

MARIANA EIKO BORBA INOUE

**ESTABELECIMENTO DO IHRF NO ÂMBITO SIRGAS:
CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA E DENSIFICAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Agricultura e Informações Geoespaciais da Universidade Federal de Uberlândia, Campus Monte Carmelo, como parte das exigências para obtenção do título de “Mestre”.

Orientador:

Prof. Dr. Gabriel do Nascimento Guimarães

**MONTE CARMELO
MINAS GERAIS - BRASIL
2024**

MARIANA EIKO BORBA INOUE

**ESTABELECIMENTO DO IHRF NO ÂMBITO SIRGAS:
CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA E DENSIFICAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Agricultura e Informações Geoespaciais da Universidade Federal de Uberlândia, Campus Monte Carmelo, como parte das exigências para obtenção do título de “Mestre”.

Prof. Dr. Gabriel do Nascimento Guimarães
(Orientador)

**MONTE CARMELO
MINAS GERAIS - BRASIL
2024**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

I58 2024	Inoue, Mariana Eiko Borba, 1999- Estabelecimento do IHRF no Âmbito SIRGAS: Contextualização Histórica e Densificação [recurso eletrônico] / Mariana Eiko Borba Inoue. - 2024. Orientador: Gabriel Nascimento Guimarães. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Agricultura e Informações Geoespaciais. Modo de acesso: Internet. Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2024.170 Inclui bibliografia. 1. Agronomia. I. Guimarães, Gabriel Nascimento, 1984-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós- graduação em Agricultura e Informações Geoespaciais. III. Título. CDU: 631
-------------	---

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Agricultura e Informações
Geoespaciais
Rodovia LMG 746, Km 01, s/nº, Bloco 1AMC, Sala 1A202, Monte Carmelo-MG, CEP 38.500-000
Telefone: (34) 3810-1033 - ppgaig@iciag.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Agricultura e Informações Geoespaciais				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico				
Data:	21/02/2024	Hora de início:	14:07	Hora de encerramento:	17:40
Matrícula do Discente:	32212AIG010				
Nome do Discente:	Mariana Eiko Borba Inoue				
Título do Trabalho:	Estabelecimento do IHRF no Âmbito SIRGAS: contextualização histórica e densificação				
Área de concentração:	Informações geoespaciais e tecnologias aplicadas à produção agrícola				
Linha de pesquisa:	Aplicações e desenvolvimento de métodos em informações geoespaciais				

Reuniu-se na sala virtual <https://conferenciaweb.rnp.br/sala/gabriel-do-nascimento-guimaraes> a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Agricultura e Informações Geoespaciais, assim composta: Dr. Vinícius Francisco Rofatto (UFU), Dr. Fabio Luiz Albarici (Instituto Federal do Sul de Minas), Dr. Gabriel do Nascimento Guimarães (UFU) – orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Gabriel do Nascimento Guimarães, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovada

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Gabriel do Nascimento Guimarães, Professor(a) do Magistério Superior**, em 21/02/2024, às 17:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fabio Luiz Albarici, Usuário Externo**, em 21/02/2024, às 17:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Vinicius Francisco Rofatto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 22/02/2024, às 09:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5186087** e o código CRC **A8224596**.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha sincera gratidão primeiramente a Deus e Nossa Senhora, por me concederem força, sabedoria e determinação ao longo desta jornada acadêmica.

Quero agradecer imensamente também ao meu orientador, o professor Gabriel, por toda a paciência, compreensão, apoio e ensinamentos.

Minha gratidão se estende de forma especial aos meus pais, Dora e Kenji, e aos meus irmãos, Noboro e Eiji. Vocês foram os pilares do meu caminho e meu apoio constante, sem os sacrifícios de vocês, este trabalho não seria possível.

Agradeço também aos meus familiares, cujo apoio e amor foram fundamentais para este sucesso. Em particular, aos meus primos, Ester, Pedro, Jamille e Nayara, que mesmo de longe estiveram ao meu lado.

Aos amigos que eu fiz em Monte Carmelo, Gabriel, Kleysser, Roberta, Antônio Eduardo, Cecília Rios, Guilherme Bovi, Túlio Yasunaka, Henrique Longhi, Kevin, Heitor, Fernando, Gabrielle e Guilherme, que, de diferentes maneiras, contribuíram para a realização deste trabalho. Quero agradecer também, em especial, às minhas amigas Letícia e Laura, e aos meus amigos Matteo e Luca, suas palavras de incentivo, apoio e compreensão foram fundamentais para superar os desafios.

Gostaria de expressar minha sincera gratidão à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais – FAPEMIG, por ter proporcionado o suporte financeiro essencial para a realização deste estudo. A bolsa de estudos concedida foi de valor inestimável, permitindo-me dedicar em tempo integral à pesquisa e ao desenvolvimento desta dissertação.

Por fim, dedico um agradecimento especial a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para este trabalho. Suas influências e ensinamentos deixaram marcas profundas.

BIOGRAFIA

Mariana Eiko Borba Inoue nasceu em 24 de maio de 1999, na cidade de Pouso Alegre, Minas Gerais, Brasil. Técnica em Agrimensura pelo Instituto Federal de Ciências e Tecnologia – Campus Inconfidentes, Minas Gerais, Brasil, em 2017. Graduada em Engenharia de Agrimensura e Cartográfica pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Minas Gerais, Brasil, em março de 2022. No mesmo mês ingressou no Programa de Pós-Graduação em Agricultura e Informações Geoespaciais da Universidade Federal de Uberlândia – Campus Monte Carmelo, onde foi orientada pelo Prof. Dr. Gabriel do Nascimento Guimarães, especialista em Geodésia Física. Seus interesses de pesquisa incluem sistemas altimétricos, cálculo de geoide e quase geoide, determinação de altitudes físicas e o Sistema Internacional de Referência para as Altitudes.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	<i>Types of heights and local vertical systems in South America</i>	5
Figura 2	<i>Height difference in leveling benchmark connections. In green leveling connections carried out up to 2007. In blue, after 2008</i>	10
Figura 3	<i>Discrepancies between tide gauges gravity potential and W_0</i>	13
Figura 4	<i>WG-III timeline activities</i>	14
Figura 5	<i>Map of occurrence of keywords with a focus on height systems</i>	15
Figura 6	<i>Relationship map between countries that publish with the theme SIRGAS</i>	16
Figura 7	<i>Words Clouds Related to WG-III</i>	17
Figura 8	<i>Components of the Geopotential Number</i>	17
Figura 9	<i>IHRF stations infrastructure. (a) are positioning techniques stations and (b) are the stations with gravity and leveling measures and the international leveling connection (orange circles)</i>	18
Figura 10	<i>Comparison of the GGMs normal height related to the XGM2019 model. (a) EGM2008, (b) EIGEN-6C4, (c) GECO, and (d) SGG-UGM-1</i>	21
Figura 11	<i>Geopotential Numbers comparison at IHRF stations</i>	24
Figura 12	<i>Mapa de localização dos pontos culminantes</i>	30
Figura 13	<i>Distribuição dos pontos gravimétricos na região de cálculo do modelo geoidal</i>	32
Figura 14	<i>Representação da anomalia de gravidade pelo XGM2019 para a região</i>	33
Figura 15	<i>MDT SRTM15+</i>	34
Figura 16	<i>Distribuição das estações GNSS/Nivelamento</i>	35
Figura 17	<i>Fluxograma da determinação do modelo geoidal</i>	36
Figura 18	<i>Anomalia de gravidade no processo de remoção</i>	37
Figura 19	<i>Grade 5'x5'</i>	38
Figura 20	<i>Anomalia residual interpolada e o erro devido à interpolação</i>	39
Figura 21	<i>Modelo geoidal para área de estudo</i>	40
Figura 22	<i>Diferença entre geoide e quase geoide</i>	42
Figura 23	<i>Comparação da anomalia de altura com as estações</i>	43

	GNSS/Nivelamento	
Figura 24	Diferença entre os valores de anomalia de altura dos MGGs e as estações GNSS/Nivelamento	44
Figura 25	Metodologia de cálculo para as altitudes normais a partir de modelos quase geoidais	47
Figura 26	Diferenças altimétricas entre os valores oficiais e o QGEOID2023 (Azul), QuGe-MG (Verde) e QGEOIDE-MG2024 (Laranja).	49
Figura 27	Densificação gravimétrica ao redor dos pontos culminantes	50
Figura 28	Diferenças pontuais de altitudes normais oficiais e os modelos QGEOID2023, QuGe_MG e QGEOIDE_MG2024	52
Figura 29	Análise comparativa das diferenças altimétricas oficiais e o novo modelo, o QGEOID2023 e o QuGe-MG para as estações GNSS/Nivelamento ao redor dos pontos culminantes, em metros	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	<i>Vertical systems in South America</i>	9
Tabela 2 -	<i>Statistics involving GGMs (in centimeters)</i>	21
Tabela 3 -	<i>Statistics involving GGMs and Geoid Model (in) m^2s^{-2}</i>	24
Tabela 4 -	Localização dos pontos culminantes brasileiros	31
Tabela 5 -	Estatística do processo de remover (mGals)	37
Tabela 6 -	Estatística das anomalias de altura (m)	45
Tabela 7 -	Resumo dos modelos quase geoidais	46
Tabela 8 -	Valores de altitude normal para os pontos culminantes	47
Tabela 9 -	Valores de altitude normal (m) para o QGEOID2023, QuGe-MG e QGEOIDE_MG2024	48
Tabela 10 -	Análise comparativa das diferenças altimétricas dos valores oficiais com QGEOID2023, QuGe-MG e QGEOIDE_MG2024, em metros	49

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANP	Agência Nacional de Petróleo
ASTER	<i>Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer</i>
BNDG	Banco Nacional de Dados Gravimétricos
CHAMP	<i>Challenging Minisatellite Payload</i>
CMQ	<i>Colocação por Mínimos Quadrados</i>
DMA	<i>US Defense Mapping Agency</i>
DTU	<i>Technical University of Denmark</i>
EGM2008	<i>Earth Gravitational Model 2008</i>
EIGEN-6C4	<i>European Improved Gravity model of the Earth by New techniques</i>
GBVP	<i>Geodetic Boundary Value Problem</i>
GECO	<i>GOCE and EGM2008 COmbination</i>
GGM	<i>Global Geopotential Models</i>
GGOS	<i>Global Geodetic Observing System</i>
GGRF	<i>Global Geodetic Reference Frame</i>
GGRS	<i>Global Geodetic Reference System</i>
GNSS	<i>Global Navigation Satellite Systems</i>
GOCE	<i>Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer</i>
GOCO06S	<i>Gravity Observation Combination</i>
GPS	<i>Global Positioning System</i>
GRACE	<i>Gravity Recovery and Climate Experiment</i>
GRS-80	<i>Geodetic Reference System of 1980</i>
GT-I	<i>Working Group I: Reference System</i>
GT-II	<i>Working Group II: Geocentric Datum</i>
GT-III	<i>Grupo de Trabalho III “Datum Vertical”</i>
IAG	<i>International Association of Geodesy</i>
IAGS	<i>Inter-American Geodetic Survey</i>
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
ICGEM	<i>International Center for Global Earth Models</i>
ICRF	<i>International Celestial Reference Frame</i>
ICRS	<i>International Celestial Reference System</i>
IERS	<i>International Earth Rotation Service</i>

IGAC	<i>Instituto Geográfico Agustín Codazzi</i>
IGM-BO	<i>Instituto Geográfico Militar de Bolivia</i>
IGM-CH	<i>Instituto Geográfico Militar de Chile</i>
IGM-EC	<i>Instituto Geográfico Militar de Ecuador</i>
IGN-AR	<i>Instituto Geográfico Nacional de Argentina</i>
IGN-PE	<i>Instituto Geográfico Nacional de Perú</i>
IGSN71	<i>International Gravity Standardization Net 1971</i>
IGVSB	<i>Instituto Geográfico de Venezuela Simón Bolívar</i>
IHRF	<i>International Height Reference Frame</i>
IHRS	<i>International Height Reference System</i>
ITGRF	<i>International Terrestrial Gravity Reference Frame</i>
ITGRS	<i>International Terrestrial Gravity Reference System</i>
ITRF	<i>International Terrestrial Reference Frame</i>
ITRS	<i>International Terrestrial Reference System</i>
IUGG	<i>International Union of Geodesy and Geophysics</i>
MDT	Modelo Digital do Terreno
MGG	Modelo Global do Geopotencial
MGGs	Modelos Globais do Geopotencial
MSL	<i>Mean Sea Level</i>
NGA	<i>National Geospatial-Intelligence Agency</i>
ON	Observatório Nacional
PAIGH	<i>Pan American Institute of Geography and History</i>
PVCG	Problema de Valor de Contorno da Geodésia
SIRGAS	Sistema de Referência Geodésico para as Américas
SRTM	<i>Shuttle Radar Topography Mission</i>
SRVN16	Sistema de Referência Vertical Nacional do ano de 2016
SRVN71	Sistema de Referência Vertical Nacional do ano de 1971
USATC	<i>US Army Topographic Command</i>
XGM	<i>Experimental Gravity Field Model</i>
XGM2019	<i>Experimental Gravity Field Model 2019</i>

SUMÁRIO

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
AGRADECIMENTOS	3
BIOGRAFIA	4
1 INTRODUÇÃO	1
2 DESENVOLVIMENTO E EVOLUÇÃO DE SISTEMAS ALTIMÉTRICOS NO CONTEXTO DO SIRGAS: DOS DATA VERTICAIS LOCAIS AO REFERENCIAL ALTIMÉTRICO INTERNACIONAL	3
2.1 INTRODUCTION	3
2.2 A BRIEF REVIEW OF HEIGHT SYSTEMS IN SOUTH AMERICA	4
2.3 HEIGHT SYSTEMS IN THE SIRGAS CONTEXT	10
2.4 IHRS IN THE SCOPES OF SIRGAS	17
2.4.1 Numerical Tests	19
2.5 FINAL REMARKS AND FUTURE PERSPECTIVES	25
3 CÁLCULO DAS ALTITUDES DOS PONTOS CULMINANTES DA REGIÃO SUDESTE VINCULADAS AO IHRF A PARTIR DO PVCG	26
3.1 COLOCAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS	27
3.1.1 Função Covariância	28
3.1.2 Colocação Rápida	28
3.2 CÁLCULO DO MODELO REGIONAL DO CAMPO DE GRAVIDADE	29
3.2.1 MATERIAL	29
3.2.1.1 Contextualização da área de estudo	29
3.2.1.2 Dados gravimétricos	31
3.2.1.3 Modelo Global do Geopotencial	32
3.2.1.4 Modelo Digital do Terreno	34
3.2.1.5 GNSS/ Nivelamento	34
3.2.2 MÉTODO	35
3.2.2.1 Cálculo do modelo geoidal	35
3.3 DETERMINAÇÃO DAS ALTITUDES DOS PONTOS CULMINANTES	45
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
REFERÊNCIAS	56

INOUE, MARIANA EIKO BORBA. **Estabelecimento do IHRF no Âmbito SIRGAS: Contextualização Histórica e Densificação.** 2024, 69 p. Dissertação (Mestrado em Agricultura e Informações Geoespaciais) – Universidade Federal de Uberlândia, Campus Monte Carmelo, Minas Gerais, Brasil. Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2024.170>

RESUMO

Esta dissertação foi realizada em duas partes. A primeira parte trata da evolução e da situação atual dos sistemas altimétricos na América do Sul, a fim de contribuir com o *International Height Reference Frame* (IHRF). É apresentada uma descrição histórica desses sistemas, destacando principalmente os esforços do Grupo de Trabalho-III “Datum Vertical”. Além disso, foram feitos testes envolvendo as 17 estações estabelecidas para o IHRF na América do Sul, em relação a cinco modelos globais do geopotencial (MGGs) para obtenção de altitudes normais. Em seguida, foram comparadas as metodologias para a obtenção do número geopotencial a partir do modelo quase geoidal QGEOID2023 e de cinco MGGs. Como resultado obtido, verificou-se que para as altitudes normais o SGG-UGM-2 apresentou o menor desvio-padrão de $\pm 8,19$ cm, enquanto o EGM2008 apresentou o maior desvio-padrão de $\pm 17,02$ cm. Quanto à segunda comparação, para as estações IHRF, a metodologia a partir de modelos geoidais apresenta um melhor desempenho. A segunda parte desta dissertação trata da obtenção de altitudes normais vinculadas ao IHRF para 7 pontos culminantes localizados na região Sudeste. Nesse sentido, foi apresentada a metodologia para o cálculo de altitudes normais, assim como para o cálculo de um modelo quase geoidal (QGEOIDE_MG2024) por meio da técnica da Colocação por Mínimos Quadrados (CMQ). Em relação às altitudes normais, também foram realizadas comparações com valores obtidos dos modelos QGEOID2023 e QuGe-MG. Esses valores foram comparados com os modelos fornecidos pelo IBGE. Os modelos QuGe-MG e QGEOIDE_MG2024 apresentaram valores semelhantes em áreas com densificação gravimétrica, porém discrepantes em locais com densificação limitada. O modelo QGEOID2023 demonstrou as menores diferenças, indicando que a técnica *Downward continuation* teve um impacto distinto nos resultados.

Palavras-chave: IHRF; IHRs; SIRGAS; Altitudes Verticais; Pontos Culminantes.

INOUE, MARIANA EIKO BORBA. **Establishment of IHRS in the scope of SIRGAS: Historical Contextualization and Densification.** 2024, 69 p. Dissertation (Master's Degree in Agriculture and Geospatial Information) – Federal University of Uberlândia, Campus Monte Carmelo, Minas Gerais, Brazil. Available in: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2024.170>

ABSTRACT

This dissertation was carried out in two parts. The first part deals with the evolution and current situation of altimetric systems in South America, intending to contribute to the International Height Reference Frame (IHRF). A historical description of these systems is presented, highlighting mainly the efforts of Working Group-III “Datum Vertical”. Furthermore, tests were conducted involving the 17 stations established for the IHRF in South America, in relation to five global geopotential models (MGGs) to obtain normal altitudes. Then, the methodologies for obtaining the geopotential number were compared using the quasi-geoidal model QGEOID2023 and five MGGs. As a result, it was found that for normal altitudes the SGG-UGM-2 presented the lowest standard deviation of ± 8.19 cm, while the EGM2008 presented the highest standard deviation of ± 17.02 cm. As for the second comparison, for IHRF stations, the methodology based on geoid models presents better performance. The second part of this dissertation deals with obtaining normal altitudes linked to the IHRF for 7 high points located in the southeast region. In this sense, the methodology for calculating normal altitudes was presented, as well as for calculating a quasi-geoidal model (QGEOIDE_MG2024) using the Least Squares Collocation (CMQ) technique. Regarding normal altitudes, comparisons were also made with values obtained from the QGEOID2023 and QuGe-MG models. These values were compared with the models provided by IBGE. The QuGe-MG and QGEOIDE_MG2024 models presented similar values in areas with gravimetric densification, but discrepant in places with limited densification. The QGEOID2023 model demonstrated the smallest differences, indicating that the Downward continuation technique had a distinct impact on the results.

Keywords: IHRF; IHRS; SIRGAS; Vertical Heights; Geopotential.

1 INTRODUÇÃO

O planeta Terra é um corpo celeste não estático, no qual a atmosfera, hidrosfera, superfície terrestre e seu interior estão constantemente em um estado de fluxo e transformação. A Terra está sujeita a mudanças climáticas, ao acontecimento de terremotos, tsunamis, vulcões, derretimento de geleiras, entre outros (Plag et al., 2009). Nesse sentido, compreender e monitorar tais processos, sejam eles naturais ou causados pelo homem, é fundamental para previsão e controle de desastres. Para isso, a Geodésia contribui por meio de observações em relação à forma, rotação e distribuição de massa da Terra, chamados de três pilares da Geodésia, com uma alta resolução ao longo do espaço e do tempo, através de seus referenciais geodésicos estáveis e consistentes (Guimarães et al., 2022). Isso, aliado à modernização das técnicas e equipamentos geodésicos, faz com que seja possível detectar variações temporais pelas quais o planeta passa, que vão desde escalas grandes e seculares até deformações muito pequenas e transitórias, principalmente com o aumento da resolução espacial e temporal, alta precisão e latência decrescente (Sehna et al., 2023).

A fim de monitorar esses processos, o Sistema Global de Observação Geodésica (*Global Geodetic Observing System* - GGOS) foi estabelecido em julho de 2003, em Sapporo, Japão, como parte da Associação Internacional de Geodésia (*International Association of Geodesy* - IAG) (Plag; Pearlman, 2009). O GGOS trabalha em conjunto com as partes constituintes da IAG, em serviços técnicos, comissões e projetos, para monitorar e estudar o sistema terrestre, com um foco especial nas mudanças que afetam o globo.

Este sistema é essencial para compreender e avaliar as mudanças e processos fundamentais que ocorrem em nosso planeta. O GGOS se baseia em um sistema global de referência geodésica, o Sistema Geodésico de Referência Global (*Global Geodetic Reference System* – GGRS), que serve como a base principal para medir e interpretar de maneira consistente os principais processos de mudança global, e desempenha um papel vital em várias aplicações científicas e sociais (GGOS, 2023).

O GGRS é formado por quatro sistemas de referência. Os dois primeiros sistemas, cruciais para obter uma visão abrangente da cinemática da superfície do nosso planeta, são o *International Terrestrial Reference Frame* - ITRF e o *International Celestial Reference Frame* - ICRF, que apresentam soluções estáveis e altamente confiáveis em escala global, com uma precisão da ordem de centímetros (Sánchez et al., 2021).

Quanto ao *International Height Reference Frame* - IHRF, trata-se do sistema convencional de altitudes globais relacionado ao campo de gravidade. Este sistema ainda não é

compatível com o ITRF e o ICRF, e por isso demanda esforços da comunidade científica em estudos relacionados a ele, e, portanto, é o objeto de estudo deste trabalho. Já o quarto sistema, o *International Terrestrial Gravity Reference System* - ITGRF, ele se encontra em fase de implementação, e tem como objetivo substituir infraestruturas antigas que não estão adequadas às demandas atuais da Geodésia. O estabelecimento do IHRF e do ITGRF, de modo que sejam compatíveis com os outros dois sistemas, permitirá um entendimento mais aprofundado dos processos geodinâmicos e dos riscos associados, como movimentos tectônicos, variações no nível do mar e deformações da crosta terrestre.

Para tanto, a cooperação multilateral é uma peça-chave para a infraestrutura geodésica global, assegurando sua eficácia, eficiência e relevância contínuas em um mundo dinâmico e interconectado. Para isso, é necessário que haja esforços, tanto por parte da comunidade científica quanto de organizações, para trabalhar na implementação dos sistemas em fase de implementação, para que seja possível atualizar os sistemas antigos e aplicar novas tecnologias. Com isso, esses sistemas passarão a ser consistentes ao longo do tempo, visando garantir que essas referências atinjam um nível de precisão e confiabilidade compatível com os padrões globais estabelecidos pelo ITRF e ICRF. Nesse sentido, altitudes normais vinculadas ao IHRF e calculadas com base na abordagem do Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG) são consistentes.

O objetivo geral desta dissertação consistiu em calcular valores de altitude físicas vinculados ao IHRF em pontos de interesse na América do Sul. Os objetivos específicos foram: realizar o levantamento histórico dos sistemas altimétricos na América do Sul e das atividades desenvolvidas pelo Grupo de Trabalho III, responsável pela componente vertical no SIRGAS; verificar a potencialidade do modelo quase geoidal QGEOID2023 e de cinco modelos globais do geopotencial no cálculo de altitudes normais nas 17 estações selecionadas para comporem o IHRF na América do Sul; obter altitudes normais a partir da solução por meio do Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG) e vinculadas ao IHRF para os sete principais pontos culminantes brasileiros localizados na região Sudeste.

2. DESENVOLVIMENTO E EVOLUÇÃO DE SISTEMAS ALTIMÉTRICOS NO CONTEXTO DO SIRGAS: DOS DATA VERTICAIS LOCAIS AO REFERENCIAL ALTIMÉTRICO INTERNACIONAL

Este capítulo trata da contextualização histórica dos sistemas altimétricos dos países da América do Sul, desde os seus primórdios até a situação atual na região. Além disso, são apresentados os esforços compreendidos pelo Grupo de Trabalho III, do SIRGAS, para auxiliar no estabelecimento de um sistema de referência vertical unificado para as Américas. Também foi realizado um estudo bibliométrico para avaliar o envolvimento da comunidade científica em relação ao SIRGAS, com foco nos sistemas altimétricos. Para contribuir com o IHRF, foi feita uma avaliação entre alguns modelos globais do geopotencial e um modelo quase geoidal para a América do Sul, nas 17 estações que compõem o IHRF no continente. O texto é apresentado no idioma Inglês.

