

Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Matemática

VALORES ATÍPICOS NO PLANO

Hugo Leonardo Lopes Costa

Orientador: Prof. Dr. Luis Renato Gonçalves Dias

Dezembro - 2015

Hugo Leonardo Lopes Costa

Valores atípicos no plano

Monografia apresentada a Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Luis Renato G. Dias.

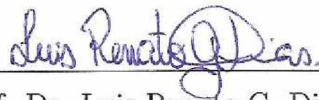
Uberlândia - MG
2015

Hugo Leonardo Lopes Costa

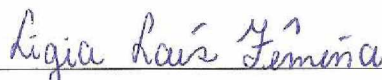
Valores atípicos no plano

Monografia apresentada a Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Luis Renato G. Dias.

Banca examinadora



Prof. Dr. Luis Renato G. Dias (orientador).



Profa. Dra. Ligia Laís Fêmina.



Prof. Dr. Aldicio José Miranda.

“Tome cuidado com o amanhã, você precisa de alguém para seguir. Sim, há um final feliz, mesmo no fim...”

AGRADECIMENTOS

A muito tempo esperava chegar neste momento, quantas coisas se passaram, momentos de alegria e de tristeza.

Muitas pessoas passaram em minha vida por este momento de luta, e cada um tem sim o seu papel significativo.

Primeiramente, agradeço ao meu avô Argemiro, homem de grande caráter, me ensinou a correr atrás dos meus sonhos, com o esforço do trabalho.

A minha mãe Alessandra, pelo apoio psicológico para nunca me deixar desistir.

Ao meu pai Edson, que mesmo no seu silêncio, sei que ele sente muito orgulho da pessoa que me tornei.

A minha tia Lu, que sempre me deu força pra tentar alcançar um futuro melhor.

As minhas avós (Francisca e Marlene), por sempre estarem ali, com carinho e afeto. Um café e uma tapioca sempre me deixa feliz.

Aos meus irmãos (Arthur, Leticia, Matheus e Gustavo), que contribuíram com uma palavra calorosa em algum momento de aflição.

Ao meu amigo irmão Vitor, sem ajuda dele desde o início eu não estaria aqui.

A minha amiga irmã Edileusa, que sempre estava ali por mim, a cada momento de provação.

A Aline, por estar ao meu lado, não me deixando fazer loucuras, e sempre me lembrando que tudo que eu almejo conquistar, com meu esforço eu posso conseguir.

Ao Francisco (Japa) e Marina, que sofreram muito nessa faculdade comigo.

Aos amigos mais próximos (Debora, Fellipe, Gabriella, Lara, Mateus, Ramon e Weliton), por sempre me proporcionarem momentos felizes.

Aos “migos” Laura e Tiago, que mesmo longe, sempre estão dispostos a ajudar.

Aos integrantes dos grupos GEPIT e PET, por me ensinarem que é possível ter uma família no ambiente de trabalho.

Ao meu orientador, Professor Luis Renato, por não desistir de mim.

E finalmente, eu sei, que nada disso aconteceria sem Deus em minha vida.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos alguns conceitos da topologia dos espaços métricos. Utilizamos estes conceitos para apresentar a noção de valores atípicos de aplicações polinomiais $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Palavras-chaves: Topologia, Homeomorfismo, Valores Atípicos, Teorema de Rabier.

CONTEÚDO

Introdução	8
1 Introdução a Topologia	10
1 Espaços métricos	10
2 A topologia dos espaços métricos	14
2.1 Conjuntos Compactos	16
2.2 Conjuntos Conexos	17
3 Homeomorfismo	19
2 Noções de Cálculo	23
1 Difeomorfismo	23
2 Campo de Vetores	25
3 Valores Atípicos	29
1 Valores atípicos no plano	29
2 Condição de Malgrange	32
2.1 Teorema de Rabier	35
Referências Bibliográficas	37

INTRODUÇÃO

O objetivo desta monografia de conclusão de curso é abordar tópicos da Topologia dos Espaços Métricos e resultados clássicos de Cálculo. Em particular, estudamos os invariantes topológicos: conexidade e compacidade. Estes invariantes podem ser utilizados para mostrar que dois espaços não são homeomorfos.

Os resultados clássicos de Cálculo abordados são: Teorema da Forma Local das Submersões e o Teorema da Função Inversa.

Utilizando estes conceitos, apresentamos a noção de valores atípicos de uma função polinomial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. A descrição destes valores é um problema recente em Matemática.

No Capítulo 1, apresentamos os conceitos básicos de Topologia dos Espaços Métricos. Apresentamos os conceitos de homeomorfismo, conexidade e compacidade. Discutimos exemplos, de como podemos utilizar conexidade e compacidade, para concluirmos que dois espaços não são homeomorfos.

No Capítulo 2, enunciamos o Teorema da Forma Local das Submersões e o Teorema da Função Inversa para funções definidas no plano. Apresentamos também a noção de campo vetorial no plano.

No Capítulo 3, utilizaremos os conceitos discutidos nos capítulos anteriores para apresentarmos a definição de valores atípicos e a condição de Malgrange no plano. A descrição completa dos valores atípicos é um problema recente em Matemática. No final, apresentamos o Teorema de Rabier que fornece uma aproximação dos valores atípicos em termos da condição de Malgrange.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO A TOPOLOGIA

Neste capítulo, apresentamos os conceitos básicos de espaços métricos, topologia dos espaços métricos, homeomorfismos e os invariantes topológicos: conexidade, componentes conexas e a noção de conjuntos compactos. Apresentamos alguns exemplos ilustrando estes conceitos. Algumas demonstrações de resultados foram apresentadas e outras omitidas. As referências básicas que utilizamos neste capítulo foram os livros [3] e [6].

Os conceitos apresentados neste capítulo também serão utilizados no Capítulo 3.

1 Espaços métricos

Começamos com a seguinte definição:

Definição 1.1. *Sejam $M \neq \emptyset$ e uma aplicação $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$. Dizemos que d é uma métrica sobre M , se as seguintes condições se verificam para quaisquer $x, y, z \in M$:*

M1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

M2. $d(x, y) = d(y, x)$;

M3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdade triangular).

Cada imagem $d(x, y)$ recebe o nome de distância de x a y . Um espaço métrico é um par (M, d) , onde d é uma métrica sobre M .

Qualquer conjunto M pode tornar-se um espaço métrico de maneira muito simples:

Exemplo 1.2 (Métrica zero-um). Dado $M \neq \emptyset$, definimos $d_{(0,1)} : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. Desta forma, as condições M1., M2. e M3. são satisfeitas e consequentemente $(M, d_{(0,1)})$ é um espaço métrico.

O exemplo acima, embora trivial, é útil para contra-exemplos.

Exemplo 1.3 (Subespaço; métrica induzida). Seja (M, d) um espaço métrico e $S \subset M$ não vazio. Consideramos a restrição $d|_{S \times S} : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_+$. Temos que $(S, d|_{S \times S})$ é um espaço métrico e dizemos que S é um subespaço métrico de M com a métrica induzida pela de M .

O Exemplo 1.3 nos permite obter uma grande variedade de exemplos de espaços métricos, considerando os diversos subconjuntos de um espaço métrico dado. A próxima definição é útil para definir uma topologia em espaços métricos, veja §2 deste capítulo.

