

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
INSTITUTO DE FÍSICA

ERASMO CARLOS BESSA JUNIOR

Novo método para medição da largura de feixes gaussianos
utilizando imagens de laser speckle

Uberlândia

2025

ERASMO CARLOS BESSA JUNIOR

**Novo método para medição da largura de feixes gaussianos utilizando
imagens de laser speckle**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal de Uberlândia como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Física de Materiais.

Orientador Prof. Dr. Gustavo Foresto Brito Almeida

Uberlândia
2025

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

B557
2025

Bessa Júnior, Erasmo Carlos, 2002-
Novo método para medição da largura de feixes gaussianos utilizando imagens de laser speckle [recurso eletrônico] / Erasmo Carlos Bessa Júnior. - 2025.

Orientador: Gustavo Foresto Brito Almeida.
Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Uberlândia, Graduação em Física de Materiais.

Modo de acesso: Internet.
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Física. I. Almeida, Gustavo Foresto Brito, 1988-,
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia.
Graduação em Física de Materiais. III. Título.

CDU: 53

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

ERASMO CARLOS BESSA JUNIOR

**Novo método para medição da largura de feixes gaussianos utilizando
imagens de laser speckle**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade
Federal de Uberlândia como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em
Física de Materiais.

Uberlândia, 05 de Maio, 2025.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gustavo Foresto Brito Almeida
Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Djalmir Nestor Messias
Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. José Maria Villas Bôas
Universidade Federal de Uberlândia

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por me permitir viver esse momento.

À minha família, pelo apoio incondicional, pelo incentivo, pela paciência e por sempre terem acreditado em mim desde o princípio.

À Ana Beatriz Emiliana da Silva, minha querida companheira, por também me apoiar e me incentivar nessa jornada, e por tornar esta caminhada mais leve.

Ao meu orientador e amigo, Prof. Dr. Gustavo Foresto Brito da Silva, pela valiosa orientação, dedicação e pelos ensinamentos que enriqueceram não apenas este trabalho, mas minha formação como pesquisador.

Por fim, a todos os meus amigos que me ajudaram nessa jornada, seja na compreensão de temas específicos relacionados à minha formação, como programação computacional, seja nas conversas descontraídas durante uma pausa para o café.

A todos que, direta ou indiretamente, compartilharam desta caminhada, minha eterna gratidão.

"Algebra is like a sheet of music. The important thing isn't can you read music, it's can you hear it. Can you hear the music, Robert?"

— Niels Bohr para J. Robert Oppenheimer, *Oppenheimer*, dirigido por Christopher Nolan, 2023.

Resumo

Este trabalho apresenta um novo método para medir a largura de feixes de laser gaussianos utilizando a análise de imagens de laser speckle. A técnica aproveita a relação inversa entre o tamanho dos grãos de speckle e a largura do feixe, permitindo medições precisas por meio de processamento de imagens e análise estatística. Os resultados foram validados comparando as medições baseadas em speckle com métodos tradicionais, como o imageamento direto do feixe utilizando uma câmera e um perfilômetro comercial com varredura de fenda, mostrando excelente concordância. Diferentemente dos métodos convencionais, que enfrentam limitações relacionadas à resolução dos pixels do sensor, essa abordagem conseguiu medir cinturas de feixes tão pequenas quanto $(1.87 \pm 0.02) \mu m$, menores do que o tamanho de um único pixel da câmera. Além disso, o sistema fixo e sem partes móveis proporciona maior estabilidade e reprodutibilidade. Este trabalho destaca as vantagens do método baseado em speckle para diagnósticos ópticos, apresentando-o como uma alternativa capaz de superar limitações das técnicas tradicionais.

Palavras-chave: feixe gaussiano, cintura do feixe, laser speckle, metrologia óptica.

Abstract

This work introduces a novel method for measuring the beam waist of Gaussian laser beams using laser speckle analysis. By leveraging the inverse relationship between speckle grain size and beam size, the proposed approach achieves precise measurements through image processing and statistical analysis of speckle patterns. The methodology was validated by comparing results from speckle-based measurements with those obtained using direct imaging and a commercial slit-scanning beam profiler, demonstrating excellent agreement. Unlike conventional beam profiling methods, which are constrained by pixel resolution limitations, this technique resolved tightly focused beam waists as small as $(1.87 \pm 0.02) \mu m$, smaller than the camera sensor pixel size. Furthermore, the static setup, free of moving parts, enhances stability and ensures reproducibility. This method highlights the advantages of the speckle-based approach for laser diagnostics and its potential to overcome the limitations of conventional profiling techniques.

Keywords: Gaussian beam, beam waist, laser speckle, optical metrology.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – A intensidade normalizada do feixe I/I_0 em pontos no eixo do feixe em função da distância ao longo do eixo de propagação z' . Fonte: Adaptado de (SALEH; TEICH, 2019).	13
Figura 2 – A largura do feixe gaussiano $w(z')$ como uma função da distância z' ao longo do feixe, que forma uma hipérbole. Onde w_0 é a cintura do feixe, b é a profundidade de foco, z_R é o alcance de Rayleigh, e Θ é o espalhamento angular total. Fonte: Adaptado de (DRBOB, [s.d.]). . . .	14
Figura 3 – Geometria de propagação no espaço livre na formação de speckle. Fonte: Adaptado de (GOODMAN, 2005).	15
Figura 4 – Esquema dos arranjos experimentais para (a) verificar a validade da teoria do método e (b) medir a cintura do feixe de um laser fortemente focado.	22
Figura 5 – Estágio de translação com câmera e difusor acoplados e controlado via Arduino, onde (1) é o suporte, (2) é o motor de passo, (3) é o micrômetro, (4) é a placa Arduino, (5) é o difusor, e (6) é a câmera. . .	22
Figura 6 – (a) Imagem de speckle, (b) sua autocorrelação ajustada por uma curva gaussiana, e (c) o tamanho médio dos grãos de speckle (Δs) em função da distância (D) entre o difusor e o sensor da câmera. O símbolo ($\bigcirc$) indica o dado selecionado para mostrar a imagem de speckle e a autocorrelação.	24
Figura 7 – (a) Cintura do feixe (w_0) em função da distância de propagação (z') para um laser focalizado por uma lente com distância focal de $f = 5\text{ cm}$. Os pontos pretos representam os dados experimentais, e a linha tracejada preta é o melhor ajuste teórico para o método baseado em speckle. Os pontos vermelhos representam os dados experimentais, e a linha sólida vermelha é o melhor ajuste teórico para o método baseado em câmera. O símbolo ($\square$) indica a posição de (b) imagem de speckle e (c) curva de autocorrelação com seu melhor ajuste gaussiano. O símbolo (∇) indica a posição de (d) imagem de speckle e (e) curva de autocorrelação com seu melhor ajuste gaussiano.	25
Figura 8 – (a) Cintura do feixe (w_0) em função da distância de propagação (z') para um laser focalizado por uma lente objetiva de microscópio de 40x ($\text{NA}=0.65$) e seu melhor ajuste teórico. O símbolo ($\square$) indica a posição de (b) imagem de speckle e (c) curva de autocorrelação com seu melhor ajuste gaussiano. O símbolo (∇) indica a posição da (d) imagem de speckle e (e) curva de autocorrelação com seu melhor ajuste gaussiano.	26

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Medidas da largura de um feixe colimado utilizando métodos baseados em câmara, varredura por fenda, e speckle.	25
---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	TEORIA	13
2.1	FEIXES GAUSSIANOS	13
2.2	LASER SPECKLE E FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO .	14
3	PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS	21
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	24
5	CONCLUSÕES	28
	REFERÊNCIAS	29
	APÊNDICE A – Cálculo da autocorrelação de padrões de speckle produzidos por feixes gaussianos . .	33

1 INTRODUÇÃO

Os feixes de laser revolucionaram diversos campos científicos, industriais e médicos ao fornecer fontes de luz altamente coerentes e intensas. Sua capacidade de gerar feixes de luz com propriedades controladas, como direcionalidade, monocromaticidade e alta densidade de energia, permitiu avanços significativos em áreas como telecomunicações, processamento de materiais, imageamento biomédico e experimentos científicos de alta precisão. Dentre os diversos tipos de feixes de laser, os feixes gaussianos destacam-se por sua distribuição de intensidade simétrica e por sua descrição matemática bem definida (SALEH; TEICH, 2019). Essas características tornam os feixes gaussianos ideais para aplicações que exigem precisão e previsibilidade, como o corte e a soldagem de materiais, a manipulação de partículas em armadilhas ópticas e a obtenção de imagens de alta resolução em microscopia.

