

LUÍS HENRIQUE DA SILVA IGNACIO

DESENVOLVIMENTO DE TÉCNICAS DE REDUÇÃO DE
MODELOS TÉRMICOS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS
INVERSOS EM CONDUÇÃO DE CALOR



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2016

LUÍS HENRIQUE DA SILVA IGNACIO

DESENVOLVIMENTO DE TÉCNICAS DE REDUÇÃO DE
MODELOS TÉRMICOS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS
INVERSOS EM CONDUÇÃO DE CALOR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Gilmar Guimarães

Uberlândia
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil

I24d Ignacio, Luís Henrique da Silva, 1990-
2016 Desenvolvimento de técnicas de redução de modelos térmicos para a
solução de problemas inversos em condução de calor / Luís Henrique da
Silva Ignacio. - 2016.
74 f. : il.

Orientador: Gilmar Guimarães.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Calor - Condução - Teses. 3.
Problemas inversos (Equações diferenciais) - Teses. I. Guimarães,
Gilmar. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Aos meus pais, irmãos, namorada e amigos.

Agradecimentos

A Deus, pela oportunidade e por minha saúde, bem como de todos meus familiares e amigos.

Ao meu pai, Célio, e minha mãe, Lesi, pela dedicação e apoio incondicional.

Aos meus irmãos e minha namorada pelo apoio e paciência.

Ao Gilmar pela orientação, ensinamentos e oportunidade.

Aos meus companheiros do LTCM, em especial, Ana Paula, Alisson e Fernando, que também contribuíram para o desenvolvimento do trabalho.

Aos docentes da FEMEC e técnicos-administrativos que contribuíram para minha formação.

Às agências financiadoras CAPES, CNPq e FAPEMIG.

Ignacio, L. H. S. **Desenvolvimento de técnicas de redução de modelos térmicos para a solução de problemas inversos em condução de calor**. 2016. 74f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

A maioria dos problemas térmicos na prática envolve modelos tridimensionais transientes. Nestes casos, a solução dos problemas inversos necessita de soluções numéricas ou analíticas complexas, requerendo habilidades específicas para a sua implementação e uso. Este trabalho dedica-se ao desenvolvimento de técnicas que promovem a redução de modelos térmicos para a solução de problemas inversos em condução de calor. Em alguns casos, problemas tridimensionais são reduzidos a bidimensionais ou unidimensionais ou ainda, unidimensionais com geometria finita podem ser reduzidos a problemas de geometria mais simples como a semi-infinita, sem perda de precisão nos resultados. A solução do problema inverso neste estudo visa estimar variados tipos de fluxo de calor aplicados a modelos unidimensionais. As técnicas de redução de modelo se baseiam nos conceitos dos tempos de penetração e desvio de calor. Obtem-se as soluções analíticas dos modelos 1D, a serem estudados, pelo método de funções de Green. As análises são aplicadas a amostras de Policloreto de Vinila (PVC) e metal duro. A técnica inversa aplicada foi a TFBGF (Transfer Function Based on Green's Functions) usando a resposta impulsiva do modelo semi-infinito no intervalo compreendido entre o tempo de penetração de calor e o tempo de desvio de calor. Os resultados do problema inverso, tanto dos dados simulados quanto dos experimentais, foram satisfatórios para a estimativa do fluxo de calor, validando, portanto, a técnica de redução de modelos baseada nos tempos de penetração e desvio de calor.

Palavras-chave: Redução de modelos, tempo de penetração de calor, tempo de desvio de calor, problema inverso, fluxo de calor.

Ignacio, L. H. S. **Development of reduction techniques on thermal models to solve inverse heat conduction problems.** 2016. 74f. Master's Thesis, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

Usually, thermal analysis in practical cases involves transient and three-dimensional models. In these cases, the solution of inverse problems needs complex numerical and analytical solutions, requiring specific skills to implement and use it. This work is dedicated to the development of techniques to reduce thermal models and solve inverse heat conduction problems. In some cases, tridimensional problems can be reduced to bi or one-dimensional without loss of precision. In others, one-dimensional problems with finite geometry can be reduced to simple geometry problems as the semi-infinite. The solution of the inverse problem in this study aims to estimate different kinds of heat flux applied to one-dimensional models. Reduction techniques are based on the concepts of heat penetration and deviation times. Analytical solutions of 1D models, to be studied, are obtained using the Green's functions method. Analysis are applied to samples of Polyvinyl Chloride (PVC) and cemented carbide. The inverse technique applied was TFBGF (Transfer Function Based on Green's Functions), using the impulse response of the semi-infinite model from the heat penetration time until the heat deviation time. Results of the inverse problems, with simulated or experimental data, were satisfactory in heat flux estimate, validating the technique based on heat penetration and deviation times.

Keywords: Models reduction, heat penetration time, heat deviation time, inverse problem, heat flux.

Lista de Figuras

3.1	Representação esquemática do modelo $X23$	13
3.2	Representação de um fluxo discreto.	15
3.3	Representação esquemática do modelo $X20$	16
3.4	Diferentes tipos de fluxo impostos em $x=0$ no modelo $X23$ para comparação dos tempos de penetração e desvio de calor: a) Senoidal; b) Rampa e c) Constante.	17
3.5	Tempos de penetração e desvio de calor para diferentes tipos de fluxo aplicados ao modelo $X23$. a) Senoidal; b) Rampa e c) Constante.	19
3.6	Evolução da temperatura na superfície ($x=0$) dos modelos $X20$, $X21$, $X22$ e $X23$	24
3.7	Aproximação da evolução da temperatura do modelo $X23$ a do $X20$	25
3.8	Representação de um sistema dinâmico de uma entrada e uma saída.	27
3.9	Representação de um sistema dinâmico de uma entrada e uma saída, para o problema inverso.	29
4.1	Teste 1: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=0$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.	37
4.2	Teste 1: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=2$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.	38
4.3	Teste 1: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=4$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.	39
4.4	Teste 1: Estimativas para o metal duro usando temperaturas simuladas em $x=2$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.	40

4.5	Teste 2: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=0$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado para todo o intervalo; c) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado desconsiderando as últimas estimativas; d) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; e) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada para todo intervalo; f) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada desconsiderando as últimas estimativas.	41
4.6	Teste 2: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=2$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado para todo o intervalo; c) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado desconsiderando as últimas estimativas; d) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; e) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada para todo intervalo; f) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada desconsiderando as últimas estimativas.	42
4.7	Teste 2: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=4$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado para todo o intervalo; c) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado desconsiderando as últimas estimativas; d) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; e) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada para todo intervalo; f) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada desconsiderando as últimas estimativas.	43
4.8	Teste 2: Estimativas para o metal duro usando temperaturas simuladas em $x=2$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado para todo o intervalo; c) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado desconsiderando as últimas estimativas; d) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; e) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada para todo intervalo; f) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada desconsiderando as últimas estimativas.	44
4.9	Teste 3: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=0$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.	45
4.10	Teste 3: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=2$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.	46

4.11	Teste 3: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=4$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.	47
4.12	Teste 3: Estimativas para o metal duro usando temperaturas simuladas em $x=2$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.	48
5.1	Fluxo de calor estimado para a posição $x=2$ mm sem tratamento dos dados. a) Até o tempo de desvio de calor; b) Primeiros 40 segundos.	50
5.2	Modelo <i>X22</i> com sensor na posição $x=2$ mm e corte em 4 segundos na resposta impulsiva. a) Estimativa do fluxo de calor; b) Comparação entre a temperatura estimada e a experimental simulada; c) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.	51
5.3	Modelo <i>X22</i> com sensor na posição $x=2$ mm, corte em 4 segundos na resposta impulsiva e $N=10$ para o filtro. a) Estimativa do fluxo de calor; b) Comparação entre a temperatura estimada e a experimental simulada.	52
5.4	Modelo <i>X22</i> com sensor na posição $x=2$ mm, corte em 4 segundos na resposta impulsiva e alguns valores de n para o filtro. a) e b) $N=20$; c) e d) $N=30$; e) e f) $N=50$	53
5.5	Fluxo de calor estimado para a posição $x=2$ mm, tempo de corte em $t=4$ s e 23 pontos para o filtro média móvel. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.	54
5.6	Fluxo de calor estimado para a posição $x=0$ mm com 24 pontos para média móvel com um $dt=1$ s. a) Estimativa do fluxo de calor; b) Comparação entre a temperatura estimada e a experimental simulada.	55
5.7	Fluxo de calor estimado para a posição $x=0$ mm e 80 pontos para média móvel com um $dt=0,25$ s. a) Estimativa do fluxo de calor; b) Comparação entre a temperatura estimada e a experimental simulada.	55
5.8	Fluxo de calor estimado para a posição $x=2$ mm, tempo de corte em $t=4$ s e 23 pontos para média móvel usando a resposta impulsiva do modelo <i>X22</i> . a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura simulada e a experimental estimada.	56

5.9	Comparativo das estimativas realizadas com a resposta <i>HX22</i> e <i>HX20</i> , realizando em ambas os mesmos procedimentos. a) Comparação entre os fluxos de calor estimados e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxos de calor estimados e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e as estimadas; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e as estimadas.	57
6.1	Representação esquemática do aparato experimental.	59
6.2	Aparato experimental: a) Bancada; b) Vista frontal.	60
6.3	Dados experimentais. a) Fluxo de calor; b) Temperatura.	61
6.4	Dados experimentais, após o início do aquecimento, que serão usado para a solução do problema inverso considerando o modelo semi-infinito unidimensional. a) Fluxo de calor; b) Temperatura.	62
6.5	Estimativa do fluxo à partir das temperaturas experimentais, usando a resposta impulsiva do semi-infinito. a) Comparação entre o fluxo de calor medido e o estimado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor medido e o estimado; c) Comparação entre as temperatura experimental e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental e a estimada.	62
6.6	Comparativo entre os fluxos estimados pelo modelo 3D e 1D. a) Fluxos estimados e medido; b) Erro absoluto entre os fluxos estimados e medido.	63
A.1	Teste 1: Fluxo de calor estimado do tipo exponencial extrapolando o tempo de desvio de calor no PVC em $x=0$	70
A.2	Teste 1: Fluxo de calor estimado do tipo exponencial extrapolando o tempo de desvio de calor no metal duro em $x=0$	70
A.3	Teste 2: Fluxo de calor estimado do tipo senoidal extrapolando o tempo de desvio de calor no PVC em $x=2$ mm.	71
A.4	Teste 2: Fluxo de calor estimado do tipo senoidal extrapolando o tempo de desvio de calor no metal duro em $x=2$ mm.	72
A.5	Teste 2: Fluxo de calor estimado do tipo constante extrapolando o tempo de desvio de calor no PVC em $x=2$ mm.	72
A.6	Teste 2: Fluxo de calor estimado do tipo constante extrapolando o tempo de desvio de calor no metal duro em $x=2$ mm.	73
A.7	Teste 3: Fluxo de calor estimado do tipo triangular extrapolando o tempo de desvio de calor no PVC em $x=4$ mm.	74
A.8	Teste 3: Fluxo de calor estimado do tipo triangular extrapolando o tempo de desvio de calor no metal duro em $x=4$ mm.	74

Lista de Tabelas

3.1	Problemas Térmicos Unidimensionais.	20
3.2	Propriedades térmicas do PVC e metal duro ISO K10.	21
3.3	Tempos de penetração de calor (t_{pen}) [s].	22
3.4	Tempos de penetração de calor adimensionais (t_{pen}^+).	23
3.5	Tempos de desvio de calor (t_{desv}) [s].	25
3.6	Tempos de desvio de calor adimensionais (t_{desv}^+).	26
4.1	Problemas Térmicos Unidimensionais.	30
4.2	Forma e intensidade de fluxos de calor impostos em cada modelo.	31
4.3	Temperaturas experimentais simuladas para o modelo X21 e amostras de PVC e metal duro.	33
4.4	Temperaturas experimentais simuladas para o modelo X22 e amostras de PVC e metal duro.	34
4.5	Temperaturas experimentais simuladas para o modelo X23 e amostras de PVC e metal duro.	35
5.1	Modelo térmico <i>X22</i> com fluxo senoidal imposto em $x = 0$ e temperatura calculada em $x = 2$ mm.	49

Lista de Símbolos

T	- Temperatura, $[^{\circ}C]$.
x	- Posição no modelo, $[m]$.
t	- Tempo, $[s]$.
θ	- Variável auxiliar.
XIJ	- Modelo que considera condução de calor na direção X, com condição de contorno do tipo I em $x=0$ e do tipo J em $x=L$.
n	- Expoente do limite de ordem decimal aceitável.
T_{∞}	- Temperatura ambiente, $[^{\circ}C]$.
L	- Comprimento do modelo na direção X, $[m]$.
$q''(t)$	- Fluxo de calor variando no tempo, $[\frac{W}{m^2}]$.
h	- Coeficiente de troca de calor por convecção, $[\frac{W}{m^2K}]$.
α	- Difusividade térmica do material, $[\frac{m^2}{s}]$.
k	- Condutividade térmica do material, $[\frac{W}{m^2K}]$.
G_{XIJ}	- Função de Green do modelo XIJ.
β_m	- Autovalores associados à função de Green.
B_i	- Número de Biot.
q''_0	- Fluxo de calor do tipo constante, $[\frac{W}{m^2}]$.

T_0	- Temperatura inicial, $[^{\circ}C]$.
t_{pen}	- Tempo de penetração de calor, $[s]$.
t_{pen}^+	- Tempo de penetração de calor adimensional.
x^*	- Posição adimensional.
t_{desv}	- Tempo de desvio de calor, $[s]$.
t_{desv}^+	- Tempo de desvio de calor adimensional.
$h(x, t)$	- Resposta impulsiva.
$H(x, s)$	- Função transferência.
Y	- Temperatura experimental simulada (com ruído), $[^{\circ}C]$.
ϵ	- Erro aleatório adicionado na temperatura, $[^{\circ}C]$.
h_{XIJ}	- Resposta impulsiva do modelo XIJ.
N	- Número de pontos usado no filtro média móvel.
dt	- Discretização temporal, $[s]$.
T_h	- Duração do tempo de aquecimento, $[s]$

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão Bibliográfica	3
3	Fundamentos Teóricos	11
3.1	Tempos de penetração e desvio de calor	11
3.2	Análise da influência de diferentes tipos de fluxo no cálculo dos tempos de penetração e desvio de calor	13
3.3	Cálculo dos tempos de penetração e desvio de calor para diferentes tipos de condição de contorno inativa	20
3.4	Método TFBGF	27
4	Problema Inverso: Aplicação em Testes Simulados	30
4.1	Estimativas usando modelo simplificado	30
4.2	Testes: Estimativas de Fluxo de Calor	36
4.2.1	Teste 1: Modelo $X21$ com fluxo de calor do tipo exponencial	36
4.2.2	Teste 2: Modelo $X22$ com fluxo de calor do tipo constante	40
4.2.3	Teste 3: Modelo $X23$ com fluxo de calor do tipo triangular	44
5	Análise de Sensibilidade para a Técnica Inversa TFBGF	49
6	Problema Inverso: Aplicação em um Teste Experimental	58
7	Conclusão	64
	Referências Bibliográficas	66
A	Extrapolando o tempo de desvio de calor	69
A.0.1	Teste 1: Modelo $X21$ com fluxo de calor do tipo exponencial	69
A.0.2	Teste 2: Modelo $X22$ com fluxo de calor do tipo constante ou senoidal	71
A.0.3	Teste 3: Modelo $X23$ com fluxo de calor do tipo triangular	73

Capítulo 1

Introdução

Geralmente a aplicação prática de modelos teóricos térmicos que simulam diversas aplicações e processos em engenharia, se mostram bastante complexas. A busca de soluções mais simples promovem um melhor entendimento físico do problema bem como torna as soluções mais acessíveis a um público não especialista.

A grande maioria dos problemas encontrados na prática envolve modelos tridimensionais e transientes. Nestes casos, as soluções numéricas ou analíticas envolvidas apresentam certa complexidade, o que requer habilidades específicas para a sua implementação e uso. Como exemplo destes casos pode-se citar: o aquecimento de uma chapa em um tratamento térmico ou ainda a geração de calor na interface peça-ferramenta durante um processo de usinagem ou de soldagem.

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver técnicas que promovem a redução de modelos térmicos, e conseqüentemente tornam a solução de problemas inversos em condução de calor mais simples. Tais técnicas se baseiam nos conceitos dos tempos de penetração e desvio de calor, que são aplicados principalmente na verificação intrínseca de soluções analíticas.

Os modelos estudados nesse trabalho são unidimensionais e de geometria finita. A complexidade destes modelos reside na imposição de fluxos de calor transientes cujas soluções analíticas requerem habilidades e conhecimentos matemáticos e numéricos. Estes são reduzidos a modelos semi-infinitos para a solução do problema inverso associado. A motivação para tal simplificação é justificada pelo modelo semi-infinito apresentar uma resposta impulsiva matematicamente simples, uma solução computacional livre de somatórios, ser independente da geometria e não necessitar de informações do contorno inativo.

A maioria de trabalhos encontrados na literatura que promovem a redução de modelos, usam um alto valor da razão de aspecto (por exemplo, grandes dimensões da largura em

relação ao comprimento da amostra) para minimizar as perdas de calor nas bordas laterais e assegurar a unidimensionalidade. Ou seja, interferem na geometria do problema.

A importância nas análises realizadas neste trabalho residem na melhor compreensão dos conceitos dos tempos de penetração e desvio de calor e no desenvolvimento de técnicas que permitam a redução de modelos térmicos complexos para a solução de problemas inversos.

Este trabalho é estruturado da seguinte forma:

Apresentam no segundo capítulo uma revisão bibliográfica sucinta sobre diversos trabalhos que promovem a redução de modelos, baseados principalmente na razão de aspecto ou na comparação entre a temperatura do modelo original com a do reduzido.

O terceiro capítulo apresenta a fundamentação teórica necessária para o cálculo dos tempos de penetração e desvio de calor. São obtidas as soluções analíticas do problema direto dos modelos considerados e realiza-se uma análise da influência do tipo de fluxo de calor e condição de contorno inativo nos valores dos tempos de penetração e desvio de calor. Calculam-se então os tempos de penetração e desvio de calor e ainda neste capítulo faz-se uma breve apresentação do método TFBGF.

Apresenta-se no quarto capítulo os resultados para as estimativas de fluxo de calor usando a resposta impulsiva do modelo semi-infinito na solução do problema inverso.

O quinto capítulo apresenta os procedimentos necessários para o uso do método TFBGF, enquanto no sexto apresenta-se uma aplicação experimental da técnica.

Conclusões do trabalho são apresentadas no capítulo 7.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Apresenta-se neste capítulo uma breve revisão de trabalhos encontrados na literatura que envolvem a solução de problemas inversos presentes em vários problemas práticos de engenharia. A atenção, nesse caso, é voltada a aplicação de modelos térmicos simplificados em problemas de geometrias complexas. O uso com segurança de modelos simples implica, usualmente, em soluções de baixo custo computacional, maior entendimento físico e maior facilidade de implementação numérica.

Os problemas inversos, como o próprio nome sugere, partem da resposta do sistema (efeito) para se estimar parâmetros da entrada (causa) e são classificados como mal postos matematicamente. Tal característica foi atribuída após o matemático francês Jacques Hadamard definir, em 1902, um problema bem posto como sendo aquele que satisfaz as três seguintes condições:

- Existe solução (existência);
- A solução é única (unicidade);
- A solução tem dependência contínua (suave) com os dados de entrada (estabilidade).

Para problemas inversos em condução de calor apenas a primeira condição é satisfeita, pois se há um efeito então existe uma causa. Já para garantir a unicidade e a estabilidade é necessário o uso de ferramentas matemáticas baseadas em informações adicionais.

Os problemas inversos apresentam importantes aplicações em diversas partes das ciências e da engenharia (ÖZISIK, 1993). Problemas inversos em condução de calor (IHCP - Inverse Heat Conduction Problem) normalmente envolve a estimativa de fluxos de calor, propriedades térmicas ou geração de calor, entre outros. O presente estudo se concentra na

estimativa de diversos tipos de fluxo de calor aplicados a vários modelos, partindo da medição de temperatura em pontos acessíveis.

Existem vários métodos de solução de problemas inversos em condução de calor, sendo que as primeiras contribuições para a solução deste tipo de problema foram feitas por Stolz (1960).

Observa-se que para solução de um IHCP é necessária a obtenção da solução direta do problema. Tal solução visa obter a resposta (efeito) de um sistema a uma perturbação (causa).

Na prática os problemas de condução de calor são geralmente tridimensionais, transientes e com condições de contorno não homogêneas. Tais características resultam em soluções analíticas e/ou numéricas bastante complexas. As técnicas para a obtenção da solução direta podem ser divididas em dois tipos: numérica ou analítica.

Huang & Wang (1999) resolveram problemas inversos tridimensionais transientes usando o método dos gradientes conjugados (CGM) e o código comercial CFX4.2. O objetivo era estimar o fluxo de calor em modelos tridimensionais irregulares a partir de temperaturas obtidas usando scanners infravermelhos. Como condição de contorno o modelo apresentava fluxo de calor aplicado em uma superfície enquanto as outras eram mantidas isoladas. Os resultados se mostraram satisfatórios.

Carvalho *et al.* (2003) tinha como objetivo principal determinar a temperatura na superfície de corte durante o processo de torneamento. Nesse caso desenvolveu-se um modelo térmico tridimensional transiente considerando apenas a ferramenta de corte. As faces foram expostas à convecção, sendo que na face de corte parte foi submetida a um fluxo de calor. Aplicou-se o método numérico de diferenças finitas para a solução do problema direto e a técnica inversa de recozimento simulado (Simulated Annealing) para estimar o fluxo de calor que flui para a ferramenta. Conhecida a estimativa do fluxo determinou-se, através da solução do problema direto, a temperatura em qualquer posição da ferramenta, bem como sua evolução do campo de temperatura.

Em um outro trabalho de Carvalho *et al.* (2006), desenvolveram um modelo tridimensional transiente que considera não apenas a ferramenta de corte, mas também o porta-ferramenta. O problema direto foi resolvido através da técnica numérica de diferenças finitas e o problema inverso através da técnica de otimização da Seção Áurea. Os resultados apresentaram uma melhora considerável para a estimativa do fluxo de calor e consequentemente para distribuição de temperatura quando comparados com o trabalho anterior.

Outra aplicação de um modelo tridimensional foi realizada por Kusiak, Battaglia & Marchal (2005). Os autores estimaram o fluxo de calor gerado na ferramenta de corte durante o processo de produção de folhas de madeira e analisaram a influencia do revestimento de

nitreto de cromo (CrN). Para estimar o fluxo, temperaturas experimentais foram medidas através de cinco termopares posicionados na ferramenta. Variaram-se também os parâmetros de velocidade de corte e espessura da folha de madeira cortada. Os resultados realçaram o importante papel do revestimento na ferramenta, em particular quando se analisam conjuntamente medições de esforço e a energia total consumida durante o corte.

Os autores Huang *et al.* (2007) usaram um modelo tridimensional transiente para estimar o fluxo de calor durante a furação de uma peça de titânio. Solucionou-se o problema inverso através do método da máxima descida e do código comercial CFX4.4, usando medições de temperatura na superfície de furação. Como condição de contorno consideraram-se todas as superfícies sujeitas à convecção, exceto a superfície superior, considerada adiabática, e a superfície de furação, na qual foi imposto um fluxo de calor desconhecido. Os experimentos foram realizados a seco e as estimativas dos fluxos encontradas se mostraram satisfatórias.

Em um outro estudo do processo de furação, Sousa *et al.* (2012) estimaram a temperatura e fluxo de calor na interface peça-ferramenta durante o processo de usinagem. A técnica usada baseia-se em funções de Green e observadores dinâmicos. Ao contrário da maioria dos trabalhos focados na ferramenta, neste estudo, optou-se por modelar termicamente a peça. Obteve-se uma boa aproximação entre a temperatura medida por termopares não utilizados na estimativa de fluxo de calor e a simulada computacionalmente.

Fernandes *et al.* (2010) demonstraram uma certa preocupação com o tempo computacional quando são aplicadas técnicas numéricas em modelos tridimensionais transientes para resolver problemas inversos ou de otimização, uma vez que o problema direto é calculado diversas vezes. Propuseram, assim, o uso de solução analítica baseada em funções de Green para a estimativa de propriedades térmicas usando técnicas de otimização. Os resultados foram bastante satisfatórios, reduzindo drasticamente o tempo computacional gasto com precisão nas estimativas.

Para investigar o efeito de um tubo de calor na redução da temperatura na interface cavaco-ferramenta durante um processo de usinagem, Liang, Quan & Ke (2011) projetaram e fabricaram uma ferramenta com um tubo de calor. Obteve-se a temperatura na interface usando um modelo 3D transiente e diferenças finitas.

Fernandes, Santos & Guimaraes (2015) modelaram analiticamente uma ferramenta de corte através de um modelo tridimensional transiente para estimativa do fluxo de calor. Embora com alguma complexidade, foi possível se estimar o fluxo de calor com uma boa precisão obtendo-se o campo de temperatura na ferramenta.

Observando os vários trabalhos citados, vê-se que as aplicações práticas são em sua maioria multidimensionais, sendo geralmente tridimensionais, transientes e com condições de contorno

não homogêneas. Esses problemas, como citado anteriormente, envolvem soluções complexas quer sejam resolvidos numericamente, quer sejam resolvidos analiticamente.

Visando simplificar problemas térmicos multidimensionais ou com geometrias complexas (problema original), dependendo da observação da ocorrência dos fenômenos físicos presentes no processo, propõe-se o estudo dos conceitos de tempo de penetração e desvio de calor (MONTE; BECK; AMOS, 2008). Ou seja, em alguns casos, problemas tridimensionais podem ser reduzidos a problemas bi ou unidimensionais sem perda de precisão. Em outros, problemas unidimensionais com geometria finita podem ser reduzidos a problemas de geometria mais simples como a semi-infinita. A possibilidade física de análise dessas condições podem permitir a obtenção de soluções mais simples e com a mesma confiança e precisão da formulação mais geral e complexa. O presente estudo aborda principalmente a redução de problemas unidimensionais finitos em semi-infinitos.

Observa-se que as soluções analíticas dos problemas original ou simplificados representam soluções exatas de seus respectivos modelos. Todavia, o comportamento dessas soluções são idênticos em determinadas condições físicas e/ou geométricas. Uma vez determinadas estas regiões, ambas soluções podem ser usadas indistintamente. Ainda, uma vez identificado esse comportamento, cada solução na realidade verifica a outra. A este tipo de verificação dá-se o nome de verificação intrínseca (COLE *et al.*, 2014), pois cada solução exata é obtida e implementada computacionalmente de forma independente. Duas variáveis que podem ser usadas para o estabelecimento físico desta verificação são os, já mencionados, tempos de penetração de calor e tempo de desvio de calor que indicam, respectivamente, a influência da condição de contorno ativa (pertubação) e da condição de contorno inativa (homogênea) em um determinado ponto no interior do modelo. Tal conceito foi desenvolvido por Monte, Beck & Amos (2011).