Definição 1.4. Sejam (M, d) um espaço métrico e $p \in M$. Dado um número real $r > 0$, definimos a bola aberta de centro p e raio r , que denotamos por $B(p; r)$, como o conjunto dos pontos de M cuja distância a p é menor do que r . Ou seja,

$$B(p; r) = \{x \in M; d(x, p) < r\}.$$

A bola fechada de centro p e raio r , que denotamos por $B[p; r]$, é o conjunto dos pontos de M cuja distância a p é menor do que ou igual a r . Ou seja,

$$B[p; r] = \{x \in M; d(x, p) \leq r\}.$$

A esfera de centro p e raio r é o conjunto denotado por $S(p; r)$ dos pontos de M cuja distância a p é igual a r . Assim, temos:

$$S(p; r) = \{x \in M; d(x, p) = r\}.$$

Pelas definições acima, temos $B[p; r] = B(p; r) \cup S(p; r)$.

Exemplo 1.5. Seja $(M, d_{(0,1)})$ um espaço métrico munido com a métrica zero-um. Para todo $p \in M$, temos $B(p; r) = B[p; r] = M$, se $r > 1$, e $B(p; r) = B[p; r] = \{p\}$, se $r < 1$. Também temos $B(p; 1) = \{p\}$ e $B[p; 1] = M$. Consequentemente, $S(p; r) = \emptyset$, se $r \neq 1$, e $S(p; 1) = M - \{p\}$.

Exemplo 1.6. Com a métrica usual da reta, a bola aberta $B(a; r)$ é o intervalo aberto $]a - r, a + r[$. A bola fechada $B[a; r]$ é o intervalo fechado $[a - r, a + r]$. A esfera $S(a, r)$ são os pontos $a - r$ e $a + r$.

Com as noções apresentadas na Definição 1.4, definimos:

Definição 1.7. Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que um ponto $p \in M$ é limite da sequência $\{x_n\} \subset M$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe um índice $i \in \mathbb{N}^*$ tal que $n \geq i$ implica $x_n \in B(p; \epsilon)$.

Um exemplo interessante de espaços métricos são os espaços vetoriais normados, que apresentamos a seguir:

Definição 1.8. Seja E um espaço vetorial. Uma norma em E é uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, que satisfaz as seguintes condições:

$$N1. \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$N2. \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } x \in E.$$

$$N3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (desigualdade triangular).}$$

Nestas condições, dizemos que o par $(E, \|\cdot\|)$ é um Espaço Vetorial Normado munido com a norma $\|\cdot\|$.

Dado um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$, definimos a distância entre $x, y \in E$, como sendo

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|.$$

Segue das propriedades de norma, que $(E, d_{\|\cdot\|})$ é um espaço métrico. Neste caso, dizemos que a métrica provém da norma $\|\cdot\|$. Quando a métrica d provém de uma norma $\|\cdot\|$ sobre um espaço vetorial E , podemos escrever $B(p; r) = \{x \in E; \|x - p\| < r\}$, $B[p; r] = \{x \in E; \|x - p\| \leq r\}$ e $S(p; r) = \{x \in E; \|x - p\| = r\}$.

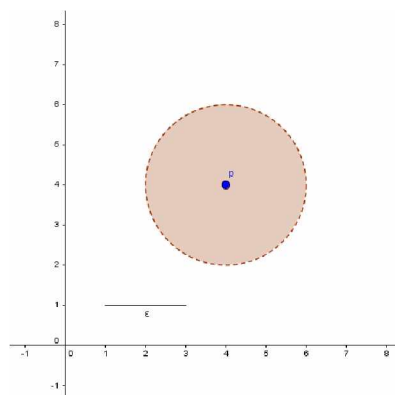
Exemplo 1.9. No espaço $\mathbb{R}^n$ temos três normas clássicas:

$$\|x\|_1 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

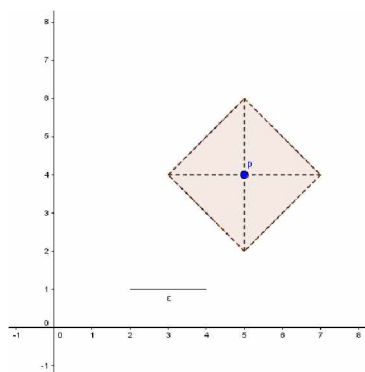
$$\|x\|_2 = |x_1| + \dots + |x_n|,$$

$$\|x\|_{\max} = \max\{|x_i|; i = 1, \dots, n\}.$$

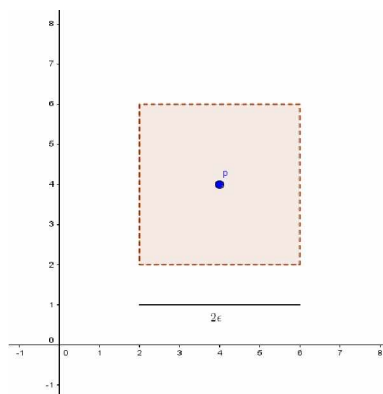
Em $\mathbb{R}^2$, uma bola de centro p e raio $\epsilon > 0$, segundo a norma $\|\cdot\|_1$, é o conjunto representado na figura a seguir:



Com a norma $\|\cdot\|_2$, a bola de centro p e raio $\epsilon > 0$ é o conjunto representado por:



Com a norma $\|\cdot\|_{\max}$, temos:



ou seja, $B(p, \epsilon) =]a - \epsilon, a + \epsilon[\times]b - \epsilon, b + \epsilon[$, onde $p = (a, b)$.

Definição 1.10 (Funções Contínuas). *Sejam M, N espaços métricos. A aplicação $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad d(x, a) < \delta \implies d(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$. Equivalentemente, $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, dada qualquer bola $B' = B(f(a); \epsilon)$, podemos encontrar uma bola $B = B(a; \delta)$, tal que $f(B) \subset B'$.

No caso particular em que $M, N \subset \mathbb{R}$ e $f : M \rightarrow N$, a definição acima é equivalente a apresentada em cursos de Cálculo I. De fato, f é contínua no ponto $a \in M$, quando: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad x \in M \text{ e } a - \delta < x < a + \delta \implies f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$.

Ou seja, a aplicação f transforma os pontos de M que estão no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ em pontos do intervalo aberto $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$.

Para espaços métricos, a continuidade pode também ser caracterizada em termos de sequência:

Proposição 1.11. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação entre os espaços métricos M, N . Uma função f é contínua no ponto $p \in M$ se, e somente se, para toda sequência $\{x_n\} \subset M$ que converge para p temos que a sequência $\{f(x_n)\} \subset N$ converge para $f(p)$.*

2 A topologia dos espaços métricos

Definição 1.12. *Seja $M \neq \emptyset$. Uma coleção τ de subconjuntos de M é uma topologia sobre M se:*

$$T1. \emptyset, M \in \tau;$$

$$T2. X, Y \in \tau \implies X \cap Y \in \tau;$$

$$T3. \text{ Se } \{X_i\} \text{ é uma família de membros de } \tau, \text{ então } \cup X_i \in \tau.$$

Nestas condições, o par (M, τ) é chamado espaço topológico munido com a topologia τ .

Exemplo 1.13 (Topologia induzida). *Seja (M, τ) um espaço topológico e $S \subset M$ não vazio. A topologia induzida sobre S é dada por $\tau_S = \{A \cap S \mid A \in \tau\}$. Desta forma, S é um espaço topológico com a topologia τ_S , que é induzida por τ .*

A próxima definição será utilizada para definirmos uma topologia em um espaço métrico qualquer.