2.1 INTRODUCTION

To determine and investigate Earth's geodynamic processes and change, it is essential to have stable geodetic reference systems that remain consistent across the globe over time (Ihde et al., 2015). In this sense, the International Association of Geodesy (IAG) has been working on establishing an integrated geodetic reference from the densification and maintenance of the Global Geodetic Observing System (GGOS). The system was possible through physical points on the Earth's surface, satellites in near-Earth orbit, celestial objects, and parameters that describe geometry and gravity over time (IAG, 2016).

The IAG, through Resolution 69/266 (ONU, 2015), established the Global Geodetic Reference System (GGRS), materialized by the Global Geodetic Reference Frame (GGRF) (Drewes et al., 2016). Therefore, from a scientific and technical point of view, it is the responsibility of the IAG and GGOS to implement this geodetic reference frame in the most diverse segments of users around the Earth.

The GGRS defines and conceptualizes a reference system using mathematical and physical models, constants, and numerical and physical conventions to support a reference. Once fully established, the GGRF comprises four reference frames and integrates three reference system components. The first component (position) is represented by its coordinates (X,Y,Z) , which are managed by the International Celestial Reference Frame (ICRF) and the International Terrestrial Reference Frame (ITRF). The International Height Reference Frame (IHRF) defines the Earth's gravity potential (W) as the second component, which determines

the physical height (H). Finally, the International Terrestrial Gravity Reference System (ITGRS) establishes the gravity vector (g) by the International Terrestrial Gravity Reference System (ITGRF).

The global geometric reference has reliability down to the centimeter level due to the definition, achievement, and maintenance of the International Celestial Reference System (ICRS) and the International Terrestrial Reference System (ITRS). Regarding the gravity component, it is essential to establish a global and current reference for the gravity component. This will help minimize the difference between the precise readings obtained with absolute gravimeters and the gravity values based on the International Gravity Standardization Net 1971 (IGSN71). Furthermore, the gravity reference is essential for a physical height system since it depends on gravity information for its materialization. Numerous local and regional height systems are currently in use. These systems are based on local observations of sea level and do not consider any changes over time. Due to the discrepancies between these systems, it is impossible to exchange data between them (Ihde & Sánchez, 2005).

From this perspective, through “Working Group III: Vertical Datum” (WG-III), SIRGAS (Geodetic Reference System for the Americas) has been working since 1997 on establishing a vertical reference system for the Americas. Since the IAG Resolution No. 1 publication in 2015 about the definition and implementation of the International Height Reference System (IHRF) (Drewes et al., 2016), WG-III has been working on establishing the IHRF in the SIRGAS region. In this sense, this work aims to present a history of height systems in South America and the activities of WG-III related to height systems. Additionally, this paper presents numerical results related to implementing the IHRF in the continent.

2.2 A BRIEF REVIEW OF HEIGHT SYSTEMS IN SOUTH AMERICA

A classical height system is a set of stations materialized by geometric leveling, expressed in height coordinates. Vertical Datum is the traditional name of the system's origin (zero point), defined as the mean of a local sea level measured by a tidegauge in a certain period. Because of the nutation movements of the Earth, 18.6 years is the minimum period to establish a consistent mean sea level value. However, not all countries have tide gauge measurements related to this period.

In South America, the height systems are based on the Mean Sea Level (MSL), and their heights are derived from leveling circuits and lines carried out at different times. Besides that, these measurements were frequently employed without gravity measurements or reductions and

with different methodologies applied (Ihde & Sánchez, 2005). To summarize, South America has 18 height data (Fig. 1), with 18 located in coastal areas and one on the continent (Paraguay). Some countries, like Chile (with six) and Brazil (with two), have multiple height references.

We checked the databases of all national agencies except for Paraguay, Guyane, and Suriname because we could not find any information, and the type of height is also not homogeneous among South American countries. Brazil and Colombia adopt normal heights (Fig. 1 in green), Argentina, French Guyana, and Uruguay orthometric heights (Fig. 1 in yellow), while Bolivia, Chile, Ecuador, Peru, and Venezuela so-called normal-orthometric heights (Fig. 1 in orange).



FIGURE 1. Types of heights and local vertical systems in South America.

The following paragraphs briefly overview the history of vertical height systems used in South American countries. Starting with Argentina, approximately 100 years ago, the National Geographic Institute of Argentina (*Instituto Geográfico Nacional de Argentina – IGN-AR*), the agency responsible for the Argentine Geodesy, began implementing the first local height system on the continent. The first efforts took place in 1913, with the construction and measurements of the leveling network, which by the end of 1919 determined the provisional height of 1,045 stations from 1,620 km of the leveling line. However, only in 1923, the Mar del

Plata tide gauge was considered the vertical reference. Through the years, the vertical network of Argentina went through two adjustments. The first one was in 1969 when the IGN sent to the US Army Topographic Command (USATC), currently the National Geospatial-Intelligence Agency (NGA), observations of the leveling lines and gravity observations made on the pillars. This adjustment was called “*Sistema de Referência Vertical Nacional do ano de 1971 (SRVN71)*”. The second adjustment, “*Sistema de Referência Vertical Nacional do ano de 2016 (SRVN16)*”, began in 2010 under the need to have heights based on geopotential numbers. At the end of the adjustment, in 2016, the IGN published for the community orthometric heights (IGN - AR, 2017).

The agency responsible for the vertical component in Bolivia is the Military Geographic Institute of Bolivia (*Instituto Geográfico Militar de Bolivia – IGM-BO*). As a landlocked country, it relies on data from the tide gauge in Arica since it lacks direct access to the ocean, approximately 132 km (Arica – Chile to Charanã – Bolivia). The connection line Arica-Charafia-Visviri-Charanã was made in 1995 (Sánchez, 2005).

The Brazilian Institute of Geography and Statistics (*Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE*) established the leveling network in 1945 at the Torres tide gauge. The official datum was based on only one year of tide gauge measurements and remained in use until 1959. The Imbituba tide gauge was established as the new datum based on data collected between 1949 and 1957. During the implementation of the network across the country, it became clear that a second Datum was necessary to establish the height reference for the state of Amapá. This was because it was not feasible to conduct high-precision leveling across the lower course of the Amazon River. As a result, Santana was designated as the second datum in 1980. The Brazilian network underwent two more adjustments, one in 2011 and the second in 2018 (IBGE, 2019).

In Chile, the first tide gauge to be used as an initial point for the vertical system was the Cartagena in the Valparaíso region in 1929 and is still considered the most important in the country. Based on this data, it was feasible to establish leveling lines across some areas of Chile and its territory. However, given the vastness and topographical diversity of the country, alternative Data were required to define a system for the entire territory. Today Chile has six data: Arica, Antofagasta, Valparaíso, Talcahuano, Puerto Montt, and Punta Arenas. Because of earthquakes in the territory, remediations on the leveling lines have been needed (Maturana & Barriga, 2002; Sánchez, 2005). The Military Geographic Institute of Chile (*Instituto Geográfico Militar de Chile – IGM-CH*) is responsible for maintaining the geodetic reference in the country.

During the 1940s, Colombia's Geographic Institute Agustín Codazzi (*Instituto Geográfico Agustín Codazzi* – IGAC) began to devote efforts to realizing a local vertical system. For this purpose, four tide gauges were implemented: two in the Caribbean Sea (Cartagena and Riohacha) and two in the Pacific Ocean (Buenaventura and Tucumán). Based on 17 years of observations (1951 to 1968), the Buenaventura tide gauge was selected as the height reference (IGAC, 2023). Regarding the leveling, seven stations were established as the foundation for the leveling lines (Sánchez & Martínez, 2002). The country's leveling system currently consists of more than 20,000 leveling points along 26,000 km, which were adjusted line by line in the 1985 adjustment. Nowadays, IGAC works on the adjustment based on geopotential numbers (IGAC, 2023).

The Military Geographic Institute of Ecuador (*Instituto Geográfico Militar de Ecuador* – IGM-EC) received assistance from the Inter-American Geodetic Survey (IAGS) to implement the vertical datum. In 1948, the La Libertad tide gauge was installed. The primary height was calculated around 1960 using the average of measured values between 1950 and 1959, making it the official datum of the country (Paredes, 1986). Leveling campaigns started in the 1970s. In 2010, the IGM-EC made a preliminary adjustment to the leveling network, adopting the average of observations between 1988 and 2009 as its origin (Carrión Sánchez, 2017).

Efforts to establish a vertical network in Peru began in the 1940s, with the definition of tide gauges in the cities of Talara, Chimbote, Callao, San Juan de Marcona, and Matarani (Sulca, 2014). Meanwhile, under the supervision of the National Geographic Institute of Peru (*Instituto Geográfico Nacional de Perú* - IGN-PE), the national geodetic leveling network had its official origin defined in the La Punta-Callao tide gauge (IGN-PE, 2016).

The vertical network of Uruguay was established, at the first moment, based on Wharton's mean sea level. In 1948, the zero reference was changed to the Montevideo tide gauge based on the average sea level readings of more than 40 years. Concerning the leveling network, Uruguay underwent two adjustments. In the first one, in 1961, the first-order surveys were adjusted using normal gravity for orthometric correction (Piña et al., 2002). The second one was carried out in 2015. The leveling network, composed of 3,883 km of first-order, 2,947 km of second-order, and 4,700 km of third-order leveling lines, was adjusted in terms of geopotential numbers (Croquis et al., 2022).

In Venezuela, the first tide gauge in La Guaira was established in 1948 by the Geographic Institute of Venezuela Simón Bolívar (*Instituto Geográfico de Venezuela Simón Bolívar* - IGVS). The national leveling network started in the 1950s. In Venezuela, two networks are dedicated to heights: one in the north and one in the south. The northern network is considered

high-accuracy and is made up of several circuits near the Vertical Datum. However, the southern network has never been connected to a precision leveling network (Virla et al., 2014).

Regarding the South American countries French Guyana, Guyana, Paraguay, and Suriname, we did not find further information about their vertical systems. In French Guyana, the height datum used is the Cayenne, having only the coverage in the coastal zone, and the height adopted is the orthometric type (IGN-FR, 2023). In Guyana, one tide gauge is used as a vertical Datum Georgetown (Guyana Lands & Surveys Commission, 2023). Paraguay has a vertical Datum located on the continent, under the Paraguay River, called Asunción. Finally, in Suriname, no information was found regarding its height system. Summarized information about the vertical systems in South America is presented in Table 1.

TABLE 1. Vertical systems in South America

Name	Network Name	Responsible	Height Datum	Height Type
Argentina	Argentine Leveling Network	National Geographic Institute of Argentina	Mar del Plata	Orthometric ¹
Bolivia	National Leveling Network	Military Geographic Institute of Bolivia	Arica (Chile)	Normal- Orthometric ³
Brazil	High Accuracy Height Network	Brazilian Institute of Geography and Statistics	Imbituba and Santana	Normal ²
Chile	National Leveling Network	Military Geographic Institute of Chile	Valparaíso, Arica/ Antofagasta, Talcahuano, Puerto Montt, and Punta Arenas	Normal- Orthometric ³
Colombia	Vertical Network	Geographic Institute Agustín Codazzi	Buenaventura	Norma – Orthometric ³
Ecuador	Rede Vertical	Military Geographic Institute of Ecuador	La Libertad	Normal- Orthometric ³
Guyana	No found	Guyana Lands & Surveys Commission	Georgetown	No found
Guyana Francesa	No found	National Institute of Geographic and Forest Information	Cayenne	Orthometric ⁴
Paraguay	No found	Military Geographical Service	Asunción	No found
Peru	National Geodetic Network Leveling	National Geographic Institute of Peru	La Punta	Normal- Orthometric ³
Uruguay	Leveling Network Uruguay	Military Geographic Service	Montevideo	Orthometric ⁵
Venezuela	National Leveling Network	Geographic Institute of Venezuela Simón Bolívar	La Guaira	Normal- Orthometric ³¹

It is well known that local height data are incompatible since each reference, i.e., each tide gauge, is not located under the same level surface. In addition, the following aspects contribute to the previous statement:

- Geometric leveling operations were performed at different times with different techniques;
- The gravimetric reductions, when considered, are distinct, i.e., using different formulations;
- Occurrence of propagation errors as a result of leveling; and
- Time variations are not considered in heights and reference levels.

¹<https://www.ign.gob.ar/NuestrasActividades/Geodesia/Nivelacion/Introduccion>;

²<https://www.ibge.gov.br/geociencias/informacoes-sobre-posicionamento-geodesico/rede-geodesica/16283-rede-altimetrica.html?=&t=o-que-e>;

³The institutions responsible for these data, consider the leveling Heights as orthometric Heights, but they will not apply the gravimetric correction. So, in this paper, these Heights are considered normal-orthometric.

⁴https://geodesie.ign.fr/index.php?page=reseaux_nivellement_francais

⁵ Pinã, Di Landro, Turban; 2002

The aspects mentioned above cause uncertainties in the local data, making it impossible to exchange information between countries. According to (Sanchez, 2007), the discrepancies between values measured simultaneously from different systems can reach up to ± 2 m globally. To demonstrate the height uncertainties between South American countries, we collected from the national agencies' height values from countries leveling connections. As an example, the discrepancies arrived up to 0.54 m between Brazil (Santana do Livramento station) and Uruguay (Rivera) (Fig. 2). On the other hand, the difference involving Monte Caseros station, in Argentina and Bella Unión station, in Uruguay is 0.15 m. In comparison, the discrepancy between Argentina (Paso de los Libres station) and Brazil (Uruguiana station) is -0.40 m.

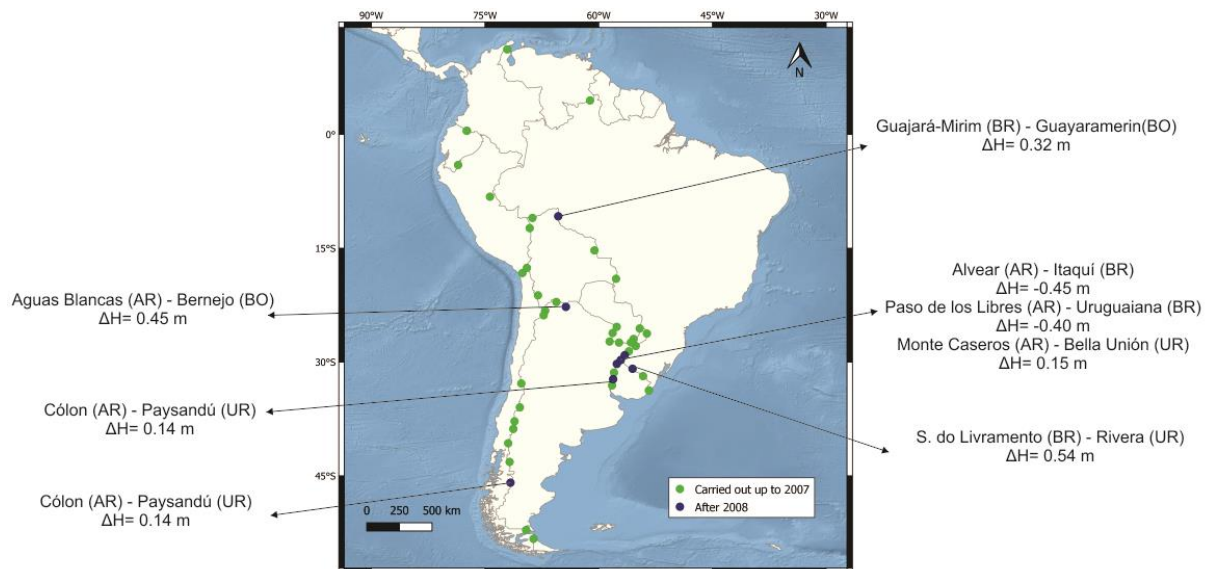


FIGURE 2. Height difference in leveling benchmark connections. In green leveling connections carried out up to 2007. In blue, after 2008.

2.3 HEIGHT SYSTEMS IN THE SIRGAS CONTEXT

In October 1993, during the International Conference for the Definition of a Geocentric Datum for South America, in Asuncion, Paraguay, an organization dedicated to the Geodesy called Geocentric Reference System for South America (in Spanish *Sistema de Referencia Geocentrico para la América del Sul* - SIRGAS). The event was convened and sponsored by the IAG, the Pan American Institute of Geography and History (PAIGH), and the US Defense Mapping Agency (DMA), currently the National Geospatial-Intelligence Agency NGA (SIRGAS, 1994).

The conference aimed to define and realize a geocentric datum in South America. In addition, the establishment and maintenance of the SIRGAS reference network. For this, it was defined as a goal to accomplish the proposed objectives, except for maintaining the reference network, since this is a long-term activity, to present it at the IAG Scientific Assembly in Rio de Janeiro in 1997. It was also necessary to coordinate and provide for the efforts in each country in South America, to assist in the connections of the existing national triangulation networks, and to concentrate efforts on the horizontal datum, postponing the vertical datum.

The organizational structure was divided into (SIRGAS, 1994):

- A committee composed of one representative from each member country and each of the sponsoring institutions (IAG and PAIGH) and
- a Scientific Council of geodesist professionals to assist the committee in decision-making and analysis.

Two working groups were created to complete the objectives proposed in creating SIRGAS. The “Working Group I: Reference System” (WG-I) was responsible for establishing the reference system and deploying a network of GPS stations for continuous monitoring, including the existing GPS stations that belonged to the ITRF, besides adjusting them to the ITRF solution of that time. The second group, “Working Group II: Geocentric Datum” (WG-II) (nowadays SIRGAS at the National Level), aimed to integrate the stations of national GPS triangulation networks and adjust the networks. The objectives of the WG-I were achieved still in the Asunción conference when it was defined that the SIRGAS reference system should be the same as the IERS (International Earth Rotation Service) and the reference frame, achieved through the observation and high-precision analysis of the GPS network combined with ITRF. Concerning the WG-II, it was decided that the geodetic datum should be consistent with the Geodetic Reference System of 1980 (GRS-80) (Drewes, 2022).

The creation of the working groups did not consider the physical component at that time. Only in 1997, during the General Assembly of the IAG in Rio de Janeiro, considering the achievement of the main objectives of Working Groups I and II, the project's developments in the height component of the reference system discussed. Then, Working Group III “Vertical Datum” was created (SIRGAS, 1998).

The WG-III creation was motivated by the need to establish a vertical reference in South America and unify the existing vertical systems. The first meeting occurred in Santiago, Chile, in 1998. On that occasion, the height types, the addition of existing leveling networks, and the vertical reference datum were discussed. Technical document elaborated in 1998 about the

“Vertical Reference System for South America” established that the height indicated for adoption among the countries would be the normal height published in SIRGAS Bulletin No 6 (SIRGAS, 2002a). However, in the year 2000, a revision was made, and it was recommended that each country express its heights based on geopotential numbers and, subsequently, select the type of height, whether normal, orthometric, or other type. In addition, countries were suggested to adjust their leveling networks considering gravity corrections (Drewes, 2022).

In May 2000, WG-I and WG-III joined their efforts to carry out a GPS campaign to determine heights accurately, re-observe the 1995 network, and determine station velocities, which are essential for temporal maintenance. The campaign covered 184 stations across the continent, including those of the SIRGAS1995 network, primary tide gauges in each country, boundary stations, and points for vertical control (Luz et al., 2002). This activity was the first step in unifying the vertical system in the SIRGAS region. Since the creation of WG-III, efforts have been made to assist countries in unifying and updating their height systems. The working group also has been working on clarifying information about height systems through capacity building. In 2002, as an example, the document “Urgent Need for a Modern Vertical Reference System” was published in bulletin number 7 (SIRGAS, 2002b). The document presents the difficulties of having different height systems, different methodologies to calculate the geopotential number, and the possibility of adopting a single value of a potential gravity (W_0) as the reference surface.

In 2005, Sánchez (2005) presented to the SIRGAS community the Towards a Unified Vertical System for South America document. The presentation emphasized the main difficulties of the continent having several vertical data and pointed out the importance of having the physical component well defined to follow the accuracy achieved by the geometric component (h) arising from GNSS positioning.

Between 2005 and 2011, there was progress in creating a unified vertical system for the continent. In 2011, SIRGAS Resolution 2011 N° 1 about “Advances for the continental adjustment of national vertical networks in terms of geopotential numbers” was published to emphasize the leveling network adjustment regarding geopotential numbers. SIRGAS started to organize workshops, in cooperation with geographic institutes and universities, to assist the countries in unifying and modernizing the vertical systems. Six meetings were held in Bolivia in 2014, Brazil in 2015, Ecuador in 2016, Costa Rica in 2017, Mexico in 2018, and Chile in 2022 (for more details, visit SIRGAS (website: <https://sirgas.ipgh.org/>)).

Since 2005, Sánchez (2005) has computed a reference potential value. The conventional

value for the potential gravity was published in 2016 (Sánchez et al., 2016), which is $62,636,853.4 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$. Sánchez and Sideris (2017) calculated the local gravity potential value at different tide gauges in South America and compared it with the W_0 , previously established (Fig 3). Each tide gauge is located under a local level surface that differs from the global reference surface, as indicated by these differences.

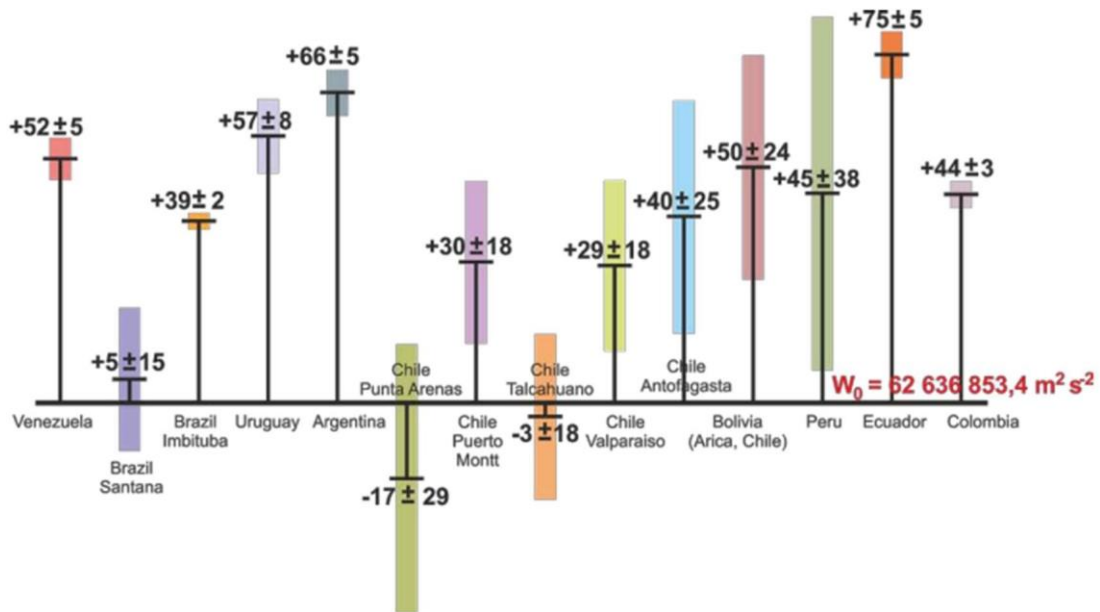


FIGURE 3. Discrepancies between tide gauges gravity potential and W_0 . Units in cm. (Sánchez & Sideris, 2017)

The efforts for vertical system unification intensified in 2015 when, at the General Assembly meeting of the International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG), the IAG, through its Resolution N° 1, established the IHRF (IAG, 2015). Since then, to assist countries in updating their vertical systems, SIRGAS has published SIRGAS Resolution 2016 N° 2, “Actions for IHRF Implementation in the Region” (SIRGAS, 2016), and SIRGAS Resolution 2017 N° 2, “Advances in International Height Reference Frame (IHRF) Implementation in the Region” (SIRGAS, 2016). In 2021, Working Group III drew up two documents to assist SIRGAS member countries in implementing the IHRF (documents are available at <https://sirgas.ipgh.org/pt/recursos-pt/guias/>). The first, entitled “Guide for the Selection of IHRF Stations”, describes the requirements and recommendations for selecting an IHRF station. The instructions are aimed at institutions with a station planned to calculate their first IHRF implementation and those wishing to propose new stations. The second document, “Guide for carrying out gravimetric measurements around gravimetric stations”, describes the requirements and recommendations for performing terrestrial gravity measurements around IHRF stations. Since the beginning of the COVID-19 pandemic, SIRGAS has made webinars

dedicated to the user community, which are available on the SIRGAS website (<https://sirgas.ipgh.org/pt/eventos-sirgas-pt/webinars/>). A timeline summarizes the main WG-III events (Figure. 4).