Em muitas dessas aplicações, a capacidade de caracterizar o feixe de laser com precisão é crucial, uma vez que as propriedades espaciais do feixe determinam sua eficácia em alcançar os resultados desejados. Um dos parâmetros mais fundamentais na caracterização do feixe é a cintura do feixe (do inglês *beam waist*), que representa a menor largura que o feixe gaussiano pode assumir ao longo de sua propagação. A cintura do feixe desempenha um papel central na determinação da focalização, distribuição de intensidade e densidade de energia do laser. O conhecimento preciso da cintura do feixe é, portanto, essencial para otimizar sistemas laser em aplicações que demandam alta resolução espacial, como microusinagem a laser (DUNSKY, 2001; NG *et al.*, 2024), armadilhas ópticas (NEUMAN; BLOCK, 2004; YANG; REN *et al.*, 2021) e técnicas avançadas de imageamento (CHEN, Y. *et al.*, 2012). À medida que a tecnologia laser avança, a demanda por técnicas de perfilometria de feixe mais precisas e eficientes tem crescido, destacando a importância dessa área de pesquisa.

Os métodos tradicionais para medição da cintura do feixe, como a técnica da borda de faca (do inglês *knife-edge*) (TAN *et al.*, 2023; ALAMO *et al.*, 2021; MYLONAKIS *et al.*, 2018; PAN, 2018), varredura por fenda (do inglês *slit scanning*) (CHAPPLE, 1994; YANG; LIU, 2017; AMS *et al.*, 2005) e imageamento direto com câmeras (MONTERO; ALVAREZ; N., 2024; BISTI *et al.*, 2021), têm sido a base para a perfilometria de feixes de laser por décadas. Esses métodos dependem da oclusão física ou do imageamento do feixe, seguido de análise computacional para extrair os parâmetros do feixe. Embora eficazes em muitos cenários, essas técnicas enfrentam limitações ao lidar com feixes de laser altamente focalizados. Por exemplo, o perfilômetro baseado em câmeras é limitado pela resolução do arranjo de detectores, o que impõe um limite no diâmetro mínimo mensurável do feixe, geralmente de cerca de uma dezena de pixels. Além disso, a danificação do sensor da câmera pode ocorrer em feixes de alta intensidade, dificultando a medição precisa. Da mesma forma, métodos mecânicos como a técnica da borda de faca e a varredura por fenda

são suscetíveis a problemas de alinhamento, instabilidade mecânica e baixa velocidade de aquisição (ALAMO *et al.*, 2021; PAN, 2018; CHAPPLE, 1994; YANG; LIU, 2017; AMS *et al.*, 2005), o que pode dificultar sua aplicação em ambientes dinâmicos ou de alta precisão. Esses desafios destacam a necessidade de abordagens inovadoras que superem as limitações das técnicas tradicionais.

O laser speckle, um fenômeno que surge quando a luz coerente interage com uma superfície rugosa ou meio espalhador, oferece uma alternativa promissora para a medição precisa da cintura do feixe. Os padrões de speckle, caracterizados por flutuações aleatórias de intensidade, carregam naturalmente informações sobre as propriedades de coerência e a distribuição espacial de intensidade do feixe incidente (GOODMAN, 1975). Quando um feixe de laser gaussiano passa por um difusor, o padrão de speckle resultante está diretamente relacionado às características espaciais do feixe, incluindo suas dimensões no ponto de interação (HU *et al.*, 2020). Apesar desse potencial, a aplicação da análise de laser speckle para a medição da cintura do feixe permanece inexplorada. Até onde temos conhecimento, não há registros na literatura de estudos que utilizem a análise de speckle com esse propósito específico. A maior parte dos trabalhos existentes concentra-se na caracterização de superfícies (RODRÍGUEZ *et al.*, 2017; JAMALI *et al.*, 2023; SOUZA *et al.*, 2021; SHAO *et al.*, 2023), sensoriamento de deslocamento (ROSE *et al.*, 1998; ALMORO *et al.*, 2009; H. BAGHERI M.A.D. GOODISMAN, 2024) ou imageamento através de meios espalhadores (SHAO *et al.*, 2023; LI; XUE; TIAN, 2018; CHEN, H. *et al.*, 2018; LIU *et al.*, 2022; HORISAKI; TAKAGI; TANIDA, 2016), com pouca ou nenhuma atenção voltada à sua aplicação na perfilometria de feixes laser.

Para preencher essa lacuna, o objetivo deste estudo é apresentar uma metodologia inovadora baseada em speckle para medir a largura de feixes gaussianos. A técnica explora a relação inversa entre o tamanho do grão de speckle e a largura do feixe para alcançar resolução subpixel por meio de processamento e análise de imagens de speckle. Essa abordagem permite medições precisas mesmo em feixes altamente focalizados, onde métodos tradicionais falham. Vale destacar que a técnica proposta é estática, não requerendo partes móveis, o que aumenta a estabilidade e simplifica a implementação. Além disso, a ausência de componentes mecânicos em movimento reduz o risco de erros de medição causados por vibrações ou desalinhamentos, tornando o método adequado para aplicações em ambientes dinâmicos ou de alta precisão.

2 TEORIA

2.1 FEIXES GAUSSIANOS

Os feixes gaussianos são soluções particulares da equação de onda paraxial e descrevem a propagação de feixes de luz coerentes, como os gerados por lasers. Eles são amplamente utilizados em óptica devido à sua simetria radial e à facilidade com que podem ser manipulados matematicamente. A distribuição de intensidade de um feixe gaussiano é dada por uma função gaussiana, que decai suavemente em direção às bordas, sem descontinuidades abruptas, conforme ilustrado na Fig. 1. Essa característica os torna ideais para aplicações que exigem controle preciso da distribuição de energia, como em comunicações ópticas, microprocessamento a laser e armadilhas ópticas (SALEH; TEICH, 2019).

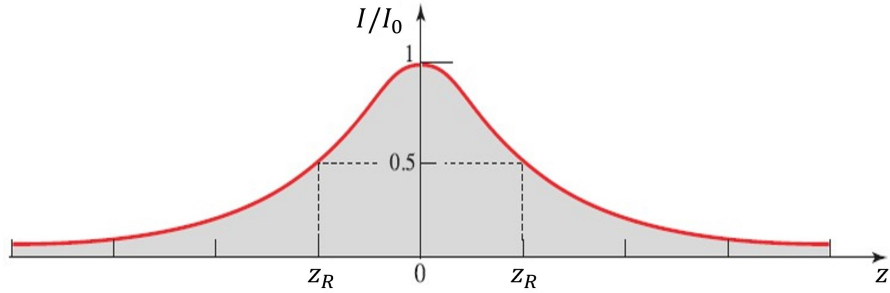


Figura 1 – A intensidade normalizada do feixe I/I_0 em pontos no eixo do feixe em função da distância ao longo do eixo de propagação z' . Fonte: Adaptado de (SALEH; TEICH, 2019).

A intensidade transversal de um feixe gaussiano é descrita pela equação:

$$I(r, z') = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z')} \right)^2 \exp \left(-\frac{2r^2}{w^2(z')} \right), \quad (1)$$

onde $I(r, z')$ é a intensidade do feixe em um ponto (r, z') , I_0 representa a intensidade máxima no centro do feixe, w_0 é a cintura do feixe, que corresponde à menor largura do feixe e está localizada no plano focal, $w(z')$ descreve a largura do feixe em uma posição z' ao longo da direção de propagação, e a variável r indica a distância radial do eixo central do feixe.

A largura do feixe $w(z')$ varia ao longo da direção de propagação z' de acordo com a equação:

$$w(z') = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z'}{z_R} \right)^2}, \quad (2)$$

onde z_R é o comprimento de Rayleigh, definido como:

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (3)$$

que define a região em que o feixe permanece aproximadamente colimado. Para distâncias $z' \ll z_R$, o feixe é quase colimado, enquanto para $z' \gg z_R$, o feixe diverge linearmente com um ângulo de divergência:

$$\theta \approx \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (4)$$

É possível observar através da Fig. 2 a variação da largura do feixe $w(z')$ ao longo da direção de propagação z' .

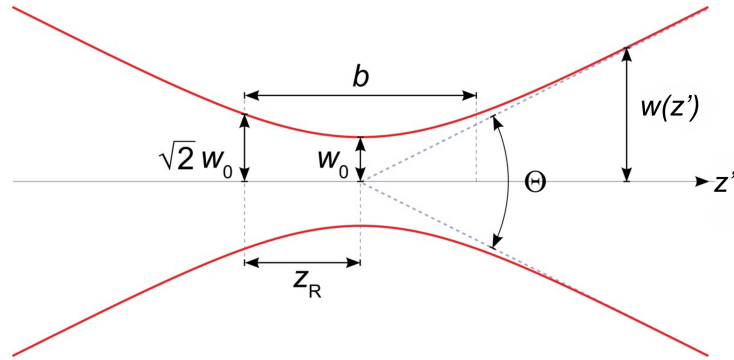


Figura 2 – A largura do feixe gaussiano $w(z')$ como uma função da distância z' ao longo do feixe, que forma uma hipérbole. Onde w_0 é a cintura do feixe, b é a profundidade de foco, z_R é o alcance de Rayleigh, e Θ é o espalhamento angular total. Fonte: Adaptado de (DRBOB, [s.d.]).