Definição 1.14. *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset M$ se diz aberto se, para todo $p \in A$, existe um número real $\epsilon > 0$ tal que $B(p; \epsilon) \subset A$.*

Dado um espaço métrico (M, d) , uma topologia sobre M pode ser dada por:

Proposição 1.15. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $\tau := \{A \subset M \mid A \text{ é um conjunto aberto}\}$. Então:*

- (i). $\emptyset, M \in \tau$;
- (ii). $X, Y \in \tau \implies X \cap Y \in \tau$;
- (iii). *Se (X_j) é uma família de conjuntos abertos de M , ou seja, se cada $X_i \in \tau$, então $\cup X_i \in \tau$.*

Em particular, τ é uma topologia sobre M .

Demonstração. (i). Temos que $\emptyset$ é aberto por vacuidade. Quanto a M , toda bola de centro em qualquer $p \in M$ é um subconjunto de M , logo $M \in \tau$.

(ii). Seja $p \in X \cap Y$. Então existem $\epsilon > 0$ e $\lambda > 0$ tais que $B(p; \epsilon) \subset X$ e $B(p; \lambda) \subset Y$. Sem perda de generalidade, suponhamos $\epsilon \leq \lambda$. Pela definição de bola aberta, temos $B(p; \epsilon) \subset B(p; \lambda)$, o que implica $B(p; \epsilon) \subset X \cap Y$.

(iii). Seja $p \in \cup X_i$. Então existe um índice k tal que $p \in X_k$ e, pelo fato de X_k ser aberto, existe um $\epsilon > 0$ tal que $B(p; \epsilon) \subset X_k$. Logo, $B(p; \epsilon) \subset \cup X_i$, o que mostra (iii). $\square$

A topologia definida na Proposição 1.15 é chamada de *topologia induzida pela métrica d* . Salvo quando mencionarmos, dado um espaço métrico (M, d) , consideraremos sempre a topologia induzida pela métrica d .

Definição 1.16. *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $F \subset M$ é fechado quando seu complementar $M - F = F^c$ é aberto.*

Relacionado a noção de conjuntos fechados, temos a próxima definição e proposição.

Definição 1.17. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $S \subset M$. Um ponto $p \in M$ é dito aderente a S se existe uma sequência $\{x_n\} \subset S$ que converge para p . Definimos:*

$$\bar{S} := \{p \in M \mid p \text{ é aderente a } S\},$$

que é chamado de fecho de S .

Proposição 1.18. *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $F \subset M$ é fechado se, e somente se, $\bar{F} = F$.*

Usando as definições acima, temos a seguinte caracterização de funções contínuas:

Proposição 1.19. *Sejam (M, d) e (N, d') espaços métricos com a topologia induzida pelas métricas d e d' respectivamente. Considere $f : M \rightarrow N$. São equivalentes:*

- i). f é contínua.
- ii). Para todo $\epsilon > 0$ e $q \in N$, $f^{-1}(B(q; \epsilon))$ é um subconjunto aberto de M .
- iii). Para todo aberto $U \subset N$, temos que $f^{-1}(U)$ é aberto em M .

2.1 Conjuntos Compactos

Nesta seção, apresentamos a noção de conjuntos compactos de um espaço métrico. Como veremos mais adiante, §3 deste capítulo, tal noção pode ser visto como um invariante topológico.

Definição 1.20. *Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que um subconjunto $K \subset M$ é compacto quando para qualquer sequência $\{x_n\} \subset K$, existe uma subsequência $\{x_{n_i}\}$ que converge para um ponto $p \in K$. Um espaço métrico (M, d) é compacto quando M é um conjunto compacto.*

Os próximos resultados caracterizam conjuntos compactos em espaços métricos.

Proposição 1.21. *Sejam M um espaço métrico e $K \subset M$ um conjunto compacto. Se $F \subset K$ e F é fechado, então F também é um conjunto compacto.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma sequência em F . Como $F \subset K$, $\{x_n\}$ também é uma sequência de pontos de K .

Então, como K é compacto, existe uma subsequência $\{x_{n_i}\}$ de $\{x_n\}$ tal que esta subsequência converge para um certo $p \in K$. Agora, esta subsequência $\{x_{n_i}\}$ é também uma sequência de F , logo $p \in \bar{F}$. Como F é fechado, segue pela Proposição 1.18 que $p \in F$, o que mostra que F é compacto. $\square$

Proposição 1.22. *Todo subconjunto compacto K de um espaço métrico M é fechado.*

Demonstração. Basta provar que $\bar{K} \subset K$. Se $p \in \bar{K}$, então

$$B\left(p, \frac{1}{n}\right) \cap K \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, tomemos um elemento x_n na interseção não vazia acima. Desta forma, obtemos uma sequência de pontos de K que converge para p .

Como todas as subsequências dessa sequência convergem também para p , segue que $p \in K$, pois K é um conjunto compacto. Logo, $\bar{K} \subset K$, o termina a prova da proposição. $\square$

Proposição 1.23. *Sejam M e N espaços métricos e $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação contínua. Se $K \subset M$ é compacto então $f(K)$ é um conjunto compacto.*

Demonstração. Seja $\{y_n\}$ uma sequência de pontos de $f(K)$. Para cada índice i , existe um elemento $x_i \in K$ tal que $f(x_i) = y_i$.

Como $\{x_i\}$ é uma sequência de pontos de K e sendo K compacto, temos que existe uma subsequência $\{x_{ni}\}$ desta sequência que converge para um certo $p \in K$.

Sendo f contínua, a Proposição 1.11 garante que a subsequência $\{f(x_{ni}) = y_{ni}\}$ converge para $f(p)$. Como $p \in K$, temos que $f(p) \in f(K)$, o que mostra que $f(K)$ é compacto. $\square$

O próximo teorema caracteriza conjuntos compactos em $\mathbb{R}^n$:

Teorema 1.24. *Um subconjunto A do espaço $\mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, A é fechado e limitado.*

Como consequência do Teorema 1.24, temos os seguintes exemplos:

Exemplo 1.25. *Como qualquer esfera, $S(p; r) \subset \mathbb{R}^n$, é fechada e limitada, segue pelo Teorema 1.24 que $S(p; r)$ é um conjunto compacto.*

Exemplo 1.26. *Compactos na reta são intervalos fechados e limitados $[a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$.*

2.2 Conjuntos Conexos

Começamos com a definição de conjuntos conexos:

Definição 1.27. Um espaço métrico M é conexo quando não pode ser escrito como união não trivial disjunta de dois abertos. Ou seja, não é possível escrever:

$$M = A_1 \cup A_2,$$

com A_1 e A_2 abertos, não-vazios e disjuntos.

Um subconjunto de um espaço métrico M é conexo quando for conexo na topologia induzida de M . Um subconjunto que não é conexo é chamado de conjunto desconexo.

Exemplo 1.28. Os conjuntos conexos na reta são intervalos.

Temos a seguinte caracterização para conjuntos conexos:

Proposição 1.29. Um conjunto M é conexo se, e somente se, não existe uma função contínua e sobrejetora de M em $\{0, 1\}$.

Teorema 1.30. Seja $f : M \rightarrow N$ uma função contínua. Se M é conexo, então $f(M)$ é um subconjunto conexo de N .

Demonstração. Suponhamos $f(M)$ desconexo. Pela Proposição 1.29, existe $g : f(M) \rightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Logo, a composta

$$g \circ f : M \rightarrow \{0, 1\},$$

é sobrejetora e contínua (composição de funções contínuas é contínua). De novo, pela Proposição 1.29, temos que M é desconexo, que é uma contradição com a hipótese. Portanto, $f(M)$ é conexo e a prova segue. $\square$

Uma outra noção relacionada a conjuntos conexos é a seguinte:

Definição 1.31. Um espaço métrico M é conexo por caminhos se, para quaisquer $p_1, p_2 \in M$, existe um caminho contínuo $\phi : [a, b] \rightarrow M$, tal que $\phi(a) = p_1$ e $\phi(b) = p_2$.

