

Universidade Federal de Uberlândia

Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

**Topologias generalizadas e continuidade
generalizada**

por

Henrique Vieira dos Santos Brito[†]

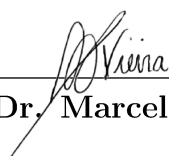
Bacharelado em Matemática - Ituiutaba - MG

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira

Topologias generalizadas e continuidade generalizada

Este exemplar corresponde à redação final da Monografia devidamente corrigida e defendida por **Henrique Vieira dos Santos Brito** e aprovada pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 01 do novembro de 2024.



Prof. Dr. Marcelo G. O. Vieira

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcelo G. O. Vieira (*orientador*)

Prof. Dr. Jorge Luiz Deolindo Silva

Prof. Dr. Alisson Rafael Aguiar Barbosa

Prof. Me. Matheus Silveira Campos

Monografia apresentada ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) como requisito parcial para obtenção do título de **Bacharel em Matemática**.

*À minha família e ao meu
orientador, Marcelo.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Iolanda e Neivaldo, por todas as coisas que carecem de uma definição mais apropriada para descrever tudo que fizeram e fazem por mim. Agradeço também aos meus familiares, em especial ao meu avô, Orozino, minha tia e madrinha, Denise, e à minha tia, Odésia.

Ao meu orientador, Marcelo, por ter topado o convite que fiz para me orientar no projeto de iniciação científica que resultou nesse TCC. Também agradeço pelo apoio, confiança, compreensão e paciência durante esse período. Foi com muita satisfação que fui seu aluno, petiano e orientando. Muito obrigado, de verdade!

Aos membros da banca avaliadora, Jorge Luiz Deolindo Silva, Alisson Rafael Aguiar Barbosa e Matheus Silveira Campos, pela disponibilidade e contribuições realizadas.

A todos os professores dos cursos de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), em especial às professoras Cristiane, Tânia e Eva, com quem também tive o prazer de compartilhar a experiência no Programa de Educação Tutorial.

Ao Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática Pontal e seus membros.

Aos meus amigos e colegas, em especial ao José Antônio, Matheus Felipe, Paulo Henrique e Silas.

RESUMO

A presente monografia tem como foco a divulgação em língua portuguesa de material sobre topologias generalizadas. Formalizamos topologias generalizadas a partir de funções monotônicas e caracterizamos essas topologias pelas funções interior e fecho com respeito a um continuador n . Esta caracterização foi uma contribuição original deste TCC. Este estudo ampliou os conhecimentos acadêmicos não abordados em currículos tradicionais de Topologia Geral na graduação em Matemática. Os resultados incluem a formalização de novos conceitos e o desenvolvimento de técnicas que aprimoram a compreensão da Topologia Geral. Esta pesquisa contribui para a formação de acadêmicos e futuros pesquisadores em Matemática.

Palavras-chave: topologia generalizada; continuidade generalizada; função monotônica; continuador.

SUMÁRIO

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Introdução	1
Objetivo	2
Estrutura	2
1 Espaços métricos	4
1.1 Métrica	4
1.2 Abertos e fechados métricos	8
2 Espaços topológicos	17
2.1 Topologia	17
2.2 Abertos e fechados topológicos	20
2.3 Interior topológico	22
2.4 Fecho topológico	26
3 Espaços topológicos generalizados	31
3.1 Funções monotônicas	31
3.2 Interior e fecho dados por função monotônica	36
3.3 Continuidade generalizada	39
3.4 Topologias generalizadas dadas por continuadores	44
Considerações	53

Bibliografia	54
-------------------------------	----

Introdução

Em [1] os autores Vieira e Braz introduziram uma noção de limite de uma função com respeito a outra função, noção que nomearam por limite generalizado. Entre 2016 e 2020 Vieira refinou as ideias sobre limite generalizado culminando em um artigo [2] que introduziu a noção de continuidade generalizada de uma função em relação a outra função, com base no conceito de limite generalizado.

A noção de continuidade generalizada é explorada por Vieira em [2], tanto a nível de espaços métricos, quanto ao nível mais geral de espaços topológicos. Dados um conjunto X não vazio, Y e Z espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ e $n : X \rightarrow Z$ duas funções, dizemos que f é n -contínua em um ponto a de X se, dado um aberto topológico V de Y em torno de $f(a)$, existe um aberto topológico U de Z em torno de $n(a)$ tal que $f(n^{-1}(U)) \subset V$.

Nesse caso, a função f é chamada de continuante e a função n é chamada de continuador em relação à n -continuidade. Com esta definição de continuidade generalizada em mãos, Vieira conseguiu demonstrar uma série de resultados que relacionam o conceito proposto com conexidade, compacidade, existência de máximos e mínimos para o continuante, caracterizações de continuidade generalizada via sequências e redes, entre outros.

Por outro lado, o termo continuidade generalizada já foi abordado e estudado em outros contextos na Matemática nas últimas décadas. Császár em 2002 introduziu a noção de topologia generalizada em [4], que difere da noção de topologia por não possuir a propriedade sobre interseção finita para abertos.

As continuidades generalizadas definidas a partir das noções de Császár não coincide

com a continuidade generalizada introduzida por Vieira. As funções com continuidades baseadas nas noções dadas por Császár possuem domínios e contradomínios com estruturas mais gerais do que topologias (como topologias generalizadas ou estruturas mínimas) e possuem regras de continuidade definidas a partir dos “abertos” dessas estruturas. Já a noção de continuidade abordada por Vieira não requer estruturas topológicas nos domínios das funções, apenas em seus contradomínios, e tal continuidade é relativa a outra função, o continuador.

Dessa forma, a presente monografia foi fruto de uma pesquisa de iniciação científica realizada no âmbito do Programa de Educação Tutorial. A pesquisa teve caráter bibliográfico tendo como base as referências [2], [3], [4] e [5], tendo como resultados originais a caracterização de topologias generalizadas pelas funções interior e fecho com respeito à topologia dada por um continuador n . Assim, essa pesquisa contribui para a formação do autor, leitores e futuros pesquisadores em Matemática.

Objetivo

O objetivo geral deste trabalho é estudar a noção de topologia generalizada presente nos artigos [4] e [5], como também continuidade generalizada (continuentes e continuadores) presentes nos trabalhos [2] e [3]. Além disso, pretende-se caracterizar topologias generalizadas a partir de continuadores. Como objetivos específicos, pretende-se divulgar o material em língua portuguesa e explicitar etapas dos cálculos originais, além de ampliar os conhecimentos acadêmicos que não são vistos em um currículo usual de cursos de Topologia Geral nos cursos de graduação em Matemática.

Estrutura

O trabalho está dividido da seguinte forma:

- No capítulo 1 (Espaços métricos) e no capítulo 2 (Espaços topológicos), serão apresentados definições e resultados sobre Topologia considerados pré-requisitos para a compreensão de objetos e resultados abordados no capítulo posterior, bem como a definição de continuidade usual. Leitores já familiarizados com os conceitos de Topologia podem, caso desejem, dispensar a leitura de tal capítulo ou podem utilizá-

lo como um espécie de material de consulta rápida para ajudar a minimizar dúvidas conceituais que eventualmente surjam no capítulo posterior desta monografia.

- No capítulo 3 (Espaços topológicos generalizados) serão apresentadas algumas caracterizações e propriedades. Após essa definição, será introduzido o conceito de continuidade generalizada contendo exemplos e proposições. Serão abordados também os principais conceitos e resultados presentes numa série de artigos estudados de autoria de Császár utilizados na produção desse trabalho. Para finalizar este capítulo serão apresentadas caracterizações de topologias generalizadas induzidas pelas funções monotônicas interior e fecho com respeito à topologia dada por um continuador n , sendo essas caracterizações a parte do Trabalho de Conclusão de Curso com contribuições originais.

CAPÍTULO 1

Espaços métricos

Neste capítulo abordaremos o conceito fundamental de espaço métrico, uma das estruturas mais importantes da matemática, especialmente no campo da Topologia. Um espaço métrico é, essencialmente, um conjunto em que é possível medir distâncias entre os elementos, proporcionando assim uma base para discutir proximidade, continuidade e limites.

1.1 Métrica

Nesta seção exploraremos a definição de espaço métrico e os exemplos mais comuns deste conceito. Além disso, abordaremos alguns resultados teóricos, fornecendo um melhor entendimento sobre espaços métricos.

Definição 1.1. *Seja M um conjunto não-vazio. Dizemos que uma função $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica em M se satisfaz as seguintes condições:*

- i) $d(x, y) \geq 0$, para todos $x, y \in M$;*
- ii) $d(x, y) = 0$ é equivalente a $x = y$;*
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$, para todos $x, y \in M$;*
- iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todos $x, y, z \in M$.*

Definição 1.2. *Dados um conjunto M não-vazio e um métrica d em M , dizemos que o par (M, d) é um espaço métrico.*

Também podemos nos referir a um espaço métrico (M, d) , pela expressão “ M é um espaço métrico munido com a métrica d ”. Caso a métrica d que municia o conjunto M esteja subentendida no contexto em questão, podemos nos referir aos espaço métrico (M, d) simplesmente pela expressão “ M é um espaço métrico”.

Exemplo 1.3. *Dado conjunto M podemos definir a aplicação $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}. \quad (1.1)$$

Verifica-se que a função d acima é um métrica em M , a qual denominamos de métrica zero-um em M ou métrica discreta M .

Exemplo 1.4. *Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A aplicação $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$d(x, y) = |x - y| \quad (1.2)$$

é um métrica em $\mathbb{R}$, a qual denominamos por métrica usual em $\mathbb{R}$. A verificação que a função d acima é uma métrica em $\mathbb{R}$ resulta das propriedades de módulo.

Denotaremos o conjunto das n -uplas de números reais por $\mathbb{R}^n$. Em outras palavras,

$$x \in \mathbb{R}^n \iff x = (x_1, \dots, x_n), \text{ onde } x_i \in \mathbb{R} \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Exemplo 1.5. *A aplicação $d_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (1.3)$$

é um métrica em $\mathbb{R}^n$, a qual denominamos por métrica da soma em $\mathbb{R}^n$. De fato, sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Temos que

$$i) \ d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \geq 0, \text{ pois } |x_i - y_i| \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\};$$

$$ii) \ d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = 0 \iff |x_i - y_i| = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \iff x_i = y_i, \forall i \in \{1, \dots, n\} \iff x = y;$$

$$\begin{aligned}
\text{iii)} \quad d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| = d_1(y, x); \\
\text{iv)} \quad d_1(x, z) &= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - z_i| = d_1(x, y) + d_1(y, z).
\end{aligned}$$

A seguir apresentaremos outros dois exemplos de métricas e deixaremos a cargo do leitor a verificação de que de fato cumprem a definição de métrica.

Exemplo 1.6. A aplicação $d_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_2(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \quad (1.4)$$

é uma métrica em $\mathbb{R}^n$, a qual denominamos por métrica euclidiana em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.7. A aplicação $d_\infty: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} \quad (1.5)$$

é uma métrica em $\mathbb{R}^n$, a qual denominamos por métrica do máximo em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.8. Seja X um conjunto não-vazio. Dizemos que uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada se, e somente se, existe um número real $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$, para todo $x \in X$.

Denotaremos por $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções limitadas de X em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.9. A aplicação $d: \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \times \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\} = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \quad (1.6)$$

é uma métrica em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, a qual denominamos por métrica da convergência uniforme ou métrica do sup em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Com efeito, sejam $f, g, h \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Temos que

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad d_\infty(f, g) &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \geq 0, \text{ pois } |f(x) - g(x)| \geq 0, \text{ para todo } x \in X; \\
\text{ii)} \quad d_\infty(f, g) &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = 0 \iff |f(x) - g(x)| = 0, \forall x \in X \\
&\iff f(x) = g(x), \forall x \in X \iff f = g;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iii)} \quad d_\infty(f, g) &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| = d_\infty(g, f); \\
\text{iv)} \quad d_\infty(f, h) &= \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\
&\leq \sup_{x \in X} \{|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|\} = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in X} |g(x) - h(x)| \\
&= d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h).
\end{aligned}$$

Sejam (M, d) um espaço métrico. Todo subconjunto $N \subset M$ pode ser considerado um espaço métrico se munido com a métrica d restrita a $N \times N$. Neste caso dizemos que N é um *subespaço* do espaço métrico M e a métrica $d|_{N \times N}$ em N é chamada de *métrica induzida* de M .

Exemplo 1.10. *Seja $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções contínuas de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$. Sabe-se pelo Cálculo Diferencial e Integral que toda função contínua de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$ assume valor máximo e valor mínimo, logo toda função contínua de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$ é uma função limitada. Portanto, $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$. Assim, temos que $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ é um subespaço métrico de $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$, com a métrica induzida*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| \quad (1.7)$$

Sejam $(M_1, d^1), \dots, (M_n, d^n)$ espaços métricos. Temos que

$$x \in M_1 \times \dots \times M_n \iff x = (x_1, \dots, x_n), \text{ onde } x_i \in M_i \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Existem três métricas usuais que podemos definir no produto cartesiano $M_1 \times \dots \times M_n$ a partir das métricas $d^1, \dots, d^n$. São elas:

i) $d_1: (M_1 \times \dots \times M_n) \times (M_1 \times \dots \times M_n) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_1(x, y) = d^1(x_1, y_1) + \dots + d^n(x_n, y_n) = \sum_{i=1}^n d^i(x_i, y_i)$$

ii) $d_2: (M_1 \times \dots \times M_n) \times (M_1 \times \dots \times M_n) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_2(x, y) = \sqrt{(d^1(x_1, y_1))^2 + \dots + (d^n(x_n, y_n))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (d^i(x_i, y_i))^2} \quad (1.8)$$

iii) $d_\infty: (M_1 \times \dots \times M_n) \times (M_1 \times \dots \times M_n) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_\infty(x, y) = \max\{d^1(x_1, y_1), \dots, d^n(x_n, y_n)\} \quad (1.9)$$

1.2 Abertos e fechados métricos

Os conceitos de bolas (abertas e fechadas) são muito importantes no contexto de espaços métricos, pois permitem construir uma topologia a partir da métrica de um espaço métrico.

Definição 1.11. *Sejam (M, d) um espaço métrico, $a \in M$ e $r > 0$ um número real positivo.*

i) *Denominamos o conjunto*

$$B(a; r) = \{x \in M : d(x, a) < r\}$$

de bola aberta de centro a e raio r em M com respeito a métrica d .

ii) *Denominamos o conjunto*

$$B[a; r] = \{x \in M : d(x, a) \leq r\}$$

de bola fechada de centro a e raio r em M com respeito a métrica d .

iii) *Denominamos o conjunto*

$$S(a; r) = \{x \in M : d(x, a) = r\}$$

de esfera de centro a e raio r em M com respeito a métrica d .

Observação 1.12. Note que $B[a; r] = B(a; r) \cup S(a; r)$.

Observação 1.13. Quando houver a necessidade de indicar no contexto em questão que uma bola aberta $B(a; r)$ pertence a um espaço métrico M e é determinada a partir da métrica deste espaço, podemos usar a notação $B_M(a; r)$ para representar tal bola. Observação análoga vale para bolas fechadas e esferas.

Seja (M, d) um espaço métrico, N um subespaço de M e $a \in N$. Representemos por $B_N(a; r)$ a bola aberta de centro a e raio r em N com respeito a métrica induzida de M e representemos por $B_M(a; r)$ a bola aberta de centro a e raio r em M com respeito a métrica d . Segue imediatamente da definição de bola aberta que

$$B_N(a; r) = N \cap B_M(a; r).$$

Analogamente também é válido igualdade similar para bolas fechadas e esferas no subespaço N .

