunas]=size(Nm);
for i=1:linhas
```

```

    Nm_t(:,i)=Nm(i,:);
end
rhom=[rho];
m_e=S*(int((Nm_t*rhom*Nm),x,0,a));
gl=2;
d=(m+1)*gl;
M=sym(zeros(d,d));

% Matriz de massa da viga em balanço
for q=0:2:((m-1)*2)
    for j=(1+q):(4+q)
        for i=(1+q):(4+q)
            M(i,j)=M(i,j)+m_e((i-q),(j-q));
        end
    end
end
end

```

```

% Retirar da matriz de massa da viga em balanço os graus de liberdade bloqueados
M(1,:)=[];
M(:,1)=[];
M(1,:)=[];
M(:,1)=[];

end

```

A.2.3 Modos e frequências naturais de vibração da viga em balanço

```

function [fi_in,omega,m_g,k_g,v_aux] = Modos_de_vibrar (m,D,M_aux,K_aux)

ld=eye(m*2);
if m>2
    v_aux=5;
else
    v_aux=m*2;

```

```

end
fi_in=ones(m*2,v_aux);
aux=ones((m*2-1),v_aux);
for j=1:v_aux
    if j==1
        S=Id;
    else
        S=S-((fi_in(:,j-1)*fi_in(:,j-1))*M_aux)/m_g(1,j-1));
    end
    D=D*S;
    soma=sum(aux(:,j));
    while soma~=0
        fi(:,j)=D*fi_in(:,j);
        for i=1:m*2
            lambda(i,j)=fi_in(i,j)/fi(i,j);
            if i>1
                diff(i-1,j)=abs(lambda(i-1,j)-lambda(i,j));
                if diff(i-1,j)<0.001
                    aux(i-1,j)=0;
                else
                    aux(i-1,j)=1;
                end
            end
        end
        soma=sum(aux(:,j));
        if soma~=0
            fi_in(:,j)=fi(:,j)/fi((m*2-1),j);
        end
    end
    omega(j)=sqrt(lambda(1,j));
    m_g(j)=fi_in(:,j)*M_aux*fi_in(:,j);
    k_g(j)=fi_in(:,j)*K_aux*fi_in(:,j);
end

```

end

A.2.4 Fatores de participação da resposta dinâmica da viga em balanço ao carregamento de impacto

```
function y = Impacto (Fo,omega_exc,t1,t,v_aux,omega,k_g)
```

```
t_aux=t-t1;
```

```
for j=1:2
```

```
    if j==1
```

```
        %Durante a ação da carga de impacto
```

```
        for i=1:v_aux
```

```
            r=omega_exc/omega(i);
```

```
            y(i,j)=(Fo/k_g(i))*(1/(1-r^2))*(sin(omega_exc*t)-r*sin(omega(i)*t));
```

```
            A1(i)=double(subs(y(i,j),t1));
```

```
            A2(i)=double(subs(diff(y(i,j)),t1))/omega(i);
```

```
        end
```

```
    else
```

```
        %Após a ação da carga de impacto
```

```
        for i=1:v_aux
```

```
            y(i,j)=A1(i)*cos(omega(i)*t_aux)+A2(i)*sin(omega(i)*t_aux);
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end
```

```
end
```