
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Brendha Montes Silva

**A Integral de Lebesgue na Reta e Teoremas de
Convergência**

Orientador: Prof. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho

Uberlândia - MG
2017

A Integral de Lebesgue na Reta e Teoremas de Convergência

Brendha Montes Silva

Monografia apresentada à Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Uberlândia, 15 de Dezembro de 2017.

BANCA:



Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho (Orientador)



Prof. Dr. Fábio José Bertoloto



Prof. Dr. Ariosvaldo Marques Jatobá



Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli

Sumário

1	Introdução	4
2	Preliminares	5
3	A Integral de uma Função Escada	7
4	A Integral de Funções Superiores	11
5	Funções Lebesgue-integráveis	19
6	Teoremas de Convergência	25
	Referências	35

Capítulo 1

Introdução

A integral de Lebesgue surgiu, no início do século XX, como uma resposta da matemática às deficiências da integral de Riemann.

Apresentaremos neste trabalho uma introdução elementar à integral de Lebesgue na reta $\mathbb{R}$. Elementar no sentido de que não usamos conceitos e resultados da Teoria da Medida, e usamos apenas técnicas usuais da Análise na Reta, em nível de um curso de graduação. O único conceito da Teoria da Medida que usamos é a noção de conjunto de medida nula, que também é tratado em cursos de graduação.

Pretendemos deixar claro que a integral de Lebesgue permite integrar funções mais gerais que a integral de Riemann, tem todas as propriedades que se espera de uma integral e possibilita substituir o intervalo de integração $[a, b]$ por conjuntos mais gerais. Apesar de não tratarmos disso neste trabalho, a integral de Lebesgue também permite integrar funções não limitadas.

De acordo com a abordagem que adotamos, seguindo o que é feito na referência [1], primeiramente definimos a integral para funções escada, em seguida para uma classe mais ampla de funções (chamadas funções superiores), e, finalmente, definimos a classe das funções Lebesgue-integráveis. A seguir verificamos as propriedades básicas da integral de Lebesgue e o comportamento das funções integráveis em diferentes intervalos.

Uma das principais deficiências da integral de Riemann, que a integral de Lebesgue procura corrigir, é a seguinte: dada uma sequência de funções Riemann-integráveis $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, que converge pontualmente para a função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, gostaríamos que a função f fosse Riemann-integrável e que

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Mas isso não é verdade sempre. Além disso, a solução que a integral de Riemann oferece para esse problema é exigir que a convergência seja uniforme (veja [2, Teorema 9.10]). Entretanto, essa solução é insatisfatória, pois a convergência uniforme é muito rara e muito difícil de ser verificada. Deseja-se então uma nova teoria de integração que permita concluir que o limite das integrais é a integral do limite com condições mais fracas que a convergência uniforme.

O objetivo do último capítulo desta monografia é apresentar as soluções que a integral de Lebesgue oferece para esse problema: o teorema da convergência monótona e o teorema da convergência dominada. Esses dois teoremas permitem concluir, no âmbito da integral de Lebesgue, que o limite das integrais é a integral do limite com condições fáceis de serem verificadas e que são bem menos exigentes que a convergência uniforme. Por isso, esses se tornaram alguns dos teoremas mais úteis e repletos de aplicações da matemática contemporânea.

Capítulo 2

Preliminares

Este capítulo contém uma breve exposição de algumas definições e resultados da Análise na Reta que são fundamentais para a compreensão do texto.

Todos os conceitos e resultados deste capítulo podem ser encontrados em qualquer bom livro de Análise, por exemplo [2].

Definição 2.1 Um conjunto $K \subseteq \mathbb{R}$ é *limitado* se existe $c > 0$ tal que $|x| \leq c$ para todo $x \in K$.

Definição 2.2 Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é *enumerável* se for possível definir uma função bijetora $f : \mathbb{N} \rightarrow A$.

Teorema 2.3 O conjunto dos números racionais é enumerável.

Corolário 2.4 Todo subconjunto do conjunto dos números racionais é finito ou enumerável.

Definição 2.5 Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Um ponto $x \in A$ é *ponto interior* de A se existe $\delta > 0$ tal que $(x - \delta, x + \delta) \subseteq A$.

O conjunto A é *aberto* se todos os pontos de A são interiores a A , ou seja, se para todo $x \in A$ existe $\delta_x > 0$ tal que $(x + \delta_x, x - \delta_x) \subseteq A$.

Definição 2.6 Um conjunto $F \subseteq \mathbb{R}$ é *fechado* se para toda sequência $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq F$ tal que $x_n \rightarrow x$, então $x \in F$.

Definição 2.7 Um conjunto $K \subseteq \mathbb{R}$ é dito *compacto* se é limitado e fechado.

Definição 2.8 Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tem *medida nula* se, para todo $\epsilon > 0$ existem intervalos abertos $(I_n)_{n=1}^\infty$ tais que $A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty I_j$ e $\sum_{j=1}^\infty l(I_j) < \epsilon$, onde $l(I_j)$ é o comprimento do intervalo I_j .

Se diz que uma propriedade se verifica *em quase em todo ponto* de um conjunto S (denota-se *q.t.p. em S*) se vale em todo S exceto em um subconjunto de S de medida nula.

Teorema 2.9 Todo subconjunto finito ou enumerável dos números reais tem medida nula.

Definição 2.10 Uma *cobertura aberta* de um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é uma coleção $(A_i)_{i \in I}$ de conjuntos abertos tais que

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Dizemos que uma cobertura aberta $(A_i)_{i \in I}$ de A *admite subcobertura finita* se existem $n \in \mathbb{N}$ e $i_1, \dots, i_n \in I$ tais que

$$A \subseteq (A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}).$$

Definição 2.11 Seja A um subconjunto não vazio e limitado de $\mathbb{R}$.

(a) Um elemento $x \in \mathbb{R}$ é *cota superior de A* se $x \geq y$ para todo $y \in A$. Se $x \leq y$ para todo $y \in A$, então x é dito *cota inferior de A* .

(b) O *supremo* do conjunto A , denotado por $\sup A$, é a menor das cotas superiores de A .

(c) O *ínfimo* do conjunto A , denotado por $\inf A$, é a maior das cotas inferiores de A .

Definição 2.12 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada definida em um intervalo fechado $[a, b]$.

Uma *partição* π do intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos $\{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$.

Dadas uma função f e uma partição π , definimos a *soma superior de f em relação a π* e a *soma inferior de f em relação a π* pelas seguintes expressões, respectivamente:

$$S(f, \pi) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) \quad \text{e} \quad s(f, \pi) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}),$$

onde $M_j = \sup\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$ e $m_j = \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$.

Definição 2.13 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e seja $\pi = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$. Definimos $\|\pi\| = \max\{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ e chamamos este número de *norma da partição π* .

Definição 2.14 Sejam π_1 e π_2 duas partições do intervalo $[a, b]$. Dizemos que π_2 é um *refinamento de π_1* se o conjunto dos pontos que formam π_2 contiver o conjunto dos pontos de π_1 .

Definição 2.15 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. A *integral superior de f em $[a, b]$* , que se denota por $\overline{\int_a^b} f$, é o ínfimo das somas superiores de f em relação a todas as partições de $[a, b]$. A *integral inferior de f em $[a, b]$* , que se denota por $\underline{\int_a^b} f$, é o supremo das somas inferiores de f em relação a todas as partições de $[a, b]$.

Definição 2.16 Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é *Riemann-integrável* se $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. O valor comum das integrais superior e inferior é chamado a *integral de f* e se denota por $\int_a^b f(x)dx$.

Teorema 2.17 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Então f é Riemann-integrável se, e só se, o conjunto $D(f)$ de seus pontos de descontinuidade tem medida nula.*

Exemplo 2.18 (Função limitada não Riemann-integrável) Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a *função de Dirichlet*, que a cada irracional de $[0, 1]$ associa o valor 0 e a cada racional de $[0, 1]$, o valor 1.

Como os conjuntos dos racionais e dos irracionais são densos em $[0, 1]$, para qualquer partição π de $[0, 1]$, os M'_j s são todos iguais a 1 e os m'_j s são todos iguais a 0. Segue que $S(f, \pi) = 1$ e $s(f, \pi) = 0$ para qualquer partição π de $[a, b]$, e portanto a integral superior é igual a 1 e a integral inferior é igual a zero. Isso prova que f não é Riemann-integrável.

Teorema 2.19 (Teorema de Heine-Borel) *Toda cobertura aberta de um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ admite subcobertura finita.*

Capítulo 3

A Integral de uma Função Escada

Neste capítulo definiremos função escada definida em um intervalo e, em seguida, definiremos a integral de uma função escada.

Definição 3.1 Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função escada em $[a, b]$* se existem uma partição $\{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ de $[a, b]$ e constantes $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = c_k \quad \text{se } x \in (x_{k-1}, x_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

É claro que uma função escada é Riemann-integrável em cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ e sua integral é dada por

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = c_k(x_k - x_{k-1}).$$

A integral de Riemann de f em $[a, b]$ é por conseguinte igual à soma

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}). \quad (3.1)$$

Definição 3.2 Seja I um intervalo qualquer. Uma função f é uma *função escada em I* se existe um subintervalo compacto $[a, b] \subset I$ em que f seja uma função escada em $[a, b]$ e $f(x) = 0$ para $x \in I \setminus [a, b]$. A integral de f em I , denotada por $\int_I f(x)dx$ ou por $\int_I f$, é dada por (3.1).