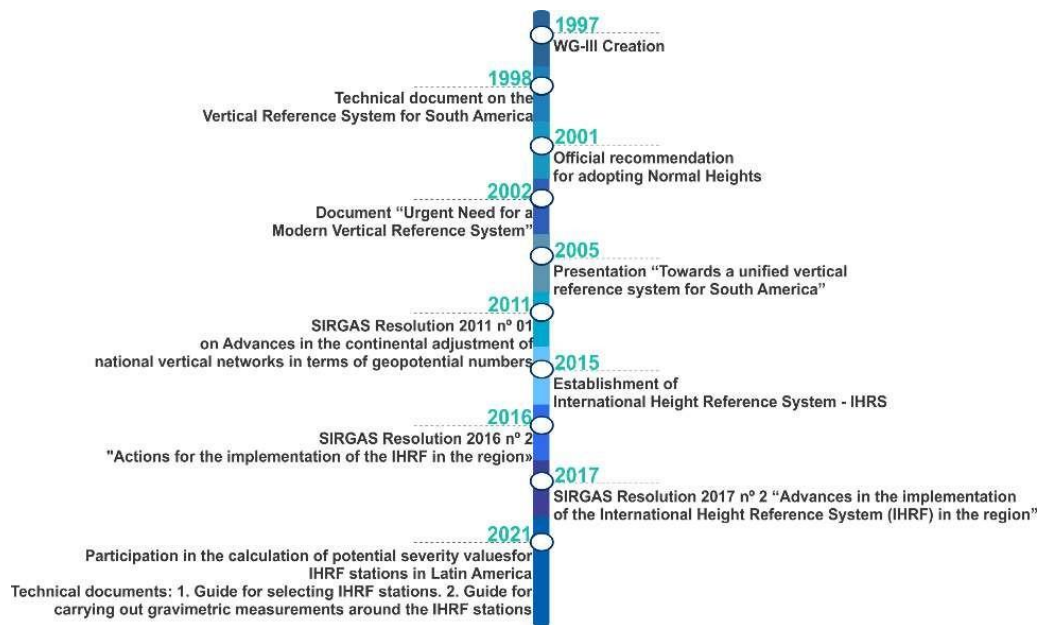


FIGURE 4. WG-III timeline activities

In the sense of evaluating the impact of WG-III activities over the years, a bibliometric study was carried out to analyze quantitatively the publications made by the scientific community, taking into account keywords. The search was conducted in the Scopus database from 2005 (the year of the first publication in the base, using the keyword SIRGAS) to 2023. Fig. 5(a) has two essential clusters related to the height systems: the first (shown in Fig. 5(b)) regarding the Vertical Datum and the second (in Fig. 5(c)) related to the IHRF. The colors indicate the year of publication. Since the IHRF and ITGRS resolution publication words (in yellow) as “geodetic reference system”, “geodetic reference frame”, and “IHRF” are present in recent papers and publications.

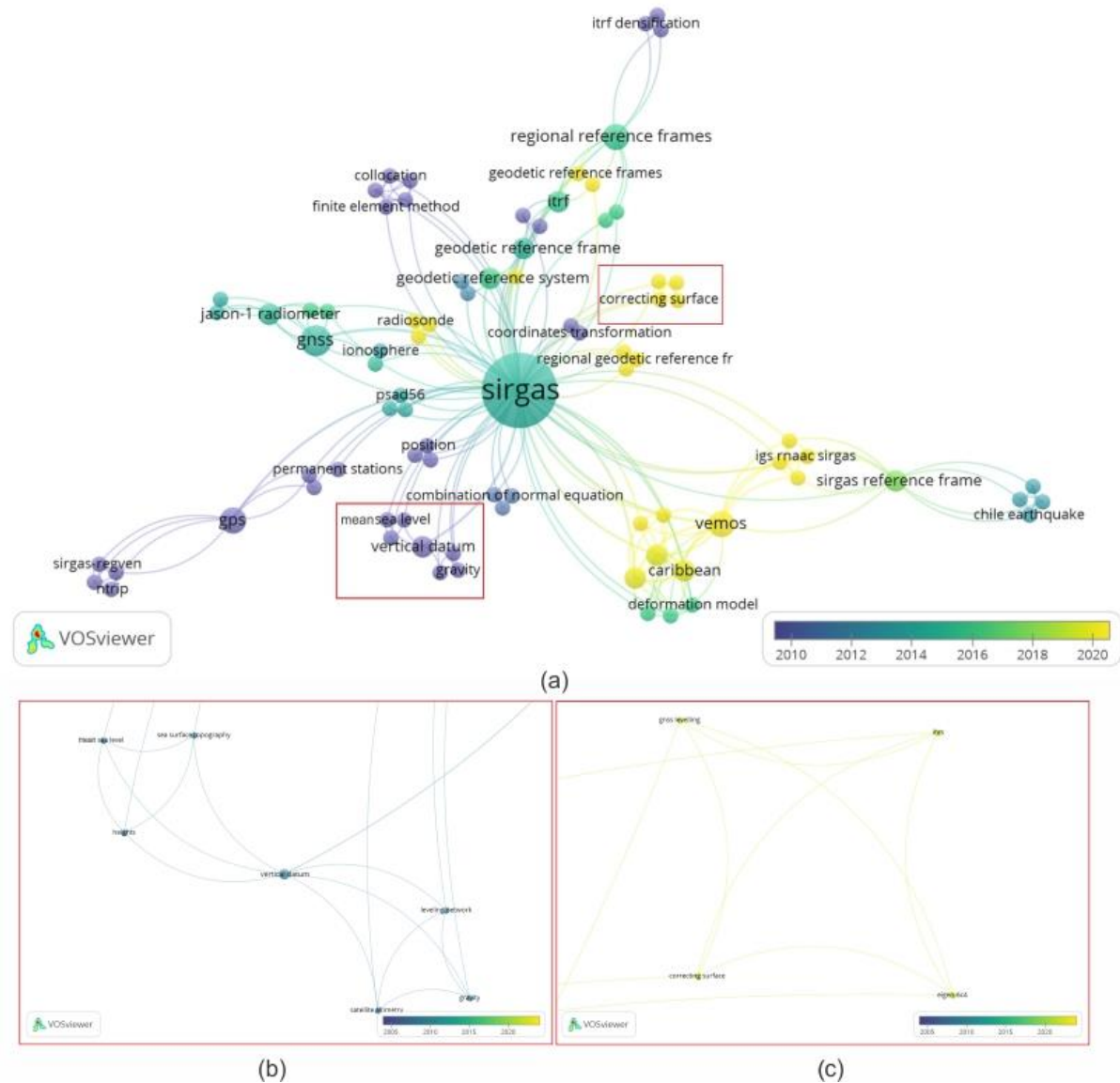


FIGURE 5. Map of occurrence of keywords with a focus on height systems. (a) are the relationships between keywords, the main one being SIRGAS. (b) first node concerning vertical systems and their relationships. (c) second node about altimetric systems, whose color indicates more current publications.

We used VOSviewer to visualize the network map of country co-authorship using the keyword SIRGAS (Fig. 6). South America has seven countries in the results. Argentina has more connections (nine) than the other countries. Since 2020, the United States has been a member of SIRGAS, explaining the color yellow in the connections.

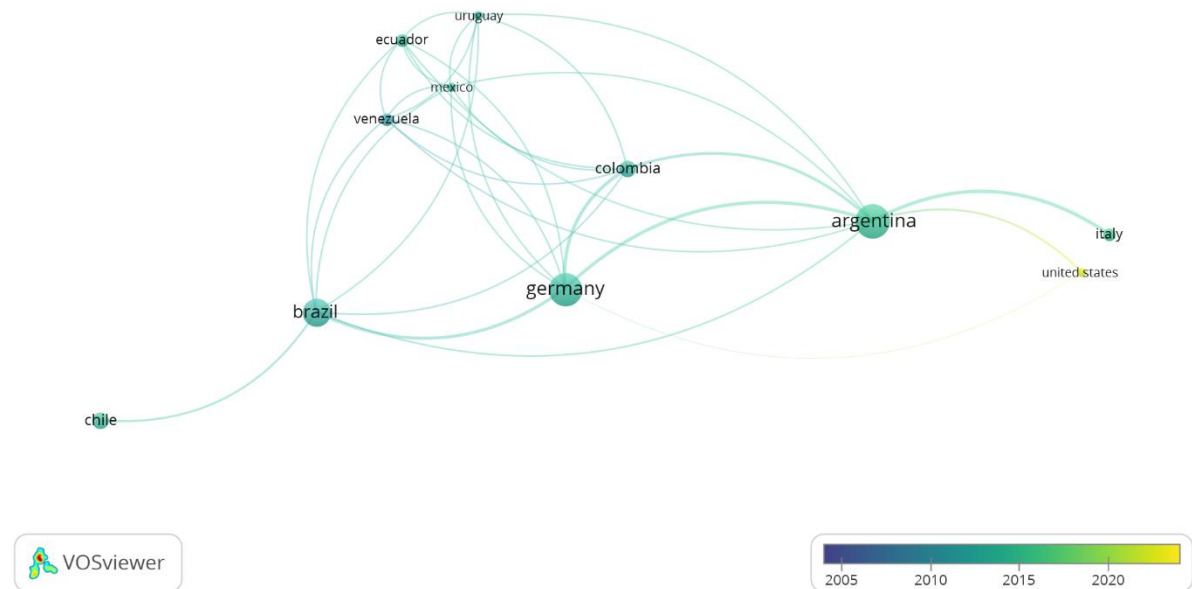


FIGURE 6. Relationship map between countries that publish with the theme SIRGAS.

We also conducted a search related to the number of keywords referring to the topics of WG-III. The following words used were: Geoid, Gravimetry, Tide Gaude, Vertical Datum, Global Geopotential Models, Geopotential Number, Height System, Absolute Gravity, Absolute Gravimeter, Absolute Gravimetry, Geopotential, IHRS, and IHRF. The results were divided into two periods: before 2015 (Fig. 7(a)) and after 2015 (Fig. 7(b)). The larger the keyword length, the more it was cited in scientific articles. Note that words such as IHRS and IHRF are presented in the search after 2015.

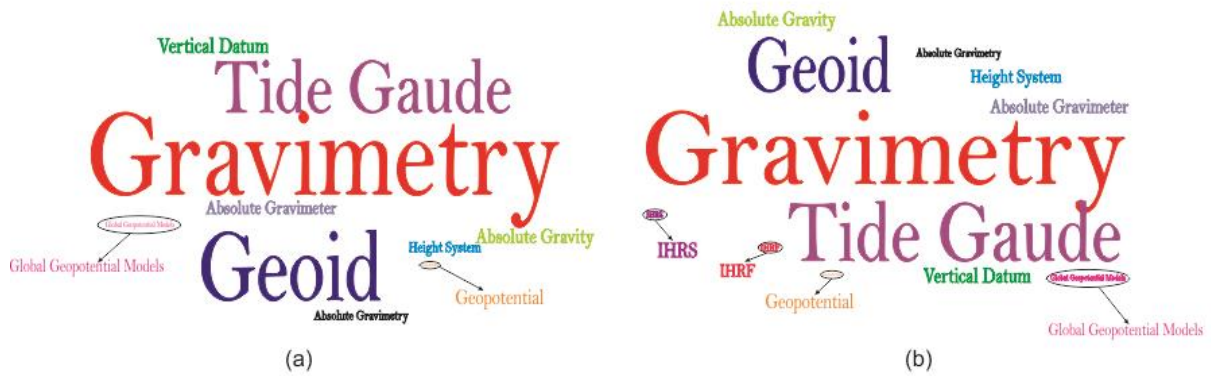


FIGURE 7. Words Clouds Related to WG-III. (a) demonstrates that prominent keywords such as Gravity, geoid, and tide gade have been used in several studies for years. (b) presents more current words, demonstrating that after the publication of the IHRF other quantities begin to gain more prominence.

2.4 IHRF IN THE SCOPES OF SIRGAS

Efforts to unify vertical systems have been discussed by SIRGAS countries and globally. The IAG Resolution 2015 N° 1 proposed that the IHRF is a system referring to an equipotential surface of the Earth's gravity field where the coordinates are expressed in terms of geopotential number (C_p) (Fig. 8) obtained from the difference between the gravity potential at point P (W_p) and the conventional potential W_0 as in the following equation (Sánchez & Sideris, 2017).

$$C_p = -\Delta W_p = W_0 - W_p \quad (1)$$

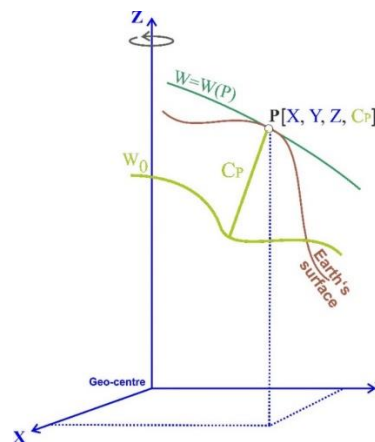


FIGURE 8. Components of the Geopotential Number. (Sánchez et al., 2017)

The vertical system in the SIRGAS region adopts the exact definition of IHRF and becomes a regional densification of IHRF in the following aspects (SIRGAS, 2017):

- Be referenced to the value of W_0 conventional, as established by the IAG.
- National height system based on physical heights derived from leveling associated with gravity reduction or high-resolution gravity field analysis, and
- It must be associated with a specific reference epoch, i.e. it must consider changes in height and its reference level concerning time. The respective reference surface (geoid or quasi-geoid) must be determined in a unified way over the entire continent.

For the first realization, countries were requested to designate stations that could be included in the IHRF network following the recommendations and guidelines published by the “Unified Height System” focus area of the Global Geodetic Observing System (GGOS) and Working Group 0.1.2: “Strategy for the realization of the IHRF” (Ihde et al., 2017; Sánchez, 2019; Sanchez & Barzaghi, 2020). In South America, 17 stations were proposed by the national agencies, and each station is materialized by a permanent GNSS station (Fig. 9(a) in purple). Most of these stations are co-located with other geodetic techniques, such as VLBI (Fig. 9(a) in yellow), DORIS (Fig. 9(a) in blue), and SLR (Fig. 9(a) in green). Furthermore, it is desired that the IHRF station should be linked to the local Vertical Datum. Gravity observation (preferably absolute measure) and leveling connection with the local vertical network are recommended. Fig. 9(b) presents the station with a leveling connection (in green) and gravity measure (in red). International leveling connection (Fig. 9(b) orange dots) is also recommended for the assessment in terms of the unified network in the region.

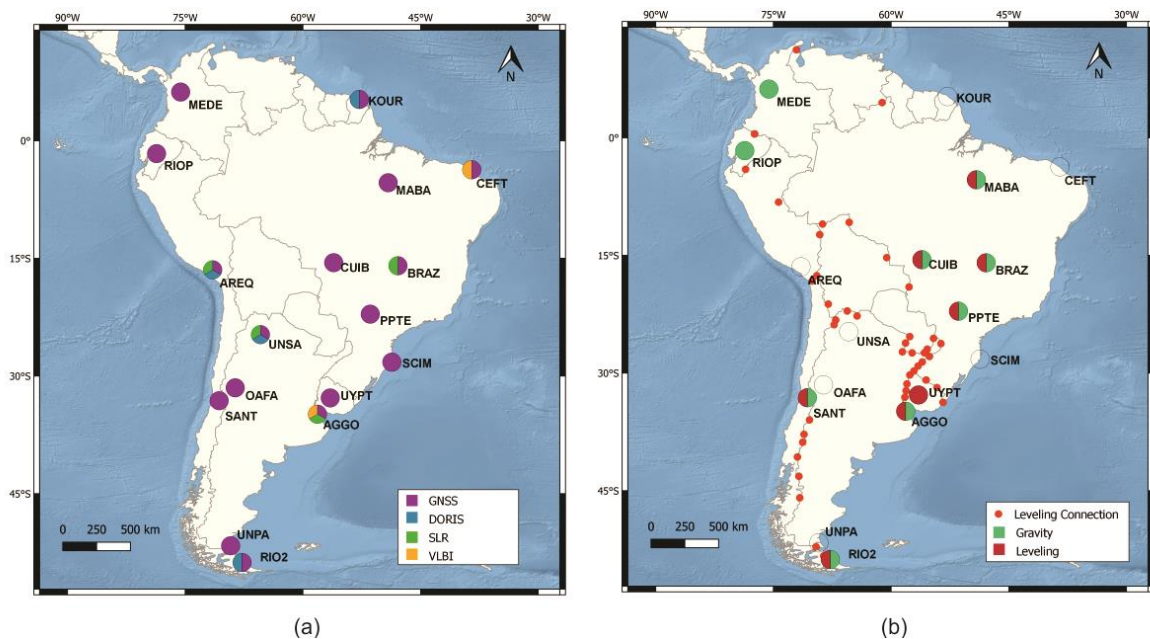


FIGURE 9. IHRF stations infrastructure. (a) are positioning techniques stations and (b) are the stations with gravity and leveling measures and the international leveling connection (orange

circles).

Therefore, regional unified height systems should be based on geopotential numbers because different physical heights (orthometric or normal heights) may introduce artificial errors in the connection of leveling networks at the borders between neighboring countries. In the context of SIRGAS, Uruguay (Faure & Suárez, 2015), Argentina (IGN-AR, 2017), and Brazil (IBGE, 2019) concluded the process of updating their systems to heights based on geopotential numbers. Ecuador, Colombia, and Venezuela are working towards concluding this task. Colombia presented a preliminary vertical system adjustment during Symposium SIRGAS 2022 (Sepúlveda et al., 2022).

In addition, gravity densification should be performed around IHRF stations within a radius of 210 km ($\sim 2^\circ$) (Sánchez et al., 2021). It is essential to fill the gaps around the reference station, where the distribution of gravity points should be as homogeneous as possible. On the other hand, for IHRF stations situated on the coast, marine or airborne gravity data may be an option (Ribeiro et al., 2023).

Sánchez et al. (2021) recommend a spatial resolution of 1' to 3' (around 2-4 km) around the IHRF station. Depending on the relief, especially in mountainous areas, gravity observations should have a better resolution than in flat areas. However, it is known that terrestrial gravity measures are costly and time-consuming activities. In remote areas, with the absence of roads and paths, such as forests and deserts, as well as on top of mountains, it is suggested that the airborne survey is intended for geodetic purposes (Sánchez et al., 2021; SIRGAS, 2021).

2.4.1 Numerical Tests

According to Sánchez et al. (2021), there are three ways to obtain the gravity potential at IHRF stations: (a) using the high-resolution Global Geopotential Models; (b) using regional models of the Earth's gravity field (geoid and quasigeoid); and (c) transforming existing vertical systems to the IHRF. The last option is not precisely for calculating potential values but rather to allow unification and densification of the IHRF about existing height systems.

In the first case (a), GGMs can achieve an accuracy of 2 cm in areas with gravity densification and 20-40 cm in areas with terrestrial gravity scarcity in the mountain areas (Guimarães et al., 2022). The computation of W_p is possible by entering the ITRF coordinates in Eq. (2) (Barthelmes, 2013), which represents the spherical harmonic coefficients representing in the spectral domain the global structure and irregularities of the gravity field of

the Earth.

$$W_p(r, \lambda, \varphi) = \frac{GM}{R} \sum_{l=0}^{l_{max}} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} P_{lm}(\sin \varphi) (\bar{C}_{lm}^w \cos m\lambda + \bar{S}_{lm}^w \sin m\lambda) \quad (2)$$

where (r, λ, φ) are the spherical geocentric coordinates of computation point (radius, longitude, latitude); R reference radius; GM product of gravitational constant and mass of the Earth; l, m degree, order of spherical harmonic; P_{lm} is fully normalized Legendre functions and; $\bar{C}_{lm}^w, \bar{S}_{lm}^w$ are Stokes' coefficients (fully normalized).

Based on the first case, a comparison in terms of normal heights has been carried out from the following strategy of computing geopotential values W_p at the IHRF stations using the GGMs: EGM2008 (Pavlis et al., 2012), EIGEN-6C4 (Förste et al., 2014), GECO (Gillardoni et al., 2016), XGM2019 (Zingerle et al., 2020), and SGG-UGM-2 (Liang et al., 2020). The International Center for Global Gravity Field Models (ICGEM) service was used for the computation. The following parameters were selected: geodetic functional “gravity potential”, reference system GRS-80, zero tide concept, and the zero-order term was adopted.

The geopotential numbers were calculated (Eq. 1) and the respective normal height at each IHRF station was obtained from $H_p = \frac{C_p}{\bar{\gamma}}$, where $\bar{\gamma}$ is the medium gravity normal. To compare the quality of each model with the others, the average of four models was calculated, and the difference between the fifth model and the average was determined (Figure 10 and Table 2).

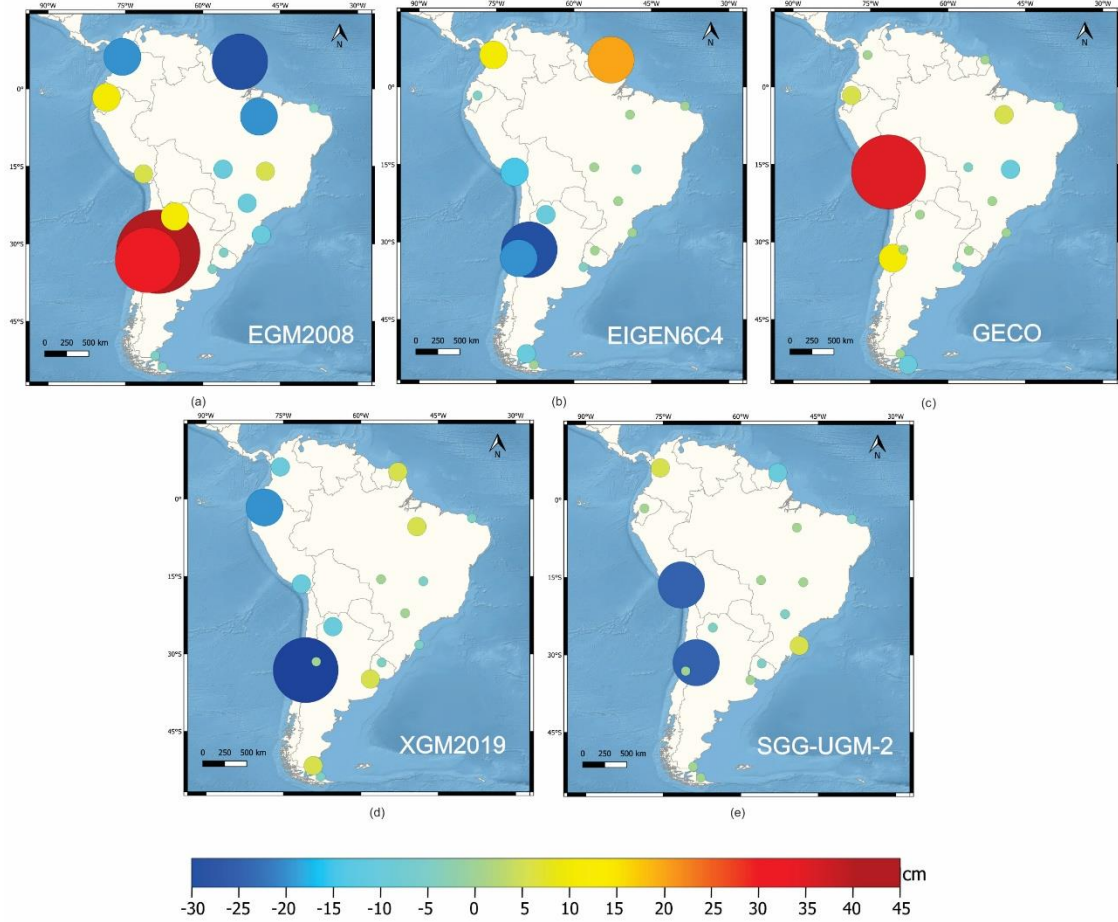


FIGURE 10. Comparison of the normal heights computed from the GGMs geopotential numbers. (a) EGM2008, (b) EIGEN-6C4, (c) GECO, (d) XGM2019 and (e) SGG-UGM-2.