Os feixes gaussianos são amplamente utilizados em sistemas ópticos devido à sua capacidade de manter uma alta qualidade de feixe (baixa divergência) e à facilidade com que podem ser focalizados até um tamanho micrométrico ou menor.

2.2 LASER SPECKLE E FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO

O fenômeno de laser speckle ocorre quando luz coerente, como a de um laser, é refletida por uma superfície rugosa ou atravessa um meio difusor. A interferência entre as múltiplas ondas espalhadas gera um padrão aleatório de pontos brilhantes e escuros, conhecido como padrão de speckle. Esse padrão é altamente sensível às características da superfície e às propriedades do feixe de luz incidente, o que o torna uma ferramenta valiosa em diversas aplicações, como medições de superfície, diagnóstico de feixes de laser e imageamento através de meios turvos.

Neste trabalho, focaremos nas propriedades estatísticas de segunda ordem do speckle, que descrevem a distribuição espacial dos grãos de speckle, que são os domínios brilhantes na imagem, e fornecem informações sobre a estrutura do feixe de luz e da superfície de espalhamento. Uma das principais ferramentas para estudar essas propriedades é a função de autocorrelação, que mede a correlação de um padrão com relação a ele mesmo após ser deslocado. A curva de autocorrelação, então, fornece a informação do

quanto o padrão de interesse está representado nos padrões comparados em função do deslocamento.

As propriedades estatísticas de segunda ordem são essenciais para entender a distribuição espacial dos grãos de speckle. Essas propriedades são responsáveis por fornecer informações sobre a correlação espacial entre diferentes pontos do padrão de speckle, o que está diretamente relacionado ao tamanho médio dos grãos de speckle. Uma maneira de obter esse tipo de informação através de imagens de speckle é calcular a função de autocorrelação das mesmas.

Para fazer esse estudo, partiremos dos fundamentos da óptica física, em particular do princípio de Huygens-Fresnel, e avançaremos até a conexão com o cálculo da autocorrelação das imagens de speckle.

O princípio de Huygens-Fresnel estabelece que cada ponto de uma frente de onda pode ser considerado como uma fonte secundária de ondas esféricas, e o campo resultante em qualquer ponto é a superposição dessas ondas secundárias (GOODMAN, 2005). Em outras palavras, o princípio de Huygens-Fresnel descreve como o campo em um ponto P_0 é gerado pela superposição de ondas esféricas originadas em cada ponto P_1 da superfície de espalhamento, como exemplificado na Fig. 3.

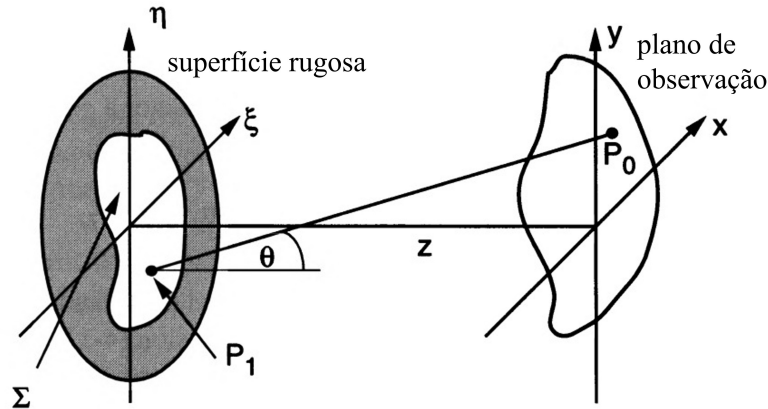


Figura 3 – Geometria de propagação no espaço livre na formação de speckle. Fonte: Adaptado de (GOODMAN, 2005).

Matematicamente, o princípio de Huygens-Fresnel pode ser expresso como:

$$A(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \alpha(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos \theta \, ds, \quad (5)$$

onde $A(P_0)$ é o campo no ponto de observação P_0 , $\alpha(P_1)$ é o campo no ponto de espalhamento P_1 , r_{01} é a distância entre os pontos P_1 e P_0 , θ é o ângulo entre a normal à superfície e o vetor $\vec{r}_{01}$, λ representa o comprimento de onda da luz, e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o número de onda.

Analisando a Fig. 3, através da trigonometria, definimos que:

$$\cos \theta = \frac{z}{r_{01}}, \quad (6)$$

e então substituindo na Eq. 5, temos que:

$$A(P_0) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \alpha(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}^2} ds, \quad (7)$$

Para simplificar o cálculo do campo difratado, é comum utilizar a aproximação de Fresnel, que é válida quando a distância z entre a superfície de espalhamento e o plano de observação é grande em comparação com o tamanho da região de espalhamento. Nessa aproximação, fazemos duas simplificações.

Primeiramente, aproximamos o termo r_{01}^2 no denominador, como z^2 é grande, podemos considerar $r_{01}^2 \approx z^2$ no denominador da equação de Huygens-Fresnel, uma vez que r_{01} varia pouco em comparação com z .

Em segundo lugar, no termo exponencial, a variação de r_{01} é crítica, pois pequenas mudanças em r_{01} podem causar grandes variações de fase. Para lidar com isso, expandimos r_{01} em uma série de Taylor:

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{z^2}}. \quad (8)$$

utilizando a expansão binomial $\sqrt{1+b} \approx 1 + \frac{b}{2} - \frac{b^2}{8} + \dots$ e mantendo apenas os dois primeiros termos (válido para $b \ll 1$), obtemos:

$$r_{01} \approx z \left(1 + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z^2} \right). \quad (9)$$

substituindo essa aproximação no termo exponencial, temos:

$$\exp(ikr_{01}) \approx \exp \left(ikz + i \frac{k}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right). \quad (10)$$

Substituindo tais aproximações na equação de Huygens-Fresnel, obtemos a expressão final para o campo difratado:

$$A(x, y) = \frac{1}{i\lambda z} \iint_{\Sigma} \alpha(\xi, \eta) \exp \left(ikz + i \frac{k}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right) d\xi d\eta. \quad (11)$$

expandindo o termo quadrático no exponencial, temos:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = x^2 - 2x\xi + \xi^2 + y^2 - 2y\eta + \eta^2. \quad (12)$$

substituindo de volta na equação, obtemos:

$$A(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp \left(i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right) \iint_{\Sigma} \alpha(\xi, \eta) \exp \left(i \frac{k}{2z} (\xi^2 + \eta^2) \right) \exp \left(-i \frac{k}{z} (x\xi + y\eta) \right) d\xi d\eta. \quad (13)$$

Onde ainda podemos substituir $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ e também omitir o fator $\frac{e^{ikz}}{i}$ por ele representar uma fase global que não afeta a intensidade do campo, sendo que tal fator é irrelevante no nosso contexto de cálculo de intensidade e autocorrelação. Portanto, temos que:

$$A(x, y) = \frac{1}{\lambda z} \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right) \iint_{\Sigma} \alpha(\xi, \eta) \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z} (\xi^2 + \eta^2)\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda z} (x\xi + y\eta)\right) d\xi d\eta. \quad (14)$$

essa equação é chamada de integral de difração de Fresnel, que modula a amplitude e a fase da onda esférica (GOODMAN, 2005).

Para desenvolver a função de autocorrelação, é necessário utilizar a intensidade mútua J_A , que descreve a correlação entre os campos complexos em dois pontos distintos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e mede o grau de coerência espacial da luz, sendo que quando J_A é grande, os campos estão fortemente correlacionados, indicando que a luz é espacialmente coerente, e quando J_A é pequena, os campos são pouco correlacionados, indicando luz espacialmente incoerente (WOLF, 1954; ZERNIKE, 1938). Essa propriedade faz da intensidade mútua uma ferramenta essencial para descrever a correlação de intensidades em sistemas ópticos. Dessa forma, temos que para um campo complexo $A(x, y)$ que segue uma distribuição gaussiana circular (GOODMAN, 1975), a função de autocorrelação da intensidade $I(x, y) = |A(x, y)|^2$ pode ser expressa em termos da intensidade mútua J_A :

$$R_I(x_1, y_1; x_2, y_2) = \langle I(x_1, y_1) \rangle \langle I(x_2, y_2) \rangle + |J_A(x_1, y_1; x_2, y_2)|^2, \quad (15)$$

onde J_A é dada por:

$$J_A(x_1, y_1; x_2, y_2) = \langle A(x_1, y_1) A^*(x_2, y_2) \rangle. \quad (16)$$

onde a intensidade mútua J_A captura a correlação entre os campos complexos nos dois pontos, enquanto o termo $\langle I(x_1, y_1) \rangle \langle I(x_2, y_2) \rangle$ representa a correlação que existiria se a luz fosse completamente incoerente. Como a intensidade média $\langle I \rangle$ é constante em todo o plano de observação, temos:

$$\langle I(x_1, y_1) \rangle = \langle I(x_2, y_2) \rangle = \langle I \rangle. \quad (17)$$

substituindo na expressão de R_I , obtemos:

$$R_I(x_1, y_1; x_2, y_2) = \langle I \rangle^2 + |J_A(x_1, y_1; x_2, y_2)|^2. \quad (18)$$

rearranjando os termos, chegamos a:

$$R_I(x_1, y_1; x_2, y_2) = \langle I \rangle^2 \left[1 + \left| \frac{J_A(x_1, y_1; x_2, y_2)}{\langle I \rangle} \right|^2 \right]. \quad (19)$$

então substituindo a Eq. 14 na Eq. 16, temos que a intensidade mútua é dada por:

$$J_A(x_1, y_1; x_2, y_2) = \frac{1}{\lambda^2 z^2} \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda z} (x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J_\alpha(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda z} (\xi_1^2 - \xi_2^2 + \eta_1^2 - \eta_2^2) \right] \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda z} (x_1 \xi_1 + y_1 \eta_1 - x_2 \xi_2 - y_2 \eta_2) \right] d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2. \quad (20)$$