Exemplo 1.14. Considere a circunferência $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ com métrica euclidiana induzida de $\mathbb{R}^2$ e $a = (1, 0) \in S^1$. Temos que

$$\begin{aligned} B_{S^1}(a; \sqrt{2}) &= \{p(x, y) \in S^1 : d_2(p, a) < \sqrt{2}\} \\ &= \{(x, y) \in S^1 : \sqrt{|x-1|^2 + |y-0|^2} < \sqrt{2}\} \\ &= \{(x, y) \in S^1 : x^2 - 2x + 1 + y^2 < 2\} \\ &= \{(x, y) \in S^1 : x^2 - 2x + 1 + 1 - x^2 < 2\} \\ &= \{(x, y) \in S^1 : x > 0\}. \end{aligned}$$

Fazendo cálculos análogos, obtemos que

$$S_{S^1}(a; \sqrt{2}) = \{(x, y) \in S^1 : x = 0\} = \{(0, 1), (0, -1)\},$$

e

$$B_{S^1}[a; \sqrt{2}] = \{(x, y) \in S^1 : x \geq 0\}.$$

Exemplo 1.15. Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$, fixe $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ e fixe $r > 0$.

i) Com respeito a métrica euclidiana temos que a bola aberta $B(a; r)$ em $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$B(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_2((x, y), a) < r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2\},$$

isto é, $B(a; r)$ é o disco sem a borda (da Geometria Euclidiana) de centro a e raio r .

ii) Com respeito a métrica da soma temos que a bola aberta $B(a; r)$ em $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$B(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_1((x, y), a) < r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - a_1| + |y - a_2| < r\},$$

isto é, $B(a; r)$ é o quadrado sem a borda de centro a e diagonais medindo $2r$ paralelas aos eixos canônicos de $\mathbb{R}^2$.

iii) Com respeito a métrica do máximo temos que a bola aberta $B(a; r)$ em $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$B(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty((x, y), a) < r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x - a_1|, |y - a_2|\} < r\},$$

isto é, $B(a; r)$ é o quadrado sem a borda de centro a e lados medindo $2r$ paralelos aos eixos canônicos de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.16. Considere $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ com a métrica da convergência uniforme e seja f a função constante igual a 1. Temos que

$$B[f; 2] = \{g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : \sup_{x \in [0, 1]} |g(x) - f(x)| \leq 2\}.$$

Note que

$$\begin{aligned} g \in B[f; 2] &\iff \sup_{x \in [0, 1]} |g(x) - f(x)| \leq 2 \iff |g(x) - f(x)| \leq 2, \forall x \in [0, 1] \\ &\iff |g(x) - 1| \leq 2, \forall x \in [0, 1] \iff -2 \leq g(x) - 1 \leq 2, \forall x \in [0, 1] \\ &\iff -1 \leq g(x) \leq 3, \forall x \in [0, 1] \end{aligned}$$

Portanto,

$$B[f; 2] = \{g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : -1 \leq g(x) \leq 3, \forall x \in [0, 1]\}.$$

Definição 1.17. Seja M um espaço métrico. Um ponto $a \in M$ é um ponto isolado se existe $r > 0$ tal que $B_M(a; r) = \{a\}$.

Exemplo 1.18. Seja M um conjunto não-vazio munido com a métrica zero-um. Temos que todo ponto de M é ponto isolado. De fato, dado $a \in M$, tomando $r = \frac{1}{2}$ segue que

$$B(a; \frac{1}{2}) = \{x \in M : d(x, a) < \frac{1}{2}\} = \{a\},$$

pois para $x \neq a$ tem-se que $d(x, a) = 1 > \frac{1}{2}$.

Definição 1.19. Um espaço métrico é chamado espaço métrico discreto se, e somente se, todos seus pontos são pontos isolados.

Exemplo 1.20. Considere $M = [0, 1] \cup \{2\}$ como subespaço métrico de $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Tomando $r = \frac{1}{2}$, tem-se que

$$\begin{aligned} B(2; \frac{1}{2}) &= \{x \in M : d(x, 2) < \frac{1}{2}\} = \{x \in [0, 1] \cup \{2\} : |x - 2| < \frac{1}{2}\} \\ &= ([0, 1] \cup \{2\}) \cap \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \{2\}, \end{aligned}$$

o que implica que 2 é ponto isolado de M . Recomenda-se ao leitor verificar que os demais pontos de M não são pontos isolados.

Proposição 1.21 (Propriedade de Hausdorff). *Se (M, d) é um espaço métrico e $a, b \in M$ são distintos então existem números reais positivos $r > 0$ e $s > 0$ tais que*

$$B_M(a; r) \cap B_M(b; s) = \emptyset.$$

Demonstração. Como (M, d) é espaço métrico e $a \neq b$ segue $d(a, b) > 0$. Tome $r = \frac{d(a, b)}{4}$ e $s = \frac{d(a, b)}{4}$. Suponha que exista $x \in B_M(a; r) \cap B_M(b; s)$. Assim, $d(x, a) < r$ e $d(x, b) < s$ e usando as condições de desigualdade triangular e simetria da métrica de M , tem-se que

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < r + s = \frac{d(a, b)}{2},$$

o que resulta em um absurdo.

Portanto $B_M(a; r) \cap B_M(b; s) = \emptyset$. □

Definição 1.22. *Sejam (M, d) um espaço métrico e X um subconjunto não-vazio de M . Dizemos que X é limitado se, e somente se, existe um número real positivo $K > 0$ tal que $d(x, y) \leq K$, para todo $x, y \in X$.*

Exemplo 1.23. *O conjunto $M = [0, 1] \cup \{2\}$ com respeito a métrica usual de $\mathbb{R}$ é limitado, pois $d(x, y) \leq 2$, para todos $x, y \in M$.*

Exemplo 1.24. *Uma bola aberta $B(a; r)$ de um espaço métrico (M, d) é um conjunto limitado, pois para todos $x, y \in B(a; r)$ tem-se que*

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < r + r = 2r.$$

De modo análogo, prova-se que as bolas fechadas e as esferas de um espaço métrico são conjuntos limitados.

Seja X um subconjunto limitado de um espaço métrico M . Considere o conjunto

$$A = \{d(x, y) : x, y \in X\} \tag{1.10}$$

Temos que A é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ com respeito a métrica usual. De fato, como X é limitado existe $K > 0$ tal que $d(x, y) \leq K$, para todos $x, y \in X$. Daí, para todo $d(a, b), d(a', b') \in A$ temos que

$$|d(a, b) - d(a', b')| \leq |d(a, b)| + |-d(a', b')| = d(a, b) + d(a', b') \leq 2K$$

Portanto, temos que $|p - q| \leq 2K$, para todo $p, q \in A$, ou seja, A é limitado.

Como o conjunto A dado em (1.10) é limitado, segue que existe o $\sup A$.

Definição 1.25. *Seja X um subconjunto limitado de um espaço métrico M . O diâmetro de X é o número real*

$$\text{diam}(X) = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}. \quad (1.11)$$

Decorre de (1.24) que toda bola aberta (ou fechada) $B(a; r)$ de um espaço métrico tem $\text{diam}(B(a; r)) < 2r$.

Observação 1.26. *Não é verdade sempre que $\text{diam}(B(a; r)) = 2r$. De fato, tome $M = [0, 1] \cup \{2\}$ como subespaço de $\mathbb{R}$ com a métrica usual e tome $r = \frac{1}{2}$. Temos que $B(2; r) = \{2\}$ e*

$$\text{diam}(B(2; r)) = \sup\{d(x, y) : x, y \in B(2; r)\} = d(2, 2) = 0 < 2r$$

Proposição 1.27. *Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$. Tem-se que X é limitado se, e somente se, X está contido em alguma bola aberta de M .*

Demonstração. Suponha que X seja limitado. Se X é limitado segue por definição que existe $K > 0$ tal que $d(x, y) \leq K$, para todos $x, y \in X$. Fixando $a \in X$ e dado $x \in X$ temos que $d(a, x) \leq K < 2K$ e consequentemente $x \in B(a; 2K)$. Portanto, $X \subset B(a; 2K)$.

Reciprocamente, suponha que existe uma bola aberta $B(a; r)$ de M tal que $X \subset B(a; r)$. Segue imediatamente que $d(x, y) < 2r$ para todos $x, y \in X$. Portanto, X é limitado. $\square$

Definição 1.28. *Sejam A um conjunto não-vazio e M um espaço métrico. Dizemos que uma aplicação $f: A \rightarrow M$ é limitada se o conjunto imagem de f dado por $\text{Im}(f) = \{f(x) : x \in A\}$ é um subconjunto limitado de M .*

Em outras palavras, uma aplicação f de um conjunto A em um espaço métrico (M, d) é limitada se, e somente se, existe $K > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq K$, para todos $x, y \in A$.

Sejam A um conjunto não-vazio e (M, d) um espaço métrico. Denotamos o conjunto de todas as aplicações limitadas $f: A \rightarrow M$ por $\mathcal{B}(A, M)$. Recomendamos ao leitor verificar que a função $d_\infty: \mathcal{B}(A, M) \times \mathcal{B}(A, M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in A} d(f(x), g(x)) \quad (1.12)$$

é uma métrica em $\mathcal{B}(A, M)$.

Definição 1.29. *Sejam (M, d) um espaço métrico, $a \in M$ e X um subconjunto não-vazio de M . A distância do ponto a ao conjunto X com respeito ao espaço métrico (M, d) é o número real não-negativo*

$$d(a, X) = \inf\{d(a, x) : x \in X\}. \quad (1.13)$$

Note que como $d(a, X) \geq 0$, para todo $x \in X$, segue que existe o ínfimo do conjunto $\{d(a, x) : x \in X\}$.

Proposição 1.30. *Sejam (M, d) um espaço métrico, $a \in M$ e X e Y subconjuntos não-vazios de M . As seguintes afirmações são válidas:*

- i) $d(a, X) \leq d(a, x)$, para todo $x \in X$;
- ii) Se $a \in X$, então $d(a, X) = 0$;
- iii) Se $d(a, X) = 0$, então dado $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $d(a, x) < \epsilon$;
- iv) Se $X \subset Y$, então $d(a, Y) \leq d(a, X)$.

Demonstração.

- i) Segue imediatamente do fato que $d(a, X)$ ser o ínfimo do conjunto $\{d(a, x) : x \in X\}$.
- ii) Se $a \in X$ então $0 = d(a, a) \in \{d(a, x) : x \in X\}$. Temos $d(a, X) \geq 0$. Supondo $d(a, X) > 0$, teríamos que $\inf\{d(a, x) : x \in X\}$ é estritamente maior que o elemento $d(a, a)$ do conjunto $\{d(a, x) : x \in X\}$, o que é um absurdo. Portanto, $d(a, X) = 0$.
- iii) Se $d(a, X) = 0$ então $\inf\{d(a, x) : x \in X\} = 0$. Seja $\epsilon > 0$. Suponha que $d(a, x) \geq \epsilon$, para todo $x \in X$. Assim, ϵ seria uma cota inferior do conjunto $\{d(a, x) : x \in X\}$ e $\inf\{d(a, x) : x \in X\} = d(a, X) = 0 < \epsilon$, o que é um absurdo, pois ínfimo de um conjunto é a maior das cotas inferiores de um conjunto. Portanto, existe algum $x \in X$ tal que $d(a, x) < \epsilon$.
- iv) Temos que $d(a, Y) \leq d(a, x)$, para todo $x \in Y$. Como $X \subset Y$, em particular, vale que $d(a, Y) \leq d(a, x)$, para todo $x \in X$. Assim, temos que $d(a, Y)$ é uma cota inferior do conjunto $\{d(a, x) : x \in X\}$. Portanto, $d(a, Y) \leq d(a, X)$. $\square$

A recíproca do item ii) da proposição anterior é falsa. De fato, tomando $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual, $X = (0, 1)$ e $a = 1$ temos que $d(a, X) = 0$, porém $a \notin X$.

Definição 1.31. *Sejam M um espaço métrico, $U \subset M$ e $a \in U$. Dizemos que a é um ponto interior de U com respeito a métrica de M se existe $r > 0$ tal que $B_M(a; r) \subset U$.*

Sejam M um espaço métrico e $U \subset M$. Denotamos o conjunto de todos os pontos interiores de U (com respeito a métrica de M) por $\text{int}(U)$.

É claro que $\text{int}(U) \subset U$.

Definição 1.32. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $U \subset M$. Dizemos que U é aberto em M (com respeito a métrica d) se $U = \text{int}(U)$.*

Em outras palavras, dizemos que U é aberto em um espaço métrico M se, e somente se, para todo $a \in U$, existe $r_a > 0$ tal que $B_M(a; r_a) \subset U$. Ou ainda, dizemos que U é aberto em um espaço métrico M se, e somente se, todos os pontos de U são pontos interiores (com respeito a métrica de M).

Definição 1.33. *Sejam M um espaço métrico e $U \subset M$. A fronteira de U com respeito a métrica de M é o conjunto dado por*

$$\partial U = \{x \in M : \forall r > 0, B_M(x; r) \cap U \neq \emptyset \text{ e } B_M(x; r) \cap U^c \neq \emptyset\} \quad (1.14)$$

onde $U^c = M - U$.

Note que para M espaço métrico e $U \subset M$, segue diretamente da definição de fronteira que $\partial U = \partial(U^c)$.

Exemplo 1.34. *Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Temos que $\text{int}((a, b]) = (a, b)$, $\partial((a, b]) = \{a, b\}$, $\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $\text{int}(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \emptyset$, $\partial(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ e $\partial(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.*

Observação 1.35. *As noções de interior e fronteira dependem do espaço métrico M no qual estamos considerando X contido. Por exemplo, se considerarmos o intervalo $(a, b]$ como sendo um subconjunto sobre o eixo das abcissas do espaço métrico $M = \mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana, então $\text{int}((a, b]) = \emptyset$ e $\partial((a, b]) = [a, b]$.*

Consequentemente, a propriedade “ser aberto em” também é relativa, isto é depende do espaço métrico considerado. Por exemplo, para $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual, o intervalo $(1, 2]$ não é aberto em M , mas para $M = [0, 2]$ com métrica induzida pela métrica usual, o intervalo já é aberto em M .

Se U está contido num espaço métrico M e $x \in M$, então uma, e apenas uma das possibilidades abaixo acontece:

- i) existe $r > 0$, tal que $B_M(x; r) \subset U$;
- ii) existe $r > 0$, tal que $B_M(x, r) \subset U^\complement$;
- iii) não ocorre o item i) e o item ii), isto é, para todo $r > 0$ tem-se que $B_M(x; r) \cap U \neq \emptyset$ e $B_M(x; r) \cap U^\complement \neq \emptyset$.

Em outras palavras, se ocorre o item i) então $x \in \text{int}(U)$; se ocorre o item ii) então $x \in \text{int}(U^\complement)$; e se ocorre o item iii) então $x \in \partial U$.

Isto prova o seguinte resultado.

Proposição 1.36. *Se M é um espaço métrico e $U \subset M$, então*

$$M = \text{int}(U) \dot{\cup} \partial U \dot{\cup} \text{int}(U^\complement), \quad (1.15)$$

onde $\dot{\cup}$ significa que a união é disjunta.