Conexo e conexo por caminhos estão relacionados como segue:

Teorema 1.32. Se M é um espaço conexo por caminhos, então M é um conjunto conexo.

Demonstração. A demonstração será por contradição. Suponha que $M = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_i \neq \emptyset$ e $A_i \subset M$ são conjuntos abertos, $i = 1, 2$.

Tomemos $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$. Como M é conexo por caminhos, existe $\phi : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\phi(0) = a_1, \phi(1) = a_2$.

Como $[0, 1]$ é conexo, segue pelo Teorema 1.30 que $\phi([0, 1]) := \tilde{M} \subset M$ é conexo. Como A_i são abertos em M , temos que $\tilde{A}_1 = A_1 \cap \tilde{M} \neq \emptyset$ é aberto em $\tilde{M}$ e $\tilde{A}_2 = A_2 \cap \tilde{M} \neq \emptyset$ é aberto em $\tilde{M}$. Logo,

$$\tilde{M} = \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2,$$

que implica $\tilde{M}$ desconexo, que é uma contradição.

Portanto, temos que $f(M)$ é conexo, o que termina a demonstração. $\square$

O próximo exemplo mostra que a recíproca do Teorema 1.32 não vale.

Exemplo 1.33. Considere $M \subset \mathbb{R}^2$ como sendo a reunião do gráfico da função $f(x) = \sin(1/x), x < 0 \leq 1$, com o ponto $(0, 0)$. Temos que M é conexo mas não é conexo por caminhos.

Exemplo 1.34. $\mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos. De fato, dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, consideramos

$$\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \phi(t) = (1 - t)a + tb,$$

que é contínua. Assim, $\mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos. Em particular, pelo Teorema 1.32, temos que $\mathbb{R}^n$ é um conjunto conexo.

Definição 1.35 (Componentes Conexas). Sejam M um espaço métrico e $p \in M$. A componente conexa de p é definida como sendo o maior conexo de M (pela inclusão) que contém o ponto p .

Terminamos esta seção com os seguintes resultados:

Proposição 1.36. As componentes conexas particionam um espaço métrico M . Em especial, a relação x e y estão na mesma componente conexa é uma relação de equivalência.

Proposição 1.37. Em um espaço métrico M , a componente conexa de um ponto $p \in M$ é sempre um conjunto fechado.

3 Homeomorfismo

Nesta seção, apresentamos a noção de homeomorfismo. Em particular, Teoremas 1.39 e 1.40, nos diz que compacidade e conexidade são invariantes topológicos.

Definição 1.38. *Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é um homeomorfismo quando f satisfaz as seguintes condições:*

- (a). *A aplicação f é bijetora.*
- (b). *A aplicação f e sua inversa f^{-1} são aplicações contínuas.*

Nestas condições, dizemos que os espaços M e N são homeomorfos.

Teorema 1.39. *Seja $f : M \longrightarrow N$ um homeomorfismo. Se M é compacto então N é compacto.*

Demonstração. Segue da Proposição 1.23 que $f(M)$ é compacto. Como f é um homeomorfismo temos que $f(M) = N$, o que implica que N é compacto. $\square$

Em particular, Teorema 1.39 nos diz que se M e N são homeomorfos, então M é compacto se, e somente se, N é compacto.

Teorema 1.40. *Seja $f : M \longrightarrow N$ um homeomorfismo. Se M é conexo então N é conexo.*

Demonstração. Teorema 1.30 implica que $f(M)$ é conexo. Como f é um homeomorfismo, segue que $f(M) = N$, o que implica que N é conexo. $\square$

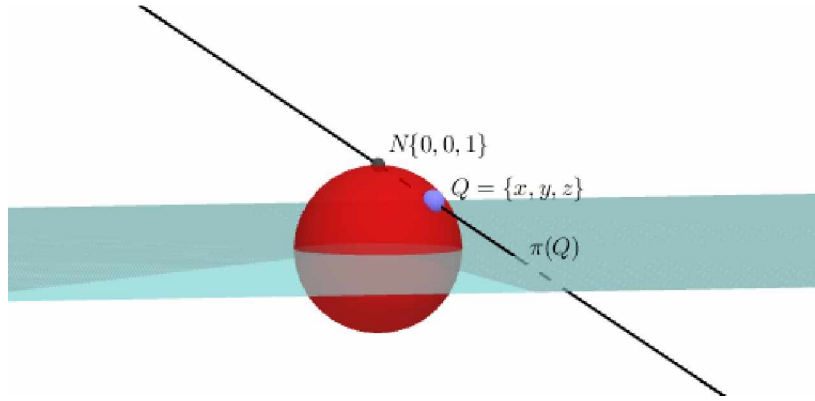
Segue do Teorema 1.40 que se M e N são homeomorfos, então M é conexo se, e somente se, N é conexo.

Os seguintes resultados serão úteis mais adiante:

Proposição 1.41. *Seja $f : M \rightarrow N$ um homeomorfismo, então M e N tem o mesmo número de componentes conexas.*

Proposição 1.42. *Sejam M e N espaços métricos. O produto cartesiano $M \times N$ é conexo se, e somente se, M e N são conexos.*

Exemplo 1.43. *Seja $N = (0,0,1)$ o polo norte da esfera S^2 . Então $S^2 - \{N\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Tal homeomorfismo, pode ser mostrado através da projeção estereográfica (veja a próxima figura).*



Seja $Q = (x, y, z) \in S^2$ e $Q \neq N$. A reta que passa pelos pontos N e Q , é dada por:

$$r(\lambda) = (0; 0; 1) + \lambda(x - 0; y - 0; z - 1) \implies r(\lambda) = (\lambda x; \lambda y; 1 + \lambda(z - 1)).$$

Seja $\pi(Q)$ a interseção desta reta com o plano xy . Desta forma, a última coordenada de $\pi(Q)$ deve ser zero. Logo, devemos ter:

$$1 + \lambda(z - 1) = 0 \implies \lambda = \frac{-1}{z - 1}.$$

Substituindo este valor de λ na reta $r(\lambda)$, obtemos o ponto:

$$\pi(Q) = \left(\frac{-x}{(z - 1)}; \frac{-y}{(z - 1)}; 0 \right).$$

Portanto, definindo a aplicação:

$$\pi : S^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right),$$

temos que π é contínua ($z \neq 1$) e π é bijetora por construção (veja também a construção da inversa abaixo).