Analisando o problema e estabelecendo uma simplificação do modelo com base na geometria e nos tempos de penetração e desvio de calor, a solução analítica do problema torna-se mais simples e consequentemente a solução do problema inverso também é simplificada. Na literatura encontram-se várias simplificações de modelo que levam em consideração apenas a geometria do problema, sendo que a variação de temperatura é negligenciada nas direções de dimensões muito maiores do que as outras. Citam-se como exemplos longos cilindros e paredes cuja espessura é muito menor quando comparada com as outras dimensões (THIRUMALESHWAR, 2009). Os conceitos de tempo de penetração e desvio de calor podem ser aplicados em diversos casos, como os exemplos citados anteriormente e também nos estudos que aplicam técnicas experimentais para determinar propriedades térmicas através de soluções analíticas. Em tais técnicas os modelos térmicos considerados unidimensionais são

garantidos nos experimentos através de um alto valor para a razão geométrica entre a área e a espessura (FERNANDES *et al.*, 2010).

Por exemplo, Silva, Ong & Guimarães (2003) desenvolveram uma técnica para estimar a condutividade e a difusividade térmica de polímeros usando apenas uma superfície ativa, na qual é medida a temperatura através de um termopar e um modelo térmico unidimensional com condições de contorno de fluxo de calor e isolamento. A unidimensionalidade do experimento foi verificada através da comparação do modelo unidimensional com outro bidimensional que levava em consideração as perdas de calor laterais. Tal comparação demonstrou que a influência da perda de calor pelas laterais era menor do que 1,5%. Justificou-se a unidimensionalidade através do pequeno valor entre a espessura e a largura da placa.

Analogamente, em um outro estudo Tillmann, Silva & Guimarães (2005) propõem uma técnica experimental que visa obter simultaneamente a difusividade e a condutividade térmica de materiais isolantes, ambas variando com a temperatura. O modelo térmico também considera a condução de calor unidimensional em um meio submetido a um fluxo de calor transiente na superfície superior e isolado na superfície oposta. A escolha de grandes dimensões para a largura em relação ao comprimento da amostra foi feita para minimizar as perdas de calor nas bordas laterais e assegurar a unidimensionalidade do problema proposto. Da mesma forma como no trabalho anterior o tempo de desvio de calor poderia ter sido aplicado para garantir que a temperatura em um determinado ponto passa a ter comportamento de um modelo bidimensional.

Melo, Silva & Silva (2007) desenvolveram uma técnica experimental para estimarem a efusividade térmica de polímeros usando o método da impedância térmica, a qual é uma função que representa a relação entre as componentes da temperatura e do fluxo de calor na frequência. O modelo térmico considerado é um semi-infinito unidimensional e os sinais de temperatura e fluxo de calor são todos medidos exatamente no meio da face superior da amostra. Foram usadas amostras de três materiais: policloreto de vinila (PVC), polimetilmetacrilato (PMMA) e polietileno (PE), sendo todas as amostras com espessura de 50 mm e 305 x 305 mm de largura e comprimento. Essas dimensões de largura e comprimento garantem que o ponto onde se coletam temperatura e o fluxo de calor seja submetido a um fluxo uniforme e unidirecional. Os autores fizeram uma comparação do modelo semi-infinito com um modelo finito, com comprimento L . Verificou-se que as diferenças na temperatura entre os modelos eram muito pequenas durante um certo tempo. Tal tempo em que as soluções de ambos modelos são numericamente idênticas é o tempo de desvio de calor, que nesse caso poderia ter sido calculado.

O estudo realizado por Lima & Silva (2011) trata basicamente do mesmo assunto do

trabalho anterior, porém a efusividade térmica é estimada no domínio do tempo através da minimização da função objetivo, definida como a diferença quadrática entre as temperaturas teóricas e experimentais. O modelo considerado no desenvolvimento da técnica também era um semi-infinito unidimensional e as amostras eram as mesmas. Fez-se também a comparação entre o modelo finito e o semi-infinito e constatou-se que a diferença no cálculo da temperatura entre os modelos após 6000 segundos de simulação era de aproximadamente no máximo $0,2^{\circ}\text{C}$. Novamente o tempo de desvio de calor poderia ser aplicado para indicar o tempo onde a temperatura não sofre influencia do contorno inativo.

Os autores Monds & McDonald (2013) desenvolveram um estudo comparativo entre a aplicação de modelos finitos e semi-infinitos usados para estimar fluxos de calor em que a pele humana é submetida durante exposições ao fogo. Nas simulações usaram um material que apresenta propriedades térmicas próximas à da pele humana. Os autores concluíram que para simulações que levem em consideração apenas os tempos iniciais, o modelo semi-infinito pode ser utilizado com uma boa precisão, o que sugere novamente o uso do tempo de desvio de calor.

Similarmente podem-se citar trabalhos que usam as hipóteses da razão de aspecto para a justificativa do uso do modelo unidimensional, como no estudo de Yan, Shan & Lu (2015) que propõe o cálculo de carga térmica de ambientes.

Monte, Pontrelli & Becker (2015) estudaram a permeação de fármacos a partir de veículos (como um adesivo ou o filme de uma pomada) em tecidos biológicos que compõem a pele. Considerou-se o sistema de entrega de duas camadas, sendo que a primeira representa o veículo, através da qual o fármaco é administrado e a segunda representa a pele, sendo constituída pela epiderme, derme e o leito capilar. O modelo usado foi o unidimensional, considerando a área da pele coberta pelo veículo muito maior que as espessuras da pele e do veículo. Tal consideração é similar com as mostradas em trabalhos anteriores.

Outro modelo unidimensional aplicado é apresentado por Santillran, Salete & Toledo (2015) no estudo do campo térmico do concreto de barragens devido às ações ambientais. No modelo um sólido unidimensional (1D), tem suas extremidades expostas à condições de contorno do primeiro tipo (temperaturas prescritas), que seguem uma lei senoidal em fase e que desconsidera a perda de calor a partir de suas superfícies. O desempenho do novo modelo foi avaliado por meio do estudo de caso do arco da barragem de La Baells e comparado com o modelo numérico tridimensional (3D) resolvido pelo método dos elementos finitos (FEM). Os modelos 1D e o 3D forneceram resultados semelhantes, embora o desempenho do último tenha sido melhor, principalmente nas áreas próximas aos pilares. A aplicação dos conceitos dos tempos de penetração e desvio de calor neste estudo poderia identificar por quando tempo

cada posição estudada apresenta um comportamento unidimensional e tais tempos seriam ainda mais significativos nas posições próximas aos pilares, pois eles representam uma das condições de contorno que foram negligenciadas ao se considerar o modelo unidimensional. Os ganhos no uso deste modelo se devem à simplicidade computacional em contraste com modelos FEM. Além disso, o modelo analítico proposto pode ser facilmente integrado em outros programas, sendo uma ferramenta eficiente para abordagens probabilísticas que exigem um grande número de simulações, como o estudo do efeito do aquecimento global sobre infra-estruturas ou a concepção de novas estruturas.

A transferência de calor da água quente com temperatura constante para pés humanos foi estudada analiticamente e experimentalmente por Ma, Liu & Li (2015). A condução de calor é simplificada como um problema unidimensional multicamadas. Na maioria das vezes o pé é considerado como uma estrutura de quatro camadas: pele, gordura, músculo e uma camada central que inclui ossos, nervos, ligamentos e outros tecidos. Porém, neste estudo, consideraram-se os músculos e a camada central como uma camada inteira. O efeito da pele foi simplificado, considerando-o como uma resistência térmica e o da camada central como temperatura constante. Os experimentos foram realizados numa câmara de ambiente bem controlado. Embora exista um conjunto complexo de fatores que influenciam a precisão do modelo matemático, como as incertezas nos parâmetros de entrada e erros experimentais, obteve-se uma discrepância máxima entre a previsão do modelo e os dados experimentais de aproximadamente 3°C (erro relativo de aproximadamente 8,7%).

O trabalho de Liu & Chen (2016) usa o modelo generalizado de defasagem dupla da bio-transferência de calor para descrever o comportamento térmico de um tecido vivo irradiado por um laser. Considerou-se um modelo unidimensional devido o tamanho do feixe de laser ser muito maior do que a espessura da zona afetada termicamente. Esse modelo é capaz entretanto de analisar a resposta térmica do meio aquecido somente durante um período de tempo de interesse.

Hu *et al.* (2016) estudaram a transferência de calor em solos considerando um modelo semi-infinito unidimensional e temperatura da superfície do solo especificada. Para validação do modelo proposto os resultados obtidos foram comparados com os medidos no Planalto de Qinghai-Xizang, localizado no Tibete. Os objetivos de tal trabalho foram alcançados, pois os resultados indicaram que o modelo proposto foi capaz de calcular com pequenos erros a difusividade térmica do solo, calculando assim com precisão a temperatura do solo, e a densidade de fluxo de água. Como a profundidade do solo é muito grande o modelo semi-infinito é numericamente idêntico ao real durante um grande intervalo de tempo.

Aloysio, D'Alessandro & Monte (2016) analisaram o comportamento térmico ultra-rápido

de um micro-cooler termoelétrico sob o modelo de condução de calor hiperbólico. Novamente considerou-se um modelo unidimensional, com as superfícies laterais isoladas. Além disso, o problema linear inicial é dividido em três sub-problemas através do princípio da superposição. Alguns destes sub-problemas ainda tiveram seu modelo simplificado para um semi-infinito para os tempos iniciais.

Analogamente, observa-se nos trabalhos de Ma, Liu & Li (2015), Liu & Chen (2016), Hu *et al.* (2016) e Aloysio, D'Alessandro & Monte (2016) que o uso de modelos simplificados são largamente usados e que por sua vez, dependem de condições físicas e geométricas específicas para que possam ser usadas com confiança. São inúmeras as aplicações em engenharia desse procedimento. A confiança no uso de modelos simplificados para a solução de problemas diretos em condução de calor abre uma grande possibilidade de sua aplicação na solução de problemas inversos. De fato, essa aplicação é também um dos objetivos desse trabalho. Ou seja, é possível estimar um fluxo de calor aplicado em um modelo multidimensional ou finito usando uma solução analítica mais simples, como um modelo unidimensional ou semi-infinito sem perder precisão nos resultados? A resposta a essa pergunta envolve a identificação e a análise de conceitos de tempo de penetração e desvio de calor. Uma vez garantidas as condições favoráveis do uso de modelos simplificados, problemas inversos de alta complexidade podem ser resolvidos de forma direta e simples, tornando-se uma ferramenta de análise extremamente poderosa.

Capítulo 3

Fundamentos Teóricos

Apresentam-se neste capítulo as definições dos tempos de penetração e desvio de calor bem como as equações necessárias para calculá-los. São também apresentadas as soluções analíticas dos modelos de condução de calor obtidas usando o método das Funções de Green.

3.1 Tempos de penetração e desvio de calor

Como já mencionado, os conceitos dos tempos de penetração e desvio de calor foram definidos inicialmente por Monte, Beck & Amos (2008). O primeiro determina quanto tempo leva para que uma determinada posição seja influenciada pela condição de contorno ativa. Já o segundo representa o tempo gasto para que a condição de contorno inativa influencie em uma determinada posição. Todas as expressões necessárias para a obtenção destes tempos serão mostradas mais a frente e levam em consideração modelos unidimensionais. Observa-se que para calculá-los em geometrias multidimensionais basta expandir tais expressões. Ressalta-se que a nomenclatura dos modelos segue o que foi proposto por Cole *et al.* (2010).

Para o desenvolvimento das expressões considerou-se portanto, as soluções analíticas de um modelo finito (problema original) e de um semi-infinito (problema auxiliar). Estas são soluções exatas de seus respectivos modelos e apresentam comportamentos idênticos em determinadas condições físicas e/ou geométricas. Para identificar o intervalo em que ambas soluções são idênticas deve-se aplicar o conceito do tempo de desvio de calor, enquanto o tempo de penetração de calor determina o tempo gasto para que o fluxo de calor comece a influenciar em uma determinada posição.

Monte, Beck & Amos (2008) definiram em seu trabalho uma relação para a obtenção do

tempo de penetração de calor que é dada por:

$$\sigma_T(x, t) = \frac{T_{XI0}(x, t)}{T_{XI0}(0, t)} \quad (3.1)$$

Nota-se que a Eq. (3.1) é uma relação entre a temperatura na posição em que se deseja calcular o tempo de penetração de calor e a temperatura em $x = 0$, sendo ambas calculadas pela expressão do modelo semi-infinito, pois a definição de tal tempo leva em consideração apenas a condição de contorno ativa que é preservada por este modelo. Esta equação deve ser reescrita para que seja igual a uma fração aceitável (10^{-n}) de mudança na temperatura na posição x analisada e possa então ser usada nos cálculos. Assim a equação é dada por:

$$\frac{\theta_{XI0}(x, t)}{\theta_{XI0}(0, t)} = 10^{-n} \quad (3.2)$$

Onde $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0$, sendo $T(x, t)$ a temperatura do corpo e T_0 a temperatura inicial do corpo.

Para o tempo de desvio de calor os mesmos autores sugeriram uma outra relação de temperatura, dada por:

$$\varepsilon_T(x, t) = \frac{T_{XIJ}(x, t) - T_{XI0}(x, t)}{T_{XI0}(0, t)} \quad (3.3)$$

Nota-se que o numerador desta relação é a diferença de temperatura entre os modelos finito e semi-infinito. Neste caso o tempo de desvio de calor determina o instante em que o modelo finito diverge do semi-infinito. Para a aplicação da Eq. (3.3) a condição de contorno em $x = L$ deve ser homogênea. De forma análoga ao tempo de penetração de calor, a diferença de temperatura na posição x calculada por ambos modelos deve ser inferior a um limite de ordem decimal aceitável (10^{-n}). Ou seja,

$$\frac{\theta_{XIJ}(x, t) - \theta_{XI0}(x, t)}{\theta_{XI0}(0, t)} = 10^{-n} \quad (3.4)$$

3.2 Análise da influência de diferentes tipos de fluxo no cálculo dos tempos de penetração e desvio de calor

Uma questão importante é saber se diferentes tipos de fluxo de calor podem influenciar de alguma forma os tempos de penetração e desvio de calor. Como um dos objetivos desse trabalho é a identificação do fluxo de calor (via técnica inversa) presente em diversos problemas de engenharia, esta análise torna-se imperativa.

Nesse sentido, apresentam-se, a seguir, soluções analíticas de problemas diretos de modelos com diferentes tipos de fluxo de calor.

Considera-se como modelo finito uma placa plana de espessura L inicialmente a uma temperatura de equilíbrio e submetida instantaneamente em um tempo $t > 0$ a um fluxo de calor do tipo $q'' = q''(t)$, em $x = 0$. O contorno inativo foi considerado exposto a um meio convectivo com um coeficiente de troca de calor $h = 5 [W/m^2K]$ e temperatura $T_\infty = 25^\circ C$. Este modelo é representado pela Fig. 3.1.

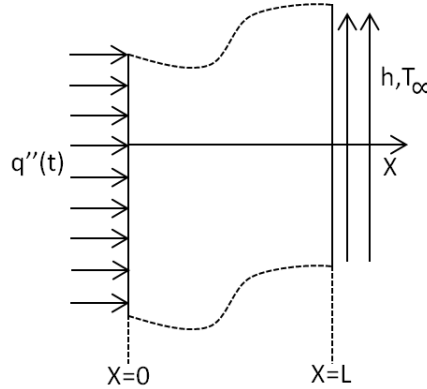


Figura 3.1: Representação esquemática do modelo X23.

Esse problema é denominado X23 segundo a nomenclatura proposta por Cole *et al.* (2010) e a equação da difusão de calor que o descreve é dada por:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (x, t) \in (0, L) \quad (3.5)$$

Sujeito às condições de contorno:

$$-k \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = q''(t) \quad -k \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=L} = h\theta \quad (3.6)$$

E à temperatura inicial:

$$\theta(x, 0) = 0 \quad (3.7)$$

k e α são, respectivamente, a condutividade e a difusividade térmica do material.

A solução da Eq.(3.5) obtida pelo método de funções de Green (COLE *et al.*, 2010) é descrita por:

$$\theta(x, t) = \alpha \int_0^t G(x, t|0, \tau) \frac{q(\tau)}{k} d\tau \quad (3.8)$$

Onde a $G(x, t|x', \tau)$ é a função de Green, denominada G_{X23} , que é dada por (COLE *et al.*, 2010):

$$G_{X23}(x, t|x', \tau) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha(t-\tau)/L^2} \frac{\beta_m^2 + B_2^2}{\beta_m^2 + B_2^2 + B_2} \cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right) \cos\left(\beta_m \frac{x'}{L}\right) \quad (3.9)$$

Sendo β_m os autovalores do problema, obtidos através da solução da equação transcendental, dada por:

$$\beta_m \tan \beta_m = B_2 \quad (3.10a)$$

$$B_2 = \frac{hL}{k} \quad (3.10b)$$

Substituindo a Eq. (3.9) na Eq. (3.8), obtém-se a expressão:

$$\theta_{X23}(x, t) = \frac{2\alpha}{kL} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t/L^2} \frac{\beta_m^2 + B_2^2}{\beta_m^2 + B_2^2 + B_2} \cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right) \cos\left(\beta_m \frac{1}{L}\right) \int_0^t q(\tau) e^{\beta_m^2 \alpha \tau/L^2} d\tau \quad (3.11)$$

Válida para qualquer fluxo de calor imposto $q''(t)$.

Se o fluxo de calor for constante ($q''(t) = q_0''$) obtém-se:

$$\theta_{X23}(x, t) = \frac{2q_0 L}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + B_2^2}{\beta_m^2 + B_2^2 + B_2} \frac{\cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right)}{\beta_m^2} \left[1 - e^{-\beta_m^2 \alpha t / L^2}\right] \quad (3.12)$$

Se o fluxo de calor variar com o tempo a integral remanescente na Eq.(3.11) deve ser resolvida. Nesse caso, uma solução híbrida torna-se uma boa alternativa. Ou seja, o fluxo variável pode ser aproximado como um vetor com suas componentes $q(t) = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_n]$, sendo q_n a componente para o intervalo $\Delta t = t(n+1) - t(n)$, com $n = 1, 2, 3 \dots N$, como mostrado na Fig. 3.2.

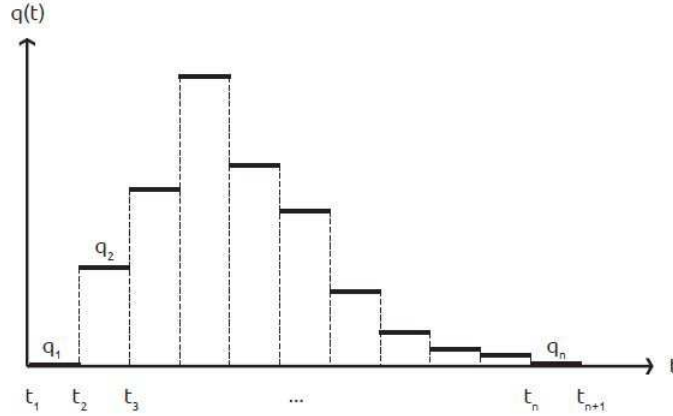


Figura 3.2: Representação de um fluxo discreto.

Desta forma, a integral presente na Eq.(3.11) deve ser substituída por:

$$\int_{\tau=0}^t q(\tau) e^{\beta_m^2 \alpha \tau / L^2} d\tau = \int_{t_1=0}^{t_2} q_1 e^{\beta_m^2 \alpha \tau / L^2} d\tau + \dots = \frac{1}{\frac{\beta_m^2 \alpha}{L^2}} \sum_{n=1}^{N-1} q_n \left(e^{\beta_m^2 \alpha t_{n+1} / L^2} - e^{\beta_m^2 \alpha t_n / L^2} \right) \quad (3.13)$$

Obtendo-se, para um fluxo de calor variável a expressão:

$$\theta_{X23}(x, t) = \frac{2L}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + B_2^2}{\beta_m^2 + B_2^2 + B_2} \frac{\cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right)}{\beta_m^2} \sum_{n=1}^{N-1} q_n \left(e^{-\beta_m^2 \alpha (t-t_{n+1}) / L^2} - e^{-\beta_m^2 \alpha (t-t_n) / L^2} \right) \quad (3.14)$$

Como visto nas Eq.(3.2) e (3.4) é necessário, também, obter as soluções analíticas do

modelo semi-infinito $X20$ (Fig. 3.3.)

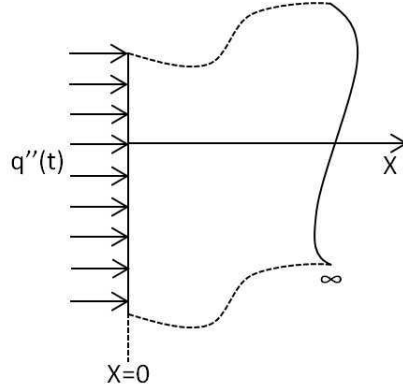


Figura 3.3: Representação esquemática do modelo $X20$.

A função de Green deste modelo é dada por Cole *et al.* (2010) como:

$$G_{X20}(x, t|x', \tau) = \frac{1}{(4\pi\alpha(t-\tau))^{\frac{1}{2}}} \left[e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha(t-\tau)}} \right] \quad (3.15)$$

Substituindo a Eq.(3.15) na Eq.(3.8) obtém-se a solução:

$$\theta_{X20}(x, t) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}k} \int_0^t \frac{q(\tau)}{(4\alpha(t-\tau))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha(t-\tau)}} d\tau \quad (3.16)$$

Considerando fluxo de calor constante obtém-se a solução:

$$\theta_{X20}(x, t) = \frac{q_0}{k} \sqrt{4\alpha t} \operatorname{ierfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \quad (3.17)$$

E para fluxos variáveis:

$$\int_{\tau=0}^t q(\tau) \frac{e^{-\frac{x^2}{4\alpha(t-\tau)}}}{\sqrt{4\alpha(t-\tau)}} d\tau = \int_{t_1=0}^{t_2} q_1 \frac{e^{-\frac{x^2}{4\alpha(t-\tau)}}}{\sqrt{4\alpha(t-\tau)}} d\tau + \int_{t_2}^{t_3} q_2 \frac{e^{-\frac{x^2}{4\alpha(t-\tau)}}}{\sqrt{4\alpha(t-\tau)}} d\tau + \dots =$$

$$= -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n=1}^{N-1} q_n \left[\sqrt{t-t_{n+1}} \operatorname{ierfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha(t-t_{n+1})}} \right) + \dots \right. \\ \left. - \sqrt{t-t_n} \operatorname{ierfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha(t-t_n)}} \right) \right] \quad (3.18)$$

Ou seja, a solução híbrida para o modelo $X20$ é dada por:

$$\theta_{X20}(x, t) = \frac{-2\sqrt{\alpha}}{k} \sum_{n=1}^{N-1} q_n \left[\sqrt{t-t_{n+1}} \operatorname{ierfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha(t-t_{n+1})}} \right) + \dots \right. \\ \left. - \sqrt{t-t_n} \operatorname{ierfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha(t-t_n)}} \right) \right] \quad (3.19)$$

A Fig.3.4 apresenta os diversos tipos de fluxo de calor usados para a comparação, cujos dados físicos e geométricos adotados para os testes são: $L = 10$ mm, condutividade térmica $k = 0,15$ W/mK e difusividade térmica $\alpha = 1,17 \times 10^{-7}$ m²/s.

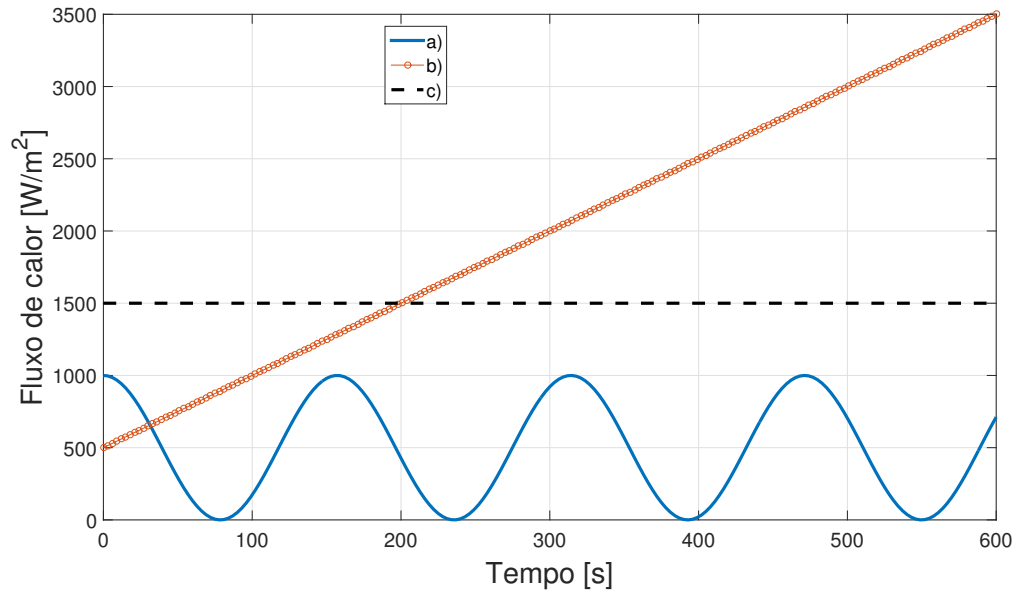
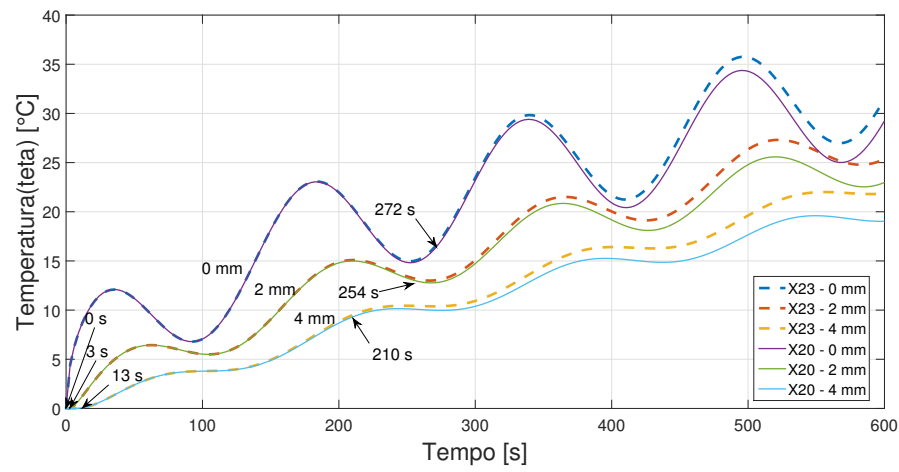
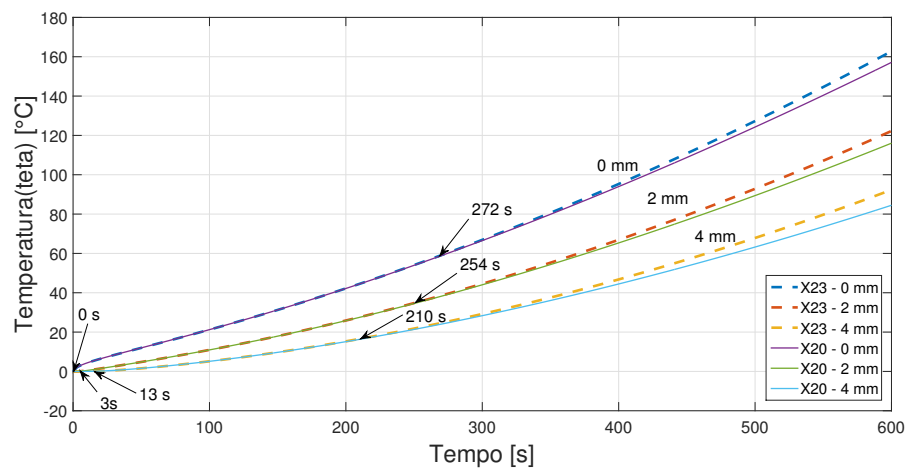


Figura 3.4: Diferentes tipos de fluxo impostos em $x=0$ no modelo X23 para comparação dos tempos de penetração e desvio de calor: a) Senoidal; b) Rampa e c) Constante.