Proposição 1.37. *Seja M um espaço métrico. As seguintes afirmações são válidas:*

- i) *Toda bola aberta em M é um conjunto aberto em M .*
- ii) *Para todo $X \subset M$, tem-se que $\text{int}(X)$ é um conjunto aberto de M , ou seja, $\text{int}(X) = \text{int}(\text{int}(X))$.*
- iii) *O complementar de toda bola fechada em M é um conjunto aberto em M .*

Demonstração. i) Sejam $a \in M$ e $r > 0$. Vamos provar que $B(a; r)$ é um conjunto aberto em M . Seja $y \in B(a; r)$. Temos que $d(y, a) < r$, o que implica que $r - d(y, a) > 0$. Tome $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon \leq r - d(y, a)$. Dados $x \in B(y, \epsilon)$ temos que

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) < \epsilon + d(y, a) \leq r,$$

isto é, $x \in B(a; r)$. Assim, $B(y; \epsilon) \subset B(a; r)$ o que mostra que y é ponto interior de $B(a; r)$. Como y é arbitrário, segue que todos os pontos de $B(a; r)$ são ponto interiores de $B(a; r)$. Portanto, $B(a; r)$ é um conjunto aberto em M .

ii) Sejam $X \subset M$ e $a \in \text{int}(X)$. Como $a \in \text{int}(X)$ segue por definição que existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset X$. Pelo item a) tem-se que para cada $x \in B(a; r)$, existe $s > 0$ tal $B(x; s) \subset B(a; r) \subset X$. Logo $x \in \text{int}(X)$, o que implica que $B(a, r) \subset \text{int}(X)$. Assim, $a \in \text{int}(\text{int}(X))$. Como a é arbitrário, segue que $\text{int}(X) \subset \text{int}(\text{int}(X))$. A

inclusão $\text{int}(\text{int}(X)) \subset \text{int}(X)$ é decorrência imediata da definição de interior de conjunto. Portanto, $\text{int}(X) = \text{int}(\text{int}(X))$.

iii) Sejam $a \in M$ e $r > 0$. Vamos provar que $B[a; r]^{\circ} = \{x \in M : d(x, a) > r\}$ é um conjunto aberto. Seja $y \in B[a; r]^{\circ}$. Temos que $d(y, a) > r$, o que implica que $d(y, a) - r > 0$. Tome $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon \leq d(y, a) - r$. Dados $x \in B(y, \epsilon)$ temos que

$$d(x, a) \geq d(y, a) - d(x, y) > d(y, a) - \epsilon \geq r,$$

isto é, $x \in B[a; r]^{\circ}$. Assim, $B(y; \epsilon) \subset B[a; r]^{\circ}$ o que mostra que y é ponto interior de $B[a; r]^{\circ}$. Como y é arbitrário, segue que todos os pontos de $B[a; r]^{\circ}$ são ponto interiores de $B[a; r]^{\circ}$. Portanto, $B[a; r]^{\circ}$ é um conjunto aberto em M . $\square$

CAPÍTULO 2

Espaços topológicos

Neste capítulo, exploraremos o conceito de espaço topológico, uma estrutura fundamental que generaliza noções de continuidade e proximidade, indo além da ideia de distância encontrada em espaços métricos. A definição de espaço topológico envolve a especificação de um conjunto de subconjuntos, chamados abertos e fechados, que satisfazem certas condições axiomáticas. Esses conjuntos fornecem uma maneira mais abstrata de entender a noção de vizinhança e continuidade de funções.

2.1 Topologia

Nesta seção será abordado o conceito de topologia e alguns exemplos de espaços topológicos. Além disso, serão apresentadas propriedades importantes relacionadas a tal conceito.

Dado um conjunto X qualquer, denotamos a coleção (ou família) de todos os subconjuntos de X por $\mathcal{P}(X)$.

Proposição 2.1. *Sejam M um espaço métrico e $\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(M) : U \text{ é aberto em } M\}$. As seguintes afirmações são válidas:*

i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $M \in \mathcal{T}$;

ii) Se $n \in \mathbb{N}$ e $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$, então $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$;

iii) Se I é um conjunto qualquer de índices e $U_i \in \mathcal{T}$, para todo $i \in I$, então $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Demonstração. i) Dado $a \in M$, como $B_M(a; r) \subset M$ para todo $r > 0$, segue que a é ponto interior de M . Portanto, M é aberto em M e $M \in \mathcal{T}$. Agora, $\emptyset$ é aberto em M por vacuidade, isto é, $\emptyset$ é aberto em M , pois ele não contém pontos que não são pontos interiores de M . Portanto $\emptyset \in \mathcal{T}$.

ii) Seja $a \in \bigcap_{j=1}^n U_j$, então $a \in U_j$, para todo $j = 1, \dots, n$. Como cada U_j é aberto em M , existem $r_j > 0$ tais que $B_M(a; r_j) \subset U_j$, para todo $j = 1, \dots, n$. Tome $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$. Note que $r > 0$. Temos que $B_M(a; r) \subset B_M(a; r_j) \subset U_j$, para todo $j = 1, \dots, n$, logo $B_M(a; r) \subset \bigcap_{j=1}^n U_j$ e a é ponto interior de $\bigcap_{j=1}^n U_j$. Portanto, $\bigcap_{j=1}^n U_j$ é aberto em M e $\bigcap_{j=1}^n U_j \in \mathcal{T}$.

iii) Seja $a \in \bigcup_{i \in I} U_i$, então existe U_{i_0} tal que $a \in U_{i_0}$. Como U_{i_0} é aberto em M , existe $r > 0$ tal que $B_M(a; r) \subset U_{i_0}$. Assim, $B_M(a; r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ e a é um ponto interior de $\bigcup_{i \in I} U_i$. Portanto, $\bigcup_{i \in I} U_i$ é aberto em M e $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$. $\square$

Em resumo, a proposição anterior garante que num espaço métrico M tem-se que:

- i) $\emptyset$ e M são abertos em M ;
- ii) intersecções finitas de abertos de M são abertos de M ,
- iii) uniões arbitrárias de abertos de M são abertos de M .

Definição 2.2. Sejam X um conjunto e $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. Dizemos que a coleção $\mathcal{T}$ é uma topologia em X se as seguintes condições são satisfeitas:

- i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$;
- ii) Se $n \in \mathbb{N}$ e $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$, então $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$;
- iii) Se I é um conjunto qualquer de índices e $U_i \in \mathcal{T}$, para todo $i \in I$, então $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Definição 2.3. Dados um conjunto X e uma topologia $\mathcal{T}$ em M , dizemos que o par $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico.

Exemplo 2.4. *Seja (M, d) é um espaço métrico. Segue da Proposição 2.1 que os conjuntos abertos de (M, d) induzem um topologia $\mathcal{T}^d$ em M dada por*

$$\mathcal{T}^d = \{U \in \mathcal{P}(M) : U \text{ é aberto em } M\}. \quad (2.1)$$

A topologia $\mathcal{T}^d$ dada em (2.1) é denominada topologia induzida pela métrica d ou topologia proveniente da métrica d .

Exemplo 2.5. *Seja X um conjunto qualquer. A coleção $\mathcal{P}(X)$ é um topologia em X denominada topologia discreta. Um conjunto munido com a topologia discreta é denominado espaço topológico discreto.*

Exemplo 2.6. *Seja X um conjunto qualquer. A coleção $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ é um topologia em X denominada topologia trivial. Um conjunto munido com a topologia discreta é denominado espaço topológico trivial.*

Exemplo 2.7. *Seja $X = \{a, b\}$ tal que $a \neq b$. A coleção $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ é um topologia em X denominada topologia de Sierpinski. O conjunto $X = \{a, b\}$ munido com a topologia de Sierpinski é denominado espaço de Sierpinski. Verifiquemos que a coleção $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ é uma topologia em $X = \{a, b\}$, com $a \neq b$.*

i) Nitidamente, temos que $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$.

*ii) Temos que $\emptyset \cap \{a\} = \emptyset \in \mathcal{T}$, $\emptyset \cap X = \emptyset \in \mathcal{T}$, $\{a\} \cap X = \{a\} \in \mathcal{T}$
e $\emptyset \cap \{a\} \cap X = \emptyset \in \mathcal{T}$.*

*iii) Temos que $\emptyset \cup \{a\} = \{a\} \in \mathcal{T}$, $\emptyset \cup X = X \in \mathcal{T}$, $\{a\} \cup X = X \in \mathcal{T}$
e $\emptyset \cup \{a\} \cup X = X \in \mathcal{T}$.*

Logo, $\mathcal{T}$ satisfaz a três condições exigidas na definição de topologia. Portanto, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ é uma topologia em $X = \{a, b\}$.

Observação 2.8. *Seja $X = \mathbb{R}^n$. A topologia $\mathcal{T}^{d_2}$ em $\mathbb{R}^n$ induzida pela métrica euclidiana é chamada topologia usual.*

Definição 2.9. *Dizemos que um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é metrizable se existe um métrica d tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}^d$.*

Temos que a topologia discreta é sempre metrizable e é induzida pela métrica discreta.

Observação 2.10. *O espaço de Sierpinski não é metrizável.*

Definição 2.11. *Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ topologias em um conjunto X . A topologia $\mathcal{S}$ é mais fraca (mais grossa ou menor) do que a topologia $\mathcal{T}$ se $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.*

De modo alternativo, caso $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, pode-se referir que a topologia $\mathcal{T}$ é mais forte (*mais fina* ou *maior*) do que a topologia $\mathcal{S}$.

Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. São validas as seguintes inclusões:

$$\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X). \quad (2.2)$$

Segue de (2.2) que a topologia trivial em X é mais fraca que qualquer outra topologia em X . Decorre também de (2.2) que a topologia discreta em X é mais fina que qualquer outra topologia em X .

Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $Y \subset X$. Verifica-se que a família

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\} \quad (2.3)$$

é uma topologia em Y . A topologia $\mathcal{T}_Y$ é chamada *topologia induzida* em Y por $\mathcal{T}$.

Definição 2.12. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Dizemos que $(Y, \mathcal{T}')$ é um subespaço topológico de $(X, \mathcal{T})$ se $Y \subset X$ e $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_Y$.*

Quando no contexto estiver claro qual é a topologia que mune o conjunto X , podemos simplesmente nos referir a um subespaço topológico pela terminologia “ S é um subespaço de X ”.

Exemplo 2.13. $\mathbb{Z}$, com a topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}$, é um espaço topológico discreto.

Exemplo 2.14. $\mathbb{R}$ munido com a topologia usual é subespaço de $\mathbb{R}^2$ munido com topologia euclidiana.

2.2 Abertos e fechados topológicos

Nesta seção, será apresentada a definição de conjuntos abertos e fechados no contexto da topologia. Discutiremos as propriedades fundamentais desses conjuntos, que formam a

base para o estudo de espaços topológicos. Estes conceitos são essenciais para a definição de continuidade, convergência e outros tópicos fundamentais em Topologia.

Além disso, exploraremos as operações entre abertos e fechados, como intersecções e uniões, e a relação entre esses conjuntos em diferentes espaços topológicos.

Definição 2.15. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Dizemos que U é um aberto em X com respeito a topologia $\mathcal{T}$ se $U \in \mathcal{T}$.*

Em outras palavras, os elementos de uma topologia $\mathcal{T}$ num conjunto X são chamados de abertos.

O nome aberto para os elementos de uma topologia qualquer está relacionado com o fato de que nas topologias metrizáveis, os elementos destas são subconjuntos abertos do espaço métrico no sentido da Definição 1.32.

Uma consideração relevante a ser feita é que não é verdade que intersecção arbitrária de abertos de uma topologia resulta em um aberto da topologia. De fato, considere $\mathbb{R}$ munido com a topologia $\mathcal{T}$ induzida pela métrica usual. Temos que $U_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$ são abertos em $\mathbb{R}$ com respeito $\mathcal{T}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entretanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1 + \frac{1}{n}) = (0, 1]$ não é um aberto em $\mathbb{R}$ com respeito $\mathcal{T}$.

Definição 2.16. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Dizemos que um subconjunto F de X é fechado em X com respeito a topologia $\mathcal{T}$ se $F^c \in \mathcal{T}$, onde F^c denota $X - F$.*

Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, denotamos a coleção de todos subconjuntos fechados de X com respeito a topologia $\mathcal{T}$ por $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$. Dito de outra forma,

$$\mathcal{F}^{\mathcal{T}} = \{F \in \mathcal{P}(X) : F^c \in \mathcal{T}\}. \quad (2.4)$$

Proposição 2.17. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ a coleção de fechados em X com respeito a $\mathcal{T}$. As seguintes afirmações são válidas.*

- a) $\emptyset \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ e $X \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$.
- b) Se I é um conjunto qualquer de índices e $F_i \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$, para todo $i \in I$, então $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$.
- c) Se $n \in \mathbb{N}$ e $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$, então $F_1 \cup \dots \cup F_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$.

Demonstração. Basta usar o fato que $\mathcal{T}$ é uma topologia e usar as relações de De Morgan,

a saber, $\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} F_i^c$ e $\left(\bigcup_{j=1}^n F_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^n F_j^c$. □

Proposição 2.18. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ uma coleção com as seguintes propriedades:*

- i) $\emptyset \in \mathcal{F}$ e $X \in \mathcal{F}$;
- ii) dados I um conjunto qualquer de índices e $F_i \in \mathcal{F}$, para todo $i \in I$, tem-se $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$;
- iii) dados $n \in \mathbb{N}$ e $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$, tem-se que $F_1 \cup \dots \cup F_n \in \mathcal{F}$.

Se $\mathcal{T}$ é uma coleção de subconjuntos de X dada por

$$\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(X) : U^c \in \mathcal{F}\}, \quad (2.5)$$

então $\mathcal{T}$ é uma topologia em X e $\mathcal{F}^T = \mathcal{F}$.

Demonstração. Basta usar as propriedades de $\mathcal{F}$ e usar as relações de De Morgan. $\square$

Proposição 2.19. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, S um subespaço de X e $\mathcal{T}_S$ a topologia induzida por $\mathcal{T}$ em S . As seguintes afirmações são válidas:*

- i) U' é aberto em S se, e somente se, $U' = S \cap U$, sendo U aberto em X .
- ii) F' é fechado em S se, e somente se, $F' = S \cap F$, sendo F fechado em X .

Demonstração. i) Segue imediatamente da definição de topologia induzida que mune um subespaço.

ii) Usando o item i) tem-se que

$$\begin{aligned} F' \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}_S} &\iff S - F' \in \mathcal{T}_S \iff S - F' = S \cap U, \text{ para algum } U \in \mathcal{T} \\ &\iff F' = S \cap (X - U), \text{ para algum } U \in \mathcal{T} \\ &\iff F' = S \cap F, \text{ para algum } F \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

$\square$

2.3 Interior topológico

Nesta seção, será introduzido o conceito de interior de um conjunto em um espaço topológico. Esse conceito é fundamental para a análise da estrutura interna de subconjuntos em Topologia.

Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e um subconjunto A de X . A coleção dada por

$$\mathcal{T}_{\underset{\sim}{A}} = \{U \in \mathcal{T} : A \subset U\} \quad (2.6)$$

denota coleção de todos abertos do espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ que contém A . No caso em que $A = \{a\}$ a coleção $\mathcal{T}_A$ é denotada simplesmente por $\mathcal{T}_a$. Já a coleção dada por

$$\mathcal{T}_{\underset{\sim}{A}} = \{U \in \mathcal{T} : U \subset A\} \quad (2.7)$$

denota a coleção de todos abertos do espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ contidos em A .