Analogamente, podemos calcular a inversa de π . Seja $\tilde{Q} = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^2$ (identificamos $\mathbb{R}^2$ com o plano xy). A reta que passa por $\tilde{Q}$ e N é dada por:

$$r(\lambda) = (0; 0; 1) + \lambda(x - 0; y - 0; 0 - 1) \implies r(\lambda) = (\lambda x; \lambda y; 1 - \lambda).$$

Se $\pi^{-1}(\tilde{Q})$ denota a interseção da reta r com a esfera S^2 , temos que λ deve satisfazer:

$$(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (1 - \lambda)^2 = 1 \implies \lambda = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Substituindo em r , obtemos

$$\pi^{-1}(\tilde{Q}) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}; 1 - \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

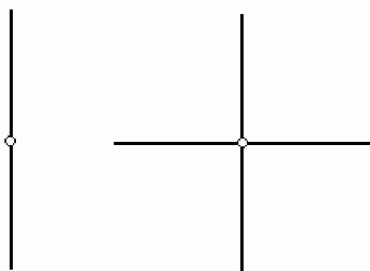
Definindo a aplicação:

$$\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - N, \pi^{-1}(\tilde{Q}) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}; 1 - \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} \right),$$

temos que π^{-1} é contínua, pois $x^2 + y^2 + 1 \neq 0$. Por construção, π e π^{-1} são inversa uma da outra. Portanto, $S^2 - \{N\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.44. *A esfera não é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. De fato, temos que a esfera é compacta e $\mathbb{R}^2$ é não compacto. Logo, pelo Teorema 1.39 não existe um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ e a esfera.*

Exemplo 1.45. *Os símbolos $\perp$ e $+$ não são homeomorfos.*



De fato, tanto $\perp$ e $+$ são subconjuntos conexos do plano. Se existisse um homeomorfismo entre $\perp$ e $+$, então tirando o ponto da interseção de $+$, teremos quatro componentes conexas. Já em $\perp$, tirando o ponto correspondente pelo homeomorfismo, teremos duas componentes conexas. Desta forma não existe tal homeomorfismo entre $\perp$ e $+$ (veja Proposição 1.41).

CAPÍTULO 2

NOÇÕES DE CÁLCULO

Neste capítulo apresentamos as noções de difeomorfismos, submersões e campos de vetores. O Teorema da função inversa e a forma local das submersões, resultados clássicos de Cálculo em $\mathbb{R}^n$, são apresentados neste capítulo. A referência básica deste capítulo é [5].

1 Difeomorfismo

Começamos com a definição de difeomorfismo.

Definição 2.1. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Uma aplicação diferenciável de classe C^∞ , $f : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo se f é bijetora e sua inversa $g = f^{-1} : V \rightarrow U$ é diferenciável.*

Exemplo 2.2. *A inversão de matrizes é um exemplo de difeomorfismo $f : U \rightarrow U$, de classe C^∞ , onde U é o conjunto das matrizes invertíveis $n \times n$. Neste caso particular, temos $f^{-1} = f$.*

Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ é um difeomorfismo, com $g = f^{-1} : V \rightarrow U$, segue que $g \circ f = id_U$ e $f \circ g = id_V$.

Pela regra da cadeia, temos que $g'(f(x))f'(x) = id_{\mathbb{R}^n}, \forall x \in U$ e $f'(g(y))g'(y) = id_{\mathbb{R}^m}$, para todo $y \in V$.

Logo, $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, cujo inverso é $g'(f(x)) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Em particular, devemos ter $m = n$. Ou seja, dois abertos em espaços euclidianos de dimensões diferentes não podem ser difeomorfos.

Dado um difeomorfismo $f : U \rightarrow V$, temos, em particular, que f é um homeomorfismo entre U e V . A recíproca nem sempre é verdadeira. Por exemplo, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, é um homeomorfismo, mas sua inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ não é diferenciável no ponto $x = 0$. Note que $f'(0) = 0$.

Definição 2.3. Uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, chama-se um difeomorfismo local quando, para cada $x \in U$, existe uma bola aberta $B = B(x; \epsilon) \subset U$, tal que a restrição $f|_B : B \rightarrow f(B)$ é um difeomorfismo.

Em particular, se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um difeomorfismo local, então $f'(x)$ é um isomorfismo para todo $x \in U$.

Teorema 2.4 (Teorema da aplicação inversa). Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k ($k \geq 1$) no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $a \in U$ é tal que $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é invertível então existe uma bola aberta $B = B(a; \epsilon) \subset U$ tal que a restrição $f|_B$ é um difeomorfismo sobre o aberto $V \ni f(a)$.

Exemplo 2.5. A função diferencial sobrejetiva $f : I \rightarrow J$, entre intervalos $I, J \subset \mathbb{R}$ é um difeomorfismo se, e somente se, $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

($\Leftarrow$) Por hipótese temos que f e $g = f^{-1}$ é diferenciável, o que implica, pela regra da cadeia que: $(g \circ f)'(x) = x' \implies g'(f(x))f'(x) = 1$, logo $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

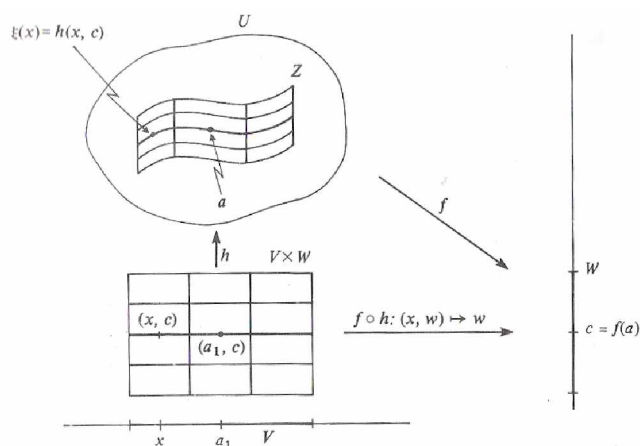
($\Rightarrow$) Segue pelo Teorema da aplicação inversa.

Outro conceito que queremos apresentar é o seguinte:

Definição 2.6. Dizemos que uma função diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma submersão em $p \in U$ se $\nabla f(p) \neq 0$. Dizemos que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma submersão quando f é uma submersão em todos os pontos $x \in U$.

Teorema 2.7 (Forma local das submersões). Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ diferenciável em U . Se $f'(a) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetora, ou seja, $\nabla f(a) \neq 0$, então existem abertos V, W, Z , com $a \in Z \subset \mathbb{R}^2, a_1 \in V \subset \mathbb{R}, f(a) \in W \subset \mathbb{R}$, e um homeomorfismo $h : V \times W \rightarrow Z$, diferenciável em $V \times W$ tal que $f \circ h(x, w) = w$, para todo $(x, w) \in V \times W$. Se f é de classe C^k em U ($k \geq 1$), podemos restringir V, W, Z , se necessário, de modo que h seja um difeomorfismo de classe C^k .

A próxima figura ilustra o Teorema 2.7.



Uma questão natural é quando podemos escolher $Z \subset \mathbb{R}^2$ de modo que $f^{-1}(f(a)) \subset Z$. Uma condição que garante que tal Z existe será discutido no Capítulo 3.

2 Campo de Vetores

Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ . O gradiente de f no ponto $p \in U$ é definido por:

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p); \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right).$$

Desta forma, para cada $p \in U$, definimos:

$$\nabla f(p) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

como sendo a aplicação linear definida por:

$$\nabla f(p)(v) = \langle \nabla f(p); v \rangle, v \in \mathbb{R}^2,$$

onde $\langle ; \rangle$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$.

Definição 2.8. *Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. Um campo de vetores em U é uma função V , que atribui a cada ponto $p \in U$, o vetor $V(p) \in \mathbb{R}^2$.*

Definição 2.9. *Uma curva $\gamma : (a, b) \rightarrow U$ é uma curva integral de um campo vetorial V se, para todo $a < t < b$, temos:*

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = V(\gamma(t)).$$

Temos os seguintes resultados clássicos:

Teorema 2.10 (Existência). *Sejam $V : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^∞ , $p_0 \in U$ e $a \in \mathbb{R}$. Então existe um intervalo $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e uma curva integral $\gamma_p : I \rightarrow U$ de V tal que com $\gamma_p(a) = p$.*

Teorema 2.11 (Unicidade). *Sejam $\gamma_i : I_i \rightarrow U$, $i = 1, 2$, curvas integrais de um campo vetorial V . Se $a \in I_1 \cap I_2$ e $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ então $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ sobre $I_1 \cap I_2$ e a curva $\gamma : I_1 \cup I_2 \rightarrow U$*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{se } t \in I_1, \\ \gamma_2(t), & \text{se } t \in I_2. \end{cases}$$

é uma curva integral de V .