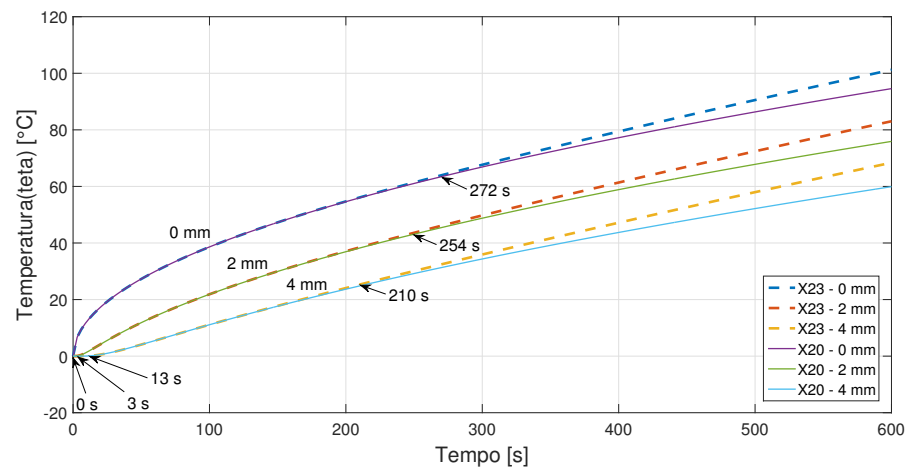
Embora tenha-se assumido os valores do expoente n na Eqs.(3.2) e (3.4) como $n = 2, 4$ e 10 para os cálculos dos tempos de penetração e desvio, que serão apresentados na próxima seção, apresentam-se os resultados apenas para o primeiro expoente. Segundo Monte, Beck & Amos (2008) aplicando tal valor obtém-se os tempos de penetração e desvio de calor "visuais". Apresentam-se os resultados na Fig. 3.5.



(a)



(b)



(c)

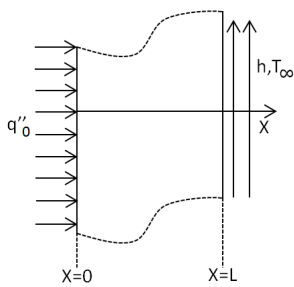
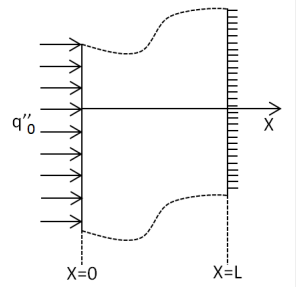
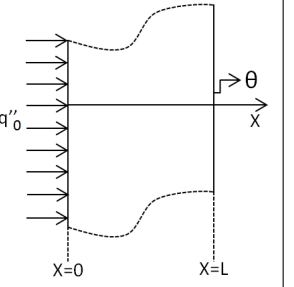
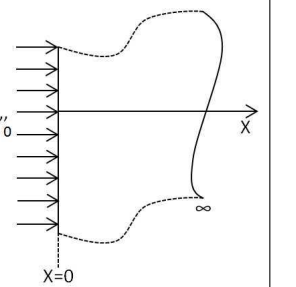
Figura 3.5: Tempos de penetração e desvio de calor para diferentes tipos de fluxo aplicados ao modelo X23. a) Senoidal; b) Rampa e c) Constante.

Destacam-se na Fig.3.5 os tempos de penetração e desvio de calor para as posições $x = 0$ mm, $x = 2$ mm e $x = 4$ mm. Observa-se que mesmo com diferentes tipos de fluxos de calor os valores para os tempos de penetração e desvio de calor são os mesmos o que indica que não há influência do tipo de fluxo nesses parâmetros.

3.3 Cálculo dos tempos de penetração e desvio de calor para diferentes tipos de condição de contorno inativa

Apresentam-se na Tab. 3.1 os modelos usados para a obtenção dos tempos de penetração e desvio de calor. Visando simplicidade e considerando que a forma de evolução temporal do fluxo de calor não interfere no cálculo do tempo de penetração e desvio de calor, adotou-se nas análises seguintes a imposição de um fluxo de calor constante como condição ativa nos modelos térmicos. Ou seja, consideram-se em todos os modelos, sejam eles finitos ou semi-infinitos, uma temperatura inicial de equilíbrio T_0 e a imposição de um fluxo de calor constante na face ativa da amostra. As soluções de cada problema são escritas abaixo da tabela.

Tabela 3.1: Problemas Térmicos Unidimensionais.

Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
			

► Caso 1

$$\theta_{X23}(x, t) = \frac{2q_0L}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + B_2^2}{\beta_m^2 + B_2^2 + B_2} \frac{\cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right)}{\beta_m^2} \left[1 - e^{-\beta_m^2 \alpha t / L^2}\right] \quad (3.20)$$

► **Caso 2**

$$\theta_{X22}(x, t) = \frac{\alpha q_0 t}{kL} - \frac{2q_0 L}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{m^2 \pi^2} e^{-m^2 \pi^2 \alpha t / L^2} + \frac{q_0}{k} \left(\frac{L}{3} - x + \frac{x^2}{2L} \right) \quad (3.21)$$

► **Caso 3**

$$\theta_{X21}(x, t) = \frac{q_0 L}{k} \left(1 - \frac{x}{L} \right) - \frac{2q_0 L}{k} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t / L^2} \frac{\cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right)}{\beta_m^2} \quad (3.22)$$

Sendo $\beta_m = \pi \left(m - \frac{1}{2} \right)$.

► **Caso 4**

$$\theta_{X20}(x, t) = \frac{q_0}{k} \sqrt{4\alpha t} \operatorname{ierfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \quad (3.23)$$

Para a análise, serão considerados dois materiais: o metal duro ISO K10 e o policloreto de vinila (PVC) que apresentam propriedades térmicas distintas, representando materiais bons e maus condutores. Tais propriedades térmicas são mostradas na Tab. 3.2. Definiu-se o comprimento L dos modelos igual a 10 mm.

Tabela 3.2: Propriedades térmicas do PVC e metal duro ISO K10.

Propriedades Térmicas	PVC	metal duro ISO K10
α (m^2/s)	$1,17 \times 10^{-7}$ ⁽¹⁾	$4,36 \times 10^{-5}$ ⁽²⁾ ⁽³⁾
k (W/mK)	0,15 ⁽¹⁾	130 ⁽²⁾

⁽¹⁾ (BORGES, 2008) ⁽²⁾ (ENGQVIST *et al.*, 2000) ⁽³⁾ (BRITO *et al.*, 2009)

Usando a Eq.(3.2) obteve-se a Tab. 3.3, que apresenta o tempo de penetração para várias posições e expoentes para esses materiais. É importante ressaltar que não houve variação nos valores dos tempos de penetração de calor para diferentes tipos de condição de contorno inativa.

Tabela 3.3: Tempos de penetração de calor (t_{pen}) [s].

x (mm) \ n	PVC			Metal Duro		
	2	4	10	2	4	10
2	3,3134	1,3217	0,4426	0,0089	0,0035	0,0012
4	13,2534	5,2866	1,7701	0,0356	0,0142	0,0048
6	29,8200	11,8949	3,9828	0,0800	0,0319	0,0107
8	53,0133	21,1465	7,0804	0,1423	0,0568	0,0191
10	82,8333	33,0414	11,0632	0,2223	0,0887	0,0297

Observa-se que quanto maior a distância, maior o tempo de penetração de calor, pois maior é distância da condição de contorno ativa (fluxo de calor). Sendo que para o metal duro os tempos são menores, pois, como já mencionado, é um bom condutor.

Nota-se que a Tab. 3.3 apresenta resultados interessantes, porém de caráter muito específicos para cada material. Com o objetivo de generalizar Monte, Beck & Amos (2008) propõem uma adimensionalização dos tempos de penetração de calor através da Eq.(3.24). Além disso, também adimensionaliza-se a posição usando a Eq.(3.25).

$$t_{pen}^+ = \frac{\alpha t_{pen}}{x^2} \quad (3.24)$$

$$x^* = \frac{x}{L} \quad (3.25)$$

A Tabela 3.4 apresenta estes resultados.

Tabela 3.4: Tempos de penetração de calor adimensionais (t_{pen}^+).

$x^* \backslash n$	PVC			Metal Duro		
	2	4	10	2	4	10
0,2	0,0970	0,0387	0,0130	0,0970	0,0387	0,0130
0,4	0,0970	0,0387	0,0130	0,0970	0,0387	0,0130
0,6	0,0970	0,0387	0,0130	0,0970	0,0387	0,0130
0,8	0,0970	0,0387	0,0130	0,0970	0,0387	0,0130
1,0	0,0970	0,0387	0,0130	0,0970	0,0387	0,0130

O resultado revela que os tempos adimensionais de penetração dependem apenas do expoente n escolhido. Assim, o tempo de penetração de calor adimensional (t_{pen}^+) torna-se uma alternativa mais eficiente para a obtenção dos tempos de penetração de calor, considerando quaisquer materiais.

Observando as Tab. 3.3 e 3.4 vê-se que o aumento do expoente n resulta em tempos menores, pois se é mais conservativo nos cálculos.

Analogamente aos tempos de penetração, os tempos de desvio de calor serão calculados inicialmente para dois materiais: PVC e metal duro. Posteriormente uma proposta adimensional é apresentada para generalizar a análise.

Inicialmente a amostra de PVC é analisada. A Fig. 3.6 a evolução da temperatura na superfície ($x=0$) para os quatro modelos. As temperaturas para o modelo $X23$ são calculadas usando $h = 5$ e $500 \text{ W/m}^2\text{K}$.

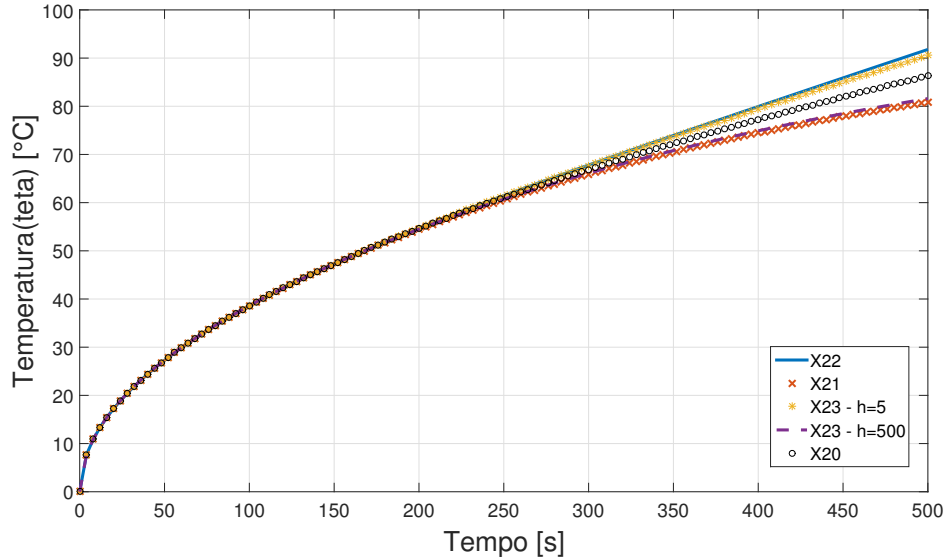


Figura 3.6: Evolução da temperatura na superfície ($x=0$) dos modelos $X20$, $X21$, $X22$ e $X23$.

Observa-se na Fig. 3.6 que para tempos inferiores a aproximadamente 300 segundos todos os modelos ($X21$, $X22$ e $X23$) se comportam como o modelo semi-infinito ($X20$). De fato a Tab. 3.5 indica exatamente o tempo como sendo $t_{desv} = 272$ segundos para $n=2$, tal valor do expoente fornece os tempos de desvio de calor "visuais". A partir deste tempo os modelos divergirão, ou seja, a condição de contorno passa a influenciar o comportamento da temperatura para aquela posição. Caso a exigência de perturbação seja menor ($n>2$) esse tempo diminui, como mostra a Tab. 3.5.

Nota-se também na Fig. 3.6 que a influência do coeficiente de calor por convecção, h , se estabelece entre o problema de temperatura prescrita $X21$ (h elevado) e o isolado $X22$ (h pequeno). Assim, conclui-se que ele interfere no cálculo do tempo de desvio de calor aqui proposto, pois dependendo de seu valor a evolução da temperatura do modelo $X23$ pode ficar mais próxima da evolução do $X20$, como mostra a Fig. 3.7 obtida para um $h = 50 \text{ W/m}^2\text{K}$.

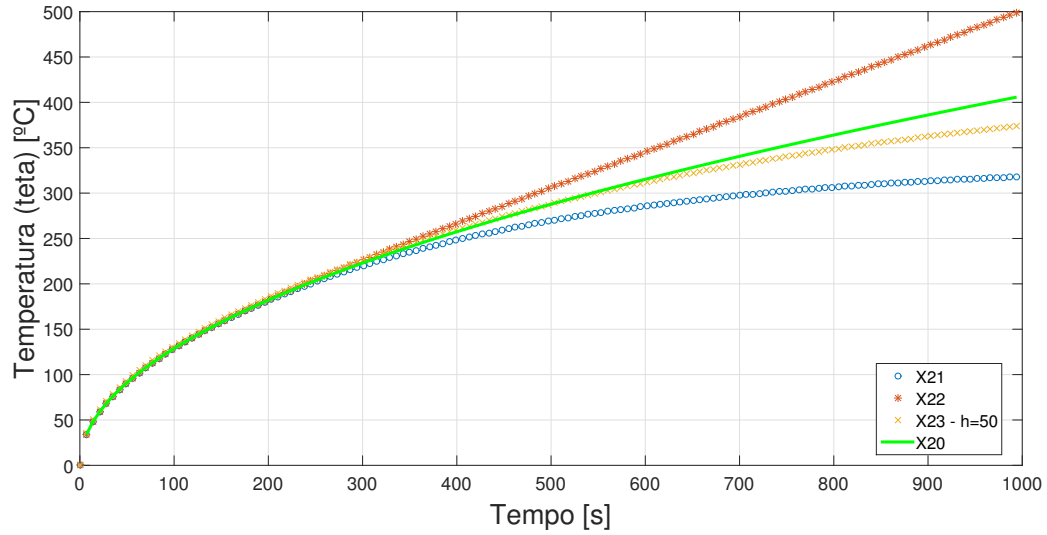


Figura 3.7: Aproximação da evolução da temperatura do modelo $X23$ a do $X20$.

Como uma das grandes vantagens desta técnica de redução de modelos é não ser necessário conhecer nenhuma propriedade do contorno inativo, propõe-se o cálculo do tempo de desvio de calor para o modelo $X23$ tomando valores extremamente elevados ou pequenos para o coeficiente de convecção de calor. Assim o tempo de desvio obtido terá seu menor valor possível, estando este a favor da segurança, não influenciando na qualidade da solução do problema inverso. Neste estudo usou-se $h = 5 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Os valores calculados para os tempos de desvio de calor através da Eq.(3.4) são apresentados na Tab. 3.5.

Tabela 3.5: Tempos de desvio de calor (t_{desv}) [s].

$x \text{ (mm)} \backslash n$	PVC			Metal Duro		
	2	4	10	2	4	10
0	272,9854	120,6637	42,7858	0,7339	0,3239	0,1149
2	254,6878	106,6405	35,8444	0,6836	0,2862	0,0963
4	210,7374	84,5840	28,3216	0,5656	0,2270	0,0761
6	162,3202	64,7610	21,6837	0,4357	0,1738	0,0582
8	119,2798	47,5795	15,9309	0,3201	0,1277	0,0428
10	82,8333	33,0414	11,0632	0,2223	0,0887	0,0297

Da Tabela 3.5 conclui-se também que à medida que se afasta da superfície ativa o valor

do tempo de desvio diminui. Este comportamento é esperado uma vez que se aproxima da condição de contorno inativa. O comportamento do tempo de desvio para o metal duro se repete, porém com tempos bem inferiores.

Como já mencionado, a generalização desta análise se dá através da adimensionalização deste tempo e da posição. Monte, Beck & Amos (2008) propõem também uma adimensionalização como sendo:

$$t_{desv}^+ = \frac{\alpha t_{desv}}{(2L - x)^2} \quad (3.26)$$

Para a posição a adimensionalização é a mesma mostrada na Eq.(3.25).

Os resultados para t_{desv}^+ são apresentados na Tab. 3.6.

Tabela 3.6: Tempos de desvio de calor adimensionais (t_{desv}^+).

$x^* \backslash n$	PVC			Metal Duro		
	2	4	10	2	4	10
0	0,0800	0,0353	0,0125	0,0800	0,0353	0,0125
0,1	0,0870	0,0378	0,0130	0,0870	0,0378	0,0130
0,2	0,0920	0,0386	0,0130	0,0920	0,0386	0,0130
0,3	0,0950	0,0387	0,0130	0,0950	0,0387	0,0130
0,4	0,0964	0,0387	0,0130	0,0964	0,0387	0,0130
0,5	0,0969	0,0387	0,0130	0,0969	0,0387	0,0130
0,6	0,0970	0,0387	0,0130	0,0970	0,0387	0,0130
0,7	0,0970	0,0387	0,0130	0,0970	0,0387	0,0130
0,8	0,0970	0,0387	0,0130	0,0970	0,0387	0,0130
0,9	0,0970	0,0387	0,0130	0,0970	0,0387	0,0130
1,0	0,0970	0,0387	0,0130	0,0970	0,0387	0,0130

Analogamente ao tempo de penetração de calor, observa-se que o tempo de desvio adimensional independe do material. Porém, além de também variar com o expoente n ele apresenta uma pequena variação com a posição adimensional x^* . O tempo de penetração de calor adimensional (t_{pen}^+) torna-se também uma alternativa eficiente para a obtenção dos tempos de desvio de calor de qualquer material.

É importante ressaltar que quanto mais próximo da condição de contorno ativa, menor

será o tempo de penetração de calor e maior o tempo de desvio de calor.

O conhecimento dos tempos de penetração e desvio de calor para uma determinada posição traz a informação de a partir de quanto tempo o fluxo de calor imposto passa a influenciar a temperatura em uma dada posição e também qual o tempo máximo que a evolução dessa temperatura pode ser representada por um modelo mais simples como o semi-infinito. Essa conclusão abre uma grande perspectiva de uso de modelos simples para a estimativa/solução de problemas inversos em condução de calor. No próximo capítulo apresenta-se essa aplicação.

Como a técnica de problema inverso a ser aplicada é o método TFBGF proposto por Fernandes (2013), apresenta-se na próxima seção uma breve descrição dessa técnica.

3.4 Método TFBGF

O método de solução para problemas inversos em condução de calor denominado Transfer Function Based on Green's Function (TFBGF) depende essencialmente da identificação da função de transferência obtida a partir da função de Green que fornece a solução do problema direto de condução de calor em estudo. As funções de Green, para os problemas de condução de calor, são imediatamente obtidas em Cole *et al.* (2010). TFBGF é uma proposta de solução de problema inverso que pode ser aplicada aos vários fenômenos físicos descritos por equações diferenciais lineares, e nesta pesquisa o objetivo é estimar fluxo de calor.

A função de transferência é responsável por caracterizar a relação entre entrada e saída de um sistema dinâmico. Fazendo-se a analogia entre sistemas dinâmicos e problemas térmicos, considera-se, o fluxo de calor, $q(t)$, como entrada do sistema (excitação) e a temperatura, $T(\mathbf{x}, t)$, como a resposta (causa) à essa excitação, como mostrado pelo diagrama de blocos (Fig. 3.8).

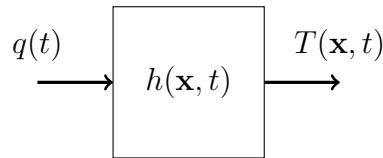


Figura 3.8: Representação de um sistema dinâmico de uma entrada e uma saída.

No domínio do tempo a relação entre entrada/saída é dada pelo Teorema da Convolução, isto é,

$$T(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) * q(t). \quad (3.27)$$

No domínio complexo, na variável s , a análise de sistemas dinâmicos é facilitada devido

ao uso da transformada de Laplace, assim, a relação entrada/saída é dada pela multiplicação,

$$T(\mathbf{x}, s) = H(\mathbf{x}, s).q(s), \quad (3.28)$$

onde a função de transferência é dada por $H(\mathbf{x}, s) = \mathcal{L}\{h(\mathbf{x}, t)\}$.

Ou ainda, voltando ao domínio do tempo, por meio da transformada inversa de Laplace, tem-se,

$$T(\mathbf{x}, t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(\mathbf{x}, s).q(s)\} = h(\mathbf{x}, t) * q(t) = \int_0^t h(\mathbf{x}, t - \tau)q(\tau)d\tau. \quad (3.29)$$

Observa-se que a função de transferência é independente do par entrada/saída do sistema dinâmico. Assim, ao considerar o fluxo de calor como o funcional Delta de Dirac, $q(t) = \delta(t)$ é obtida a chamada resposta impulsiva do sistema. A função de transferência pode ser definida como a transformada de Laplace da resposta impulsiva, ou seja, $H(\mathbf{x}, s) = \mathcal{L}\{h(\mathbf{x}, t)\}$, onde $h(\mathbf{x}, t)$ é a resposta impulsiva.

Da propriedade do elemento neutro da convolução tem-se que $T(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) * \delta(t) = h(\mathbf{x}, t)$, isso significa que a resposta impulsiva do sistema é dada pelo campo de temperatura quando a excitação é um pulso do tipo Delta de Dirac. Portanto, se o problema térmico pode ser modelado analiticamente por meio das funções de Green, então, a resposta impulsiva é imediatamente identificada.

Segundo Smith (1998), o procedimento de convolução entre a entrada do sistema e a sua resposta impulsiva é a maneira mais rigorosa de implementar um filtro digital. Nesse caso, o filtro é denominado kernel.

Em sistemas dinâmicos tem-se três variáveis de estudo: a excitação (fluxo), a função de transferência e a resposta do sistema (temperatura). Desta forma os problemas são resolvidos conhecendo-se sempre duas variáveis e estimando a terceira. Assim, conhecendo-se as temperaturas experimentais e a resposta impulsiva (função de transferência), a estimativa para o fluxo de calor no método TFBGF pode ser concretizada por diferentes abordagens, por meio do conceito de deconvolução, ou aplicando a transformada rápida de Fourier e sua inversa, ou ainda, pelo cálculo de densidade espectrais, todas equivalentes entre si (FERNANDES, 2013).

O cerne do método TFBG consiste em identificar a resposta impulsiva do problema térmico. No próximo capítulo mostra-se como a resposta impulsiva é obtida considerando-se um problema unidimensional que é o objeto de estudo para essa pesquisa.

Pode-se, assim, usufruir das relações entre entrada/saída de um sistema dinâmico, no

domínio complexo s (Eq. (3.29)), o fluxo de calor, $q(s)$, é estimado por

$$q(s) = T(\mathbf{x}, s)/H(\mathbf{x}, s). \quad (3.30)$$

Uma vez obtido $q(s)$ basta aplicar a transformada inversa de Laplace para a obtenção do fluxo de calor $q(t)$, ou seja

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{q(s)\}. \quad (3.31)$$

Alternativamente pode-se obter $q(t)$ por meio da deconvolução

$$q(t) = T(\mathbf{x}, t) * \mathcal{L}^{-1}\{1/H(\mathbf{x}, s)\}. \quad (3.32)$$

Assim, a representação em diagrama de bloco para problema inverso, dado por Eqs. (3.30) e (3.32), é mostrada na Fig. 3.9. Observa-se a inversão do par entrada/saída e que o sistema é descrito por $\mathcal{L}^{-1}\{1/H(\mathbf{x}, s)\}$.

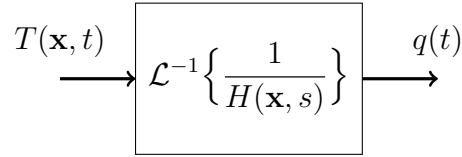


Figura 3.9: Representação de um sistema dinâmico de uma entrada e uma saída, para o problema inverso.

Capítulo 4

Problema Inverso: Aplicação em Testes Simulados

A questão que se estabelece com os resultados do último capítulo é: se modelos simples tem o mesmo comportamento de complexos durante um certo tempo, é possível, neste intervalo, obter a solução de problemas inversos? A seguir problemas inversos estabelecidos a partir de três modelos finitos serão analisados e resolvidos usando um modelo térmico semi-infinito, cujos dados de temperatura são usados em tempos inferiores ao tempo de desvio de calor.

4.1 Estimativas usando modelo simplificado

Os modelo térmicos a serem analisados são apresentados na Tab. 4.1.

Tabela 4.1: Problemas Térmicos Unidimensionais.

