

JÉSSICA CRISTIANE ANDRADE

**VALIDAÇÃO DE UM MODELO NUMÉRICO DA
VIBRAÇÃO DE UMA PLACA METÁLICA
RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2020

JÉSSICA CRISTIANE ANDRADE

**VALIDAÇÃO DE UM MODELO NUMÉRICO DA
VIBRAÇÃO DE UMA PLACA METÁLICA
RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de graduação em Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **Bacharel em Engenharia Mecânica**.

Área de Concentração: Vibrações

Orientador: Prof. Me. Pedro Pio Rosa Nishida

Uberlândia – MG

2020

JÉSSICA CRISTIANE ANDRADE

**VALIDAÇÃO DE UM MODELO NUMÉRICO DA
VIBRAÇÃO DE UMA PLACA METÁLICA
RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA**

Trabalho de conclusão do curso de **Engenharia
Mecânica** pela Faculdade de Engenharia Mecânica da
Universidade Federal de Uberlândia.

Área de Concentração: Vibrações

Banca Examinadora:

Prof. Me. Pedro Pio Rosa Nishida – FEMEC – UFU – Orientador

Prof. Dr. Alexandre Zuquete Guarato – FEMEC – UFU

Eng. Mecânico Rafael Nardon Ferraresi

Uberlândia, 2020

Aos meus pais.
Sem vocês, nada disso seria possível.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por todo o amparo e cuidado comigo ao longo do curso, estando presente em todos os momentos da minha vida, iluminando e guiando sempre meu caminho.

Dedico um agradecimento especial aos meus pais que sempre estiveram comigo, nunca mediram esforços para fazer tudo o que estivesse ao alcance deles por mim, para me ver feliz e por todo amor, apoio e incentivo.

Ao meu irmão, pelo companheirismo e amizade, sendo uma pessoa incrível em diversos sentidos e a qual eu tenho como exemplo para mim.

Ao meu namorado que, mesmo distante, sempre se fez presente, me apoiando em minhas decisões e dizendo as coisas certas nas horas certas, pelo amor, carinho, cuidado e compreensão.

À minha família, aos meus primos, tios e padrinhos por sempre, a cada encontro, me ensinarem a dar valor ao que realmente importa na vida.

Agradeço também à Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e à Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC) pela oportunidade de fazer este curso de graduação, bem como todos os professores, técnicos e funcionários que passaram pela e contribuíram com a minha vida acadêmica.

Ao meu orientador, Prof. Me. Pedro Pio Rosa Nishida, pela orientação, pelo apoio e pela calma e tranquilidade transmitidas em nossos encontros.

Não posso deixar de agradecer também aos meus amigos que tornaram esta caminhada um pouco mais leve e que conseguiram me alegrar mesmo nos momentos mais difíceis: às minhas amigas da graduação Rafaella, Carol, Giovanna e Thaís, pelas dificuldades que passamos juntas e por saber que sempre posso contar com vocês.

Às minhas amigas das antigas, Victoria, Jéssica e Julia: por mais que tenhamos nos distanciado com as novas rotinas após o ensino médio, cada encontro e cada conversa eram como se nada tivesse mudado.

E, por fim, mas não menos importante, aos meus amigos do Centro de Voluntariado Universitário (CVU), por serem pessoas admiráveis, que dedicam parte do seu tempo a fazerem a diferença no mundo, na vida de outras pessoas e que dão vida ao projeto que eu mais amei ter vivenciado durante a faculdade.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente tornaram esta conquista possível, os meus mais sinceros agradecimentos!

ANDRADE, J. C. **Validação de um modelo numérico da vibração de uma placa metálica retangular simplesmente apoiada**. 2020, 94 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

Resumo

O objetivo principal do estudo de vibrações refere-se à determinação dos seus efeitos sobre o desempenho e a segurança das estruturas e dos sistemas mecânicos, para o controle dos mesmos. Diversas estruturas são formadas parcial ou integralmente por placas, que se configuram como componentes leves, versáteis e econômicos, e o crescimento de aplicações de estruturas deste tipo tem sido notável nas últimas décadas, especialmente na indústria aeroespacial. Nesse sentido, o presente trabalho evidencia o estudo da análise de vibrações de uma placa retangular simplesmente apoiada em suas quatro bordas, com o intuito de validar um modelo numérico que represente adequadamente a teoria. Para isto, primeiramente, os procedimentos de cálculo foram desenvolvidos para a obtenção da equação diferencial do movimento da placa. A partir desta solução analítica, que é exata para a placa com as condições de contorno em questão, determinou-se as frequências naturais, os modos de vibração e a resposta da placa a excitações externas. Depois disso, realizou-se a modelagem numérica da placa e, de posse dos resultados obtidos, foram comparadas as soluções analítica e numérica. Concluiu-se a validação do modelo numérico utilizado para todos os parâmetros de estudo desejados e ainda propôs-se ao longo do projeto a realização de uma análise experimental em um trabalho futuro para comparação com os resultados apresentados e para aproveitamento didático nas aulas realizadas no Laboratório de Acústica e Vibrações da Universidade Federal de Uberlândia.

Palavras Chave: frequências naturais, modos de vibração, placa simplesmente apoiada, solução analítica, análise numérica.

ANDRADE, J. C. **Validation of a numerical model of a metallic rectangular simply supported plate vibration.** 2020, 94 f. Final Project – Federal University of Uberlandia, Uberlandia.

Abstract

The main objective of the vibration study refers to the determination of its effects over the structure and mechanical systems performance and safety, for the control of these effects. Several structures are partial or integrally composed by plates, which are light, versatile and economic components, and the increase in applications of this kind of structures has been remarkable in recent decades, especially in the aerospace industry. In this way, the present work demonstrates the analysis study of a rectangular plate vibration that is simply supported in its four edges with the intention of validate a numerical model which properly represents the theory. For this purpose, firstly, the calculation procedures were carried out to obtain the governing differential equation of the plate. From this analytical solution, which is exact for the plate with the boundary conditions under discussion, the natural frequencies, the mode vibration and the answer of the plate to external excitations were determined. After that, the numerical modeling of the plate was held and, with the obtained results, the analytical and numerical solutions were compared. The validation of the numerical model used was concluded for all the desired researched parameters and in addition it was proposed throughout the project the development of an experimental analysis in a future work to the comparison with the presented results and to the didactic utilization in the classes taught at the Acoustics and Vibrations Laboratory from the Federal University of Uberlandia.

Keywords: natural frequencies, mode vibration, simply supported plate, analytical solution, numerical analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Vibrações induzidas pelo vento sobre a ponte Tacoma Narrows.	14
Figura 1.2 – Ideia da bancada experimental a ser desenvolvida em trabalho futuro.	15
Figura 2.1 – Posicionamento da placa no sistema $Oxyz$	24
Figura 2.2 – Cinemática da deformação da placa.	25
Figura 2.3 – Estado de tensão do elemento de volume.	26
Figura 2.4 – Momentos devido à flexão da placa.	29
Figura 2.5 – Transformação de momentos.	31
Figura 2.6 – Coordenadas curvilíneas ao longo do contorno Γ	37
Figura 2.7 – Equilíbrio do elemento de placa.	41
Figura 2.8 – Condições de contorno clássicas.	44
Figura 3.1 – Placa retangular simplesmente apoiada.	48
Figura 3.2 – Geometria do elemento SHELL63.	59
Figura 4.1 – Modo de vibração (1,1) da placa retangular simplesmente apoiada.	65
Figura 4.2 – Modo de vibração (1,2) da placa retangular simplesmente apoiada.	66
Figura 4.3 – Modo de vibração (2,1) da placa retangular simplesmente apoiada.	66
Figura 4.4 – Modo de vibração (2,2) da placa retangular simplesmente apoiada.	67
Figura 4.5 – Modos de vibração da placa simplesmente apoiada pela solução analítica.	68
Figura 4.6 – Modos de vibração da placa simplesmente apoiada pela solução numérica.	69
Figura 4.7 – Resultado analítico da resposta da placa à excitação na frequência de 160 Hz.	70
Figura 4.8 – Resultado numérico da resposta da placa à excitação na frequência de 160 Hz.	70
Figura 4.9 – Resultado analítico da resposta da placa à excitação na frequência de 275 Hz.	71
Figura 4.10 – Resultado numérico da resposta da placa à excitação na frequência de 275 Hz.	71
Figura 4.11 – Resultado analítico da resposta da placa à excitação na frequência de 300 Hz.	72
Figura 4.12 – Resultado numérico da resposta da placa à excitação na frequência de 300 Hz.	72
Figura 4.13 – Resultado analítico da resposta da placa à excitação na frequência de 425 Hz.	73
Figura 4.14 – Resultado numérico da resposta da placa à excitação na frequência de 425 Hz.	73
Figura 4.15 – Resultado analítico da resposta da placa à excitação na frequência de 480 Hz.	74
Figura 4.16 – Resultado numérico da resposta da placa à excitação na frequência de 480 Hz.	74
Figura 5.1 – Gerador de sinais.	76
Figura 5.2 – Vibrador mecânico.	77
Figura 5.3 – Sistema de fixação (haste, arruela e porca).	77
Figura 5.4 – Placa metálica retangular.	77
Figura 5.5 – Material sólido em pó.	78
Figura 5.6 – Representação ilustrativa da ideia da montagem experimental.	78
Figura 5.7 – Representação da ideia do experimento com a visualização do vibrador.	79
Figura 5.8 – Adaptação para isolamento das vibrações do alto-falante.	79

Figura 5.9 – Ideias de representação experimental da condição de contorno de simples apoio	81
Figura 5.10 – Estrutura de sustentação e duplo entalhe em V para condição de contorno de simples apoio.....	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Tabela dos coeficientes de expansão P_{rn} para os principais tipos de carregamento.	51
Tabela 3.2 – Coeficientes para o cálculo das frequências naturais aproximadas para placas retangulares (isotrópicas e ortotrópicas).....	56
Tabela 3.3 – Propriedades físicas e geométricas da placa.	57
Tabela 4.1 – Frequências naturais exatas em rad/s	62
Tabela 4.2 – Frequências naturais exatas em Hz	62
Tabela 4.3 – Frequências naturais aproximadas em Hz	63
Tabela 4.4 – Erros relativos dos valores de frequências naturais aproximados	64
Tabela 4.5 – Frequências naturais pela análise numérica em Hz	64
Tabela 4.6 – Erros relativos das frequências naturais obtidas pela solução numérica	65

SUMÁRIO

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO.....	13
1.1 Contextualização.....	13
1.2 Objetivos.....	16
1.3 Revisão Bibliográfica.....	16
1.3.1 <i>Dinâmica e Vibrações.....</i>	16
1.3.2 <i>Vibrações de Placas.....</i>	18
1.3.3 <i>Método dos Elementos Finitos.....</i>	19
CAPÍTULO II - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	23
2.1 Teoria Clássica de Placas.....	23
2.1.1 <i>Teoria da Elasticidade.....</i>	25
2.1.2 <i>Tensão em um Ponto.....</i>	26
2.1.3 <i>Expressões de Deformação e Relações de Tensão-Deformação.....</i>	26
2.1.4 <i>Definição de Curvaturas.....</i>	28
2.1.5 <i>Relações de Momentos-Curvaturas.....</i>	29
2.1.6 <i>Transformação Espacial de Momentos.....</i>	30
2.2 Relações Resultantes da Análise da Flexão de Placas.....	32
2.2.1 <i>Expressão do Princípio de Hamilton.....</i>	32
2.2.2 <i>Energia de Deformação.....</i>	32
2.2.3 <i>Energia Cinética.....</i>	34
2.2.4 <i>Energia Potencial.....</i>	35
2.2.5 <i>Equação do Movimento a partir do Princípio de Hamilton.....</i>	36
2.3 Vibrações Livres de uma Placa Retangular.....	43
2.4 Condições de Contorno Elementares.....	44
CAPÍTULO III - METODOLOGIA.....	47
3.1 Proposta Inicial do Trabalho.....	47
3.2 Placa Retangular Simplesmente Apoiada nas Quatro Bordas.....	48
3.2.1 <i>Modos de Vibrar e Frequências Naturais.....</i>	48
3.2.2 <i>Resposta da Placa Simplesmente Apoiada a uma Determinada Excitação.....</i>	49
3.3 Placa com Diferentes Combinações das Condições de Contorno.....	54
3.3.1 <i>Frequências Naturais.....</i>	54

3.4 Características da Placa	57
3.5 Programa Desenvolvido para Solução Analítica	58
3.6 Modelagem da Placa através do Método dos Elementos Finitos	58
CAPÍTULO IV - RESULTADOS E DISCUSSÕES	61
4.1 Frequências Naturais	61
4.1.1 <i>Frequências Naturais Exatas</i>	61
4.1.2 <i>Frequências Naturais Aproximadas</i>	62
4.1.3 <i>Frequências Naturais pela Análise Numérica</i>	64
4.2 Modos de Vibirar	65
4.3 Resposta da Placa à Aplicação de uma Carga	70
CAPÍTULO V - PROJETO CONCEITUAL DO EXPERIMENTO	76
5.1 Componentes	76
5.2 Condições de Contorno	79
CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES	83
SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	85
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	86
ANEXO A – CÓDIGO DO PROGRAMA NO MATLAB®	89
ANEXO B – MODELO NUMÉRICO IMPLEMENTADO NO ANSYS®	92

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

As vibrações estão presentes nas funções humanas vitais mais simples em que se pode imaginar, tais como nas vibrações dos tímpanos que permitem a audição e das ondas de luz que possibilitam a visão; a respiração, por sua vez, relaciona-se com a vibração dos pulmões e a emissão vocal deve-se ao movimento oscilatório da laringe e da língua (RAO, 2004).

Conforme Rao (2004) apresenta sobre o histórico da vibração, as suas origens se deram com o desenvolvimento dos primeiros instrumentos musicais e com os estudos sobre a música e o som. A compreensão sobre os fenômenos da natureza e as teorias matemáticas desenvolvidas a respeito da vibração de sistemas físicos foram os assuntos aos quais os primeiros intelectuais dedicaram maior atenção. Já as contribuições mais recentes relacionam-se especialmente com situações aplicadas à engenharia.

Com o objetivo de obter estruturas cada vez mais leves, os pioneiros da aeronáutica precisavam controlar os problemas de dinâmica estrutural e vibrações: a partir da década de 1920, os engenheiros aeronáuticos foram forçados a reconhecer a importância da mecânica das vibrações, cuja teoria tornou-se relevante nos estudos da aeronáutica, para a previsão do comportamento elástico das aeronaves (GÉRADIN; RIXEN, 1997).

O famoso caso do colapso da ponte de Tacoma Narrows (Figura 1.1), nos Estados Unidos, ocorrido no mesmo ano em que foi realizada sua inauguração (1940) é um exemplo de um fenômeno próprio do assunto de vibrações denominado ressonância: ocorre quando o sistema, sujeito a uma vibração forçada, é obrigado a vibrar na frequência da excitação externa que coincide com uma de suas frequências naturais (THOMSON; DAHLEH, 1998). O resultado disso são oscilações amplas e perigosas que podem arruinar por completo

estruturas de pontes, prédios e asas de aeronaves, por exemplo, o que torna imprescindível a determinação das frequências naturais de uma estrutura no campo dos estudos de dinâmica e vibrações.

Figura 1.1 – Vibrações induzidas pelo vento sobre a ponte Tacoma Narrows.



Fonte: Rao (2004).

Outras diversas e importantes aplicações do estudo de vibrações relacionadas aos problemas de engenharia atualmente referem-se a: balanceamento de motores, pás e rotores de turbinas, máquinas centrífugas pesadas, mancais e engrenagens, processos de fabricação; assuntos estes que podem ser associados ao fenômeno de falha por fadiga, ao desgaste acelerado de componentes, ao desconforto, à geração de ruídos, e à ineficiência, improdutividade e inadequação de processos e produtos, por exemplo.

Porém, por outro lado, os estudos na área de vibrações podem ser voltados para tópicos também bastante úteis no sentido positivo de utilizá-las em favor do desenvolvimento e da tecnologia. Aplicações industriais deste tipo envolvem transportadores vibratórios, peneiras, compactadores, testes vibratórios de materiais e melhoria nos processos de fabricação de materiais, tais como fundição, usinagem, forjamento, soldagem (RAO, 2004).

Com esta breve contextualização e apresentação de aplicações, é possível perceber a abrangência do assunto de vibrações que se ramifica em diversos conteúdos mais específicos, entre os quais se destaca o estudo de vibrações de placas. Este, apesar de inicialmente fornecer a impressão de ser muito simples, pode ser aprofundado de várias maneiras e ainda consolida a base dos estudos aplicados à aeronáutica.