Para simplificar o cálculo, assume-se que a superfície rugosa é muito rugosa (em comparação com o comprimento de onda), de modo que a intensidade mútua na superfície pode ser aproximada por:

$$J_\alpha(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) \approx \kappa \alpha(\xi_1, \eta_1) \alpha^*(\xi_2, \eta_2) \delta(\xi_1 - \xi_2, \eta_1 - \eta_2), \quad (21)$$

onde κ é uma constante de proporcionalidade que depende das propriedades da superfície rugosa e do sistema óptico utilizado, $\alpha(\xi, \eta)$ é a amplitude do campo incidente na superfície rugosa, e δ é a função delta de Dirac. Substituindo essa aproximação na expressão para J_A , obtém-se:

$$J_A(x_1, y_1; x_2, y_2) = \frac{\kappa}{\lambda^2 z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha(\xi, \eta)|^2 \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda z} [\xi(x_1 - x_2) + \eta(y_1 - y_2)] \right\} d\xi d\eta. \quad (22)$$

Finalmente, a função de autocorrelação da intensidade R_I é dada por:

$$R_I(\Delta x, \Delta y) = \langle I \rangle^2 \left[1 + \left| \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} |\alpha(\xi, \eta)|^2 \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda z} (\xi \Delta x + \eta \Delta y) \right] d\xi d\eta}{\iint_{-\infty}^{\infty} |\alpha(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta} \right|^2 \right], \quad (23)$$

onde $\Delta x = x_1 - x_2$ e $\Delta y = y_1 - y_2$ são as distâncias entre os pontos no plano de observação, $\langle I \rangle$ é a intensidade média do speckle, $\alpha(\xi, \eta)$ foi definido anteriormente, λ é o comprimento de onda da luz, e z é a distância entre a superfície rugosa e o plano de observação (GOODMAN, 1975).

Essa expressão revela como a função de autocorrelação está relacionada à frequência espacial da distribuição de intensidade incidente. Enquanto o denominador normaliza a autocorrelação, tornando-a uma medida adimensional da força da correlação, o numerador representa a transformada de Fourier de $|\alpha(\xi, \eta)|^2$, mostrando como os componentes de frequência espacial influenciam o tamanho do grão de speckle.

E sabe-se que para um feixe gaussiano, a distribuição de intensidade na superfície de espalhamento é dada por:

$$|\alpha(r, z')|^2 = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z')} \right)^2 \exp \left[\frac{-2r^2}{w^2(z')} \right], \quad (24)$$

onde $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Agora definindo $I(z') = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z')} \right)^2$, temos que:

$$|\alpha(r, z')|^2 = I(z') \exp \left[\frac{-2r^2}{w^2} \right], \quad (25)$$

e então substituindo na Eq. 23, vamos primeiramente resolver a integral no denominador, de forma que:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} I(z') \exp \left[\frac{-2(\xi^2 + \eta^2)}{w^2} \right] d\xi d\eta = \frac{I(z')}{2} \pi w^2. \quad (26)$$

agora resolvendo o numerador, temos que:

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} I(z') \exp \left[\frac{-2(\xi^2 + \eta^2)}{w^2} \right] \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda z} (\xi \Delta x + \eta \Delta y) \right] d\xi d\eta \\ = \frac{I(z')}{2} \pi w^2 \exp \left[\frac{-\pi^2 w^2}{2\lambda^2 z^2} (\Delta x^2 + \Delta y^2) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

As demonstrações dos cálculos das Equações (26) e (27) são apresentadas no Apêndice A.

Agora substituindo esses resultados na Eq. 23, chegamos a:

$$R_I(\Delta x, \Delta y) = \langle I \rangle^2 \left\{ 1 + \exp \left[\frac{-\pi^2 w^2}{\lambda^2 z^2} \Delta s^2 \right] \right\}, \quad (28)$$

onde $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ é o raio médio do padrão de speckle do laser. De forma semelhante à definição da largura de um feixe gaussiano, o raio médio é determinado onde o exponencial na autocorrelação é reduzido por um fator de $1/e^2$, onde temos que:

$$\left(\frac{\pi w}{\lambda z} \right)^2 \Delta s^2 = 2 \quad (29)$$

rearranjando os termos temos a relação entre a largura do feixe a uma dada distância z e o tamanho médio do grão de speckle:

$$w = \sqrt{2} \frac{\lambda z}{\pi \Delta s} \quad (30)$$

Ao lidar com imagens experimentais dos padrões de speckle, as curvas de autocorrelação (R_I) foram calculadas por meio de:

$$R_I(\Delta) = \frac{\sum_{x,y} (I_0(x,y) - \overline{I_0}) (I_\Delta(x,y) - \overline{I_\Delta})}{\sqrt{\sum_{x,y} (I_0(x,y) - \overline{I_0})^2 \sum_{x,y} (I_\Delta(x,y) - \overline{I_\Delta})^2}} \quad (31)$$

onde $I_0(x,y)$ e $\overline{I_0}$ são, respectivamente, o valor de intensidade do pixel na coordenada (x,y) e a intensidade média da imagem original. $I_\Delta(x,y)$ e $\overline{I_\Delta}$ representam as mesmas

quantidades para uma imagem deslocada por um deslocamento de pixel Δ (HU *et al.*, 2020). O raio médio do grão de speckle é então obtido ajustando esses dados usando uma distribuição gaussiana. As imagens foram cortadas para excluir grandes áreas não iluminadas quando o speckle não preenchia completamente o sensor da câmera. O contraste do speckle, que é obtido a partir da estatística de primeira ordem dos padrões speckle (GOODMAN, 1975), definido como $c = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}$, onde σ_I e $\langle I \rangle$ são o desvio padrão e a intensidade média, respectivamente, foi usado para determinar o tamanho final da imagem cortada. O tamanho da imagem foi variado até que seu contraste estivesse na faixa de 0.8 a 1.4. Essa faixa de contrastes é baseada no valor teórico de um para um padrão de speckle completamente desenvolvido. No entanto, deve-se considerar que os contrastes reais podem variar devido às condições experimentais (SONG; ELSON, 2013). O limite superior da nossa faixa de contraste, que excede o valor de um, pode ser justificado pelo fato de que a janela de corte usada para cortar as imagens de speckle deve conter pelo menos um grão de speckle completo. Portanto, é razoável aumentar o limite superior da nossa faixa de contraste para evitar reduzir excessivamente o tamanho da imagem.

3 PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

A montagem experimental utilizada para testar a validade da Eq. 30, que resume toda a teoria do método de medição da cintura do feixe proposto neste trabalho, consiste em um laser He-Ne operando em 632,8 nm como fonte de luz coerente, um polarizador para controlar sua potência, um telescópio combinando lentes com distâncias focais de 30 cm e 5 cm para reduzir a largura do feixe, um difusor para produzir o padrão de laser speckle, uma câmera para registrar os padrões de speckle e um estágio de translação motorizado para variar de forma controlada a distância (D) entre o difusor e o sensor da câmera. A câmera utilizada na montagem experimental foi o modelo Basler® acA1300-200um, que possui um sensor CMOS de 8 bits com pixels de dimensões horizontais e verticais de $4,8 \mu\text{m}$, permitindo níveis de intensidade de 0 a 255. Um esquema da montagem experimental é apresentado na Fig. 4(a). Para garantir que as imagens capturadas não sofressem saturação, o tempo de exposição da câmera foi ajustado automaticamente frame a frame, mantendo a intensidade máxima registrada em 200, o que assegurou a linearidade da resposta do sensor e a qualidade dos dados obtidos.