Definição 2.20. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que um ponto $a \in A$ é ponto interior de A com respeito a topologia $\mathcal{T}$ se existe $U \in \mathcal{T}_a$ tal que $U \subset A$.*

Denotamos o conjunto dos pontos interiores de um subconjunto A de um espaço topológico por $\text{int}(A)$.

Sejam $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico metrizável proveniente de uma métrica d e $A \subset X$. Neste caso, a é ponto interior de A com respeito a métrica d se, e somente se, a é ponto interior de A com respeito a topologia $\mathcal{T}$.

Proposição 2.21. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $A \subset X$, então o conjunto $\text{int}(A)$ é aberto em X com respeito a topologia $\mathcal{T}$, isto é, $\text{int}(A) \in \mathcal{T}$.*

Demonstração. Decorre da definição de ponto interior de A , com respeito a topologia $\mathcal{T}$, que para cada $x \in \text{int}(A)$, existe $U_x \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U_x \subset A$. Considere a união destes abertos U_x citados, isto é, $\bigcup_{x \in \text{int}(A)} U_x$.

Seja $y \in \bigcup_{x \in \text{int}(A)} U_x$. Segue que $y \in U_{x_0}$, para algum $x_0 \in \text{int}(A)$. Visto que $U_{x_0} \in \mathcal{T}$ e $U_{x_0} \subset A$, segue por definição que y é um ponto interior de A com respeito a $\mathcal{T}$, isto é, $y \in \text{int}(A)$. Logo, $\bigcup_{x \in \text{int}(A)} U_x \subset \text{int}(A)$. A inclusão $\text{int}(A) \subset \bigcup_{x \in \text{int}(A)} U_x$ é óbvia.

Portanto,

$$\text{int}(A) = \bigcup_{x \in \text{int}(A)} U_x. \quad (2.8)$$

e como $\text{int}(A)$ é uma união de membros de $\mathcal{T}$, conclui-se que $\text{int}(A) \in \mathcal{T}$. $\square$

Definição 2.22. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $\overset{\circ}{A}$ é o interior de A com respeito a topologia $\mathcal{T}$ se*

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{U \in \mathcal{T}_{\underset{\sim}{A}}} U, \quad (2.9)$$

onde $\mathcal{T}_{\underset{\sim}{A}} = \{U \in \mathcal{P}(X) : U \in \mathcal{T} \text{ e } U \subset A\}$.

Em outras palavras, a Definição 2.22 diz o interior de um subconjunto A de um espaço topológico X é a união de todos abertos em X (com respeito a topologia de X) que estão contidos em A .

Equivalentemente, o interior de um subconjunto A de um espaço topológico X é o maior aberto em X (com respeito a topologia de X) que está contido em A .

Proposição 2.23. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $A \subset X$, então $\overset{\circ}{A} = \text{int}(A)$.*

Demonstração. Dado $x \in \overset{\circ}{A} = \bigcup_{U \in \mathcal{T}_A} U$, tem-se que $x \in U_0$, para algum $U_0 \in \mathcal{T}_A$. Desta forma, temos que $U_0 \in \mathcal{T}$ e $x \in U_0 \subset \overset{\circ}{A}$, o que implica por definição que x é ponto interior de A , ou seja, $x \in \text{int}(A)$. Logo, $\overset{\circ}{A} \subset \text{int}(A)$.

Por outro lado, dado $x \in \text{int}(A)$, segue que existe $U_0 \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U_0 \subset A$. Assim, $U_0 \in \mathcal{T}^A$ e $x \in U_0 \subset (\bigcup_{U \in \mathcal{T}_A} U) = \overset{\circ}{A}$. Logo, $\text{int}(A) \subset \overset{\circ}{A}$.

Portanto, $\overset{\circ}{A} = \text{int}(A)$. □

Proposição 2.24. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A, B \subset X$. Se B é aberto em X com respeito a topologia $\mathcal{T}$ e $B \subset A$, então $B \subset \overset{\circ}{A}$.*

Demonstração. Como B é aberto em X e $B \subset A$ então $B \in \mathcal{T}_A$. Logo, pela Definição 2.22 tem-se que $B \subset (\bigcup_{U \in \mathcal{T}_A} U) = \overset{\circ}{A}$. Portanto, $B \subset \overset{\circ}{A}$. □

Proposição 2.25. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A, B \subset X$. Se $A \subset B$, então $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.*

Demonstração. Segue imediatamente da definição de interior de um conjunto que $\overset{\circ}{A} \subset A$. Assim, $\overset{\circ}{A} \subset A \subset B$. Como $\overset{\circ}{A}$ é aberto em X e $\overset{\circ}{A} \subset B$, segue da Proposição 2.24 que $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$. □

Proposição 2.26. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A, B \subset X$. As seguintes afirmações são válidas:*

$$i) \quad \overset{\circ}{A} \subset A.$$

$$ii) \quad \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}.$$

$$iii) \quad \overset{\circ}{X} = X.$$

$$iv) (A \overset{\circ}{\cap} B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

Demonstração. i) Segue imediatamente da definição de interior de um conjunto.

ii) Segue do item i) que $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} \subset \overset{\circ}{A}$. Por outro lado, tomando $U = \overset{\circ}{A}$ e $V = \overset{\circ}{A}$, temos que U é aberto em X e $U \subset V$. Assim, segue da Proposição 2.24 que $U \subset V^\circ$, ou seja, $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$. Portanto, $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$.

iii) Segue do item i) que $\overset{\circ}{X} \subset X$. Por outro lado, tomando $U = X$ e $V = X$, temos que U é aberto em X e $U \subset V$. Assim, segue da Proposição 2.24 que $U \subset V^\circ$, ou seja, $X \subset \overset{\circ}{X}$. Portanto, $\overset{\circ}{X} = X$.

iv) Como $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$, resulta da Proposição 2.25 que $(A \overset{\circ}{\cap} B) \subset \overset{\circ}{A}$ e $(A \overset{\circ}{\cap} B) \subset \overset{\circ}{B}$. Consequentemente, temos que $(A \overset{\circ}{\cap} B) \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Por outro lado, temos que $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ é aberto em X e $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B$. Logo, segue da Proposição 2.24 que $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset (A \overset{\circ}{\cap} B)$. Portanto, $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. $\square$

Proposição 2.27. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$. Tem-se que A é aberto em X com respeito a topologia $\mathcal{T}$ se, e somente se, $A = \overset{\circ}{A}$.*

Demonstração. Temos que $\overset{\circ}{A} \subset A$, conforme item a) da Proposição 2.26. Por outro lado, tomando $U = A$ e $V = A$, temos que U é aberto em X por hipótese e $U \subset V$. Assim, segue da Proposição 2.24 que $U \subset V^\circ$, ou seja, $A \subset \overset{\circ}{A}$. Portanto, $A = \overset{\circ}{A}$. $\square$

Assim como ocorre em espaços métricos, um subconjunto A de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é aberto em X se, e somente se, todos os seus pontos são pontos interiores com respeito a topologia de $\mathcal{T}$. De fato, segue da Proposição 2.23 e da Proposição 2.27 que

$$A \in \mathcal{T} \iff A = \overset{\circ}{A} = \text{int}(A). \quad (2.10)$$

Proposição 2.28. *Sejam X um conjunto e $g: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ uma aplicação com as seguintes propriedades:*

$$i) \ g(A) \subset A, \text{ para todo } A \in \mathcal{P}(X);$$

$$ii) \ g(g(A)) = g(A), \text{ para todo } A \in \mathcal{P}(X);$$

$$iii) \ g(X) = X;$$

iv) $g(A \cap B) = g(A) \cap g(B)$, para todos $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

Se $\mathcal{T}$ é uma coleção de subconjuntos de X dada por

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X) : A = g(A)\}, \quad (2.11)$$

então $\mathcal{T}$ é uma topologia em X .

Demonstração. A demonstração consiste em verificar que a coleção $\mathcal{T}$ satisfaz as condições de topologia por meio das propriedades descritas na hipótese. $\square$

2.4 Fecho topológico

Nesta seção, será introduzido o conceito de fecho de um conjunto em um espaço topológico. Esse conceito é fundamental para a análise da estrutura externa de subconjuntos em Topologia.

Destacaremos agora um resultado válido no contexto de espaços métricos que nos ajudará a motivar o conceito de fecho topológico. Deixaremos a cargo do leitor a verificação das equivalências do resultado descrito abaixo.

Proposição 2.29. *Sejam (M, d) um espaço métrico, $A \subset M$ e $a \in M$. As seguintes condições são equivalentes:*

- i) $d(a, A) = 0$;
- ii) para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $d(a, x) < \epsilon$;
- iii) $A \cap B(a; \epsilon) \neq \emptyset$, para todo $\epsilon > 0$;
- iv) $A \cap U \neq \emptyset$, para todo aberto U em M (com respeito a métrica d) tal que $a \in U$.

Definição 2.30. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que um ponto $a \in X$ é um ponto aderente ao conjunto A se $A \cap U \neq \emptyset$, para todo $U \in \mathcal{T}_a$.*

O conjunto de todos os pontos aderentes a um subconjunto A de um espaço topológico X será denotado por $ad(A)$.

Note que no caso em que X é um espaço topológico metrizável, um ponto a é aderente ao conjunto $A \subset X$ se, e somente se, a satisfaz, com respeito a métrica que induz a

topologia de X , a condição (iv) (e portanto todas as demais condições) descritas na Proposição 2.29.

Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, denota-se a coleção de todos os fechados que contém um subconjunto A de X por

$$\mathcal{F}_A^{\mathcal{T}} = \{F \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}} : A \subset F\}. \quad (2.12)$$

Já a coleção

$$\mathcal{F}_A^{\mathcal{T}} = \{F \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}} : F \subset A\} \quad (2.13)$$

denota a coleção de todos fechados do espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ contidos no subconjunto A .

Definição 2.31. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $\overline{A}$ é a aderência ou o fecho de A com respeito a topologia $\mathcal{T}$ se*

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}} F. \quad (2.14)$$

Dados $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$, segue da Proposição 2.17, item ii), que o fecho $\overline{A}$ é um conjunto fechado em X .

Em outras palavras, a Definição 2.31 diz o fecho de um subconjunto A de um espaço topológico X é a intersecção de todos fechados em X (com respeito a topologia de X) que contém A .

Equivalentemente, o fecho de um subconjunto A de um espaço topológico X é o menor fechado em X (com respeito a topologia de X) que contém A .

Proposição 2.32. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$. Tem-se que $\overline{A} = ad(A)$.*

Demonstração. Seja $x \in \overline{A}$ e suponha que $x \notin ad(A)$. Se $x \notin ad(A)$, então existe $U_0 \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U_0$ e $U_0 \cap A = \emptyset$. Tomando $F_0 = X - U_0$, temos que F_0 é fechado em X e $A \subset F_0$, ou seja, $F_0 \in \mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}$. Assim, $\overline{A} = (\bigcap_{F \in \mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}} F) \subset F_0$ e como $x \notin F_0$ resulta

que $x \notin \overline{A}$, o que é um absurdo. Logo, $x \in \overline{A}$ resulta em $x \in ad(A)$, isto é, $\overline{A} \subset ad(A)$. Agora, considere $x \in ad(A)$ e suponha que $x \notin \overline{A}$. Se $x \notin \overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}} F$, então $x \notin F_0$,

para algum $F_0 \in \mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}$. Tomando $U_0 = X - F_0$, temos que $U_0 \in \mathcal{T}$, $x \in U_0$ e $U \cap A = \emptyset$. Isto implica que $x \notin ad(A)$, o que é um absurdo. Logo, $x \in ad(A)$ resulta em $x \in \overline{A}$, isto é, $ad(A) \subset \overline{A}$.

Portanto, $\overline{A} = ad(A)$

□

Dado um espaço topológico X e $A \subset X$, como o fecho $\overline{A}$ é fechado em X e $ad(A) = \overline{A}$, segue que o conjunto de todos os pontos aderentes a A (com respeito a topologia de X) é um conjunto fechado em X .

Proposição 2.33. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A, B \subset X$. Se B é fechado em X com respeito a topologia $\mathcal{T}$ e $A \subset B$, então $\overline{A} \subset B$.*

Demonstração. Como B é fechado em X e $A \subset B$ então $B \in \mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}$. Logo, pela Definição 2.31 tem-se que $\overline{A} = (\bigcap_{F \in \mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}} F) \subset B$. Portanto, $\overline{A} \subset B$ $\square$

Proposição 2.34. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A, B \subset X$. Se $A \subset B$, então $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Demonstração. Segue imediatamente da definição de fecho de um conjunto que $B \subset \overline{B}$. Assim, $A \subset B \subset \overline{B}$. Como $\overline{B}$ é fechado em X e $A \subset \overline{B}$, segue da Proposição 2.33 que $\overline{A} \subset \overline{B}$. $\square$

Proposição 2.35. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A, B \subset X$. As seguintes afirmações são válidas:*

- i) $A \subset \overline{A}$.
- ii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
- iii) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
- iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Demonstração. i) Segue imediatamente da definição de fecho de um conjunto.

ii) Segue do item i) que $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Por outro lado, tomando $U = \overline{A}$ e $V = \overline{A}$, temos que V é fechado em X e $U \subset V$. Assim, segue da Proposição 2.33 que $\overline{U} \subset V$, ou seja, $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. Portanto, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

iii) Segue do item i) que $\emptyset \subset \overline{\emptyset}$. Por outro lado, tomando $U = \emptyset$ e $V = \emptyset$, temos que V é fechado em X e $U \subset V$. Assim, segue da Proposição 2.33 que $\overline{U} \subset V$, ou seja, $\overline{\emptyset} \subset \emptyset$. Portanto, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

iv) Como $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$, resulta da Proposição 2.34 que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ e $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Consequentemente, temos que $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Por outro lado, temos que $\overline{A \cup B}$ é fechado em X e $A \cup B \subset \overline{A \cup B}$. Logo, segue da Proposição 2.33 que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Portanto, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. $\square$

Proposição 2.36. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$. Tem-se que A é fechado em X com respeito a topologia $\mathcal{T}$ se, e somente se, $A = \overline{A}$.*

Demonstração. Temos que $A \subset \overline{A}$, conforme item a) da Proposição 2.35. Por outro lado, tomando $U = A$ e $V = A$, temos que V é fechado em X por hipótese e $U \subset V$. Assim, segue da Proposição 2.33 que $\overline{U} \subset V$, ou seja, $\overline{A} \subset A$. Portanto, $A = \overline{A}$. $\square$

Proposição 2.37. *Sejam X um conjunto e $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ uma aplicação com as seguintes propriedades:*

- i) $A \subset f(A)$, para todo $A \in \mathcal{P}(X)$;
- ii) $f(f(A)) = f(A)$, para todo $A \in \mathcal{P}(X)$;
- iii) $f(\emptyset) = \emptyset$;
- iv) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, para todos $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

Se $\mathcal{F}$ é uma coleção de subconjuntos de X dada por

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) : A = f(A)\}, \quad (2.15)$$

então $\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(X) : (X - U) \in \mathcal{F}\}$ é uma topologia em X e $\mathcal{F}^T = \mathcal{F}$.

Demonstração. Verifiquemos que a coleção $\mathcal{F}$ tem as propriedades descritas na hipótese da Proposição 2.18.

De acordo com propriedade iii) da aplicação f , temos que $\emptyset \in \mathcal{F}$. Também de acordo com a propriedade i) da aplicação f , temos que $X \subset f(X)$. Por outro lado, como $f(X) \in \mathcal{P}(X)$, segue que $f(X) \subset X$. Logo, $X = f(X)$ e consequentemente $X \in \mathcal{F}$. Portanto, $\emptyset \in \mathcal{F}$ e $X \in \mathcal{F}$.