As propriedades da integral de funções escada seguem imediatamente:

Teorema 3.3 *Sejam f e g funções escada no intervalo I e $c \in \mathbb{R}$. Então:*

- i) $\int_I f + \int_I g = \int_I (f + g),$
- ii) $\int_I c \cdot f = c \cdot \int_I f,$
- iii) $\int_I f \leq \int_I g$ se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$.

Se I for a união de um conjunto finito de subintervalos, digamos $I = \bigcup_{r=1}^p [a_r, b_r]$, em que dois subintervalos distintos não têm pontos interiores comuns, então

$$\int_I f(x)dx = \sum_{r=1}^p \int_{a_r}^{b_r} f(x)dx.$$

Estudaremos agora sequências monótonas de funções escadas.

Definição 3.4 Uma sequência de funções reais $\{f_n\}$ definida em um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é *não decrescente* em S se

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \quad \forall x \in S, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e *não crescente* se

$$f_n(x) \geq f_{n+1}(x), \quad \forall x \in S, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definição 3.5 Sejam $f_n, f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Diremos que a sequência $\{f_n\}$ *converge em quase todo ponto de S* (q.t.p. em S) para f se existe um conjunto $N \subseteq S$ tal que:

- a) N tem medida nula.
- b) $f_n(x) \rightarrow f(x), \forall x \in S \setminus N$.

Notação: $f_n \rightarrow f$ q.t.p. em S . Se $\{f_n\}$ é não decrescente, escreveremos $f_n \nearrow f$ q.t.p. em S ; e se f_n é não crescente, escreveremos $f_n \searrow f$ q.t.p. em S .

Teorema 3.6 Seja $\{s_n\}$ uma sequência não crescente de funções escada não negativas tal que $s_n \searrow 0$ q.t.p. em um intervalo I . Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n = 0.$$

Demonstração: A ideia da demonstração consiste em escrever

$$\int_I s_n = \int_A s_n + \int_B s_n,$$

onde A e B são uniões finitas de intervalos. O conjunto A se obtém escolhendo-se os intervalos em que o integrando é relativamente pequeno quando n é suficientemente grande. Em B o integrando não necessita ser pequeno, mas a soma dos comprimentos dos seus intervalos deverá ser pequena.

Começamos tomando um intervalo compacto $[a, b]$ fora do qual s_1 se anula. Dado que

$$0 \leq s_n(x) \leq s_1(x), \quad \forall x \in I,$$

cada s_n se anula fora de $[a, b]$. Perceba que s_n é constante em cada intervalo aberto de uma certa partição de $[a, b]$. Chamaremos de D_n o conjunto dos extremos desses subintervalos e definimos

$D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Sendo cada D_n um conjunto finito, a união D é enumerável e, portanto, tem medida nula pelo Teorema 2.9.

Seja E o conjunto de pontos de $[a, b]$ para os quais a sequência $\{s_n\}$ não converge para 0. Por hipótese, E tem medida nula, logo o conjunto $F := D \cup E$ também terá medida nula. Portanto, dado $\epsilon > 0$ podemos cobrir F por meio de uma coleção enumerável de intervalos abertos $F_1, F_2, F_3, \dots$ cuja soma dos comprimentos será menor que ϵ .

Agora suponhamos que $x \in [a, b] \setminus F$. Então $x \notin E$, e, portanto, $s_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Por conseguinte, existe um número inteiro $N = N(x)$ tal que $s_N(x) < \epsilon$. Mais ainda, $x \notin D$. Então x não é extremo de nenhum dos intervalos D_n , em particular x pertence ao interior de algum dos subintervalos nos quais s_N é constante. Então existe um intervalo aberto $B(x)$ contendo x tal que s_N é constante em $B(x)$. Logo,

$$s_N(t) < \epsilon, \quad \forall t \in B(x).$$

Como $\{s_n\}$ é não crescente, temos

$$s_n(t) < \epsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall t \in B(x). \quad (3.2)$$

A união de todos os intervalos $B(x)$ obtidos quando x percorre $[a, b] \setminus F$ com os intervalos $F_1, F_2, \dots$ forma uma cobertura aberta de $[a, b]$. Como $[a, b]$ é compacto, pelo Teorema de Heine-Borel (Teorema 2.19), a cobertura aberta $\{B(x), F_r : x \in [a, b] \setminus F, r \in \mathbb{N}\}$ admite subcobertura finita. Ou seja, existem $x_1, \dots, x_p \in [a, b] \setminus F$ e $q \in \mathbb{N}$ tais que

$$[a, b] \subseteq \left(\left(\bigcup_{i=1}^p B(x_i) \right) \cup \left(\bigcup_{r=1}^q F_r \right) \right). \quad (3.3)$$

Seja N_0 o maior dos inteiros $N(x_1), \dots, N(x_p)$. De (3.2) segue que

$$s_n(t) < \epsilon, \quad \forall n \geq N_0 \quad \text{e} \quad \forall t \in \bigcup_{i=1}^p B(x_i). \quad (3.4)$$

Agora definimos A e B como segue:

$$B = \bigcup_{r=1}^q F_r, \quad A = [a, b] \setminus B.$$

Então A é uma união finita de intervalos disjuntos dois a dois e

$$\int_I s_n = \int_a^b s_n = \int_A s_n + \int_B s_n.$$

Primeiramente calcularemos a integral sobre B . Para isso seja M uma cota superior de s_1 em $[a, b]$. Já que $\{s_n\}$ é não crescente, temos $s_n(x) \leq s_1(x) \leq M$ para todo x de $[a, b]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. A soma dos comprimentos dos intervalos que pertencem a B é menor que ϵ , então

$$\int_B s_n \leq M \cdot \epsilon.$$

Agora calculemos a integral sobre A . Como $A \subseteq \bigcup_{i=1}^p B(x_i)$, a desigualdade de (3.4) prova que

$s_n(x) < \epsilon$ para todos $x \in A$ e $n \geq N_0$. E como a soma dos comprimentos dos intervalos de A é menor ou igual a $(b - a)$, segue que

$$\int_A s_n \leq (b - a) \cdot \epsilon \quad \text{se} \quad n \geq N_0.$$

Daí, para $n \geq N_0$,

$$\int_A s_n + \int_B s_n \leq M \cdot \epsilon + (b - a) \cdot \epsilon,$$

o que implica que

$$0 \leq \int_I s_n \leq (M + b - a) \cdot \epsilon.$$

Isso prova que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n = 0.$$

□

Teorema 3.7 *Seja $\{t_n\}$ uma sequência de funções escada em um intervalo I tal que:*

i) Existe uma função f tal que $t_n \nearrow f$ q.t.p. em I ;

ii) A sequência $\{\int_I t_n\}$ converge.

Então, para toda função escada t tal que $t(x) \leq f(x)$ q.t.p. em I , verifica-se

$$\int_I t \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I t_n.$$

Demonstração: Definimos uma nova sequência de funções escada não negativas $\{s_n\}$ em I da seguinte forma:

$$s_n(x) = \begin{cases} t(x) - t_n(x), & \text{se } t(x) \geq t_n(x) \\ 0, & \text{se } t(x) < t_n(x) \end{cases}.$$

Note que $s_n(x) = \max\{t(x) - t_n(x), 0\}$. Então $\{s_n\}$ é não crescente em I , uma vez que $\{t_n\}$ é não decrescente em I . Além disso,

$$s_n(x) \rightarrow \max\{t(x) - f(x), 0\} \quad \text{q.t.p. em } I.$$

Por hipótese, $t(x) \leq f(x)$ q.t.p. em I , e portanto $s_n \rightarrow 0$ q.t.p. em I . Daí, pelo teorema anterior,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n = 0.$$

Além disso, $s_n(x) \geq t(x) - t_n(x)$, $\forall x \in I$. Segue, pela hipótese (ii), que

$$\int_I s_n \geq \int_I t - \int_I t_n.$$

E, quando $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I t - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I t_n \leq 0,$$

o que nos permite concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I t_n \geq \int_I t.$$

□

Capítulo 4

A Integral de Funções Superiores

Denotamos por $S(I)$ o conjunto de todas as funções escada em um intervalo I . No capítulo anterior definimos a integral para todas as funções de $S(I)$. Neste capítulo estenderemos o conceito da integral para uma classe de funções $U(I)$ mais ampla que contém os limites de certas sequências de funções escada. As funções dessa classe serão chamadas *funções superiores*.

Definição 4.1 Uma função real f definida em um intervalo I se chama *função superior* em I , e neste caso escrevemos $f \in U(I)$ (classe das funções superiores), se existe uma sequência não decrescente de funções escada $\{s_n\}$ em I tal que:

- a) $s_n \nearrow f$ q.t.p. em I ;
- b) Existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n$.

Neste caso dizemos que a sequência de funções escada $\{s_n\}$ gera a função superior f e definimos a integral de f em I por

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n \quad (4.1)$$

O próximo teorema demonstra que a integral de uma função superior está bem definida, no sentido de que não depende da sequência geradora.

Teorema 4.2 Suponha $f \in U(I)$ e sejam $\{s_n\}$, $\{t_m\}$ duas sequências de funções escada que geram f . Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_I t_m.$$

Demonstração: Note que as sequências $\{t_m\}$ e $\{s_n\}$ satisfazem as hipóteses do Teorema 3.7. Além disso, como $\{s_n\}$ é não decrescente, para cada n temos

$$s_n(x) \leq \sup_m s_m(x) = f(x) \quad \text{q.t.p. em } I.$$

Isso se verifica para cada n , e portanto temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_I t_m.$$

Analogamente prova-se que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_I t_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n.$$

Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_I t_m.$$

□

Teorema 4.3 *Suponhamos que $f, g \in U(I)$. Então*

a) $(f + g) \in U(I)$ e

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g.$$

b) $c \cdot f \in U(I)$ para toda constante $c \geq 0$ e

$$\int_I c \cdot f = c \cdot \int_I f.$$

c) $\int_I f \leq \int_I g$ se $f(x) \leq g(x)$ q.t.p. em I .