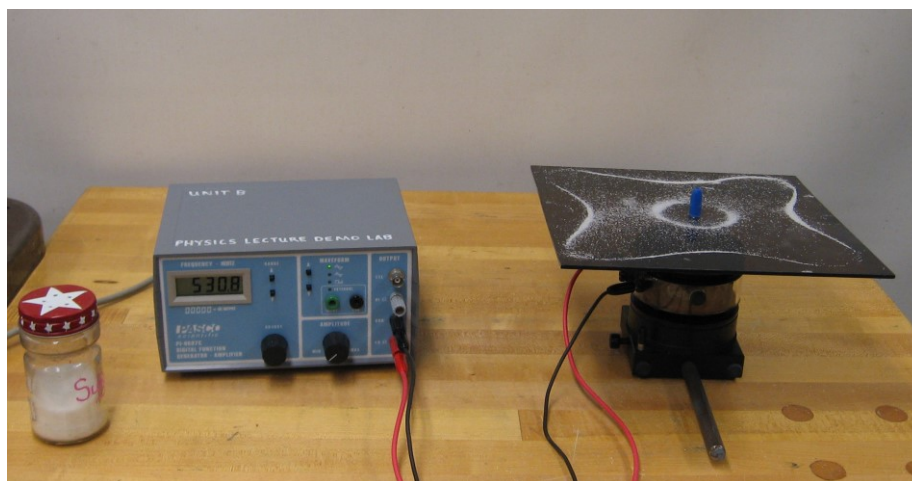
Na atualidade, o estudo das vibrações de placas alcançou especial importância e notável crescimento de aplicações, dado que diversos componentes na engenharia de estruturas podem ser enquadrados neste assunto, como Szilard (2004) explica: na engenharia civil, exemplos típicos são pisos e lajes de fundação, eclusas, paredes finas de

contenção, tabuleiros e lajes de pontes; na construção naval (casco, convés e superestrutura de um navio) e na indústria aeroespacial (asas e grande parte da fuselagem de uma aeronave), as placas são indispensáveis; e estas são elementos bastante encontrados também como componentes de maquinários e em outros dispositivos mecânicos.

A intenção deste trabalho é desenvolver uma análise numérica da vibração de uma placa retangular, cujas condições de contorno correspondem às quatro bordas simplesmente apoiadas em suas extensões, para que em um trabalho futuro seja desenvolvido um aparato experimental que represente na prática os modos de vibrar e a resposta da placa a excitações externas. Além disso, idealiza-se aproveitá-lo para posterior utilização didática, auxiliando na explicação da teoria de vibrações através da visualização real de um assunto que muitas vezes parece ser abstrato e complexo para os estudantes.

Uma imagem que ilustra bem a inspiração do desenvolvimento deste trabalho é indicada pela Figura 1.2, onde uma bancada experimental com os principais componentes está montada. Almeja-se que este experimento pretendido, concluído em momento posterior, seja capaz de validar as soluções analítica e numérica desenvolvidas neste projeto.

Figura 1.2 – Ideia da bancada experimental a ser desenvolvida em trabalho futuro.



Fonte: University of Michigan (2020).

Nas apresentações do Laboratório de Acústica e Vibrações, durante as aulas de Introdução à Engenharia Mecânica, a demonstração do experimento pode estimular os alunos e despertar o interesse pelos estudos na área de acústica e vibrações, atraindo mais pessoas para o desenvolvimento de pesquisas neste laboratório.

1.2 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é realizar a validação numérica de um modelo de movimento vibratório forçado de uma placa simplesmente apoiada em suas quatro bordas. Para isso, devem ser determinadas as frequências naturais e os modos de vibração da placa. Além disso, objetiva-se apresentar o projeto conceitual do experimento a ser desenvolvido como uma continuação deste trabalho, que possa ser aproveitado didaticamente pelos alunos da graduação sobre os conteúdos acerca das vibrações de sistemas mecânicos e, de forma mais específica, quanto à vibração de placas.

Os objetivos específicos deste projeto definidos para a conclusão do mesmo consistem em:

- elaborar a revisão bibliográfica a respeito dos conteúdos de dinâmica e vibrações, vibrações de placas e método dos elementos finitos;
- desenvolver um programa no software MATLAB® que calcule as frequências naturais, os modos de vibrar e a resposta da placa a vibrações forçadas;
- implementar um modelo numérico adequado via método dos elementos finitos;
- caracterizar conceitualmente as ideias acerca da montagem experimental;
- coletar os dados obtidos com as soluções analítica e numérica;
- avaliar e comparar os resultados encontrados para verificação e validação do modelo numérico.

1.3 Revisão Bibliográfica

O objetivo principal do estudo de vibrações é a determinação de seus efeitos sobre o desempenho e a segurança dos sistemas e, por consequência, o controle dos mesmos. Para a compreensão adequada deste assunto e dos demais tópicos apresentados no presente trabalho, são importantes os conhecimentos prévios a respeito dos conteúdos de dinâmica e vibrações, resistência dos materiais, equações diferenciais e métodos numéricos.

1.3.1 Dinâmica e Vibrações

As vibrações se tratam de movimentos oscilatórios de sistemas dinâmicos, os quais se referem a associações de materiais que possuem massa e cujas partes podem apresentar movimento relativo, ou seja, todos os corpos dotados de massa e elasticidade

são capazes de vibrar (TSE; MORSE; HINKLE, 1978). De maneira simplificada e com outras palavras, as vibrações são movimentos alternativos que ocorrem em torno de posições de equilíbrio, com amplitudes relativamente pequenas.

Sobre este assunto é importante apresentar alguns tipos de classificações relacionados aos sistemas oscilatórios. A classificação mais geral identifica a vibração como livre ou forçada (THOMSON; DAHLEH, 1998): denomina-se vibração livre quando forças que são inerentes ao sistema promovem a oscilação do mesmo sem a atuação de nenhuma força externa; a vibração forçada, por sua vez, acontece quando a excitação de forças externas atua sobre o sistema, a qual, quando oscilatória, força este a vibrar na mesma frequência. Deve-se mencionar ainda que na vibração livre, o sistema pode oscilar sob uma ou mais de suas frequências naturais, as quais são próprias do sistema dinâmico, definido pela sua rigidez e distribuição de massa.

Segundo Thomson e Dahleh (1998), os sistemas oscilatórios podem ser classificados também, de modo geral, como lineares ou não-lineares: caso todos os componentes básicos do sistema (massa, mola e amortecedor) sejam lineares, o sistema caracteriza-se como linear, o princípio de superposição aplica-se nesta hipótese e os métodos matemáticos são bem desenvolvidos; porém, se algum dos elementos apresenta comportamento não linear, o sistema é não linear, o princípio citado não se aplica e os métodos são bem menos conhecidos e dificilmente aplicáveis para sua análise. Apesar disso, como estes correspondem ao estado final ao qual todos os sistemas tendem com o aumento da amplitude da oscilação, o conhecimento sobre eles torna-se relevante ao analisar os sistemas na prática.

O procedimento da análise de vibrações inclui uma série de etapas para a previsão do comportamento dos sistemas dinâmicos, cujas respostas normalmente são dependentes das condições iniciais e das excitações externas ao longo do tempo. A maioria deles são muito complexos, de modo que apenas as características mais importantes são consideradas, além da definição das condições de entrada. As etapas que constituem o procedimento de análise são nesta ordem: modelagem matemática, obtenção das equações governantes, solução destas e interpretação dos resultados obtidos (RAO, 2004).

A primeira etapa citada consiste na representação dos aspectos mais importantes do sistema a fim de se obter as equações matemáticas que regem o seu comportamento. A partir do modelo matemático estabelecido, são utilizados os princípios da dinâmica e realizada a derivação das equações que caracterizam as vibrações do sistema. Com a resolução destas equações, determinam-se as respostas do sistema vibratório, através dos deslocamentos, velocidades e acelerações das várias massas do sistema, tornando possível a compreensão do problema proposto, conforme Rao (2004) esclarece.

1.3.2 Vibrações de Placas

De acordo com Szilard (2004), as placas podem ser definidas simplificadaamente como componentes estruturais planos, retos e bidimensionais, cuja espessura apresenta-se com dimensão pelo menos 10 vezes menor que o comprimento e a largura. O formato e as extremidades físicas podem assumir variadas geometrias e as condições de contorno podem ser classificadas como livres, de apoio simples, fixas, incluindo também os casos de apoios e restrições elásticas e apoios pontuais.

Mais leves, as placas são vantajosas em termos econômicos e, como uma série de estruturas são formadas parcial ou integralmente por elas, economias de material e de custo de mão de obra são amplamente alcançadas com sua utilização, o que explica sucintamente a razão pela qual este assunto atingiu tamanha importância e notável crescimento de suas aplicações recentemente, de maneira especial na indústria aeroespacial (SZILARD, 2004).

As placas podem ser divididas em grandes categorias considerando a razão entre a espessura e o comprimento principal (h/L) e algumas características relacionadas ao seu comportamento. As placas rígidas, que comumente são denominadas simplesmente placas, diferenciam-se das membranas pelo fato de possuírem rigidez à flexão, a qual resulta de sua espessura e da elasticidade de seu material (BLEVINS, 2001).

Além das placas rígidas e membranas, cujas faixas de razão (h/L) são definidas entre $1/50$ e $1/10$ e menores que $1/50$, respectivamente, Szilard (2004) ainda estabelece mais duas classes. As membranas são elementos extremamente finos que não possuem rigidez à flexão e estas duas classes adicionais referem-se: ao grupo das placas moderadamente espessas (com a razão h/L entre $1/10$ e $1/5$), que se diferenciam das placas rígidas pelos consideráveis efeitos das forças cisalhantes transversais; e ao grupo das placas espessas (com razão h/L acima de $1/5$) que apresentam condições internas de tensão que se assemelham às de uma estrutura tridimensional.

Para realização da análise de uma placa é necessário implementar idealizações a respeito da sua geometria e apoios, do comportamento do material e dos tipos de carga e modos de aplicação. Isto ocorre porque a análise de uma estrutura real leva o estudo a um grau de complexidade tão elevado que a sua fiel representação torna a pesquisa inviável em diversos aspectos. Dessa forma, a estrutura real deve ser substituída por um modelo simplificado que assegure as principais características de seu comportamento.

Para a resolução e conclusão da análise das vibrações de uma placa são aplicadas as equações governantes da teoria da elasticidade, porém as soluções exatas são obtidas apenas para específicas condições de contorno e de carga (SZILARD, 2004). Na maioria

dos casos, métodos de energia podem fornecer soluções analíticas razoáveis para problemas práticos. Porém, hoje em dia, os métodos de solução numéricos, a exemplo do método dos elementos finitos, alcançaram maior importância, especialmente pelo advento da ampla e facilitada utilização dos computadores atualmente, bem como devido à simplificação, rapidez e precisão obtidas pela técnica de discretização para resolução de problemas complexos com a aplicação destes métodos.

A base da Teoria Clássica de Placas foi estabelecida por Kirchhoff em 1850 com a determinação de algumas aproximações para simplificação da análise de placas, como uma extensão da Teoria de Euler-Bernoulli sobre vigas da situação unidimensional para a bidimensional (REDDY, 2006).

Outra teoria bastante utilizada, denominada “*first-order shear deformation theory*” (teoria da deformação por cisalhamento de primeira ordem, em sua tradução), é uma extensão do modelo de viga proposto por Timoshenko, que se baseia na teoria clássica, porém com algumas diferenças, considerando os efeitos de cisalhamento (REDDY, 2006).

Timoshenko (1940), citado por Reddy (2006), inclusive, contribuiu muito com a teoria de placas com a primeira publicação de sua obra intitulada “*Theory of Plates and Shells*” em 1940, que apresenta avaliações do comportamento de placas e cascas com diversas geometrias, condições de contorno, aplicações de carregamento e propriedades materiais. E desde então, a aplicação prática deste assunto se difundiu bastante com a divulgação de inúmeros trabalhos na área.

Algumas obras importantes relacionadas especificamente ao desenvolvimento inicial e responsáveis por guiar as pesquisas deste trabalho podem ser aqui mencionadas como: o livro “*Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*” de Blevins (2001) e o artigo “*The Free Vibration of Rectangular Plates*” de Leissa (1973). Além destes, como apontado, foram encontradas ainda várias publicações que estudam o comportamento das diferentes categorias destas estruturas (membranas, placas finas, moderadamente espessas e espessas), caracterizadas por diversos formatos geométricos, condições iniciais, de contorno e de carregamento.

1.3.3 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos trata-se de uma técnica matemática de análise numérica baseada na discretização, ao considerar um meio contínuo, uma placa, por exemplo, como um conjunto de elementos de dimensão reduzida (pequenos componentes) finitos. Tais elementos preservam as propriedades do meio que constituem e a resposta do

sistema se dá pela resolução simultânea das equações que governam os mesmos por um software computacional.

O procedimento de divisão de um sistema em suas partes elementares individuais bem definidas e mais facilmente entendidas seguido da reunião das mesmas para compreensão do sistema como um todo acompanha, intuitiva e naturalmente, o homem nas mais diversas áreas de estudo (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2013).

Geralmente, com a implementação deste procedimento, praticamente qualquer fenômeno natural pode ser descrito, acompanhado do auxílio de leis da física e de ferramentas da matemática. Os modelos matemáticos são desenvolvidos considerando o comportamento do objeto de estudo com a utilização de axiomas e leis governantes. Estes são frequentemente caracterizados por equações diferenciais e integrais sobre domínios geométricos bastante complexos, que necessitariam de inúmeras simplificações para obtenção de sua solução analítica até o efetivo advento da tecnologia computacional, iniciado há cerca de quatro décadas (REDDY, 2006).

A simulação numérica resultante do desenvolvimento de métodos numéricos aplicados em programas computacionais possibilita a análise de modelos matemáticos complexos, auxiliando a solução de diversos problemas práticos da engenharia e permitindo a análise dos efeitos de variados parâmetros sobre a resposta do sistema. Com esta técnica, o processo pode ser melhor compreendido, acompanhado ainda de maiores economias de tempo e de recursos materiais, em comparação com o uso de técnicas experimentais para se atingir o mesmo nível de esclarecimento acerca do assunto (REDDY, 2006).

Szilard (2004), ao descrever o Método dos Elementos Finitos, apresenta as características e os fatos principais que explicam a sua ampla utilização e popularidade, os quais são: a familiaridade dos engenheiros com a sua proposta; a facilidade de visualização e simplicidade de modelagem através de sua implementação; a disseminação do uso dos computadores nas últimas décadas; e a versatilidade e flexibilidade do método, de modo que a base de determinado programa pode ser utilizada para a resolução de problemas variados.

Cook et al. (2001) ainda apresentam mais algumas vantagens do Método dos Elementos Finitos (MEF) em relação a outros métodos numéricos, a exemplo do fato do MEF ser aplicável para resolução de problemas de áreas diversas (como transferência de calor, campos magnéticos, análises de tensões, dinâmica de fluidos), não havendo restrição geométrica, muito menos restrições para condições de contorno e carregamentos, as quais podem variar entre as diferentes porções do meio analisado; as propriedades do material não se restringem à isotropia, podendo variar entre os elementos ou ainda no interior de um

elemento; e a aproximação deste método pode ser aprimorada com a ampliação da quantidade de elementos da malha nos locais em que as variações de campo são maiores e melhores resoluções são necessárias.

As etapas para aplicação da análise segundo o Método dos Elementos Finitos são:

Discretização do meio contínuo, seleção das funções de forma adequada, formulação do elemento, aplicação das condições de contorno e de carregamentos, montagem do sistema discretizado, solução do sistema de equações resultante e, por fim, computação dos resultados. (SZILARD, 2004, p. 365)

Considerando, neste momento, um breve histórico deste assunto, nas décadas de 1950 e 1960, os programas computacionais para solução de problemas práticos similares ao que hoje é conhecido como método dos elementos finitos só existiam na indústria aeroespacial, a qual foi fundamental para o desenvolvimento e melhoria dos métodos de análise numéricos (BRAUER, 1993).

O artigo de Turner et al. (1956) é considerado por muitos como o precursor no estabelecimento do método dos elementos finitos. Segundo Brauer (1993), dois dos autores estavam imersos no campo da aeronáutica, sendo Turner funcionário da Boeing Aircraft e Martin da Engenharia Aeronáutica da Universidade de Washington. Clough era professor de Engenharia Civil na Universidade da Califórnia e criou o termo “elementos finitos” em um artigo publicado em 1960.

Argyris e Kelsey (1960), citados por Brauer (1993), publicaram um livro com muitas contribuições para o assunto, embora o termo “método dos elementos finitos” não estivesse literalmente evidenciado. Na década de 1960, diversos softwares de MEF estavam sendo desenvolvidos, incluindo o NASTRAN®, concebido pela NASA.

Cook et al. (2001), em sua revisão histórica, remontam as origens do uso deste método como hoje é conhecido ao matemático Courant, que propôs a divisão de uma seção transversal em regiões triangulares para se determinar a rigidez à torção de um eixo oco.

Na opinião de Brauer (1993), as origens desta técnica foram provavelmente estabelecidas por diversos contribuintes pioneiros de forma independente por volta das décadas de 1950 e 1960, de forma que o método se consolidou e posteriormente se popularizou com o desenvolvimento dos softwares computacionais de aplicação do MEF.

Gupta e Meek (1996) sugerem que cinco grupos de artigos podem ser considerados como fundamentais para o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos, cujas autorias são de Courant (1943), já mencionado anteriormente, Argyris (1960), Turner et al. (1956), Clough (1960), e Zienkiewicz (1967), citados por Gupta e Meek (1996). Argyris determinou técnicas numéricas para aplicação do princípio virtual do trabalho em forma de

matrizes, as quais se identificam como a base para grande parte das análises de tensões no MEF.

No artigo de Turner, foram desenvolvidos a matriz de rigidez de elementos triangulares e o estudo da convergência de deslocamento de elementos planares, comparando-se com outros métodos e analisando uma viga com as extremidades fixa e livre. Clough, por sua vez, deu continuidade aos estudos de convergência dos elementos de tensão e nomeou o método, conforme já explicitado. E Zienkiewicz esclareceu melhor as técnicas de minimização utilizadas por Courant e viabilizou a resolução de problemas de campo pelo MEF, além de ter publicado o primeiro livro sobre o método em 1965, popularizando o assunto (GUPTA; MEEK, 1996).