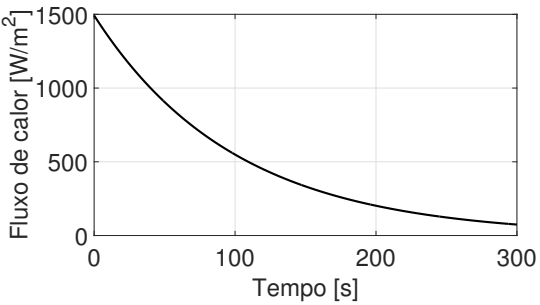
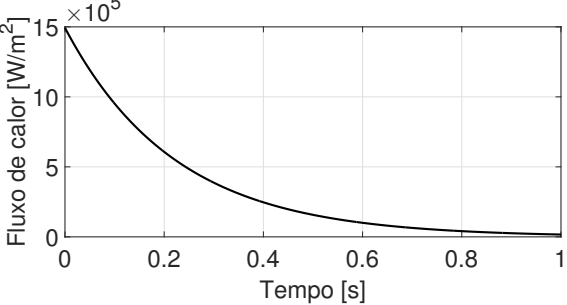
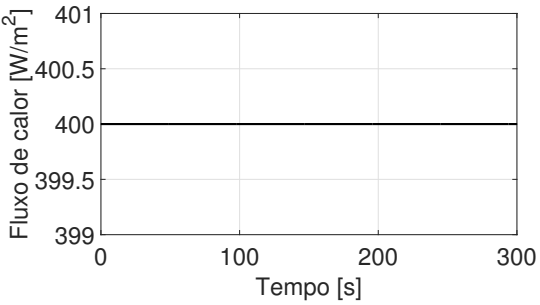
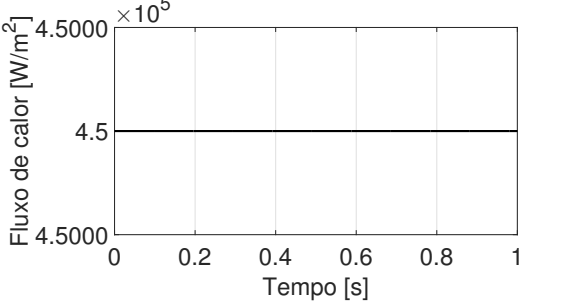
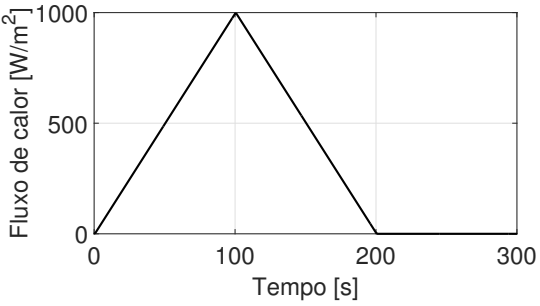
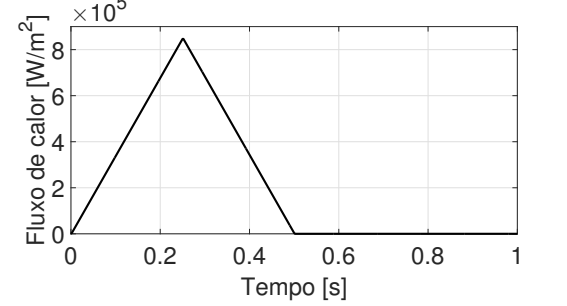
X21	X22	X23

Em todos modelos finitos consideraram-se amostras de PVC e metal duro com um comprimento $L=10$ mm. A temperatura ambiente foi considerada igual $T_{\infty} = 25^{\circ}\text{C}$, sendo a

inicial T_0 igual a ambiente, e no modelo $X23$ o contorno inativo foi considerado exposto a um meio convectivo com um coeficiente de troca de calor $h = 5 \text{ [W/m}^2\text{K]}$.

A Tabela 4.2 apresenta os diversos tipos de fluxo impostos e a serem estimados.

Tabela 4.2: Forma e intensidade de fluxos de calor impostos em cada modelo.

	PVC	Metal Duro
X21		
X22		
X23		

Observa-se na Tab. 4.2 que embora os fluxos tenham a mesma forma para ambas as amostras, as intensidades são diferentes conforme a amostra seja de um bom condutor ou não.

As soluções híbridas dos respectivos modelos, as quais são apresentadas a seguir, foram

usadas para a obtenção das temperaturas simuladas e serão denominadas θ_{X21} , θ_{X22} e θ_{X23} .

$$\theta_{X21}(x, t) = \frac{2L}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right)}{\beta_m^2} \sum_{n=1}^{N-1} q_n (e^{\beta_m^2 \alpha(t-t_{n+1})/L^2} - e^{\beta_m^2 \alpha(t-t_n)/L^2}) \quad (4.1)$$

Sendo $\beta_m = \pi \left(m - \frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \theta_{X22}(x, t) = & \frac{\alpha}{kL} \sum_{n=1}^{N-1} q_n (t_{n+1} - t_n) \\ & + \frac{2L}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(m\pi \frac{x}{L}\right)}{m^2 \pi^2} \sum_{n=1}^{N-1} q_n \left(e^{-\frac{m^2 \pi^2}{L^2} \alpha(t-t_{n+1})} - e^{-\frac{m^2 \pi^2}{L^2} \alpha(t-t_n)} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\theta_{X23}(x, t) = \frac{2L}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + B_2^2}{\beta_m^2 + B_2^2 + B_2} \frac{\cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right)}{\beta_m^2} \sum_{n=1}^{N-1} q_n \left(e^{-\beta_m^2 \alpha(t-t_{n+1})/L^2} - e^{-\beta_m^2 \alpha(t-t_n)/L^2} \right) \quad (4.3)$$

Com $\beta_m \tan \beta_m = \frac{hL}{k}$.

As temperaturas simuladas são então obtidas em três posições: 0, 2 e 4 mm.

Com o objetivo de avaliar a presença de ruídos de medição, são acrescentados erros aleatórios às temperaturas simuladas, ou seja

$$Y(x, t) = T_{XIJ}(x, t) \pm \epsilon \quad (4.4)$$

O ruído aleatório adicionado neste trabalho foi de $\pm 0,1^\circ\text{C}$.

As temperaturas experimentais simuladas (Y) para os modelos $X21$, $X22$ e $X23$ são apresentadas nas Tab. 4.3, 4.4 e 4.5, respectivamente.

Tabela 4.3: Temperaturas experimentais simuladas para o modelo X21 e amostras de PVC e metal duro.

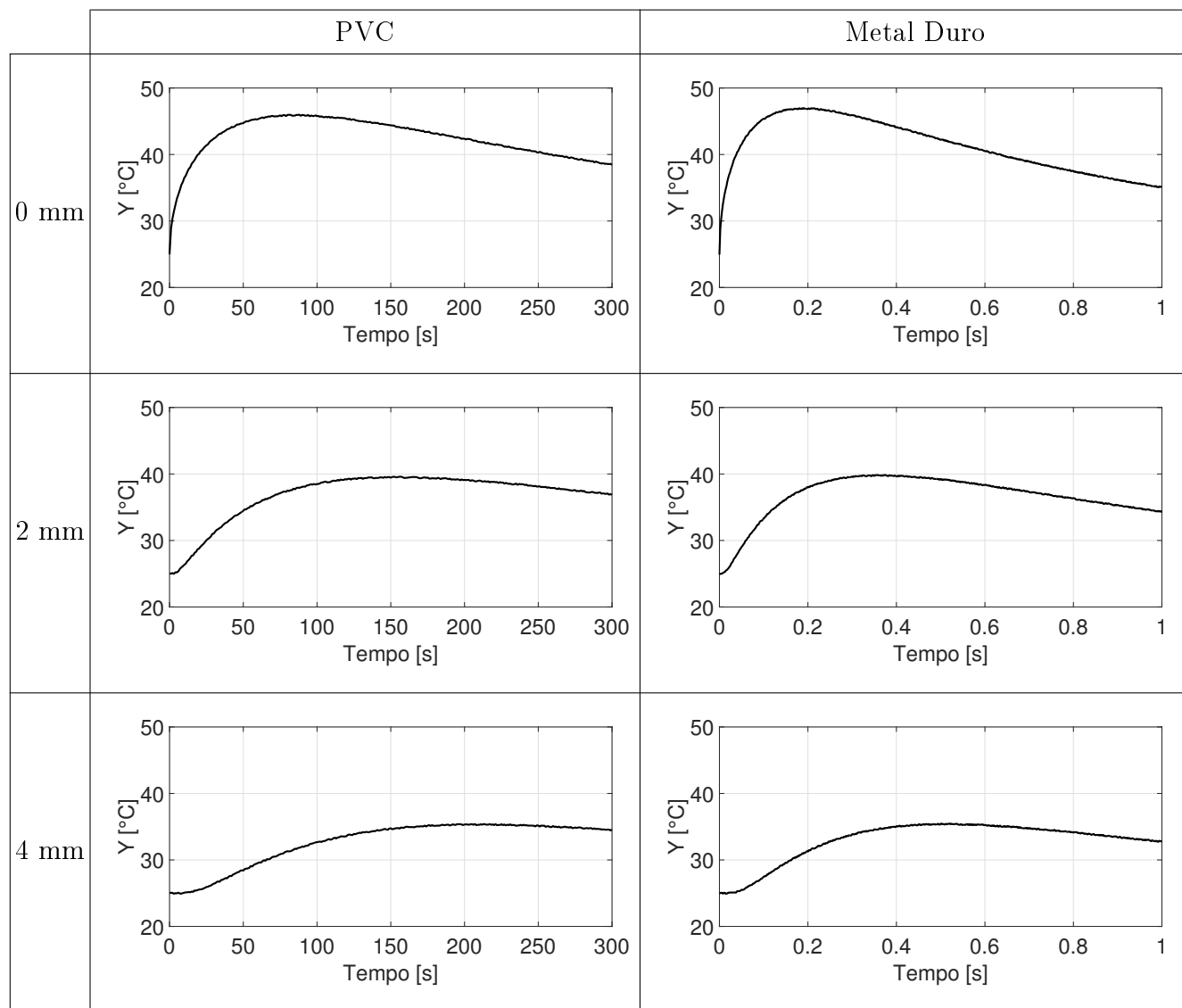


Tabela 4.4: Temperaturas experimentais simuladas para o modelo X22 e amostras de PVC e metal duro.

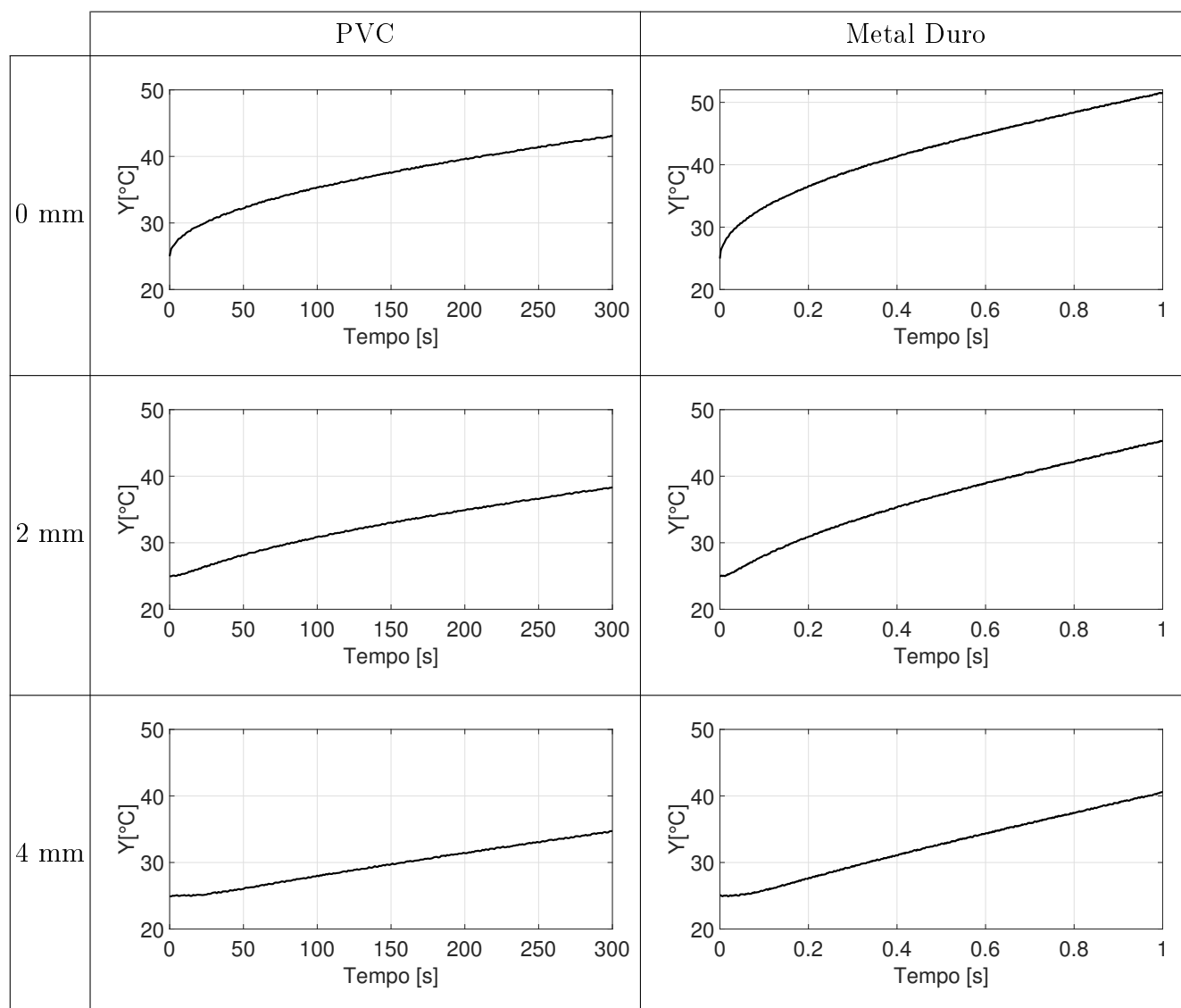
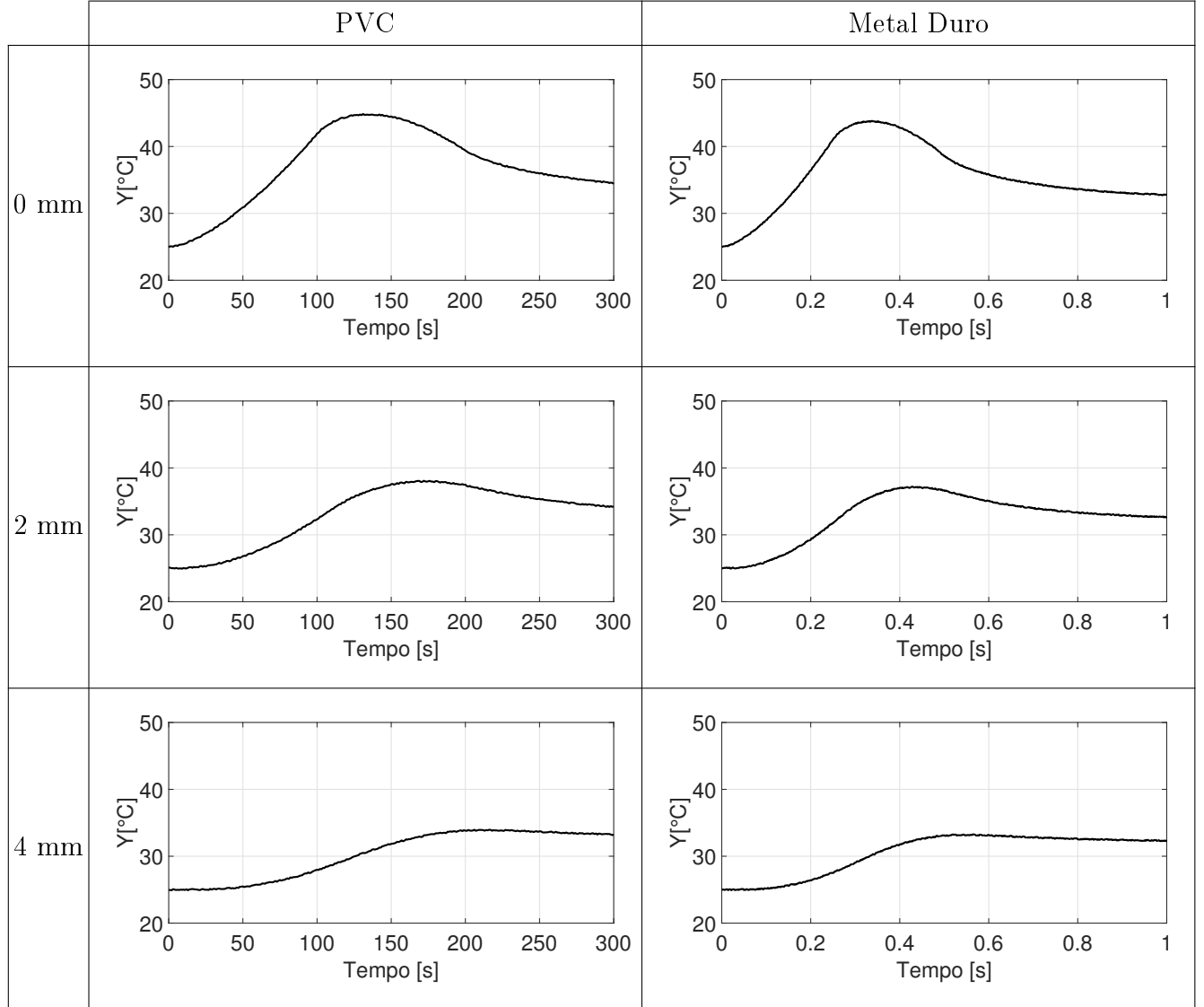


Tabela 4.5: Temperaturas experimentais simuladas para o modelo X23 e amostras de PVC e metal duro.



O problema inverso foi resolvido aplicando-se o método TFBGF, no qual foi usada a resposta impulsiva analítica (ou função transferência) do modelo semi-infinito.

A resposta impulsiva de qualquer modelo é obtida por Fernandes (2013) como:

$$h_{XIJ}(x, t) = \frac{\alpha}{k} G_{XIJ}(x, t|0, t) \quad (4.5)$$

Deve-se assim ressaltar que embora os modelos apresentem a mesma evolução de temperatura, as temperaturas simuladas são calculadas com o modelo finito correspondente,

enquanto as temperaturas estimadas são calculadas a partir do fluxo estimado com a função transferência do modelo semi-infinito, que é dada por:

$$h_{X20}(x, t) = \frac{2 \alpha e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}}{k \sqrt{4\pi\alpha t}} \quad (4.6)$$

Conforme o modelo original, o uso adequado dessa resposta impulsiva deve ter como tempo máximo o tempo de desvio de calor, mostrados na Tab. 3.5. Os resultados obtidos neste trabalho levam em consideração os tempos para um expoente $n=2$, considerados tempos "visuais" (MONTE; BECK; AMOS, 2008).

Observa-se ainda que os fluxos de calor possuem diferentes magnitudes para que se obtenha uma variação de temperatura aproximadamente da mesma proporção para ambas amostras.

4.2 Testes: Estimativas de Fluxo de Calor

4.2.1 Teste 1: Modelo *X21* com fluxo de calor do tipo exponencial

As Figuras 4.1 - 4.3 apresentam os resultados até o tempo de desvio de calor das estimativas de fluxo de calor exponencial, do erro absoluto entre o fluxo estimado e o imposto, da comparação entre as temperaturas obtidas com o fluxo estimado com o modelo semi-infinito e do erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada para uma amostra de PVC para as posições $x = 0, 2$ e 4 mm, respectivamente.

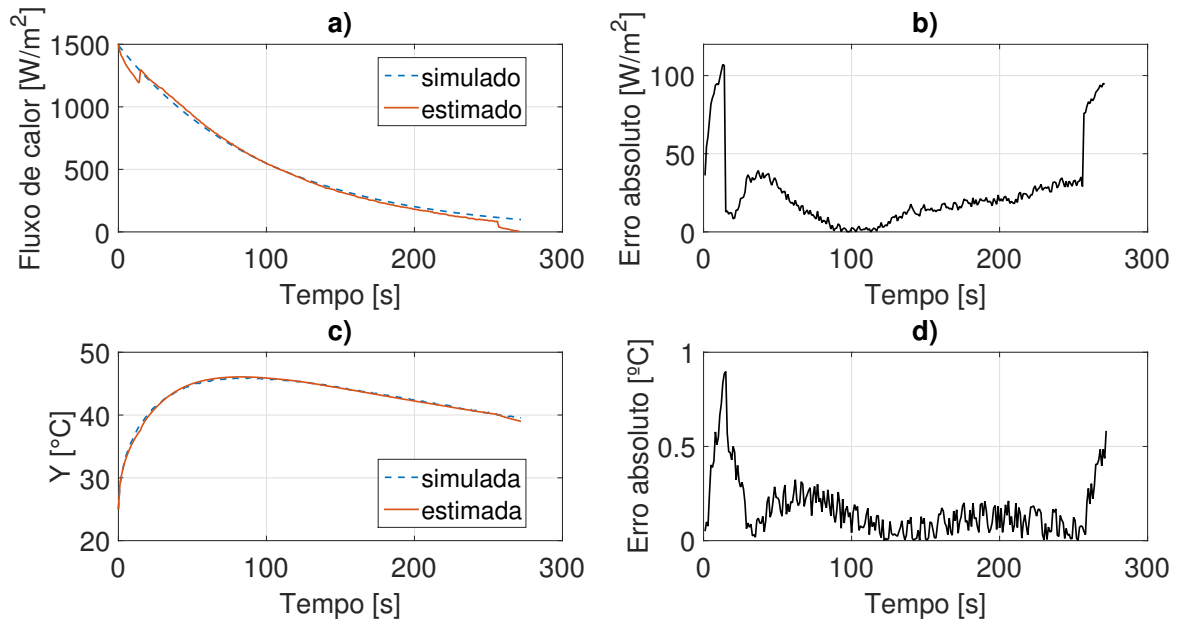


Figura 4.1: Teste 1: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=0$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.

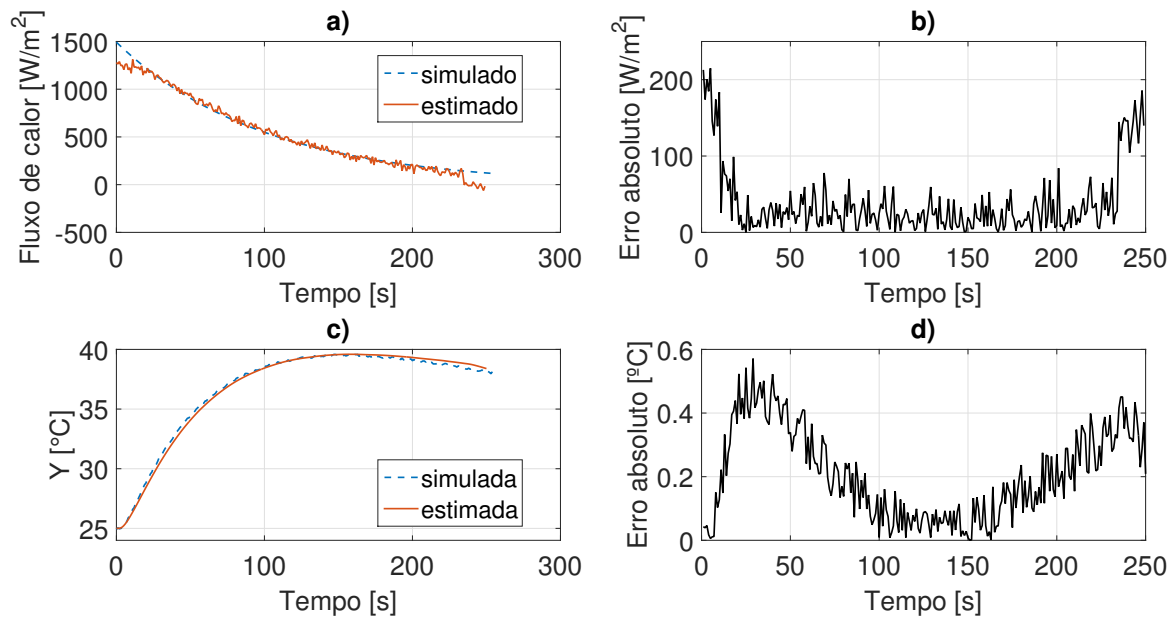


Figura 4.2: Teste 1: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=2$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.

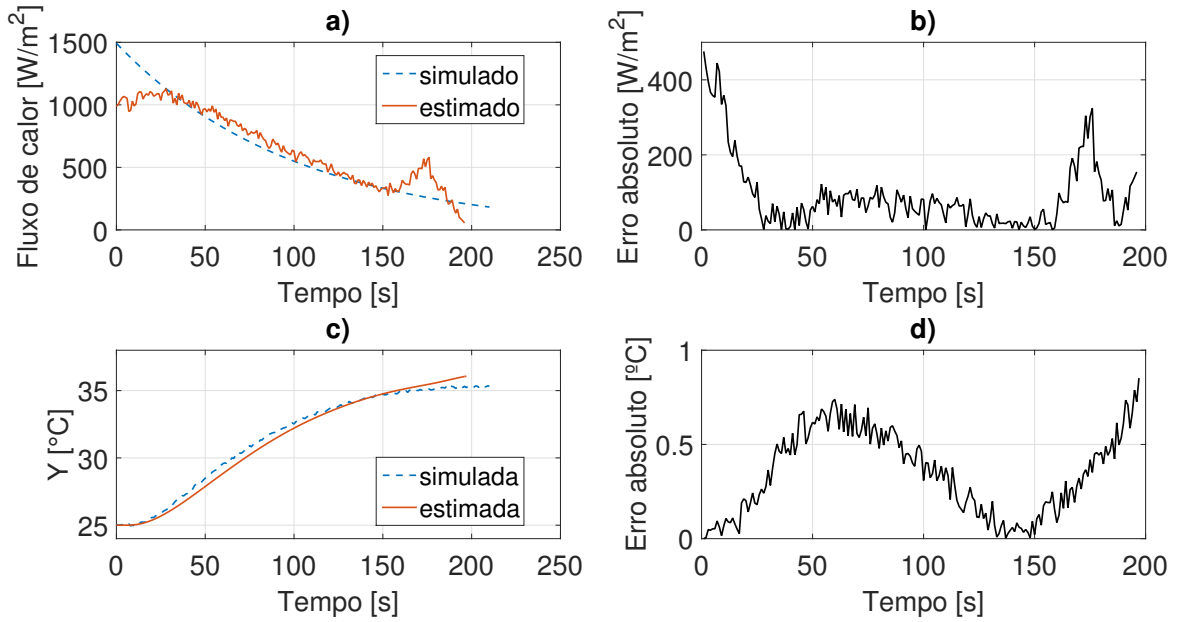


Figura 4.3: Teste 1: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=4$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.

Observa-se que o início e final das estimativas sofrem maior influência das incertezas. Esta dispersão se acentua à medida que as temperaturas se afastam da superfície. Este comportamento se deve aos valores de sensibilidade, que diminuem à medida que as informações se afastam da fonte. Além disso, pela característica da técnica TFBGF, as correlações discretas apresentam lóbulos laterais devido aos erros numéricos de discretização.