Antes de verificar que qualquer intersecção de membros de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$, provemos que para todos $A, B \in \mathcal{P}(X)$ é válido:

$$A \subset B \implies f(A) \subset f(B). \quad (2.16)$$

De fato, usando a propriedade iv) da aplicação f temos que

$$A \subset B \implies B = A \cup (B - A) \implies f(B) = f(A) \cup f(B - A) \implies f(A) \subset f(B).$$

Agora, sejam I um conjunto qualquer de índices e $F_i \in \mathcal{F}$, para todo $i \in I$. Note que como cada $F_i \in \mathcal{F}$, então $f(F_i) = F_i$. Como $(\bigcap_{i \in I} F_i) \subset F_i$, para todo $i \in I$, segue de 2.16 que $f(\bigcap_{i \in I} F_i) \subset f(F_i) = F_i$, para todo $i \in I$. Logo, $f(\bigcap_{i \in I} F_i) \subset \bigcap_{i \in I} F_i$. Por outro lado, usando a propriedade i) da aplicação f , temos que $\bigcap_{i \in I} F_i \subset f(\bigcap_{i \in I} F_i)$. Assim, $f(\bigcap_{i \in I} F_i) = \bigcap_{i \in I} F_i$ e isto implica que $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$.

Verifiquemos que união finita de membros de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$. Sejam $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$. Como $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$, então $f(F_1) = F_1, \dots, f(F_n) = F_n$. Usando a propriedade iv) da aplicação f , temos que

$$F_1 \cup \dots \cup F_n = f(F_1) \cup \dots \cup f(F_n) = f(F_1 \cup \dots \cup F_n),$$

e isto implica que $F_1 \cup \dots \cup F_n \in \mathcal{F}$.

Logo, verificou-se que a coleção $\mathcal{F}$ possui as propriedades descritas na hipótese da Proposição 2.18. Portanto, segundo a tese da Proposição 2.18, a coleção $\mathcal{T}$ é uma topologia em X tal que $\mathcal{F}^{\mathcal{T}} = \mathcal{F}$. $\square$

Proposição 2.38. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$. Tem-se que*

$$(\overline{A})^{\circ} = \left(A^{\circ} \right)^{\circ} \quad (2.17)$$

e

$$\left(A^{\circ} \right)^{\circ} = \overline{(A^{\circ})}. \quad (2.18)$$

Demonstração. Segue das relações de De Morgan e das definições de interior e fecho topológicos. $\square$

CAPÍTULO 3

Espaços topológicos generalizados

Neste capítulo apresentamos o conceito de *topologia generalizada* e resultados relacionados. Este conteúdo está baseado nos artigos [4] e [5]. Também é apresentado neste capítulo o conceito de *continuidade generalizada* introduzido por Vieira no artigo [2] e resultados relacionados presentes no artigo [3]. Ao final do capítulo são apresentados resultados originais que caracterizam topologias generalizadas induzidas por continuadores quaisquer e continuadores bijetores.

3.1 Funções monotônicas

Nesta seção abordaremos o conceito de funções monotônicas e algumas de suas propriedades, uma vez que este conceito é crucial para a indução de topologias generalizadas.

Definição 3.1. *Seja X um conjunto. A função $\gamma: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ é dita monotônica se para todos $A, B \in \mathcal{P}(X)$ com $A \subset B$, tem-se que $\gamma(A) \subset \gamma(B)$.*

Denotamos por $\Gamma(X)$ a coleção de todas as funções monotônicas $\gamma: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

Exemplo 3.2. *Seja X um conjunto. A função identidade sobre $\mathcal{P}(X)$ que associa cada subconjunto A de X a ele próprio é uma função monotônica. Em outras palavras, a função identidade $\mathfrak{f}(A): \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por*

$$\mathfrak{f}(A) = A, \tag{3.1}$$

é monotônica.

Exemplo 3.3. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Segue da Proposição 2.25 que a função que associa cada subconjunto A de X ao seu interior com respeito à topologia $\mathcal{T}$ é monotônica. Em outras palavras, a função interior $i(A): \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por

$$i(A) = \overset{\circ}{A}, \quad (3.2)$$

é monotônica.

Exemplo 3.4. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Segue da Proposição 2.34 que a função que associa cada subconjunto A de X ao seu fecho com respeito à topologia $\mathcal{T}$, é monotônica. Em outras palavras, a função fecho $c(A): \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por

$$c(A) = \overline{A} \quad (3.3)$$

é monotônica.

Vejamos agora um exemplo de função na qual a monotonicidade não é válida.

Exemplo 3.5. Considere a função fronteira $\partial: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, que associa a cada subconjunto de $\mathbb{R}$ os pontos da sua fronteira. Basta exibirmos um par de subconjuntos para o qual falha a propriedade de monotonicidade. Tome $A = [0, 1]$ e $B = [0, 2]$. Claramente, $A \subset B$, entretanto, $\{0, 1\} = \partial A \not\subset \partial B = \{0, 2\}$.

Proposição 3.6. Seja X um conjunto. Se $\gamma, \sigma \in \Gamma(X)$ então $\sigma \circ \gamma \in \Gamma(X)$.

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathcal{P}(X)$ tais que $A \subset B$. Como γ é função monotônica, tem-se que $A \subset B$ implica que $\gamma(A) \subset \gamma(B)$. Da mesma forma, como σ é função monotônica, tem-se que $\gamma(A) \subset \gamma(B)$ implica que $\sigma(\gamma(A)) \subset \sigma(\gamma(B))$. Assim, para $A \subset B$ implica que $(\sigma \circ \gamma)(A) \subset (\sigma \circ \gamma)(B)$. Portanto, $\sigma \circ \gamma$ é função monotônica, isto é, $\sigma \circ \gamma \in \Gamma(X)$. $\square$

Exemplo 3.7. Segue da Proposição (3.6) que as funções abaixo são monotônicas:

$$(i) \ c \circ i;$$

$$(ii) \ i \circ c;$$

$$(iii) \ c \circ i \circ c;$$

$$(iv) \ i \circ c \circ i.$$

Definição 3.8. *Sejam X um conjunto e $\gamma: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ uma função. Um subconjunto U de X é dito γ -aberto se $U \subset \gamma(U)$.*

Visto que vazio é subconjunto de qualquer conjunto, é claro que $\emptyset$ é γ -aberto, ou seja, $\emptyset \subset \gamma(\emptyset)$.

Proposição 3.9. *Sejam X um conjunto e I um conjunto não-vazio de índices. Se $\gamma \in \Gamma(X)$ e U_i é γ -aberto, para todo $i \in I$, então $\bigcup_{i \in I} U_i$ é γ -aberto.*

Demonstração. Por hipótese, como cada U_i é γ -aberto, segue por definição que, para todo $i \in I$, $U_i \subset \gamma(U_i)$, donde resulta que

$$\bigcup_{i \in I} U_i \subset \bigcup_{i \in I} \gamma(U_i). \quad (3.4)$$

Como γ é monotônica, para cada $j \in I$ segue por definição que

$$U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \gamma(U_j) \subset \gamma\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)$$

e, conseqüentemente,

$$\bigcup_{i \in I} \gamma(U_i) \subset \gamma\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right). \quad (3.5)$$

Segue de (3.4) e (3.5) que

$$\bigcup_{i \in I} U_i \subset \gamma\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right).$$

Portanto, $\bigcup_{i \in I} U_i$ é γ -aberto. □

Em outras palavras, a proposição anterior garante que qualquer união de conjuntos γ -abertos é γ -aberto, desde que a função γ seja monotônica.

Uma questão natural é se a proposição anterior também seria válida para interseções. Em outras palavras, se cada U_i é γ -aberto, então $\bigcap_{i \in I} U_i$ é γ -aberto? A resposta é não. Considere $X = \mathbb{R}$ munido com a topologia usual e a função interior $i: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Tome os intervalos abertos da forma $U_i = (1 - 1/i, 1 + 1/i)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Note que cada U_i é i -aberto, já que $\gamma(U_i) = U_i$. Contudo, $\bigcap_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (1 - 1/i, 1 + 1/i) = \{1\}$ e $\bigcap_{i \in I} U_i = \{1\} \not\subset \emptyset = i(\{1\}) = i(\bigcap_{i \in I} U_i)$.

Proposição 3.10. *Sejam X um conjunto e I um conjunto não-vazio de índices. Se $\gamma : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ é injetora e U_i é γ -aberto, para todo $i \in I$, então $\bigcap_{i \in I} U_i$ é γ -aberto.*

Demonstração. Por hipótese, como cada U_i é γ -aberto, vale que $U_i \subset \gamma(U_i)$, para todo $i \in I$, donde resulta que

$$\bigcap_{i \in I} U_i \subset \bigcap_{i \in I} \gamma(U_i).$$

Como γ é uma função injetora, vale que

$$\bigcap_{i \in I} \gamma(U_i) = \gamma\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right).$$

Logo,

$$\bigcap_{i \in I} U_i \subset \gamma\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right).$$

Portanto, $\bigcap_{i \in I} U_i$ é γ -aberto. □

Definição 3.11. *Sejam X um conjunto, I um conjunto não-vazio de índices e $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ uma coleção de subconjuntos de X . A coleção $\mathcal{G}$ é uma topologia generalizada de X se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{G}$.

(ii) Se $U_i \in \mathcal{G}$, para todo $i \in I$, então $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{G}$.

É claro que toda topologia em X é uma topologia generalizada em X .

Proposição 3.12. *Sejam X um conjunto e $\gamma \in \Gamma(X)$. A coleção de subconjuntos de X dada por*

$$\mathcal{G}_\gamma = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \text{ é } \gamma\text{-aberto}\} \quad (3.6)$$

é uma topologia generalizada de X .

Demonstração. De fato, isto decorre imediatamente do fato que vazio é sempre γ -aberto e da Proposição 3.9. □

Como corolário da proposição anterior segue que as seguintes proposições são casos particulares de topologias generalizadas.

Corolário 3.13. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathbf{i}$ a função interior associada à $\mathcal{T}$. A coleção de subconjuntos de X dada por*

$$\mathcal{T}_{\mathbf{i}} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \text{ é } \mathbf{i}\text{-aberto}\} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \overset{\circ}{U}\} \quad (3.7)$$

é uma topologia generalizada em X e, além disso, $\mathcal{T}_{\mathbf{i}} = \mathcal{T}$.

Demonstração. Como $\mathbf{i}$ é uma função monotônica, segue da Proposição 3.12 que $\mathcal{T}_{\mathbf{i}}$ é uma topologia generalizada em X . Além disso,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathbf{i}} &= \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \text{ é } \mathbf{i}\text{-aberto}\} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \overset{\circ}{U}\} \\ &= \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U = \overset{\circ}{U}\} = \mathcal{T}. \end{aligned}$$

□

Corolário 3.14. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathbf{c}$ a função fecho associada à $\mathcal{T}$. A coleção de subconjuntos de X dada por*

$$\mathcal{T}_{\mathbf{c}} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \text{ é } \mathbf{c}\text{-aberto}\} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \overline{U}\} \quad (3.8)$$

é uma topologia generalizada em X e, além disso, $\mathcal{T}_{\mathbf{c}} = \mathcal{P}(X)$.

Demonstração. Como $\mathbf{c}$ é uma função monotônica, segue da Proposição 3.12 que $\mathcal{T}_{\mathbf{c}}$ é uma topologia generalizada em X . Além disso,

$$\mathcal{T}_{\mathbf{c}} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \text{ é } \mathbf{c}\text{-aberto}\} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \overline{U}\} = \mathcal{P}(X).$$

□

Corolário 3.15. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. As seguintes coleções de subconjuntos de X são topologias generalizadas:*

- (i) $\mathcal{T}_{\mathbf{ci}} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \text{ é } (\mathbf{c} \circ \mathbf{i})\text{-aberto}\} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \overline{\overset{\circ}{U}}\}.$
- (ii) $\mathcal{T}_{\mathbf{ic}} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \text{ é } (\mathbf{i} \circ \mathbf{c})\text{-aberto}\} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \overset{\circ}{\overline{U}}\}.$
- (iii) $\mathcal{T}_{\mathbf{cic}} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \text{ é } (\mathbf{c} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{c})\text{-aberto}\} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \overline{\overset{\circ}{\overline{U}}}\}.$
- (iv) $\mathcal{T}_{\mathbf{ici}} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \text{ é } (\mathbf{i} \circ \mathbf{c} \circ \mathbf{i})\text{-aberto}\} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{U}}}\}.$

Demonstração. Visto $\mathbf{i}$ e $\mathbf{c}$ são funções monotônicas, segue diretamente da Proposição 3.12 que as composições relativas a tais funções geram topologias generalizadas em X . $\square$

Os elementos das topologias generalizadas geradas pelas composições entre as funções $\mathbf{i}$ e $\mathbf{c}$ são chamados de *semi-abertos* ($\gamma = \mathbf{ci}$), *pré-abertos* ($\gamma = \mathbf{ic}$), β -*abertos* ($\gamma = \mathbf{cic}$) e α -*abertos* ($\gamma = \mathbf{ici}$).

Exemplo 3.16. Seja $\mathbb{R}$ munido com a topologia usual $\mathcal{T}$. Vamos comparar $\mathcal{T}$ com as topologias generalizadas $\mathcal{T}_{ci}$, $\mathcal{T}_{ic}$, $\mathcal{T}_{cic}$, $\mathcal{T}_{ici}$.

(i) $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{ci} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. De fato, se $U \in \mathcal{T}$, então $U = \overset{\circ}{U}$. Como $U \subset \overline{U}$ é sempre válido, segue que $U \subset \overset{\circ}{\overline{U}}$. Portanto, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{ci}$. Por outro lado, temos que $\mathbb{Q} \not\subset \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$, donde resulta que $\mathcal{T}_{ci} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(ii) $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{ic} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. De fato, se $U \in \mathcal{T}$, então $U = \overset{\circ}{U}$. Como $\overline{\overline{U}}$ é o maior aberto contido em $\overline{U}$ e U é um aberto contido em $\overline{U}$, segue que $U \subset \overset{\circ}{\overline{U}}$. Portanto, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{ic}$. Por outro lado, temos que $\{1\} \not\subset \overset{\circ}{\{1\}} = \emptyset$, donde resulta que $\mathcal{T}_{ic} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(iii) De modo análogo ao item (ii), verifica-se que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{cic} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(iv) De modo análogo ao item (i), verifica-se que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{ici} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

3.2 Interior e fecho dados por função monotônica

Assim como a partir de uma topologia define-se interior e fecho de um subconjunto, veremos nesta seção que é possível definir interior e fecho de um subconjunto a partir de uma função monotônica.

Definição 3.17. Seja X um conjunto, $A \in \mathcal{P}(X)$ e $\gamma \in \Gamma(X)$. A união de todos os subconjuntos γ -abertos contidos em A é chamada de γ -interior de A e é denotada por $\mathbf{i}_\gamma(A)$. Em outras palavras,

$$\mathbf{i}_\gamma(A) = \bigcup_{U \in \mathcal{G}_{\gamma, A}} U \quad (3.9)$$

onde

$$\mathcal{G}_{\gamma, A} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \in \mathcal{G}_\gamma \text{ e } U \subset A\} \quad (3.10)$$

Da mesma forma que para uma topologia em X , a função interior $\mathbf{i}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ associa cada subconjunto de X ao seu interior com respeito a essa topologia, para uma

topologia generalizada induzida por uma função monotônica γ a função $i_\gamma: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ associa cada subconjunto de X ao seu γ -interior. A função i_γ é chamada *função γ -interior*.