Teorema 2.12 (Dependência suave em dados iniciais). *Seja V um campo de classe C^∞ definido sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $a \in I$. Seja $h : U \times I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ uma aplicação com as propriedades:*

(i). $h(p, a) = p, p \in U$

(ii). *Para todo $p \in U$, a curva $\gamma_p : I \rightarrow U, \gamma_p(t) = h(p, t)$, é uma curva integral de V .*

Então a aplicação h é de classe C^∞ .

Exemplo 2.13. *Calculemos a curva integral do campo vetorial $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $V(x, y) = (-y, x)$, tal que $\gamma(0) = (1, 0)$.*

Suponhamos que $\gamma(t) = (\gamma_1(t); \gamma_2(t))$ é uma curva integral tal que $\gamma(0) = (1, 0)$ (tal curva existe pelo Teorema 2.10). Então, a curva γ deve satisfazer:

$$(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) = (-\gamma_2(t), \gamma_1(t)).$$

Ou seja, $\gamma_2'(t) = \gamma_1(t)$ e $\gamma_1'(t) = -\gamma_2(t)$. Derivando, $\gamma_2''(t) = \gamma_1'(t)$ e usando a relação $\gamma_1'(t) = -\gamma_2(t)$, encontramos a seguinte equação para γ_2 :

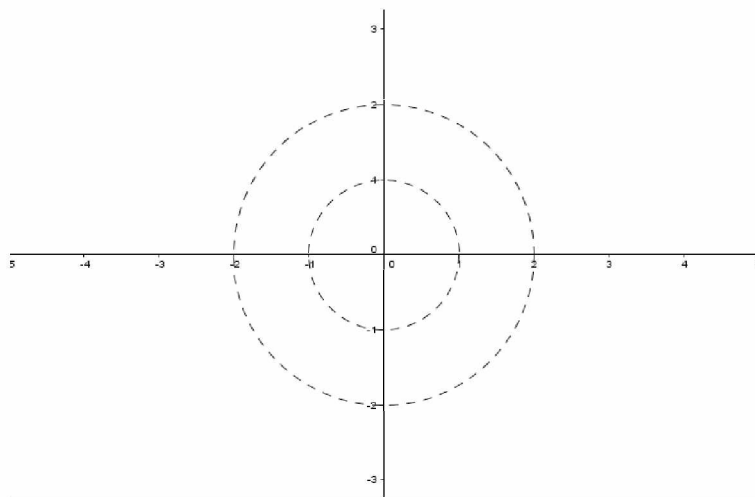
$$\gamma_2''(t) + \gamma_2(t) = 0,$$

cujas equações características são dadas por $r^2 + 1 = 0$. Como as raízes desta equação são dadas por $r = i$, ou $r = -i$, temos que a solução geral para a equação $\gamma_2''(t) + \gamma_2(t) = 0$, é dada por:

$$\gamma_2(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t), c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Usando a hipótese que $\gamma(0) = (\gamma_1(0), \gamma_2(0)) = (1, 0)$, obtemos $c_1 = 0$. Logo, $\gamma_2(t) = c_2 \sin(t)$ e $\gamma_1(t) = c_2 \cos(t)$. Mas $\gamma_1(0) = 1$, implica $c_2 = 1$. Portanto, temos que $\gamma(t) = (\cos(t); \sin(t))$ é a curva integral de V que satisfaz $\gamma(0) = (1, 0)$.

A figura a seguir representa as curvas integrais do exemplo anterior:



A próxima proposição é um dos passos da demonstração do Teorema 3.11 do Capítulo 3.

Proposição 2.14. *Dado $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação suave. Suponha que para $\|(x, y)\|$ grande o suficiente, existe $M > 0$ tal que $\|f(x, y)\| < M\|(x, y)\|$. Dado $(x_0, y_0) \in U$, consideramos o seguinte problema:*

$$(x'(t), y'(t)) = f(x(t), y(t)), (*)$$

$$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0).$$

Se $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in [0, t_0)$ é uma solução de $(*)$. Então a trajetória de $\gamma(t)$ é limitada.

Demonstração. Suponha por absurdo que $\|\gamma(t)\| = \|(x(t), y(t))\|$ é ilimitado. Considere $r(t) := \|\gamma(t)\|^2$. Desta forma, temos $r(t) = x^2(t) + y^2(t)$. Derivando $r(t)$, obtemos:

$$r'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) \leq 2\|(x(t), y(t))\| \cdot \|(x'(t), y'(t))\|,$$

onde a última desigualdade segue por Cauchy-Schwarz. Como $\gamma(t)$ é uma curva integral de f , a desigualdade acima implica:

$$r'(t) \leq 2\|\gamma(t)\| \cdot \|f(\gamma(t))\|.$$

Pela hipótese segue:

$$r'(t) \leq 2\|\gamma(t)\|.M\|\gamma(t)\|,$$

que implica

$$r'(t) \leq 2M\|\gamma(t)\|^2 \implies \frac{r'(t)}{r(t)} \leq 2M.$$

Como $(\ln(r(t)))' = \frac{r'(t)}{r(t)}$, obtemos a desigualdade $(\ln(r(t)))' \leq 2M$. Integrando esta última expressão, temos as seguintes desigualdades:

$$\ln(r(t)) \leq 2Mt \implies r(t) \leq e^{2Mt} - e^c.$$

Aplicando o limite, temos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} e^{2Mt}.$$

Se $t_0 < \infty$, o limite a direita é finito o que implica que $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t)$ é finito, que é uma contradição. $\square$

CAPÍTULO 3

VALORES ATÍPICOS

Neste capítulo, utilizaremos os conceitos discutidos nos Capítulos 1 e 2. O principal objetivo é apresentar o Teorema de Rabier (Teorema 3.11) e um dos principais problemas relacionados a este teorema (veja seção 2 deste capítulo). A ideia deste capítulo é apresentar um problema atual que poderá possivelmente ser desenvolvido em um futuro mestrado acadêmico.

Os conceitos apresentados neste capítulo serão todos formulados para aplicações polinomiais $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. No entanto, os mesmos podem ser apresentados para dimensões maiores, ou seja, para aplicações polinomiais $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, n \geq m$. Veja por exemplo, [2], [8] e suas referências.

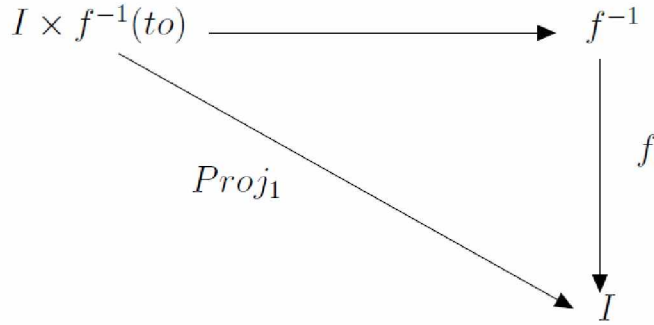
Neste capítulo, apresentamos o conceito de valor atípico, condição de Malgrange e o Teorema de Rabier.

Alguns exemplos interessantes da literatura são apresentados e discutidos.