TABLE 2. Statistics involving GGMs (in centimeters)

	EGM2008	EIGEN6C4	GECO	XGM2019	SGG-UGM-2
Mean	1.98	-1.47	3.39	-2.56	-1.34
SD	± 17.02	± 11.12	± 9.52	± 10.14	± 8.19
Max neg	-26.69	-25.37	-6.92	-32.09	-21.37
Max pos	43.78	23.61	35.33	9.48	8.95

Of the five GGMs selected, four (EIGEN6C4, GECO, XGM2019, SGG-UGM-2) were determined in the last 10 years, and we believe that their construction was carried out using more current modifications and techniques. Although EGM2008 was a milestone in the evolution of GGMs, its data is older. Therefore, its standard deviation presents the highest value obtained of ± 17.02 cm, with a value of. Having a difference of ± 5.9 cm for the EIGEIN-6C4, which is the model that had the next highest standard deviation.

Among the four models, the EIGEN-6C4 stands out for its largest standard deviation, registering a difference of 2.93 cm about the SGG-UGM-2, which is the GGM with the smallest standard deviation. EIGEN-6C4 uses data from DTU12 for the oceans and EGM2008 for the continent, in addition to making use of a combination of satellites such as GOCE, GRACE and LAGEOS, becoming the GGM that most incorporate data from gravimetric satellites compared to the other models. In turn, GECO, when using only data from EGM2008 and the GOCE satellite, presents a standard deviation of ± 9.52 cm.

The XGM2019 model, in turn, is characterized by the broad combination of data used, in addition to employing their weighting. This model incorporates a 15" resolution land and ocean gravity anomaly dataset provided by NGA, combined with gravimetric information from the EARTH2014 model and a 1-minute resolution gravity anomaly dataset derived from radar altimetry over the oceans of the DTU13 model, together with the GOCO06S satellite. The standard deviation of this model varies by about ± 2 cm in relation to SGG-UGM-2.

Finally, among the most recent models, SGG-UGM-2 has the smallest standard deviation. This model uses data from EGM2008, combined with data from several altimetry satellites, achieving 1' resolution in marine gravity anomaly data, in addition to the GRACE and GOCE satellites.

It is observed that, although the four models present relatively small variations in terms of standard deviation, in some places the construction of the model influenced more than in others, especially in areas with accentuated topography, such as the Andes, where the resolution of the models 9x9 km is not suitable due to the scarcity of gravimetric data.

The second case (b) is appropriate in the context of the potential values given by estimating the perturbation potential (T_P), from modeling the regional gravity field (geoidal and quasi-geoidal models) through the solution of the Geodetic Boundary Value Problem (GBVP).

$$W_P = U_P + T_P \quad (3)$$

where U_P is the normal potential of a reference ellipsoid computed for a position P .

If a quasi-geoidal model is available the value of W_P is obtained from (Sánchez et al., 2021):

$$W_P = W_0 - (h_P - \zeta_P) \cdot \bar{\gamma}_{Q_0} \text{ [m s}^{-2}\text{]} \quad (4)$$

where:

$$\bar{\gamma}_{Q_{Q_0}} = \gamma_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{a} \cdot (1 + f + m - 2f \cdot \sin^2 \varphi_P) \cdot (h_P - \zeta_P)\right) [\text{m s}^{-2}] \quad (5)$$

where φ_P is the latitude of the point, ζ_P is the height anomaly interpolated from a quasi-geoidal model, and f , m , a are the parameters of the reference ellipsoid, GRS80 (Moritz, 2000).

If a geoidal model is available, W_P is obtained from the following expression (Sánchez et al., 2021):

$$W_P = W_0 - (h_P - N_P) \cdot \bar{g}_P [\text{m s}^{-2}] \quad (6)$$

where:

$$\bar{g}_P = g_P + 0.424 \times 10^{-6} \cdot (h_P - N_P) + TC_P \quad (7)$$

where $\bar{g}_P$ is the mean gravity along the plumb line between P_0 located at the geoidal surface and P on the physical surface, N_P is the geoidal undulation, g_P is the value of the gravity at the station; if it was not observed directly, it can be interpolated from the Earth gravity data set used for geoid determination. The factor 0.424×10^{-6} refers to an average density of the topographic masses considering $\rho = 2.670 \text{ kg m}^{-3}$ e TC_P is the terrain correction.

Considering this, efforts by the academic community to elaborate geoidal and quasi-geoidal models have been carried out. Guimarães et al., 2024, computed a geoidal and quasi-geoidal model for South America (GEOID2023 and QGEOID2023), as well as there are available recent regional models of Argentina (GEOIDE-Ar 16) (Tocho et al., 2022) and Uruguay (UruGeoide202X) (Pinã, 2022).

We carried out an evaluation involving QGEOID2023 and GGMs at IHRF stations. We infer the seasons in terms of C_P by comparing the geopotential number calculated from the QGEOID2023 geoid model with the potential gravity values from the GGMs (EGM2008, EIGEN6C4, GECO, SGG-UGM-2 and XGM2019). To calculate the C_P value, the W_P values of QGEOID2023 were obtained by eq. 4, and subtracted from the value of W_0 . As for GGMs, the “Gravity Potential” functional was obtained from ICGEM and W_0 was also subtracted, according to IHRS. Figure 11 and Table 3 present the results regarding the C_P value.

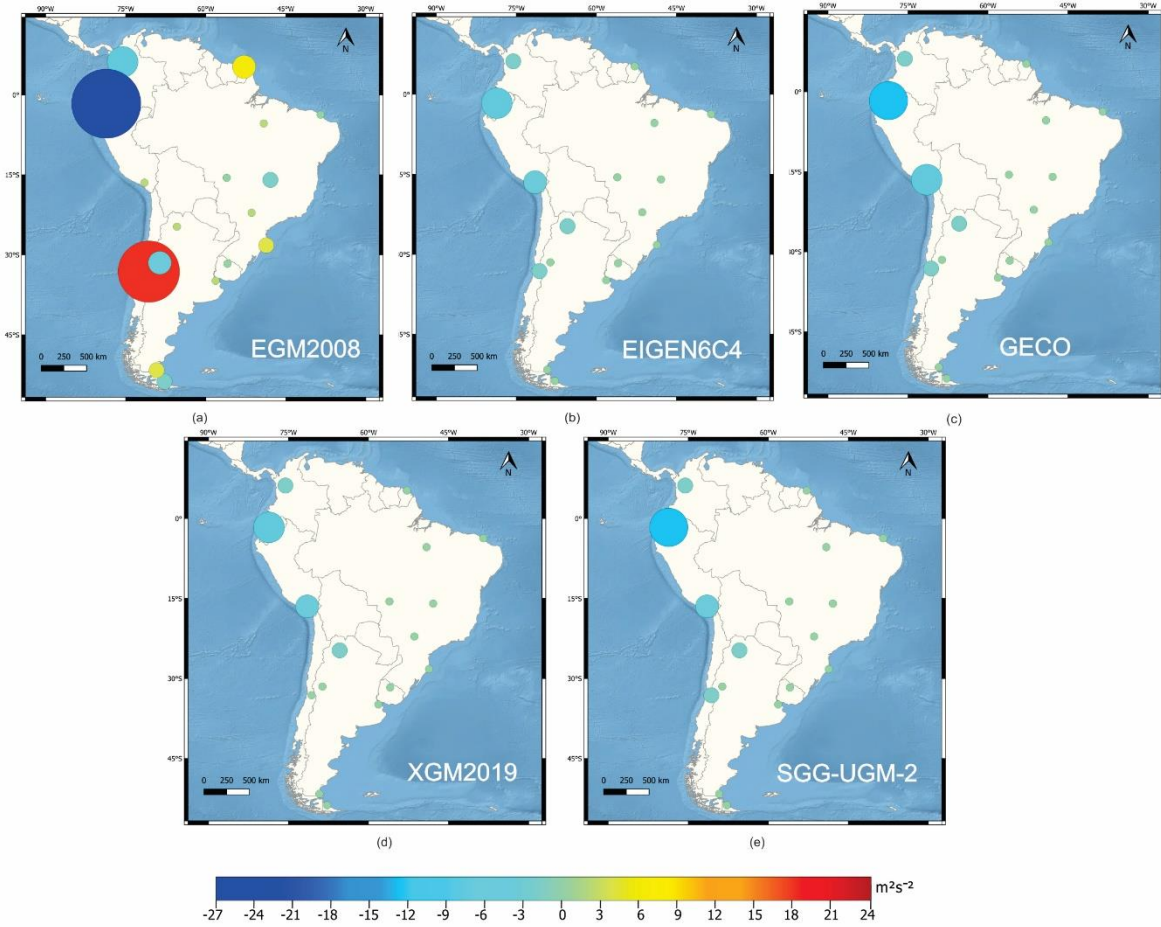


FIGURE 11. Geopotential Numbers comparison at IHRF stations

TABLE 3. Statistics involving GGMs and Geoid Model (in) m^2s^{-2}

	EGM2008	EIGEN6C4	GECO	XGM2019	SGG-UGM-2
Mean	-0.90	-2.87	-3.25	-2.78	-2.88
SD	± 9.97	± 2.98	± 3.65	± 2.67	± 3.08
Max neg	-26.65	-11.99	-12.89	-10.92	-12.32
Max pos	23.10	-0.12	-0.51	-1.05	-0.16

It can be seen in Figure 11 that the stations located in the Andes region present a more significant variation. We can consider this discrepancy because the models do not adjust satisfactorily in areas of accentuated relief, since the resolutions of these models do not follow the accentuated variation in relief. Unlike the flatter regions of Brazil, Uruguay and the stations in Argentina, which present smaller discrepancies.

In Table 3, we can find the statistics of the difference between GGM and GEOID2023. The model that best adjusted to the quasi-geoid model was XGM2019, with a difference of $\pm 2.67 m^2s^{-2}$ in terms of standard deviation. On the other hand, the EGM2008 model had a

standard deviation of $\pm 9.97 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$, which is an increase of $\pm 7.30 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ compared to XGM2019. This indicates that there is a considerable amplitude in the individual values of the set, leading to wider dispersion and greater heterogeneity in the data. The EGM2008 model has positive and negative values, and thus has an average of $-0.90 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$. This difference may be related to the fact that XGM2019 is a new model and is the one used in the construction of the QGEOID2023.

2.5 FINAL REMARKS AND FUTURE PERSPECTIVES

Establishing a consistent global system depends on efforts from the academic and governmental community through different spheres and institutions so that it is possible to update old systems and implement new technologies consistently over time.

In South America, SIRGAS has been responsible for 30 years for assisting countries in implementing their geodetic systems. 25 years ago, SIRGAS created Working Group III, which has contributed to the issue of vertical systems and helped countries with different tasks. Over the years, WG-III has contributed to developing training and guidelines to support SIRGAS member countries. Recently, the WG-III concentrated on computing potential gravity values related to the IHRF implementation. However, despite recurrent efforts on the part of this organization, there is still resistance in some member countries to opening the repositories. Countries whose information is easier to find are those where the implementation of the IHRF is more advanced, such as Argentina, Uruguay, and Brazil. The community must implement the ITGRF for a consistent IHRF solution. Gravity densification is essential, especially around the IHRF stations and in the gaps areas.

Related to the results achieved in the paper, GGM data is not an alternative to compute potential gravity values since the models are not developed to the degree and order to obtain the precision recommended. In the Andes region, gravity measures and the GGMs models should be improved in the following years.

Finally, the first realization of the IHRF is a reality, and the community is working hard to complete this task. On the other hand, some aspects related to the local datum conversion to the IHRF should be implemented. Besides that, temporal variations of the height and gravity components are a challenge for the specialist and probably will be discussed in the following years.

3 CÁLCULO DAS ALTITUDES DOS PONTOS CULMINANTES DA REGIÃO SUDESTE VINCULADAS AO IHRF A PARTIR DO PVCG

Segundo Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006), o Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG) consiste em determinar o campo de gravidade externo às massas, sendo a superfície limitante desconhecida, de maneira que a sua solução permite deduzir a forma da Terra. Stokes e Molodensky propuseram duas formas diferentes de resolver o PVCG. O primeiro propôs uma formulação para obter o potencial perturbador em função da anomalia de gravidade sobre a superfície geoidal, tratando de um problema interno às massas. Já Molodensky, propôs uma nova formulação utilizando a superfície física como limite, tratando-se, assim, de um problema externo às massas, não sendo necessário mais conhecimento de um modelo de distribuição de densidade entre a superfície física e o geóide. Nesse caso, substitui-se o conceito de geóide pelo quase geóide.

A determinação do PVCG possui uma ligação com a altitude. A altitude pode ser definida como a diferença entre duas superfícies, sendo de nível ou não, em uma determinada direção, podendo ter sentido físico ou geométrico pela escolha da superfície de referência (Freitas; Blitzkow, 1999). Ao solucionar o PVCG e determinar a superfície geoidal ou quase geoidal, obtém-se a ondulação geoidal (N) ou a anomalia de altura (ζ), respectivamente. Neste aspecto, a altitude ortométrica está vinculada ao modelo geoidal, enquanto a altitude normal, ao modelo quase geoidal.

Desde 2018, o Brasil adota altitudes normais cuja origem da referência são os marégrafos de Imbituba (SC) e Santana (PA). O IBGE, órgão responsável pela Geodésia brasileira, tem trabalhado em direção à adoção de um sistema altimétrico preconizado pela IAG (Soares, 2023). Além disso, a comunidade científica tem se dedicado ao tópico sobre sistema altimétrico (Albarici et al., 2019; Ribeiro, 2019; Albarici et al., 2021; Delgado, 2021; Guimarães et al., 2022; Ribeiro, 2022; Silva, 2022).

Face ao exposto, este capítulo pretende contribuir com a densificação do IHRF no país. Para tanto, as próximas seções apresentam o procedimento metodológico para a obtenção dos valores de altitude normal de sete pontos culminantes brasileiros, localizados na região Sudeste, vinculados ao IHRF. Para isso, foi calculado um modelo regional do campo de gravidade a partir do método da Colocação por Mínimos Quadrados por meio do pacote computacional GRAVSOFT (Forsberg; Tscherning, 2008) desenvolvido na *Technical University of Denmark* (DTU). A formulação matemática é apresentada na seção 3.1. A seção 3.2 apresenta o material e método utilizado no cálculo do modelo regional. Por fim, a seção 3.3 discorre sobre o cálculo

das altitudes normais para os pontos culminantes da região Sudeste.

3.1 COLOCAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS

A Colocação por Mínimos Quadrados (CMQ) é um método matemático que possibilita a determinação do campo de gravidade com base em diversas medidas geodésicas (Moritz, 1980). Desenvolvido após a formulação da hipótese estocástica para o campo de gravidade, o método modifica a teoria original dos mínimos quadrados. Essa modificação permite a investigação do campo de gravidade por meio das características estatísticas de dados heterogêneos, representadas na forma de funções covariâncias (Souza; Sá, 2008).

Neste contexto, o objetivo desse método é determinar quantidades funcionais dependentes do potencial perturbador (T) a partir de observações geodésicas de diferentes tipos. Para tanto, a relação entre T e o conjunto de observações do campo de gravidade da Terra (l), por meio do funcional linear (L), é expressa pela Equação (6) (Hofmann-Wellenhof; Moritz, 2006).

$$l = L(T) \quad (6)$$

Ruffhead (1987) explica que as observações são uma quantidade física com erros de medição. Essa quantidade física está associada ao sinal (s), assim como o erro de medição tem uma parte chamada ruído (n). Quando a quantidade física contém um sinal, a observação pode ser descrita como a somatória de um modelo matemático, mais o sinal e o ruído. Contudo se o modelo for conhecido, ele poderá ser removido da equação de observação por subtração da medição, assim a Equação (6) passará a ser apresentada na formada da Equação (7).

$$l = s + n \quad (7)$$

A CMQ tem o intuito determinar o sinal onde as medições não foram feitas, estimar e depois remover o ruído. Os objetivos da colocação podem ser reformulados em termos dos vetores, considerando a parte sistemática e a parte aleatória, conforme definido por Moritz (1989).

$$l = AX + s + n \quad (8)$$

em que AX é o vetor dos parâmetros que representam a componente determinística, A é uma matriz $m \times n$, que reflete os efeitos dos parâmetros X nas observações l .

Como a componente determinística (AX) é representada por um modelo geopotencial, para este trabalho o modelo utilizado foi o XGM2019. Quanto ao vetor sinal, este é dado pela Equação (9), e sua respectiva variância, pela Equação (10) (Moritz, 1989):

$$\hat{s} = C_{st}C_{ll}^{-1}l \quad (9)$$

$$\sigma_s^2 = C_{ss} - C_{st}C_{ll}^{-1}C_{ts} \quad (10)$$

onde C_{ll} e C_{ss} são as matrizes de autocovariância dos vetores l e s , respectivamente, e C_{st} é a matriz de covariância cruzada entre l e s .

3.1.1 Função Covariância

Para a CMQ, todas as covariâncias envolvidas no cálculo são importantes. Segundo Guimarães et al., 2022, o conhecimento da função covariância do potencial perturbador é essencial, pois existe uma relação entre essa função e outras funções covariância do campo anômalo, como as anomalias de gravidade, deflexão da vertical e distúrbio da gravidade. A função covariância apresenta a correlação estatística entre duas quantidades no campo anômalo em dois pontos diferentes. A Equação (11) demonstra a função covariância empírica proposta por Tscherning e Rapp (1974), que foi utilizada para ajustar a função neste trabalho.

$$K(P, Q) = \sum_{n=2}^N k_n \left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+2} P_n(\cos \psi) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{A(n-1)}{(n-2)(n+24)} \left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+2} P_n(\cos \psi) \quad (11)$$

onde $K(P, Q)$ simboliza a função de covariância entre os pontos $P(\theta, \lambda)$ e $Q(\theta, \lambda)$, N é o número truncado do modelo geopotencial, e K_n representa o erro de grau da variância contida no modelo geopotencial. Os valores de R_B e A são obtidos por meio de ajuste não linear, enquanto r_P e r_Q representam o vetor de raio dos pontos P e Q , e ψ é a distância esférica entre os pontos P e Q .

3.1.2 Colocação Rápida

Devido à quantidade de dados ao calcular um modelo geoidal, Bottoni e Barzaghi (1993)

propuseram um novo método para calcular de forma rápida e confiável. O método impõe que os dados sejam distribuídos de maneira homogênea e em grade.

A matriz covariância passa a ter uma estrutura especial, conhecida como “estrutura Toeplitz/Toeplitz”, em que é simétrica, e cada bloco dentro dela também segue esse padrão. Sendo possível, então, trabalhar com grandes conjuntos de dados e que abrangem grandes áreas.

Para o cálculo utilizando a função covariância é gerada uma matriz de covariância C , que é uma matriz simétrica Toeplitz em blocos de 3x3, e cada bloco é, por si só, uma matriz simétrica Toeplitz C_{ij} de 3x3. Essa matriz pode ser descrita da seguinte forma (Bottoni; Barzaghi, 1993):

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ & C_{22} & C_{23} \\ \text{sim} & & C_{33} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Em que C_{11} é:

$$C = \begin{bmatrix} C(d_{11}) & C(d_{12}) & C(d_{13}) \\ C(d_{21}) & C(d_{22}) & C(d_{23}) \\ C(d_{31}) & C(d_{32}) & C(d_{33}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Assim, a matriz apresenta uma característica em que cada diagonal descendente, da esquerda para a direita, mantém-se constante. Para mais detalhes sobre a solução da matriz Toeplitz, consultar Bottoni e Barzaghi (1993).

3.2 CÁLCULO DO MODELO REGIONAL DO CAMPO DE GRAVIDADE

Este tópico tem como propósito apresentar a metodologia empregada no cálculo do modelo regional do campo de gravidade. Adicionalmente, oferece uma descrição do procedimento adotado para a transformação do modelo geoidal para o modelo quase geoidal.

3.2.1 MATERIAL

3.2.1.1 Contextualização da área de estudo

Os pontos culminantes são os pontos mais altos em termos de elevação em determinada

área geográfica. No Brasil, sete (Figura 12) dos dez pontos culminantes estão localizados na região Sudeste, cujas altitudes físicas variam de 2891,0 m a 2995,3 m (IBGE, 2023).

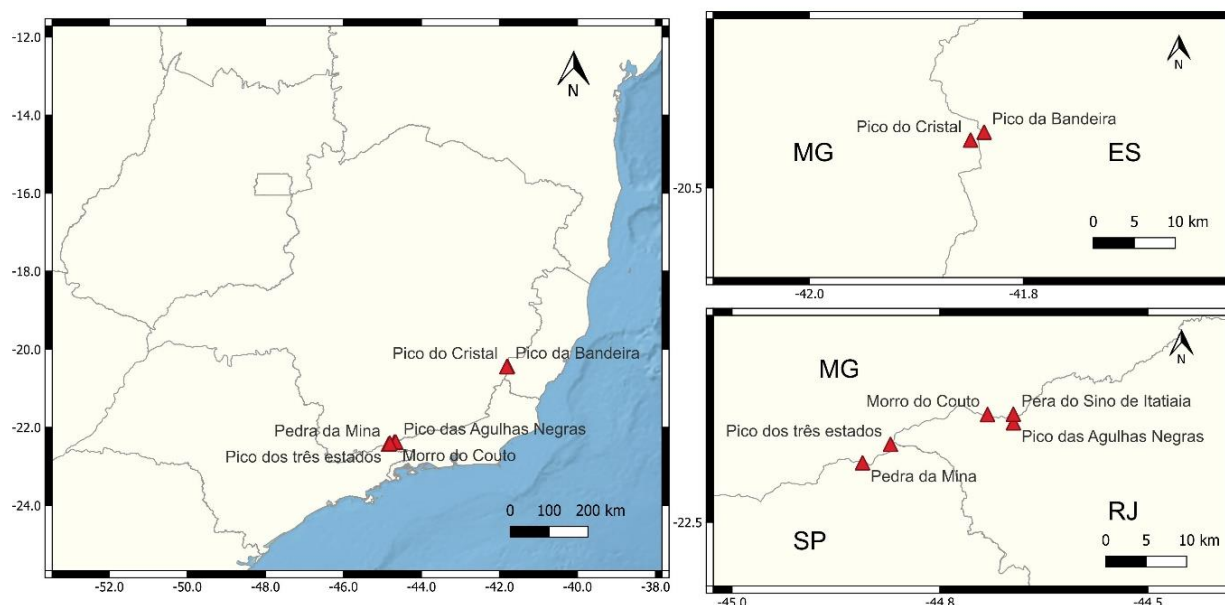


FIGURA 12. Pontos culminantes na região Sudeste. Pico do Cristal e Pico do Sino de Itatiaia, localizados no estado de Minas Gerais, Morro do Couto, no estado do Rio de Janeiro, Pico da Bandeira, na divisa entre os estados Minas Gerais e Espírito Santo, Pedra de Minas, entre Minas Gerais e São Paulo, Pico das Agulhas Negras, na divisa entre Minas Gerais e Rio de Janeiro, e, por último, o Pico dos Três Estados, entre os estados de Minas Gerais, São Paulo e Rio de Janeiro.

A primeira medição dos pontos culminantes brasileiros ocorreu na década de 1960 pelo Ministério das Relações Exteriores, através da Primeira Comissão Demarcadora de Limites, utilizando o barômetro. Em maio de 2004, o IBGE, com o advento do GPS, iniciou o projeto Pontos Culminantes, com o objetivo de determinar altitudes mais precisas para os picos mais elevados do Brasil (IBGE, 2004).

Assim, foram determinadas coordenadas geodésicas, em uma parceria com o IME (Instituto Militar de Engenharia), para os 7 principais cumes brasileiros, dos quais 4 estão localizados na área de estudo, sendo eles o Pico da Bandeira (Sat 93672), a Pedra de Minas (Sat 93639), o Pico das Agulhas Negras (Sat 93638) e o Pico do Cristal (Sat 93673). Como as altitudes geométricas não possuem um sentido físico, o IBGE reviu essas altitudes em 2016, calculando a ondulação geoidal pelo MAPGEO2015, obtendo assim as altitudes ortométricas (IBGE, 2016). Porém, o sistema altimétrico brasileiro sofreu uma mudança e passou a adotar a altitude normal. Com isso, as altitudes desses pontos culminantes foram revistas novamente,

com aplicação do modelo para conversão de altitudes hgeoHNOR2020 aos resultados dos levantamentos GNSS (IBGE, 2023). Quanto aos outros três pontos culminantes, Morro do Couto, Pedra do Sino de Itatiaia e Pico dos Três Estados, eles não possuem uma estação GNSS.