Contudo, observa-se que mesmo afastado da superfície o fluxo de calor imposto é recuperado com sucesso. Outro fator importante diz respeito à temperatura calculada usando o fluxo de calor estimado. Observa-se nas Fig. 4.1 - 4.3 que o erro absoluto médio aproximado entre a temperatura estimada e a experimental simulada é de $0,15^{\circ}\text{C}$ para $x=0$ mm, $0,20^{\circ}\text{C}$ para $x=2$ mm e $0,30^{\circ}\text{C}$ para $x=4$ mm. Isto só aconteceu, pois a média do erro absoluto entre os fluxos estimado e simulado também foi baixa, não deixando que os picos de erro do fluxo, que ocorreram nos lóbulos laterais, afetassem o resultado.

Resultados similares são encontrados para o metal duro, portanto para essa amostra serão apresentados os resultados apenas para a posição $x=2$ mm. A Figura 4.4 apresenta as estimativas para o fluxo de calor do tipo exponencial.

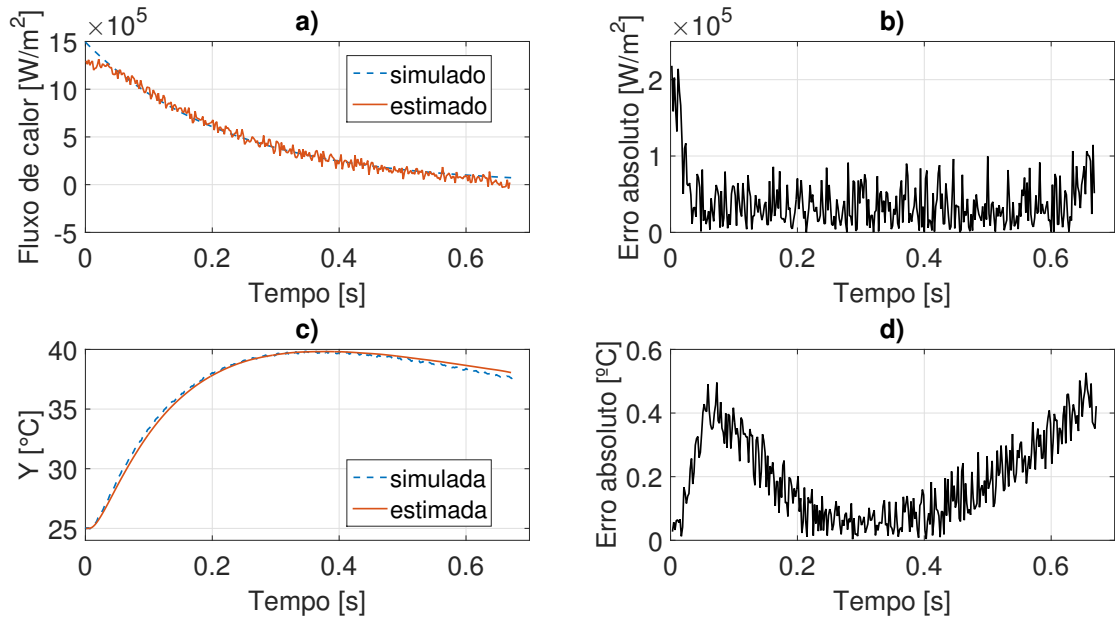


Figura 4.4: Teste 1: Estimativas para o metal duro usando temperaturas simuladas em $x=2$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.

Observa-se que como o material é um bom condutor o tempo de desvio de calor é inferior a 1s. O fluxo de calor deve então ser estimado nesse intervalo, tornando nesse caso a estimativa mais delicada. Embora uma dispersão maior tenha ocorrido na estimativa do fluxo a evolução de temperatura foi recuperada com um erro absoluto inferior a $0,53^{\circ}\text{C}$.

Como os modelos aqui tratados são unidimensionais a melhor posição para as estimativas seriam em $x=0$. Embora isto seja obvio, pois essa é a posição onde o fluxo foi imposto, a análise não perde sua generalidade, uma vez que em um problema 3D ou 2D com aquecimento parcial, pode-se posicionar um sensor nesta superfície em uma posição afastada da fonte.

4.2.2 Teste 2: Modelo X22 com fluxo de calor do tipo constante

Nesta seção serão analisadas a estimativa de fluxo de calor constante imposto em amostras de PVC e metal duro isoladas na face oposta. Analogamente ao comportamento anterior, as estimativas do fluxo constante produzem um perfil de temperatura com grande aproximação das temperaturas experimentais simuladas, como mostrado nas Fig. 4.5 - 4.7 para a amostra de PVC nas posições $x = 0, 2$ e 4 mm, respectivamente.

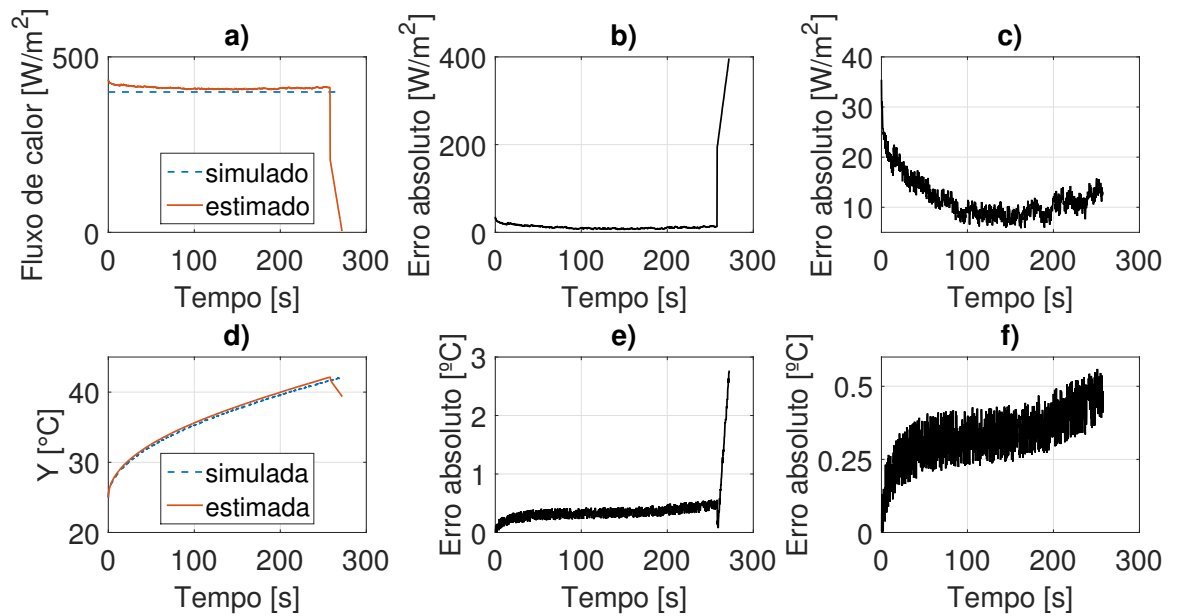


Figura 4.5: Teste 2: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=0$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado para todo o intervalo; c) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado desconsiderando as últimas estimativas; d) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; e) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada para todo intervalo; f) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada desconsiderando as últimas estimativas.

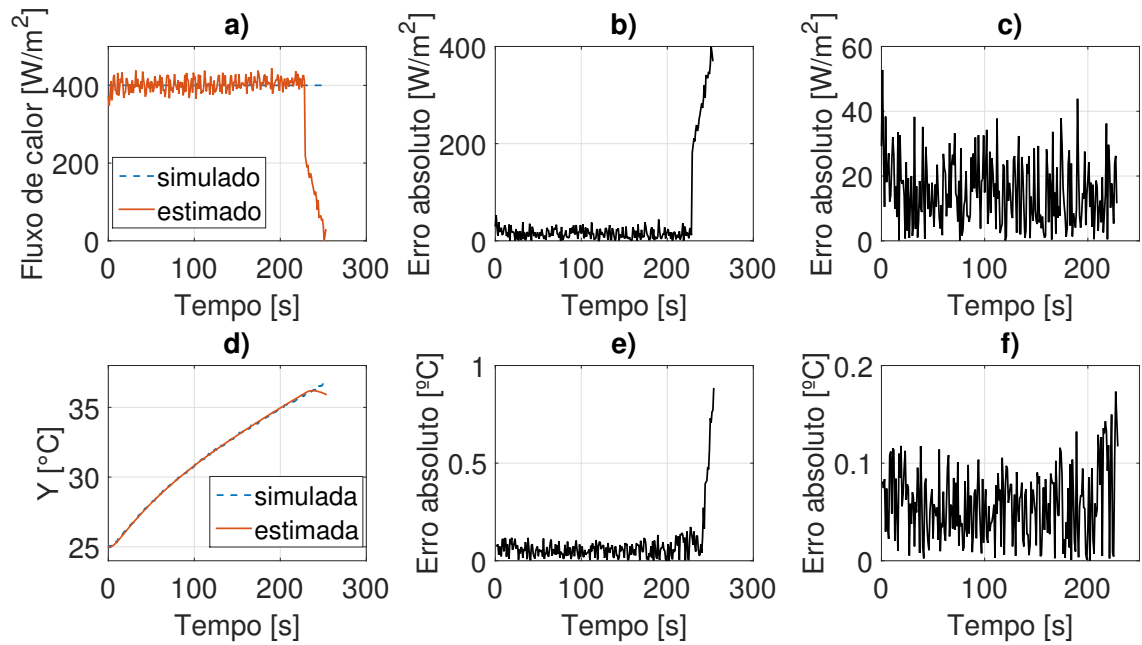


Figura 4.6: Teste 2: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=2$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado para todo o intervalo; c) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado desconsiderando as últimas estimativas; d) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; e) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada para todo intervalo; f) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada desconsiderando as últimas estimativas.

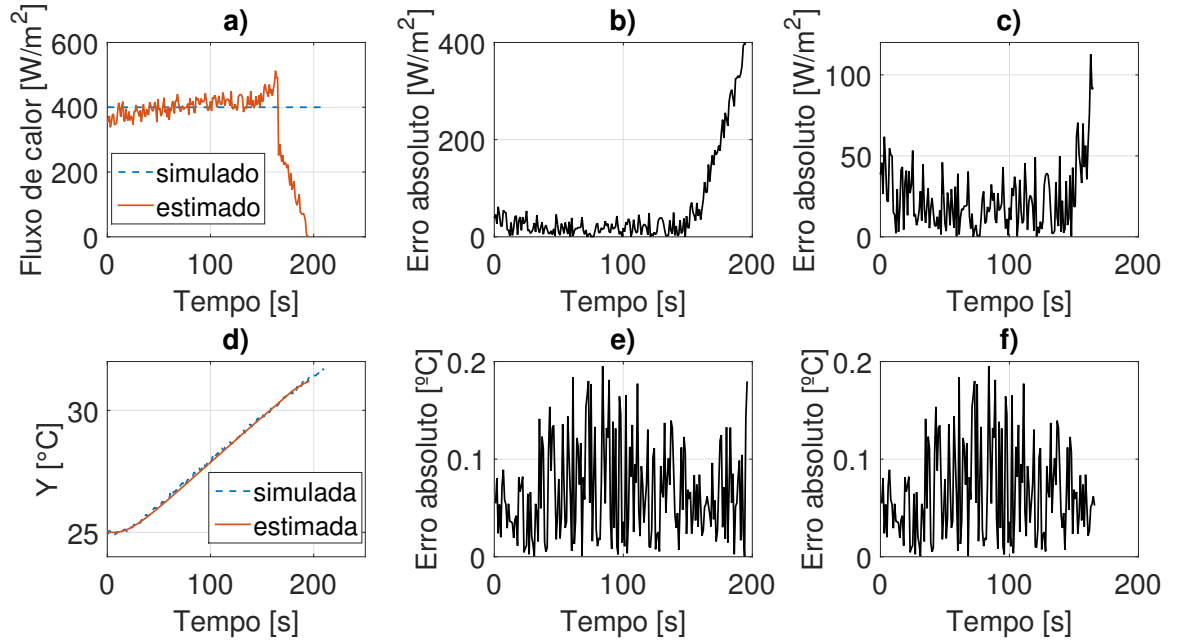


Figura 4.7: Teste 2: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=4$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado para todo o intervalo; c) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado desconsiderando as últimas estimativas; d) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; e) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada para todo intervalo; f) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada desconsiderando as últimas estimativas.

Novamente tanto o fluxo quanto a temperatura estimados foram recuperados com sucesso. Nestes casos, também ocorreram valores mais altos de erro absoluto entre o fluxo simulado e estimado, pois a parte final mostrou-se mais crítica para se realizar as estimativas usando o método escolhido para a solução do problema inverso, porém isto não prejudicou os resultados. Levando em consideração o erro absoluto entre a temperatura estimada e a experimental simulada, obteve-se um valor médio aproximadamente igual a $0,30^{\circ}\text{C}$ para $x=0$ mm, $0,08^{\circ}\text{C}$ para $x=2$ mm e $0,10^{\circ}\text{C}$ para $x=4$ mm.

Analisando as Fig. 4.5 - 4.7 - e) e f), nota-se que a posição $x=4$ mm apresenta um menor efeito na temperatura devido aos erros de estimativa no final do intervalo. Tal fato se justifica pelas características do material considerado e por esta posição estar mais afastada de onde é aplicado o fluxo de calor.

Como visto anteriormente, o problema se torna mais crítico para materiais com propriedades térmicas mais próximas das de um bom condutor, que é o caso do metal duro. A Figura 4.8 apresenta o resultado para uma amostra do material citado, na posição $x=2$ mm.

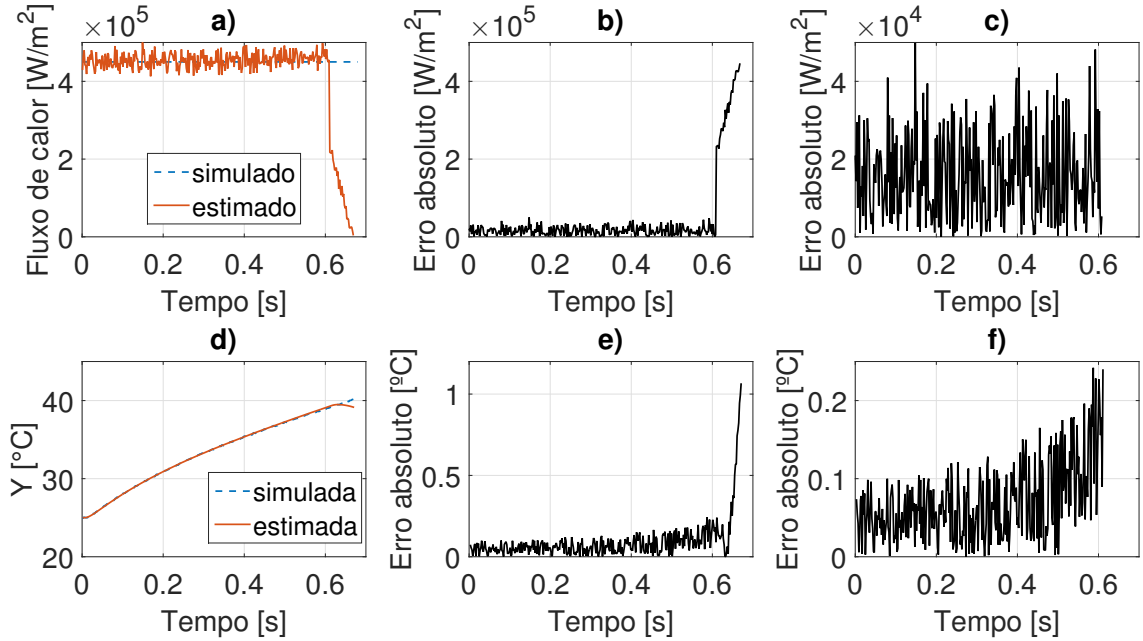


Figura 4.8: Teste 2: Estimativas para o metal duro usando temperaturas simuladas em $x=2$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado para todo o intervalo; c) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado desconsiderando as últimas estimativas; d) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; e) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada para todo intervalo; f) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada desconsiderando as últimas estimativas.

Mesmo com um intervalo de tempo muito pequeno a evolução de temperatura foi recuperada com uma dispersão média de aproximadamente $0,10^{\circ}C$.

4.2.3 Teste 3: Modelo X23 com fluxo de calor do tipo triangular

Passa-se agora para a estimativa de fluxo de calor do tipo triangular aplicado em amostras de PVC e metal duro, expostas a um meio convectivo em $x=L$. Novamente, o perfil de temperatura recuperado com o fluxo estimado pelo modelo semi-infinito se mostra bem próximo das temperaturas experimentais simuladas. Os resultados obtidos para as posições $x=0, 2$ e 4 mm na amostra de PVC são apresentados nas Fig. 4.9 - 4.11, respectivamente.

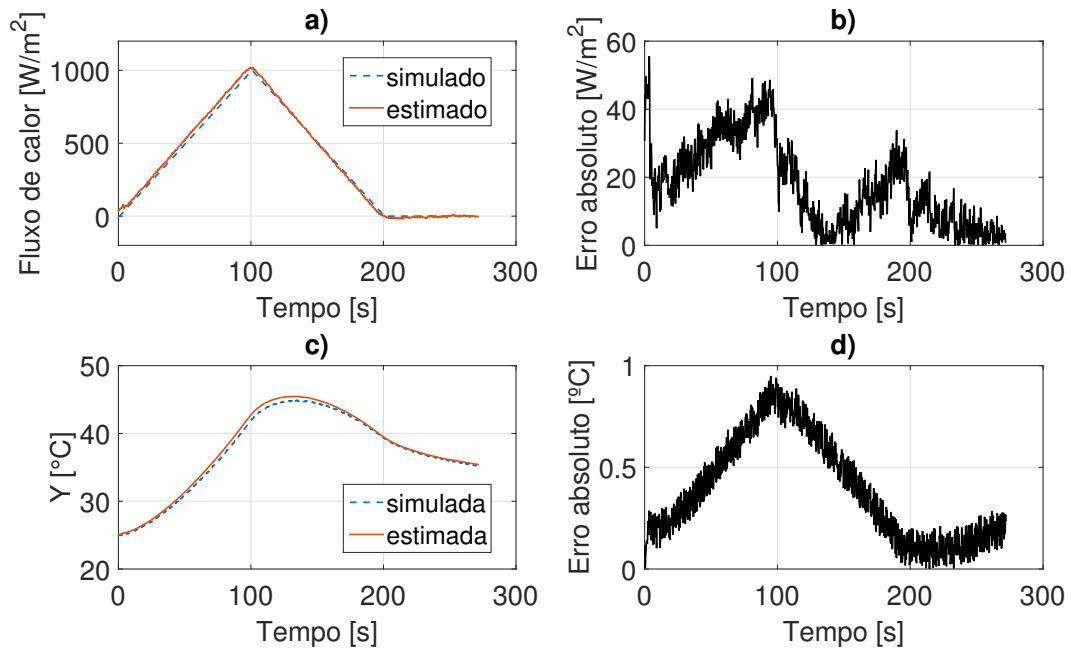


Figura 4.9: Teste 3: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=0$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.

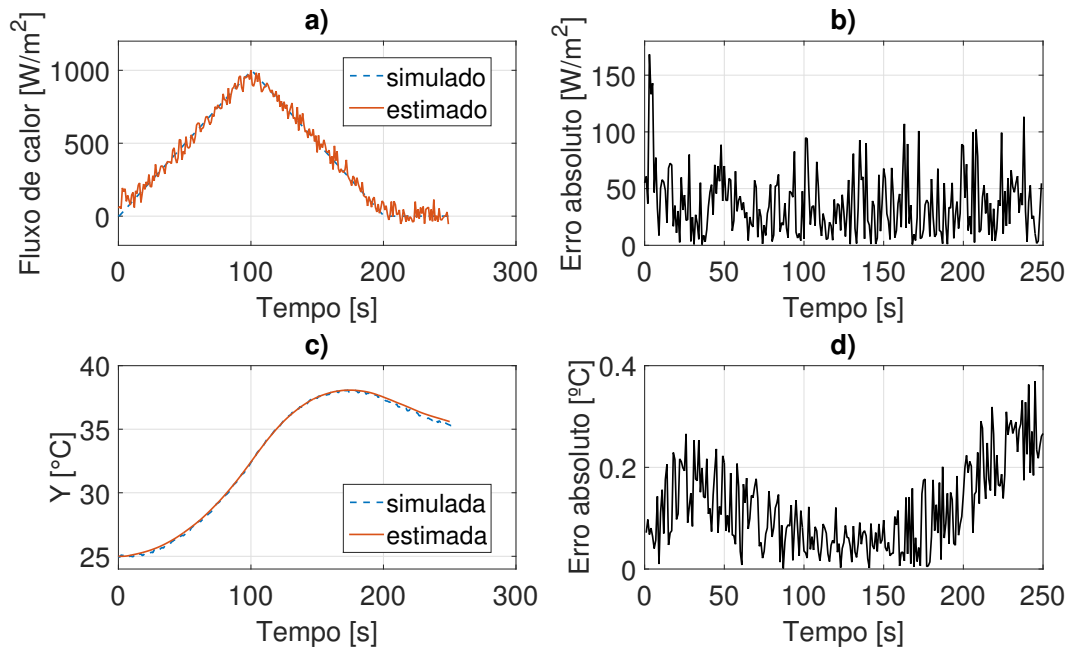


Figura 4.10: Teste 3: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=2$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.

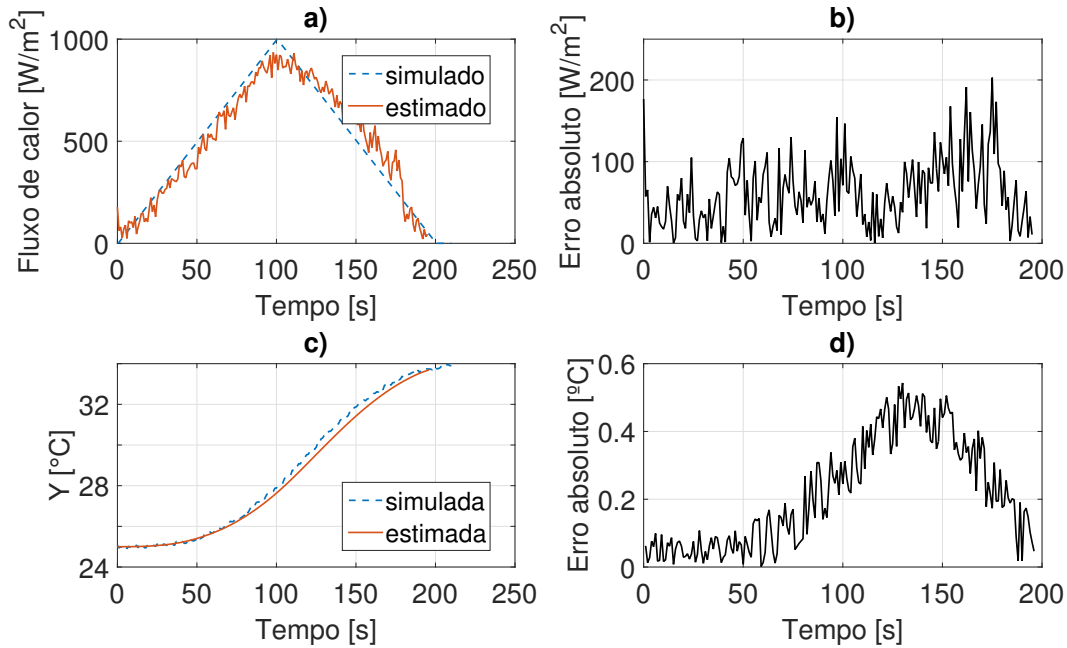


Figura 4.11: Teste 3: Estimativas para o PVC usando temperaturas simuladas em $x=4$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.

Novamente, devido à redução da sensibilidade, à medida que se afasta da posição onde é aplicado o fluxo, há um aumento da dispersão da estimativa do fluxo. Apesar disso, todas posições apresentam erros absolutos médios pequenos entre a temperatura estimada e a simulada, sendo aproximadamente iguais a $0,40^{\circ}\text{C}$ para $x=0$ mm, $0,15^{\circ}\text{C}$ para $x=2$ mm e $0,30^{\circ}\text{C}$ para $x=4$ mm. Analisando $x=0$ em relação às outras posições, ela apresenta as menores dispersões na estimativa do fluxo, mas tem a maior média da dispersão na temperatura, pois qualquer pequena variação no fluxo resulta em uma alta mudança na temperatura.

Como nas seções anteriores, a solução do problema inverso para o metal duro usando a resposta impulsiva do modelo semi-infinito é delicada, pois por ele ser um bom condutor apresenta tempos de desvio de calor muito pequenos. As estimativas e erros obtidos para $x=2$ mm são apresentados na Fig. 4.12.

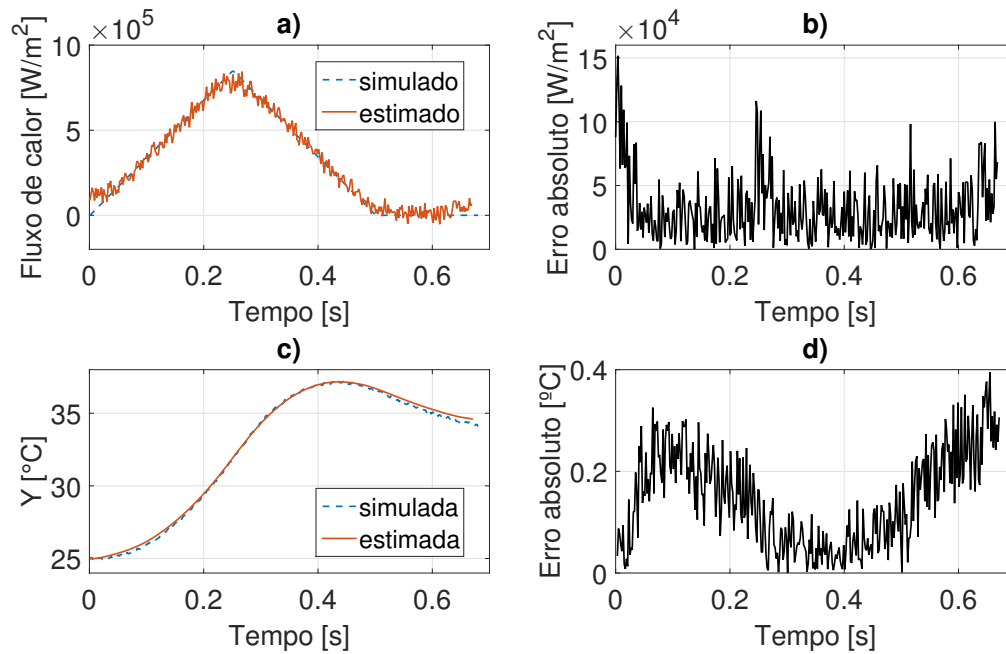


Figura 4.12: Teste 3: Estimativas para o metal duro usando temperaturas simuladas em $x=2$ mm. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.