Demonstração: a) Por hipótese, $f, g \in U(I)$, então existem sequências geradoras $\{s_n\}$ e $\{t_m\}$ não decrescentes pertencendo a $S(I)$ tais que

$$s_n \nearrow f \quad \text{e} \quad t_m \nearrow g \quad \text{q.t.p. em } I.$$

Assim,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \quad \text{e} \quad g(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} t_m(x), \quad \text{q.t.p. em } I.$$

Além disso, existem os limites $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n = \int_I f$ e $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_I t_m = \int_I g$. Defina $v_m = s_m + t_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. É claro que cada $v_m \in S(I)$. Vejamos que a sequência $\{v_m\}$ é não decrescente:

$$v_m = s_m + t_m \leq s_{m+1} + t_{m+1} = v_{m+1}.$$

Além disso,

$$f(x) + g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) + t_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x),$$

ou seja,

$$v_n \nearrow f + g.$$

Como $\int_I (s_n + t_n) = \int_I s_n + \int_I t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I (s_n + t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_I s_n + \int_I t_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I t_n = \int_I f + \int_I g.$$

Segue que existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I v_n$, e daí concluímos que a sequência $\{v_n\}$ gera $(f + g)$, logo $f + g \in U(I)$ e

$$\int_I (f + g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I v_n = \int_I f + \int_I g.$$

b) Por hipótese, $f \in U(I)$, então existe $\{s_n\}$ não decrescente pertencendo a $S(I)$ tal que

$$s_n \nearrow f \quad \text{q.t.p. em } I.$$

Dessa forma,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \text{ q.t.p. em } I.$$

Além disso, existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n = \int_I f$. Defina $u_n = c \cdot s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. É claro que cada $u_n \in S(I)$. Vejamos que a sequência $\{u_n\}$ é não decrescente: como $c \geq 0$,

$$u_n = c \cdot s_n \leq c \cdot s_{n+1} = u_{n+1}.$$

Mais ainda,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x),$$

ou seja,

$$u_n \nearrow c \cdot f.$$

Como $\int_I (c \cdot s_n) = c \cdot \int_I s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I (c \cdot s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(c \cdot \int_I s_n \right) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n = c \cdot \int_I f.$$

Segue que existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I u_n$, e portanto a sequência $\{u_n\}$ gera $(c \cdot f)$, donde concluímos que $c \cdot f \in U(I)$ e

$$\int_I (c \cdot f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I u_n = c \cdot \int_I f.$$

c) Como $f, g \in U(I)$, existem sequências não decrescentes de funções escada $\{s_m\}$ e $\{t_n\}$ tais que

$$s_m \nearrow f \text{ e } t_n \nearrow g, \text{ q.t.p. de } I,$$

e existem os limites

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_I s_m = \int_I f \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I t_n = \int_I g.$$

Para cada m , temos

$$s_m(x) \leq f(x) \leq g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(x), \text{ q.t.p. em } I.$$

Aplicando o Teorema 3.7,

$$\int_I s_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I t_n = \int_I g.$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$, obtemos

$$\int_I f = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_I s_m \leq \int_I g.$$

□

Teorema 4.4 Se $f, g \in U(I)$ e $f(x) = g(x)$ q.t.p. em I , então

$$\int_I f = \int_I g.$$

Demonstração: Por hipótese temos $f(x) \leq g(x)$ e $g(x) \leq f(x)$ q.t.p. em I . Então, pelo Teorema 4.3(c),

$$\int_I f \leq \int_I g \text{ e } \int_I g \leq \int_I f,$$

donde segue o resultado.

□

Definição 4.5 Sejam f e g funções reais definidas em I . Definimos $máx(f, g)$ e $mín(f, g)$ como as funções cujos valores em cada $x \in I$ são, respectivamente, $máx\{f(x), g(x)\}$ e $mín\{f(x), g(x)\}$.

Lema 4.6 Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ seqüências numéricas não decrescentes tais que $a_n \nearrow a$ e $b_n \nearrow b$. Então,

$$máx(a_n, b_n) \rightarrow máx(a, b) \quad \text{e} \quad mín(a_n, b_n) \rightarrow mín(a, b).$$

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $a \geq b$. Então $máx(a, b) = a$ e $mín(a, b) = b$. Como $a_n \rightarrow a$ e $a \geq b$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq b$ para todo $n \geq n_0$. Daí,

$$\begin{aligned} a_n \geq b \geq b_n, \forall n \geq n_0 &\Rightarrow máx(a_n, b_n) = a_n, \forall n \geq n_0 \\ &\Rightarrow máx(a_n, b_n) = a_n \rightarrow a = máx(a, b). \end{aligned}$$

E também,

$$mín(a_n, b_n) = b_n \rightarrow b = mín(a, b).$$

□

Teorema 4.7 Sejam f e g funções reais definidas em I . Então

- (a) $máx(f, g) + mín(f, g) = f + g$.
- (b) $máx(f + h, g + h) = máx(f, g) + h$ e $mín(f + h, g + h) = mín(f, g) + h$.
- (c) Se $f_n \nearrow f$ q.t.p. em I e se $g_n \nearrow g$ q.t.p. em I , então

$$máx(f_n, g_n) \nearrow máx(f, g) \quad \text{q.t.p. em } I$$

e

$$mín(f_n, g_n) \nearrow mín(f, g) \quad \text{q.t.p. em } I.$$

Demonstração: (a) Seja $x \in I$. Suponha, sem perda de generalidade, que $f(x) \geq g(x)$. Então

$$máx\{f(x), g(x)\} + mín\{f(x), g(x)\} = f(x) + g(x),$$

donde segue o resultado.

(b) Seja $x \in I$. Suponha, sem perda de generalidade, $f(x) \geq g(x)$. Daí, $f(x) + h(x) \geq g(x) + h(x)$,

$$máx\{f(x) + h(x), g(x) + h(x)\} = f(x) + h(x) = máx\{f(x), g(x)\} + h(x)$$

e

$$mín\{f(x) + h(x), g(x) + h(x)\} = g(x) + h(x) = mín\{f(x), g(x)\} + h(x),$$

donde segue o resultado.

(c) Por hipótese, $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ são seqüências não decrescentes. Logo, $f_n \leq f_{n+1}$ e $g_n \leq g_{n+1}$. Segue que

$$máx(f_n, g_n) \leq máx(f_{n+1}, g_{n+1})$$

e

$$mín(f_n, g_n) \leq mín(f_{n+1}, g_{n+1}).$$

Além disso, existem $I_1, I_2 \subseteq I$ de medida nula tais que

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad \forall x \notin I_1 \quad \text{e} \quad g_n(x) \rightarrow g(x), \quad \forall x \notin I_2.$$

Assim $I_1 \cup I_2$ tem medida nula e, se $x \notin (I_1 \cup I_2)$, então $x \notin I_1$ e $x \notin I_2$. Daí,

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{e} \quad g_n(x) \rightarrow g(x), \quad \forall x \notin (I_1 \cup I_2).$$

Pelo Lema 4.6 segue que

$$\max(f_n, g_n) \rightarrow \max(f, g) \quad \text{q.t.p. em } I$$

e

$$\min(f_n, g_n) \rightarrow \min(f, g) \quad \text{q.t.p. em } I.$$

□

Teorema 4.8 *Se $f, g \in U(I)$, então*

$$\max(f, g) \in U(I) \quad \text{e} \quad \min(f, g) \in U(I).$$

Demonstração: Sejam $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ seqüências de funções escada que geram, respectivamente, f e g . Defina $u_n = \max(s_n, t_n)$ e $v_n = \min(s_n, t_n)$ para cada n . Vejamos que, para cada n , u_n e v_n são funções escada. De fato, sejam

$$\pi_1 = \{z_0 < z_1 < \cdots < z_k\} \quad \text{e} \quad \pi_2 = \{y_0 < y_1 < \cdots < y_l\}$$

partições de I tais que s_n e t_n são constantes para $x \in (z_{p-1}, z_p)$ e $x \in (y_{q-1}, y_q)$, respectivamente. Considere o refinamento

$$\pi := \pi_1 \cup \pi_2 = \{w_0 < w_1 < \cdots < w_s\}.$$

Segue que s_n e t_n são constantes em cada (w_{r-1}, w_r) , e portanto u_n e v_n são constantes em cada (w_{r-1}, w_r) . Além disso, percebe-se que $u_n \nearrow \max(f, g)$ e $v_n \nearrow \min(f, g)$ q.t.p. em I . Como $v_n \nearrow \min(f, g)$ q.t.p. em I e $v_n \leq v_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ segue que

$$\int_I v_n \leq \int_I v_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, a seqüência $\{\int_I v_n\}$ é monótona não decrescente. Logo, se $\{\int_I v_n\}$ for limitada superiormente, então será convergente. Neste ponto, para provar que $\min(f, g) \in U(I)$, é suficiente provar que a seqüência $\{\int_I v_n\}$ é limitada superiormente. Mas $v_n = \min(s_n, t_n) \leq f$ q.t.p. em I , logo $\int_I v_n \leq \int_I f$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por conseguinte, a seqüência $\{\int_I v_n\}$ converge.