Um resumo do que foi exposto sobre os pontos culminantes pode ser visto na Tabela 4.

TABELA 4. Localização dos pontos culminantes brasileiros.

Nome	Localização	Unidades de Federação	Altitude (m)	Altitude geométrica (m)	Latitude	Longitude
Pico da Bandeira	Serra do Caparaó	ES/MG	2891,3 ⁶	2885,997	20°26'05,29094"S	41°47'44,95280"O
Pedra de Minas	Serra da Mantiqueira	MG/ SP	2798,1 ⁶	2795,393	22°25'41,63285"S	44°50'34,84298"O
Pico das Agulhas Negras	Serra do Itatiaia	MG/ RJ	2790,9 ⁶	2795,393	22°22'48,85143"S	44°39'41,58897"O
Pico do Cristal	Serra do Caparaó	MG	2769,1 ⁶	2763,769	20°26'38,58895"S	41°48'41,93433"O
Morro do Couto	Serra das Prateleiras	RJ	2687,0 ⁷	Sem informação	22°23'07"S	44°41'34"O
Pedra do Sino de Itatiaia	Serra da Mantiqueira	MG	2670,0	Sem informação	22°22'13"S	44°39'42"O
Pico dos Três Estados	Serra da Mantiqueira	MG/ RJ/ SP	2665,0	Sem informação	22°24'22"S	44°48'34"O ²

FONTE: Adaptada de IBGE (2023).

Para tanto, a área selecionada para o cálculo do modelo está compreendida entre as latitudes -12° a -25° e as longitudes de -38° a -53°. A justificativa para a escolha de uma área que excede a região onde estão localizados os pontos culminantes é a possibilidade de comparação com o modelo calculado por Guimarães et al. (2022).

3.2.1.2 Dados gravimétricos

No Brasil, as informações gravimétricas são obtidas por órgãos e instituições. Para esse trabalho foram utilizados valores de gravidade terrestre (Figura 13), nos quais 49067 pontos são advindos do Banco Nacional de Dados Gravimétricos (BNDG) (vermelho) e 1251 pontos são dos projetos “Densificação Gravimétrica no estado de Minas Gerais, visando o cálculo do Modelo Geoidal” (Projeto FAPEMIG: APQ-01547-17) e “Estabelecimento do Sistema Internacional de Referência para Altitudes no Brasil” (Projeto CNPq: 406083/2021-5) (azul).

⁶Altitudes resultantes da aplicação do modelo para conversão de altitudes hgeoHNOR2020 aos resultados dos levantamentos GNSS do Projeto Pontos Culminantes.

⁷ Base Cartográfica Vetorial Contínua do Estado do Rio de Janeiro – 1:25 000.

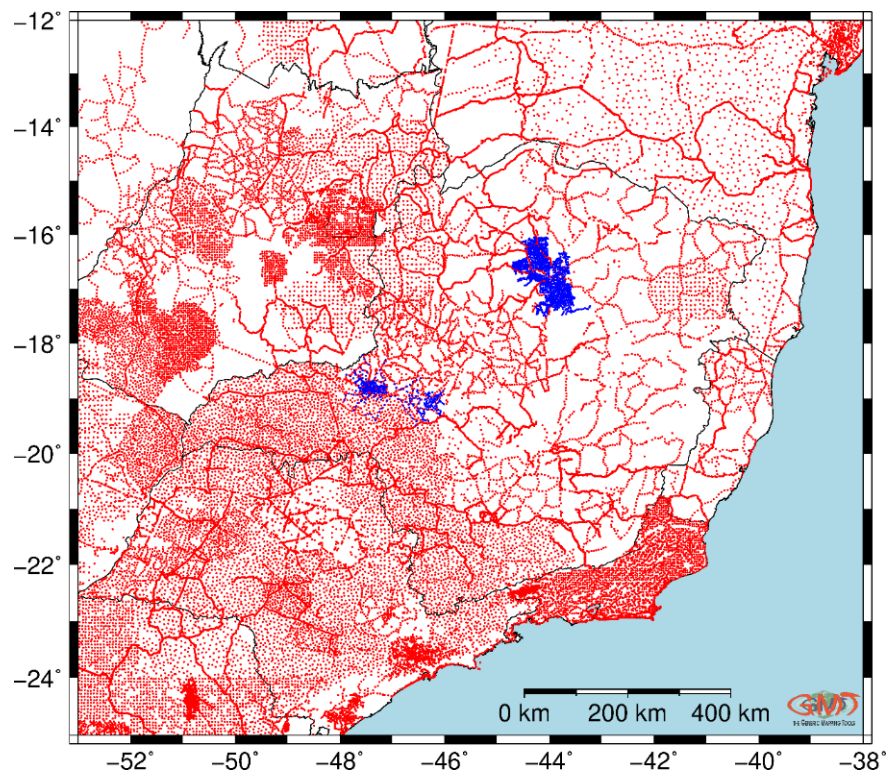


FIGURA 13. Distribuição dos pontos gravimétricos na região do cálculo do modelo geoidal.

3.2.1.3 Modelo Global do Geopotencial

Os Modelos Globais do Geopotencial (MGG) são uma representação das variações do campo de gravidade da Terra, expressas por meio de funções harmônicas esféricas. A origem desses modelos remonta à década de 1960, com trabalhos pioneiros de Guier e Newton (1965), Kaula (1966), Anderle (1966), Lundquist e Veis (1966), Anderle e Smith (1967), e Köhnlein (1967). Com o avanço da tecnologia, surgiu a necessidade de aprimorar os modelos globais para refletir com maior precisão as complexidades do campo gravitacional terrestre. Nos primeiros anos do século XXI, foram lançadas três missões fundamentais para mapear esse campo de gravidade: CHAMP (Challenging Minisatellite Payload), lançada em julho de 2000 (Reigber et al., 1996), GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment), lançada em março de 2002 (GRACE, 1998), e GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer), lançada em março de 2009 (ESA, 2006).

A integração dos dados provenientes dessas missões levou ao desenvolvimento de diversos MGGs, oferecendo modelos mais consistentes e refinados do campo gravitacional da Terra. A exemplo do XGM2019 (*Experimental Gravity Field Model 2019*) (ZINGERLE et al.,

2020), que combina dados do modelo GOCO06S (*Gravity Observation Combination*), um conjunto detalhado de dados de anomalia de gravidade terrestre e oceânica com uma resolução de 15 minutos, fornecido pela NGA (*National Geospatial-Intelligence Agency*). Além disso, foram incorporadas informações gravimétricas do modelo EARTH2014 e um conjunto de dados de anomalia de gravidade com uma resolução de 1 minuto, derivado da altimetria por radar sobre os oceanos, proveniente do modelo DTU13 (Zingerle et al., 2020). Os coeficientes deste modelo abrangem até o grau e ordem 5399, apresentando uma resolução espacial de 4 km.

A escolha do XGM2019 é baseada no estudo realizado por Nicácio, Dalazoana e Freitas (2018), no qual um modelo anterior da família do XGM (*Experimental Gravity Field Model*) se ajustou melhor à região Sudeste do Brasil. Quanto ao grau e ordem do modelo, Guimarães et al. (2022), ao comparar três diferentes graus e ordens (200, 250 e 300) para o cálculo de um modelo quase geoidal, concluíram que o modelo baseado no grau e ordem 300 apresentou melhor consistência do que os outros. Portanto, o modelo geoidal foi calculado com grau e ordem 300. A Figura 14 apresenta anomalia de gravidade pelo XGM2019 para a região do modelo, em uma resolução de $5' \times 5'$ ($0,0833^\circ \times 0,0833^\circ$), utilizada no cálculo do modelo.

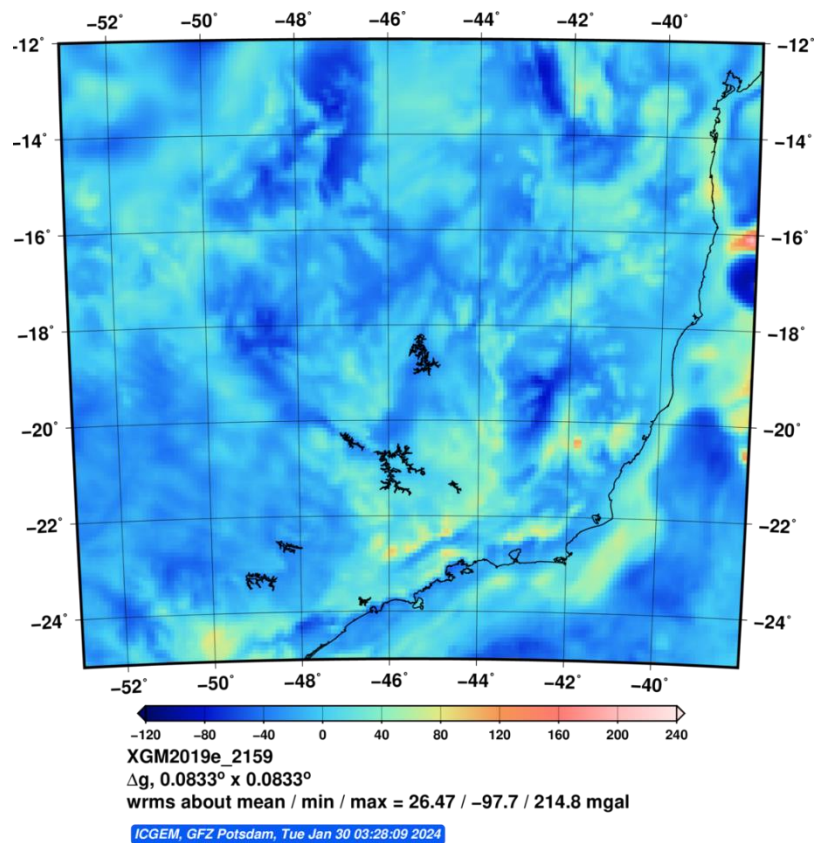


FIGURA 14. Representação da anomalia de gravidade pelo XGM2019 para a região.

3.2.1.4 Modelo Digital do Terreno

O Modelo Digital do Terreno (MDT) (Figura 15) que foi utilizado para calcular os efeitos topográficos é o DTM SRTM15+ (Tozer et al., 2019), que abrange áreas terrestres e oceânicas. Esse modelo possui uma resolução de 15 segundos de arco e é composto pela *Shuttle Radar Topography Mission* (SRTM) e pela missão *Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer* (ASTER) nos continentes, bem como dados derivados das missões CryoSat-2 e Jason-1 sobre os oceanos.

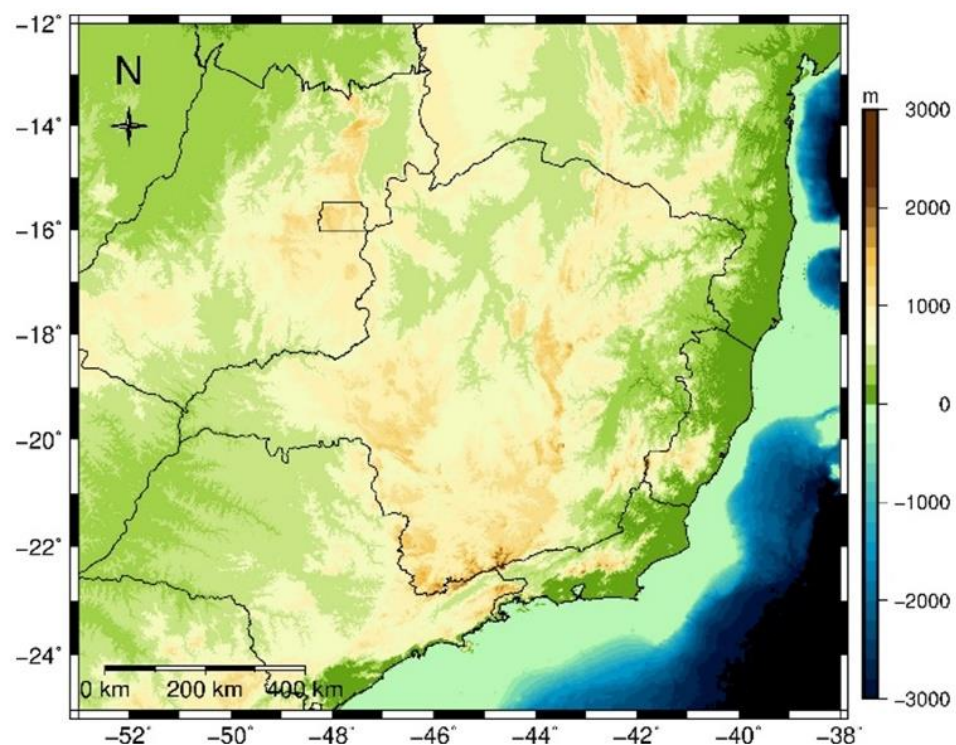


FIGURA 15. MDT SRTM15+. (Guimarães et al., 2022).

3.2.1.5 GNSS/ Nivelamento

Foram selecionadas 520 estações GNSS/Nivelamento medidas pelo IBGE (Figura 16), cujas precisões médias na região para altitude geodésica são de 2 cm, e para altitude normal, de 7 cm (IBGE, 2019). Essas estações foram empregadas no processo de validação do modelo quase geoidal.

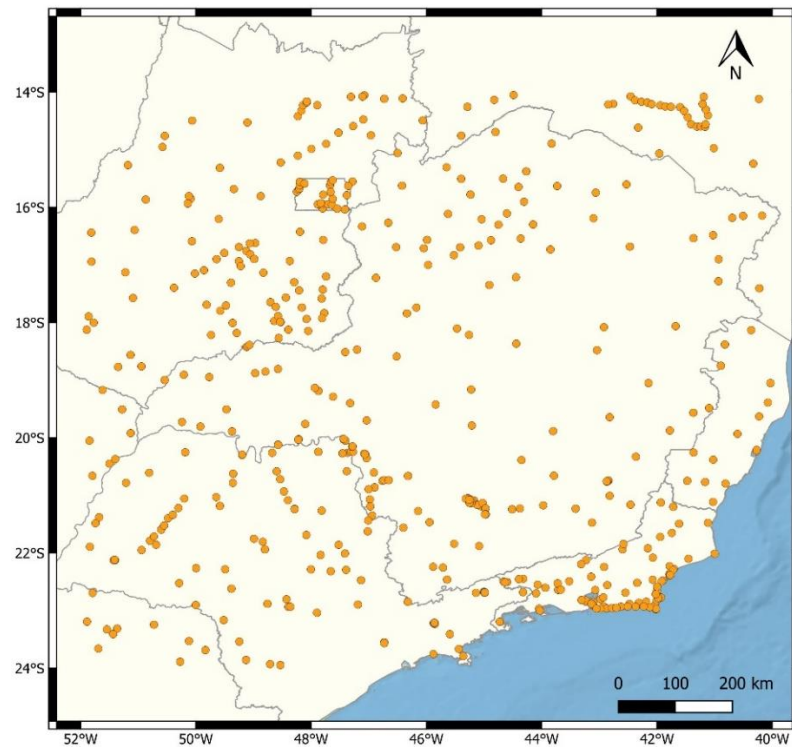


FIGURA 16. Distribuição das estações GNSS/ Nivelamento.

3.2.2 MÉTODO

3.2.2.1 Cálculo do modelo geoidal

O fluxograma (Figura 21) apresenta as etapas para o cálculo do modelo geoidal (GEOIDE_MG2024) e conversão das ondulações geoidais em anomalias de altura.

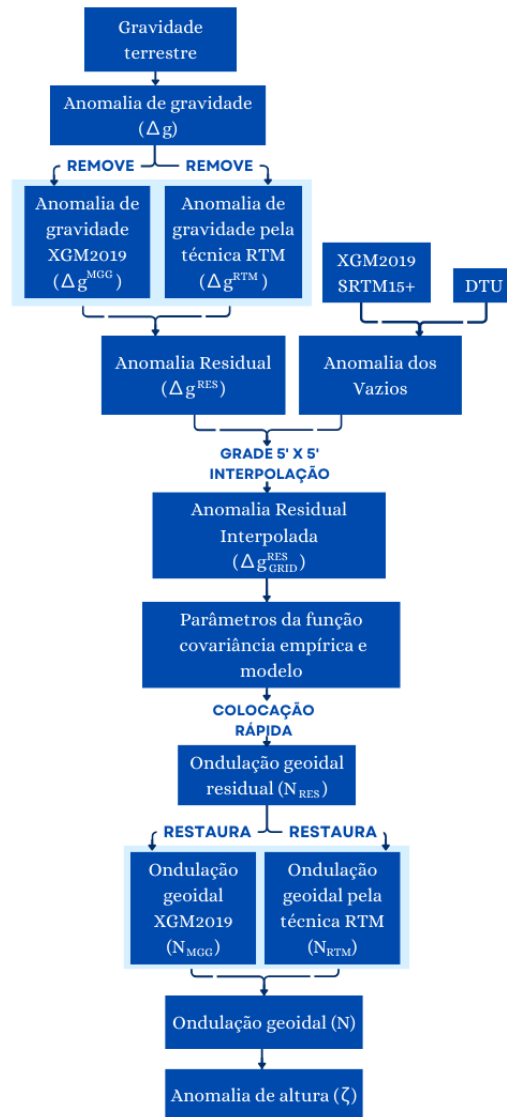


FIGURA 17. Fluxograma da determinação do modelo geoidal.

No primeiro momento, as anomalias de gravidade ar livre (Δ_g) foram determinadas a partir dos dados da gravidade terrestre (latitude, longitude, altitude geodésica e aceleração da gravidade).

Em seguida, a técnica remover-calcular-restaurar foi aplicada. Essa técnica consiste em remover a contribuição dos longos comprimentos de onda advindos do MGG XGM2019 (Δ_g^{MGG}), até grau e ordem 300, e remover o efeito da topografia local pela técnica do *Residual Terrain Model* (RTM)(Δ_g^{RTM}), utilizando o SRTM15+.

Para obter a anomalia de gravidade do MGG, foi utilizado o ICGEM. O programa HARMEXP (Forsberg; Tscherning, 2008) foi utilizado para remover os longos comprimentos de onda do MGG. Posteriormente, para o efeito da topografia local, a técnica RTM foi utilizada,

ela é resultado de um MDT de alta resolução.

Desse modo, é possível então realizar o remover-restaurar, conforme a Equação (14).

$$\Delta_g^{RES} = \Delta_g - \Delta_g^{MGG} - \Delta_g^{RTM} \quad (14)$$

O resultado do processo de remoção é visualizado na Figura 18. A Figura 18(a) apresenta as anomalias de gravidade pontuais, a Figura 18(b), as anomalias removidas da influência do MGG, e a Figura 18(c), os valores de anomalias residuais, isto é, removidos também da influência do terreno.

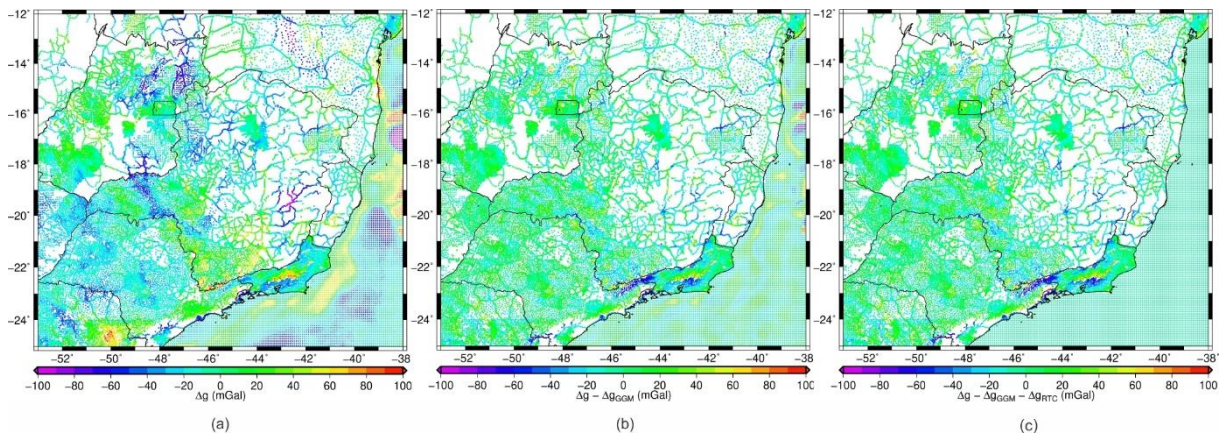


FIGURA 18. Anomalia de gravidade no processo de remoção.

Um resumo estatístico do processo de remoção é apresentado na Tabela 5, em que os dados melhoraram com a remoção dos longos comprimentos de onda. Tendo uma melhora de aproximadamente 65,1% em relação ao desvio-padrão, removendo os comprimentos de onda do MGG.

TABELA 5. Estatística do processo de remover (mGals).

Processo de Remoção	Média	Desvio-padrão	Min	Max
Δ_g	-5,67	25,82	-151,06	210,70
$\Delta_g - \Delta_g^{MGG}$	0,26	17,07	-153,33	139,64
$\Delta_g - \Delta_g^{MGG} - \Delta_g^{RTM}$	-0,27	17,11	-154,51	130,86

Em seguida, os valores de anomalia de gravidade residual foram colocados em uma

grade de 5'x5', resolução adotada para o modelo. Contudo, existem regiões onde não se tem medidas gravimétricas e, conseqüentemente, anomalias de gravidade, o que faz com que se tenha vazios na grade. Por esse motivo, é feito o preenchimento desses vazios. Para tal, o preenchimento, em termos de anomalias de gravidade foi feito usando os valores de anomalias de gravidade do MGG XGM2019, grau e ordem 2190. E, para o oceano, foi utilizado o modelo de campo gravitacional DTU17 (Andersen; Knudsen, 2019), esse modelo foi selecionado porque seus dados são mais confiáveis que os utilizados no XGM2019, que são do DTU13. A Figura 19 apresenta a grade, em que a cor verde indica os valores da anomalia de gravidade residual, a cor vermelha, os locais de vazios preenchidos pelo XGM2019 e a cor azul, os valores do oceano do DTU17.

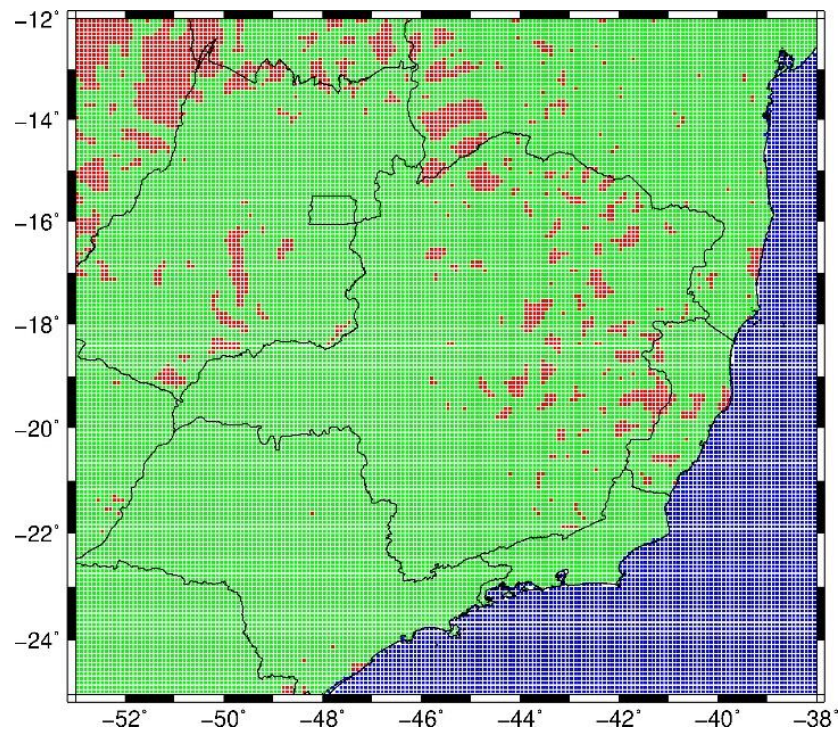


FIGURA 19. Grade 5'x5'.