O resultado mostrou que tanto o fluxo como a temperatura foram estimados com sucesso, apresentando um erro médio de aproximadamente $0,15^{\circ}\text{C}$.

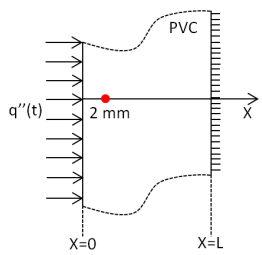
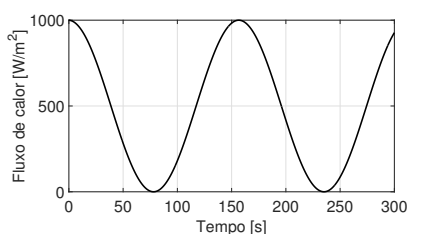
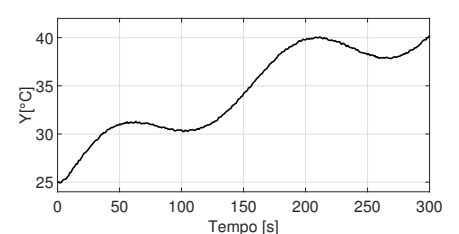
Capítulo 5

Análise de Sensibilidade para a Técnica Inversa TFBGF

Apresentam-se neste capítulo alguns procedimentos necessários para solucionar o problema inverso usando o TFBGF. São dois procedimentos: corte na resposta impulsiva e aplicação do filtro média móvel.

A análise será apresentada para o modelo *X22* com $L = 10$ mm usando PVC como material. Aplica-se, nesse caso, um fluxo de calor do tipo senoidal em $x = 0$ e a posição de simulação da temperatura em $x = 2$ mm com adição de um erro aleatório $\pm 0.1^\circ C$.

Tabela 5.1: Modelo térmico *X22* com fluxo senoidal imposto em $x = 0$ e temperatura calculada em $x = 2$ mm.

Modelo	Fluxo de calor	Temperatura simulada
		

Analogamente, o intervalo de temperatura experimental simulada usada para a solução do problema inverso é até o tempo de desvio de calor calculado com o expoente $n = 2$, mostrados na Tab. 3.5.

A Fig. 5.1 apresenta a primeira estimativa do fluxo de calor usando a técnica TFBGF, sem aplicar os procedimentos necessários.

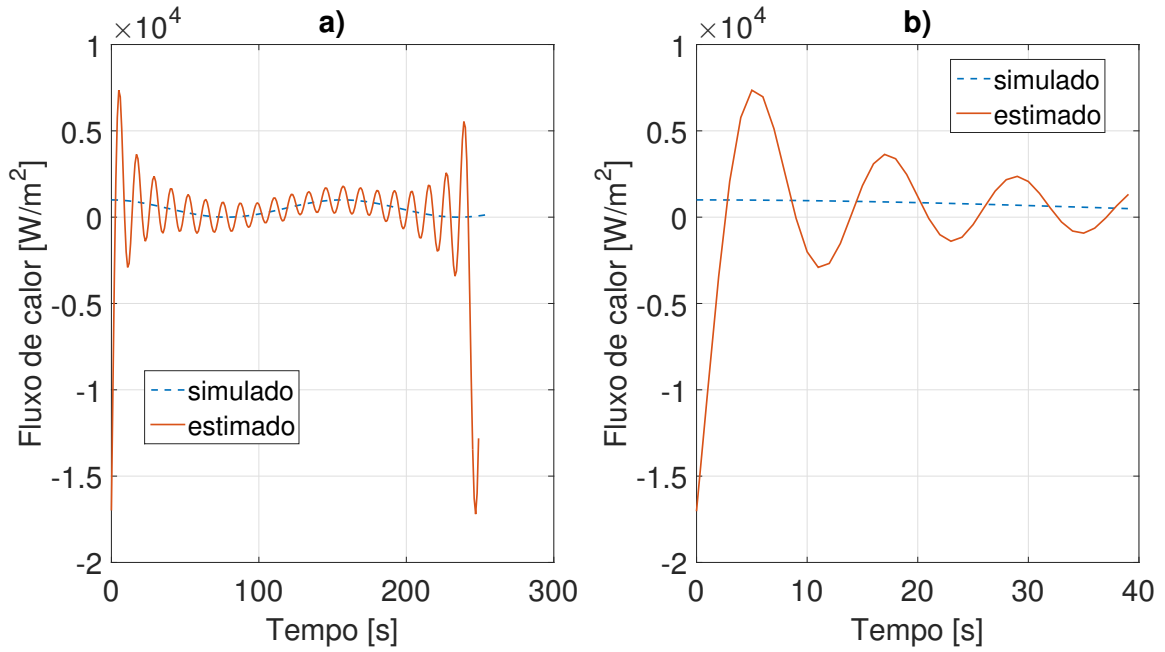


Figura 5.1: Fluxo de calor estimado para a posição $x=2$ mm sem tratamento dos dados. a) Até o tempo de desvio de calor; b) Primeiros 40 segundos.

Observa-se que as primeiras componentes estimadas são negativas (veja a Fig. 5.1-b). Este fato se deve ao tempo de penetração de calor não ter sido atingido, ou seja, para tempos inferiores a t_{pen} não há qualquer influência do fluxo de calor naquela posição. Assim, conseqüentemente, qualquer fluxo estimado neste intervalo de tempo não terá nenhum sentido físico.

Nesse sentido, o procedimento proposto é o de efetuar um corte na função transferência, usando as temperaturas simuladas somente a partir do tempo de penetração. Portanto, para $x=2$ mm as temperaturas serão consideradas a partir de $t > 3,3134s$, como mostrado na Tab. 3.3.

A Figura 5.2 apresenta a estimativa do fluxo de calor (a), a temperatura estimada comparada com a experimental simulada (b) e o erro absoluto entre as temperaturas (c), com o corte na resposta impulsiva em $t = 4s$.

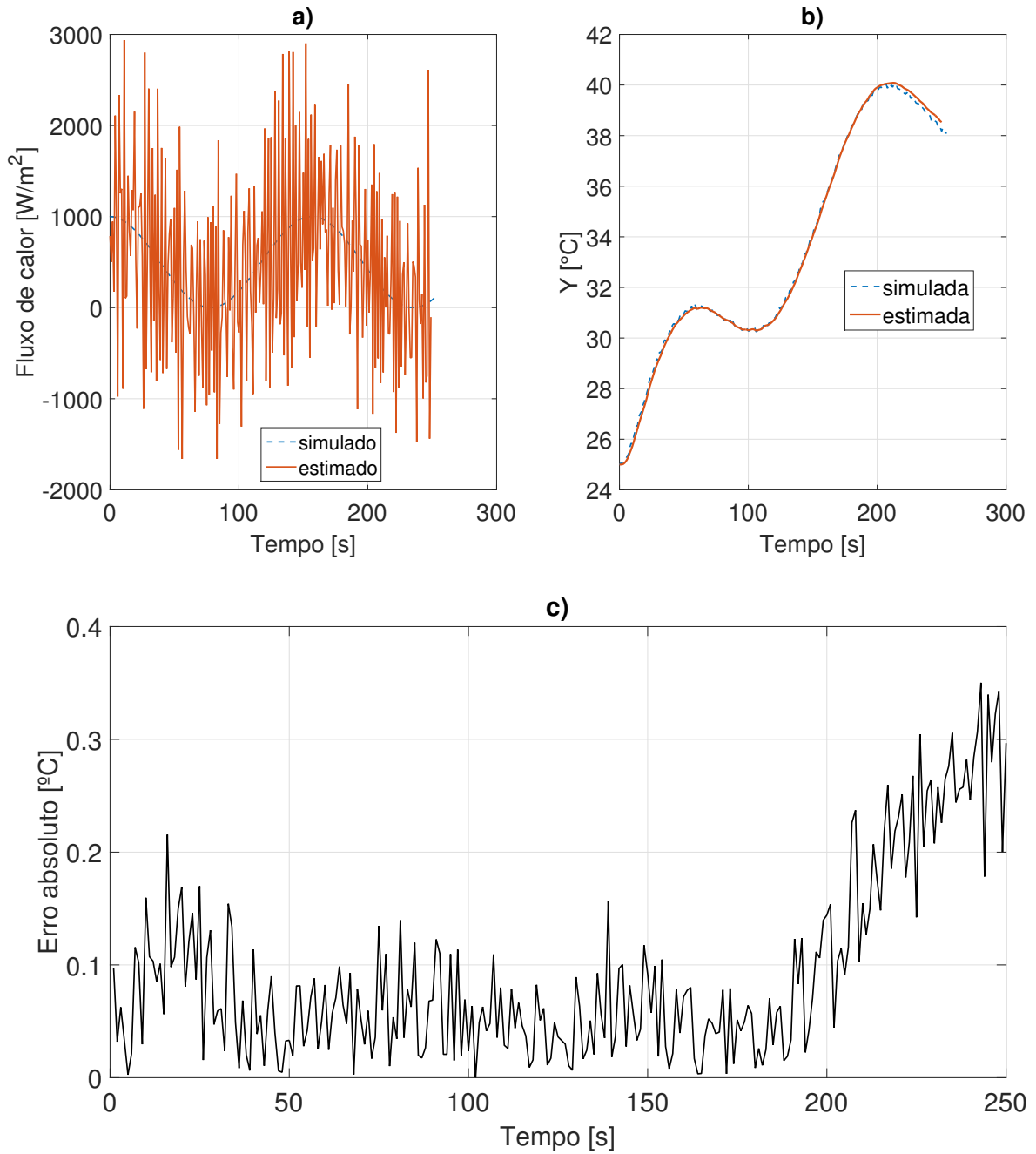


Figura 5.2: Modelo *X22* com sensor na posição $x=2$ mm e corte em 4 segundos na resposta impulsiva. a) Estimativa do fluxo de calor; b) Comparação entre a temperatura estimada e a experimental simulada; c) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.

Embora seja observada presença de ruído aleatório no fluxo estimado, as temperaturas simulada e estimada se ajustam quase que perfeitamente ($\Delta T_{medio} \approx 0,10^\circ\text{C}$).

A presença do ruído aleatório no fluxo estimado, pode ser retirada aplicando-se ao fluxo

um filtro média móvel (SMITH, 1998). Este filtro, de fácil uso, tem como parâmetro único a ser escolhido, o número de pontos (N) a ser utilizado nas médias. A Figura 5.3 apresenta o fluxo de calor estimado à partir da aplicação de $N=10$ no filtro.

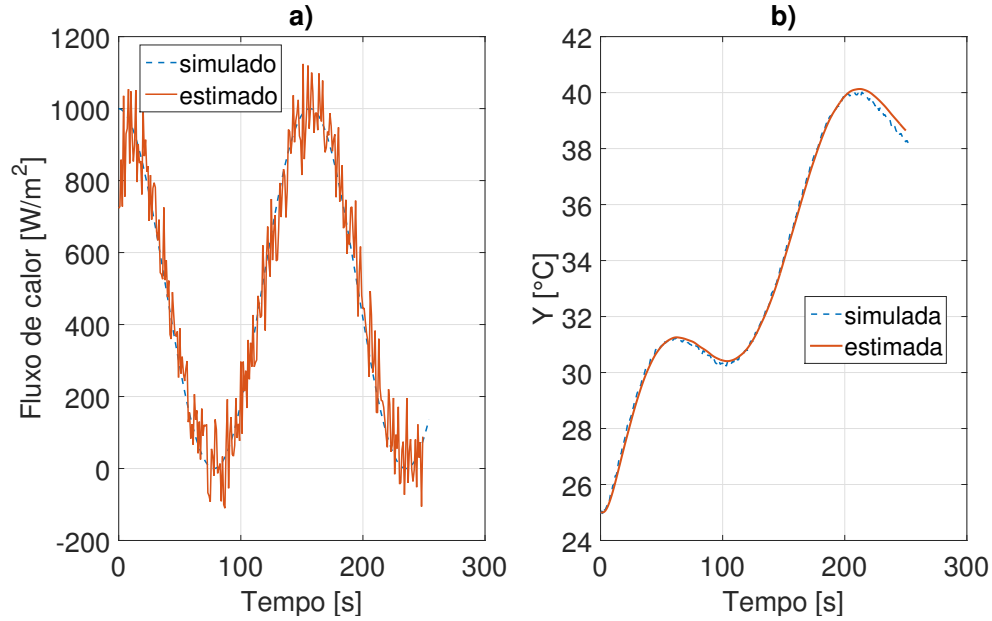


Figura 5.3: Modelo $X22$ com sensor na posição $x=2$ mm, corte em 4 segundos na resposta impulsiva e $N=10$ para o filtro. a) Estimativa do fluxo de calor; b) Comparação entre a temperatura estimada e a experimental simulada.

A Figura 5.3 mostra que após a aplicação do filtro as temperaturas continuaram se ajustando quase que perfeitamente e que agora já se começa a estimar o comportamento e magnitude do fluxo simulado.

Como qualquer filtro, sua aplicação tende a alisar os dados filtrados, porém podem implicar no prejuízo do cálculo da temperatura. A Figura 5.4 apresenta resultados de estimativas para alguns valores de N e suas implicações na estimativa da temperatura.

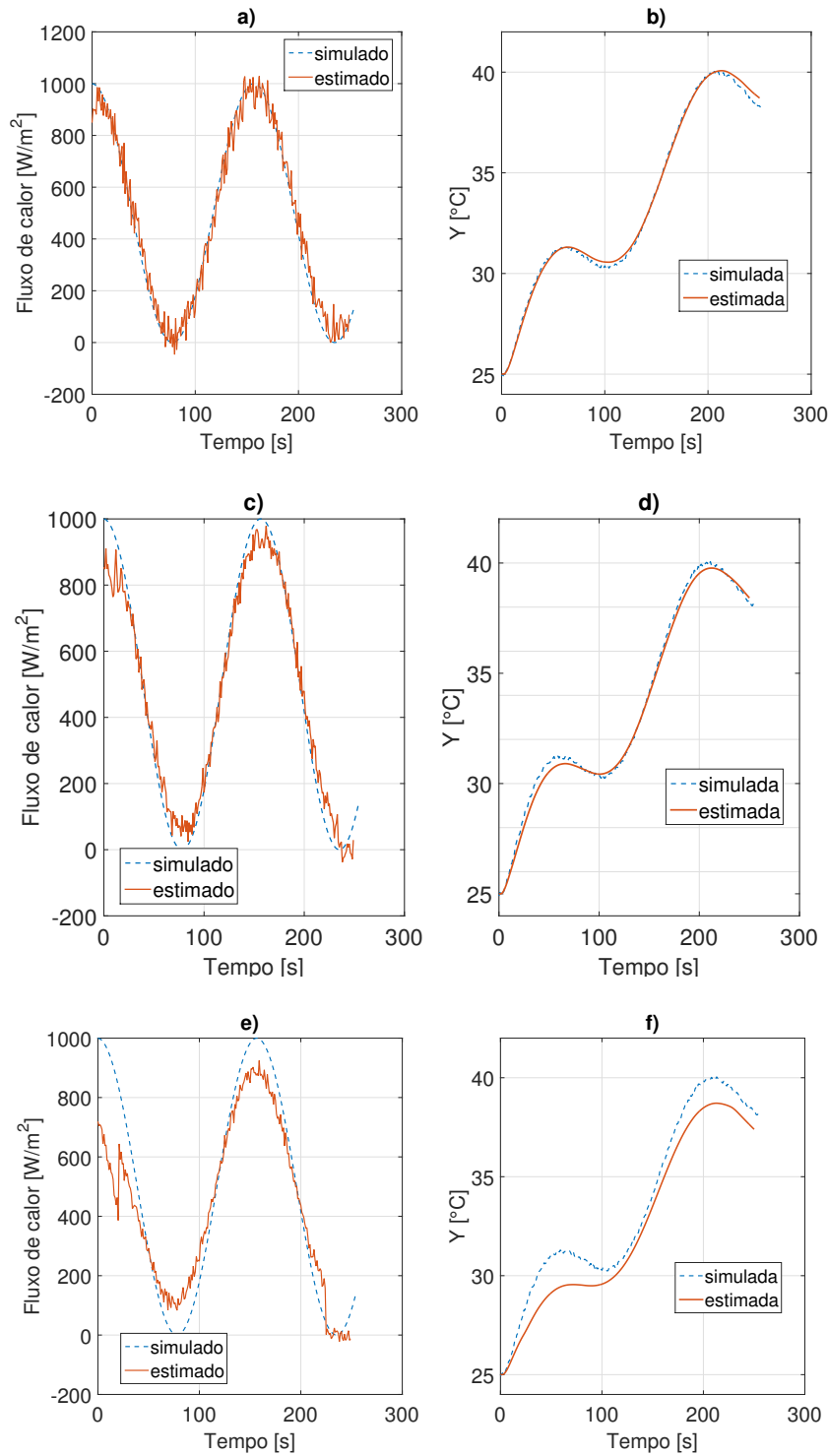


Figura 5.4: Modelo $X22$ com sensor na posição $x=2$ mm, corte em 4 segundos na resposta impulsiva e alguns valores de n para o filtro. a) e b) $N=20$; c) e d) $N=30$; e) e f) $N=50$.

Observa-se na Fig. 5.4 que existe um número ideal de pontos a ser utilizado na média mó-

vel. Uma quantidade de pontos acima desse valor prejudica (neste caso por exemplo: $N=30$ e 50) o resultado da temperatura estimada e valores menores não alisam o fluxo de calor de forma eficiente (como exemplo: $N=20$). Para este caso o número ideal encontrado foi $N=23$, o qual resultou em um erro absoluto médio entre as temperaturas igual a aproximadamente $0,12^{\circ}\text{C}$, como mostrado na Fig. 5.5.

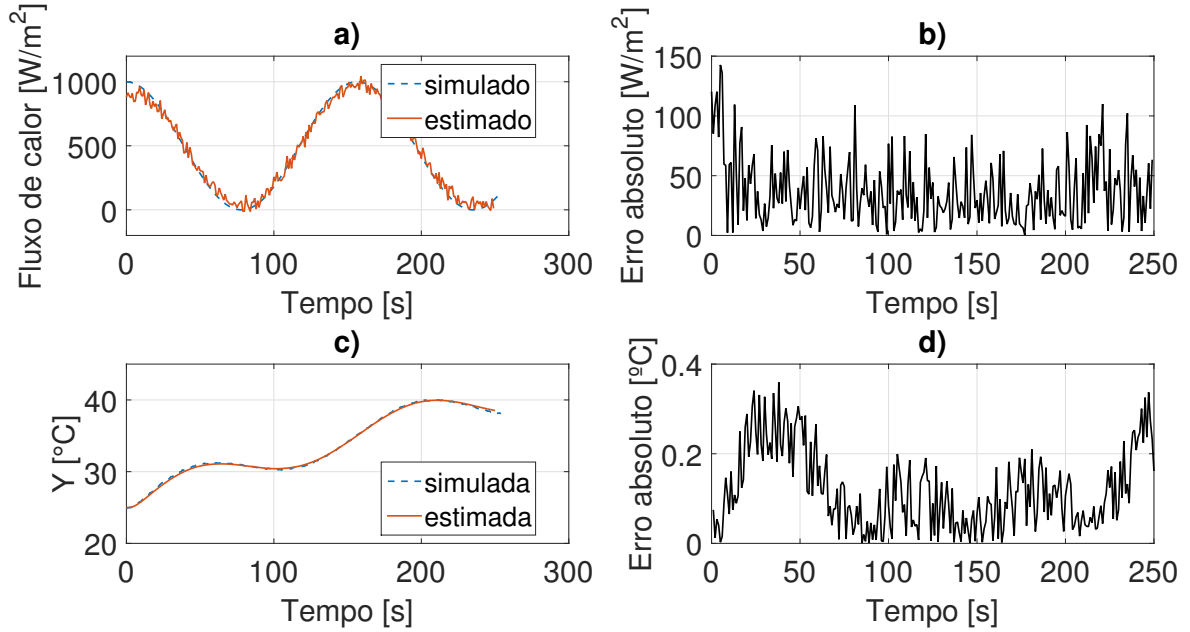


Figura 5.5: Fluxo de calor estimado para a posição $x=2$ mm, tempo de corte em $t=4$ s e 23 pontos para o filtro média móvel. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e a estimada.

A Figura 5.6 apresenta os resultados para $x=0$ em uma amostra de PVC. Observa-se que nesse caso o tempo de penetração de calor é nulo e não é necessário fazer nenhum corte na resposta impulsiva, assim nesta posição deve-se aplicar apenas a média móvel para filtrar o ruído. O fluxo obtido para esta posição usando 24 pontos na média móvel e um $dt=1$ segundo é mostrado na Fig. 5.6.

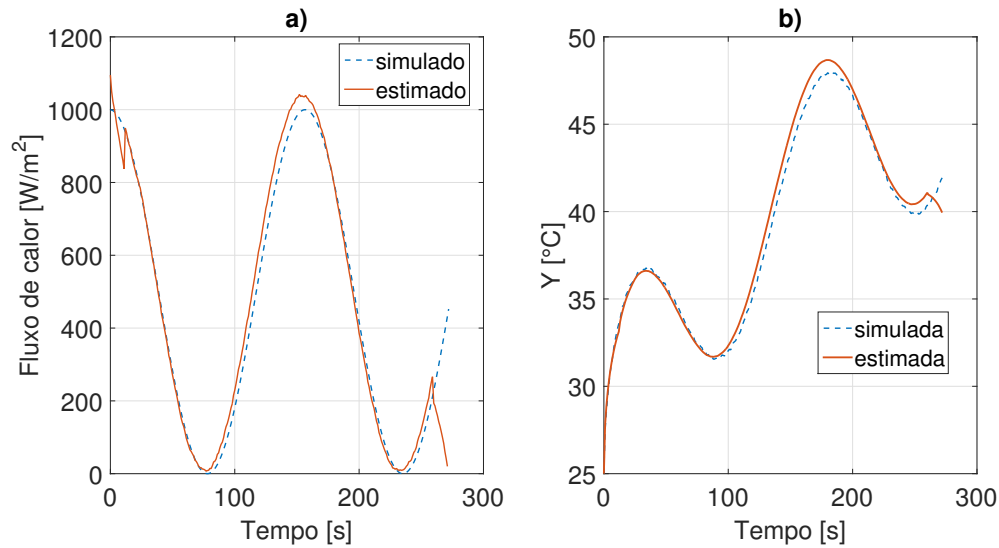


Figura 5.6: Fluxo de calor estimado para a posição $x=0$ mm com 24 pontos para média móvel com um $dt=1$ s. a) Estimativa do fluxo de calor; b) Comparação entre a temperatura estimada e a experimental simulada.

Observa-se que nesta posição qualquer erro no cálculo do fluxo resulta em uma diferença considerável na estimativa da temperatura. Nesse sentido, uma melhora na estimativa do fluxo pode ser obtida refinando a discretização temporal, como mostra a Fig. 5.7.

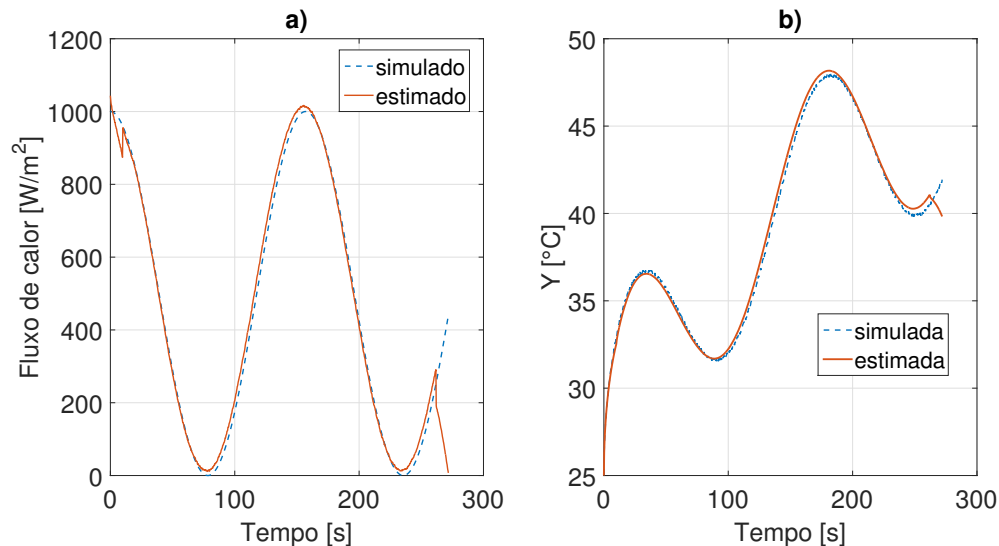


Figura 5.7: Fluxo de calor estimado para a posição $x=0$ mm e 80 pontos para média móvel com um $dt=0,25$ s. a) Estimativa do fluxo de calor; b) Comparação entre a temperatura estimada e a experimental simulada.

Observa-se que os procedimentos apresentados não são decorrentes do uso da resposta

impulsiva do modelo semi-infinito. Esta mesma análise deve ser aplicada independente do modelo, já que ela é uma característica da técnica inversa.

Assim considerando a resposta impulsiva do modelo *X22* o fluxo de calor e a consequente temperatura foram estimados usando-se os mesmos tempo de penetração e número de pontos na média móvel, os resultados obtidos são apresentados na Fig. 5.8.