Mas a seqüência $\{\int_I u_n\}$ também converge, pois, pelo Teorema 4.7(a), $u_n = s_n + t_n - v_n$, e então

$$\int_I u_n = \int_I s_n + \int_I t_n - \int_I v_n \longrightarrow \int_I f + \int_I g - \int_I \min(f, g).$$

□

O teorema que segue fornece propriedades da integral com respeito ao intervalo de integração.

Teorema 4.9 *Suponhamos que o intervalo I seja a união finita de dois subintervalos, $I = I_1 \cup I_2$, que não possuem pontos interiores comuns.*

(a) *Se $f \in U(I)$ e $f \geq 0$ q.t.p. em I , então $f \in U(I_1)$, $f \in U(I_2)$ e*

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

(b) *Suponhamos que $f_1 \in U(I_1)$ e $f_2 \in U(I_2)$ e seja f a função definida em I como segue:*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in I_1, \\ f_2(x) & \text{se } x \in I \setminus I_1. \end{cases}$$

Então $f \in U(I)$ e

$$\int_I f = \int_{I_1} f_1 + \int_{I_2} f_2.$$

Demonstração: (a) Seja $\{s_n\}$ uma sequência não decrescente de funções escada que geram f em I . Definindo $s_n^+(x) = \max\{s_n(x), 0\}$ para cada x de I , como $f \geq 0$, então $\{s_n^+\}$ é uma sequência não decrescente de funções escada não negativas que geram f em I . Além disso, em cada subintervalo $J \subset I$ temos

$$\int_J s_n^+ \leq \int_I s_n^+ \leq \int_I f,$$

o que nos diz que $\{s_n^+\}$ gera f em J . E mais,

$$\int_I s_n^+ = \int_{I_1} s_n^+ + \int_{I_2} s_n^+.$$

Daí, fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

(b) Sejam $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ sequências não decrescentes de funções escada que geram f_1 em I_1 e f_2 em I_2 , respectivamente. Defina

$$w_n(x) = \begin{cases} s_n(x) & \text{se } x \in I_1, \\ t_n(x) & \text{se } x \in I \setminus I_1. \end{cases}$$

Seja $x \in I$. Então, $x \in I_1$ ou $x \in I_2$. Se $x \in I_1$, então

$$w_n(x) = s_n(x) \leq s_{n+1}(x) = w_{n+1}(x).$$

E se $x \in I_2$, então

$$w_n(x) = t_n(x) \leq t_{n+1}(x) = w_{n+1}(x).$$

Em ambos os casos, $w_n(x) \leq w_{n+1}(x)$. Portanto, $\{w_n\}$ é não decrescente. Como $s_n \rightarrow f_1$ q.t.p. em I_1 , existe $N_1 \subseteq I_1$ tal que N_1 tem medida nula e

$$s_n(x) \rightarrow f_1(x), \quad \forall x \in (I_1 \setminus N_1).$$

Como $t_n \rightarrow f_2$ q.t.p. em I_2 , existe $N_2 \subseteq I_2$ tal que N_2 tem medida nula e

$$t_n(x) \rightarrow f_2(x), \quad \forall x \in (I_2 \setminus N_2).$$

Seja $N = N_1 \cup N_2$. Então N tem medida nula. Se $x \in (I \setminus N)$, então $x \in I_1$ e $x \notin N_1$, ou $x \in I_2$ e $x \notin N_2$. Se o primeiro caso ocorrer, então

$$w_n(x) = s_n(x) \rightarrow f_1(x) = f(x).$$

Se o segundo ocorrer, então

$$w_n(x) = t_n(x) \rightarrow f_2(x) = f(x).$$

Em ambos os casos $w_n(x) \rightarrow f(x)$. Daí, $w_n \rightarrow f$ q.t.p. em I . Portanto, $w_n \nearrow f$ q.t.p. em I . Defina $\overline{s}_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\overline{s}_n(x) = \begin{cases} s_n(x) & \text{se } x \in I_1, \\ 0 & \text{se } x \notin I_1, \end{cases}$$

e $\overline{t}_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\overline{t}_n(x) = \begin{cases} t_n(x) & \text{se } x \in I_1, \\ 0 & \text{se } x \notin I_1. \end{cases}$$

É claro que $\overline{s}_n + \overline{t}_n = w_n$, e daí

$$\begin{aligned} \int_{I_1} f_1 + \int_{I_2} f_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_1} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_2} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{I_1} s_n + \int_{I_2} t_n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_I \overline{s}_n + \int_I \overline{t}_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \overline{s}_n + \overline{t}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f. \end{aligned}$$

E portanto, como $\{w_n\}$ gera f e existe o limite $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w_n = \int_{I_1} f_1 + \int_{I_2} f_2$, f é uma função superior. $\square$

Terminamos este capítulo provando que a classe das funções superiores inclui todas as funções Riemann-integráveis.

Teorema 4.10 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Riemann-integrável. Então $f \in U([a, b])$ e a integral de f como função de $U([a, b])$ é igual à integral de Riemann $\int_a^b f(x)dx$.*

Demonstração: Como $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, pelo Teorema 2.17, sabemos que f é contínua q.t.p em $[a, b]$. É claro que $\pi_1 := \{a, \frac{a+b}{2}, b\}$ uma partição de $[a, b]$ e $\|\pi_1\| = \frac{b-a}{2}$. Para cada natural $n \geq 2$, defina

$$\pi_n = \pi_{n-1} \cup \{\text{pontos médios dos subintervalos de } \pi_{n-1}\}.$$

Então $\{\pi_n\}$ é uma sequência de partições de $[a, b]$ tal que cada π_{n+1} refina π_n e $\|\pi_n\| = \frac{b-a}{2^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Chame $\pi_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2^n} = b\}$ e defina

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad \text{para } 1 \leq k \leq 2^n.$$

Defina uma função escada s_n em $[a, b]$ como segue:

$$s_n(x) = m_k \text{ se } x_{k-1} < x < x_k, \quad s_n(a) = m_1.$$

Então $s_n(x) \leq f(x)$ para todo x de $[a, b]$. Além disso, $\{s_n\}$ é não decrescente pois cada π_{n+1} refina π_n . Provemos agora que $s_n(x) \rightarrow f(x)$ em cada x em que f é contínua. Como o conjunto de descontinuidades de f em $[a, b]$ tem medida nula, seguirá que $s_n \rightarrow f$ q.t.p. em $[a, b]$. Supondo f contínua em x , para cada $\epsilon > 0$ existe um δ , que depende de x e ϵ , tal que

$$f(x) - \epsilon < f(y) < f(x) + \epsilon \quad (4.2)$$

sempre que $x - \delta < y < x + \delta$. Seja $m(\delta) = \inf\{f(y) : y \in (x - \delta, x + \delta)\}$. Então $f(x) - \epsilon \leq m(\delta)$ por (4.2). Como $\frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$, existe uma partição π_N que possui um subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ que contém x e está contido no intervalo $(x - \delta, x + \delta)$. Segue que

$$s_N(x) = m_k \leq f(x) \leq m(\delta) + \epsilon \leq m_k + \epsilon = s_N(x) + \epsilon.$$

Mas $s_n(x) \leq f(x)$ para todo n . E, como $\{s_n\}$ é não decrescente, então $s_N(x) \leq s_n(x)$ para todo $n \geq N$. Logo,

$$s_n(x) \leq f(x) \leq s_n(x) + \epsilon \quad \text{se } n \geq N,$$

o que prova que $s_n(x) \rightarrow f(x)$ quando $n \rightarrow \infty$. Está provado então que $s_n \rightarrow f$ q.t.p. em $[a, b]$.

A sequência de integrais $\left\{ \int_a^b s_n \right\}$ converge, pois é uma sequência não decrescente e limitada superiormente por $M \cdot (b - a)$, onde $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Logo, $f \in U([a, b])$. Mais ainda,

$$\int_a^b s_n = \sum_{k=1}^{2^n} m_k(x_k - x_{k-1}) = s(f, \pi_n),$$

onde $s(f, \pi_n)$ é a soma inferior de f em relação a π_n . Dado que o limite de uma sequência limitada e não decrescente é igual ao seu supremo, temos

$$\int_{[a,b]} f = \lim_n \int_{[a,b]} s_n = \sup_n \int_{[a,b]} s_n = \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f(x) dx,$$

sendo que a última igualdade segue do fato de f ser Riemann-integrável. □

Capítulo 5

Funções Lebesgue-integráveis

Neste capítulo definiremos a integral de Lebesgue na reta em toda sua generalidade e provaremos suas principais propriedades.

Definição 5.1 Dado um intervalo I , denotaremos por $L(I)$ o conjunto de todas as funções f da forma $f = u - v$, onde $u, v \in U(I)$. Cada função f de $L(I)$ se chamará *função Lebesgue-integrável* em I e sua integral é definida por

$$\int_I f = \int_I u - \int_I v. \quad (5.1)$$

Toda função $f \in L(I)$ pode ser escrita como a diferença de funções superiores, mas não necessariamente de forma única. O próximo teorema prova que a integral de f não depende da escolha das funções superiores u e v , o que garante a boa definição da integral.