Segundo Chróścielewski, Gilewski e Kreja (2011), as origens da aplicação do método dos elementos finitos aos estudos de placas e cascas se deram com um grupo de pesquisas liderado pelo professor R. W. Clough. Este grupo demonstrou que problemas de flexão de placas poderiam ser solucionados pelo MEF satisfatoriamente (ADINI; CLOUGH, 1960), além de terem publicado trabalhos científicos acerca da utilização de elementos triangulares para a modelagem de estruturas reais de placas produzindo excelentes resultados (CLOUGH; TOCHER, 1965).

CAPÍTULO II

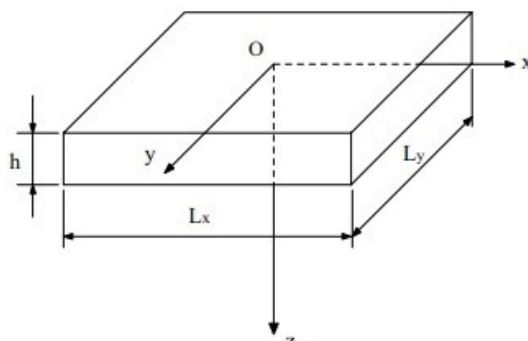
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, serão explicitados os conteúdos relativos à Teoria de Placas, necessários à compreensão do seu comportamento dinâmico. Inicialmente, serão apresentadas as hipóteses da Teoria de Kirchhoff, que simplificam o problema da análise de placas, e os parâmetros indispensáveis da teoria da elasticidade, acompanhados de suas relações (tensão, deformação, momentos internos, entre outros). Depois disso, o desenvolvimento da teoria de placas propriamente dito, baseado no Princípio de Hamilton, resultará na obtenção da equação diferencial governante do seu movimento. E por fim, serão estabelecidas as condições de contorno clássicas do objeto de estudo em questão.

2.1 Teoria Clássica de Placas

Para esta análise, será considerada uma placa livre de espessura h , com dimensões características L_x e L_y ao longo dos eixos identificados pelos respectivos índices, posicionada em um sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$ de acordo com a Figura 2.1, sendo que Ox e Oy coincidem com seus eixos principais de inércia.

Figura 2.1 – Posicionamento da placa no sistema $Oxyz$.



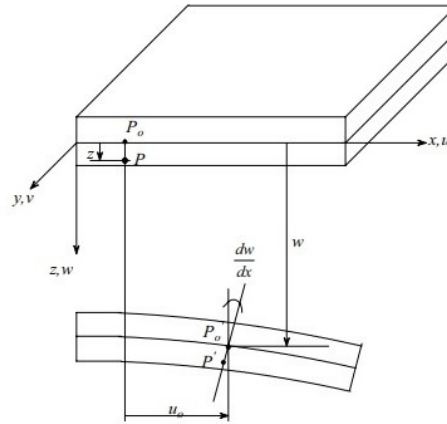
Fonte: Santana (2002).

O objetivo principal deste capítulo é explicitar a flexão de placas finas segundo a teoria de Kirchhoff, de modo a permitir a análise das vibrações livres das placas e do seu comportamento dinâmico quando sujeitas a determinados carregamentos e condições de contorno. A base da fundamentação teórica apresentada reside no trabalho de G radin e Rixen (1997).

As hipóteses adotadas, seguindo a teoria mencionada, podem ser enunciadas da seguinte forma:

1. A placa fina apresenta espessura h , possuindo um plano médio localizado em $z = 0$ e, conseqüentemente, suas faces externas, paralelas ao mesmo, são identificadas em $z = \pm \frac{1}{2}h$;
2. Somente o deslocamento transversal (w) será considerado, o qual também é chamado de deflexão;
3. A tensão normal ao plano médio σ_z é pequena comparada às demais componentes de tensão e pode ser negligenciada nas relações de tensão-deformação;
4. As seções transversais, inicialmente normais ao plano médio antes da flexão, permanecem planas e ortogonais ao plano médio durante a deformação e o comprimento de seus elementos não é alterado, o que significa que as deformações de cisalhamento γ_{xz} e γ_{yz} são desprezadas;
5. Os deslocamentos u e v no plano Oxy resultam dos dois seguintes efeitos:
 - ✓ Um campo de deslocamento inicial, uniforme ao longo da espessura e decorrente de um carregamento no plano da placa;
 - ✓ Um campo de deslocamento devido à rotação das seções transversais.

Figura 2.2 – Cinemática da deformação da placa.



Fonte: Santana (2002).

Apresentadas estas hipóteses da Teoria de Kirchhoff e considerando a cinemática da deformação de uma placa fina ilustrada na Figura 2.2, podem ser estabelecidas as seguintes relações para u , v e w , componentes do vetor deslocamento nas direções x , y e z , respectivamente:

$$u = u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$v = v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$w = w(x, y) \quad (2.3)$$

Onde $u_0(x, y)$ e $v_0(x, y)$ são deslocamentos resultantes de uma extensão inicial da placa através de uma pré-carga no plano médio.

2.1.1 Teoria da Elasticidade

No presente tópico será apresentada uma explicação acerca da teoria da elasticidade com o objetivo de introduzir e facilitar a compreensão da teoria de placas a ser desenvolvida posteriormente.

Quando um corpo é submetido à ação de forças externas, o mesmo se deforma com o surgimento de tensões e deformações internas. Esta reação do corpo é dependente da sua geometria, dos carregamentos aplicados e das propriedades do material.

Tendo isso em vista, a teoria da elasticidade trata especificamente dos materiais linearmente elásticos (cujas relações entre tensão e deformação são lineares e as

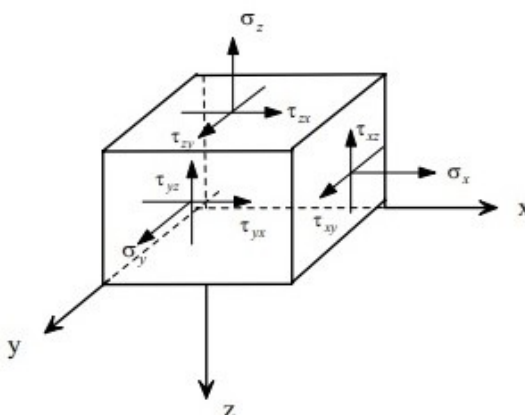
deformações e tensões produzidas são eliminadas diante da remoção das forças externas). Além disso, ela assume que os materiais são homogêneos e isotrópicos, o que significa que suas propriedades são as mesmas em todos os pontos e em todas as direções.

2.1.2 Tensão em um Ponto

Considerando um ponto material qualquer no interior de um corpo elástico sujeito a forças externas (no caso a placa representada na Figura 2.1) e estabelecendo seu posicionamento segundo o sistema de coordenadas cartesiano, torna-se conveniente assumir que este elemento de volume possui suas faces paralelas aos planos coordenados.

As tensões atuantes sobre o elemento podem ser decompostas em componentes normal e tangencial em cada face, conforme a imagem seguinte (Figura 2.3), que ilustra apenas os vetores nas faces frontais, sendo que o primeiro índice se refere à direção normal em relação ao plano correspondente e o segundo índice, no caso das componentes cisalhantes, à direção da própria tensão.

Figura 2.3 – Estado de tensão do elemento de volume.



Fonte: Santana (2002).

2.1.3 Expressões de Deformação e Relações de Tensão-Deformação

As deformações devido às tensões normais e de cisalhamento da placa indicadas na Figura 2.3, atentando-se às hipóteses da Teoria Clássica e de acordo com o tensor de deformação de Green (para grandes deslocamentos), podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

As componentes não nulas são então coletadas em uma matriz coluna de deformações da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

E esta matriz pode ser decomposta em outras três matrizes colunas constituídas por elementos de mesmo grau (graus 0, 1 e 2) em termos da deflexão w , conforme se segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

A Lei de Hooke generalizada em função das deformações ε_x , ε_y e γ_{xy} pode ser evidenciada segundo as componentes de tensão:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (2.13)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (2.14)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \frac{E(1-\nu)}{2(1-\nu^2)} \gamma_{xy} \quad (2.15)$$

De modo que se torna possível estabelecer a relação de tensão-deformação matricial:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.16)$$

Através da definição das matrizes de tensão e de coeficientes elásticos conforme se segue:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{H} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

2.1.4 Definição de Curvaturas

A matriz coluna que representa as curvaturas é definida por:

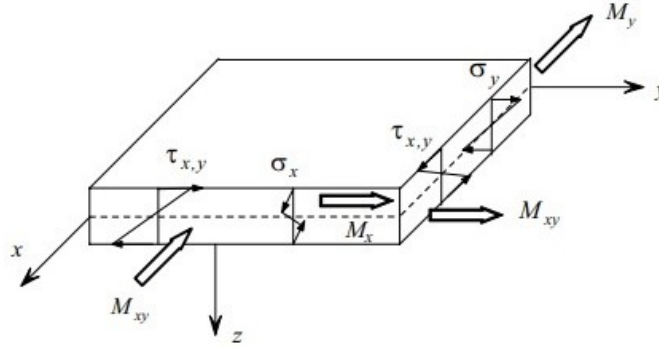
$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Os dois primeiros termos representam as principais curvaturas da placa nas direções x e y , respectivamente, e o terceiro indica a curvatura produzida pela torção. As deformações devido à flexão linear e as tensões relativas podem, então, ser associadas da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = z \boldsymbol{\chi} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \quad (2.20)$$

2.1.5 Relações de Momentos-Curvaturas

Figura 2.4 – Momentos devido à flexão da placa.



Fonte: Santana (2002).

Os momentos devido à flexão (por unidade de comprimento) atuantes sobre a placa podem ser obtidos pela integração das tensões ao longo da espessura:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \boldsymbol{\sigma} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon} dz \quad (2.21)$$

Como os termos antissimétricos da equação (2.12) são os únicos que contribuem para o cálculo dos momentos, é possível escrever:

$$\mathbf{M} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \boldsymbol{\sigma}^{(1)} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \mathbf{H} \boldsymbol{\chi} dz \quad (2.22)$$

Resolvendo esta integral, são obtidas as seguintes equações para os momentos por unidade de comprimento:

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (2.23)$$

$$M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (2.24)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.25)$$

Sendo D o módulo de rigidez da placa, definido por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.26)$$

Uma nova matriz de coeficientes elásticos, já considerando a integração ao longo da espessura, pode assim ser determinada:

$$\mathbf{H}^* = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

E as expressões dos momentos podem ser reescritas resumidamente na forma matricial:

$$\mathbf{M} = \mathbf{H}^* \mathbf{X} \quad (2.28)$$

2.1.6 Transformação Espacial de Momentos

Enunciando a matriz de momentos internos (também por unidade de comprimento) no sistema de coordenadas cartesianas Oxy em um dado ponto da maneira como Szilard (2004) apresenta, em uma matriz quadrada, tem-se que:

$$\mathbf{M}_{Oxy} = \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{yx} & M_y \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Onde $M_{xy} = M_{yx}$. Porém, quando se deseja definir estes momentos em qualquer outro plano transversal, torna-se necessário utilizar a transformação de coordenadas do sistema Oxy para um sistema Ons através da manipulação matricial de rotação, sendo que a nova matriz de momentos internos será definida por:

$$\mathbf{M}_{Ons} = \begin{bmatrix} M_n & M_{ns} \\ M_{sn} & M_s \end{bmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{M}_{Oxy} \mathbf{R}^T \quad (2.30)$$

Onde $\mathbf{R}$ é a matriz de rotação:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

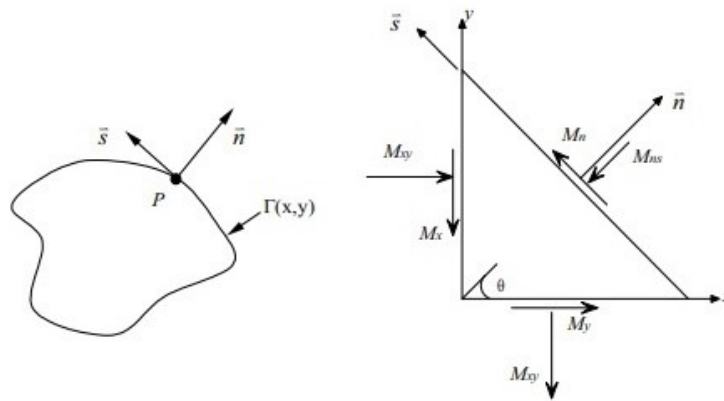
Para a compreensão do novo sistema de coordenadas (Ons) utilizado para obtenção dos momentos internos em um plano transversal qualquer, rotacionado de um ângulo θ em relação ao sistema Oxy , é apresentada a Figura 2.5. Considerando o contorno arbitrário Γ com cossenos diretores $(l, m, 0)$ do vetor normal $\vec{n}$ em um ponto deste contorno, os momentos em Γ são chamados M_n , M_s e M_{ns} , sendo:

M_n = momento de flexão no plano Onz , com direção tangente ao contorno

M_s = momento de flexão na direção perpendicular

M_{ns} = momento de torção em torno da direção normal

Figura 2.5 – Transformação de momentos.



Fonte: Santana (2002).

Ao efetuar as operações de produto entre matrizes que resultam na definição da matriz $\mathbf{M}_{Ons}$, são obtidas as relações de momento, podendo-se definir os momentos M_n , M_s e M_{ns} em função de M_x , M_y e M_{xy} , e vice-versa:

$$M_n = l^2 M_x + 2lm M_{xy} + m^2 M_y \quad (2.32)$$

$$M_s = l^2 M_y - 2lm M_{xy} + m^2 M_x \quad (2.33)$$

$$M_{ns} = lm(M_y - M_x) + M_{xy}(l^2 - m^2) \quad (2.34)$$

$$M_x = l^2 M_n - 2lm M_{ns} + m^2 M_s \quad (2.35)$$

$$M_y = l^2 M_s + 2lm M_{ns} + m^2 M_n \quad (2.36)$$

$$M_{xy} = lm(M_n - M_s) + M_{ns}(l^2 - m^2) \quad (2.37)$$

2.2 Relações Resultantes da Análise da Flexão de Placas

2.2.1 Expressão do Princípio de Hamilton

Na ausência de forças não conservativas sobre o sistema, o princípio de Hamilton é representado por:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} - \mathcal{V}) dt = 0 \quad (2.38)$$

Sendo $\mathcal{T}$ a energia cinética e $\mathcal{V}$ a energia potencial, as quais serão apresentadas nos próximos subtópicos.

2.2.2 Energia de Deformação

A energia de deformação é calculada pela integração da densidade de energia de deformação sobre o volume:

$$\mathcal{V}_{int} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (2.39)$$

Que pode ser decomposta segundo os diferentes graus das componentes de deformação em relação à w :

$$\mathcal{V}_{int} = \mathcal{V}_{int}^{(0)} + \mathcal{V}_{int}^{(1)} + \mathcal{V}_{int}^{(2)} + O(w^3) \quad (2.40)$$

Sendo:

$$\mathcal{V}_{int}^{(0)} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)T} \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} dV \quad (2.41)$$

$$\mathcal{V}_{int}^{(1)} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)T} \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} dV \quad (2.42)$$

$$\mathcal{V}_{int}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)T} \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} dV + \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)T} \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} dV \quad (2.43)$$

E $O(w^3)$ representante dos termos de ordem superior que não são abordados nesta teoria.

O primeiro termo ($\mathcal{V}_{int}^{(0)}$) refere-se à energia de deformação decorrente da extensão inicial da placa, de modo que se deslocamentos iniciais (u_0, v_0) forem determinados, a expressão desta energia torna-se:

$$\mathcal{V}_{int}^{(0)} = \text{constante} \quad (2.44)$$

E, dessa maneira, tal componente não contribui na equação do movimento.