Foram realizadas duas montagens experimentais distintas para medir a cintura do feixe de laser em diferentes condições de focalização. Na primeira montagem, o telescópio foi utilizado para reduzir o diâmetro do feixe de laser antes que ele incidisse sobre o difusor. Nessa configuração, a câmera permaneceu fixa, enquanto o difusor foi movido pelo estágio de translação, variando a distância (D) entre o difusor e o sensor da câmera. Essa montagem permitiu estudar a evolução do padrão de speckle em função da distância, mantendo o feixe incidente no difusor com uma largura constante. Já na segunda montagem, o telescópio foi removido e substituído por uma lente objetiva de microscópio para focalizar fortemente o feixe de laser. Nesse arranjo, tanto a câmera quanto o difusor foram montados no mesmo estágio de translação, de modo que a distância (D) entre eles permaneceu fixa. No entanto, o difusor foi exposto a diferentes larguras de feixe na região do foco, permitindo a medição da cintura do feixe em condições de focalização extrema. Essa configuração foi particularmente útil para estudar a relação entre a largura do feixe incidente no difusor e as características do padrão de speckle gerado. Um esquema dessa segunda montagem é apresentado na Fig. 4(b).

A escolha das duas montagens experimentais foi estratégica, visando cobrir diferentes cenários de medição da cintura do feixe. A primeira, com o telescópio e o difusor fixo, foi ideal para estudar a propagação do feixe em condições de colimação, enquanto a segunda, sem o telescópio e com a câmera e o difusor móveis, permitiu investigar o comportamento do feixe em regiões de forte focalização.

O estágio de translação utilizado na configuração experimental foi desenvolvido por nós, com o auxílio técnico de Guilherme de L. Fernandes, utilizando partes produzidas em uma impressora 3D, eixos e rolamentos lineares, um motor de passo, e um micrômetro,

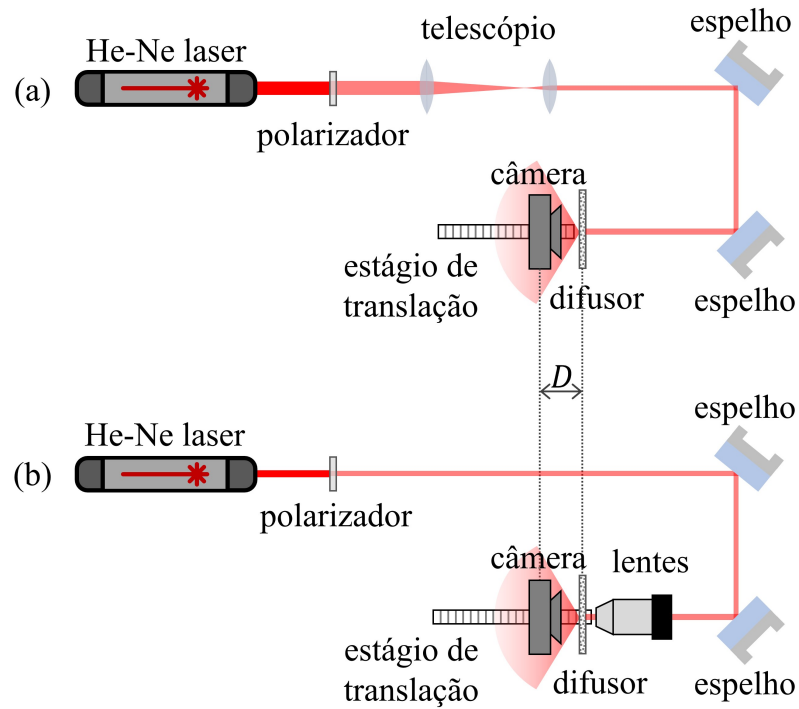


Figura 4 – Esquema dos arranjos experimentais para (a) verificar a validade da teoria do método e (b) medir a cintura do feixe de um laser fortemente focado.

conforme a Fig. 5. O sistema é controlado via Arduino, com comunicação integrada aos programas de Python, também desenvolvidos por nós para automatizar as medições. Essa solução personalizada permitiu uma flexibilidade maior no controle do movimento e na sincronização com a aquisição de imagens pela câmera. A integração do Arduino com os códigos em Python foi fundamental para a automação eficiente do processo de aquisição e análise dos dados, garantindo precisão e repetibilidade nas medições.

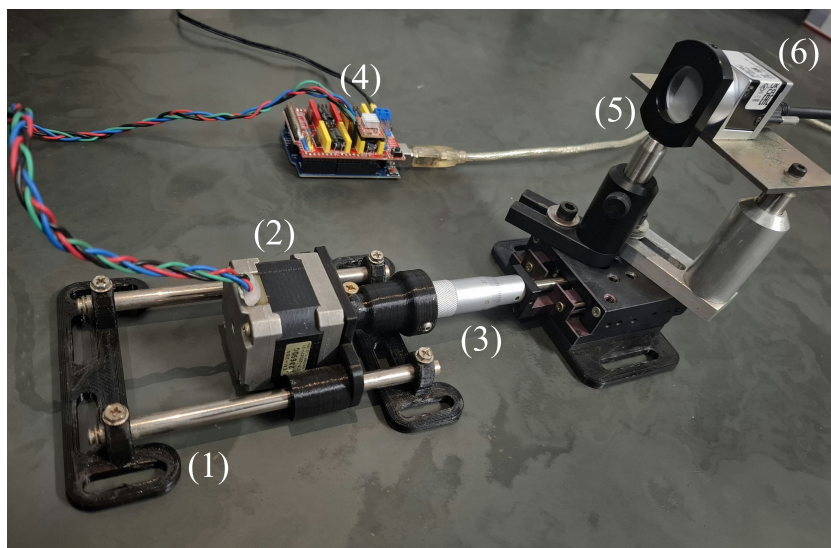


Figura 5 – Estágio de translação com câmera e difusor acoplados e controlado via Arduino, onde (1) é o suporte, (2) é o motor de passo, (3) é o micrômetro, (4) é a placa Arduino, (5) é o difusor, e (6) é a câmera.

O método proposto foi validado comparando as medições da cintura do feixe com aquelas obtidas pela incidência direta do feixe de laser no sensor da câmera e utilizando um perfilômetro de feixe comercial da Thorlabs®, modelo BP209-VIS. Essa comparação teve como objetivo avaliar a precisão e a confiabilidade da abordagem baseada em speckle em relação às técnicas de imageamento tradicionais, que são amplamente aceitas como padrão para a caracterização de feixes (ALAMO *et al.*, 2021; CHAPPLE, 1994; BISTI *et al.*, 2021).

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Primeiramente, a verificação da Eq. 30 foi realizada utilizando a configuração experimental descrita na Fig. 4(a), na qual o feixe foi colimado por um telescópio e medido em uma única posição. Durante a medição, o difusor permaneceu fixo, enquanto a câmera foi transladada para registrar os padrões de speckle em diferentes distâncias D . Um padrão de speckle típico registrado é mostrado na Fig. 6(a), exibindo sua característica distribuição aleatória de intensidade com múltiplos grãos de speckle representados pelas regiões brilhantes. Como discutido na seção de Teoria, o raio médio desses grãos é obtido calculando a autocorrelação da imagem e ajustando-a a uma função gaussiana. Tanto a autocorrelação quanto o ajuste gaussiano são mostrados na Fig. 6(b). A Fig. 6(c) apresenta o tamanho médio dos grãos (Δs) para cada distância (D) do difusor ao plano de observação no sensor da câmera, juntamente com a curva de melhor ajuste seguindo a relação teórica $\Delta s = \sqrt{2} \frac{\lambda D}{\pi w}$. O símbolo (o) indica o dado experimental cuja imagem de speckle e autocorrelação foram mostradas. Pode-se observar que Δs e D mantêm um comportamento linear, como previsto, e a partir dessa relação, a largura do feixe (w) foi medida como $(77.4 \pm 0.1) \mu\text{m}$, onde o erro associado à medida corresponde ao erro padrão do parâmetro w obtido da matriz de covariância do ajuste, que no caso foi feito utilizando o método dos mínimos quadrados com coeficiente de determinação $R^2 = 0.995$.