Teorema 5.2 *Sejam $u, v, u_1, v_1 \in U(I)$ tais que $u - v = u_1 - v_1$. Então*

$$\int_I u - \int_I v = \int_I u_1 - \int_I v_1. \quad (5.2)$$

Demonstração: As funções $u + v_1$ e $u_1 + v$ pertencem à classe das funções superiores e $u + v_1 = u_1 + v$. Logo, pelo Teorema 4.3(a), segue que

$$\int_I u + \int_I v_1 = \int_I u + v_1 = \int_I u_1 + v = \int_I u_1 + \int_I v.$$

Equivalentemente,

$$\int_I u - \int_I v = \int_I u_1 - \int_I v_1.$$

□

É claro que toda função superior é Lebesgue-integrável (basta tomar $v = 0$), e sua integral coincide com a integral de funções superiores com que vínhamos trabalhando. Em particular, temos:

Corolário 5.3 *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então f é Lebesgue-integrável e a integral de f como função de $L([a, b])$ é igual a integral de Riemann $\int_a^b f(x)dx$.*

Demonstração: Como f é Riemann-integrável, pelo Teorema 4.10, $f \in U([a, b])$ e a integral de f como função de $U([a, b])$ é igual a integral de Riemann $\int_a^b f(x)dx$. Portanto, f é Lebesgue-integrável e a integral de f como função de $L([a, b])$ é igual a integral de Riemann $\int_a^b f(x)dx$. $\square$

Veremos nos próximos resultados as principais propriedades da integral de Lebesgue.

Teorema 5.4 *Sejam $f, g \in L(I)$. Então:*

a) $(af + bg) \in L(I)$ para cada par de números reais a e b , e

$$\int_I (af + bg) = a \cdot \int_I f + b \cdot \int_I g.$$

b) $\int_I f \geq 0$ se $f(x) \geq 0$ q.t.p. em I .

c) $\int_I f \geq \int_I g$ se $f(x) \geq g(x)$ q.t.p. em I .

d) $\int_I f = \int_I g$ se $f(x) = g(x)$ q.t.p. em I .

Demonstração: a) Sejam $f = u_1 - v_1$ e $g = u_2 - v_2$ com $u_1, u_2, v_1, v_2 \in U(I)$. Daí

$$af + bg = a \cdot (u_1 - v_1) + b \cdot (u_2 - v_2) = au_1 - av_1 + bu_2 - bv_2 = (au_1 + bu_2) - (av_1 + bv_2),$$

mostrando que $af + bg \in L(I)$.

Segue que,

$$\begin{aligned} \int_I (af + bg) &= \int_I (au_1 + bu_2) - (av_1 + bv_2) = \int_I (au_1 + bu_2) - \int_I (av_1 + bv_2) \\ &= a \cdot \int_I u_1 + b \cdot \int_I u_2 - a \cdot \int_I v_1 - b \cdot \int_I v_2 = a \cdot \left(\int_I u_1 - \int_I v_1 \right) + b \cdot \left(\int_I u_2 - \int_I v_2 \right) \\ &= a \cdot \int_I (u_1 - v_1) + b \cdot \int_I (u_2 - v_2) = a \cdot \int_I f + b \cdot \int_I g. \end{aligned}$$

b) Suponha $f(x) \geq 0$ q.t.p. em I e tome $f = u - v$ com $u, v \in U(I)$. Daí, $u(x) \geq v(x)$ q.t.p. em I , e pelo Teorema 4.3 (c) temos $\int_I u \geq \int_I v$ e, então

$$\int_I f = \int_I u - \int_I v \geq 0.$$

c) Se $f(x) \geq g(x)$ q.t.p. em I , então $f(x) - g(x) \geq 0$ q.t.p. em I . Pelo item b),

$$\int_I f - g \geq 0 \stackrel{b)}{\implies} \int_I f - \int_I g \geq 0 \implies \int_I f \geq \int_I g.$$

d) Supondo $f(x) = g(x)$ q.t.p. em I , temos $f(x) \geq g(x)$ e $g(x) \geq f(x)$ q.t.p. em I . Do item c) Segue que

$$\int_I f \geq \int_I g \quad \text{e} \quad \int_I g \geq \int_I f,$$

donde segue o resultado. $\square$

Corolário 5.5 Se uma função f é Lebesgue-integrável, então $-f$ é Lebesgue-integrável e

$$\int_I -f = - \int_I f.$$

Demonstração: Basta tomar $a = -1$ e $b = 0$ no item a) do teorema acima.

Definição 5.6 Se f é uma função real, sua parte positiva, denotada por f^+ , e sua parte negativa, denotada por f^- , são definidas da seguinte forma:

$$f^+ = \max(f, 0) \quad \text{e} \quad f^- = \max(-f, 0).$$

Note que f^+ e f^- são funções não negativas e que

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Teorema 5.7 Se f e g são funções de $L(I)$, então f^+ , f^- , $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ também pertencem a $L(I)$. Além disso,

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

Demonstração: Seja $f = u - v$, onde $u, v \in U(I)$. Vejamos que

$$f^+ = \max(u - v, 0) = \max(u, v) - v.$$

De fato, se $u(x) - v(x) > 0$ (ou seja, $u(x) > v(x)$), então

$$\max(u(x) - v(x), 0) = u(x) - v(x) = \max(u(x), v(x)) - v(x).$$

Se $u(x) - v(x) \leq 0$ (ou seja, $u(x) \leq v(x)$), então

$$\max(u(x) - v(x), 0) = 0 = v(x) - v(x) = \max(u(x), v(x)) - v(x).$$

Pelo Teorema 4.8, $\max(u, v) \in U(I)$, e por hipótese $v \in U(I)$. Logo $f^+ \in L(I)$. Decorre que $f^- \in U(I)$, pois $f^- = f^+ - f$.

Dado que $|f| = f^+ + f^-$, segue que $|f| \in L(I)$. Como $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in I$, então

$$\int_I -|f| \leq \int_I f \leq \int_I |f| \implies - \int_I |f| \leq \int_I f \leq \int_I |f| \implies \left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

Suponha agora, sem perda de generalidade, que $f(x) \leq g(x)$. Daí,

$$\max(f(x), g(x)) = f(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + f(x) + g(x) - g(x)) = \frac{1}{2}((f + g)(x) - |f - g|(x))$$

e

$$\min(f(x), g(x)) = g(x) = \frac{1}{2} \cdot (g(x) + g(x) + f(x) - f(x)) = \frac{1}{2}((f + g)(x) + |f - g|(x)).$$

Isso mostra que $\max(f, g) = \frac{1}{2}((f + g) - |f - g|)$ e $\min(f, g) = \frac{1}{2}((f + g) + |f - g|)$, donde segue que $\max(f, g), \min(f, g) \in L(I)$. $\square$

Notação: Sejam c um número real e I um intervalo. Usaremos a seguinte notação:

$$I + c = \{x + c : x \in I\}, \quad c \cdot I = \{c \cdot x : x \in I\}.$$

Teorema 5.8 *Sejam $f \in L(I)$ e $c \in \mathbb{R}$. Então:*

a) *Invariância por translações: Se $g(x) = f(x - c)$ para todo $x \in I + c$, então $g \in L(I + c)$ e*

$$\int_{I+c} g = \int_I f.$$

b) *Comportamento da integral sob uma dilatação ou contração: Se $g(x) = f(\frac{x}{c})$ para $x \in c \cdot I$ onde $c > 0$, então $g \in L(c \cdot I)$ e*

$$\int_{c \cdot I} g = c \cdot \int_I f$$

c) *Invariância por reflexão: Se $g(x) = f(-x)$ para $x \in -I$, então $g \in L(I)$ e*

$$\int_{-I} g = \int_I f$$

Demonstração: Omitimos a demonstração deste teorema. Dizemos apenas que os três itens são provados da seguinte forma: primeiro verifica-se a propriedade desejada para funções escada, em seguida para funções superiores e, finalmente, para funções Lebesgue-integráveis. $\square$

Se $a < b$ são extremos de I , podemos reescrever a fórmula de (a) da seguinte maneira:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x - c) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema 5.9 *Seja I um intervalo igual à união de dois subintervalos I_1 e I_2 onde I_1 e I_2 não possuem pontos interiores comuns.*

a) *Se $f \in L(I)$, então $f \in L(I_1)$, $f \in L(I_2)$ e*

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

b) *Se $f_1 \in L(I_1)$ e $f_2 \in L(I_2)$ e f é definida em I por*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{se } x \in I_1 \\ f_2(x), & \text{se } x \in I \setminus I_1, \end{cases}$$

então $f \in L(I)$ e $\int_I f = \int_{I_1} f_1 + \int_{I_2} f_2$.

Demonstração: a) Como $f \in L(I)$, podemos escrever $f = u - v$ com $u, v \in U(I)$. Segue que $u = u^+ - u^-$ e $v = v^+ - v^-$, e daí

$$f = u^+ - u^- - v^+ + v^- = (u^+ + v^-) - (u^- + v^+).$$

As funções $(u^+ + v^-)$ e $(u^- + v^+)$ são não negativas e, pelo Teorema 5.7, são Lebesgue-integráveis. Em particular, $(u^+ + v^-), (u^- + v^+) \in U(I)$. Pelos Teoremas 4.9 e 5.2 segue que

$$\begin{aligned} \int_I f &= \int_I (u^+ + v^-) - (u^- + v^+) \stackrel{5.2}{=} \int_I (u^+ + v^-) - \int_I (u^- + v^+) \\ &\stackrel{4.9}{=} \int_{I_1} u^+ + v^- + \int_{I_2} u^+ + v^- - \left(\int_{I_1} u^- + v^+ + \int_{I_2} u^- + v^+ \right) \\ &= \left(\int_{I_1} u^+ + v^- - \int_{I_1} u^- + v^+ \right) + \left(\int_{I_2} u^+ + v^- - \int_{I_2} u^- + v^+ \right) \\ &= \int_{I_1} (u^+ + v^-) - (u^- + v^+) + \int_{I_2} (u^+ + v^-) - (u^- + v^+) = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f. \end{aligned}$$

b) Sejam $u_1, v_1 \in U(I_1)$ e $u_2, v_2 \in U(I_2)$ tais que $f_1 = u_1 - v_1$ e $f_2 = u_2 - v_2$. Pelo Teorema 4.9(b), as funções

$$g_1 : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_1(x) = \begin{cases} u_1(x), & \text{se } x \in I_1 \\ u_2(x), & \text{se } x \in I \setminus I_1, \end{cases}$$

e

$$g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_2(x) = \begin{cases} v_1(x), & \text{se } x \in I_1 \\ v_2(x), & \text{se } x \in I \setminus I_1, \end{cases}$$

são funções superiores e

$$\int_I g_1 = \int_{I_1} u_1 + \int_{I_2} u_2, \quad \int_I g_2 = \int_{I_1} v_1 + \int_{I_2} v_2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} f_1(x), & \text{se } x \in I_1 \\ f_2(x), & \text{se } x \in I \setminus I_1 \end{cases} = \begin{cases} u_1(x) - v_1(x), & \text{se } x \in I_1 \\ u_2(x) - v_2(x), & \text{se } x \in I \setminus I_1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} u_1(x), & \text{se } x \in I_1 \\ u_2(x), & \text{se } x \in I \setminus I_1. \end{cases} - \begin{cases} v_1(x), & \text{se } x \in I_1 \\ v_2(x), & \text{se } x \in I \setminus I_1 \end{cases} \\ &= g_1(x) - g_2(x). \end{aligned}$$