Proposição 3.18. *Seja X um conjunto, $A \in \mathcal{P}(X)$ e $\gamma \in \Gamma(X)$. O γ -interior de A é o maior subconjunto γ -aberto contido em A .*

Demonstração. Tem-se por definição que $i_\gamma(A)$ é a união de todos os subconjuntos γ -abertos contidos em A . Segue da Proposição 3.9 que a união de γ -abertos é γ -aberto, logo $i_\gamma(A)$ é γ -aberto e como ele é a união de todos os γ -abertos contidos em A , então ele é o maior γ -aberto contido em A . $\square$

Proposição 3.19. *Seja X um conjunto, $A, B \in \mathcal{P}(X)$ e $\gamma \in \Gamma(X)$. Se B é γ -aberto e $B \subset A$, então $B \subset i_\gamma(A)$.*

Demonstração. Como B é γ -aberto e $B \subset A$ então $B \in \mathcal{G}_\gamma^A$. Logo, pela Definição 3.17 tem-se que $B \subset \left(\bigcup_{U \in \mathcal{G}_{\gamma, A}} U \right) = i_\gamma(A)$. Portanto, $B \subset i_\gamma(A)$. $\square$

Proposição 3.20. *Seja X um conjunto, $A, B \in \mathcal{P}(X)$ e $\gamma \in \Gamma(X)$. Se $B \subset A$, então $i_\gamma(B) \subset i_\gamma(A)$.*

Demonstração. Segue imediatamente da definição de γ -interior de um conjunto que $i_\gamma(A) \subset A$. Assim, $i_\gamma(A) \subset A \subset B$. Como $i_\gamma(A)$ é γ -aberto e $i_\gamma(A) \subset B$, segue da Proposição 3.19 que $i_\gamma(B) \subset i_\gamma(A)$. $\square$

Proposição 3.21. *Seja X um conjunto, $A, B \in \mathcal{P}(X)$ e $\gamma \in \Gamma(X)$. As seguintes afirmações são válidas:*

- i) $i_\gamma(A) \subset A$.
- ii) $i_\gamma(\emptyset) = \emptyset$.
- iii) $i_\gamma(i_\gamma(A)) = i_\gamma(A)$.
- iv) $i_\gamma(A \cap B) \subset i_\gamma(A) \cap i_\gamma(B)$.

Demonstração. i) Segue imediatamente da definição de γ -interior de um conjunto.

ii) Segue do item i) que $i_\gamma(\emptyset) \subset \emptyset$. Por outro lado, é claro que $\emptyset \subset i_\gamma(\emptyset)$. Portanto, $i_\gamma(\emptyset) = \emptyset$.

- iii) Segue do item i) que $i_\gamma(i_\gamma(A)) \subset i_\gamma(A)$. Por outro lado, tomando $U = i_\gamma(A)$ e $V = i_\gamma(A)$, temos que U é γ -aberto e $U \subset V$. Assim, segue da Proposição 3.19 que $U \subset i_\gamma(V)$, ou seja, $i_\gamma(A) \subset i_\gamma(i_\gamma(A))$. Portanto, $i_\gamma(i_\gamma(A)) = i_\gamma(A)$.
- iv) Como $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$, resulta da Proposição 3.20 que $i_\gamma(A \cap B) \subset i_\gamma(A)$ e $i_\gamma(A \cap B) \subset i_\gamma(B)$. Portanto, $i_\gamma(A \cap B) \subset i_\gamma(A) \cap i_\gamma(B)$. $\square$

Proposição 3.22. *Um conjunto A é γ -aberto se, e somente se, $A = i_\gamma(A)$.*

Demonstração. Se por hipótese $A = i_\gamma(A)$, então é claro que A é γ -aberto. Reciprocamente, temos que $i_\gamma(A) \subset A$, conforme item i) da Proposição 3.21. Por outro lado, tomando $U = A$ e $V = A$, temos por hipótese que U é γ -aberto e $U \subset V$. Assim, segue da Proposição 3.19 que $U \subset i_\gamma(V)$, ou seja, $A \subset i_\gamma(A)$. Portanto, $A = i_\gamma(A)$. $\square$

Definição 3.23. *Sejam X um conjunto e $\gamma: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ uma função. Um subconjunto F de X é dito γ -fechado se $F^\complement$ é γ -aberto.*

Note que X é sempre γ -fechado, pois $X^\complement = \emptyset$ é sempre γ -aberto.

Proposição 3.24. *Sejam X um conjunto e I um conjunto não-vazio de índices. Se $\gamma \in \Gamma(X)$ e F_i é γ -fechado, para todo $i \in I$, então $\bigcap_{i \in I} F_i$ é γ -fechado.*

Demonstração. Segue das Leis de De Morgan e da Proposição 3.9. $\square$

Definição 3.25. *Seja X um conjunto, $A \in \mathcal{P}(X)$ e $\gamma \in \Gamma(X)$. A interseção de todos os subconjuntos γ -fechados que contém A é chamada de γ -fecho de A e é denotada por $c_\gamma(A)$. Em outras palavras,*

$$c_\gamma(A) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_{\gamma, A}^\complement} F \quad (3.11)$$

onde

$$\mathcal{F}_{\gamma, A}^\complement = \{F \in \mathcal{P}(X) \mid F^\complement \in \mathcal{G}_\gamma \text{ e } A \subset F\} \quad (3.12)$$

Da mesma forma que para uma topologia em X , a função fecho $c: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ associa cada subconjunto de X ao seu fecho com respeito a essa topologia, para uma topologia generalizada induzida por uma função monotônica γ a função $c_\gamma: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ associa cada subconjunto de X ao seu γ -fecho. A função c_γ é chamada *função γ -fecho*.

Proposição 3.26. *O conjunto $c_\gamma(A)$ é o menor conjunto γ -fechado que contém A .*

Demonstração. Tem-se por definição que $\mathfrak{c}_\gamma(A)$ é a interseção de todos os subconjuntos γ -fechados que contém A . Segue da Proposição 3.24 que a interseção de γ -fechados é γ -fechado, logo $\mathfrak{c}_\gamma(A)$ é γ -fechado e como ele é a interseção de todos os γ -fechados que contém A , então ele é o menor γ -fechado que contém A . $\square$

De forma análoga, verifica-se a validade de propriedades para γ -fechos similares àquelas de fechos topológicos. Incentivamos o leitor a listar e verificar essas propriedades.

3.3 Continuidade generalizada

Iniciaremos essa seção apresentando a definição de continuidade clássica (usual) de uma função definida entre espaços topológicos.

Definição 3.27. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos, $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ uma função e $a \in X$. Diz-se que a função f é contínua em a se, para todo $U \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$, existe um $A \in \mathcal{T}_a^X$ tal que $f(A) \subset U$.*

Definição 3.28. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos e $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ uma função. Diz-se que a função f é contínua se f é contínua em a , para todo $a \in X$.*

Uma caracterização amplamente conhecida para funções contínuas entre espaços topológicos é apresentada abaixo. Convidamos o leitor a verificar a sua demonstração.

Proposição 3.29. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos e $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ uma função. Tem-se que f é contínua se, e somente se, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}^X$, para todo $U \in \mathcal{T}^Y$.*

De agora em diante nesta seção, será explorada a noção de continuidade generalizada introduzida em [2] e [3]. Faremos aqui uma síntese parcial de definições e resultados abordados originalmente nestes artigos, os quais subsidiarão o desenvolvimento dos resultados da próxima seção. As demonstrações de alguns resultados a seguir foram omitidas, porém podem ser consultadas nos artigos citados acima.

O conjunto de todas as funções de um conjunto A para um espaço topológico $(B, \mathcal{T}^B)$ é denotado por $F(A, (B, \mathcal{T}^B))$ ou simplesmente por $F(A, B)$, quando está claro qual topologia é adotada no contradomínio B .

Definição 3.30. [2, p. 86] *Seja X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ funções e $a \in X$. Diz-se que a função f é n -contínua em a se, para todo $U \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$, existe um $V \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z$ tal que*

$$f(n^{-1}(V)) \subset U. \quad (3.13)$$

Uma função f que é n -contínua em a também pode ser chamada de *continuante* de n em a e a função n é chamada de *continuador* de f em a . Fixando uma função $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$, um ponto $a \in X$ e um espaço topológico $(Y, \mathcal{T}^Y)$, o conjunto

$$\mathbf{C}_n(a, X, Y) = \{f \in \mathbf{F}(X, (Y, \mathcal{T}^Y)) \mid f \text{ é } n\text{-contínua em } a\} \quad (3.14)$$

representa o conjunto de todos os continuantes de n em a com respeito a X e $(Y, \mathcal{T}^Y)$. Um elemento do conjunto

$$\mathbf{C}_n(X, Y) = \bigcap_{a \in X} \mathbf{C}_n(a, X, Y) \quad (3.15)$$

é uma função n -contínua em todos os pontos de X . O conjunto $\mathbf{C}_n(X, Y)$ representa o conjunto de todos os continuantes de n com respeito a X e $(Y, \mathcal{T}^Y)$. Por outro lado, fixando uma função $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$, um ponto $a \in X$ e um espaço topológico $(Z, \mathcal{T}^Z)$, o conjunto

$$\mathbf{C}^f(a, X, Z) = \{n \in \mathbf{F}(X, (Z, \mathcal{T}^Z)) \mid f \in \mathbf{C}_n(a, X, Y)\} \quad (3.16)$$

representa o conjunto de todos os continuadores de f em a com respeito a X e $(Z, \mathcal{T}^Z)$. O conjunto

$$\mathbf{C}^f(X, Z) = \bigcap_{a \in X} \mathbf{C}^f(a, X, Z) = \{n \in \mathbf{F}(X, (Z, \mathcal{T}^Z)) \mid f \in \mathbf{C}_n(X, Y)\} \quad (3.17)$$

representa o conjunto de todos os continuadores de f com respeito a X e $(Y, \mathcal{T}^Y)$.

Pode-se notar que em (3.14), (3.15), (3.16) e (3.17) as topologias nos contradomínios das funções são omitidas nas notações desses conjuntos, pois essa informação é clara no contexto.

Exemplo 3.31. [2, p. 87] *Seja X um conjunto não vazio, (Y, T_Y) um espaço topológico e seja $a \in X$. Toda função $f: X \rightarrow (Y, T_Y)$ é f -contínua em a . De fato, dado $U \in T_Y$ tal que $f(a) \in U$, então tome $V = U$ e segue-se que*

$$f(f^{-1}(V)) = f(f^{-1}(U)) \subset U.$$

Portanto, f é f -contínua em a , ou seja, $f \in \mathbf{C}_f(a, X, Y)$ e $f \in \mathbf{C}_f(a, X, Y)$.

Exemplo 3.32. [2, p. 88] *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos, $a \in X$ e $id: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$ a função identidade. Uma função $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é contínua em a se, e somente se, f é id -contínua em a . De fato, quando $V \in \mathcal{T}_a^X$ é considerado, note que $f(id^{-1}(V)) = f(V)$. Portanto, a condição requerida na definição clássica de continuidade e a condição (3.30) são equivalentes.*

Exemplo 3.33. [2, p. 88] *Seja $\mathbb{R}$ equipada com a topologia usual, a um número real maior que 0 e seja $id: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função identidade e $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $m(x) = |x|$. Para todo subconjunto aberto V de $\mathbb{R}$ contendo $m(a) = a$, considere $V^+ = V \cap [0, \infty)$ e $V^- = \{x \in \mathbb{R}: -x \in V^+\}$. Note que $m^{-1}(V) = V^+ \cup V^-$. Considerando o subconjunto aberto $U = (0, \infty)$ de $\mathbb{R}$ contendo $id(a) = a$, resulta que para todo subconjunto aberto V de $\mathbb{R}$ contendo $m(a) = a$ é válido que*

$$id(m^{-1}(V)) = id(V^+ \cup V^-) = V^+ \cup V^- \not\subset (0, \infty) = U.$$

Portanto, id não é m -contínua em a , ou seja, $id \notin \mathcal{C}_m(a, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $m \notin \mathcal{C}^{id}(a, \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

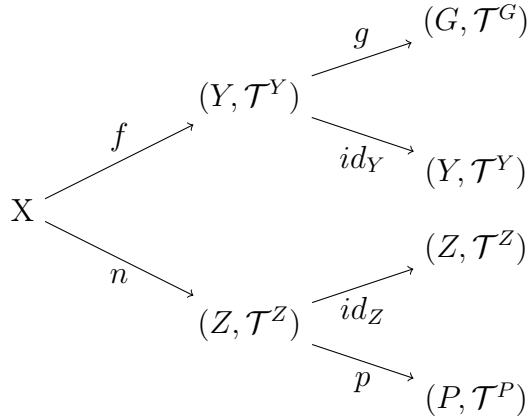
Proposição 3.34. [2, p. 86] *Seja X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ funções e $a \in X$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) *Se f é uma função constante, então $f \in \mathcal{C}_n(a, X, Y)$.*

(ii) *Se n é uma função constante e $f \in \mathcal{C}_n(a, X, Y)$, então $f(X) \subset U$, para todo $U \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$.*

Teorema 3.35. [2, p. 96] *Seja X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$, $(Z, \mathcal{T}^Z)$ e $(R, \mathcal{T}^R)$ espaços topológicos, $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$, $m: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ e $n: X \rightarrow (R, \mathcal{T}^R)$ funções e $a \in X$. Se $f \in \mathcal{C}_m(a, X, Y)$ e $m \in \mathcal{C}_n(a, X, Z)$, então $f \in \mathcal{C}_n(a, X, Y)$.*

Agora apresentaremos resultados sobre como composições de funções com continuidade generalizada se comportam. Para facilitar o entendimento do Teorema 3.36, considere o seguinte diagrama.



Teorema 3.36. [3, p. 17] *Seja X um conjunto não-vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$, $(Z, \mathcal{T}^Z)$, $(G, \mathcal{T}^G)$ e $(P, \mathcal{T}^P)$ espaços topológicos, $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$, $g: (Y, \mathcal{T}^Y) \rightarrow (G, \mathcal{T}^G)$, $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ e $p: (Z, \mathcal{T}^Z) \rightarrow (P, \mathcal{T}^P)$ funções. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Se $f \in F(X, Y)$ e $g \in C_{id}(Y, G)$, então $g \circ f \in C_f(X, G)$.*
- (ii) *Se $f \in C_n(X, Y)$ e $g \in C_{id}(Y, G)$, então $g \circ f \in C_n(X, G)$.*
- (iii) *Se $n \in F(X, Z)$ e $id \in C_p(Z, Z)$, então $n \in C_{pon}(X, Z)$.*
- (iv) *Se $f \in C_n(X, Y)$ e $id \in C_p(Z, Z)$, então $f \in C_{pon}(X, Y)$.*
- (v) *Se $f \in C_n(X, Y)$, $g \in C_{id}(Y, G)$ e $id \in C_p(Z, Z)$, então $g \circ f \in C_{pon}(X, G)$.*

Demonstração. (i) Seja $a \in X$ e $U \in \mathcal{T}_{(g \circ f)(a)}^G$. Como $\mathcal{T}_{(g \circ f)(a)}^G = \mathcal{T}_{g(f(a))}^G$ e pela hipótese $g \in C_{id}(Y, G)$, então existe $V \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$ tal que $g(V) \subset U$. Segue que

$$f(f^{-1}(V)) \subset V \Rightarrow g(f(f^{-1}(V))) \subset g(V) \Rightarrow (g \circ f)(f^{-1}(V)) \subset U.$$

Portanto, $g \circ f$ é f -contínua em a . Como $a \in X$ é arbitrário, segue que $g \circ f \in C_f(X, G)$.