Os valores de anomalia de gravidade posteriormente foram interpolados com o programa GEOGRID (FORSBERG; TSCHERNING, 2008), o qual utiliza uma célula de busca internamente para prever pontos, com base nos valores dos vizinhos mais próximos nos quatro quadrantes ao redor da área de cálculo, com uma quantidade mínima de cinco pontos para realizar a interpolação.

A anomalia ar livre residual interpolada (Δg_{grid}^{RES}) pode ser vista na Figura 20(a), e o erro da gravidade devido à interpolação, na Figura 20(b). A figura dos erros revela que em regiões

onde há uma melhor distribuição gravimétrica, como na maioria do estado de São Paulo, Rio de Janeiro e região Sul de Minas Gerais e triângulo mineiro, os erros são inferiores, com valores abaixo de 1 mGal. Destacam-se também as áreas que passaram por densificação gravimétrica nos projetos da FAPEMIG (APQ-01547-17) e CNPq (406083/2021-5), localizados ao redor de Montes Claros e triângulo mineiro, apresentando valores inferiores a 0,75 mGal. Em contrapartida, áreas com menor densificação gravimétrica apresentam valores superiores a 1 mGal.

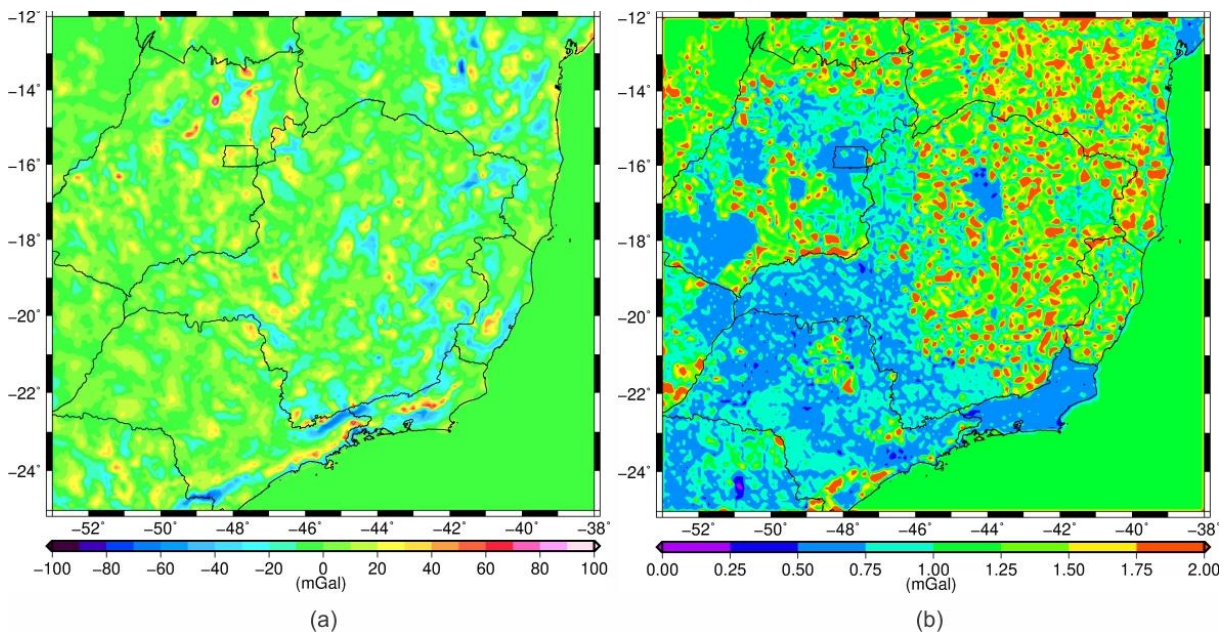


FIGURA 20. Anomalia residual interpolada e o erro devido à interpolação.

Com os dados de anomalia residual interpolada ($\Delta_g^{RES}_{grid}$) calculou-se a função covariância empírica com o programa EMPCOV (Forsberg; Tscherning, 2008), e os valores obtidos foram usados para calcular a função covariância ajustada, utilizando o programa COVFIT (Forsberg; Tscherning, 2008).

Em seguida, a ondulação residual (N_{res}) foi calculada aplicando o método da colocação rápida pelo programa FASTCOL, desenvolvido por Bottoni e Barzaghi, em 1993. Por último, a ondulação geoidal (N) (Figura 21) foi obtida em grade, com a restauração dos comprimentos de onda conforme a Equação (15). A técnica RTM foi utilizada para obter o N_{RTM} , e os valores de ondulação geoidal do MGG (N_{MGG}) foram obtidos pelo ICGEM, a partir do XGM2019 até grau e ordem 300.

$$N = N_{res} + N_{MGG} + N_{RTM} \quad (15)$$

Foi necessário calcular o termo de ordem zero (-0,93 m) para realizar a compatibilização dos parâmetros do elipsoide do MGG com o elipsoide usado para calcular o modelo, o GRS80 (MORITIZ, 2000). Para isso, foi utilizada a Equação (16) (Wellenhof; Moritz, 2006),

$$\zeta_0 = \frac{GM_{XGM2019} - GM_{GRS80}}{R\gamma} \quad (16)$$

onde GM é a constante gravitacional, R é o raio da Terra de acordo com o GRS-80 e γ é a gravidade normal.

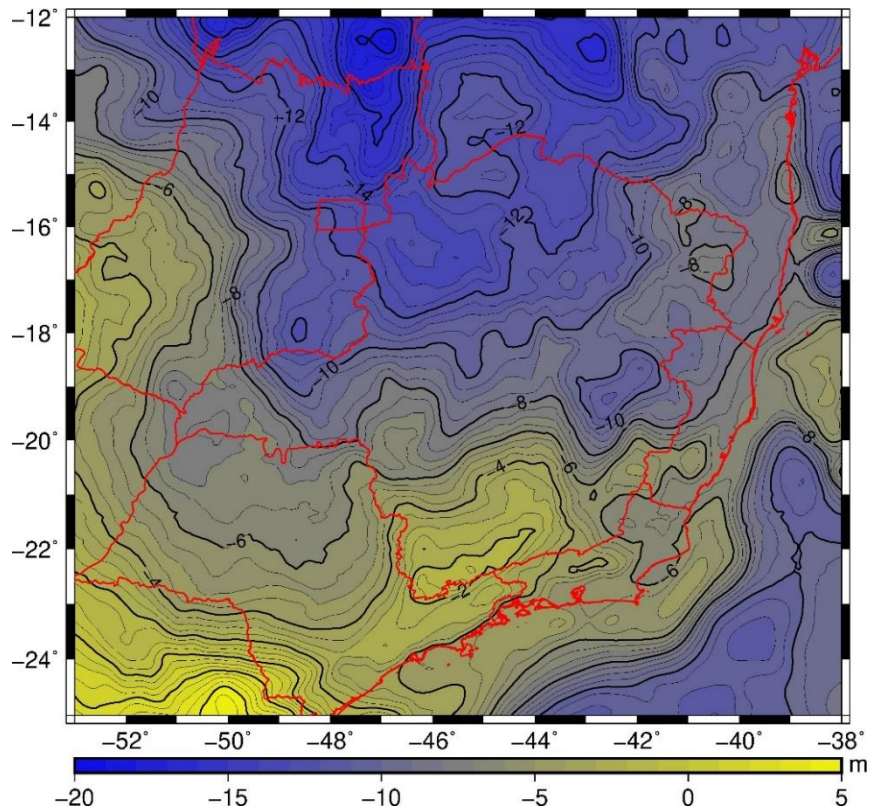


FIGURA 21. Modelo geoidal da área de estudo.

A transformação de ondulações geoidais para anomalias de altura foi realizada aplicando uma correção que relaciona a anomalia de Bouguer e um valor de altitude. Para explicar essa transformação, é fundamental estabelecer uma relação entre a anomalia de altura e a ondulação geoidal, assim como as relações entre a altitude normal (H^N) e a anomalia de altura (Equação 17), e entre a altitude ortométrica (H) e a ondulação geoidal (Equação 18).

$$H^N \cong h_p - \zeta \quad (17)$$

$$H \cong h_p - N \quad (18)$$

Ao relacionar essas quantidades, tem-se a Equação (19):

$$\zeta - N = H - H^N \quad (19)$$

Onde as altitudes (seja normal ou ortométrica) podem ser substituídas pela definição das altitudes em termos de números geopotenciais, com as respectivas reduções gravimétricas, dadas pelas Equações (20) e (21) (Forsberg, 1997).

$$H^N = \frac{C}{\bar{g}} = \frac{C}{g_P + 0,0424[mGal/m]H} \quad (20)$$

$$H = \frac{C}{\bar{\gamma}} = \frac{C}{\gamma_0 - 0,1543[mGal/m]H^N} \quad (21)$$

Ao substituírmos as Equações (20) e (21) na Equação (22), tem-se:

$$\zeta - N = H - H^N \cong \frac{g_P - \gamma_0 + 0,1967[mGal/m]H}{\gamma_0} H \quad (22)$$

Assim, a anomalia de altura é dada pela Equação (23),

$$N - \zeta = \frac{\Delta g_B}{\gamma} H \quad (23)$$

onde γ é a gravidade normal média ao longo do fio de prumo normal, H é a altitude ortométrica e N e ζ são a ondulação geoidal e anomalia de altura, respectivamente.

Para obter o modelo quase geoidal, a transformação foi feita no programa N2ZETA (Forsberg; Tscherning, 2008) com anomalias de Bouguer derivadas do MGG XGM2019, até grau e ordem 2190. A diferença encontrada entre o geoide e o quase geoide podem ser vistas na Figura 22, com valores que variam de -62 cm a 0,5 cm, e que 54% dos valores estão entre -

10 cm e 0,5 cm.

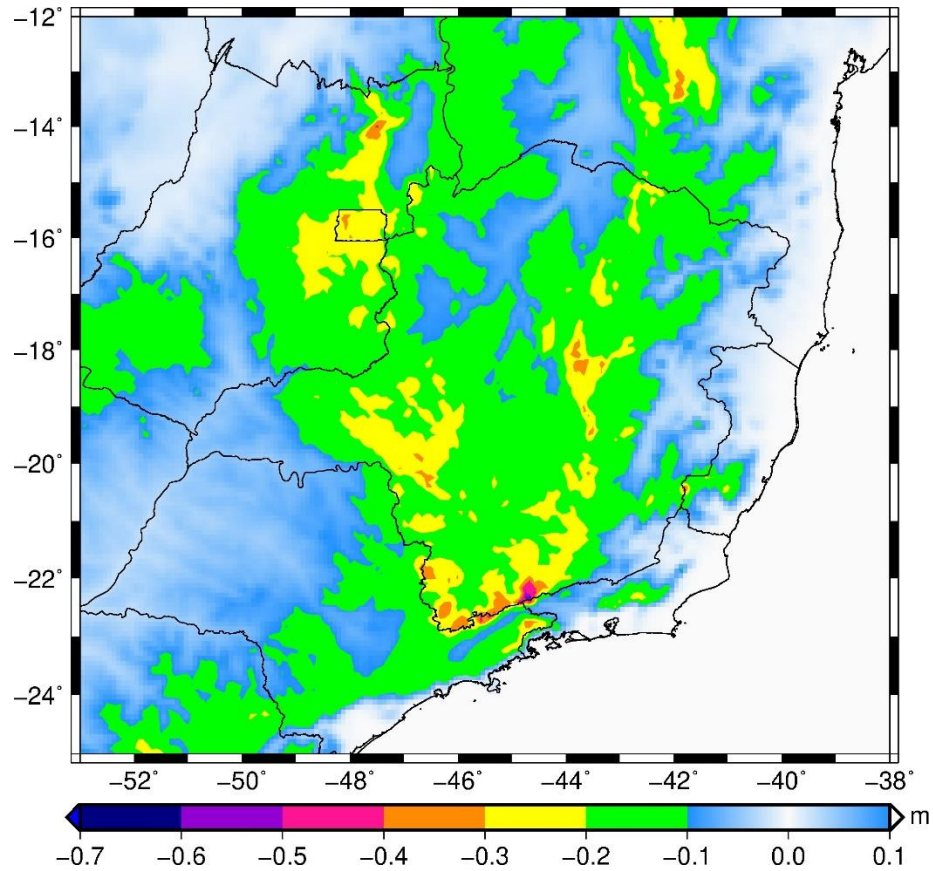


FIGURA 22. Diferença entre o geoide e quase geoide.

A validação do modelo quase geoidal (QGEOIDE_MG2024) foi realizada comparando a diferença entre os valores de anomalia de altura, obtida do modelo quase geoidal, com os valores das estações GNSS/Nivelamento, e entre a ζ obtida no ICGEM pelos MGGs: EIGEN-6C4, GECO, XGM2019 e SGG-UGM-2, em relação aos valores de ζ do GNSS/Nivelamento.

Na Figura (23) é possível ver a discrepância encontrada entre ζ obtida do QGEOIDE_MG2024 e o GNSS/Nivelamento, com valores variando de -0,37 m a 0,7 m, dos quais aproximadamente 62% das diferenças estão em torno de 20 cm.

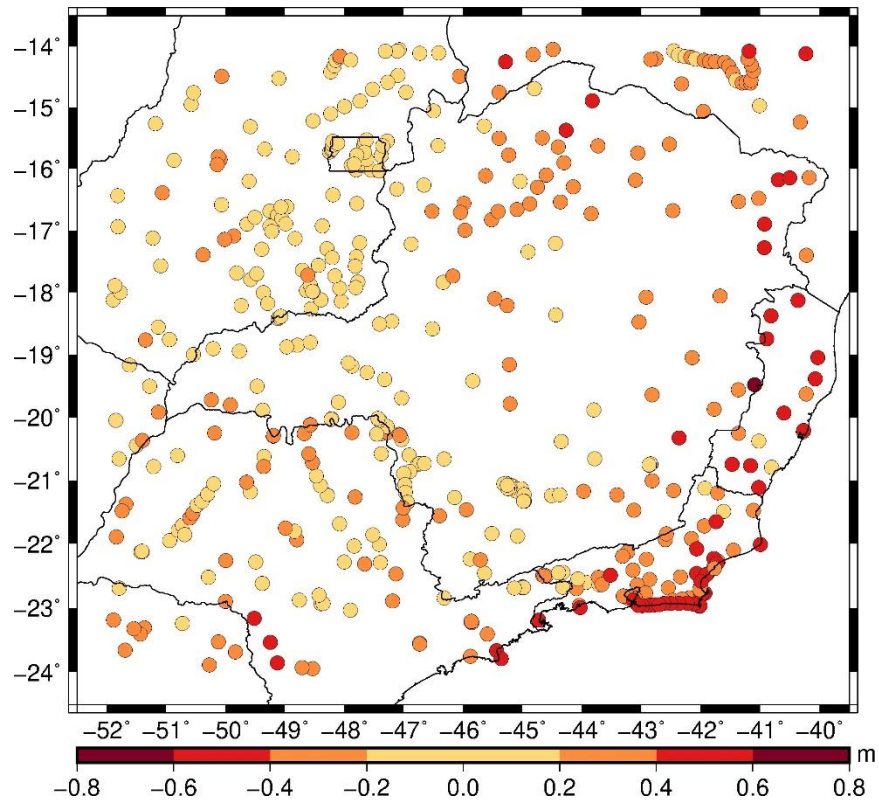


FIGURA 23. Comparação da anomalia de altura com as estações GNSS/Nivelamento.

Quanto à comparação a ζ obtida no ICGEM pelos MGGs e aos valores de ζ do GNSS/Nivelamentos, os resultados podem ser vistos na Figura (24), os mapas mostram os valores pontuais para modelo, e o histograma mostra a dispersão dos dados, em que as barras têm uma variação de 0,10 m, podendo ser observado que os valores estão concentrados em sua maioria em valores positivos, tendo a curva deslocada para a direita.

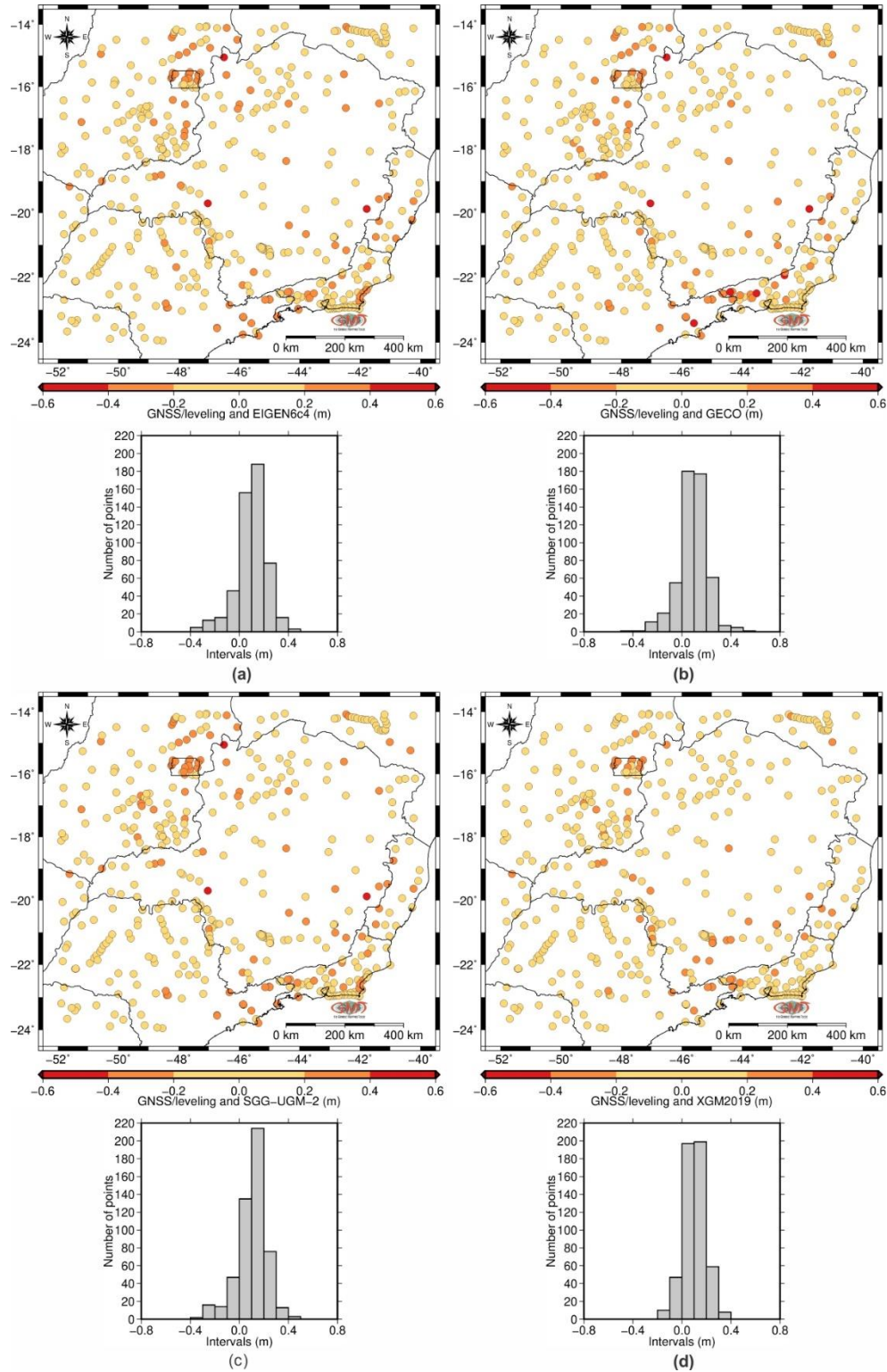


FIGURA 24. Diferença entre os valores de anomalia de altura dos MGGs e as estações GNSS/Nivelamento.

A Tabela 6 apresenta os valores da estatística do processo de validação modelo geoidal, em que a diferença encontrada entre o GNSS/Nivelamento e o QGEOIDE_MG2024 é melhor em 10 cm, em comparação com as diferenças dos MGGs. O mesmo padrão é observado no

RMS (Raiz Média Quadrática), em que valores para os MGGs são de aproximadamente 34 cm, e de 25 cm para o modelo, uma melhoria de aproximadamente 10 cm.

TABELA 6. Estatística das anomalias de altura (m).

Modelo	Média	Desvio-padrão	RMS	Min	Max
Quase Geoide	0,20	0,15	0,25	-0,37	0,70
EIGEN-6C4	0,30	0,16	0,34	-0,23	0,76
GECO	0,29	0,15	0,33	-0,25	0,83
XGM2019	0,30	0,13	0,33	-0,23	0,67
SGG-UGM-2	0,31	0,15	0,34	-0,22	0,76

3.3 DETERMINAÇÃO DAS ALTITUDES DOS PONTOS CULMINANTES

Para calcular os valores de altitudes normais, utilizou-se a solução calculada para a América do Sul (QGEOID2023) e para o modelo quase geoidal de Minas Gerais 2022 (QuGe-MG) (Guimarães et al., 2022), além do modelo calculado QGEOIDE_MG2024.

No modelo QuGe-MG, a superfície quase geoidal foi calculada de maneira direta, considerando o distúrbio da gravidade, sendo o que difere ao modelo calculado neste trabalho.

Já o modelo QGEOID2023 é resultado da transformação de um modelo geoidal para quase geoidal. Na transformação utilizou-se as anomalias de gravidade do XGM2019, tal como neste trabalho. No cálculo do modelo também foi utilizada a técnica remove-calcula-restaura. Os dados gravimétricos utilizados em ambos os modelos são os mesmos, além do grau 300 do MGG XGM2019 para a remoção dos longos comprimentos de onda. Por outro lado, o MDT utilizado no cálculo do modelo foi o SRTMV3. Além disso, foi empregada a técnica de *Downward continuation* (Vanicek et al., 1996), que consiste em reduzir as correções feitas para a superfície do geoide. Por fim, as ondulações geoidais foram calculadas a partir da integral de Stokes, utilizando o pacote computacional SHGEO (Ellmann; Vaníček, 2007).

A Tabela 7 apresenta um resumo de ambos os modelos utilizados.

TABELA 7. Resumo dos modelos quase geoidais.

	QGEOID2023	QuGe-MG	QGEOIDE_MG2024
Resolução	5' x 5'	5' x 5'	5' x 5'
MDT	SRTMv3	SRTM15+	SRTM15+
MGG	XGM2019 até grau e ordem 300	XGM2019 até grau e ordem 300	XGM2019 até grau e ordem 300
Vazios	XGM2019 até grau e ordem 2190	XGM2019 até grau e ordem 2190 e DTU17	XGM2019 até grau e ordem 2190 e DTU17
Termo de ordem zero	-0,93	-0,93	-0,93
Downward continuation	Sim	Não	Não
Tranformação de Geoide para Quase Geoide	Sim	Não	Sim
Pacote Computacional	SHGEO	GRAVSOFT	GRAVSOFT

O procedimento de cálculo das altitudes normais dos pontos culminantes consistiu em interpolar ζ do modelo quase geoidal a partir das coordenadas de cada ponto (2ª coluna da Tabela 8). A anomalia de altura interpolada foi utilizada para determinar a gravidade normal ($\bar{\gamma}_{Q_0}$) referida no ponto Q (Equação 5) (4ª coluna da Tabela 8) e, em seguida, também foi utilizada para obter o valor do W_p (Equação 4) (5ª coluna da Tabela 8). Sendo possível, então, calcular C_p (Equação 1) (6ª coluna da Tabela 8).

Para calcular o valor da gravidade normal, é necessário conhecer as altitudes geométricas (h) (3ª coluna da Tabela 8). Como os quatro primeiros pontos culminantes (ver Tabela 4) possuem uma estação GNSS, foi possível obter essas altitudes no “Relatório de Estação Geodésica” no Banco de Dados Geodésicos (BDG) (<http://www.bdg.ibge.gov.br/>) do IBGE. Para os outros três cumes, a partir das coordenadas da Tabela 4, foi calculado o fator de conversão no serviço hgeoHNOR2020. O resultado foi subtraído da altitude referente à Tabela 4 e extraída a altitude geométrica.

A Figura 25 apresenta a metodologia adotada para o cálculo das altitudes normais.