O segundo termo (componente de primeira ordem - $\mathcal{V}_{int}^{(1)}$) será considerado nulo, sendo negligenciado por contribuir apenas com a expressão de equilíbrio da placa sob pré-tensão.

$$\mathcal{V}_{int}^{(1)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz \int_S \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} dS = 0 \quad (2.45)$$

A componente quadrática ($\mathcal{V}_{int}^{(2)}$), por sua vez, pode ser integrada ao longo da espessura, obtendo-se:

$$\mathcal{V}_{int}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_S \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{H}^* \boldsymbol{\chi} dS + \int_S \mathbf{N}_0^T \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} dS \quad (2.46)$$

Onde o primeiro termo refere-se à energia de deformação devido à flexão de origem linear e o segundo se refere ao efeito de pré-tensão, representado em termos das tensões iniciais de membrana da placa, expresso por:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}_0 = \mathbf{N}_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} dz = 0 \quad (2.47)$$

2.2.3 Energia Cinética

A energia cinética é calculada pela integração sobre o volume da energia cinética do volume elementar:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (2.48)$$

Sendo ρ a densidade volumétrica e $\dot{u}$, $\dot{v}$ e $\dot{w}$ as componentes do vetor velocidade (derivada do deslocamento em relação ao tempo) de um elemento nas direções x , y e z , respectivamente. Considerando as aproximações dos deslocamentos segundo a teoria de Kirchhoff (equações 2.1, 2.2 e 2.3), a energia cinética pode ser escrita como:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_S \rho \left\{ \dot{w}^2 + z^2 \left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dS dz \quad (2.49)$$

A visualização desta equação de forma separada (como apresentado abaixo) facilitará o entendimento dos procedimentos de cálculo seguintes:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_S \rho \dot{w}^2 dS dz + \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_S \rho z^2 \left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right] dS dz \quad (2.50)$$

Dessa forma, os cálculos de integração sobre a espessura podem continuar sendo desenvolvidos, definindo-se a massa por unidade de área (m_s) e o momento de inércia correspondente em função do raio de giração (r) da seção transversal:

$$m_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz \quad (2.51)$$

$$m_s r^2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz \quad (2.52)$$

O que resulta na seguinte expressão para a energia cinética:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_S m_s \left\{ \dot{w}^2 + r^2 \left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dS \quad (2.53)$$

Na equação acima, o primeiro termo representa a energia cinética de translação da placa e os dois últimos representam os efeitos de rotação. No contexto da teoria clássica das placas, estes efeitos podem ser desprezados, pois eles se tornam significativos apenas quando a contribuição cisalhante é realmente importante. Assim, a expressão da energia cinética pode ser, enfim, aproximada por:

$$\mathcal{T} \cong \frac{1}{2} \int_S m_s \dot{w}^2 dS \quad (2.54)$$

2.2.4 Energia Potencial

A energia potencial pode ser dividida em duas partes identificadas por energia de deformação ($\mathcal{V}_{int}$) e energia de carregamento externo ($\mathcal{V}_{ext}$).

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{int} + \mathcal{V}_{ext} \quad (2.55)$$

A energia potencial associada ao carregamento externo $p(x, y, t)$ assume a forma:

$$\mathcal{V}_{ext} = - \int_S w p dS \quad (2.56)$$

De modo a simplificar a análise, será considerado que a placa está livre de momentos distribuídos e de carregamentos em seus contornos.

Em relação à energia potencial de deformação, será considerado que a placa não está submetida à extensão inicial, ou seja, $N_0 = 0$. Com isso, a energia interna indicada em (2.46) torna-se:

$$\mathcal{V}_{int} = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{x}^T \mathbf{H}^* \mathbf{x} dS \quad (2.57)$$

A qual desenvolvida equivale a:

$$\mathcal{V}_{int} = \frac{1}{2} \int_S D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dS \quad (2.58)$$

2.2.5 Equação do Movimento a partir do Princípio de Hamilton

Neste subtópico, serão desenvolvidos os procedimentos de cálculo de simplificação das expressões de variação das energias potencial e cinética para posterior aplicação do princípio de Hamilton, seguida e acompanhada da análise de equilíbrio deduzidas em pontos distintos da placa. Com este intuito, inicialmente, será considerada a variação da energia interna, conforme a expressão:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{V}_{int} = \int_S D \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right. \\ + \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \\ \left. \cdot (1-\nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right\} dS \end{aligned} \quad (2.59)$$

Realiza-se então uma primeira integração por partes, utilizando as igualdades provenientes do Teorema de Green:

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial x} v dS = \int_{\Gamma} luv d\Gamma - \int_S u \frac{\partial v}{\partial x} dS \quad (2.60)$$

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial y} v dS = \int_{\Gamma} muv d\Gamma - \int_S u \frac{\partial v}{\partial y} dS \quad (2.61)$$

Obtendo-se:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{V}_{int} = \int_{\Gamma} \left\{ \left[lD \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + m(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right. \\ + \left[mD \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + l(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \Big\} d\Gamma \\ - \int_S \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right. \\ + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \Big\} dS \end{aligned} \quad (2.62)$$

Onde o primeiro termo representa o trabalho virtual devido às tensões de flexão no contorno da placa. Esta equação pode ser reescrita em termos dos momentos definidos pela equação (2.28) da seguinte forma:

$$\delta \mathcal{V}_{int} = \int_{\Gamma} - \left[(lM_x + mM_{xy}) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + (mM_y + lM_{xy}) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] d\Gamma \quad (2.63)$$

$$- \int_S \left\{ \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dS$$

Considerando agora as forças cisalhantes definidas por unidade de comprimento (por analogia com as vigas):

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (2.64)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (2.65)$$

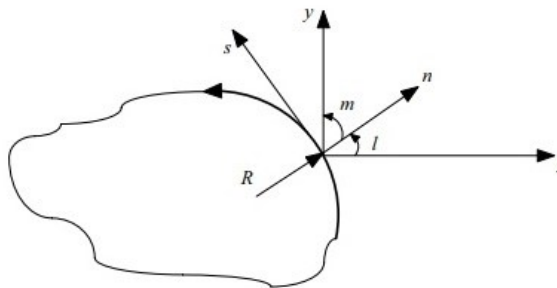
E procedendo com uma segunda integração por partes, obtém-se:

$$\delta \mathcal{V}_{int} = \int_{\Gamma} \left\{ - \left[(lM_x + mM_{xy}) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + (mM_y + lM_{xy}) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Gamma$$

$$+ \int_{\Gamma} \left\{ l \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + m \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \right\} \delta w d\Gamma \quad (2.66)$$

$$- \int_S \left[\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right] \delta w dS$$

Figura 2.6 – Coordenadas curvilíneas ao longo do contorno Γ .



Fonte: Santana (2002).

Agora, a primeira integral da equação (2.66) ao longo do contorno será definida em termos da derivada da deflexão da placa em relação ao parâmetro s ao longo do contorno e sua direção normal $\vec{n}$, utilizando-se as fórmulas de diferenciação:

$$\frac{\partial}{\partial x} = l \frac{\partial}{\partial n} - m \frac{\partial}{\partial s} \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = m \frac{\partial}{\partial n} + l \frac{\partial}{\partial s} \quad (2.68)$$

Com isso, a primeira integral da expressão (2.66) torna-se:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Gamma} \left\{ -[l^2 M_x + 2lm M_{xy} + m^2 M_y] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) \right. \\ &\quad \left. - [ml(M_y - M_x) + (l^2 - m^2) M_{xy}] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right) \right\} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \left\{ -M_n \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) - M_{ns} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right) \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.69)$$

Realizando-se a integração por partes em termos da variável s , o resultado final da expressão da integral I_1 é:

$$I_1 = \int_{\Gamma} \left[-M_n \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \delta w \right] d\Gamma - [M_{ns} \delta w]_{\Gamma} \quad (2.70)$$

O segundo termo da integral da equação (2.66) ao longo do contorno é reescrito separadamente a seguir (2.71) e será desenvolvido através das fórmulas de diferenciação (2.67) e (2.68).

$$I_2 = \int_{\Gamma} \left\{ l \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + m \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \right\} \delta w d\Gamma \quad (2.71)$$

Serão considerados os efeitos do sistema curvilíneo formado pelas coordenadas (n, s) , segundo os quais os cossenos diretores do vetor normal variam com o raio de curvatura, como expressam o conjunto de equações (2.72) e (2.73):

$$\frac{\partial l}{\partial n} = 0 \quad \frac{\partial l}{\partial s} = -\frac{m}{R} \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial m}{\partial n} = 0 \quad \frac{\partial m}{\partial s} = \frac{l}{R} \quad (2.73)$$

Com a aplicação dos cálculos indicados, a expressão de I_2 é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial M_n}{\partial n} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + \frac{1}{R}(M_n - M_s) \right\} \delta w \, d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \left\{ Q_n + \frac{1}{R}(M_n - M_s) \right\} \delta w \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.74)$$

A variação da energia de deformação, então, assume a expressão final:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{V}_{int} &= \int_{\Gamma} \left[-M_n \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) + K_n \delta w \right] d\Gamma - [M_{ns} \delta w]_{\Gamma} \\ &\quad - \int_S \left[\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right] \delta w \, dS \end{aligned} \quad (2.75)$$

Onde o termo K_n envolve a força cisalhante de Kirchhoff (Q_n):

$$\begin{aligned} K_n &= Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + \frac{1}{R}(M_n - M_s) \\ &= \frac{\partial M_n}{\partial n} + 2 \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + \frac{1}{R}(M_n - M_s) \end{aligned} \quad (2.76)$$

No caso de uma placa com propriedades uniformes, a integral em relação à superfície pode ser apresentada de maneira simplificada em função da deflexão vertical:

$$\int_S \left[\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right] \delta w \, dS = - \int_S D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \delta w \, dS \quad (2.77)$$

Finalizado o desenvolvimento da análise de variação da energia interna de deformação, será considerada a variação da energia cinética:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T} \, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_S \frac{1}{2} m_s \dot{w}^2 \, dS \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_S \frac{1}{2} m_s \dot{w} \delta \dot{w} \, dS \, dt \quad (2.78)$$

A integração por partes em relação ao tempo é realizada:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T} dt = \left[\int_S \frac{1}{2} m_s \dot{w} \delta w dS \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_S m_s \ddot{w} \delta w dS dt \quad (2.79)$$

Com a aplicação das condições do princípio de Hamilton, o primeiro termo se anula, resultando em:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_S m_s \ddot{w} \delta w dS dt \quad (2.80)$$

A variação da energia potencial devido à força externa é dada por:

$$\delta \mathcal{V}_{ext} = - \int_S p \delta w dS \quad (2.81)$$

E, finalmente, obtém-se a expressão variacional segundo o princípio de Hamilton, reunindo-se os termos obtidos nas equações (2.75), (2.80) e (2.81):

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} - \mathcal{V}) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ [M_{ns} \delta w]_{\Gamma} + \int_{\Gamma} \left[M_n \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) - K_n \delta w \right] d\Gamma \right. \\ & \quad \left. + \int_S \left[\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - m_s \ddot{w} + p \right] \delta w dS \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (2.82)$$

A partir desta expressão, as equações de equilíbrio da placa podem ser inferidas como se segue:

✓ Em qualquer ponto da superfície:

$$\boxed{\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - m_s \ddot{w} + p = 0} \quad \text{em } S \quad (2.83)$$

✓ Em qualquer ponto do contorno regular da placa, podendo ser livre ou fixo:

- Considerando a condição da força cisalhante ou do deslocamento vertical:

$$K_n = 0 \quad \text{ou} \quad w = 0 \quad \text{em } \Gamma \quad (2.84)$$

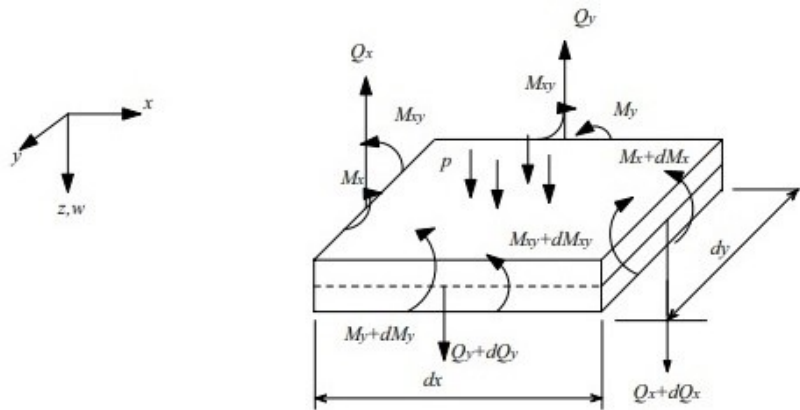
- Considerando a condição do momento de flexão normal ou a curvatura normal:

$$M_n = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{em } \Gamma \quad (2.85)$$

- ✓ Em qualquer ponto angular do contorno, considerando a força cisalhante de Kirchhoff, provocada pela descontinuidade do momento de torção, ou o deslocamento vertical:

$$Z_n = M_{ns}^+ - M_{ns}^- = 0 \quad \text{ou} \quad w = 0 \quad (2.86)$$

Figura 2.7 – Equilíbrio do elemento de placa.



Fonte: Santana (2002).

Como é possível observar através da Figura 2.7, a equação de equilíbrio (2.83) e a definição das forças cisalhantes Q_x e Q_y em (2.64) e (2.65) resultam das considerações de equilíbrio do elemento volumétrico da placa, que apresenta dimensões dx e dy . Analisando-se o equilíbrio na direção vertical, a seguinte expressão é obtida:

$$dQ_x dy + dQ_y dx + (p - m_s \ddot{w}) dx dy = 0 \quad (2.87)$$

Que pode também ser apresentada como:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - m_s \ddot{w} + p = 0 \quad (2.88)$$

E as forças cisalhantes, por sua vez, resultam da análise do equilíbrio de momentos em torno dos eixos Ox e Oy , obtendo-se, respectivamente, em uma aproximação de primeira ordem:

$$dM_x dy + dM_{xy} dx - Q_x dx dy = 0 \quad (2.89)$$

$$dM_y dx + dM_{xy} dy - Q_y dx dy = 0 \quad (2.90)$$

Que fornecem as relações:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (2.91)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (2.92)$$

A substituição das equações (2.91) e (2.92) em (2.88) permite a reescrita da expressão do equilíbrio vertical em função dos momentos conforme apresentado abaixo:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p - m_s \ddot{w} = 0 \quad (2.93)$$

E utilizando as relações de momentos e curvaturas, indicadas nas equações (2.23), (2.24) e (2.25), além de considerar que o material apresenta propriedades homogêneas, a equação diferencial da deflexão vertical da placa pode ser expressa da seguinte forma:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + m_s \ddot{w} - p = 0 \quad (2.94)$$

Ou ainda, em termos do operador de Laplace:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (2.95)$$

A equação do movimento da placa assume, enfim, a seguinte expressão em sua forma mais simplificada:

$$D \Delta \Delta w + m_s \ddot{w} - p = 0 \quad (2.96)$$

2.3 Vibrações Livres de uma Placa Retangular

Considerando a hipótese de vibrações livres (caracterizada pelo movimento harmônico e pela ausência de carga externa), a equação do movimento da placa homogênea e isotrópica (não submetida à pré-tensão) torna-se:

$$\Delta\Delta w - \frac{\omega^2 m_s}{D} w = 0 \quad (2.97)$$

Para o desenvolvimento da solução geral, define-se a igualdade:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 m_s}{D} \quad (2.98)$$

De modo que a equação do movimento pode ser reescrita como:

$$(\Delta + \beta^2)(\Delta - \beta^2)w = 0 \quad (2.99)$$

E as funções w_1 e w_2 são definidas, de modo que a solução geral w é expressa em função delas:

$$(\Delta - \beta^2)w_1 = 0 \quad (\Delta + \beta^2)w_2 = 0 \quad (2.100)$$

$$w = w_1 + w_2 \quad (2.101)$$

Substituindo a equação (2.101) em (2.99), obtém-se:

$$(\Delta + \beta^2)(\Delta - \beta^2)(w_1 + w_2) = -2\beta^2(\Delta + \beta^2)w_2 = 0 \quad (2.102)$$

Para w_1 , a solução geral é do tipo exponencial:

$$w_1 = e^{\alpha x} e^{\gamma y} \quad \alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2 \quad (2.103)$$

Enquanto a solução geral de w_2 assume a forma complexa:

$$w_2 = e^{i\alpha x} e^{i\gamma y} \quad \alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2 \quad (2.104)$$

Diante dos possíveis sinais que as constantes α e γ podem assumir, a solução completa em termos de funções hiperbólicas e trigonométricas é dada conforme se segue, sendo que os valores das constantes A_i e dos parâmetros α e γ são dependentes das condições de contorno.

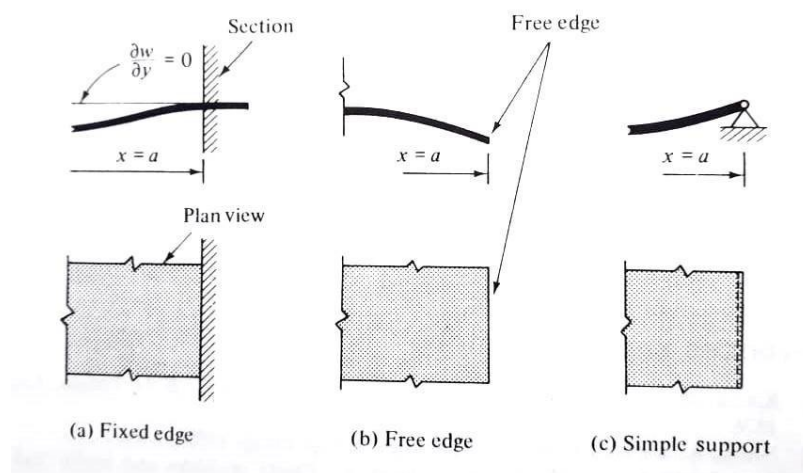
$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & A_1 \sin \alpha x \sin \gamma y + A_2 \cos \alpha x \sin \gamma y + A_3 \sin \alpha x \cos \gamma y \\
 & + A_4 \cos \alpha x \cos \gamma y + A_5 \sinh \alpha x \sinh \gamma y + A_6 \cosh \alpha x \sinh \gamma y \\
 & + A_7 \sinh \alpha x \cosh \gamma y + A_8 \cosh \alpha x \cosh \gamma y
 \end{aligned} \quad (2.105)$$

2.4 Condições de Contorno Elementares

De acordo com Szilard (2004), a solução da equação do movimento da placa, apresentada em (2.96), deve satisfazer simultaneamente a própria equação diferencial e as condições de contorno. Sendo esta uma equação diferencial de quarta ordem, são necessárias duas condições de contorno para cada limite da placa, as quais podem estar relacionadas ao deslocamento (deflexão e inclinação) ou aos esforços internos (momentos de torção, de flexão e força tangencial) no caso da teoria de placas.