Isso prova que $f = g_1 - g_2$, e daí segue que $f \in L(I)$ e

$$\int_I f = \int_I g_1 - \int_I g_2 = \int_{I_1} u_1 + \int_{I_2} u_2 - \int_{I_1} v_1 - \int_{I_2} v_2 = \int_{I_1} f_1 + \int_{I_2} f_2.$$

□

Teorema 5.10 *Sejam $f \in L(I)$ e $\epsilon > 0$ dados. Então:*

- a) *Existem funções superiores u e v em I tais que $f = u - v$, onde v é não negativa q.t.p. em I e $\int_I v < \epsilon$.*
- b) *Existem uma função escada s e uma função g de $L(I)$ tais que $f = s + g$ e $\int_I |g| < \epsilon$.*

Demonstração: a) Como $f \in L(I)$, existem $u_1, v_1 \in U(I)$ tais que $f = u_1 - v_1$. Seja $\{t_n\}$ uma sequência geradora de v_1 . Uma vez que $\int_I t_n \rightarrow \int_I v_1$, podemos escolher $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq \int_I (v_1 - t_{n_0}) < \epsilon$. Tomando $v = v_1 - t_{n_0}$ e $u = u_1 - t_{n_0}$, temos $u, v \in U(I)$ e $u - v = u_1 - v_1 = f$. Portanto, v é não negativa q.t.p. em I e $\int_I v < \epsilon$.

b) Pelo item a) existem $u, v \in U(I)$ tais que $v \geq 0$ q.t.p. em I , $f = u - v$ e

$$0 \leq \int_I v < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $u \in U(I)$, existe $\{w_n\}$ em $S(I)$ que gera u , ou seja, $w_n \nearrow u$ $\int_I u = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I w_n$. Assim:

$$\forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \mid 0 \leq \int_I (u - w_{n_1}) < \frac{\epsilon}{2},$$

e daí,

$$f = u - v = w_{n_1} - w_{n_1} + u - v = w_{n_1} + (u - w_{n_1}) - v = w_{n_1} + g,$$

onde $g = (u - w_{n_1}) - v$. Logo $g \in L(I)$ e

$$\int_I |g| \leq \int_I |(u - w_{n_1}) - v| \leq \int_I |(u - w_{n_1})| + \int_I |v| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Terminamos este capítulo mostrando que a integral de Lebesgue é invariante por conjuntos de medida nula.

Teorema 5.11 *Seja f uma função definida em I . Se $f = 0$ q.t.p. em I , então $f \in L(I)$ e $\int_I f = 0$.*

Demonstração: Defina $s_n(x) = 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x \in I$. Então $\{s_n\}$ é uma sequência não decrescente de funções escada que converge para 0 em todo I . Logo, $\{s_n\}$ converge para f q.t.p. em I . Como $\int_I s_n = 0$, a sequência $\{\int_I s_n = 0\}$ converge. Portanto, f é uma função superior, assim $f \in L(I)$, e $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n = 0$. □

Teorema 5.12 *Suponhamos f e g definidas em I . Se $f \in L(I)$ e $f = g$ q.t.p. em I , então $g \in L(I)$ e $\int_I f = \int_I g$.*

Demonstração: Aplicando o Teorema 5.12 em $(f - g)$ tem-se que $f - g \in L(I)$ e $\int_I (f - g) = 0$. Em consequência, $g = f - (f - g) \in L(I)$ e

$$\int_I g = \int_I f - \int_I (f - g) = \int_I f - \int_I (f - g) = \int_I f - 0 = \int_I f.$$

□

Exemplo 5.13 *Seja f a função de Dirichlet definida no intervalo $[0, 1]$, isto é:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Tem-se que $f(x) = 0$ q.t.p. em $[0, 1]$. De fato, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ é enumerável (ver Corolário 2.4) e, pelo Teorema 2.9, tem medida nula. Logo, f é Lebesgue-integrável em $[0, 1]$ e sua integral de Lebesgue é igual a 0. Como no Exemplo 2.18 do Capítulo 2, esta função não é Riemann-integrável em $[0, 1]$.

Capítulo 6

Teoremas de Convergência

Neste capítulo estudaremos a estabilidade da integral de Lebesgue em relação à convergência de sequências. O objetivo é mostrar que, com poucas hipóteses, é verdade que se uma sequência $\{f_n\}$ de funções Lebesgue-integráveis converge pontualmente para uma função Lebesgue-integrável f , então

$$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$

Neste caso podemos escrever

$$\int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n.$$

Teorema 6.1 (Teorema da Convergência Monótona para funções escada) *Seja $\{s_n\}$ uma sequência de funções escadas tal que:*

- a) $\{s_n\}$ é não decrescente em um intervalo I ;
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n$ existe.

Então, $\{s_n\}$ converge q.t.p. em I para uma função limite f pertencente a $U(I)$ e

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n.$$

Demonstração: Podemos supor, sem perda de generalidade, que as funções escada $\{s_n\}$ são não negativas. Caso não fossem, consideraríamos a sequência $\{s_n - s_1\}$. Nesse caso, $s_n - s_1 \geq 0$ e, se o Teorema vale para $\{s_n - s_1\}$, então valerá também para $\{s_n\}$.

Seja D o conjunto dos $x \in I$ para os quais $\{s_n(x)\}$ diverge, e seja $\epsilon > 0$ um número real dado. Provaremos que D tem medida nula mostrando que existe uma coleção enumerável de intervalos cuja soma dos comprimentos é menor que ϵ e que contém D . Como a sequência $\{\int_I s_n\}$ converge, então existe uma constante $M > 0$ tal que $|\int_I s_n| < M$. Defina

$$t_n(x) = \left\lfloor \frac{\epsilon}{2M} \cdot s_n(x) \right\rfloor,$$

onde $\lfloor y \rfloor$ denota a parte inteira de y . Então $\{t_n\}$ é uma sequência não decrescente de funções escada tais que cada um dos valores de $\{t_n(x)\}$ é um inteiro não negativo. Se $\{s_n(x)\}$ converge,

então $\{s_n(x)\}$ é limitada. Logo $\{t_n(x)\}$ é limitada e, como é monótona não decrescente, converge. Como cada $t_n(x)$ é um inteiro, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_{n+1}(x) = t_n(x)$ para todo $n \geq n_0$. Se $\{s_n(x)\}$ diverge, então $\{s_n(x)\}$ é ilimitada, pois $\{s_n(x)\}$ é não decrescente. Daí,

$$s_n(x) \rightarrow \infty \implies \frac{\epsilon}{2M} \cdot s_n(x) \rightarrow \infty \implies t_n(x) = \left\lfloor \frac{\epsilon}{2M} \cdot s_n(x) \right\rfloor \rightarrow \infty,$$

mostrando que $\{t_n(x)\}$ diverge neste caso. Daí, $t_{n+1}(x) - t_n(x) \geq 1$ para infinitos valores de n . Defina

$$D_n = \{x : x \in I \text{ e } t_{n+1}(x) - t_n(x) \geq 1\}.$$

Então D_n é uma união de um número finito de intervalos cuja soma dos comprimentos denotaremos por $|D_n|$. Note que $D \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Se mostrarmos que $\sum_{n=1}^{\infty} |D_n| < \epsilon$, estará provado que D tem medida nula. Para isso integramos a função escada não negativa $t_{n+1} - t_n$ sobre I e obteremos as desigualdades

$$\int_I (t_{n+1} - t_n) \geq \int_{D_n} (t_{n+1} - t_n) \geq \int_{D_n} 1 = |D_n|.$$

Logo, para cada $m \geq 1$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m |D_n| &\leq \sum_{n=1}^m \int_I (t_{n+1} - t_n) = \sum_{n=1}^m \left(\int_I t_{n+1} - \int_I t_n \right) \\ &= \int_I t_2 - \int_I t_1 + \int_I t_3 - \int_I t_2 + \cdots + \int_I t_m - \int_I t_{m-1} + \int_I t_{m+1} - \int_I t_m \\ &= \int_I t_{m+1} - \int_I t_1 \leq \int_I t_{m+1} \leq \frac{\epsilon}{2M} \cdot \int_I s_{m+1} < \frac{\epsilon}{2M} \cdot M = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Segue que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |D_n| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m |D_n| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

provando que D tem medida nula. Isso prova que $\{s_n\}$ converge q.t.p. em I . Defina

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x), & \text{se } x \in I \setminus D \\ 0, & \text{se } x \in D. \end{cases}$$

Então f está definida q.t.p. em I e $s_n \rightarrow f$ q.t.p. em I . Segue que $f \in U(I)$ e

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n.$$

□

Teorema 6.2 (Teorema da Convergência Monótona para funções superiores) *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções superiores tal que*

- a) $\{f_n\}$ é não decrescente q.t.p. no intervalo I ;
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$ existe.