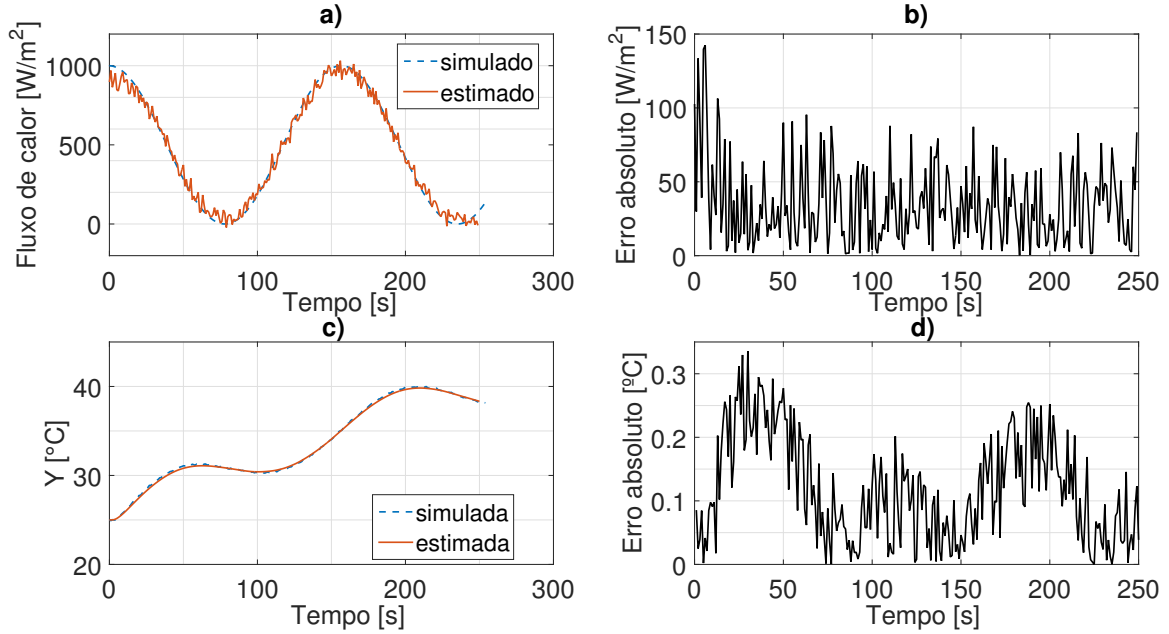


Figura 5.8: Fluxo de calor estimado para a posição $x=2$ mm, tempo de corte em $t=4$ s e 23 pontos para média móvel usando a resposta impulsiva do modelo *X22*. a) Comparação entre o fluxo de calor estimado e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor estimado e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura simulada e a experimental estimada.

O erro absoluto médio entre as temperaturas é aproximadamente igual a $0,10^{\circ}C$.

A Figura 5.9 uma comparação entre os fluxos estimados pelos modelo *X22* e *X20*, numa amostra de PVC na posição $x=2$ mm e os erros absolutos de cada fluxo e de cada temperatura estimada em relação aos simulados.

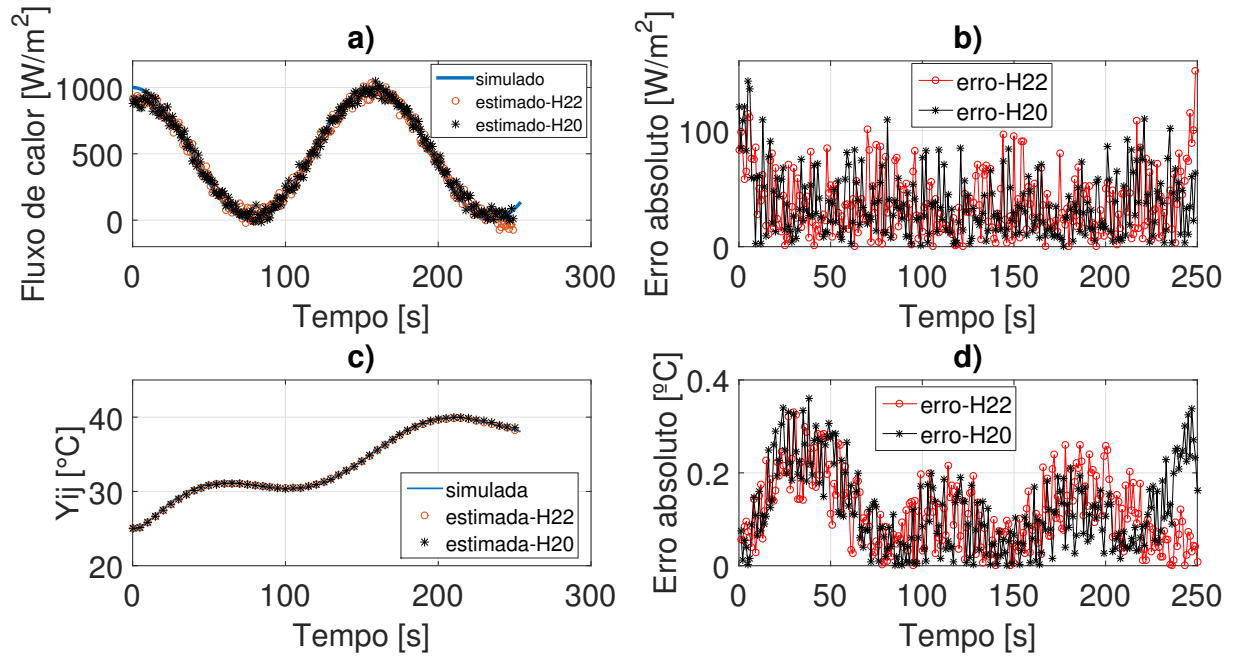


Figura 5.9: Comparativo das estimativas realizadas com a resposta *HX22* e *HX20*, realizando em ambas os mesmos procedimentos. a) Comparação entre os fluxos de calor estimados e o simulado; b) Erro absoluto entre o fluxos de calor estimados e o simulado; c) Comparação entre a temperatura experimental simulada e as estimadas; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental simulada e as estimadas.

Observa-se que em geral as estimativas são muito próximas uma da outra, mas a realizada com o *X22* tem um comportamento ligeiramente melhor quando se aproxima do tempo de desvio de calor, que pode ser mais facilmente visualizado na Fig. 5.9-d. Tal comportamento era esperado, pois o modelo semi-infinito já começa a apresentar uma certa divergência do finito.

Capítulo 6

Problema Inverso: Aplicação em um Teste Experimental

Na Figura 6.1 apresenta-se, esquematicamente, o aparato experimental usado para a estimativa do fluxo de calor imposto na amostra de PVC. Esse aparato é projetado para a obtenção das condições de contorno necessárias ao desenvolvimento do modelo térmico 3D e aplicação da proposta de modelo reduzido.

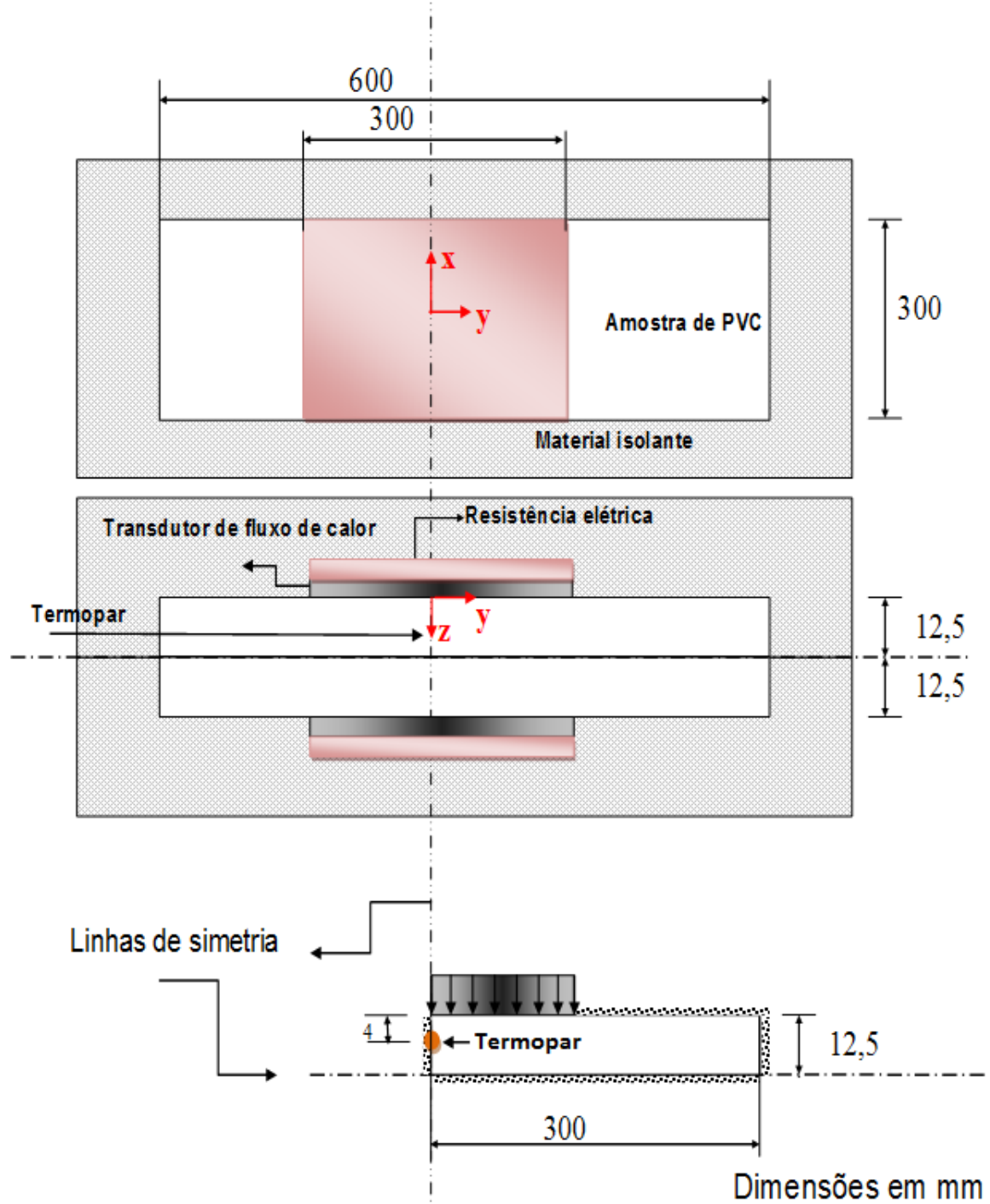


Figura 6.1: Representação esquemática do aparato experimental.

O método envolve a aplicação de um fluxo de calor transiente e uniforme a um tempo inicial, $t = 0$, na superfície superior da amostra, $z = 0$, inicialmente a uma temperatura constante, T_0 . O fluxo de calor aplicado em parte da superfície frontal da amostra é gerado

por um aquecedor resistivo e é medido por um transdutor de fluxo de calor acoplado a esse aquecedor. A temperatura é medida por um termopar do tipo K.

Observa-se que a condição de isolamento térmico presente no modelo teórico deve ser garantida no aparato experimental. Isso significa que a condição de isolamento na superfície remanescente precisa de ser atingida para o sucesso da técnica de estimativa. Uma forma eficiente para obtenção da condição de isolamento na direção vertical (mais delicada) é o uso de uma montagem simétrica, como mostrado na Fig. 6.1. O efeito de isolamento nas superfícies laterais é atingida, colocando-se um material isolante, como a espuma de poliestireno expandido. Assim, duas amostras de PVC são usadas na montagem simétrica, ambas com uma espessura de 25 mm e dimensões laterais de 300x300 mm. As amostras inicialmente em equilíbrio térmico em, T_0 , são submetidas a fluxos de calor uniformes e com mesma intensidade. Os fluxos são fornecidos por dois aquecedores de resistência elétrica 18 Ω , cobertos com borracha de silicone, com dimensões laterais de 300x300 mm e espessura de 1 mm. Os fluxos são adquiridos por transdutores com dimensões laterais de 50x50 mm, espessura de 1 mm, e constante de tempo inferior a 10 ms. Os transdutores são baseados na concepção de termopilhas superficiais (feito por deposição electrolítica) em uma folha condutora fina. As temperaturas são medidas usando termopares de superfície (tipo K). Os sinais de fluxo de calor e as temperaturas são adquiridas por um sistema de aquisição de dados Agilent 34972A controlado por um computador pessoal.

Apresentam-se na Fig. 6.2 duas vistas do aparato experimental.

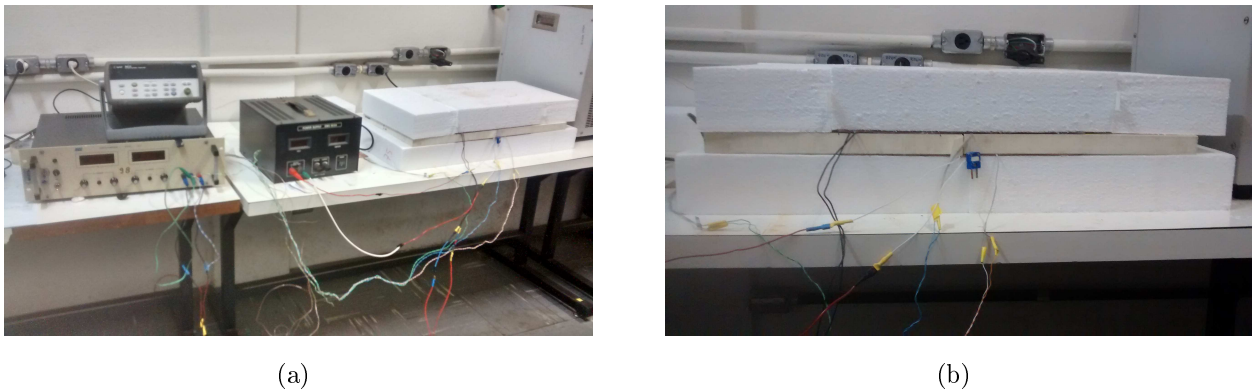


Figura 6.2: Aparato experimental: a) Bancada; b) Vista frontal.

Foram realizadas 5 experimentos independentes onde as temperaturas e o fluxo de calor foram adquiridos em intervalos de tempo de 1 s. A duração do tempo de aquecimento, T_h , foi de aproximadamente 600 s.

A Fig. 6.3 mostra a evolução dos sinais de temperatura, na posição $x=100$ mm, $y=0$ e

$z = 4$ mm, do fluxo de calor imposto medido pelo transdutor.

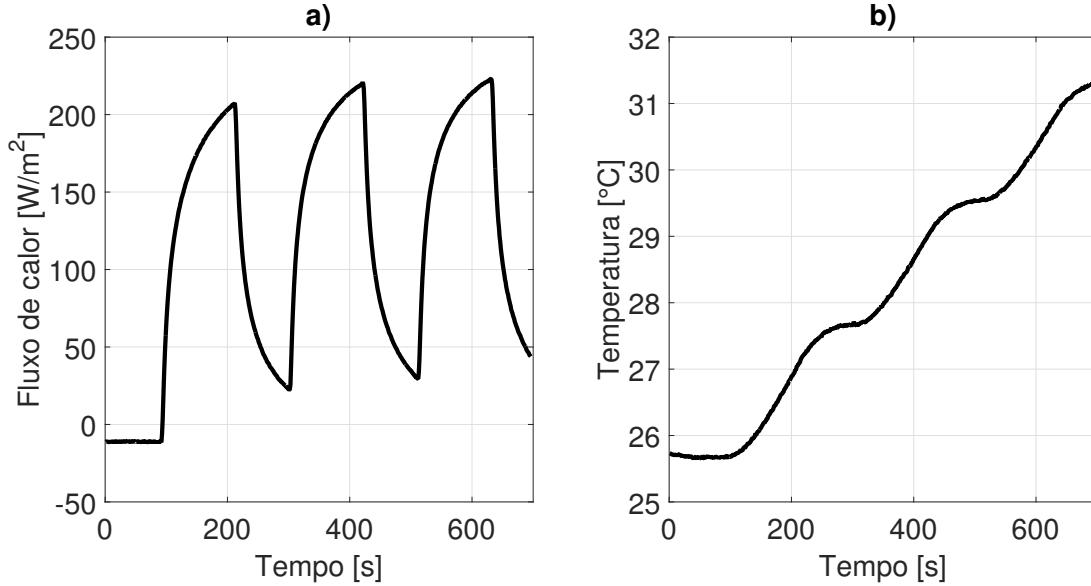


Figura 6.3: Dados experimentais. a) Fluxo de calor; b) Temperatura.

Como apresentado anteriormente, a evolução da temperatura na posição do termopar será tratada como a evolução de temperatura em um modelo unidimensional semi-infinito (direção Z). Para isso, calculou-se os tempos de penetração e desvio de calor, considerando o expoente $n=2$. O tempo de penetração de calor foi calculado através da Eq.(3.24), considerando o tempo adimensional de penetração de calor (t_{pen}^+) igual a 0,0970, pois este valor é válido para $n=2$ e qualquer posição. Obteve-se $t_{pen} \approx 13$ s. Já para se calcular o tempo de desvio de calor deve-se realizar uma interpolação linear usando os valores da Tab. 3.6 para $z^* = 0.32$ e assim obteve $t_{desv}^+ = 0,0953$. Posteriormente, aplicou-se a Eq.(3.26) e chegou-se a $t_{desv} \approx 359$ s. Vale ressaltar que estes tempos são marcados tomando como tempo inicial o momento em que se inicia o aquecimento.

Os dados de temperatura medidos só podem ser usados no modelo semi-infinito até $t = 359$ s, correspondente ao tempo de desvio. Ainda, a função transferência deve ser truncada para tempos inferiores a $t = 23$ s.

A Fig. 6.4 apresenta a evolução de temperatura para a posição $z=4$ mm, do momento em que se inicia o aquecimento até o tempo de desvio de calor. Observa-se que este tempo é suficiente para a estimativa do fluxo periódico imposto na superfície. Vale ressaltar que fez-se a transformação dos dados coletados para θ .

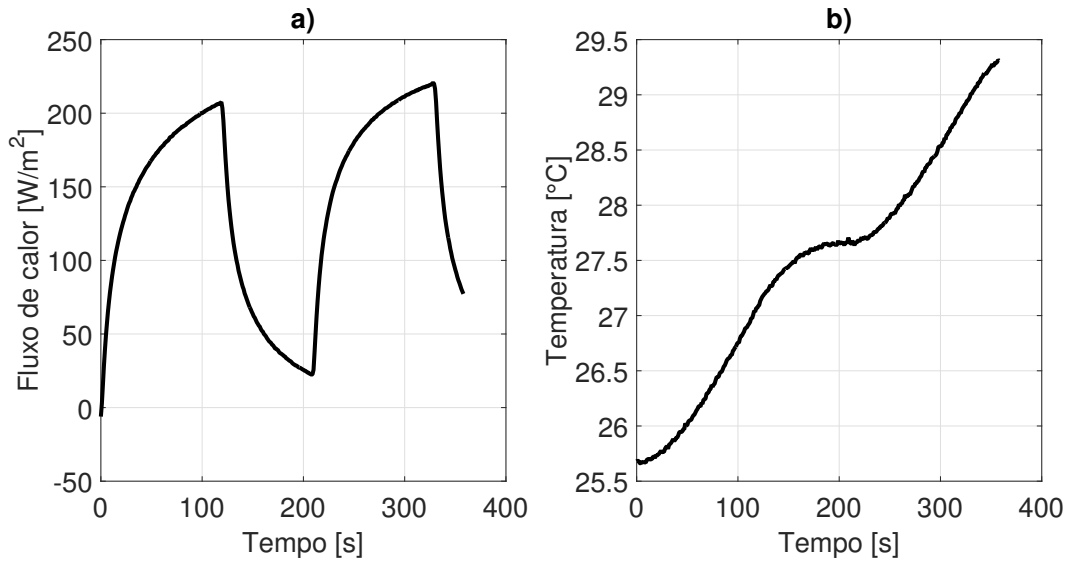


Figura 6.4: Dados experimentais, após o início do aquecimento, que serão usado para a solução do problema inverso considerando o modelo semi-infinito unidimensional. a) Fluxo de calor; b) Temperatura.

A Fig. 6.5 apresenta o fluxo estimado aplicando uma média móvel com 20 pontos.

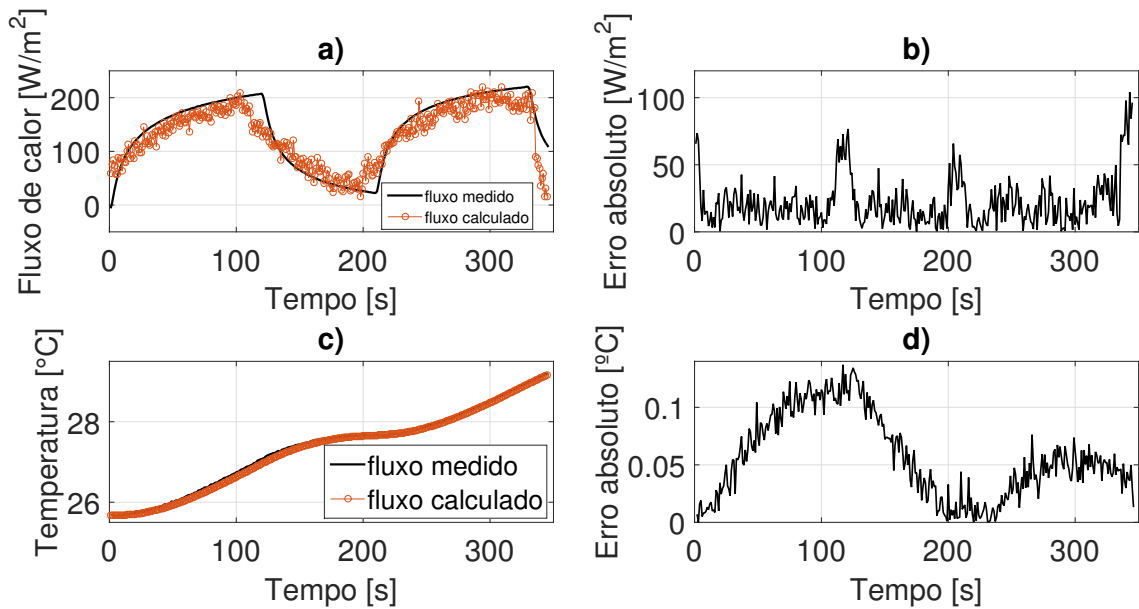


Figura 6.5: Estimativa do fluxo à partir das temperaturas experimentais, usando a resposta impulsiva do semi-infinito. a) Comparação entre o fluxo de calor medido e o estimado; b) Erro absoluto entre o fluxo de calor medido e o estimado; c) Comparação entre as temperatura experimental e a estimada; d) Erro absoluto entre a temperatura experimental e a estimada.

Nota-se que o resultado obtido apresenta um erro absoluto médio em relação ao fluxo medido de aproximadamente 20 W/m^2 , sendo esta média que justifica o baixo erro absoluto observado entre a temperatura medida e a estimada, o qual tem valor máximo de $0,14^\circ\text{C}$.

A Fig. 6.6 compara os resultados da estimativa para o fluxo de calor com a obtida usando o modelo 3D, realizada por Fernandes *et al.* (2015).

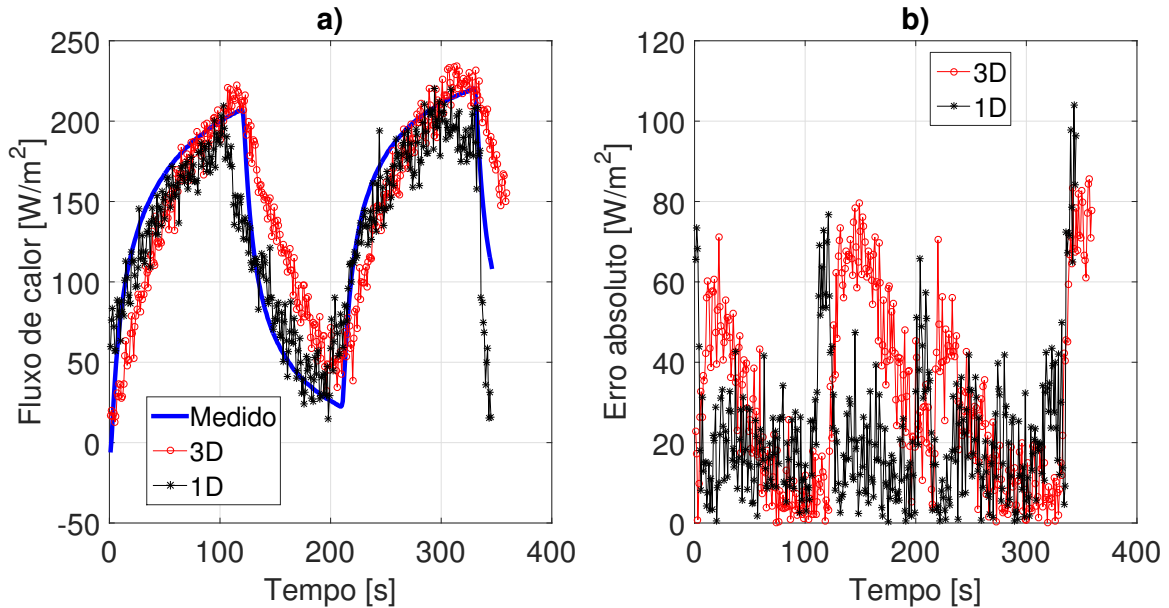


Figura 6.6: Comparativo entre os fluxos estimados pelo modelo 3D e 1D. a) Fluxos estimados e medido; b) Erro absoluto entre os fluxos estimados e medido.

Os resultados obtidos com os modelos 3D e 1D se mostraram bem próximos entre si e também do que foi medido através dos transdutores. Assim, nota-se que este problema térmico, originalmente com características 3D, pôde ser reduzido a um modelo semi-infinito sob determinadas condições e ser usado para a estimativa do fluxo de calor imposto sem perder precisão nos resultados.

Capítulo 7

Conclusão

O presente trabalho abordou o desenvolvimento de técnicas que possibilitam a redução de modelos térmicos para posterior solução de problemas inversos.

A motivação do estudo se deve à grande maioria dos problemas práticos serem tridimensionais transientes e portanto bastante complexas.

A técnica proposta baseou-se nos conceitos dos tempos de penetração e desvio de calor. O objetivo é a estimativa de variados tipos de fluxo de calor a partir de modelos térmicos unidimensionais. Inicialmente observou-se que estes tempos não são influenciados nem pelo tipo de fluxo de calor nem pelo tipo de condição de contorno imposta na face oposta ao fluxo. Além disso, a adimensionalização destes tempos e da posição onde eles são calculados tornou o procedimento mais generalista e eficiente em aplicações práticas, pois estes valem para qualquer posição e material, dependendo apenas do expoente n .

Com o conhecimento e domínio destes tempos fez-se a simplificação de modelos unidimensionais finitos em semi-infinitos para a solução de problemas inversos. Para isto, considerou-se temperaturas experimentais simuladas até o tempo de desvio de calor. Aplicando o método TFBGF, estimou-se com sucesso diversos tipos de fluxo de calor impostos a alguns modelos térmicos. As grandes vantagens do semi-infinito frente ao finito são uma solução computacional livre de somatórios, independência da geometria e não necessidade de conhecimento de características da condição de contorno oposta ao fluxo de calor.

As técnicas desenvolvidas mostraram-se eficientes inclusive em um experimento, no qual um modelo 3D foi simplificado em um 1D, obtendo-se uma ótima estimativa para o fluxo de calor e consequentemente no cálculo da temperatura.

Esse trabalho apresenta com sucesso um procedimento para a simplificação de modelos térmicos e sua aplicação em problemas inversos. Ou seja, estimou-se assim, o fluxo de calor imposto em diversas condições físicas complexas (modelos finitos) usando-se um modelo tér-

mico simplificado (modelo semi-infinito).