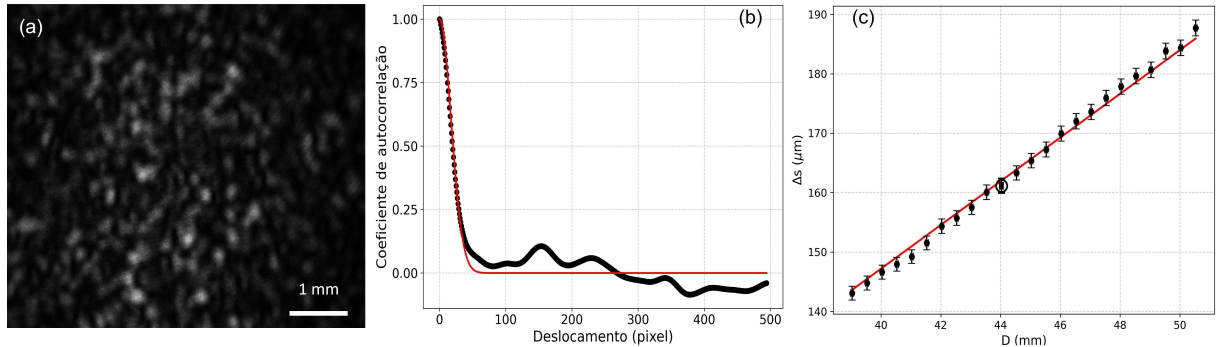


Figura 6 – (a) Imagem de speckle, (b) sua autocorrelação ajustada por uma curva gaussiana, e (c) o tamanho médio dos grãos de speckle (Δs) em função da distância (D) entre o difusor e o sensor da câmera. O símbolo (○) indica o dado selecionado para mostrar a imagem de speckle e a autocorrelação.

Para confirmar esse resultado, o feixe foi medido na mesma posição por duas técnicas tradicionais de perfilometria de feixe: uma sendo a incidência direta do laser no sensor da câmera e outra utilizando um dispositivo comercial baseado no método de varredura por fenda. Esses resultados são resumidos na Tabela 1. Um alto nível de concordância foi observado entre todos os métodos. Esse resultado corrobora que a teoria descreve corretamente a física do laser speckle.

Para medir a cintura de um feixe de laser altamente focalizado, o arranjo experimental apresentado na Fig. 4(b) foi utilizado. Nesse arranjo, o difusor é montado no

Tabela 1 – Medidas da largura de um feixe colimado utilizando métodos baseados em câmera, varredura por fenda, e speckle.

Método	Câmera	Varredura por fenda	Speckle
Largura do feixe (w)	$77.8 \pm 0.4 \mu\text{m}$	$77.8 \mu\text{m}$	$77.4 \pm 0.1 \mu\text{m}$

estágio de translação, de modo que ele experimenta diferentes larguras de feixe à medida que varre a direção de propagação do feixe, e a distância (D) é mantida fixa. Para uma lente com distância focal $f = 5 \text{ cm}$, a distância (D) entre o difusor e o sensor da câmera foi fixada em $(17.53 \pm 0.05) \text{ mm}$. Durante a varredura ao redor do foco, imagens de speckle foram registradas, seus tamanhos médios de grãos (Δs) calculados e as larguras do feixe (w) obtidas usando a Eq. 30. A Fig. 7(a) mostra os dados experimentais para a largura do feixe medido com o método baseado em speckle (pontos pretos) e com o método baseado em câmera (pontos vermelhos) para comparação. Ambos os dados foram ajustados pela Eq. 2, que descreve a largura do feixe ao longo da direção de propagação pela teoria dos feixes gaussianos, e as curvas de melhor ajuste seguem os respectivos códigos de cores. As cinturas do feixe (w_0) obtidas a partir dos ajustes para os métodos baseados em speckle e câmera são $(11.48 \pm 0.06) \mu\text{m}$ e $(11.49 \pm 0.04) \mu\text{m}$, respectivamente. Sendo que, os erros associados às medidas correspondem aos erros padrões do parâmetro w_0 obtido da matriz de covariância dos ajustes, que no caso foram feitos utilizando o método dos mínimos quadrados com coeficiente de determinação $R^2 = 0.995$ para o método baseado em câmera, e $R^2 = 0.993$ para o método baseado em speckle. Pode-se observar uma alta concordância entre os métodos.

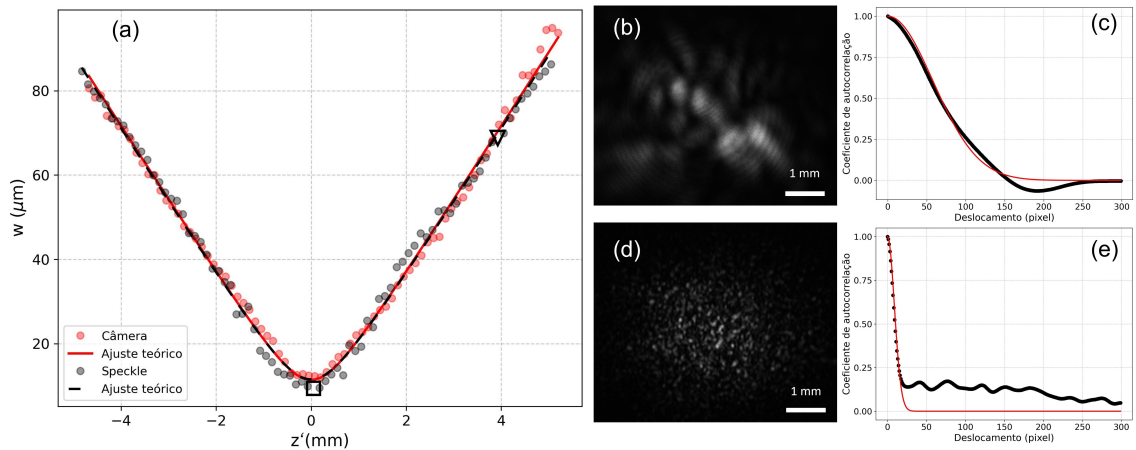


Figura 7 – (a) Cintura do feixe (w_0) em função da distância de propagação (z') para um laser focalizado por uma lente com distância focal de $f = 5 \text{ cm}$. Os pontos pretos representam os dados experimentais, e a linha tracejada preta é o melhor ajuste teórico para o método baseado em speckle. Os pontos vermelhos representam os dados experimentais, e a linha sólida vermelha é o melhor ajuste teórico para o método baseado em câmera. O símbolo ($\square$) indica a posição de (b) imagem de speckle e (c) curva de autocorrelação com seu melhor ajuste gaussiano. O símbolo (∇) indica a posição de (d) imagem de speckle e (e) curva de autocorrelação com seu melhor ajuste gaussiano.

Duas posições foram selecionadas para exibir suas respectivas imagens de speckle e autocorrelações correspondentes. Essas posições são indicadas na Fig. 7(a) pelos símbolos ($\square$) e (∇), representando posições na região focal e distante da mesma, respectivamente. Como esperado, os grãos de speckle presentes na Fig. 7(b), no foco, são maiores do que os da Fig. 7(d), que está distante do foco, pois o tamanho médio dos grãos (Δs) é inversamente proporcional à largura do feixe (w). Essa informação também pode ser observada em suas respectivas curvas de autocorrelação nas Figs. 7(c, e), que são ajustadas por funções gaussianas.

O experimento foi reproduzido utilizando uma lente objetiva de microscópio de 40x com abertura numérica (NA) de 0.65 para focalizar o feixe de forma ainda mais intensa. Nesse caso, a distância D foi fixada em (6.43 ± 0.05) mm para obter um melhor contraste do tamanho dos grãos de speckle ao longo da varredura. Na Fig. 8(a) é mostrada a largura do feixe (w) medida ao longo da direção de propagação (z'). A partir da curva de melhor ajuste conforme a teoria do feixe gaussiano representada na Eq. 2, a cintura do feixe (w_0) foi medida como (1.87 ± 0.02) μm , onde o erro associado à medida corresponde ao erro padrão do parâmetro w_0 obtido da matriz de covariância do ajuste, que no caso foi feito utilizando o método dos mínimos quadrados com coeficiente de determinação $R^2 = 0.992$. Pode-se observar uma alta concordância entre os métodos. Na Fig. 8(a), o símbolo ($\square$) e o símbolo (∇) representam posições na região focal e distante da mesma que foram escolhidas para exibir suas imagens de speckle e curvas de autocorrelação. Nas imagens de speckle das Figs. 8(b, d), pode-se ver que o tamanho dos grãos no foco é maior do que longe dele. Isso é corroborado pelas autocorrelações correspondentes nas Figs. 8(c, e), que também exibem seus melhores ajustes gaussianos.