(ii) Se $g \in C_{id}(Y, G)$, segue do item (i) que $g \circ f \in C_f(X, G)$. Como $g \circ f \in C_f(X, G)$ e pela hipótese $f \in C_n(X, Y)$, segue do Teorema 3.35 que $g \circ f \in C_n(X, G)$.

(iii) Seja $a \in X$ e $V \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z$. Se $id \in C_p(Z, Z)$, então id é p -contínua em $n(a) \in Z$. Como $V \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z$ e id é p -contínua em $n(a)$, então existe $W \in \mathcal{T}_{p(n(a))}^P$ tal que $id(p^{-1}(W)) \subset V$, ou seja, $p^{-1}(W) \subset V$. Segue que

$$n((p \circ n)^{-1}(W)) = n(n^{-1}(p^{-1}(W))) \subset n(n^{-1}(V)) \subset V.$$

Portanto, n é $(p \circ n)$ -contínua em a . Como $a \in X$ é arbitrário, então $n \in C_{pon}(X, Z)$.

(iv) Pelo item (iii) acima, se $id \in C_p(Z, Z)$, então $n \in C_{pon}(X, Z)$. Como $f \in C_n(X, Y)$ e $n \in C_{pon}(X, Z)$, segue do Teorema 3.35 que $f \in C_{pon}(X, Y)$.

(v) Se $f \in C_n(X, Y)$ e $g \in C_{id}(Y, G)$, segue do item (ii) que $g \circ f \in C_n(X, G)$. Como $id \in C_p(Z, Z)$, segue do item (iii) que $n \in C_{pon}(X, Z)$. Se $g \circ f \in C_n(X, G)$ e $n \in C_{pon}(X, Z)$, segue do Teorema 3.35 que $g \circ f \in C_{pon}(X, G)$. $\square$

Corolário 3.37. [3, p. 18] *Seja X um conjunto não-vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$, $g: (Y, \mathcal{T}^Y) \rightarrow (G, \mathcal{T}^G)$ funções. Se $g \circ f$ não é f -contínua, então g não é contínua.*

Demonstração. Segue da contrapositiva do item (i) do Teorema 3.36. $\square$

Seja X e T conjuntos não-vazios e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ um espaço topológico. Considere a função de projeção na primeira coordenada $\pi_1: X \times T \rightarrow X$ e um continuador $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$. Então a função $n \circ \pi_1: X \times T \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ é dada por

$$(n \circ \pi_1)(x, t) = n(\pi_1(x, t)) = n(x).$$

Finalmente, o próximo resultado relaciona a continuidade generalizada de um continuante f em relação a um continuador descrito como uma composição de funções com a continuidade generalizada do mesmo continuante f em relação a um continuador descrito como uma função cartesiana.

Teorema 3.38. [3, p. 19] *Seja X um conjunto não-vazio e $(T, \mathcal{T}^T)$, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos. Sejam $f: X \times T \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$, $m: T \rightarrow (T, \mathcal{T}^T)$ e $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ funções. Se $f \in C_{n \circ \pi_1}(X \times T, Y)$ e m é uma função sobrejetora, então $f \in C_{n \times m}(X \times T, Y)$.*

Demonstração. Seja $(a, s) \in X \times T$ e $U \in \mathcal{T}_{f(a, s)}^Y$. Como f é $(n \circ \pi_1)$ -contínua, então existe $V \in \mathcal{T}_{(n \circ \pi_1)(a, s)}^Z$ tal que $f((n \circ \pi_1)^{-1}(V)) \subset U$. Considere $W = V \times m(T)$ e note que $W \in (\mathcal{T}^Z \otimes \mathcal{T}^T)_{(n(a), m(s))}$ e $W = V \times T$, porque m é uma função sobrejetora. Como

$$(n \circ \pi_1)^{-1}(V) = \{(x, t) \in X \times T : n(x) \in V\} = n^{-1}(V) \times T,$$

segue que

$$\begin{aligned}
 (n \times m)^{-1}(W) &= \{(x, t) \in X \times T : (n(x), m(t)) \in W\} \\
 &= \{(x, t) \in X \times T : n(x) \in V \text{ e } m(t) \in T\} \\
 &= \{(x, t) \in X \times T : x \in n^{-1}(V) \text{ e } t \in m^{-1}(T)\} \\
 &= n^{-1}(V) \times m^{-1}(T) \\
 &= n^{-1}(V) \times T \\
 &= (n \circ \pi_1)^{-1}(V).
 \end{aligned}$$

Então $f((n \times m)^{-1}(W)) = f((n \circ \pi_1)^{-1}(V)) \subset U$. Portanto, $f \in \mathbf{C}_{n \times m}(X \times T, Y)$. □

3.4 Topologias generalizadas dadas por continuadores

Nesta última seção deste trabalho apresentaremos resultados originais que caracterizam topologias generalizadas induzidas por continuadores quaisquer, bem como por continuadores bijetores.

Proposição 3.39. *Temos que $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é n -contínua com respeito à $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ se, e somente se, $f: (X, \mathcal{T}^n) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é contínua com respeito à topologia $\mathcal{T}^n$ dada por*

$$\mathcal{T}^n = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A = n^{-1}(V) \text{ para algum } V \in \mathcal{T}^Z\} = \{n^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{T}^Z\} \quad (3.18)$$

Demonstração. Sejam $a \in X$ e $U \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$. Se $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é n -contínua em a , então existe um $V \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z$ tal que $f(n^{-1}(V)) \subset U$. Tome $A = n^{-1}(V)$ e note que $A \in \mathcal{T}_a^n$. Logo, existe $A \in \mathcal{T}_a^n$ tal que $f(A) \subset U$, isto é, $f: (X, \mathcal{T}^n) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é contínua em a .

Reciprocamente, se $f: (X, \mathcal{T}^n) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é contínua em a , então existe $A \in \mathcal{T}_a^n$ tal que $f(A) \subset U$. Como $A \in \mathcal{T}^n$, então existe algum $V \in \mathcal{T}^Z$ tal que $A = n^{-1}(V)$ e como $a \in A$, tem-se que $n(a) \in V$. Logo, existe $V \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z$ tal que $f(n^{-1}(V)) \subset U$. Portanto, $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é n -contínua em a . □

Relembremos o enunciado do Corolário 3.15 que nos diz que sendo $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, então as seguintes coleções de subconjuntos de X são topologias generalizadas:

$$(i) \quad \mathcal{T}_{ci} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \text{ é } (\mathbf{c} \circ \mathbf{i})\text{-aberto}\} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \overline{\overline{\overline{U}}}\}.$$

$$(ii) \mathcal{T}_{ic} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \text{ é } (i \circ c)\text{-aberto}\} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \bar{\bar{U}}\}.$$

$$(iii) \mathcal{T}_{cic} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \text{ é } (c \circ i \circ c)\text{-aberto}\} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \bar{\bar{\bar{U}}}\}.$$

$$(iv) \mathcal{T}_{ici} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \text{ é } (i \circ c \circ i)\text{-aberto}\} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \bar{\bar{\bar{U}}}\}.$$

Nosso objetivo nessa seção é descrever as topologias generalizadas $\mathcal{T}_{ic}^n$, $\mathcal{T}_{ci}^n$, $\mathcal{T}_{cic}^n$ e $\mathcal{T}_{ici}^n$, induzidas a partir da topologia $\mathcal{T}^n$ dado por um continuador n .

Para tanto, é necessário antes de mais nada descrever os interiores e fechos de subconjuntos de X com respeito à topologia $\mathcal{T}^n$.

Considere um continuador $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$. Denotaremos o interior de um subconjunto A de X com respeito à topologia $\mathcal{T}^n$ por $i_n(A)$ e denotaremos o fecho desse subconjunto por $c_n(A)$. Já o interior de um subconjunto V de Z com respeito à topologia $\mathcal{T}^Z$ denotaremos por $i_Z(V)$ e denotaremos o fecho de subconjunto por $c_Z(V)$.

Temos por definição de interior que

$$i_n(A) = \bigcup_{W \in \mathcal{T}_{\bar{A}}^n} W = \bigcup_{n^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{\bar{A}}^n} n^{-1}(V),$$

sendo

$$\mathcal{T}_{\bar{A}}^n = \{W \in \mathcal{T}^n \mid W \subset A\} = \{n^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{T}^Z \text{ e } n^{-1}(V) \subset A\}.$$

Em outras palavras, $i_n(A)$ é a união de todos os abertos com respeito à topologia $\mathcal{T}^n$ contidos no subconjunto A .

Considere a subfamília da topologia $\mathcal{T}^Z$ composta por todos os abertos com respeito a essa topologia contidos na imagem direta $n(A)$, isto é,

$$\mathcal{T}_{n(A)}^Z = \{V \in \mathcal{T}^Z \mid V \subset n(A)\}.$$

Considere também a família dada por

$$\mathcal{R}_{\bar{A}}^n = \{n^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{T}_{n(A)}^Z\} = \{n^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{T}^Z \text{ e } V \subset n(A)\}.$$

O intuito aqui é investigar se as famílias $\mathcal{T}_{\bar{A}}^n$ e $\mathcal{R}_{\bar{A}}^n$ são comparáveis por inclusão. Para tanto, necessitamos da seguinte proposição:

Proposição 3.40. *Seja $n: X \rightarrow Z$ uma função. As seguintes sentenças são válidas:*

i) Se n é sobrejetora e $n^{-1}(V) \subset A$, então $V \subset n(A)$.

ii) Se n é injetora e $V \subset n(A)$, então $n^{-1}(V) \subset A$.

Demonstração. i) Seja $z \in V$. Como n é sobrejetora, então existe $x \in X$ tal que $n(x) = z$. Dessa forma, se $n(x) \in V$, então $x \in n^{-1}(V)$ e, por hipótese, $n(x) \in n(A)$, ou seja, $z \in n(A)$. Portanto, $V \subset n(A)$.

ii) Seja $x \in n^{-1}(V)$. Se $x \in n^{-1}(V)$, então $n(x) \in V$ e, por hipótese, $n(x) \in n(A)$, isto é, existe $x' \in A$ tal que $n'(x) = n(x)$. Como n é injetora, segue que $x' = x$ e, consequentemente, $x \in A$. Portanto, $n^{-1}(V) \subset A$. $\square$

Corolário 3.41. *Seja $n: X \rightarrow Z$ uma função. As seguintes sentenças são válidas:*

i) Se n é sobrejetora, então $\mathcal{T}_{\widehat{A}}^n \subset \mathcal{R}_{\widehat{A}}^n$.

ii) Se n é injetora, então $\mathcal{R}_{\widehat{A}}^n \subset \mathcal{T}_{\widehat{A}}^n$.

Corolário 3.42. *Seja $n: (X, \mathcal{T}^n) \rightarrow (Z, \mathcal{Z})$ um continuador. As seguintes sentenças são válidas:*

i) Se n é sobrejetora, então $\mathbf{i}_n(A) \subset n^{-1}(\mathbf{i}_Z(n(A)))$.

ii) Se n é injetora, então $n^{-1}(\mathbf{i}_Z(n(A))) \subset \mathbf{i}_n(A)$.

Demonstração. i) Como por hipótese n é sobrejetora, segue do Corolário 3.41 que $\mathcal{T}_{\widehat{A}}^n \subset \mathcal{R}_{\widehat{A}}^n$. Disso, resulta que

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_n(A) &= \bigcup_{n^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{\widehat{A}}^n} n^{-1}(V) \\ &\subset \bigcup_{n^{-1}(V) \in \mathcal{R}_{\widehat{A}}^n} n^{-1}(V) \\ &= \bigcup_{V \in \mathcal{T}_{n(A)}^Z} n^{-1}(V) \\ &= n^{-1} \left(\bigcup_{V \in \mathcal{T}_{n(A)}^Z} V \right) \\ &= n^{-1}(\mathbf{i}_Z(n(A))). \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{i}_n(A) \subset n^{-1}(\mathbf{i}_Z(n(A)))$. $\square$

ii) Como por hipótese n é injetora, segue do Corolário 3.41 que $\mathcal{R}_{\widehat{A}}^n \subset \mathcal{T}_{\widehat{A}}^n$. Disso, resulta que

$$\begin{aligned}
 n^{-1}(\mathbf{i}_Z(n(A))) &= n^{-1} \left(\bigcup_{V \in \mathcal{T}_{n(A)}^Z} V \right) \\
 &= \bigcup_{V \in \mathcal{T}_{n(A)}^Z} n^{-1}(V) \\
 &= \bigcup_{n^{-1}(V) \in \mathcal{R}_{\widehat{A}}^n} n^{-1}(V) \\
 &\subset \bigcup_{n^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{\widehat{A}}^n} n^{-1}(V) \\
 &= \mathbf{i}_n(A).
 \end{aligned}$$

Portanto, $n^{-1}(\mathbf{i}_Z(n(A))) \subset \mathbf{i}_n(A)$.

Corolário 3.43. *Seja $n: (X, \mathcal{T}^n) \rightarrow (Z, \mathcal{Z})$ um continuador. As seguintes sentenças são válidas:*

i) *Se n é sobrejetor, então $n(\mathbf{i}_n(A)) \subset \mathbf{i}_Z(n(A))$.*

ii) *Se n é injetor, então $\mathbf{i}_Z(n(A)) \subset n(\mathbf{i}_n(A))$.*

iii) *Se n é bijetor, então $n(\mathbf{i}_n(A)) = \mathbf{i}_Z(n(A))$.*

Demonstração. i) Como n é sobrejetor, segue do Corolário 3.42 que $\mathbf{i}_n(A) \subset n^{-1}(\mathbf{i}_Z(n(A)))$, o que implica que $n(\mathbf{i}_n(A)) \subset n(n^{-1}(\mathbf{i}_Z(n(A)))) \subset \mathbf{i}_Z(n(A))$.

ii) Como n é injetor, segue do Corolário 3.42 que $n^{-1}(\mathbf{i}_Z(n(A))) \subset \mathbf{i}_n(A)$, o que implica que $n(n^{-1}(\mathbf{i}_Z(n(A)))) \subset n(\mathbf{i}_n(A))$. Como n é sobrejetor, segue que $n(n^{-1}(\mathbf{i}_Z(n(A)))) = \mathbf{i}_Z(n(A))$. Portanto, $\mathbf{i}_Z(n(A)) \subset n(\mathbf{i}_n(A))$.

iii) Segue imediatamente dos itens i) e ii). □

Agora, denotemos por $\mathcal{F}^n$ a família dos fechados com respeito à topologia $\mathcal{T}^n$ e $\mathcal{F}^Z$ a família dos fechados com respeito à topologia $\mathcal{T}^Z$. Lembremos que por definição de fecho tem-se que

$$\mathbf{c}_n(B) = \bigcap_{H \in \mathcal{F}_B^n} H = \bigcap_{n^{-1}(G) \in \mathcal{F}_B^n} n^{-1}(G), \quad (3.19)$$

sendo

$$\mathcal{F}_B^n = \{H \in \mathcal{F}^n \mid B \subset H\} = \{n^{-1}(G) \mid G \in \mathcal{F}^Z \text{ e } B \subset n^{-1}(G)\}. \quad (3.20)$$

Em outras palavras, $\mathfrak{c}_n(B)$ é a interseção de todos os fechados com respeito à topologia $\mathcal{T}^n$ que contêm o subconjunto B .