As condições de contorno clássicas da placa são representadas pelas bordas fixas (engastadas), livres e simplesmente apoiadas, as quais estão ilustradas na Figura 2.8.

Figura 2.8 – Condições de contorno clássicas.



Fonte: Szilard (2004).

Considerando a Figura 2.1 como referência para o posicionamento da placa em um sistema de coordenadas cartesiano e supondo que ela apresenta as quatro bordas

engastadas, a deflexão e a inclinação ao longo dos eixos destas bordas serão nulas, o que pode ser expresso por:

$$\begin{cases} w = 0 \text{ para } x = -\frac{L_x}{2} \text{ e } x = \frac{L_x}{2} \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ para } x = -\frac{L_x}{2} \text{ e } x = \frac{L_x}{2} \\ w = 0 \text{ para } y = -\frac{L_y}{2} \text{ e } y = \frac{L_y}{2} \\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ para } y = -\frac{L_y}{2} \text{ e } y = \frac{L_y}{2} \end{cases} \quad (2.106)$$

Para o caso em que a placa possui todas as bordas livres, sem carregamentos, o momento de flexão e a força transversal cisalhante que atuam sobre os limites da placa são nulos:

$$\begin{cases} M_x = 0 \text{ para } x = -\frac{L_x}{2} \text{ e } x = \frac{L_x}{2} \\ V_x = 0 \text{ para } x = -\frac{L_x}{2} \text{ e } x = \frac{L_x}{2} \\ M_y = 0 \text{ para } y = -\frac{L_y}{2} \text{ e } y = \frac{L_y}{2} \\ V_y = 0 \text{ para } y = -\frac{L_y}{2} \text{ e } y = \frac{L_y}{2} \end{cases} \quad (2.107)$$

A força transversal cisalhante nas bordas é constituída pelo próprio cisalhamento transversal e pelos efeitos devido ao momento de torção:

$$\begin{aligned} V_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \quad \text{para } x = -\frac{L_x}{2} \text{ e } x = \frac{L_x}{2} \\ V_y &= Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] \quad \text{para } y = -\frac{L_y}{2} \text{ e } y = \frac{L_y}{2} \end{aligned} \quad (2.108)$$

Através das suposições e manipulações realizadas por Szilard (2004) e utilizando as definições dos momentos de (2.23) e (2.24), as condições de contorno apresentadas nas equações (2.107) e (2.108) podem ser simplificadas para as bordas livres como se segue:

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = 0 \quad \text{para } x = -\frac{L_x}{2} \text{ e } x = \frac{L_x}{2} \quad (2.109)$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] = 0 \quad \text{para } y = -\frac{L_y}{2} \text{ e } y = \frac{L_y}{2}$$

Por fim, considerando as quatro bordas da placa simplesmente apoiadas, a deflexão e o momento de flexão ao longo dos eixos de cada borda são nulos, ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} w = 0 \text{ para } x = -\frac{L_x}{2} \text{ e } x = \frac{L_x}{2} \\ M_x = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \text{ para } x = -\frac{L_x}{2} \text{ e } x = \frac{L_x}{2} \\ w = 0 \text{ para } y = -\frac{L_y}{2} \text{ e } y = \frac{L_y}{2} \\ M_y = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0 \text{ para } y = -\frac{L_y}{2} \text{ e } y = \frac{L_y}{2} \end{array} \right. \quad (2.110)$$

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

Neste capítulo serão apresentados os métodos e procedimentos utilizados no desenvolvimento do trabalho, retomando pontos relevantes já enunciados nos capítulos anteriores e descrevendo com maiores detalhes as etapas deste projeto. Com isso, uma melhor dimensão de sua proposta poderá ser compreendida e a base para a posterior apresentação dos resultados obtidos estará satisfatoriamente consolidada.

3.1 Proposta Inicial do Trabalho

A proposta inicial do trabalho foi de desempenhar uma análise comparativa entre as soluções analítica, numérica e experimental do estudo de vibrações de uma placa. Decidiu-se, posteriormente, restringir a sua proposta à comparação entre as soluções analítica e numérica, de modo a ser elaborado um texto de qualidade que sirva de base futuramente para o desenvolvimento do experimento de fato em outro trabalho de análise de vibrações de placas.

Diante disso, inicialmente, serão apresentados os procedimentos de cálculo que fornecem a solução analítica da placa submetida à configuração de simples apoio quanto às condições de contorno segundo a teoria, incluindo formas de cálculo das frequências naturais, dos modos de vibração e do comportamento dinâmico da placa. Depois, serão definidas as características gerais da placa, tais como dimensões e propriedades de seu material. E, por fim, serão implementadas as rotinas para obtenção dos resultados de cálculos e soluções gráficas dos parâmetros principais da análise de vibrações com a utilização dos softwares MATLAB® versão R2015a e ANSYS® (*Multiphysics*) versão R18.1.

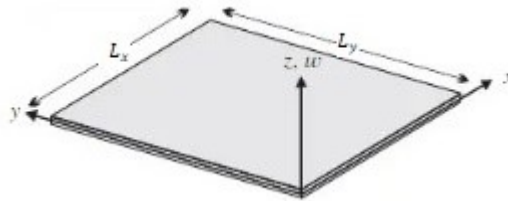
3.2 Placa Retangular Simplesmente Apoiada nas Quatro Bordas

3.2.1 Modos de Vibrar e Frequências Naturais

Conforme apresentado no tópico 2.3, a equação do movimento da placa retangular, segundo o ponto de vista da análise de vibrações livres, apresenta como solução a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & A_1 \sin \alpha x \sin \gamma y + A_2 \cos \alpha x \sin \gamma y + A_3 \sin \alpha x \cos \gamma y \\
 & + A_4 \cos \alpha x \cos \gamma y + A_5 \sinh \alpha x \sinh \gamma y + A_6 \cosh \alpha x \sinh \gamma y \\
 & + A_7 \sinh \alpha x \cosh \gamma y + A_8 \cosh \alpha x \cosh \gamma y
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Figura 3.1 – Placa retangular simplesmente apoiada.



Fonte: G radin e Rixen (1997).

O  nico caso para o qual esta solução analítica é exata refere-se à placa retangular simplesmente apoiada em suas quatro bordas. Considerando as dimensões L_x e L_y ao longo dos eixos coordenados Ox e Oy , respectivamente, e a placa posicionada conforme a Figura 3.1, para este caso são retomadas as condições de contorno apresentadas no t pico 2.4, as quais diante do novo posicionamento são assim estabelecidas:

$$\begin{cases} w = 0 \text{ para } x = 0 \text{ e } x = L_x \\ M_x = 0 \text{ para } x = 0 \text{ e } x = L_x \\ w = 0 \text{ para } y = 0 \text{ e } y = L_y \\ M_y = 0 \text{ para } y = 0 \text{ e } y = L_y \end{cases} \quad (3.2)$$

Pela definição dos momentos, dada em (2.23) e (2.24), as condições de contorno relacionadas a este parâmetro podem ser rerepresentadas como:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ para } x = 0 \text{ e } x = L_x \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ para } y = 0 \text{ e } y = L_y \end{cases} \quad (3.3)$$

Com a aplicação destas condições de contorno à solução geral apresentada em (3.1), a solução do movimento da placa simplesmente apoiada é dada por:

$$w(x, y) = A \sin \alpha x \sin \gamma y \quad (3.4)$$

A qual é acompanhada das condições de nulidade do movimento nas bordas localizadas em $x = L_x$ e $y = L_y$:

$$\begin{cases} \sin \alpha L_x = 0 \\ \sin \gamma L_y = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Que permitem apresentar os valores dos parâmetros α e γ segundo as expressões:

$$\alpha_r = \frac{r\pi}{L_x} \quad \text{e} \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{L_y} \quad r, n = 1, 2, \dots, \infty \quad (3.6)$$

A partir destes, as frequências naturais da placa em questão podem ser calculadas por:

$$\omega_{rn} = \beta_{rn}^2 \sqrt{\frac{D}{m_s}} = \pi^2 \left[\left(\frac{r}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n}{L_y} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{m_s}} \quad (3.7)$$

E os modos de vibração correspondentes, considerando a constante $A = 1$, são finalmente expressos por:

$$w_{rn}(x, y) = \sin\left(\frac{r\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (3.8)$$

3.2.2 Resposta da Placa Simplesmente Apoiada a uma Determinada Excitação

Szillard (2004) também define a equação diferencial do movimento da placa segundo o modelo da equação (2.96), a partir da análise do equilíbrio dinâmico do elemento de placa, assumindo que as deflexões resultantes desta análise são dependentes do tempo.

$$D\Delta\Delta w(x, y, t) + m_s \ddot{w}(x, y, t) - p_z(x, y, t) = 0 \quad (3.9)$$

Para analisar a resposta dinâmica de uma placa simplesmente apoiada, será considerado um carregamento transversal arbitrário que varia de modo harmônico ao longo do tempo, de modo que a função da força assume a seguinte forma:

$$p_z(x, y, t) = P^*(x, y)\theta(t) = P^*(x, y) \sin pt \quad (3.10)$$

Assim, a solução da expressão para a deflexão $w(x, y, t)$ deve ser encontrada por partes, segundo uma solução da equação homogênea (w_H) e uma solução particular (w_P):

$$w(x, y, t) = w_H(x, y, t) + w_P(x, y, t) \quad (3.11)$$

A solução homogênea está associada às vibrações livres da placa em suas frequências naturais e para a placa simplesmente apoiada pode ser expressa segundo uma dupla série de Fourier, conforme Szillard (2004) apresenta:

$$w_H(x, y, t) = \sin \omega t \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{rn} \sin\left(\frac{r\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (3.12)$$

Onde W_{rn} representa coeficientes de expansão desconhecidos.

A solução particular, por sua vez, corresponde ao estado de oscilação devido à força externa na frequência p . A parte independente do tempo da função desta força pode ser representada por uma dupla série trigonométrica:

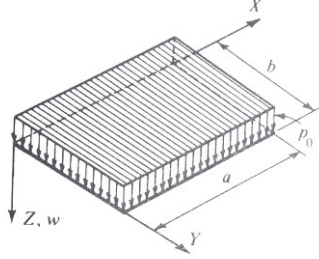
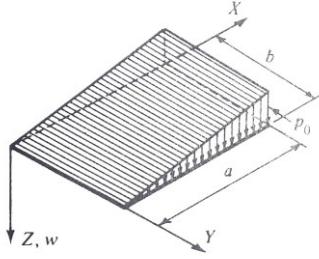
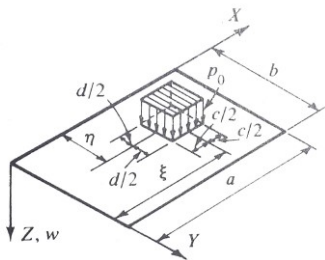
$$P^*(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{rn} \sin\left(\frac{r\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (3.13)$$

Onde os coeficientes P_{rn} da expansão da carga em uma série de Fourier dupla são determinados a partir da expressão:

$$P_{rn} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} P^*(x, y) \sin\left(\frac{r\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy \quad (3.14)$$

Na Tabela 3.1 estão apresentadas as expansões da série de Fourier para as aplicações de carga mais usuais, que podem ser utilizadas diretamente nas soluções do método de Navier nos problemas de placa pertinentes. Deve-se frisar que os parâmetros a e b indicados na tabela em questão correspondem às dimensões da placa ao longo dos eixos x e y (designadas neste trabalho por L_x e L_y).

Tabela 3.1 – Tabela dos coeficientes de expansão P_{rn} para os principais tipos de carregamento.

Identificação do Tipo de Carregamento	Carregamento $p_z(x, y) = \sum_r \sum_n P_{rn} \sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$	Coeficientes de Expansão P_{rn}
1.		$P_{rn} = \frac{16p_0}{\pi^2 rn}$ para $r, n = 1, 3, 5, \dots$
2.		$P_{rn} = -\frac{8p_0 \cos r\pi}{\pi^2 rn}$ para $r, n = 1, 2, 3, \dots$
3.		$P_{rn} = \frac{16p_0}{\pi^2 rn} \sin\frac{r\pi\xi}{a} \sin\frac{n\pi\eta}{b} \times \sin\frac{r\pi c}{2a} \sin\frac{n\pi d}{2b}$ para $r, n = 1, 2, 3, \dots$

(continuação)

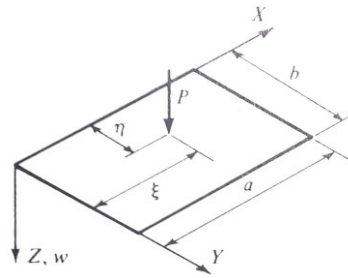
**Identificação
do Tipo de
Carregamento**

Carregamento

$$p_z(x, y) = \sum_r \sum_n P_{rn} \sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Coeficientes de Expansão P_{rn}

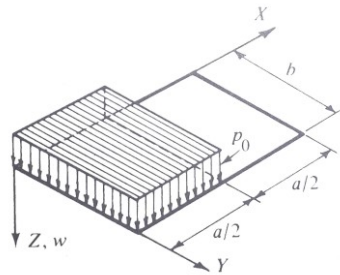
4.



$$P_{rn} = \frac{4P}{ab} \sin \frac{r\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}$$

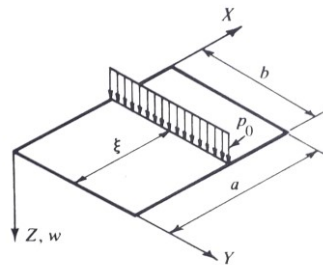
para $r, n = 1, 2, 3, \dots$

5.



$$P_{rn} = \begin{cases} \frac{8p_0}{\pi^2 rn} & \text{para } r, n = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{16p_0}{\pi^2 rn} & \text{para } \begin{cases} r = 2, 6, 10, \dots \\ n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \end{cases}$$

6.



$$P_{rn} = \frac{8p_0}{\pi an} \sin \frac{r\pi \xi}{a} \text{ para } \begin{cases} r = 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Fonte: Adaptado de Szilard (2004)

A aplicação da carga a ser utilizada na análise deste trabalho refere-se à carga concentrada no centro da placa, ou seja, a expressão para o cálculo dos coeficientes P_{rn} torna-se:

$$P_{rn} = \frac{4P}{L_x L_y} \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (3.15)$$

Definidos os parâmetros P_{rn} e seguindo com o procedimento de obtenção da solução da equação do movimento da placa para vibrações forçadas, a expressão da função da força (equação 3.10) pode ser reescrita como:

$$p_z(x, y, t) = \sin pt \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{rn} \sin\left(\frac{r\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (3.16)$$

E a solução particular, de acordo com o método de Navier, deve ser investigada na forma:

$$w_p(x, y, t) = \sin pt \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{rn} \sin\left(\frac{r\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (3.17)$$

A substituição das equações (3.16) e (3.17) na equação diferencial do movimento da placa (equação 3.9), considerando valores de r e n específicos, fornece a relação entre os parâmetros W_{rn} e P_{rn} :

$$W_{rn} \left[D\pi^4 \left(\frac{r^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^2 - m_s p^2 \right] = P_{rn} \quad (3.18)$$

Que equivale a:

$$W_{rn} = \frac{P_{rn}}{m_s(\omega_{rn}^2 - p^2)} \quad (3.19)$$

Assumindo a ação simultânea das vibrações livres e forçadas, a superposição das equações (3.12) e (3.17) corresponderá a esta situação. A deflexão da placa simplesmente apoiada vibrando livremente pode ser expressa por:

$$w = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_{rn} \sin\left(\frac{r\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \sin(\omega_{rn}t - \mu) \quad (3.20)$$

Onde μ representa o ângulo de fase, que será nulo caso as condições iniciais sejam definidas como:

$$w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{em } t = 0 \quad (3.21)$$

E a solução combinada das vibrações livres e forçadas pode então ser dada como:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) = & \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_{rn} \sin\left(\frac{r\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \sin(\omega_{rn}t - \mu) \\ & + \sin pt \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{rn} \sin\left(\frac{r\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Da segunda condição inicial estabelecida ($\dot{w} = 0$ em $t = 0$), obtém-se:

$$\bar{W}_{rn} = -\frac{p}{\omega_{rn}} W_{rn} \quad (3.23)$$

E, finalmente, a equação (3.22) se torna:

$$w(x, y, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin pt - \frac{p}{\omega_{rn}} \sin \omega_{rn} t \right) W_{rn} \sin\left(\frac{r\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (3.24)$$

3.3 Placa com Diferentes Combinações das Condições de Contorno

3.3.1 Frequências Naturais

Como a solução exata para a equação do movimento e para as frequências naturais só é possível para a placa simplesmente apoiada nas quatro bordas, diversos estudos foram realizados no intuito de fornecer estes resultados de forma aproximada para as placas submetidas a outras condições de contorno.

Blevins (2001), por exemplo, apresenta em sua obra as frequências naturais exatas dos seis primeiros modos de vibrar de placas retangulares em 21 diferentes combinações das condições de contorno elementares (engaste, apoio simples e livre), obtidas através de resultados numéricos.