1 Valores atípicos no plano

A noção de valor atípico depende da seguinte definição:

Definição 3.1. *Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$ é chamado típico se existe um intervalo I de t_0 e um homeomorfismo $\varphi: I \times f^{-1}(t_0) \rightarrow f^{-1}(I)$ tal que o seguinte diagrama comuta:*



onde Proj_1 denota a projeção sobre a primeira coordenada. Em particular, temos que $f^{-1}(t_0)$ é homeomorfo a $f^{-1}(t)$, para todo $t \in I$.

Quando t_0 não é um valor típico, dizemos que t_0 é um valor atípico de f . Denotamos por $\text{Atip}f$ o conjunto formado por todos os valores atípicos de f .

Dada uma função polinomial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a fibra de f em t_0 como sendo o conjunto $f^{-1}(t_0)$.

Exemplo 3.2. Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x$. Temos que 0 é típico.

De fato, considere $I = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Logo, $f^{-1}(0) = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{R}\}$ e

$$f^{-1}(I) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}.$$

Definindo:

$$\varphi : I \times f^{-1}(0) \longrightarrow f^{-1}(I)$$

$$(t, (0, y)) \longmapsto (t, y),$$

temos que $f \circ \varphi(t, (0, y)) = \text{Proj}_1(t, (0, y)) = t$, o que mostra que t é um valor típico. Do mesmo modo, podemos mostrar que para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos que t é um valor típico de $f(x, y) = x$. Ou seja, $\text{Atip}f = \emptyset$.

Um interessante exemplo é o seguinte:

Exemplo 3.3 (Broughton [1]). $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y + x$. Temos que:

$$\nabla f(x, y) = (2xy + 1, x^2),$$

ou seja, f é uma submersão. Temos que para qualquer $\epsilon \neq 0$, ϵ é um valor típico de f .

Vamos supor que $\epsilon > 0$ (os argumentos para $\epsilon < 0$ são análogos). Primeiramente, temos que $f^{-1}(\epsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2y + x = \epsilon\}$, ou seja,

$$f^{-1}(\epsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \frac{\epsilon - x}{x^2}, x \neq 0\}.$$

Considere o intervalo $I = \left(\epsilon - \frac{\epsilon}{2}, \epsilon + \frac{\epsilon}{2}\right)$ e defina:

$$\begin{aligned} \varphi : I \times f^{-1}(\epsilon) &\longrightarrow f^{-1}(I) \\ \left(t, \left(x, \frac{\epsilon - x}{x^2}\right)\right) &\longmapsto \left(x, \frac{t - x}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que:

- (i). φ é contínua.
- (ii). O diagrama da Definição 3.1 comuta com φ .
- (iii). φ é injetora.
- (iv). φ é sobrejetora.

(i). é satisfeitas pois φ é a restrição de uma função racional cujo denominador nunca se anula. (ii). é direto.

(iii). Suponhamos que: $\varphi\left(t_0, \left(x_0, \frac{\epsilon - x_0}{x_0^2}\right)\right) = \varphi\left(t_1, \left(x_1, \frac{\epsilon - x_1}{x_1^2}\right)\right)$, ou seja,

$$\left(x_0, \frac{t_0 - x_0}{x_0^2}\right) = \left(x_1, \frac{t_1 - x_1}{x_1^2}\right).$$

As relações acima implicam $x_0 = x_1$, que implica $\frac{t_0 - x_1}{x_1^2} = \frac{t_1 - x_1}{x_1^2}$. Resolvendo esta última, concluímos que $t_0 = t_1$, ou seja, φ é injetora.

(iv). Seja $Z = (Z_1, Z_2) \in \varphi^{-1}(I)$, ou seja, $Z_1^2 Z_2 + Z_1 = \tilde{t}$, com $\tilde{t} \in I$. Então $Z_2 = \frac{\tilde{t} - Z_1}{Z_1^2}$.

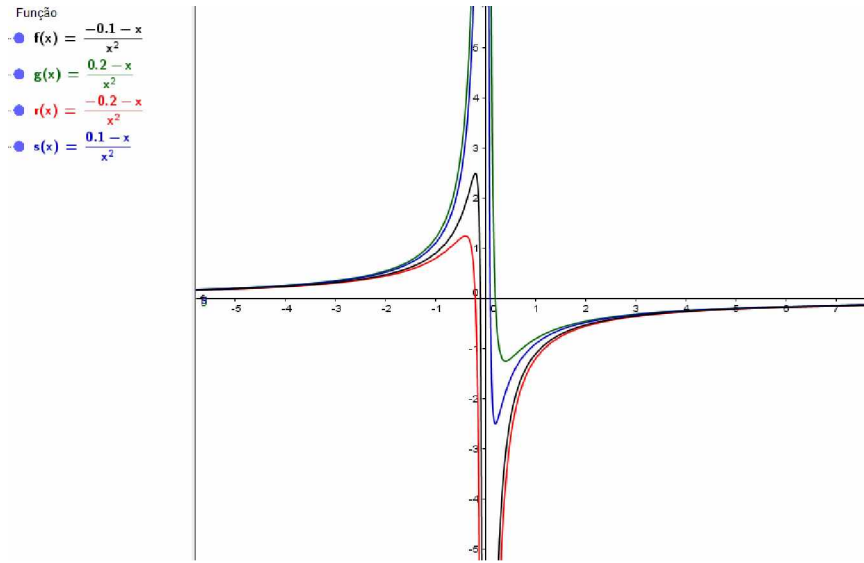
Considerando o ponto $\left(\tilde{t}; \left(Z_1; \frac{\epsilon - Z_1}{Z_1^2}\right)\right) \in I \times f^{-1}(\epsilon)$, temos que

$$\varphi\left(\tilde{t}; \left(Z_1; \frac{\epsilon - Z_1}{Z_1^2}\right)\right) = \left(Z_1; \frac{\tilde{t} - Z_1}{Z_1^2}\right),$$

e como $\left(Z_1; \frac{\tilde{t} - Z_1}{Z_1^2}\right) = (Z_1; Z_2)$, segue que φ é sobrejetora.

Observamos que $f^{-1}(0)$ possui três componentes conexas, enquanto que $f^{-1}(\epsilon)$ possui duas componentes conexas. Em particular, $0 \in \text{Atip}f$. Como f é uma submersão, temos que todas as fibras são localmente homeomorfas (pelo Teorema 2.7), mas não são globalmente homeomorfas.

A próxima figura ilustra o comportamento das fibras de $f(x, y) = x^2y + x$:



Um importante resultado relacionado a *Atipf* é o seguinte (veja [8, Corollary 1.2.14]):

Teorema 3.4. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Então $Atipf$ é um conjunto finito.*

2 Condição de Malgrange

Uma questão natural, a partir da Definição 3.1, é como podemos estimar os valores atípicos de uma dada função polinomial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Uma das maneiras é utilizar a condição de Malgrange e o Teorema de Rabier que apresentamos nesta seção.