Então $\{f_n\}$ converge q.t.p. em I para uma função limite f pertencente a $U(I)$ e

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n.$$

Demonstração: Para cada k existe uma sequência não decrescente de funções escada $\{s_{n,k}\}$ que gera f_k . Definimos em I uma nova função escada t_n em I da seguinte forma:

$$t_n(x) = \text{máx}\{s_{n,1}(x), s_{n,2}(x), \dots, s_{n,n}(x)\}.$$

Vejamos que $\{t_n\}$ é não decrescente em I :

$$\begin{aligned} t_{n+1}(x) &= \text{máx}\{s_{n+1,1}(x), s_{n+1,2}(x), \dots, s_{n+1,n}(x), s_{n+1,n+1}(x)\} \\ &\geq \text{máx}\{s_{n,1}(x), s_{n,2}(x), \dots, s_{n,n}(x), s_{n,n+1}(x)\} \\ &\geq \text{máx}\{s_{n,1}(x), s_{n,2}(x), \dots, s_{n,n}(x)\} = t_n(x). \end{aligned}$$

Como $s_{n,k}(x) \leq f_k(x)$ e $\{f_k\}$ cresce q.t.p. em I , temos

$$t_n(x) \leq \text{máx}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\} = f_n(x) \quad (6.1)$$

em quase todo ponto de I . Em virtude do Teorema 4.3(c) se obtém

$$\int_I t_n \leq \int_I f_n. \quad (6.2)$$

Por hipótese, $\{\int_I f_n\}$ é limitada superiormente, logo a sequência não decrescente $\{\int_I t_n\}$ também é limitada superiormente e, pelo Teorema 4.3(c),

$$t_n(x) \leq t_{n+1}(x) \quad \text{q.t.p. em } I \Rightarrow \int_I t_n \leq \int_I t_{n+1}.$$

Isto é, $\{\int_I t_n\}$ é monótona não decrescente e limitada, portanto convergente. Pelo Teorema da Convergência Monótona para funções escada, segue que $\{t_n\}$ converge q.t.p. em I para uma função limite $f \in U(I)$ e $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I t_n$. Agora provaremos que $f_n \rightarrow f$ q.t.p. em I . A definição de $t_n(x)$ implica que $s_{n,k}(x) \leq t_n(x)$ para todo $k \leq n$ e todo $x \in I$. Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$f_k(x) \leq f(x) \quad \text{q.t.p. em } I. \quad (6.3)$$

Segue que a sequência não decrescente $\{f_k(x)\}$ é limitada superiormente por $f(x)$ q.t.p. em I além de ser monótona não decrescente (hipótese (a)). Logo converge em quase todo ponto de I para uma função limite g . Fazendo $k \rightarrow \infty$ em (6.3) tem-se $g(x) \leq f(x)$ q.t.p. em I . Mas (6.1) estabelece que $t_n(x) \leq f_n(x)$ q.t.p. em I . Logo, fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos $f(x) \leq g(x)$ q.t.p. em I . Em outras palavras, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{q.t.p. em } I.$$

Finalmente, vejamos que $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (6.2), obtemos

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I t_n \stackrel{(6.2)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n. \quad (6.4)$$

Agora, integrando (6.3) e utilizando novamente o Teorema 4.3(c), obtemos $\int_I f_k \leq \int_I f$. Fazendo $k \rightarrow \infty$ obtemos $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_I f_k \leq \int_I f$. Combinando isso com (6.4), a demonstração está completa.

□

Teorema 6.3 (Teorema da Convergência Monótona para Séries de funções Lebesgue-integráveis) *Seja $\{g_n\}$ uma sequência de funções de $L(I)$ tal que:*

a) *Cada g_n é não negativa q.t.p. em I .*

b) *A série $\sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n$ converge.*

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge q.t.p. em I para uma função soma $g \in L(I)$ e

$$\int_I g = \int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n.$$

Demonstração: Por hipótese, cada $g_n \in L(I)$. Segue, pelo Teorema 5.10, que para um real $\epsilon > 0$ dado existem $u_n, v_n \in U(I)$ tais que $g_n = u_n - v_n$, onde v_n é não negativa q.t.p. em I e $\int_I v_n < \epsilon$. Escolhendo u_n e v_n correspondentes a $\epsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, temos

$$u_n = g_n + v_n \quad \text{onde} \quad \int_I v_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge e $0 \leq \int_I v_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ para todo n , pelo teste da comparação segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \int_I v_n$ converge. Defina $U_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$. Pelo Teorema 4.3(a) sabemos que a soma de funções superiores é uma função superior. Logo, as somas parciais $\{U_n\}$ formam uma sequência de funções superiores que é não decrescente q.t.p. em I , uma vez que cada $u_k \geq 0$ q.t.p. em I . Daí,

$$\int_I U_n = \int_I \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \int_I u_k = \sum_{k=1}^n \int_I (g_k + v_k) = \sum_{k=1}^n \int_I g_k + \sum_{k=1}^n \int_I v_k.$$

Como as séries $\sum_{k=1}^{\infty} \int_I g_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \int_I v_k$ convergem, então a sequência $\{\int_I U_n\}$ converge. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada para funções superiores, a sequência $\{U_n\}$ converge q.t.p. em I para uma função limite $U \in U(I)$ e

$$\int_I U = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \sum_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_I u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I u_k.$$

Analogamente, mostra-se que a sequência das somas parciais $\{V_n\}$ dadas por $V_n(x) = \sum_{k=1}^n v_k(x)$ converge q.t.p. em I para uma função limite V de $U(I)$ e

$$\int_I V = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I v_k.$$

Segue que $(U - V) \in L(I)$ e a sequência $\left\{ \sum_{k=1}^n g_k \right\} = \{U_n - V_n\}$ converge q.t.p. em I para $U - V$. Assim, $g := U - V \in L(I)$ e

$$\begin{aligned} \int_I g &= \int_I U - \int_I V = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I u_k - \sum_{k=1}^{\infty} \int_I v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_I u_k - \int_I v_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_I u_k - v_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I g_k. \end{aligned}$$

□

Teorema 6.4 (Teorema da Convergência Monótona para Sequências de funções Lebesgue-integráveis) *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções de $L(I)$ tal que:*

- a) $\{f_n\}$ é não decrescente q.t.p. em I .
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$ existe.

Então $\{f_n\}$ converge q.t.p. em I para uma função limite $f \in L(I)$, e

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n.$$

Demonstração: Defina $g_1 = f_1$ e $g_n = f_n - f_{n-1}$ para $n \geq 2$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n g_k &= g_1 + g_2 + g_3 + \cdots + g_{n-1} + g_n \\ &= f_1 + (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + \cdots + (f_{n-1} - f_{n-2}) + (f_n - f_{n-1}) = f_n. \end{aligned}$$

Como $f_n \geq f_{n-1}$, temos $g_n \geq 0$. Além disso, existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \sum_{k=1}^n g_k.$$

Aplicando o Teorema da Convergência Monótona para séries de funções Lebesgue-integráveis, segue que $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge q.t.p em I para uma função soma $f \in L(I)$, e portanto $f_n \rightarrow f$ q.t.p. em I , e se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \sum_{k=1}^n g_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_I g_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I g_k = \int_I \sum_{k=1}^{\infty} g_k = \int_I f.$$

□

Corolário 6.5 *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções de $L(I)$ tal que*

- a) $\{f_n\}$ é não crescente q.t.p. em I .
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$ existe.

Então $\{f_n\}$ converge q.t.p. em I para uma função limite $f \in L(I)$, e

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$$

Demonstração: Defina $g_n = -f_n$. Então $\{g_n\}$ é uma sequência de funções Lebesgue-integráveis, não decrescente q.t.p. em I e $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n$ existe pois,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I -f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} - \int_I f_n = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n.$$

Pelo Teorema (6.4), $\{g_n\} = \{-f_n\}$ converge q.t.p. em I para uma função limite $g \in L(I)$ e

$$\int_I g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n.$$

Segue que $\{f_n\}$ converge q.t.p. em I para uma função limite $-g \in L(I)$ e

$$\int_I f = \int_I -g = - \int_I g = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I -f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$$

□

Vejamos uma aplicação do teorema da convergência monótona:

Teorema 6.6 *Seja $\{g_n\}$ uma sequência de funções Lebesgue-integráveis tal que a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_I |g_n|$$

é convergente. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge q.t.p. em I para uma função $g \in L(I)$ e

$$\int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n.$$

Demonstração: Sejam $g_n^+ = \max(g_n, 0)$ e $g_n^- = \max(-g_n, 0)$. Como $|g_n| = g_n^+ + g_n^-$, a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \int_I |g_n|$ implica na convergência das séries $\sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n^-$. Aplicando o Teorema da Convergência Monótona para séries de funções Lebesgue-integráveis, as séries de funções $\sum_{n=1}^{\infty} g_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} g_n^-$ convergem q.t.p. em I para funções limites $g_1, g_2 \in L(I)$, respectivamente, tais que

$$\int_I g_1 = \int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n^+ \text{ e } \int_I g_2 = \int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n^-.$$

De posse da convergência dessas duas séries, como $g_n = g_n^+ - g_n^-$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_I (g_n^+ - g_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_I g_n^+ - \int_I g_n^- \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n^- \\ &= \int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n^+ - \int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n^- = \int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} g_n^- \right) = \int_I \sum_{n=1}^{\infty} (g_n^+ - g_n^-) = \int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n. \end{aligned}$$

□

Passamos agora do teorema da convergência monótona para o teorema da convergência dominada, que é provavelmente o teorema mais usado da teoria de integração de Lebesgue.