Para o cálculo das frequências naturais aproximadas, a expressão seguinte resulta da utilização do método de Rayleigh, sendo a unidade dada em hertz (Hz):

$$f_{rn} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{G_1^4}{L_x^4} + \frac{G_2^4}{L_y^4} + \frac{2J_1J_2 + 2\nu(H_1H_2 - J_1J_2)}{L_x^2L_y^2} \right]^{1/2} \left[\frac{Eh^3}{12\rho h(1-\nu^2)} \right]^{1/2} \quad (3.23)$$

Onde os parâmetros adimensionais G , H e J indicados na Tabela 3.2 são funções dos índices r e n (que indicam os modos) e das condições de contorno da placa, como pode ser observado:

Tabela 3.2 – Coeficientes para o cálculo das frequências naturais aproximadas para placas retangulares (isotrópicas e ortotrópicas).

Condições de Contorno em Bordas Opostas	Índice Referente ao Modo (q)	G	H	J
1. Livre-Livre	1	0	0	0
	2	0	0	1,216
	3	1,506	1,248	5,017
	$q (q > 3)$	$q - \frac{3}{2}$	$\left(q - \frac{3}{2}\right) \left[1 - \frac{2}{\left(q - \frac{3}{2}\right)\pi}\right]$	$\left(q - \frac{3}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{6}{\left(q - \frac{3}{2}\right)\pi}\right]$
2. Apoio Simples-Livre	1	0	0	0,304
	2	1,25	1,165	2,756
	3	2,25	4,346	7,211
	$q (q > 1)$	$q - \frac{3}{4}$	$\left(q - \frac{3}{4}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{\left(q - \frac{3}{4}\right)\pi}\right]$	$\left(q - \frac{3}{4}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{\left(q - \frac{3}{4}\right)\pi}\right]$
3. Engaste-Livre	1	0,597	-0,087	0,471
	2	1,494	1,347	3,284
	3	2,5	4,658	7,842
	$q (q > 2)$	$q - \frac{1}{2}$	$\left(q - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{2}{\left(q - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$	$\left(q - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{2}{\left(q - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$
4. Apoio Simples-Apoio Simples	1	1	1	$J = H$
	2	2	4	
	3	3	9	
	q	q	q^2	
5. Engaste-Apoio Simples	1	1,25	1,165	$J = H$
	2	2,25	4,346	
	3	3,25	9,528	
	q	$q + \frac{1}{4}$	$\left(q + \frac{1}{4}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{\left(q + \frac{1}{4}\right)\pi}\right]$	
6. Engaste-Engaste	1	1,506	1,248	$J = H$
	2	2,5	4,658	
	3	3,5	10,02	
	$q (q > 1)$	$q + \frac{1}{2}$	$\left(q + \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{\left(q + \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$	

Fonte: Blevins (2001).

Para o uso desta tabela e da fórmula para o cálculo das frequências aproximadas, considera-se $G = G_1$, $H = H_1$ e $J = J_1$ e o índice do modo (q) equivalente a r para as

condições de contorno aplicadas aos lados de dimensão L_y ; e $G = G_2$, $H = H_2$ e $J = J_2$ e o índice do modo (q) equivale a n para as condições de contorno aplicadas aos lados de dimensão L_x .

3.4 Características da Placa

Depois de exposta a solução analítica das placas retangulares simplesmente apoiadas para as frequências naturais, vibrações livres e vibrações forçadas, as características do objeto de estudo podem então ser definidas.

A placa selecionada para análise apresenta como material constituinte o Alumínio SAE 303, em razão de seu baixo custo. As propriedades físicas referentes ao mesmo, bem como as dimensões adotadas para a placa estão especificadas na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Propriedades físicas e geométricas da placa.

Especificações da Placa Adotada	
Dimensão na direção x (L_x)	0,30 m
Dimensão na direção y (L_y)	0,35 m
Espessura (h)	0,001 m
Módulo de Elasticidade (E)	69 GPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,33
Densidade (ρ)	2700 kg/m ³

As condições de contorno aplicadas para a placa caracterizaram-se pela configuração de apoio simples em todas as bordas, que ao longo de cada uma delas permite somente a rotação em torno de seu eixo, restringindo o deslocamento, que não deve ocorrer em nenhuma direção.

Ao proceder com a análise dos modos de vibração da placa, nenhuma excitação externa foi estabelecida. E para o estudo da resposta da placa às vibrações forçadas foi considerada a aplicação de uma carga concentrada no centro da placa segundo uma análise harmônica.

3.5 Programa Desenvolvido para Solução Analítica

A rotina desenvolvida no MATLAB® R2015a foi utilizada para simular os resultados a partir da solução analítica, obtida de acordo com a teoria, com o intuito de se obter os valores das frequências naturais e a visualização dos modos de vibração da placa, segundo a solução exata e aproximada. Para isto, os dados de entrada foram inseridos conforme apresentado na Tabela 3.3.

Para o caso da placa simplesmente apoiada nas quatro bordas, com a variação dos parâmetros r e n , uma matriz com os valores exatos das frequências naturais foi encontrada, segundo a equação (3.7), e outra com os valores aproximados a partir da equação (3.23).

Para a definição de um modo de vibrar específico (com r e n definidos), a partir de uma estrutura própria do programa para um laço (denominada *for*), a deflexão foi determinada (equação 3.8) para diversos pontos identificados por coordenadas específicas de x e y , percorrendo-se praticamente toda a área da placa.

Os valores da deflexão foram guardados em uma matriz e apresentados graficamente através dos comandos *surf* e *contourf*, que constroem um gráfico tridimensional da superfície e a projeção ortogonal sobre um plano das interseções da superfície com determinados planos paralelos ao da projeção, respectivamente.

Para a placa submetida a uma excitação externa, a equação (3.24) foi implementada, com o cálculo do parâmetro W_{rn} a partir da expressão (3.19), estabelecendo-se a aplicação do carregamento segundo uma força concentrada no centro da placa.

Conforme a Tabela 3.1, nesta situação, os valores de P_{rn} são dados a partir da expressão (3.15) e o primeiro termo de (3.24) é igualado a um para que seja possível observar as formas que a placa apresenta em cada frequência de excitação especificada. O código completo descrito neste tópico encontra-se no anexo A ao final do trabalho.

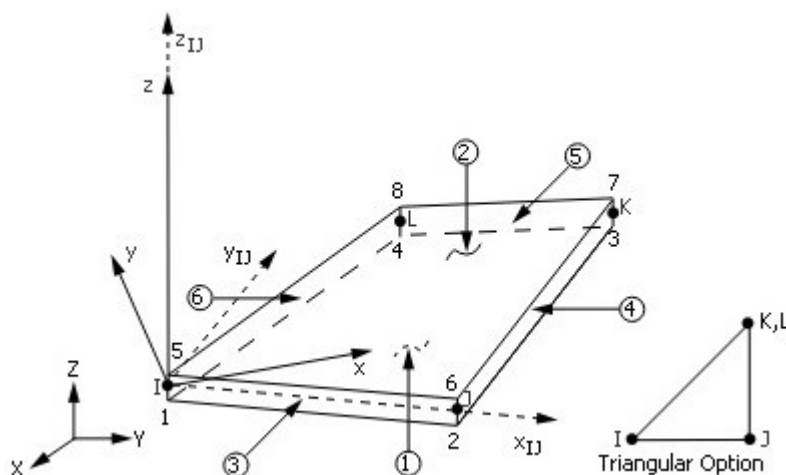
3.6 Modelagem da Placa através do Método dos Elementos Finitos

Para a comparação dos resultados numéricos com a teoria das vibrações de placas foi utilizado o Método dos Elementos Finitos, introduzido no capítulo 1, através de um software amplamente conhecido e utilizado na atualidade, denominado ANSYS® R18.1.

Partindo de uma análise estrutural, foi utilizado o elemento SHELL63, o qual se trata de um elemento que possui quatro nós e seis graus de liberdade em cada um deles

(translações na direção e rotações em torno dos eixos Ox , Oy e Oz), representado na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Geometria do elemento SHELL63.



Fonte: ANSYS® Help Viewer.

Depois disso, foram definidas a espessura e as propriedades do material (assumindo que seu comportamento seja linear, elástico e isotrópico), seguidas da modelagem da geometria estrutural da placa (retangular) segundo suas dimensões ao longo dos eixos x e y , conforme os dados da Tabela 3.3.

A malha de elementos finitos foi então criada, com a possibilidade de se especificar a quantidade ou a dimensão destes (no caso definiu-se 100 elementos em ambas as direções x e y), e as condições de contorno foram determinadas selecionando-se os nós que constituem os lados da placa e definindo seus deslocamentos e rotações. Para o apoio simples os deslocamentos nulos em todas as direções foram estabelecidos, enquanto as rotações permaneceram livres.

O modelo numérico explicado até o momento encontra-se descrito no anexo B ao final do trabalho, podendo ser utilizado na linha de comando do software após definir-se a análise estrutural e dar início a etapa de pré-processamento.

A partir disso, definiu-se o tipo específico de análise (modal e harmônica, nos casos estudados), foram aplicados os carregamentos externos aos quais a placa se encontra submetida quando da vibração forçada e, após a solução dada pelo software, obteve-se a visualização gráfica e os resultados dos parâmetros desejados na simulação.

Na solução da análise modal, deve-se indicar a quantidade de modos a serem extraídos e a faixa de frequência (em Hz) para a qual os respectivos modos de vibração

serão calculados; a apresentação dos resultados se pautará na primeira condição a ser satisfeita.

E para obtenção da solução da análise harmônica, torna-se necessário definir as frequências de excitação com a definição dos valores limites e o número de passos a serem executados, além da aplicação da força no(s) nó(s) desejado(s). Os valores das frequências escolhidos aleatoriamente para avaliação foram de 160, 275, 320, 425 e 480 Hz e a força aplicada apenas no centro da placa na direção vertical foi definida com o valor de 100 N.

O procedimento para leitura dos resultados após o estabelecimento dos parâmetros necessários e a solução executada pelo software é comum para os dois tipos de análises, com o auxílio dos comandos de plotagem da deflexão (w) apresentada pela placa e de alternância entre os resultados obtidos na etapa de pós-processamento.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo serão apresentados os resultados e as discussões referentes às soluções analítica e numérica dos modos de vibrar de uma placa simplesmente apoiada em suas quatro bordas.

4.1 Frequências Naturais

4.1.1 Frequências Naturais Exatas

Conforme apresentado no tópico 3.5 do capítulo de metodologia, a equação (3.7) (apresentada novamente como equação 4.1) foi implementada para a placa simplesmente apoiada com as características indicadas na Tabela 3.2, fornecendo os valores exatos de suas frequências naturais para nove modos de vibração correspondentes a variação dos parâmetros inteiros r e n de 1 a 3.

$$\omega_{rn} = \beta_{rn}^2 \sqrt{\frac{D}{m}} = \pi^2 \left[\left(\frac{r}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n}{L_y} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (4.1)$$

Os valores da frequência obtidos por esta fórmula são dados em rad/s e a posição Tabela 4.1 indica o respectivo modo de vibrar (o valor localizado na primeira coluna e na primeira linha (ω_{11}) refere-se ao modo (1,1), por exemplo):

Tabela 4.1 – Frequências naturais exatas em rad/s .

Frequências Naturais Exatas (rad/s) – Matlab®			
Índices dos Modos de Vibração (r, n)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$r = 1$	294,1	667,7	1290,5
$r = 2$	802,7	1176,3	1799,1
$r = 3$	1650,3	2024,0	2646,7

Realizando a divisão destes valores por 2π , para que nos próximos tópicos possam ser comparadas com os valores aproximados e com a análise numérica, são obtidas as frequências naturais exatas em Hz , apresentadas na Tabela 4.2:

Tabela 4.2 – Frequências naturais exatas em Hz .

Frequências Naturais Exatas (Hz) – Matlab®			
Índices dos Modos de Vibração (r, n)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$r = 1$	46,8047	106,2741	205,3898
$r = 2$	127,7492	187,2186	286,3343
$r = 3$	262,6567	322,1261	421,2419

4.1.2 Frequências Naturais Aproximadas

Para fins de comparação, foram calculadas as frequências naturais aproximadas pela expressão do método de Rayleigh (equação 3.23) para a mesma placa simplesmente apoiada cujas propriedades físicas e geométricas foram especificadas na Tabela 3.2.

Para este caso, os parâmetros G , J e H utilizados apresentam-se na linha da tabela referente à condição de contorno de bordas opostas indicada por “apoio simples – apoio simples”, tanto para o índice de número 1 (lados de dimensão L_y e modo r), quanto para o índice de número 2 (lados de dimensão L_x e modo n).

A título de exemplo, o cálculo da frequência aproximada referente ao modo (1,2), com a substituição dos parâmetros pelos devidos valores, pode ser expresso da seguinte forma:

$$f_{12} = \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{(1)^4}{(0,3)^4} + \frac{(2)^4}{(0,35)^4} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0,33 \cdot (1 \cdot 4 - 1 \cdot 4)}{(0,3)^2 (0,35)^2} \right]^{1/2} \cdot \left[\frac{69 \cdot 10^9 \cdot 0,001^3}{12 \cdot 2700 \cdot 0,001 \cdot (1 - 0,33^2)} \right]^{1/2} = 106,2741 \text{ Hz} \quad (4.2)$$

Foi então realizado o cálculo das frequências naturais aproximadas referentes aos nove modos de vibrar, do modo como se procedeu na equação 4.2, variando-se os índices r e n novamente de 1 a 3, através de um programa no MATLAB®. Para isto, foram inseridos, além das características da placa, os vetores com os valores que G , H e J assumem nessas condições, obtendo-se como resultado a Tabela 4.3 com os valores das frequências aproximadas em Hz:

Tabela 4.3 – Frequências naturais aproximadas em Hz.

Frequências Naturais Aproximadas (Hz) – Matlab®			
Índices dos Modos de Vibração (r, n)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$r = 1$	46,8047	106,2741	205,3898
$r = 2$	127,7492	187,2186	286,3343
$r = 3$	262,6567	322,1261	421,2419

Como se pode observar, os valores calculados por este método foram absolutamente condizentes com os valores obtidos pela fórmula exata. Segundo Blevins (2001), os resultados em questão podem ser esperados dentro de 5% da solução exata, de modo que uma precisão significativamente melhor é alcançada para placas que apresentam bordas engastadas ou simplesmente apoiadas.

Neste caso, considerando a placa simplesmente apoiada nas quatro bordas e analisando os resultados apresentados até a quarta casa decimal, o desvio foi nulo para quatros valores e da ordem 10^{-16} para as demais frequências calculadas, conforme apresenta a Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Erros relativos dos valores de frequências naturais aproximados

Erros Relativos (%) – Valores Aproximados			
Índices dos Modos de Vibração (r, n)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$r = 1$	0	$1,337 \cdot 10^{-14}$	0
$r = 2$	$2,225 \cdot 10^{-14}$	0	$1,985 \cdot 10^{-14}$
$r = 3$	$2,164 \cdot 10^{-14}$	$1,765 \cdot 10^{-14}$	0

4.1.3 Frequências Naturais pela Análise Numérica

As frequências naturais obtidas via simulação numérica, através do ANSYS®, foram apresentadas a cada visualização gráfica do modo de vibração. Dessa forma, para melhor compreensão, os valores encontrados foram reunidos na Tabela 4.5 de modo correspondente ao apresentado nos tópicos anteriores:

Tabela 4.5 – Frequências naturais pela análise numérica em Hz.

Frequências Naturais (Hz) – Ansys®			
Índices dos Modos de Vibração (r, n)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$r = 1$	46,8032	106,2680	205,3760
$r = 2$	127,7420	187,1960	286,2820
$r = 3$	262,6310	322,0690	421,1250

Como é possível notar, os resultados encontrados foram bastante próximos, mas não exatamente os mesmos dados pela solução analítica, divergindo apenas por casas decimais com erros relativos da ordem de 10^{-4} e 10^{-5} (Tabela 4.6). A causa mais provável destas diferenças se deve à discretização da placa, ou seja, da malha utilizada, a qual fornece resultados cada vez mais precisos, quanto mais refinada ela é.

Tabela 4.6 – Erros relativos das frequências naturais obtidas pela solução numérica

Erros Relativos (%) – Modelo numérico			
Índices dos Modos de Vibração (r, n)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$r = 1$	0,0031	0,0057	0,0067
$r = 2$	0,0056	0,0121	0,0183
$r = 3$	0,0098	0,0177	0,0277

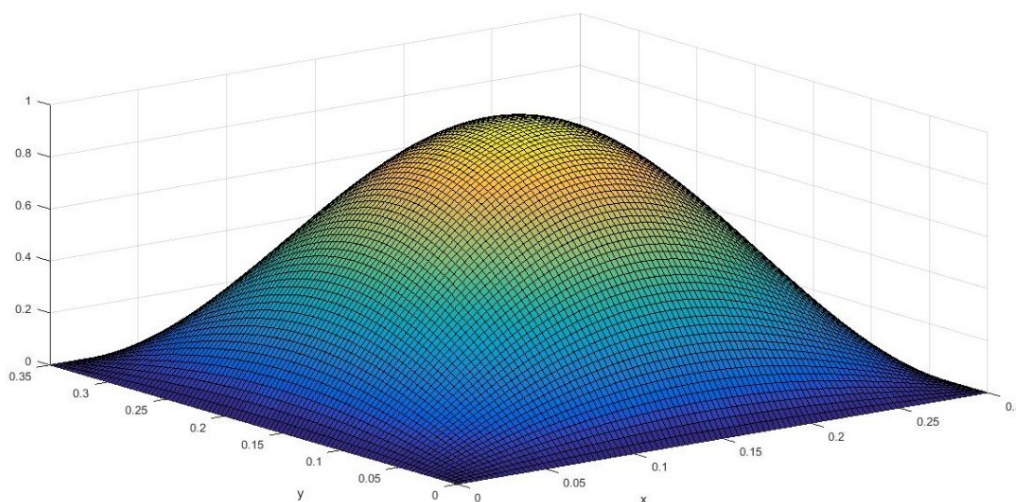
4.2 Modos de Vibrar

Conforme explicado na metodologia, os modos de vibração da placa simplesmente apoiada foram obtidos tanto pela solução analítica através do MATLAB® R2015a, quanto pela análise numérica por meio do ANSYS® R18.1.