Começamos com a seguinte definição:

Definição 3.5. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Definimos:*

$$K_{\infty}(f) = \{t \in \mathbb{R}; \exists \{x_k\} \subseteq \mathbb{R}^2; \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = t, \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| \left\| \left(\frac{\partial f(x_k)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_k)}{\partial y} \right) \right\| = 0\}.$$

Definição 3.6. *Dizemos que uma função polinomial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Malgrange se $K_{\infty}(f) = \emptyset$.*

Exemplo 3.7 (Veja Exemplo 3.3). *Considere o polinômio $f(x, y) = x(xy + 1)$. Temos que $0 \in K_{\infty}(f)$.*

Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2.$$

As condições $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k, y_k\| = \infty$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|(x_k, y_k)\| \cdot \left\| \left(\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y} \right) \right\| = 0,$$

implicam que

$$2xy + 1 \rightarrow 0 \text{ e } x^2 \rightarrow 0 \implies x \rightarrow 0.$$

Isto nos motiva a considerar a sequência $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{-k}{2} \right)$. Temos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{k} \right) = 0.$$

É claro que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty,$$

e além destes temos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| \cdot \|\nabla f(x_k)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{1}{k}, \frac{-k}{2} \right) \right\| \cdot \left\| \left(0, \frac{1}{k^2} \right) \right\| \Rightarrow$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{k^2}{4}} \cdot \frac{1}{k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} k \sqrt{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{4}} = 0.$$

Desta forma, temos que $0 \in \text{Atip}f$.

Exemplo 3.8. Considere o polinômio $f(x, y, z) = x - 3x^5y^2 + 2x^7y^3 + yz$. Temos que $0 \in K_\infty(f)$.

Temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 15x^4y^2 + 14x^6y^3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y3x^5 + 3y^22x^7 + z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y.$$

Tomando a sequência $(x_k, y_k, z_k) = \left(\frac{1}{k}; k^2; 0\right)$, temos que

$$f(x_k, y_k, z_k) = \frac{1}{k} - 3\frac{1}{k^5}k^4 + 2\frac{1}{k^7}k^6 + 0,$$

$$f(x_k, y_k, z_k) = \frac{1}{k} - \frac{3}{k} + \frac{2}{k},$$

$$f(x_k, y_k, z_k) = \frac{0}{k} = 0.$$

Logo, $\lim_{k \rightarrow 0} f(x_k, y_k, z_k) = \lim_{k \rightarrow 0} 0 = 0$. Além disto, temos que $\lim_{k \rightarrow 0} \|(x_k, y_k, z_k)\| = \infty$ e

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left\| \left(\frac{1}{k}; k^2; 0 \right) \right\| \cdot \left\| \left(1 - 15\frac{1}{k^4}k^4 + 14\frac{1}{k^6}k^6; -2k^23\frac{1}{k^5} + 3k^42\frac{1}{k^7} + 0; k^2 \right) \right\|,$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left\| \left(\frac{1}{k}; k^2; 0 \right) \right\| \cdot \left\| \left(1 - 15 + 14; \frac{-6}{k^3} + \frac{6}{k^3}; k^2 \right) \right\|,$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left\| \left(\frac{1}{k}; k^2; 0 \right) \right\| \cdot \|(0, 0, k^2)\|,$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{k^2} + k^4 + 0} \cdot \sqrt{0 + 0 + k^4},$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1 + k^6}{k^2}} \cdot \sqrt{k^4},$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} k^2 \frac{\sqrt{1 + k^6}}{k},$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} k \sqrt{1 + k^6} = 0.$$

Estes mostram que $0 \in \text{Atip}f$.

Relacionado a condição de Malgrange, temos a seguinte condição:

Definição 3.9. Dada uma função polinomial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definimos:

$$\tilde{K}_\infty(f) = \{t \in \mathbb{R}; \exists \{x_k\} \subseteq \mathbb{R}^2; \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = t, \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_k), \frac{\partial f}{\partial y}(x_k) \right) \right\| = 0\}.$$

Pelas Definições 3.5 e 3.9, temos $K_\infty(f) \subset \tilde{K}_\infty(f)$.

De fato, se $t \in K_\infty(f)$, temos que existe $\{x_k\}$ tal que:

- (i). $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = t$,
- (ii). $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$,
- (iii). $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| \cdot \left\| \left(\frac{\partial f(x_k)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_k)}{\partial y} \right) \right\| = 0$.

Em particular, esta última, implica que $\nabla(x_k)$ converge para 0. Isto e as duas primeiras condições implicam que todas as propriedades de $\tilde{K}_\infty(f)$ são satisfeitas. Logo, $t \in \tilde{K}_\infty(f)$ e portanto $K_\infty(f) \subset \tilde{K}_\infty(f)$.

O próximo exemplo mostra que $\tilde{K}_\infty(f)$ pode ser grande e que a inclusão $K_\infty(f) \subset \tilde{K}_\infty(f)$ pode ser estrita.

Exemplo 3.10. *Considere o polinômio*

$$f(x, y, z) = x + x^2y + x^4yz.$$

Então f é uma submersão e $\mathbb{R}^* \subset \tilde{K}_\infty(f)$. Dado $a \in \mathbb{R}^*$, tomemos a curva

$$\gamma_a(s) = \left(s, \frac{2a}{s^2}, \frac{(1 + (4a)^{-1}s)}{2s^2} \right).$$

Temos que

$$f(\gamma_a(s)) = a + s \left(1 + \frac{1}{4a} \right) \rightarrow a$$

e

$$\nabla f(\gamma_a(s)) = \left(0, s^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{8a} \right), 2as^2 \right) \rightarrow 0,$$

quando $s \rightarrow 0$.

De fato, no exemplo acima temos que $Atipf = K_\infty(f) = \{0\}$ e $\tilde{K}_\infty(f) = \mathbb{R}$, veja [4].

2.1 Teorema de Rabier

A seguir, apresentamos o seguinte caso particular do Teorema de Rabier, que é útil para estimar $Atipf$.

Teorema 3.11 (Versão particular do teorema de Rabier). *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação polinomial. Então*

$$Atip(f) \subset f(Singf) \cup K_\infty(f),$$

onde $f(Singf)$ denota o conjunto dos valores críticos de f .

Exemplo 3.12. Considere $f(x, y) = x^2y + x$. Temos que $\{0\} = \text{Atip}f = K_\infty(f)$ e $f(\text{Sing}f) = \emptyset$ (veja Exemplos 3.3 e 3.7).

A demonstração do Teorema 3.11 pode ser vista em [4] e [7]. Em particular, pelos resultados de [4], segue que $f(\text{Sing}f) \cup K_\infty(f)$ é sempre finito.

Seja $t_0 \notin f(\text{Sing}f) \cup K_\infty(f)$. Um dos passos da demonstração do Teorema 3.11 para mostrar que $t_0 \notin \text{Atip}f$ é mostrar que as curvas integrais do campo $\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|^2}$ são limitadas em um aberto $f^{-1}(I)$, $t_0 \in I$, I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Isto segue pela Proposição 2.14.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] S. A. Broughton. *Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces*, Invent. Math., 92(2): 217–241 (1988).
- [2] L.R.G. Dias, *Regularity at infinity and global fibrations of real algebraic maps*, tese de Doutorado, Universidade de São Paulo (2013).
- [3] H. H. Domingues, *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*, Atual Editora (1982).
- [4] K. Kurdyka, P. Orro, S. Simon, *Semialgebraic Sard Theorem for Generalized Critical Values*, J. Differential Geometry 56, 67–92 (2000).
- [5] E. L. Lima, *Curso de Análise, v.2*, Projeto Euclides, SBM, Rio de Janeiro (2003).
- [6] E. L. Lima, *Espaço Métrico*, Projeto Euclides, SBM, Rio de Janeiro (2003).
- [7] P.J. Rabier, *Ehresmann fibrations and Palais-Smale conditions for morphisms of Finsler manifolds*. Ann. of Math. 146, 647–691, (1997).
- [8] M. Tibar, *Polynomials and vanishing cycles*, volume 170, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge (2007).