Propostas de trabalhos futuros

- Obtenção dos tempos de penetração e desvio de calor para modelos 2D e 3D.
- Aplicação da técnica de redução de modelos em problemas práticos tridimensionais, como processos de fabricação.

Referências Bibliográficas

ALOYSIO, G. D.; D’ALESSANDRO, G.; MONTE, F. de. An analytical solution for the hyperbolic unsteady thermal behaviour of micro-thermoelectric coolers with a suddenly time-dependent heat generation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 95, p. 972–983, 2016.

BECK, J. V. Criteria for comparison of methods of solution of the inverse heat conduction problem. *Nuclear Engineering and Design*, n. 5, p. 11 – 22, 1979.

BECK, J. V.; BLACKWELL, B.; CLAIR, C. *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. [S.l.]: John Wiley & Sons Incorporated, 1985. (A Wiley-Interscience Publication). ISBN 9780471083191.

BORGES, V. L. *Desenvolvimento do método de aquecimento plano parcial para determinação simultânea de propriedades térmicas sem o uso de transdutores de fluxo de calor*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2008.

BRITO, R. F. *et al.* Análise térmica em ferramenta de metal duro revestida. *V Congresso Brasileiro de Engenharia de fabricação*, 2009.

CARVALHO, S. R. *et al.* Determinação da temperatura na interface cavaco-peça-ferramenta durante o processo de torneamento usando a técnica do simulated annealing. *Revista Ciência e Engenharia*, Edição Especial COBEF2003, p. 41–47, 2003.

CARVALHO, S. R. *et al.* Temperature determination at the chip–interface using an inverse thermal model considering the tool and tool holder. *Journal of Materials Processing Technology*, v. 179, p. 97–104, 2006.

COLE, K. D. *et al.* *Heat Conduction Using Green’s Functions*. 2nd edition. ed. Whashington: Taylor & Francis, 2010.

COLE, K. D. *et al.* Intrinsic verification and a heat conduction database. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, v. 78, p. 36–47, 2014.

ENGQVIST, H. *et al.* Tribofilm formation on cemented carbides in dry sliding conformal contact. *Wear*, v. 239, p. 219–228, 2000.

FERNANDES, A. P. *Funções de Transferência Analítica Aplicada à Solução de Problemas Inversos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2013.

- FERNANDES, A. P. *et al.* Análise de sensibilidade, resposta impulsiva, tempo de penetração e desvio de calor em problema inverso de condução de calor. *Anais do CILAMCE - Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, v. 1, p. 1–20, 2015.
- FERNANDES, A. P.; SANTOS, M. B. dos; GUIMARAES, G. An analytical transfer function method to solve inverse heat conduction problems. *Applied Mathematical Modelling*, v. 39, p. 6897–6914, 2015.
- FERNANDES, A. P. *et al.* Use of 3d-transient analytical solution based on green's function to reduce computational time in inverse heat conduction problems. v. 34, p. 4040–4049, 2010.
- HU, G. *et al.* New fourier-series-based analytical solution to the conduction–convection equation to calculate soil temperature, determine soil thermal properties, or estimate water flux. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 95, p. 815–823, 2016.
- HUANG, C. H. *et al.* A three-dimensional inverse problem in estimating the applied heat flux of a titanium drilling – theoretical and experimental studies. *Int. J. Heat Mass Transf.*, v. 50, p. 3265–3332, 2007.
- HUANG, C. H.; WANG, S. P. A three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 42, p. 3387–3403, 1999.
- KUSIAK, A.; BATTAGLIA, J.; MARCHAL, R. Influence of crn coating in wood machining from heat flux estimation in the tool. *Int. J. Thermal Sci.*, v. 44, p. 289–301, 2005.
- LIANG, L.; QUAN, Y.; KE, Z. Investigation of tool-chip interface temperature in dry turning assisted by heat pipe cooling. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, v. 54, p. 35–43, 2011.
- LIMA, G. M.; SILVA, S. L. e. Thermal effusivity estimation of polymers in time domain. *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. and Eng.*, v. XXXIII, p. 393–399, 2011.
- LIN, S.-M. A sequential algorithm and error sensitivity analysis for the inverse heat conduction problems with multiple heat sources. *Applied Mathematical Modelling*, v. 35, n. 6, p. 2607 – 2617, 2011. ISSN 0307-904X.
- LING, X.; ATLURI, S. N. Stability analysis for inverse heat conduction problems. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, v. 13, n. 3, p. 219 – 228, 2006.
- LIU, K.-C.; CHEN, Y.-S. Analysis of heat transfer and burn damage in a laser irradiated living tissue with the generalized dual-phase-lag model. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 103, p. 1–9, 2016.
- MA, W.; LIU, W.; LI, M. Modeling heat transfer from warm water to foot: Analytical solution and experimental validation. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 98, p. 364–373, 2015.

- MELO, R. W. de; SILVA, A. L. F. de Lima e; SILVA, S. L. e. Estimation of thermal effusivity of polymers using the thermal impedance method. *19th International Congress of Mechanical Engineering*, 2007.
- MONDS, J. R.; MCDONALD, A. G. Determination of skin temperature distribution and heat flux during simulated fires using green's functions over finite-length scales. v. 50, p. 593–603, 2013.
- MONTE, F. de; BECK, J. V.; AMOS, D. E. Diffusion of thermal disturbances in two-dimensional cartesian transient heat conduction. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, v. 51, p. 25–26, 2008.
- MONTE, F. de; BECK, J. V.; AMOS, D. E. A heat-flux based “building block” approach for solving heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 54, p. 2789–2800, 2011.
- MONTE, F. de; PONTRELLI, G.; BECKER, S. M. Transdermal drug delivery and percutaneous absorption: Mathematical modeling perspectives. In: *Heat Transfer and Fluid Flow in Biological Processes*. [S.l.]: Academic Press - Elsevier, 2015.
- SANTILLRAN, D.; SALETE, E.; TOLEDO, M. A. A new 1d analytical model for computing the thermal field of concrete dams due to the environmental actions. *Applied Thermal Engineering*, v. 85, p. 160–171, 2015.
- SILVA, S. L. e; ONG, T.; GUIMARÃES, G. Thermal properties estimation of polymers using only one active surface. *J. Brazil. Soc. Mech. Sci. Eng.*, v. 25, p. 9–14, 2003.
- SMITH, S. W. *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. [S.l.]: California Technical Publishing, 1998.
- SOUSA, P. F. de *et al.* Estimation of heat flux and temperature field during drilling process using dynamic observers based on green's function. *Applied Thermal Engineering*, v. 48, p. 144–154, 2012.
- STOLZ, G. Numerical solutions to an inverse problem of heat conduction for simple shapes. 1960.
- THIRUMALESHWAR, M. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. 2nd edition. ed. New Delhi, India: Dorling Kindersley, 2009.
- TILLMANN, A. R.; SILVA, S. L. e; GUIMARÃES, G. Determinação simultânea da condutividade térmica e da difusividade térmica variando com a temperatura. *15º POSMEC - Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica*, 2005.
- YAN, C.; SHAN, S. W. and K.; LU, Y. A simplified analytical model to evaluate the impact of radiant heat on building cooling load. *Applied Thermal Engineering*, v. 77, p. 30–41, 2015.
- ÖZISIK, M. *Heat Conduction*. Wiley, New York: Wiley-Interscience publication, 1993.

Anexo A

Extrapolando o tempo de desvio de calor

As estimativas de fluxo de calor que usaram a resposta impulsiva do modelo semi-infinito para a solução do problema inverso, mostradas neste trabalho, foram realizadas até o tempo de desvio de calor da respectiva posição analisada. Tal limite no tempo foi aplicado, pois neste intervalo a condição de contorno inativa dos modelos estudados não apresentam influência na temperatura.

Nesta seção deseja-se realizar este mesmo procedimento, porém sem limitar o intervalo de tempo ao tempo de desvio de calor.

A.0.1 Teste 1: Modelo *X21* com fluxo de calor do tipo exponencial

A extrapolação foi realizada em amostras de PVC e metal duro para a posição $x=0$. As Fig. A.1 e A.2 apresentam os resultados obtidos.

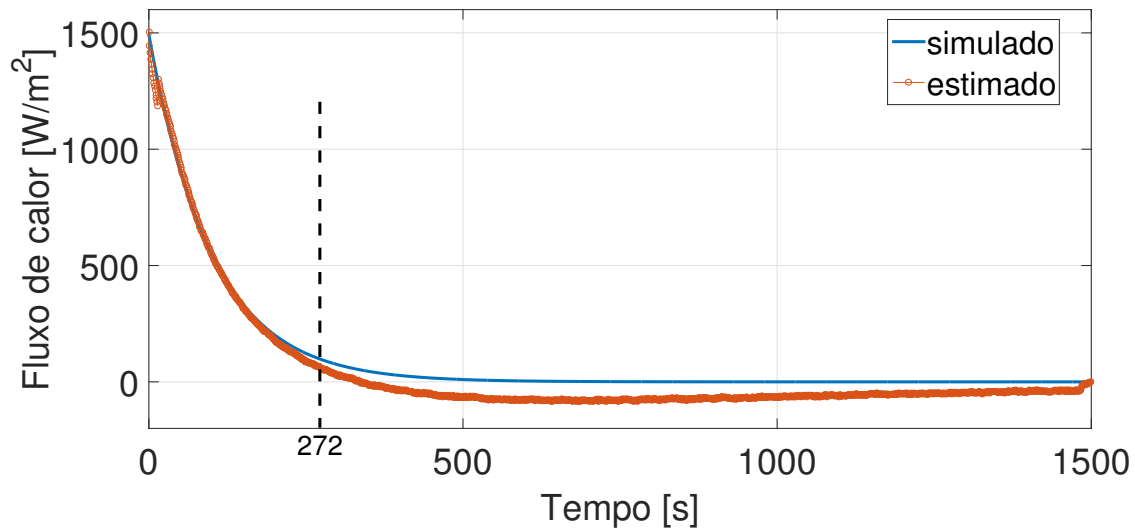


Figura A.1: Teste 1: Fluxo de calor estimado do tipo exponencial extrapolando o tempo de desvio de calor no PVC em $x=0$.

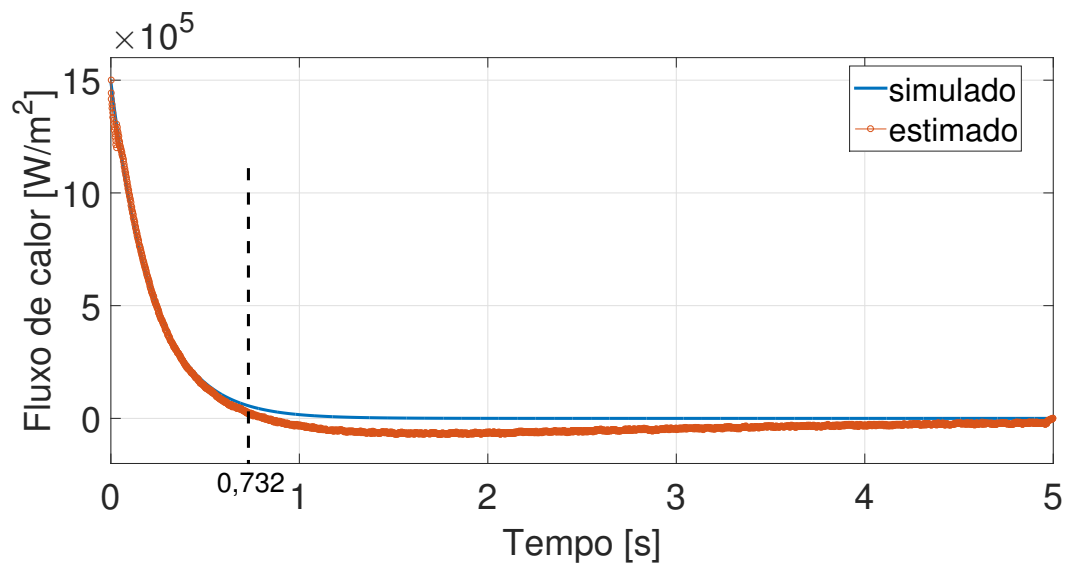


Figura A.2: Teste 1: Fluxo de calor estimado do tipo exponencial extrapolando o tempo de desvio de calor no metal duro em $x=0$.

Como era esperado, observa-se que à partir do tempo de desvio, marcado pela linha vertical, o fluxo de calor estimado começa a distanciar do simulado, isto acontece porque à partir de tal tempo o modelo *X21* começa a divergir do *X20*.

A.0.2 Teste 2: Modelo *X22* com fluxo de calor do tipo constante ou senoidal

Passando para o *X22* o mesmo procedimento foi realizado, mas agora para a posição $x=2$ mm. Foram simulados para este modelo dois tipos de fluxo: senoidal e constante, aplicado em amostras de PVC e metal duro. Novamente a linha vertical marca o tempo de desvio para a referida posição.

As Fig. A.3 e A.4 mostram os resultados obtidos para o fluxo do tipo senoidal.

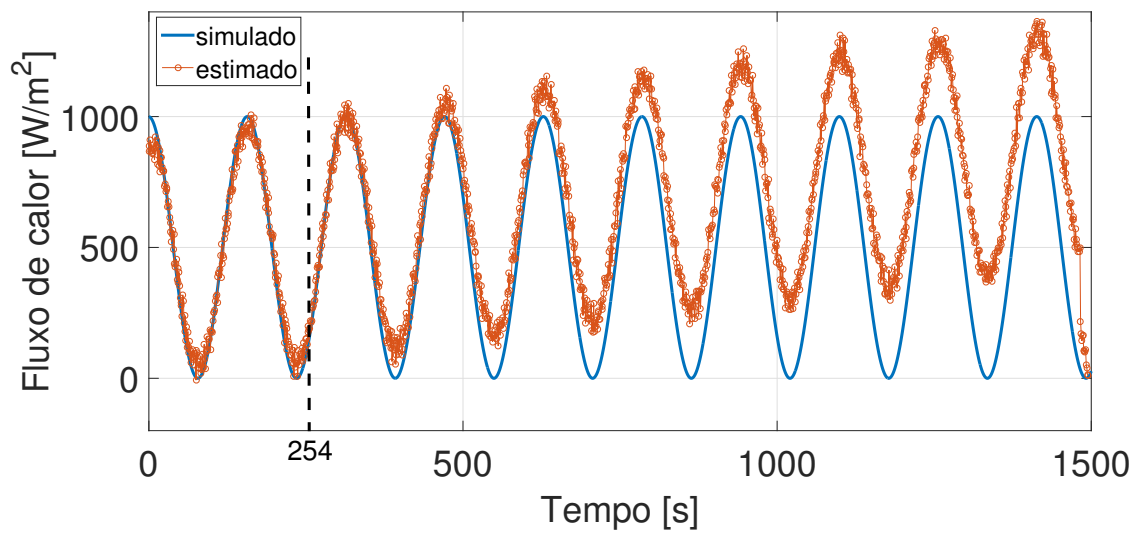


Figura A.3: Teste 2: Fluxo de calor estimado do tipo senoidal extrapolando o tempo de desvio de calor no PVC em $x=2$ mm.

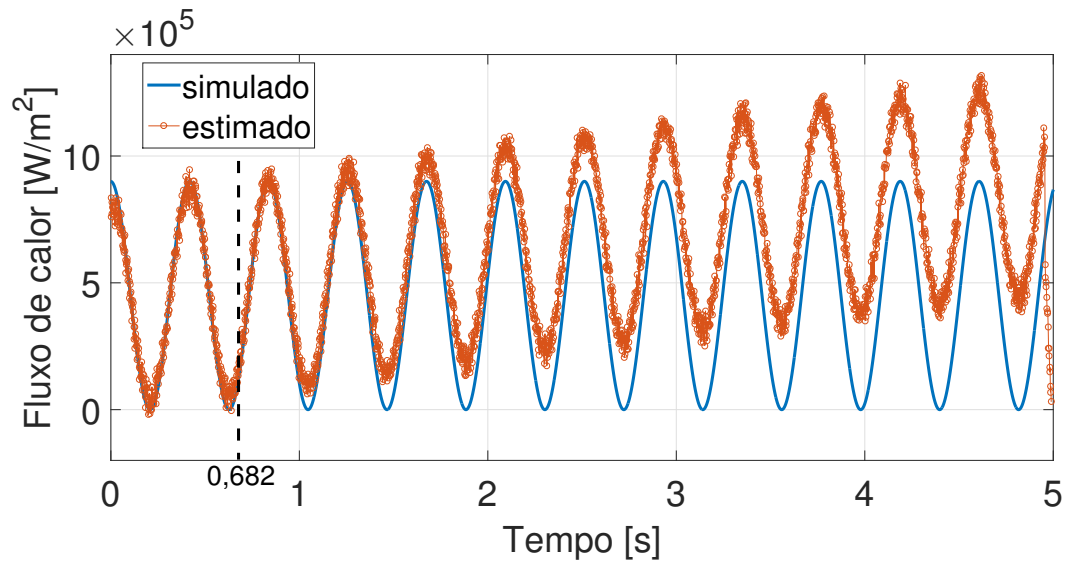


Figura A.4: Teste 2: Fluxo de calor estimado do tipo senoidal extrapolando o tempo de desvio de calor no metal duro em $x=2$ mm.

E as Fig. A.5 e A.6 para o fluxo do tipo constante.

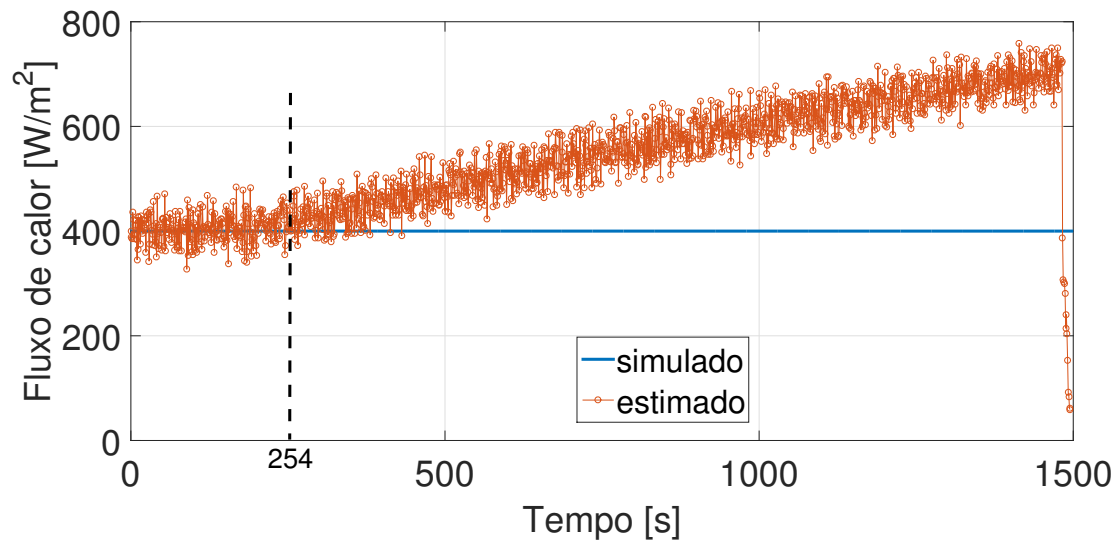


Figura A.5: Teste 2: Fluxo de calor estimado do tipo constante extrapolando o tempo de desvio de calor no PVC em $x=2$ mm.

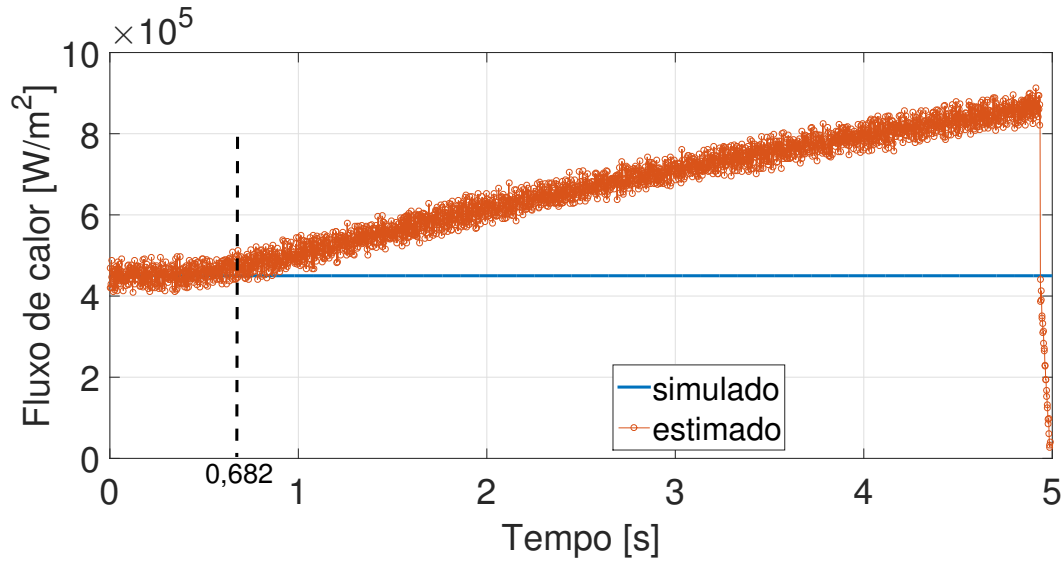


Figura A.6: Teste 2: Fluxo de calor estimado do tipo constante extrapolando o tempo de desvio de calor no metal duro em $x=2$ mm.

Os resultados obtidos, mostram novamente que após o tempo de desvio de calor a estimativa diverge do fluxo imposto.

É importante ressaltar que para alguns tipos de fluxo de calor, mesmo após o tempo de desvio de calor o fluxo estimado continua próximo ao simulado. Isto ocorre, pois o tempo de desvio de calor em uma determinada posição é o mesmo para diferentes tipos de fluxo. Porém, a diferença entre a temperatura do modelo finito e a do semi-finito (numerador da Eq.(3.4)) devido a fluxos diferentes pode apresentar magnitudes distintas, consequentemente o fluxo estimado e o simulado podem, após o tempo de desvio de calor, continuarem próximos por um certo tempo, como visto nas estimativas do fluxo senoidal, ou divergirem rapidamente, como no caso do fluxo constante.

A.0.3 Teste 3: Modelo *X23* com fluxo de calor do tipo triangular

Por fim, tomando o modelo *X23* e $x=4$ mm, aplicou-se um fluxo de calor do tipo triangular em amostras de PVC e metal duro. As Fig. A.7 e A.8 mostram os resultados obtidos e a linha vertical marca o tempo de desvio desta posição.

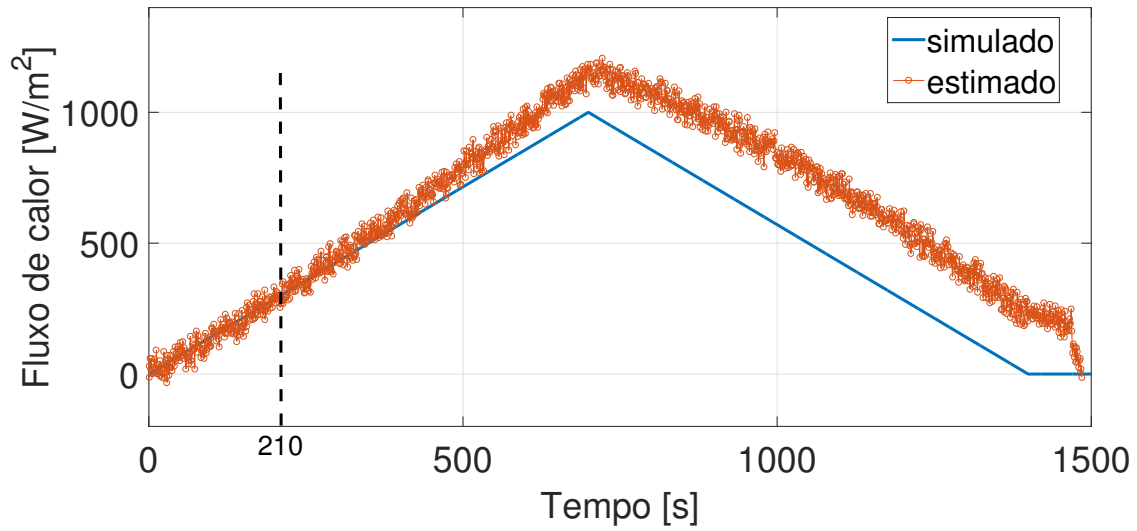


Figura A.7: Teste 3: Fluxo de calor estimado do tipo triangular extrapolando o tempo de desvio de calor no PVC em $x=4$ mm.

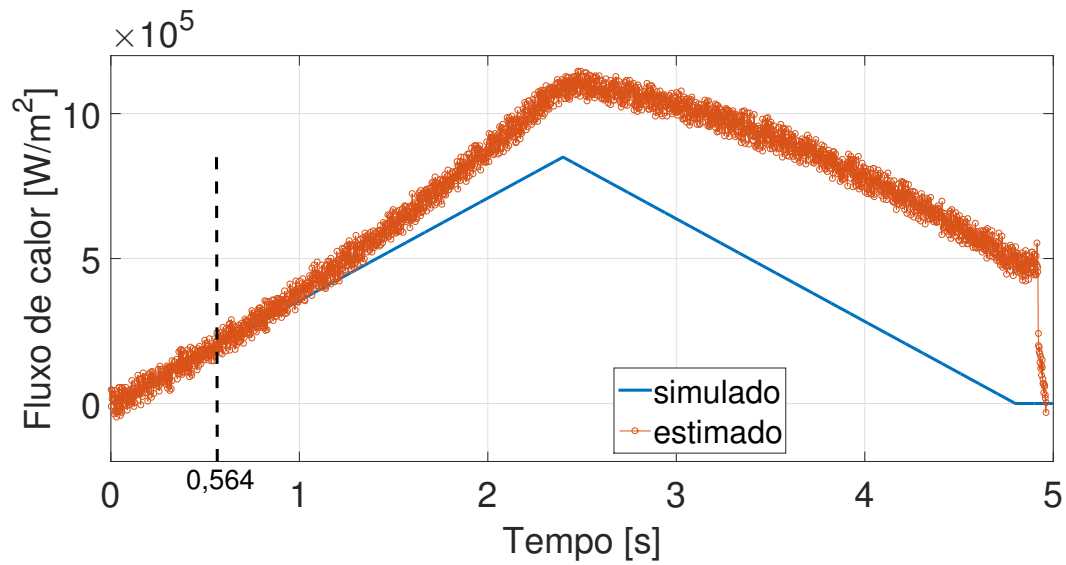


Figura A.8: Teste 3: Fluxo de calor estimado do tipo triangular extrapolando o tempo de desvio de calor no metal duro em $x=4$ mm.

As discussões e justificativas são similares às anteriores.