No MATLAB®, foram geradas as imagens dos modos da placa segundo o gráfico tridimensional (3D) e a projeção ortogonal sobre o plano Oxy , de forma que os parâmetros r e n foram fixados para a obtenção de cada modo específico.

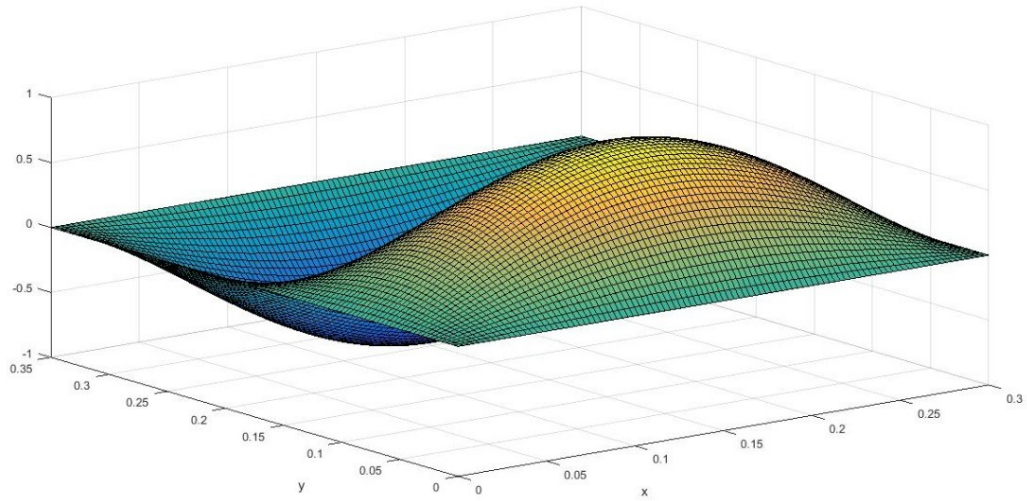
Alguns dos resultados obtidos através do comando *surf* (gráfico 3D) são apresentados nas Figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4, em cujos títulos as especificações dos modos de vibração são dadas pelos índices (r, n):

Figura 4.1 – Modo de vibração (1,1) da placa retangular simplesmente apoiada.



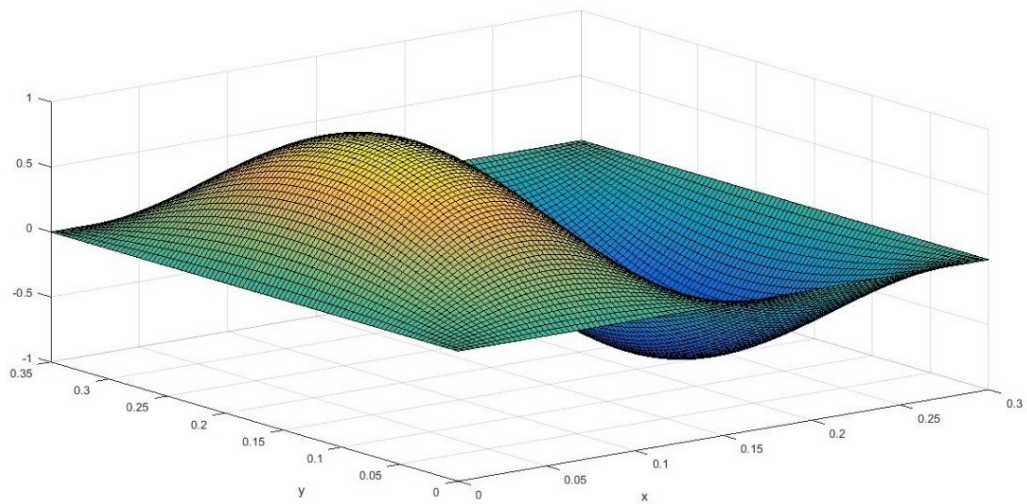
Fonte: MATLAB®.

Figura 4.2 – Modo de vibração (1,2) da placa retangular simplesmente apoiada.



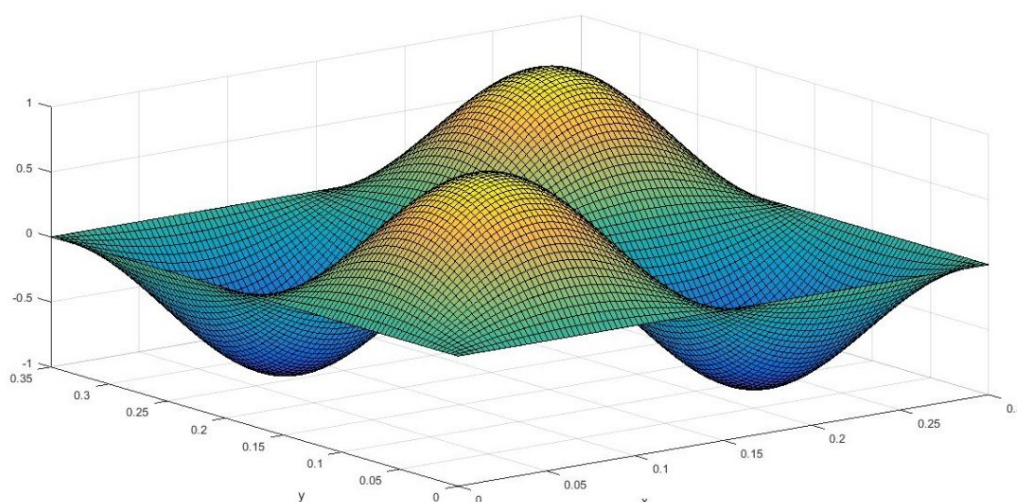
Fonte: MATLAB®.

Figura 4.3 – Modo de vibração (2,1) da placa retangular simplesmente apoiada.



Fonte: MATLAB®.

Figura 4.4 – Modo de vibração (2,2) da placa retangular simplesmente apoiada.



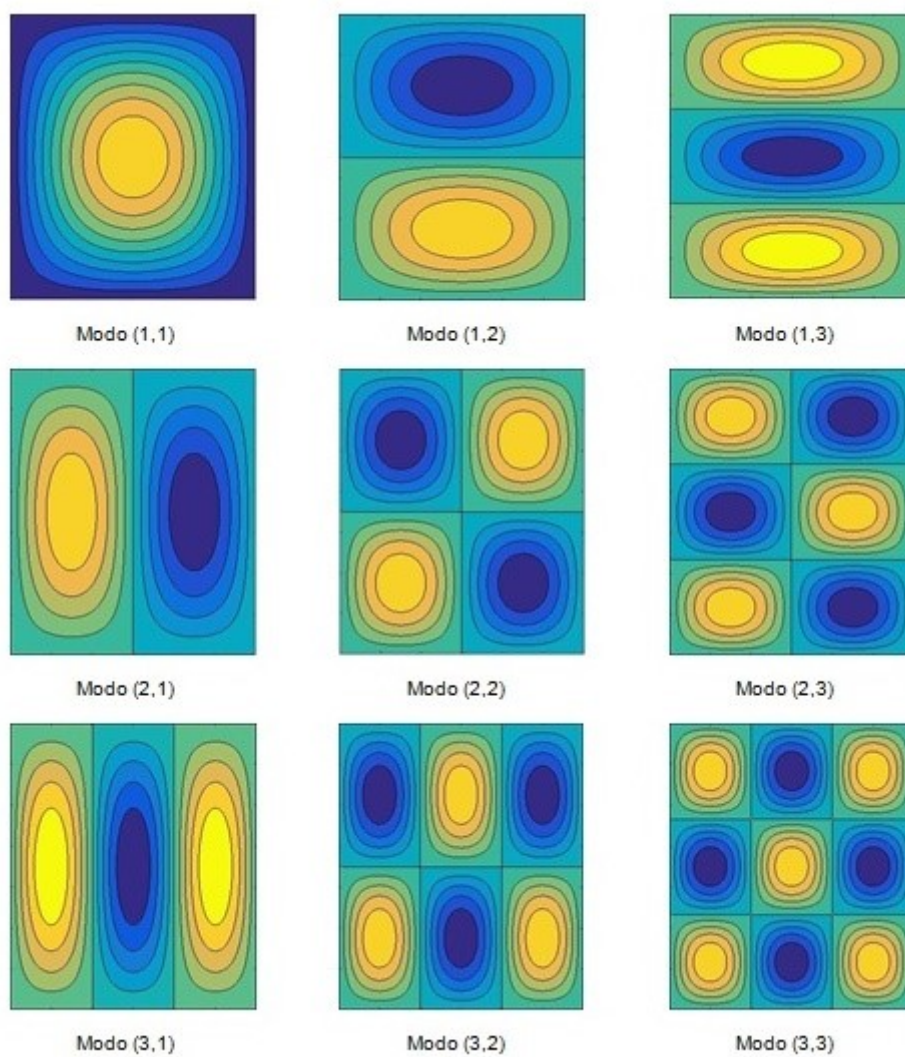
Fonte: MATLAB®.

As superfícies das Figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 mostram os primeiros modos com as diferentes combinações de simetria/assimetria. O modo (1,1) é o primeiro modo simétrico-simétrico (S-S) e o modo (2,2) é o primeiro antissimétrico-antissimétrico (A-A). Os modos (1,2) e (2,1) são considerados antissimétrico-simétrico (A-S) e simétrico-antissimétrico (S-A), respectivamente.

Através destes resultados, é possível perceber que as quantidades $(r - 1)$ e $(n - 1)$ representam o número de linhas nodais do modo de vibrar ao longo das direções Oy e Ox , respectivamente. Este fato se torna mais evidente ainda com a visualização da linha de fato nas projeções apresentadas na Figura 4.5.

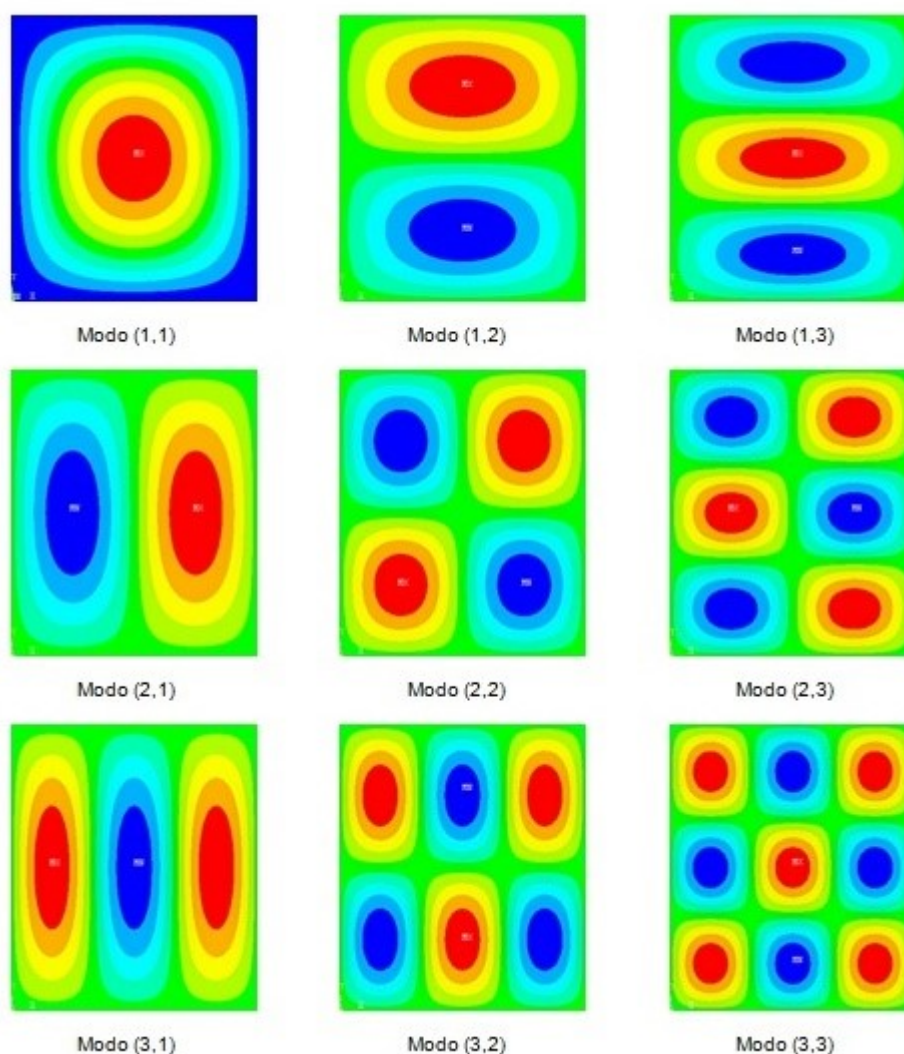
Os resultados provenientes da projeção ortogonal por meio do comando *contourf*, por sua vez, foram reunidos em uma única imagem com os nove modos de vibração variando-se r e n de 1 a 3 para comparação com os respectivos modos obtidos pela simulação numérica. Na Figura 4.5 estão as imagens resultantes da solução analítica e na Figura 4.6 estão aquelas encontradas com a solução numérica (via método dos elementos finitos).

Figura 4.5 – Modos de vibração da placa simplesmente apoiada pela solução analítica.



Fonte: A autora.

Figura 4.6 – Modos de vibração da placa simplesmente apoiada pela solução numérica.



Fonte: A autora.

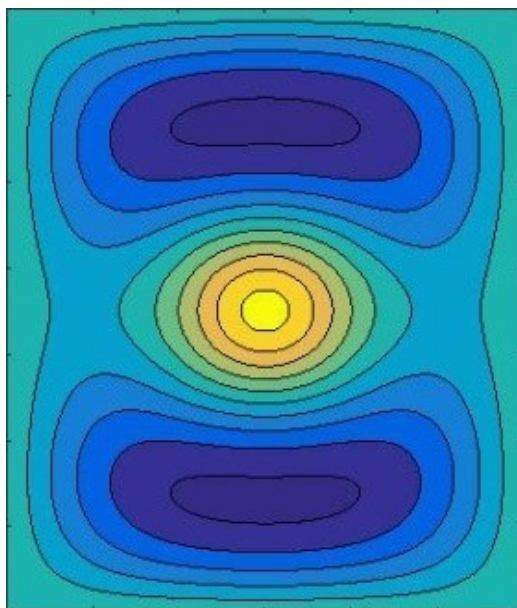
Sob outro aspecto, os próprios índices dos modos de vibrar estão diretamente relacionados à resposta da placa na análise modal: r indica o número de meias-ondas de flexão ao longo da direção x e n indica o número de meias-ondas de flexão ao longo da direção y . No modo (2,3), por exemplo, observam-se duas meias-ondas na direção horizontal (x) e três delas na direção vertical (y).

Em todos os nove modos de vibração, os resultados analíticos e numéricos apresentaram grande equivalência, não havendo necessidade de nenhuma ressalva de qualquer tipo, sendo este o maior indicativo da boa precisão e confiabilidade da solução da análise modal através do método dos elementos finitos.

4.3 Resposta da Placa à Aplicação de uma Carga

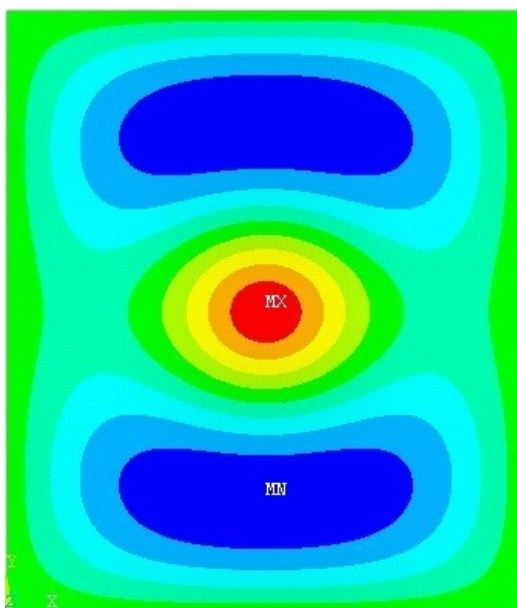
As Figuras 4.7 a 4.16 apresentadas a seguir mostram os resultados obtidos com a solução analítica através do MATLAB® e com a solução numérica a partir do ANSYS® para a resposta da placa simplesmente apoiada a vibrações forçadas em cinco frequências de excitação diferentes, que correspondem a 160, 275, 320, 425 e 480 Hz.

Figura 4.7 – Resultado analítico da resposta da placa à excitação na frequência de 160 Hz.