Considere a subfamília de $\mathcal{F}^Z$ composta por todos os fechados com respeito à topologia $\mathcal{T}^Z$ que contêm a imagem direta $n(B)$, isto é,

$$\mathcal{S}_{n(B)}^Z = \{G \in \mathcal{F}^Z \mid n(B) \subset G\}. \quad (3.21)$$

Considere também a família dada por

$$\mathcal{S}_B^n = \{n^{-1}(G) \mid G \in \mathcal{S}_{n(B)}^Z\} = \{n^{-1}(G) \mid G \in \mathcal{F}^Z \text{ e } n(B) \subset G\}. \quad (3.22)$$

Vamos investigar se as famílias $\mathcal{F}_B^n$ e $\mathcal{S}_B^n$ são comparáveis por inclusão.

Proposição 3.44. *Seja $n: X \rightarrow Z$ uma função. As seguintes sentenças são válidas:*

i) *Se $B \subset n^{-1}(G)$, então $n(B) \subset G$.*

ii) *Se $n(B) \subset G$, então $B \subset n^{-1}(G)$.*

Demonstração. i) Seja $z \in n(B)$. Assim, existe $b \in B$ tal que $n(b) = z$. Por hipótese, $b \in n^{-1}(G)$ e, conseqüentemente, $z = n(b) \in n(n^{-1}(G)) \subset G$. Portanto, $n(B) \subset G$.

ii) Seja $b \in B$. Segue que $n(b) \in n(B)$ e, por hipótese, $n(b) \in G$. Conseqüentemente, $b \in n^{-1}(G)$. Portanto, $B \subset n^{-1}(G)$. $\square$

Corolário 3.45. *Seja $n: X \rightarrow Z$ uma função. Tem-se que $\mathcal{F}_B^n = \mathcal{S}_B^n$.*

Corolário 3.46. *Seja $n: (X, \mathcal{T}^n) \rightarrow (Z, \mathcal{Z})$ um continuador. É válida a igualdade*

$$\mathfrak{c}_n(B) = n^{-1}(\mathfrak{c}_Z(n(B))). \quad (3.23)$$

Demonstração. Segue do Corolário 3.46 que $\mathcal{F}_B^n = \mathcal{S}_B^n$. Disso, resulta que

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{c}_n(B) &= \bigcap_{n^{-1}(G) \in \mathcal{F}_B^n} n^{-1}(G) \\
 &= \bigcap_{n^{-1}(G) \in \mathcal{S}_B^n} n^{-1}(G) \\
 &= \bigcap_{G \in \mathcal{F}_{n(B)}^Z} n^{-1}(G) \\
 &= n^{-1} \left(\bigcap_{G \in \mathcal{F}_{n(B)}^Z} G \right) \\
 &= n^{-1}(\mathfrak{c}_Z(n(B))).
 \end{aligned}$$

Portanto, $\mathfrak{c}_n(B) = n^{-1}(\mathfrak{c}_Z(n(B)))$. □

Corolário 3.47. *Seja $n: (X, \mathcal{T}^n) \rightarrow (Z, \mathcal{Z})$ um continuador. As seguintes sentenças são válidas:*

(i) $n(\mathfrak{c}_n(B)) \subset \mathfrak{c}_Z(n(B))$.

(ii) *Se n é sobrejetor, então $n(\mathfrak{c}_n(B)) = \mathfrak{c}_Z(n(B))$.*

Demonstração. i) Segue do Corolário 3.47 que $\mathfrak{c}_n(B) = n^{-1}(\mathfrak{c}_Z(n(B)))$, o que implica que $n(\mathfrak{c}_n(B)) = n(n^{-1}(\mathfrak{c}_Z(n(B)))) \subset \mathfrak{c}_Z(n(B))$.

ii) Como n é sobrejetor, segue que $n(n^{-1}(\mathfrak{c}_Z(n(B)))) = \mathfrak{c}_Z(n(B))$, donde resulta pelo item i) que $n(\mathfrak{c}_n(B)) = \mathfrak{c}_Z(n(B))$. □

Em posse das proposições e corolários anteriores, temos condições de caracterizar as topologias generalizadas induzidas pelas funções interior e fecho com respeito à topologia dada por um continuador n . Iniciemos a caracterização da topologia generalizada dada abaixo:

$$\mathcal{T}_{\text{ic}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \mathfrak{i}_n(\mathfrak{c}_n(U))\}$$

Temos que para um continuador $n: (X, \mathcal{T}^n) \rightarrow (Z, \mathcal{Z})$ arbitrário, segue do Corolário 3.46 que

$$\mathfrak{c}_n(U) = n^{-1}(\mathfrak{c}_Z(n(U)))$$

e neste caso, tem-se que

$$\mathcal{T}_{\text{ic}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \mathbf{i}_n \left(n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right) \right) \}$$

onde $\overline{n(U)}$ representa o fecho $\mathbf{c}_Z(n(U))$ de $n(U)$ com respeito à topologia $\mathcal{T}_Z$ do contradomínio do continuador n .

Caso o continuador n seja bijetor, segue do Corolário 3.42 que

$$\mathbf{i}_n(A) = n^{-1}(\mathbf{i}_Z(n(A))). \quad (3.24)$$

Em particular, temos

$$\mathbf{i}_n \left(n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right) \right) = n^{-1} \left(\mathbf{i}_Z \left(n \left(n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right) \right) \right) \right) = n^{-1} \left(\mathbf{i}_Z \left(\overline{n(U)} \right) \right) = n^{-1} \left(\overline{\mathbf{i}_Z(n(U))} \right)$$

onde $\overline{\mathbf{i}_Z(n(U))}$ representa o interior $\mathbf{i}_Z \left(\overline{n(U)} \right)$ de $\overline{n(U)}$ com respeito à topologia $\mathcal{T}_Z$ do contradomínio do continuador n .

Portanto, se n é um continuador bijetor, então

$$\mathcal{T}_{\text{ic}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset n^{-1} \left(\overline{\mathbf{i}_Z(n(U))} \right) \} \quad (3.25)$$

Caracterizemos agora a topologia generalizada dada por

$$\mathcal{T}_{\text{ci}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \mathbf{c}_n(\mathbf{i}_n(U))\} \quad (3.26)$$

Temos que para um continuador $n: (X, \mathcal{T}^n) \rightarrow (Z, \mathcal{Z})$ arbitrário, segue do Corolário 3.46 que

$$\mathbf{c}_n(\mathbf{i}_n(U)) = n^{-1}(\mathbf{c}_Z(n(\mathbf{i}_n(U)))) = n^{-1} \left(\overline{n(\mathbf{i}_n(U))} \right) \quad (3.27)$$

e neste caso, tem-se que

$$\mathcal{T}_{\text{ci}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset n^{-1} \left(\overline{n(\mathbf{i}_n(U))} \right) \}$$

onde $\overline{n(\mathbf{i}_n(U))}$ representa o fecho de $n(\mathbf{i}_n(U))$ com respeito à topologia $\mathcal{T}_Z$ do contradomínio do continuador n .

Caso o continuador n seja bijetor, segue do Corolário 3.42 que $\mathbf{i}_n(U) = n^{-1}(\mathbf{i}_Z(n(U)))$ donde resulta que

$$n^{-1} \left(\overline{n(\mathbf{i}_n(U))} \right) = n^{-1} \left(\overline{n(n^{-1}(\mathbf{i}_Z(n(U))))} \right) = n^{-1} \left(\overline{\mathbf{i}_Z(n(U))} \right) = n^{-1} \left(\overline{\mathbf{i}_Z(n(U))} \right)$$

onde $\overline{n(U)}^\circ$ representa o fecho do interior de $n(U)$ com respeito à topologia $\mathcal{T}_Z$ do contradomínio do continuador n . Portanto, se n é um continuador bijetor, então

$$\mathcal{T}_{\text{ci}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset n^{-1} \left(\overline{n(U)}^\circ \right)\}. \quad (3.28)$$

Também é possível caracterizar a topologia generalizada dada abaixo:

$$\mathcal{T}_{\text{cic}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \mathbf{c}_n(\mathbf{i}_n(\mathbf{c}_n(U)))\}$$

Já vimos que para um continuador $n: (X, \mathcal{T}^n) \rightarrow (Z, \mathcal{Z})$ arbitrário, segue do Corolário 3.46 que $\mathbf{c}_n(U) = n^{-1}(\mathbf{c}_Z(n(U))) = n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right)$, donde decorre que

$$\mathbf{c}_n(\mathbf{i}_n(\mathbf{c}_n(U))) = \mathbf{c}_n \left(\mathbf{i}_n \left(n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right) \right) \right) = n^{-1} \left(\overline{n \left(\mathbf{i}_n \left(n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right) \right) \right)} \right).$$

Portanto,

$$\mathcal{T}_{\text{cic}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset n^{-1} \left(\overline{n \left(\mathbf{i}_n \left(n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right) \right) \right)} \right)\}.$$

Caso n seja um continuador bijetor, tal qual como deduzido em 3.25, tem-se que $\mathbf{i}_n(\mathbf{c}_n(U)) = n^{-1} \left(\overline{n(U)}^\circ \right)$, donde decorre

$$\mathbf{c}_n(\mathbf{i}_n(\mathbf{c}_n(U))) = \mathbf{c}_n \left(n^{-1} \left(\overline{n(U)}^\circ \right) \right) = n^{-1} \left(\overline{n \left(n^{-1} \left(\overline{n(U)}^\circ \right) \right)} \right) = n^{-1} \left(\overline{n(U)}^\circ \right)$$

e

$$\mathcal{T}_{\text{cic}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset n^{-1} \left(\overline{n(U)}^\circ \right)\}. \quad (3.29)$$

Por fim, caracterizemos a topologia generalizada dada por

$$\mathcal{T}_{\text{ici}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \mathbf{i}_n(\mathbf{c}_n(\mathbf{i}_n(U)))\}\}. \quad (3.30)$$

Já vimos que para um continuador $n: (X, \mathcal{T}^n) \rightarrow (Z, \mathcal{Z})$ arbitrário, segue de 3.27 que $\mathbf{c}_n(\mathbf{i}_n(U)) = n^{-1} \left(\overline{n(\mathbf{i}_n(U))} \right)$, donde decorre que

$$\mathbf{i}_n(\mathbf{c}_n(\mathbf{i}_n(U))) = \mathbf{i}_n \left(n^{-1} \left(\overline{n(\mathbf{i}_n(U))} \right) \right)$$

Portanto,

$$\mathcal{T}_{\text{ici}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \mathbf{i}_n \left(n^{-1} \left(\overline{n(\mathbf{i}_n(U))} \right) \right)\}. \quad (3.31)$$

Sendo n um continuador bijetor, assim como em 3.28, tem-se que $\mathbf{c}_n(\mathbf{i}_n(U)) = n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right)$, decorre da caracterização 3.24 dada por $\mathbf{i}_n(A) = n^{-1}(\mathbf{i}_Z(n(A))) = n^{-1}(n(\overset{\circ}{A}))$ que

$$\mathbf{i}_n(\mathbf{c}_n(\mathbf{i}_n(U))) = \mathbf{i}_n \left(n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right) \right) = n^{-1} \left(n \left(n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right) \right) \right) = n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right)$$

e

$$\mathcal{T}_{\text{ici}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right)\}. \quad (3.32)$$

Com base nas deduções realizadas anteriormente, obtemos os seguintes teoremas caracterizadores de topologias generalizadas induzidas por um continuador.

Teorema 3.48. *Seja $n: (X, \mathcal{T}^n) \rightarrow (Z, \mathcal{Z})$ um continuador. São topologias generalizadas induzidas pelo continuador n as seguintes famílias:*

- (i) $\mathcal{T}_{\text{ic}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \mathbf{i}_n \left(n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right) \right)\}.$
- (ii) $\mathcal{T}_{\text{ci}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset n^{-1} \left(\overline{n(\mathbf{i}_n(U))} \right)\}.$
- (iii) $\mathcal{T}_{\text{cic}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset n^{-1} \left(\overline{n \left(\mathbf{i}_n \left(n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right) \right) \right)} \right)\}.$
- (iv) $\mathcal{T}_{\text{ici}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset \mathbf{i}_n \left(n^{-1} \left(\overline{n(\mathbf{i}_n(U))} \right) \right)\}.$

Teorema 3.49. *Seja $n: (X, \mathcal{T}^n) \rightarrow (Z, \mathcal{Z})$ um continuador bijetor. São topologias generalizadas induzidas pelo continuador n bijetor as seguintes famílias:*

- (i) $\mathcal{T}_{\text{ic}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right)\}.$
- (ii) $\mathcal{T}_{\text{ci}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right)\}.$
- (iii) $\mathcal{T}_{\text{cic}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right)\}.$
- (iv) $\mathcal{T}_{\text{ici}}^n = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset n^{-1} \left(\overline{n(U)} \right)\}.$

Considerações

Neste trabalho, exploramos a extensão dos conceitos clássicos de topologia através da introdução de topologias generalizadas. A partir das definições fundamentais de topologia, conjuntos abertos e fechados, fecho e interior, avançamos para a análise de funções monotônicas e sua aplicação na geração de topologias generalizadas. As proposições e demonstrações apresentadas ao longo do estudo reforçam a robustez teórica dessas novas estruturas, evidenciando sua capacidade de ampliar o escopo das topologias tradicionais e oferecer novas ferramentas para o estudo de estruturas da área de Topologia.

Os resultados obtidos demonstram que as topologias generalizadas introduzem novas perspectivas e possibilidades de aplicação. A definição de conjuntos γ -abertos, a formalização de topologias generalizadas a partir de funções monotônicas e a obtenção de resultado originais que caracterizam topologias generalizadas induzidas por um continuador n abrem caminho para futuras pesquisas e aplicações na área da Topologia.

Este trabalho avança o conhecimento em Topologia ao disponibilizar uma alternativa textual em português. O material investigado, originalmente em inglês e que serviu de referência para este trabalho, não é abordado nos currículos tradicionais de graduação em Matemática. Portanto, este Trabalho de Conclusão de Curso oferece uma base sólida para futuras investigações e potencializa o desenvolvimento de novos estudos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BRAZ, J. H. S.; VIEIRA, M. G. O. Limites generalizados de funções, In: V SEMAP, n. 5, 2014. **Anais da V SEMAP**. Available in: <http://www.semap.facip.ufu.br/node/30>. Accessed on Oct 12, 2023.
- [2] VIEIRA, M. G. O. Topological aspects of continuity via generalized limit, **Brazilian Electronic Journal of Mathematics**, v.2, n.3, p. 70-107, 2021. Available in: <https://doi.org/10.14393/BEJOM-v2-n3-2021-55291>. Accessed on Oct 12, 2023.
- [3] CAMPOS, M. S.; VIEIRA, M. G. O.; BRAZ, J. H. S. Operational properties involving functions with generalized continuity, , **Brazilian Electronic Journal of Mathematics**, v.4, p. 1-20, 2023. Available in: <https://doi.org/10.14393/BEJOM-v4-2023-69041>. Accessed on Dec 18, 2023.
- [4] CSÁSZÁR, A. Generalized topology, generalized continuity, **Acta Math. Hung.** v. 96, n. 4, p. 351–357, 2002.
- [5] CSÁSZÁR, A. Closures of open sets in generalized topological spaces, **Ann. Univ. Sci. Bp. Eötvös, Sect. Math.**, v. 47, p. 123-126, 2004.