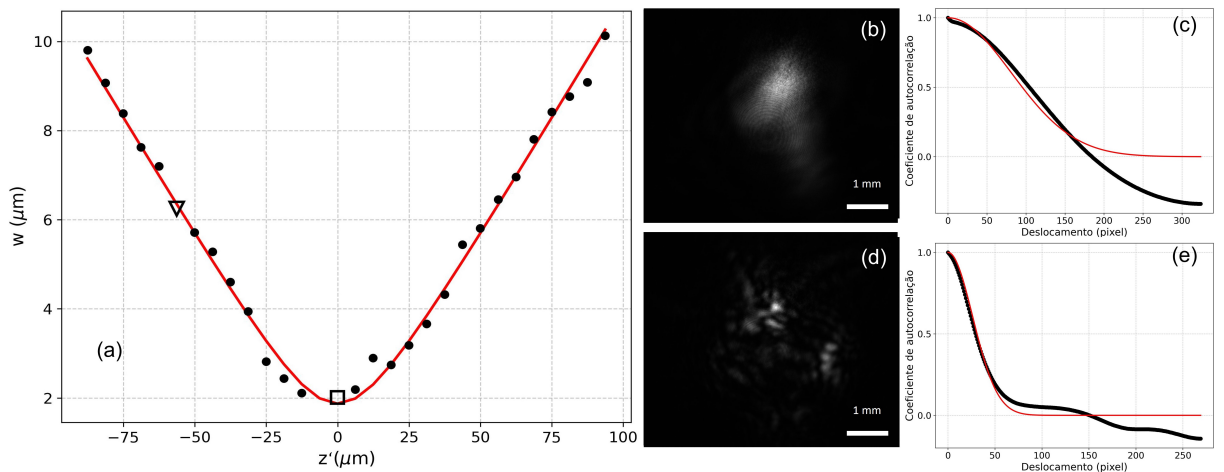


Figura 8 – (a) Cintura do feixe (w_0) em função da distância de propagação (z') para um laser focalizado por uma lente objetiva de microscópio de 40x (NA=0.65) e seu melhor ajuste teórico. O símbolo ($\square$) indica a posição de (b) imagem de speckle e (c) curva de autocorrelação com seu melhor ajuste gaussiano. O símbolo (∇) indica a posição da (d) imagem de speckle e (e) curva de autocorrelação com seu melhor ajuste gaussiano.

Os resultados apresentados mostram que, ao analisar o padrão de speckle e suas propriedades estatísticas, é possível extrair informações quantitativas e precisas sobre as dimensões do feixe. Vale ressaltar que, para o feixe focalizado com uma lente objetiva de microscópio de 40x, a cintura do feixe medida é menor do que o tamanho do pixel do sensor da câmera utilizada, que tem formato quadrado com lados de $4.8 \mu m$. Isso demonstra uma das principais vantagens dessa abordagem, que utiliza os princípios de coerência óptica e difração para permitir medições precisas independentes das limitações de tamanho de pixel no sistema de imageamento.

5 CONCLUSÕES

Este estudo apresentou e validou um método baseado em padrões de laser speckle para medição da largura de um feixe de laser gaussiano, demonstrando sua eficácia por meio de processamento de imagens e análise estatística dos padrões de speckle. Os resultados experimentais mostraram uma excelente concordância entre as medições obtidas pelo método proposto e aquelas realizadas com técnicas convencionais, como imageamento direto e perfis obtidos por varredura com fenda, reforçando a confiabilidade e precisão do método. Um dos principais avanços deste trabalho foi a capacidade de medir feixes com cintura de $(1.87 \pm 0.02) \mu m$, valor inferior ao tamanho de um pixel do sensor da câmera utilizada. Esse resultado supera uma limitação significativa das técnicas tradicionais baseadas em imageamento, que frequentemente encontram dificuldades em resolver feixes com dimensões tão reduzidas.

Além disso, a ausência de partes móveis no sistema de medição proposto conferiu maior estabilidade ao processo, garantindo resultados reproduzíveis e consistentes. Essa característica contrasta com métodos de oclusão do feixe, que podem introduzir instabilidades devido à necessidade de movimentação mecânica durante as medições. A simplicidade e robustez do método baseado em speckle tornam-no uma alternativa atrativa para aplicações práticas em laboratórios e indústrias, onde a precisão e a facilidade de operação são essenciais.

Os resultados obtidos não apenas validam o método proposto como uma ferramenta confiável para a medição da cintura de feixes laser, mas também impactam no avanço da aplicação de técnicas de diagnóstico baseadas em speckle na caracterização de lasers. Em suma, este estudo contribui significativamente para o campo da metrologia óptica, oferecendo uma abordagem inovadora e eficiente para a análise de feixes de laser.

Por fim, vale mencionar que a técnica de medida da largura de feixes gaussianos baseada na análise de imagens de laser speckle foi depositada no Instituto Nacional da Propriedade Industrial (INPI) sob o número de registro BR 10 2025 002088 2.

REFERÊNCIAS

SALEH, Bahaa EA; TEICH, Malvin Carl. **Fundamentals of photonics**. [S.l.]: John Wiley & sons, 2019.

DUNSKY, Corey M. Beam shaping applications in laser micromachining for the microelectronics industry. *In*: PROC.SPIE. [S.l.: s.n.], out. 2001. v. 4443, p. 135–149.

NG, Chong-Kuong *et al.* Femtosecond laser micro-machining of three-dimensional surface profiles on flat single crystal sapphire. **Optics & Laser Technology**, v. 170, p. 110205, 2024. ISSN 0030-3992.

NEUMAN, Keir C; BLOCK, Steven M. Optical trapping. **Review of Scientific Instruments**, v. 75, p. 2787–2809, 9 set. 2004. ISSN 0034-6748.

YANG, Yuanjie; REN, Yuxuan *et al.* Optical trapping with structured light: a review. **Advanced Photonics**, v. 3, p. 034001, 3 mai. 2021.

CHEN, Yu *et al.* Review of advanced imaging techniques. **Journal of Pathology Informatics**, v. 3, p. 22, 1 2012. ISSN 2153-3539.

TAN, Yuanfu *et al.* Development of a novel beam profiling prototype with laser self-mixing via the knife-edge approach. **Optics and Lasers in Engineering**, Elsevier, v. 169, p. 107696, out. 2023. ISSN 0143-8166.

ALAMO, M. Bonnett Del *et al.* Laser spot measurement using simple devices. **AIP Advances**, American Institute of Physics Inc., v. 11, 7 jul. 2021. ISSN 21583226.

MYLONAKIS, Mikis *et al.* Simple precision measurements of optical beam sizes. **Applied Optics**, The Optical Society, v. 57, p. 9863, 33 nov. 2018. ISSN 1559-128X.

PAN, Bing. Digital image correlation for surface deformation measurement: historical developments, recent advances and future goals. **Measurement Science and Technology**, IOP Publishing, v. 29, p. 082001, 8 2018. ISSN 0957-0233.

CHAPPLE, Philip B. Beam waist and M2 measurement using a finite slit. **Optical Engineering**, v. 33, p. 2461–2466, 7 jul. 1994.

YANG, Pao-Keng; LIU, Jian-You. Determining the waist radius of a focused Gaussian laser beam using a millimeter-scale ruler. **European Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 38, p. 025302, 2 2017. ISSN 01430807.

AMS, M *et al.* Slit beam shaping method for femtosecond laser direct-write fabrication of symmetric waveguides in bulk glasses. **Optics Express**, Optica Publishing Group, v. 13, p. 5676–5681, 15 2005.

MONTERO, Mario Ricardo; ALVAREZ, Juan Carlos; N., Francisco Juan Racedo. Beamdiameter — Development of software for a laser beam profiler. **SoftwareX**, Elsevier B.V., v. 27, set. 2024. ISSN 23527110.

BISTI, F. *et al.* A simple laser beam characterization apparatus based on imaging. **Journal of Applied Research and Technology**, v. 19, p. 98–116, 2 abr. 2021. ISSN 2448-6736.

GOODMAN, J W. Statistical Properties of Laser Speckle Patterns. *In*: edição: J C Dainty. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1975. P. 9–75. ISBN 978-3-662-43205-1.

HU, Xiao-Bo *et al.* Does the structure of light influence the speckle size? **Scientific Reports**, v. 10, p. 199, 1 2020. ISSN 2045-2322.

RODRÍGUEZ, F *et al.* Speckle characterization of surface roughness obtained by laser texturing. **Procedia Manufacturing**, v. 13, p. 519–525, 2017. ISSN 2351-9789.

JAMALI, Ramin *et al.* Surface characterization of biodegradable nanocomposites by dynamic speckle analysis. **Applied Surface Science Advances**, v. 16, p. 100429, 2023. ISSN 2666-5239.

SOUZA, P V S *et al.* Characterization of surface roughness by speckle pattern—an experimental approach. **Physics Education**, IOP Publishing, v. 56, p. 025013, 2 2021. ISSN 0031-9120.

SHAO, Mei-qi *et al.* A review of surface roughness measurements based on laser speckle method. **Journal of Iron and Steel Research International**, v. 30, p. 1897–1915, 10 2023. ISSN 2210-3988.

ROSE, Bjarke *et al.* Laser-speckle angular-displacement sensor: theoretical and experimental study. **Applied Optics**, Optica Publishing Group, v. 37, p. 2119–2129, 11 1998.

ALMORO, Percival F *et al.* Angular displacement and deformation analyses using a speckle-based wavefront sensor. **Applied Optics**, Optica Publishing Group, v. 48, p. 932–940, 5 2009.

H. BAGHERI M.A.D. GOODISMAN, D.I. Goldman. Detecting subtle subterranean movement via laser speckle imaging. **Journal of Experimental Biology** **227**, 2024.