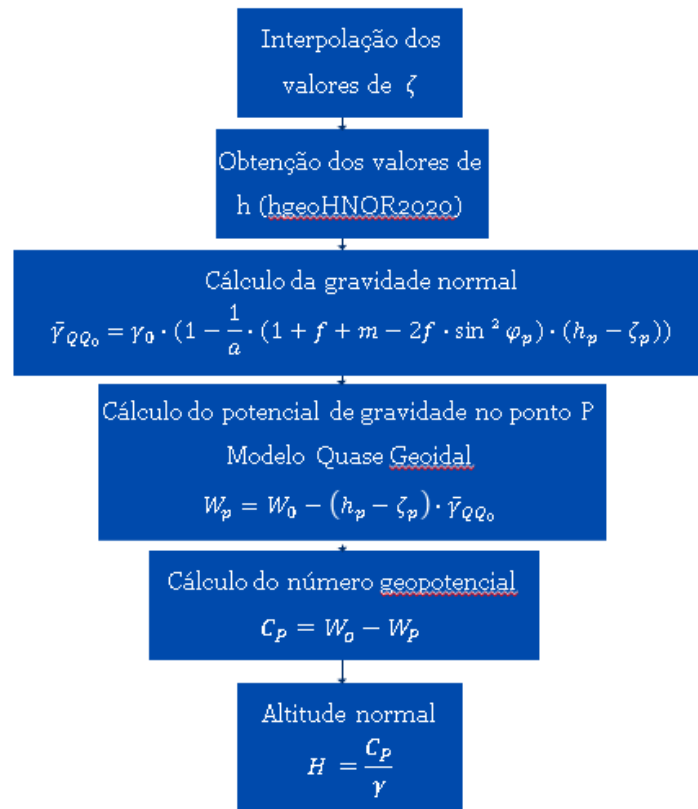


FIGURA 25. Metodologia de cálculo para as altitudes normais a partir de modelos quase geoidais.

TABELA 8. Quantidades obtidas no cálculo das altitudes normais

Localização	ζ (m)	$\bar{\gamma}_{Q_0}$	W_P (m^2s^{-2})	C_P (m^2s^{-2})
QGEOID2023				
Pico da Bandeira	-5,23	9,775715317	62608570,93	28282,225
Pedra da Mina	-2,63	9,775748045	62609478,89	27374,292
Pico das Agulhas Negras	-2,70	9,782161473	62609548,16	27305,018
Pico do Cristal	-5,17	9,783528668	62609766,68	27086,473
Morro do Couto	-2,65	9,783509065	62610565,81	26287,370
Pedra do Sino de Itatiaia	-2,70	9,782355704	62610731,46	26121,724
Pico dos três estados	-2,67	9,776530397	62610780,63	26072,555
QuGe-MG				
Pico da Bandeira	-5,59	9,782160928	62608567,48	28285,677
Pedra da Mina	-2,63	9,783528658	62609478,83	27374,351
Pico das Agulhas Negras	-2,61	9,783509209	62609549,07	27304,109

Pico do Cristal	-5,56	9,782355100	62609762,86	27090,297
Morro do Couto	-2,56	9,783663487	62610566,63	26286,549
Pedra do Sino de Itatiaia	-2,50	9,783689629	62610733,38	26119,798
Pico dos três estados	-2,58	9,783720191	62610781,54	26071,646
QGEOIDE_MG2024				
Pico da Bandeira	-5,75	9,782160676	62608565,89	28287,271
Pedra da Mina	-2,62	9,783528681	62609478,98	27374,204
Pico das Agulhas Negras	-2,62	9,783509187	62609548,94	27304,246
Pico do Cristal	-5,73	9,782354841	62609761,22	27091,939
Morro do Couto	-2,57	9,783663474	62610566,56	26286,627
Pedra do Sino de Itatiaia	-2,52	9,783689601	62610733,21	26119,974
Pico dos três estados	-2,56	9,783720219	62610781,71	26071,470

Em seguida, as altitudes normais foram calculadas pela Equação (24), utilizando o C_P e $\bar{\gamma}_{Q_0}$ (Tabela 8). A Tabela 9 apresenta os valores das altitudes normais calculadas para os três modelos.

$$H^N = \frac{C_P}{\bar{\gamma}_{Q_0}} \quad (24)$$

TABELA 9. Valores de altitude normal (m) para o QGEOID2023, QuGe-MG e QGEOIDE_MG2024.

Localização	QGEOID2023	QuGe-MG	QGEOIDE_MG2024
Pico da Bandeira	2891,20	2891,56	2891,72
Pedra da Mina	2798,00	2798,00	2797,99
Pico das Agulhas Negras	2790,92	2790,83	2790,84
Pico do Cristal	2768,91	2769,30	2769,47
Morro do Couto	2686,86	2686,78	2686,79
Pedra do Sino de Itatiaia	2669,93	2669,73	2669,75
Pico dos Três Estados	2664,89	2664,80	2664,78

Em seguida, esses valores de altitude normal foram comparados com os valores de altitude oficiais obtidos do IBGE (Tabela 4), e podem ser vistos na Figura 26 e na Tabela 10.

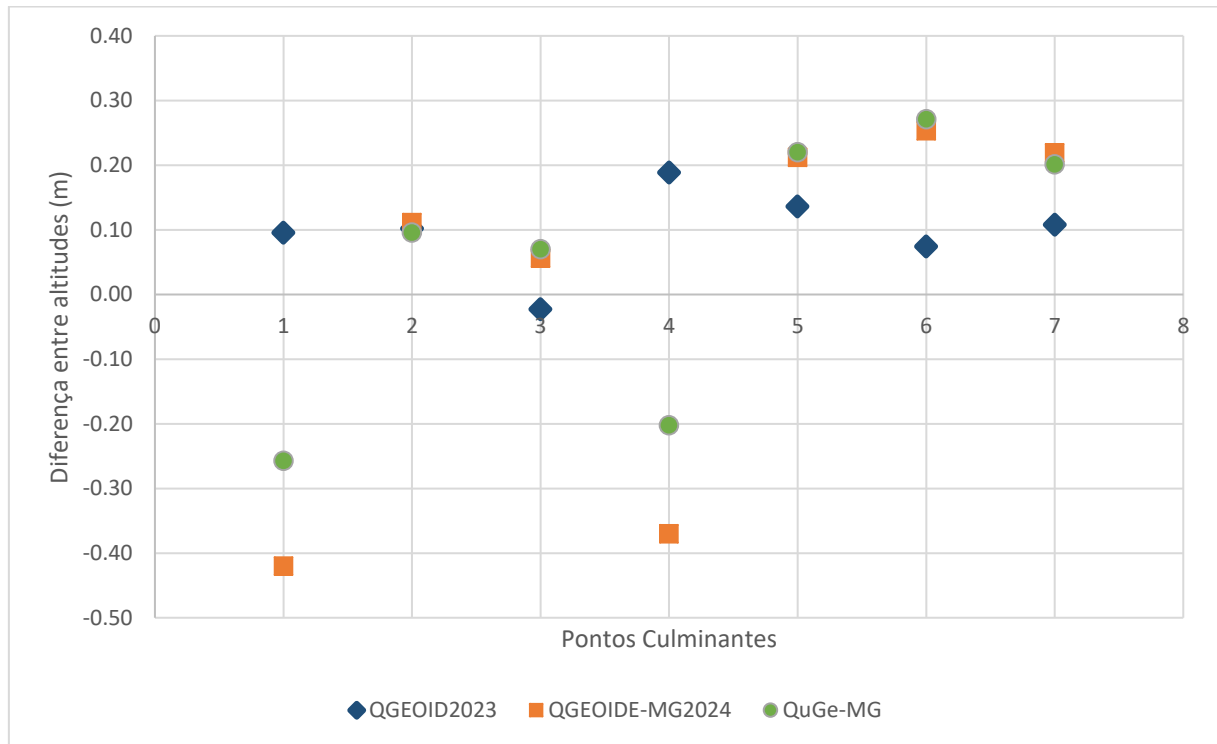


FIGURA 26. Diferenças altimétricas entre os valores oficiais e o QGEOID2023 (Azul), QuGe-MG (Verde) e QGEOIDE-MG2024 (Laranja). Onde os pontos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são o Pico da Bandeira, a Pedra da Mina, o Pico das Agulhas Negras, o Pico do Cristal, o Morro do Couto, a Pedra do Sino de Itatiaia e o Pico dos Três Estados, respectivamente.

TABELA 10. Análise comparativa das diferenças altimétricas dos valores oficiais com QGEOID2023, QuGe-MG e QGEOIDE_MG2024, em metros.

Localização	QGEOID2023	QuGe-MG	QGEOIDE_MG2024
Pico da Bandeira	0,10	-0,26	-0,42
Pedra da Mina	0,10	0,10	0,11
Pico das Agulhas Negras	-0,02	0,07	0,06
Pico do Cristal	0,19	-0,20	-0,37
Morro do Couto	0,14	0,22	0,21
Pedra do Sino de Itatiaia	0,07	0,27	0,25
Pico dos Três Estados	0,11	0,20	0,22

Ao analisar a Figura 26 e a Tabela 10, é possível perceber que nos pontos localizados

onde há densificação gravimétrica (Pedra da Mina, Pico das Agulhas Negras, Morro do Couto, Pedra do Sino de Itatiaia e Pico dos Três Estados) (Figura 27.b), os modelos QuGe-MG e QGEOIDE_MG2024 apresentaram valores semelhantes, com uma discrepância de 1 cm para a Pedra da Mina, o Pico das Agulhas Negras e o Morro do Couto, e de 2 cm para a Pedra do Sino de Itatiaia e o Pico dos Três Estados, que são os pontos sobre os quais não se tem informação quanto ao tipo de altitude utilizada.

Ao contrário dos pontos localizados onde há uma escassa densificação gravimétrica (Pico da Bandeira e Pico do Cristal) (Figura 27.a), o modelo QGEOIDE_MG2024 apresentou maiores diferenças e com valores negativos, demonstrando que, apesar de utilizarem os mesmos dados no cálculo, ao transformar de geóide para quase geóide, nesta área a diferença na metodologia de cálculo fez com que ocorresse uma discrepância. Vale ressaltar que essa discrepância é praticamente linear em ambos os pontos, com uma diferença de 16 cm para o Pico da Bandeira e de 17 cm para o Pico do Cristal.

Acerca do modelo QGEOID2023, ele apresenta as menores diferenças em relação aos valores oficiais, indicando que a técnica *Downward continuation* possivelmente influenciou mais os dados em relação aos outros dois modelos, em que os pontos localizados onde há densificação gravimétrica (Figura 27.b) possuem diferenças menores que 15 cm, e para os pontos Pico da Bandeira e Pico do Cristal há uma diferença de 10 cm e de 19 cm, respectivamente.

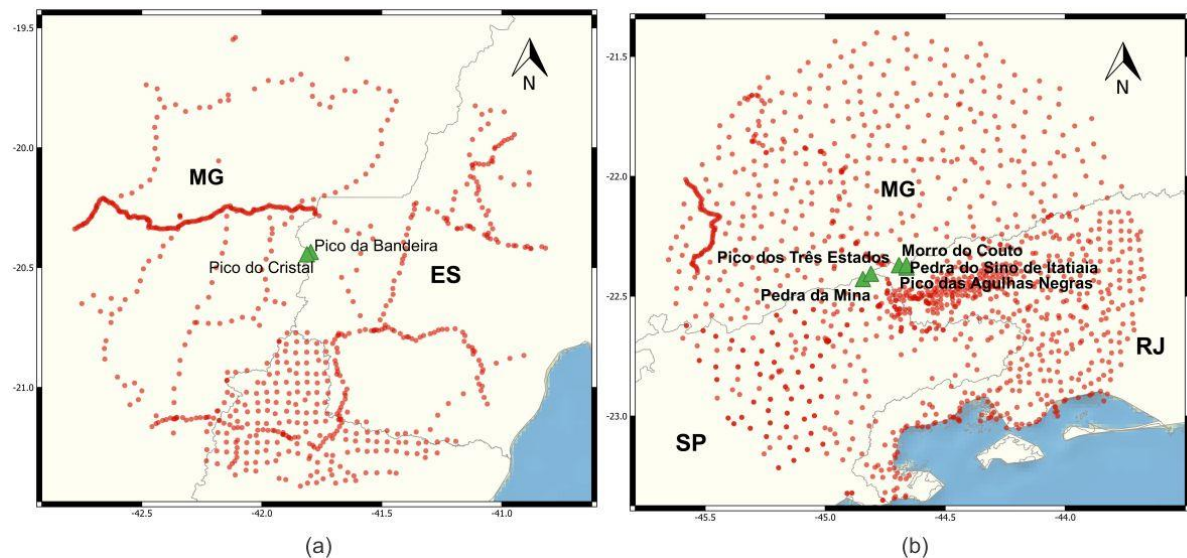


FIGURA 27. Distribuição dos pontos gravimétricos ao redor dos pontos culminantes em um raio de 100 km.

Foi feita uma análise a fim de identificar o comportamento das estações GNSS/Nivelamento, em um raio de 100 km, ao redor dos pontos culminantes, nela se comparou os valores de altitude normal do IBGE com os obtidos pelo QGEOID2023, QuGe-MG e QGEOIDE_MG2024. Nas Figuras 28 e 29, é possível ver as diferenças encontradas para cada um dos pontos GNSS/Nivelamento.

Nas Figuras 28 e 29, é possível ver que na primeira área, onde não há densificação gravimétrica (Minas Gerais e Espírito Santo), quanto mais próximo aos pontos culminantes, as discrepâncias entre QuGe_MG e QGEOIDE_MG2024 são maiores, e que, nos pontos em que a diferença é menor, é porque são pontos que se encontram com densificação gravimétrica ao redor. Quanto ao QGEOID2023, os menores valores são aqueles que possuem densificação gravimetria no entorno do ponto.

Já para a área onde há densificação gravimétrica, os modelos apresentaram comportamentos diversos. O QGEOID2023 é o modelo que apresentou maior consistência entre os pontos. Quanto ao QuGe_MG, o modelo tem as diferenças semelhantes à diferença entre W_0 e o marégrafo de Imbituba, de $0,387 \pm 0,018\text{m}$ (Sánchez & Sideris, 2017). E, por último, o QGEOIDE_MG2024 apresentou as menores diferenças.

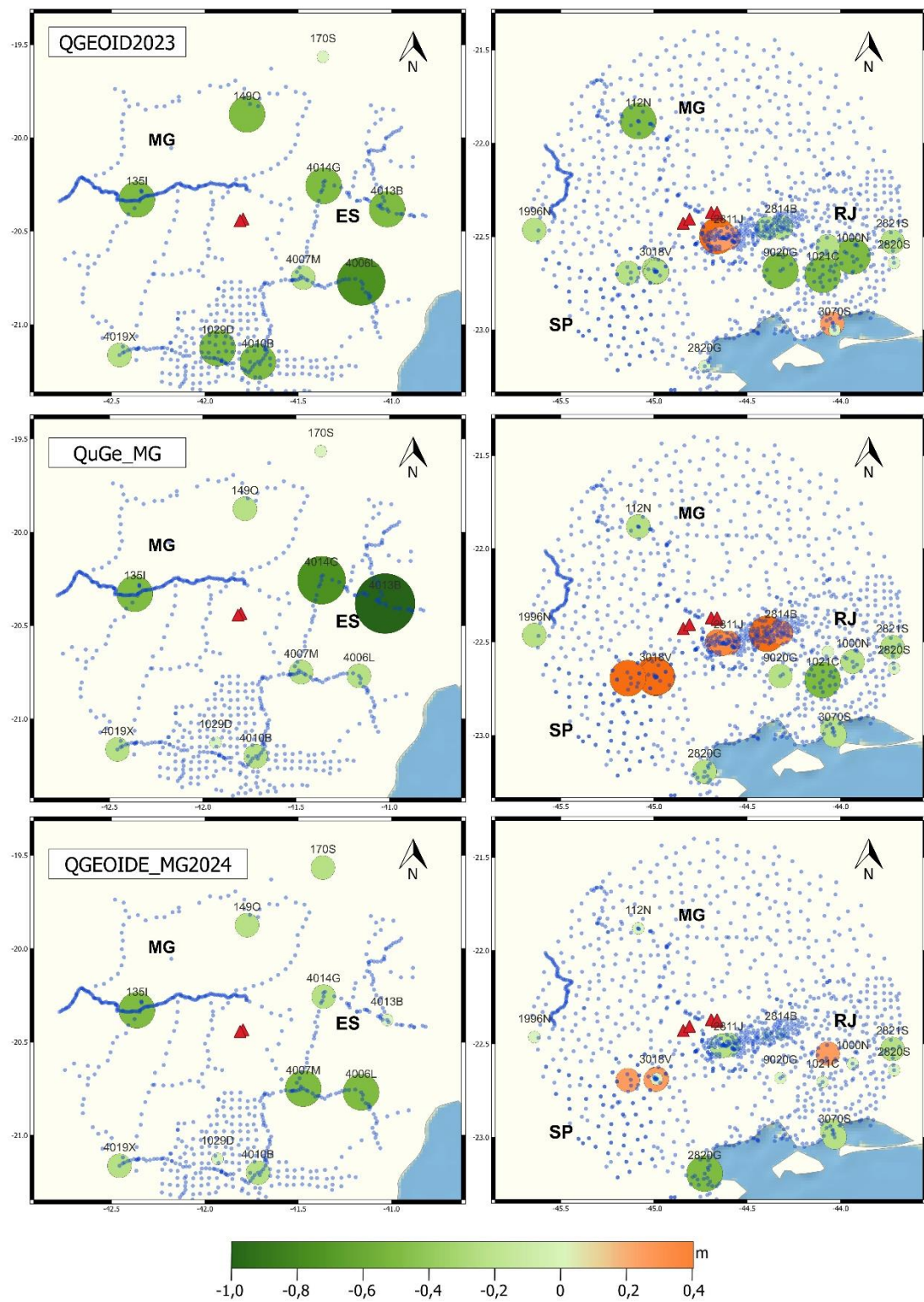


FIGURA 28. Diferenças pontuais de altitudes normais oficiais e os modelos QGEOID2023, QuGe_MG e QGEOIDE_MG2024.

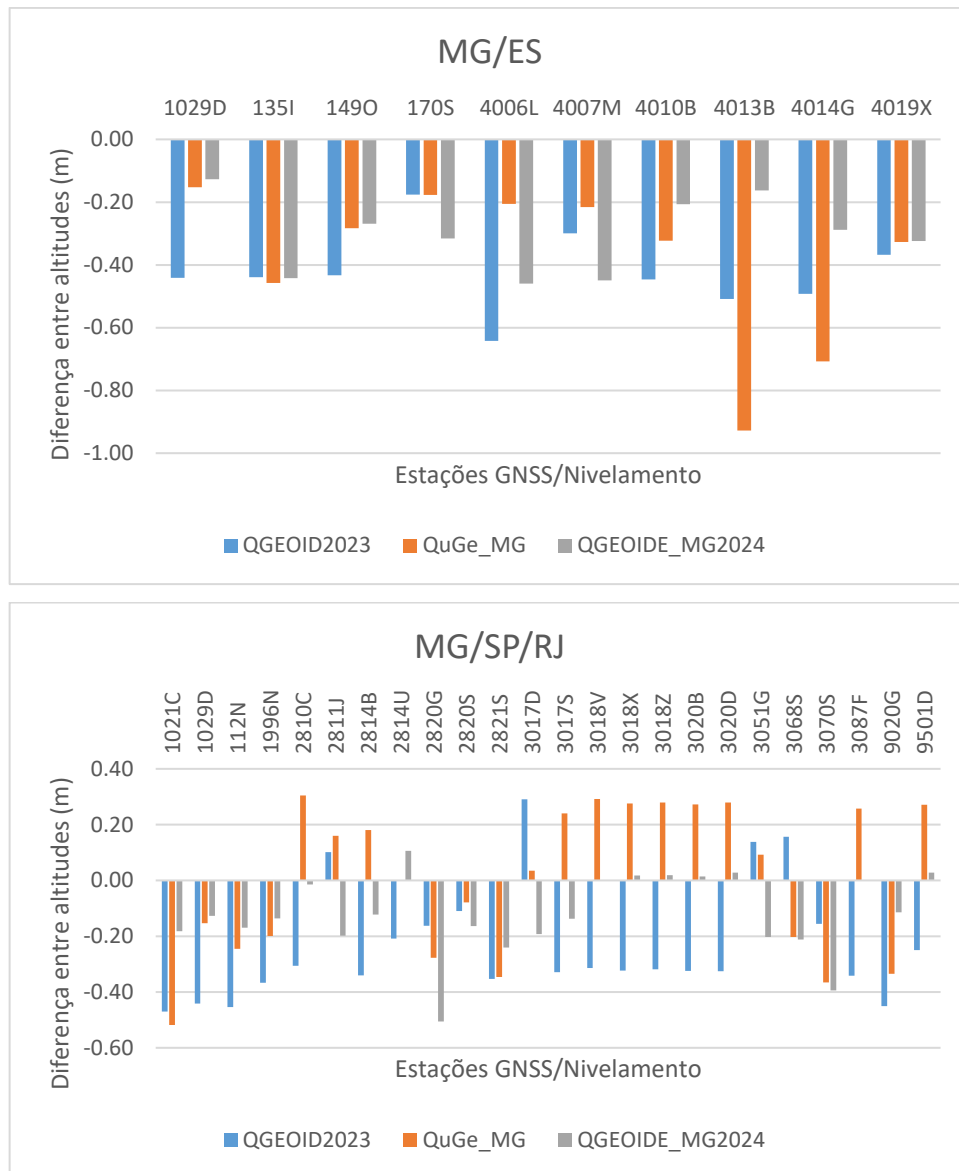


FIGURA 29. Análise comparativa das diferenças altimétricas oficiais e o novo modelo, o QGEOID2023 e o QuGe-MG para as estações GNSS/Nivelamento ao redor dos pontos culminantes, em metros.

Assim, ainda que os dados de entrada sejam considerados os mesmos, diferentes metodologias de cálculo podem resultar em diferentes resultados. Além disso, os valores obtidos do IBGE ainda estão vinculados ao *Datum* de Imbituba, era esperado que as altitudes tivessem uma diferença parecida, porém, existem erros sistemáticos e aleatórios associadas ao nivelamento geométrico, às medidas de gravidade, ao MDT e a erros de omissão e comissão dos MGGs.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A cooperação multilateral é o alicerce fundamental para uma infraestrutura geodésica global. Para tanto, este trabalho buscou auxiliar na implementação de um sistema global através do seu sistema altimétrico. Neste sentido, este trabalho almejou apresentar um histórico dos sistemas altimétricos na América do Sul, principalmente em relação ao SIRGAS e ao GT-III, a fim de mostrar o que os países têm feito ao longo dos anos, assim como verificar a potencialidade de um modelo geoidal e dos MGGs para as estações IHRF. Adicionalmente, o foco foi obter novas altitudes para os pontos culminantes localizados na região Sudeste, de modo que fossem vinculadas ao IHRF.

Em relação ao histórico dos sistemas altimétricos, foi identificado que os países dos quais se tem informações vêm trabalhando na atualização dos seus sistemas, e o SIRGAS desempenha um papel fundamental na América do Sul. Através do GT-III, o SIRGAS trabalha na unificação dos sistemas altimétricos, apoiando países em diversas tarefas. Contudo, apesar dos esforços persistentes, há uma resistência em relação à abertura dos repositórios, limitando o acesso a informações de todos os países, esse problema faz com que não seja possível auxiliar todas as nações no ajuste, já que há a necessidade de se conhecer as informações atuais.

Quanto ao segundo objetivo proposto, foi possível verificar a potencialidade de ambas as metodologias para as estações IHRF na América do Sul, em que os resultados obtidos no cálculo utilizando os MGGs em relação ao modelo geoidal não apresentam a mesma consistência, uma vez que eles não se adaptaram de maneira satisfatória a algumas regiões. Isso é resultado de sua construção, pois o MGG não possui uma resolução equivalente ao modelo, uma vez que não é desenvolvido até um grau e ordem, como o modelo.

Por último, quanto aos valores de altitude normal calculados a partir da solução produzida para a América do Sul (QGEOID2023) e dos modelos quase geoidais de Minas Gerais (QuGe-MG) e (QGEOID-MG2024), eles foram comparados com as altitudes fornecidas pelo IBGE, de modo a verificar cada uma das metodologias. Assim, temos que as altitudes obtidas pelo QGEOID2023 apresentam as menores discrepâncias, sendo presumível que a técnica *downward continuation* impactou os valores obtidos, principalmente em áreas em que a densificação gravimétrica é menor. Quanto aos outros modelos, a transformação de geoide para quase geoide faz com que as discrepâncias do novo modelo sejam maiores em locais onde a densificação gravimétrica é menor. Com isso, temos que é possível obter altitudes normais a partir do PVCG, porém com um certo nível de significância, devido à qualidade dos dados.