Teorema 6.7 (Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções Lebesgue-integráveis em um intervalo I tal que:*

- a) $\{f_n\}$ converge q.t.p. em I para uma função limite f .
- b) Existe uma função não negativa $g \in L(I)$ tal que, para todo n , $|f_n(x)| < g(x)$ q.t.p. em I .

Então, a função limite $f \in L(I)$, a sequência $\{\int_I f_n\}$ converge e

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n. \quad (6.5)$$

Demonstração: A ideia da demonstração consiste em obter cotas superiores e inferiores da forma

$$g_n(x) \leq f_n(x) \leq G_n(x), \quad (6.6)$$

em que $\{g_n\}$ é não decrescente e $\{G_n\}$ é não crescente q.t.p. em I para uma função limite f . Utilizaremos o Teorema da Convergência Monótona para demonstrar que $f \in L(I)$ e que $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I G_n$, donde deduziremos (6.5). Para construir $\{g_n\}$ e $\{G_n\}$, usaremos o Teorema da Convergência Monótona para sequência de $L(I)$. Defina uma sequência $\{G_{n,1}\}$ da seguinte forma:

$$G_{n,1}(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}.$$

Pelo Teorema 5.7, cada função $G_{n,1}$ é Lebesgue-integrável. Vejamos que $\{G_{n,1}\}$ é não decrescente em I :

$$G_{n,1}(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n-1}(x), f_n(x)\} \geq \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n-1}(x)\} = G_{n-1,1}(x),$$

para todo $x \in I$. Como

$$|G_{n,1}(x)| = |\max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n-1}(x), f_n(x)\}| \leq g(x) \quad \text{q.t.p. em } I,$$

dos Teoremas 5.4 e 5.7 decorre que

$$\left| \int_I G_{n,1} \right| \stackrel{5.7}{\leq} \int_I |G_{n,1}| \stackrel{5.4}{\leq} \int_I g, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6.7)$$

Segue que a sequência $\{\int_I G_{n,1}\}$ é não decrescente, pois

$$G_{n,1} \geq G_{n-1,1} \stackrel{5.4}{\Rightarrow} \int_I G_{n,1} \geq \int_I G_{n-1,1}.$$

Mais ainda, a sequência $\{\int_I G_{n,1}\}$ está limitada superiormente por $\int_I g$. De fato,

$$|G_{n,1}| \geq G_{n,1} \Rightarrow \int_I |G_{n,1}| \geq \int_I G_{n,1} \Rightarrow \int_I g \geq \int_I |G_{n,1}| \geq \int_I G_{n,1}.$$

Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I G_{n,1}$ existe. Aplicando o Teorema da Convergência Monótona, segue que $\{G_{n,1}\}$ converge q.t.p. em I para uma função $G_1 \in L(I)$ e

$$\int_I G_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I G_{n,1} \leq \int_I g.$$

Por (6.7),

$$-\int_I g \leq \int_I G_{n,1} \leq \int_I g.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, concluímos que

$$-\int_I g \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I G_{n,1} \leq \int_I g.$$

Observe que, se $x \in I$ é tal que $G_{n,1}(x) \rightarrow G_1(x)$, então

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} G_{n,1}(x) = \sup_n G_{n,1}(x) = \sup_n \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\} \\ &= \sup_n f_n(x) = \sup_n \{f_1(x), f_2(x), \dots\}. \end{aligned}$$

Defina

$$G_{n,r}(x) = \max\{f_r(x), f_{r+1}(x), \dots, f_n(x)\}$$

para $r \in \mathbb{N}$ com $r \leq n$. Renomeando

$$f_r = g_1, \quad f_{r+1} = g_2, \quad f_{r+2} = g_3, \quad \dots, \quad f_n = f_{r+(n-r)} = g_{n-r+1}, \quad \dots$$

temos

$$G_{n,r}(x) = \max\{f_r(x), f_{r+1}(x), \dots, f_n(x)\} = \max\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_{n-r+1}(x)\}.$$

E, de forma análoga ao que foi feito para $\{G_{n,1}\}$, é verdade que $\{G_{n,r}\}$ é não decrescente e converge em q.t.p. de I para uma função limite $G_r \in L(I)$ com

$$-\int_I g \leq \int_I G_r \leq \int_I g.$$

Portanto, em todos os pontos em que $G_{n,r}(x) \rightarrow G_r(x)$, ocorre

$$G_r(x) = \sup\{f_r(x), f_{r+1}(x), \dots\}.$$

Logo

$$f_r(x) \leq G_r(x) \quad \text{q.t.p. em } I.$$

Analisaremos agora as propriedades da sequência $\{G_r(x)\}$. De

$$G_r(x) = \sup\{f_r(x), f_{r+1}(x), f_{r+2}(x), \dots, f_n(x)\} \geq \sup\{f_{r+1}(x), f_{r+2}(x), \dots\} = G_{r+1}(x),$$

segue que a sequência $\{G_r(x)\}$ é não crescente q.t.p. em I , e portanto converge q.t.p. em I . De fato, $-g(x) < f_r(x) \leq G_r(x)$ q.t.p. em I para cada $r \in \mathbb{N}$. Ou seja, é limitada inferiormente em quase todo ponto de I . Mostremos agora que $G_n(x) \rightarrow f(x)$ sempre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x). \tag{6.8}$$

Supondo que vale (6.8), para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Assim,

$$\begin{aligned} m \geq N &\Rightarrow f(x) - \epsilon \leq f_{m+j}(x) \leq f(x) + \epsilon, \quad \forall j \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \sup_j \{f(x) - \epsilon\} \leq \sup_j \{f_{m+j}(x)\} \leq \sup_j \{f(x) + \epsilon\}, \quad \forall j \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow f(x) - \epsilon \leq \sup \{f_m(x), f_{m+1}(x), f_{m+2}(x), \dots\} \leq f(x) + \epsilon. \end{aligned}$$

Provamos que

$$m \geq N \implies f(x) - \epsilon \leq G_m(x) \leq f(x) + \epsilon,$$

e daí,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_m(x) = f(x) \text{ q.t.p. em } I. \quad (6.9)$$

Por outro lado, a sequência numérica não crescente $\{\int_I G_n\}$ está limitada inferiormente por $\{-\int_I g\}$ e, portanto, converge. Por (6.9) e pelo Teorema da Convergência Monótona segue que $f \in L(I)$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I G_n = \int_I f.$$

Repetindo o mesmo argumento para a sequência

$$g_{n,r}(x) = \min\{f_r(x), f_{r+1}(x), \dots, f_n(x)\},$$

segue que $g_r(x) \leq f_r(x)$ q.t.p. em I , $\{g_r\}$ é não decrescente, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x)$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n = \int_I f.$$

Por (6.7), temos

$$\int_I g_n \leq \int_I f_n \leq \int_I G_n \text{ para todo } n,$$

e fazendo $n \rightarrow \infty$ concluímos que $\{\int_I f_n\}$ converge e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

□

Terminamos este trabalho apresentando duas aplicações do Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue.

Teorema 6.8 *Seja $\{g_n\}$ uma sequência de funções Lebesgue-integráveis tal que:*

- a) *Cada $\{g_n\}$ é não negativa q.t.p. em I .*
- b) *A série $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge q.t.p. em I para uma função g limitada superiormente por uma função de $L(I)$.*

Então $g \in L(I)$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n$ converge e

$$\int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n.$$

Demonstração: Defina $f_n(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x)$ para $x \in I$ no qual a série converge e $f_n(x) = 0$ nos outros pontos de I . Então $f_n \nearrow g$ q.t.p. em I . Por hipótese, existe $f \in L(I)$ tal que $g \leq f$, e portanto

$$f_n \leq g \leq f, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{q.t.p. em } I.$$

Segue que $\{f_n\}$ está dominada por f q.t.p. em I . Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que $g \in L(I)$, a sequência $\{\int_I f_n\}$ converge e

$$\int_I g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n.$$

Finalmente,

$$\int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \int_I g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \sum_{k=1}^n g_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \int_I g_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I g_k.$$

□

Teorema 6.9 (Teorema de Convergência Limitada de Lebesgue) *Sejam I um intervalo limitado e $\{f_n\}$ uma sequência de funções Lebesgue-integráveis limitada por uma constante $M > 0$ q.t.p. em I e convergindo para uma função limite f q.t.p. em I , isto é,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{e} \quad |f_n(x)| \leq M \quad \text{q.t.p. em } I.$$

Então $f \in L(I)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f$.

Demonstração: Considere $g(x) = M$ para todo $x \in I$. Então $\int_I g = M \cdot l(I) < +\infty$, e portanto g é Lebesgue-integrável. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que a função limite $f \in L(I)$, a sequência $\{\int_I f_n\}$ converge e

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n.$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] APOSTOL, T. M., *Análisis Matemático*, 2a. Edição, Reverté, S. A., 1988.
- [2] FIGUEIREDO, D. G., *Análise 1*, 2a. Edição, Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, São Paulo, 1996.