LI, Yunzhe; XUE, Yujia; TIAN, Lei. Deep speckle correlation: a deep learning approach toward scalable imaging through scattering media. **Optica**, Optica Publishing Group, v. 5, p. 1181–1190, 10 2018.

CHEN, Hui *et al.* Imaging through scattering media using speckle pattern classification based support vector regression. **Optics Express**, Optica Publishing Group, v. 26, p. 26663–26678, 20 2018.

LIU, Honglin *et al.* Alternative Interpretation of Speckle Autocorrelation Imaging Through Scattering Media. **Photonic Sensors**, v. 12, p. 220308, 3 2022. ISSN 2190-7439.

HORISAKI, Ryoichi; TAKAGI, Ryosuke; TANIDA, Jun. Learning-based imaging through scattering media. **Optics Express**, Optica Publishing Group, v. 24, p. 13738–13743, 13 2016.

DRBOB. **Gaussianbeam.png**. Licença: CC BY-SA 3.0. [s.d.] Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6002103>. Acesso em: 9 fev. 2025.

GOODMAN, J W. **Introduction to Fourier Optics**. [S.l.]: W. H. Freeman, 2005. ISBN 9780974707723.

WOLF, E. A macroscopic theory of interference and diffraction of light from finite sources, I. Fields with a narrow spectral range. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society London, v. 225, n. 1160, p. 96–111, 1954.

ZERNIKE, F. The concept of degree of coherence and its application to optical problems. **Physica**, v. 5, p. 785–795, 8 1938. ISSN 0031-8914.

SONG, Lipei; ELSON, Daniel S. Effect of signal intensity and camera quantization on laser speckle contrast analysis. **Biomedical Optics Express**, Optica Publishing Group, v. 4, p. 89–104, 1 2013.

APÊNDICE A – Cálculo da autocorrelação de padrões de speckle produzidos por feixes gaussianos

Neste apêndice, vamos demonstrar os cálculos das integrais das Equações (26) e (27).

Demonstração do cálculo da Eq. (26)

A integral a ser resolvida é:

$$Z = \iint_{-\infty}^{\infty} I(z') \exp \left[-\frac{2(\xi^2 + \eta^2)}{w^2} \right] d\xi d\eta. \quad (\text{A.1})$$

A integral dupla pode ser separada em duas integrais simples, pois o integrando é o produto de duas funções exponenciais independentes:

$$Z = I(z') \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{2\xi^2}{w^2} \right] d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{2\eta^2}{w^2} \right] d\eta. \quad (\text{A.2})$$

E agora vamos definir que:

$$Z = I(z') \cdot Z_{\xi} \cdot Z_{\eta}, \quad (\text{A.3})$$

onde as integrais Z_{ξ} e Z_{η} são dadas por:

$$Z_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{2\xi^2}{w^2} \right] d\xi, \quad Z_{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{2\eta^2}{w^2} \right] d\eta. \quad (\text{A.4})$$

Primeiramente, para resolver a integral Z_{ξ} , fazemos a substituição:

$$u = \frac{\sqrt{2}\xi}{w}, \quad d\xi = \frac{w}{\sqrt{2}} du, \quad (\text{A.5})$$

substituindo na integral:

$$Z_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-u^2 \right] \cdot \frac{w}{\sqrt{2}} du = \frac{w}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-u^2 \right] du, \quad (\text{A.6})$$

a integral $\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-u^2 \right] du$ é conhecida e vale $\sqrt{\pi}$. Portanto:

$$Z_{\xi} = \frac{w}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{w\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.7})$$

Agora percebemos que a integral Z_{η} é análoga à Z_{ξ} , logo:

$$Z_{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{2\eta^2}{w^2} \right] d\eta = \frac{w\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.8})$$

Substituindo os resultados de Z_{ξ} e Z_{η} na Eq. (A.3):

$$Z = I(z') \cdot \left(\frac{w\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{w\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \right) = I(z') \cdot \frac{w^2\pi}{2}. \quad (\text{A.9})$$

Portanto:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} I(z') \exp \left[-\frac{2(\xi^2 + \eta^2)}{w^2} \right] d\xi d\eta = \frac{I(z')}{2} \pi w^2. \quad (\text{A.10})$$

Demonstração do cálculo da Eq. (27)

A integral a ser resolvida é:

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} I(z') \exp \left[-\frac{2(\xi^2 + \eta^2)}{w^2} \right] \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda z} (\xi \Delta x + \eta \Delta y) \right] d\xi d\eta. \quad (\text{A.11})$$

A integral pode ser separada em duas integrais simples:

$$Z = I(z') \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{2\xi^2}{w^2} + i \frac{2\pi}{\lambda z} \xi \Delta x \right] d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{2\eta^2}{w^2} + i \frac{2\pi}{\lambda z} \eta \Delta y \right] d\eta. \quad (\text{A.12})$$

E agora vamos definir que:

$$Z = I(z') \cdot Z_{\xi} \cdot Z_{\eta}, \quad (\text{A.13})$$

onde as integrais Z_{ξ} e Z_{η} são dadas por:

$$Z_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{2\xi^2}{w^2} + i \frac{2\pi}{\lambda z} \xi \Delta x \right] d\xi, \quad Z_{\eta} = \sqrt{\frac{\pi w^2}{2}} \exp \left[-\frac{\pi^2 w^2}{2\lambda^2 z^2} \Delta y^2 \right]. \quad (\text{A.14})$$

Primeiramente, para resolver a integral Z_{ξ} , vamos definir:

$$\alpha = \frac{2}{w^2}, \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda z} \Delta x, \quad (\text{A.15})$$

substituindo na integral:

$$Z_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\alpha \xi^2 + i\beta \xi \right] d\xi. \quad (\text{A.16})$$

Agora completamos o quadrado no expoente:

$$-\alpha \xi^2 + i\beta \xi = -\alpha \left(\xi^2 - i \frac{\beta}{\alpha} \xi \right), \quad (\text{A.17})$$

então adicionamos e subtraímos o termo $\left(\frac{i\beta}{2\alpha} \right)^2$:

$$-\alpha \left(\xi^2 - i \frac{\beta}{\alpha} \xi + \left(\frac{i\beta}{2\alpha} \right)^2 - \left(\frac{i\beta}{2\alpha} \right)^2 \right). \quad (\text{A.18})$$

e isso resulta em:

$$-\alpha \left(\xi - \frac{i\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha}. \quad (\text{A.19})$$

Voltando para a integral, temos que:

$$Z_\xi = \exp \left[-\frac{\beta^2}{4\alpha} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\alpha \left(\xi - \frac{i\beta}{2\alpha} \right)^2 \right] d\xi. \quad (\text{A.20})$$

Então fazemos a substituição:

$$u = \sqrt{\alpha} \left(\xi - \frac{i\beta}{2\alpha} \right), \quad du = \sqrt{\alpha} d\xi, \quad (\text{A.21})$$

e a integral se torna:

$$Z_\xi = \exp \left[-\frac{\beta^2}{4\alpha} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-u^2] du, \quad (\text{A.22})$$

onde novamente, sabemos que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp [-u^2] du = \sqrt{\pi}$, portanto:

$$Z_\xi = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \exp \left[-\frac{\beta^2}{4\alpha} \right] \sqrt{\pi}, \quad (\text{A.23})$$

substituindo α e β :

$$Z_\xi = \sqrt{\frac{\pi w^2}{2}} \exp \left[-\frac{\pi^2 w^2}{2\lambda^2 z^2} \Delta x^2 \right]. \quad (\text{A.24})$$

Agora percebemos que a integral Z_η é análoga a Z_ξ , logo:

$$Z_\eta = \sqrt{\frac{\pi w^2}{2}} \exp \left[-\frac{\pi^2 w^2}{2\lambda^2 z^2} \Delta y^2 \right]. \quad (\text{A.25})$$

Substituindo os resultados de Z_ξ e Z_η na Eq. (A.13):

$$Z = I(z') \cdot \sqrt{\frac{\pi w^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi w^2}{2}} \exp \left[-\frac{\pi^2 w^2}{2\lambda^2 z^2} (\Delta x^2 + \Delta y^2) \right]. \quad (\text{A.26})$$

Simplificando:

$$Z = \frac{I(z')}{2} \pi w^2 \exp \left[-\frac{\pi^2 w^2}{2\lambda^2 z^2} (\Delta x^2 + \Delta y^2) \right]. \quad (\text{A.27})$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} I(z') \exp \left[-\frac{2(\xi^2 + \eta^2)}{w^2} \right] \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda z} (\xi \Delta x + \eta \Delta y) \right] d\xi d\eta \\ = \frac{I(z')}{2} \pi w^2 \exp \left[-\frac{\pi^2 w^2}{2\lambda^2 z^2} (\Delta x^2 + \Delta y^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$