Portanto, em pesquisas futuras, é necessário que outras análises sejam feitas

considerando que altitudes próximas não possuem a mesma consistência entre si. Além disso, considerando a transformação de geoide para quase geoide, uma investigação mais aprofundada desse processo para regiões montanhosas pode ser conveniente, de maneira que haja uma avaliação de como diferentes técnicas de transformação podem afetar a qualidade do modelo quase geoidal.

Também é importante ressaltar que há a necessidade de uma atualização das altitudes dos pontos culminantes, já que elas possuem características históricas que não estão alinhadas com práticas contemporâneas e métodos atualizados. Recomenda-se uma revisão dessas altitudes, de modo a padronizar os pontos culminantes brasileiros. Da mesma forma para que haja esforços na densificação gravimétrica em áreas onde há escassez, com vistas a contribuir com resultados mais consistentes e confiáveis.

REFERÊNCIAS

- ALBARICI, F. L.; FOROUGH, I.; GUIMARÃES, G. N.; SANTOS, M.; TRABANCO, J. A. **A new perspective for physical heights in Brazil. Boletim de Ciencias Geodésicas**. v. 25, n. 1. 2019. DOI: 10.1590/s1982-21702019000100001.
- ALBARICI, F. L.; GUIMARÃES, G. N.; SANTOS, M. C.; TRABANCO, J. L. A. **Strategy for Connecting to the IHRF: Case Study for the Tide Gauge of Cananeia-SP**. Anuário do Instituto de Geociências. v. 44. 2021. DOI: 10.11137/1982-3908_2021_44_41104.
- ANDERLE, R. Geodetic parameter set NWL-5E-6 based on Doppler satellite observations. In: 2nd INTERNATIONAL SYMPOSIUM GEODETIC USE OF SATELLITES, 1966, Atenas. **Proceedings...** G. Veis, 179-220p. 1966.
- ANDERLE, R.; SMITH, S. **NWL-8 Geodetic parameters based on Doppler satellite observations**. NWL Technical Report n. 2106. Dahlgren. 1967.
- BARTHELMES, F. **Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models: theory and formulas used by the calculation service of the International Centre for Global Earth Models (ICGEM)**. 2013. Disponível em: <<http://icgem.gfz-potsdam.de/str-0902-revised.pdf>>. Acesso em: 26 jun. 2023.
- BOTTONI, G. P.; BARZAGHI, R. Fast collocation. **Bulletin Géodésique**, v. 67, n. 2, p. 119–126, jul. 1993. DOI:10.1007/BF01371375
- CARRIÓN SÁNCHEZ, J. L. **Vínculo do datum vertical equatorial ao International Height Reference System - IHRF**. 2017. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas– Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2017.
- CROQUIS, J.; FAURE, J.; SUBIZA, W. **Modernización de la red geodésica vertical de Uruguay**. In: SIMPOSIO SIRGAS 2022, Santiago, Chile. 2022. p. 1-14. Disponível em: <<https://sirgas.ipgh.org/wp-content/uploads/2022/11/21-Juan-Croquis.pdf>>. Acesso em: 25 jun. 2023
- DELGADO, R. E. **Avaliação do uso de GNSS e de dados refinados de um modelo global do geopotencial para determinação de altitudes normais referenciadas aos data verticais brasileiros e ao IHRF**. 2021. 118 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) - Setor de Ciências da Terra. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2021.
- DREWES, H. *et al.* **The Geodesist's Handbook 2016**. Journal Of Geodesy, v. 90, n. 10, p. 907-1205, 30 set. 2016. Springer Science and Business Media LLC. DOI: 10.1007/s00190-016-0948-z.
- DREWES, H. **Historical development of SIRGAS**. Journal Of Geodetic Science, v. 12, n. 1, p. 120-130, 1 jan. 2022. DOI: 10.1515/jogs-2022-0137.
- ELLMANN, A.; VANÍČEK, P. UNB application of Stokes–Helmert's approach to geoid computation. **Journal of Geodynamics**, v. 43, n. 2, p. 200-213, 2007. DOI:10.1016/j.jog.2006.09.019
- ESA. **ESA's gravity mission – GOCE**. BR-2009. Revised June 2006. ESA Publications

Division. ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, 2006.

FAURE, J.; SUÁREZ, N. **Integración de datos altimétricos y gravimétricos para la determinación de números geopotenciales en la Red Geodésica Nacional Vertical del Uruguay**. In: SIMPOSIO SIRGAS 2015, Santo Domingo, República Dominicana. 2015. p. 1-24. Disponível em: <https://sirgas.ipgh.org/docs/Boletines/Bol20/32_Faure_et_al_2015_Red_vertical_Uruguay.pdf>. Acesso em: 25 mai. 2023.

FORSBERG, R. **Terrain effects in geoid computations**. International Geoid School. Rio de Janeiro, 1997

FORSBERG, R.; TSCHERNING C.C. **An overview manual for the GRAVSOFT geodetic gravity field modelling programs**. 2 nd edition, Denmark, 2008.

FÖRSTE, C.; NBRUINSMA, S.L. ABRIKOSOV, O. LEMOINE, J. M.; SCHALLER, T.; GÖTZE, H. J.; EBBING, J.; MARTY, J. C.; FLECHTNER, F.; BALMINO, G.; BIANCALE, R. EIGEN-6C4 The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. **GFZ Data Services**. 2014. DOI: 10.5880/icgem.2015.1.

FREITAS, S.R.C.; BLITZKOW, D. **Altitudes e geopotencial**. IGeS Bulletin – Special Issue for South America, n. 9, 1999, p. 47-62.

GGOS. **Why GGOS?** Disponível em: <<https://ggos.org/about/why-ggos/>>. Acesso em: 12 set. 2023.

GILARDONI, M.; REGUZZONI, M.; SAMPIETRO, D. **GECO: a global gravity model by locally combining GOCE data and EGM2008**. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 60(2), pp.228-247. 2015. DOI:10.1007/s11200-015-1114-4

GRACE. **Science and mission**. Requirements document, revision A, JPLD-15928, NASA's Earth System Science Pathfinder Program, 1998.

GUIER, W.H.; NEWTON, R.R. The Earth's gravity field deduced from the Doppler tracking of five satellites. **Journal of Geophysical Research**, v. 70, p. 4613-4626, 1965. DOI:10.1029/JZ070i018p04613

GUIMARÃES, G. N.; BLITZKOW, D.; SILVA, V. C.; MATOS, A. C. O. C.; INOUE, M. E. B.; OLIVEIRA, S. L. New Gravimetric Infrastructure in Southeast Brazil: From Absolute Gravity Network to a Geoid Model. **Journal of Surveying Engineering**, v. 148, n. 3, p. 4022002, 2022. DOI:10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000393

GUIMARÃES, G. N.; BLITZKOW, D.; SILVA, V. C.; MATOS, A. C. O. C.; INOUE, M. E. B. **O Estabelecimento do IHRF no Brasil: situação atual e perspectivas futuras**. *Revista Brasileira de Cartografia*, v. 74, n. 3, p. 651-670, 5 set. 2022. EDUFU - Editora da Universidade Federal de Uberlândia. DOI: 10.14393/rbcv74n3-64949.

GUIMARÃES G. N.; MATOS A.C.O.C.; BLITZKOW D. **Estimation of Geopotential Values and Local Vertical Data Parameters in South America Based on the Geodetic Boundary Value Problem Solution**. Preprint. 2024

GUYANA LANDS & SURVEYS COMMISSION. **GEODETTIC INFRASTRUCTURE IN GUYANA**. 2023. Disponível em:

<https://guynode.com/Guyana_Geodetic_infrastructure.pdf>. Acesso em: 25 jul. 2023.

HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. **Physical Geodesy**. 2nd Edition, New York: Springer. 403 p, 2006. DOI: 10.1007/b139113

IAG - INTERNATIONAL ASSOCIATION OF GEODESY. **Description of the Global Geodetic Reference Frame (GGRF)**. Position paper adopted by the IAG Executive Committee. 2016. DOI:<https://doi.org/10.1007/s00190-016-0994-6>.

IAG - INTERNATIONAL ASSOCIATION OF GEODESY. **Resolution nº 1**. Prague, July 2015. Disponível em: <https://ihrs.dgfi.tum.de/fileadmin/JWG_2011/IAG_Resolutions_2015.pdf>.

IBGE - INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Quatro picos brasileiros tem sua altitude**. Agência IBGE: Notícias, 2004. Disponível em: <<https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/12824-asi-quatro-picos-brasileiros-tem-sua-altitude-alterada>>. Acesso em: 04 jan. 2024.

IBGE - INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Geociências: IBGE revê as altitudes de sete pontos culminantes**. Agência IBGE: Notícias, 2016. Disponível em: <<https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/15275-geociencias-ibge-reve-as-altitudes-de-sete-pontos-culminantes>>. Acesso em: 04 jan. 2024.

IBGE - INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Reajustamento da Rede Altimétrica com Números Geopotenciais 2019**. Relatório Técnico, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Curitiba, 2018. 55p.

IBGE - INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Anuário estatístico do Brasil**. Relatório Técnico, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Rio de Janeiro, v.82, p.1-1 - 8-48, 2023

IGAC. **Red de Nivelación**. 2023. Disponível em:

<<https://www.igac.gov.co/es/contenido/areas-estrategicas/red-de-nivelacion>>. Acesso em: 26 jul. 2023.

IGN-AR. **Red de Nivelación de la República Argentina**. 2017. Disponível em: <

<https://www.ign.gob.ar/NuestrasActividades/Geodesia/Nivelacion/Introduccion>> <

https://www.sirgas.org/fileadmin/docs/Boletines/Bol25/12_SRVN16_Guagni.pdf>. Acesso em: 26 mai. 2023.

IGN-FR. **Les réseaux de nivellement français**. 2023. Disponível em: <

https://geodesie.ign.fr/index.php?page=reseaux_nivellement_francais>. Acesso em: 26 ago. 2023.

IGN-PE. **Resolución Jefatural (Resolución Nº 057-2016/IGN/UCCN)**. 2016. Disponível

em: <<https://cdn.www.gob.pe/uploads/document/file/670932/ESPECIFICACIONES-TECNICAS-PARA-LEVANTAMIENTOS-VERTICALES.pdf>>. Acesso em: 26 set. 2023.

IHDE, J.; BARZAGHI, R.; MARTI, U.; SANCHEZ, L.; SIDERIS, M.; DREWES, H.; FOERST, C.; GRUBER, T.; LIEBSCH, G.; PAIL, R. **Report of the Ad-hoc Group on an International Height Reference System (IHR)**. In: IAG Reports 2011-2015 (Travaux de l'AIG Vol. 39). International Union of Geodesy and Geophysics. 2015.

IHDE, J.; SÁNCHEZ, L. A unified global height reference system as a basis for. **Journal of Geodynamics**, v. 40, n. 4-5, pág. 400-413, 2005. DOI: 10.1016/j.jog.2005.06.015

IHDE, J.; SÁNCHEZ, L.; BARZAGHI, R.; DREWES, H.; FOERST, C.; GRUBER, T.; LIEBSCH, G.; PAIL, R.; SIDERIS, M. Definition and Proposed Realization of the International Height Reference System (IHR). **Surveys in geophysics**, v. 38, n. 3, 2017. DOI: 10.1007/s10712-017-9409-3

KAULA, W.M. Tests and combinations of satellite determinations of the gravity field with gravimetry. **Journal of Geophysical Research**. v. 71, p. 5303-5314, 1966. DOI:10.1029/JZ071i022p05303

KÖHNLEIN, W. **The Earth's gravitational field as derived from a combination of satellite data with gravity data**. Presented at 14th General Assembly, IUGG, Lucerne, Switzerland, 1967.

LIANG, W.; LI, J.; XU, X.; ZHANG, S.; ZHAO, Y. A High-Resolution Earth's Gravity Field Model SGG-UGM-2 from GOCE, GRACE, Satellite Altimetry, and EGM2008. **Engineering**, v. 6, n. 8, p. 860-878, 2020. DOI: 10.1016/j.eng.2020.05.008

LUNDQUIST, C.A.; VEIS G. **Geodetic parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth**. Special Report, Cambridge, Massachusetts, EUA, v. 1, n. 200, 1966.

LUZ, R. T. *et al.* **D. Brazilian First Order Levelling Network**. International Association of Geodesy Symposia, p. 20-22, 2002. Springer Berlin Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-662-04683-8_5.

MATOS, A.C.O.C; BLITZKOW, D.; GUIMARÃES, G.N.; SILVA, V.C. Geoid and quasi-geoid model for South America, Simposio SIRGAS 2021 de 29 de novembro a 01 de dezembro de 2021, organizado pelo Instituto Geográfico Nacional do Peru e o Comitê Executivo do SIRGAS, Lima, Peru.

MATURANA, R.; BARRIGA, R. **The Vertical Geodetic Network in Chile**. International Association of Geodesy Symposia, p. 23-26, 2002. Springer Berlin Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-662-04683-8_6.

MORITZ, H. **Advanced physical geodesy**, 2nd Edition, Karlsruhe: Wichmann, 1989.

MORITZ, H. **Geodetic Reference System 1980**. Journal Of Geodesy, v. 74, n. 1, p. 128-133, mar. 2000. Springer Science and Business Media LLC. DOI: 10.1007/s001900050278.

NICACIO, E.; DALAZOANA, R. Passado e presente dos Modelos Globais do Geopotencial: uma abordagem conceitual sobre sua evolução. **Revista Eletrônica Multidisciplinar FACEAR**, v. 2, n. 6, p. 1-15, 2017.

ONU. **A global geodetic reference frame for sustainable development**. In Resolution adopted by the General Assembly on 26 February 2015. 2015. Disponível em:

<https://ggim.un.org/documents/a_res_69_266_e.pdf>. Acesso em: 26 set. 2023.

PAREDES, N. **Determinación del datum vertical en La Libertad, Ecuador**. Instituto Oceanográfico de La Armada, Guayaquil, Ecuador, v. 3, n. 1. 1986. Disponível em: <<https://aquadocs.org/handle/1834/2154>>. Acesso em: 26 set. 2023.

PAVLIS, N. K. *et al.* **The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)**. Journal Of Geophysical Research: Solid Earth, v. 117, n. 4, p. 100-1001, abr. 2012. American Geophysical Union (AGU). DOI: 10.1029/2011jb008916.

PINÃ, W. H. S. **Actualización del modelo geoidal de Uruguay**. In: SIMPOSIO SIRGAS 2022, Santiago, Chile. 2022. p. 1-14. Disponível em: <<https://sirgas.ipgh.org/wp-content/uploads/2022/11/20-Walter-Subiza.pdf>>. Acesso em: 26 set. 2023.

PINÃ, W. H. S.; LANDRO, H. R.; TURBAN, L. **The Vertical Datum and Local Geoidal Models in Uruguay**. International Association of Geodesy Symposia, p. 169-175, 2002. Springer Berlin Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-662-04683-8_32.

PLAG, H. *et al.* Introduction. In: **Global Geodetic Observing System**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 1–13.

REIGBER, C.; *et al.* **CHAMP phase-B executive summary**. GFZ, STR96/13, 1996

RIBEIRO, L. C. **Contribuição para o estabelecimento do IHRF no estado de São Paulo**. 2019. 98 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Cartográficas) — Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2019.

RIBEIRO, L. C. **Influência da integração de dados de gravimetria marinha e terrestre no cálculo do potencial de gravidade das estações IHRF do Brasil**. 2022. 116 f. Tese (Doutorado em Geociências Aplicadas) — Universidade de Brasília, Brasília, 2022.

RIBEIRO, L. C.; GUIMARÃES, G. N.; MAROTTA, G. S. **Combining terrestrial, marine, and satellite gravity data to compute gravity potential values at IHRF stations**. Applied Geomatics, v. 15, n. 2, p. 455-472, 29 abr. 2023. Springer Science and Business Media LLC. DOI: 10.1007/s12518-023-00507-w.

RUFFHEAD, A. An Introduction to Least-Squares Collocation. **Survey Review**, v. 29, n. 224, p. 85–94, 1 abr. 1987. DOI:10.1179/003962687791512662

SÁNCHEZ, J. L. C. **Vínculo do Datum Vertical Equatoriano ao International Height Reference System - IHRF**. 2017. 268 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, Paraná, 2017. Disponível em: <<https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/55273>>. Acesso em: 26 set. 2023.

SÁNCHEZ, L. Definition and realisation of the SIRGAS vertical reference system within a globally unified height system. In: **Proceedings of Dynamic Planet**, Cairns. International Association of Geodesy symposia, vol 130. Springer, 2007. p 638–645. DOI: 10.1007/978-3-540-49350-1_92

SÁNCHEZ, L. *et al.* **A conventional value for the geoid reference potential W_0** . Journal Of Geodesy, v. 90, n. 9, p. 815-835, 23 maio 2016. Springer Science and Business Media LLC. DOI: 10.1007/s00190-016-0913-x.

SÁNCHEZ, L. Report of the GGOS Focus Area Unified Height System and the Joint Working Group 0.1. 2: **Strategy for the Realization of the International Height Reference System (IHR)**. Reports 2015-2019 of the International Association of Geodesy (IAG), Travaux de l'AIG, n. 41, p. Global Geodetic Observing System (GGOS), 42-51, 2019.

SÁNCHEZ, L. **REPORTE 2005**. In SIRGAS GTIII. Caracas, Venezuela. 2005. Disponível em:
<https://www.sirgas.org/fileadmin/docs/Boletines/Bol09/23_Sanchez_ReporteGTIII.pdf>. Acesso em: 26 set. 2023.

SÁNCHEZ, L. **Towards a Unified Vertical System for South America**. In Reunión SIRGAS 2005, Caracas, Venezuela. 2005. Disponível em:
<https://www.sirgas.org/fileadmin/docs/Boletines/Bol09/03_Sanchez_Vertical.pdf>. Acesso em: 26 set. 2023.

SÁNCHEZ, L.; ÅGREN, J.; HUANG, J.; WANG, Y. M.; MÄKINEN, J.; PAIL, R.; BARZAGHI, R.; VERGOS, G. S.; AHLGREN, K.; LIU, Q. Strategy for the Realization of the International Height Reference System (IHR). **Journal of Geodesy**, v. 95, n. 3, p. 1-33, 2021. DOI: 10.1007/s00190-021-01481-0

SÁNCHEZ, L.; BARZAGHI, R.: **Activities and plans of the GGOS Focus Area Unified Height System**, EGU General Assembly 2020, Online, 4–8 May 2020, EGU2020-8625. DOI: 10.5194/EGUSPHERE-EGU2020-8625.

SÁNCHEZ, L.; MARTÍNEZ, W. **Approach to the New Vertical Reference System for Colombia**. International Association of Geodesy Symposia, p. 27-33, 2002. Springer Berlin Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-662-04683-8_7.

SÁNCHEZ, L.; SIDERIS, M. Vertical datum unification for the International Height Reference System (IHR). **Geophysical Research Abstracts**. Vol. 19. EGU General Assembly. 2017. DOI: 10.1093/gji/ggx025.

SEHNAL, M. et al. GGOS Contribution to Promote Geodesy and Increase its Visibility in Science and Society. **Österreichische Zeitschrift für Vermessung & Geoinformation**, n. 2/2023, 2023.

SEPÚLVEDA, L. J. M. *et al.* **Ajuste de la Red de Control Vertical de Colombia en términos de números geopotenciales**. In: SIMPOSIO SIRGAS 2022, Santiago, Chile. 2022. p. 1-18. Disponível em: <<https://sirgas.ipgh.org/wp-content/uploads/2022/11/12-AJUSTE-DE-LA-RED-EN-TERMINOS-DE-NG-COLOMBIA.pdf>>. Acesso em: 26 set. 2023.

SILVA, V. C. **Sistema Gravimétrico de Referência do estado de São Paulo: contribuição ao referencial geodésico**. 2020. 141 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Transportes). Departamento de Topografia e Geodesia. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2020.

SIRGAS. **Acciones para la implementación del IHRF en la región**. 2016. Disponível em: <https://sirgas.ipgh.org/docs/Boletines/Bol21/Resoluciones_SIRGAS_2016.pdf>. Acesso em: 26 set. 2023.

SIRGAS. **Boletim Informativo N° 1**. 1994. Disponível em:
<https://sirgas.ipgh.org/docs/Boletines/bol_001.pdf>. Acesso em: 26 set. 2023.

SIRGAS. **Boletim Informativo N° 21**. 2017. Disponível em: <https://sirgas.ipgh.org/docs/Boletines/Bol21/Boletin_SIRGAS_21_2016.pdf>. Acesso em: 26 set. 2023.

SIRGAS. **Boletim Informativo N° 5**. 1998. Disponível em: <https://sirgas.ipgh.org/docs/Boletines/bol_005.pdf>. Acesso em: 26 set. 2023.

SIRGAS. **Boletim Informativo N° 6**. 2002. Disponível em: <https://sirgas.ipgh.org/docs/Boletines/bol_006.pdf>. Acesso em: 26 set. 2023.

SIRGAS. **Boletim Informativo N° 7**. 2002. Disponível em: <https://sirgas.ipgh.org/docs/Boletines/bol_007.pdf>. Acesso em: 26 set. 2023.

SIRGAS. **Orientações para a realização de medições gravimétricas ao redor de estações IHRF**. 2021. Disponível em: <<https://sirgas.ipgh.org/pt/recursos-pt/guias/>>. Acesso em: 26 set. 2023.

SIRGAS. **Resolución SIRGAS 2017 N°1**. novembro 2017. Disponível em: <https://sirgas.ipgh.org/docs/Boletines/Bol22/Resoluciones_SIRGAS_2017.pdf>. Acesso em: 26 set. 2023.

SOARES, S. **Implementação do IHRF (International Height Reference Frame) no Brasil**. 2023. 1vídeo (min 150). Publicado pelo canal Geo IFG. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=ki8M-J6fIRU>>. Acesso em: 26 Jan. 2024.

SOUZA, S. F.; SÁ, N. C. Sobre a estimação e modelagem de funções covariâncias na Colocação Por Mínimos Quadrados. **Revista Brasileira de Cartografia**, v. 60, n. 1, 4 abr. 2008. DOI:10.14393/rbcv60n1-44887

SULCA, R. R. **Analisis de los resultados de la evaluacion de los sistemas geodesicos y marco geodesico nacional utilizados por los entes gubernamentales nacionales y sub nacionales vinculados al tema de seguridad de tenencia y administracion de tierras rurales (predios individuales, comunidades campesinas y nativas)**. 2014. Disponível em: <https://ewsdata.rightsindevelopment.org/files/documents/85/IADB-PE-T1285_ZzFV24e.pdf>. Acesso em: 26 set. 2023.

TOCHO, C. N.; ANTOKOLETZ, E. D.; GÓMEZ, A. R.; GUAGNI, H.; PIÑON, D. A. **Analysis of high-resolution global gravity field models for the estimation of International Height Reference System (IHRS) coordinates in Argentina**. **Journal Of Geodetic Science**, v. 12, n. 1, p. 131-140, 1 jan. 2022. Walter de Gruyter. DOI: 10.1515/jogs-2022-0139.

TOZER, B.; SANDWELL, D. T.; SMITH, W. H. F.; OLSON, C.; BEALE, J. R.; WESSEL, P. Global Bathymetry and Topography at 15 Arc Sec: SRTM15+. **Earth and Space Science**, v. 6, n. 10, p. 1847–1864, 15 out. 2019. DOI:10.1029/2019EA000658

TSCHERNING, C. C.; RAPP, R. H. **Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations, and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models**. maio 1974.

VIRLA, M. **Revisión, estado actual y alternativas para el Control Geodésico Vertical de Venezuela.** In Simposio SIRGAS 2014, La paz, Bolivia. 2014. Disponível em:<https://sirgas.ipgh.org/docs/Boletines/Bol19/16_Virla_et_al_2014_Vertical_Venezuela.pdf>. Acesso em: 26 set. 2023.

ZINGERLE, P.; PAIL, R.; GRUBER, T.; OIKONOMIDOU, X. O modelo de campo de gravidade global combinado XGM2019e. **Journal of Geodesy**, v. 94, n. 7, pág. 1-12, 2020. DOI: 10.1007/s00190-020-01398-0