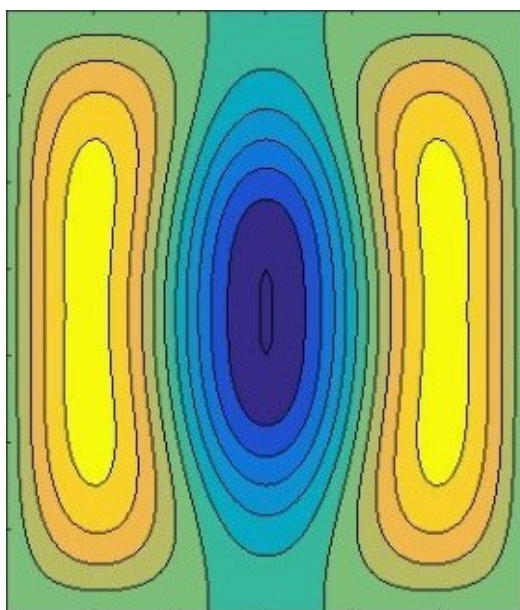
Fonte: MATLAB®.

Figura 4.8 – Resultado numérico da resposta da placa à excitação na frequência de 160 Hz.



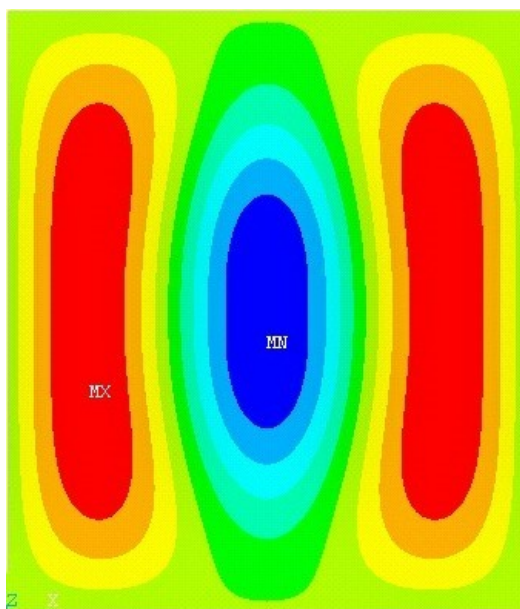
Fonte: ANSYS®.

Figura 4.9 – Resultado analítico da resposta da placa à excitação na frequência de 275 Hz.



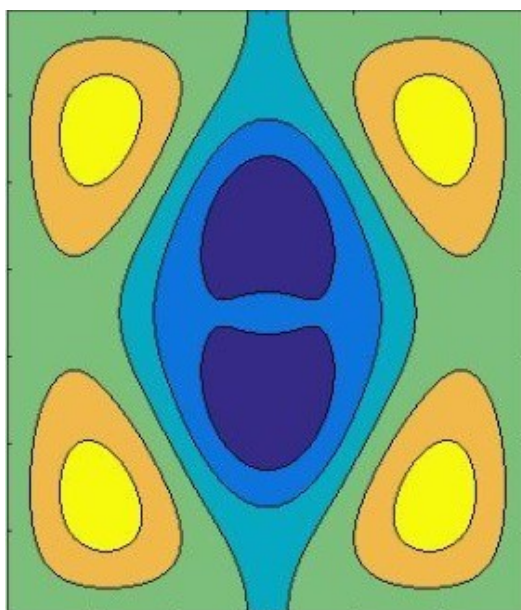
Fonte: MATLAB®.

Figura 4.10 – Resultado numérico da resposta da placa à excitação na frequência de 275 Hz.



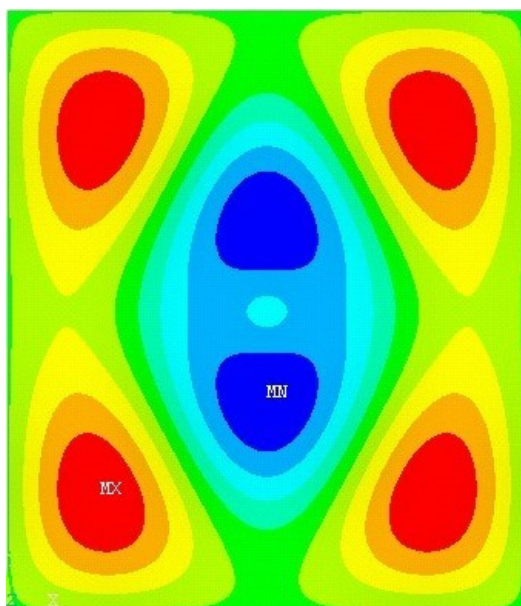
Fonte: ANSYS®.

Figura 4.11 – Resultado analítico da resposta da placa à excitação na frequência de 300 Hz.



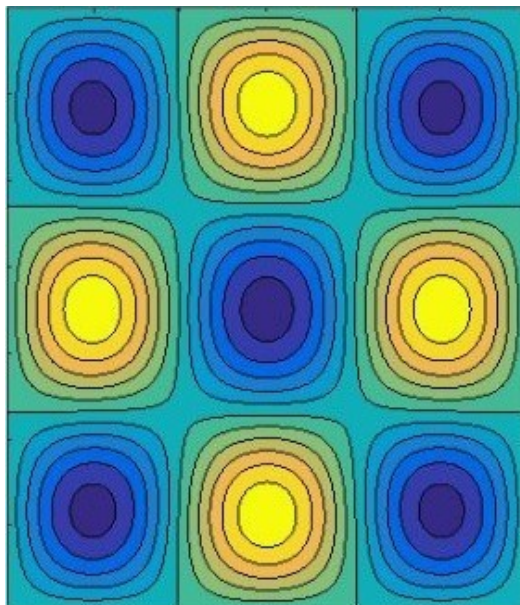
Fonte: MATLAB®.

Figura 4.12 – Resultado numérico da resposta da placa à excitação na frequência de 300 Hz.



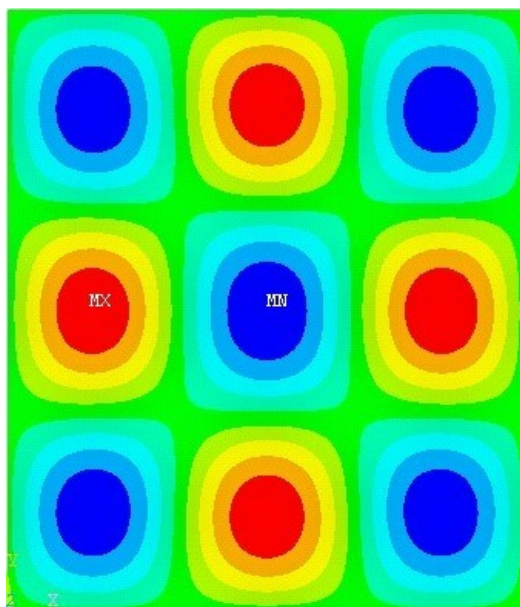
Fonte: ANSYS®.

Figura 4.13 – Resultado analítico da resposta da placa à excitação na frequência de 425 Hz.



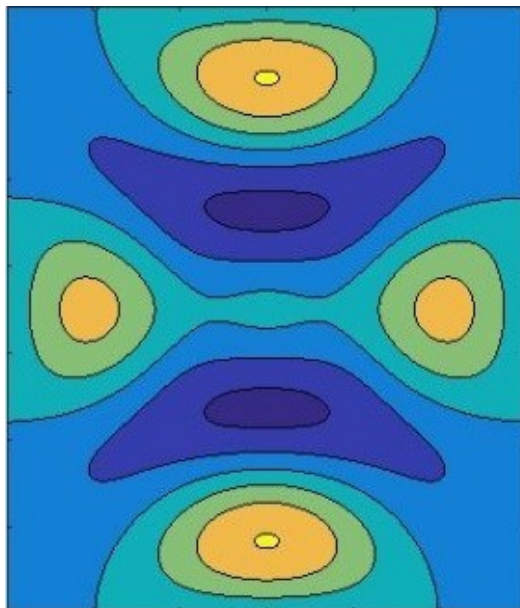
Fonte: MATLAB®.

Figura 4.14 – Resultado numérico da resposta da placa à excitação na frequência de 425 Hz.



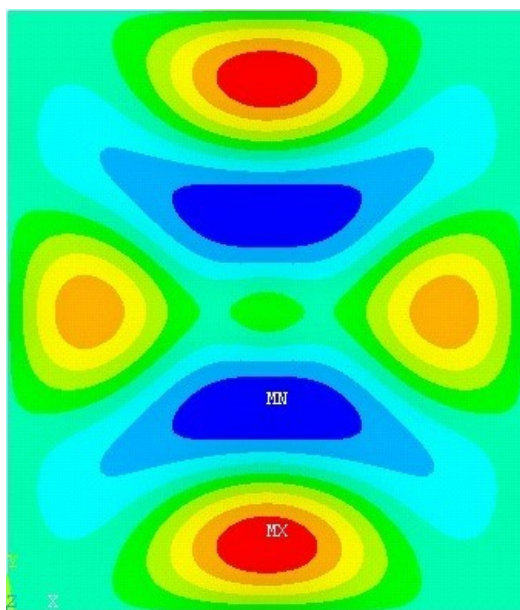
Fonte: ANSYS®.

Figura 4.15 – Resultado analítico da resposta da placa à excitação na frequência de 480 Hz.



Fonte: MATLAB®.

Figura 4.16 – Resultado numérico da resposta da placa à excitação na frequência de 480 Hz.



Fonte: ANSYS®.

Diante dos resultados obtidos, observa-se que em alguns casos em que a frequência de excitação externa apresenta valor relativamente próximo à frequência natural da placa (e maior), a resposta da placa se assemelha com o modo de vibrar em tal frequência. Isto ocorre para dois modos cujos índices são ímpares: a resposta à excitação de 275 Hz indicada nas Figuras 4.9 e 4.10 lembra o modo de vibração (3,1) representado nas Figuras

4.5 e 4.6; e a resposta da placa à excitação de 425 Hz nas Figuras 4.13 e 4.14 se parece bastante com o modo (3,3) das Figuras 4.5 e 4.6.

Porém, para a frequência de excitação de 320 Hz, que também é próxima da frequência natural relativa ao modo (3,2), de aproximadamente 322 Hz, a semelhança entre a resposta da placa à vibração forçada e o modo de vibrar natural não foi tão óbvia assim, mas ainda pode se dizer que elas estão vagamente relacionadas.

As outras duas frequências de excitação externa analisadas, de 160 Hz e 480 Hz, não sendo absolutamente próximas das frequências naturais referentes aos nove modos de vibração apresentados no tópico 4.2, fornecem os padrões mais distintos observados, juntamente com a frequência de 320 Hz já citada. Além disso, é possível inferir a partir da progressão da resposta da placa que realmente quanto maiores as frequências de excitações, mais complexos se tornam os seus padrões.

Por fim, comparando as análises segundo as soluções obtidas com os softwares MATLAB® (analítica) e ANSYS® (numérica), observa-se que em todos os casos da resposta à excitação externa os resultados encontrados foram bem condizentes entre si. Novamente, agora para a análise harmônica realizada, pode se dizer que o modelo numérico reproduziu com fidelidade o que se esperava da resposta da placa de acordo com a teoria.

CAPÍTULO V

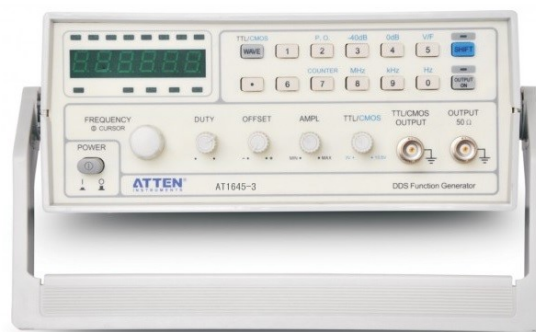
PROJETO CONCEITUAL DO EXPERIMENTO

Neste capítulo serão introduzidas as ideias a respeito da montagem experimental para a análise das vibrações de uma placa, para desenvolvimento em um trabalho posterior e comparação com os resultados analítico e numérico já apresentados no capítulo anterior.

5.1 Componentes

Os principais componentes do experimento apresentam-se nas Figuras 5.1 a 5.5 e são: o gerador de sinais, o vibrador mecânico (*shaker*), o sistema de fixação, a placa e o pó a ser distribuído sobre a placa.

Figura 5.1 – Gerador de sinais.



Fonte: JBM Instrumentos (2009).

Figura 5.2 – Vibrador mecânico.



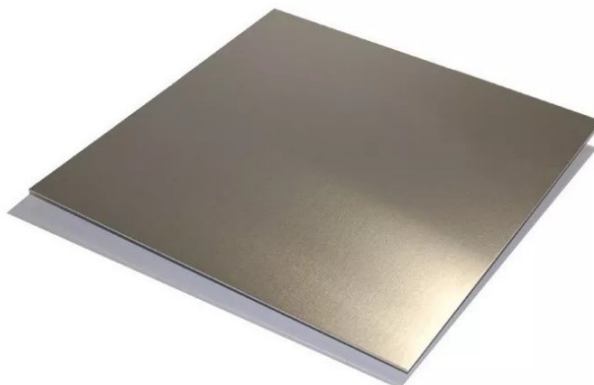
Fonte: Tenlee Piezotronics Inc (2012).

Figura 5.3 – Sistema de fixação (haste, arruela e porca).



Fonte: Hard (2018).

Figura 5.4 – Placa metálica retangular.



Fonte: Mercado Livre (2019).

Figura 5.5 – Material sólido em pó.

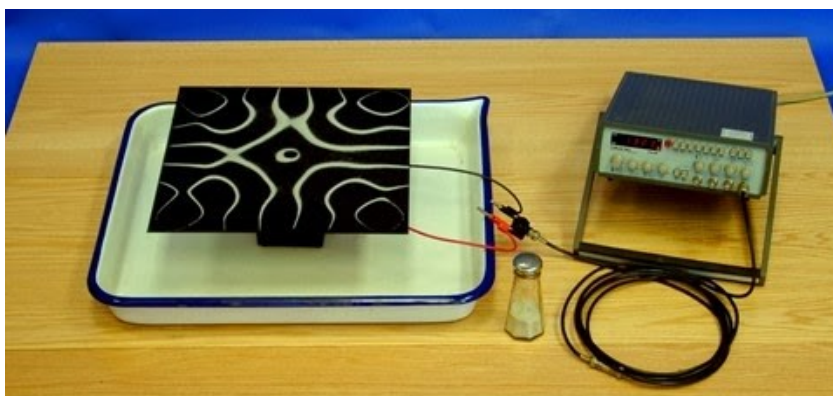


Fonte: Subir Quadrado (2010).

A ideia geral é que o aparato experimental deverá ser constituído por estruturas que forneçam a sustentação da placa (independentemente das condições de contorno), de modo que um vibrador mecânico seja posicionado abaixo da mesma. Uma haste roscada conectando o *shaker* à placa em seu centro será fixada nesta por um pequeno furo através de uma arruela e uma porca, com o intuito de garantir que as excitações sejam aplicadas ao objeto de estudo em questão do modo desejado.

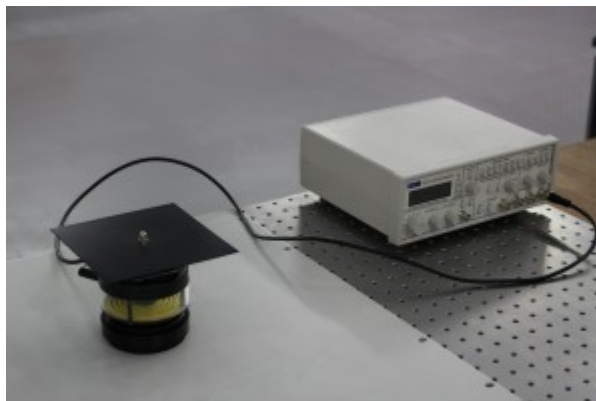
Conectado ao vibrador estará um gerador de sinais, cujas frequências de excitação serão estabelecidas e aplicadas lentamente para a visualização da resposta da placa. Sobre ela deverá ser depositado algum material sólido em pó (sal ou areia, por exemplo), que se moverá com a aplicação das vibrações e permanecerá estacionário nas linhas nodais, formando diferentes padrões, os quais se tornam cada vez mais complexos quanto maiores forem as frequências de excitação. As imagens seguintes (Figuras 5.6 e 5.7) ilustram a ideia resumida de como a montagem do experimento deve ser feita:

Figura 5.6 – Representação ilustrativa da ideia da montagem experimental.



Fonte: Physics Bridge Course (2013).

Figura 5.7 – Representação da ideia do experimento com a visualização do vibrador.



Fonte: ASDEC (2015).

Deve ser mencionado ainda que, ao invés de se utilizar um vibrador mecânico, é possível realizar o experimento com o uso de um alto-falante que concentre e garanta a transmissão das vibrações ao centro da placa, o que pode ser feito de maneira adaptada, conforme apresentado na Figura 5.8. Além disso, deve-se atentar a possível necessidade de se utilizar um amplificador, para que o experimento possa ser realizado satisfatoriamente.

Figura 5.8 – Adaptação para isolamento das vibrações do alto-falante.



Fonte: Youtube (2017).

5.2 Condições de Contorno

As condições de contorno clássicas podem ser classificadas como livre, engaste e apoio simples. Para as placas retangulares, estas podem ser combinadas de diversas formas ao longo de seu perímetro, as quais foram estudadas por Leissa (1973) quanto às vibrações livres.

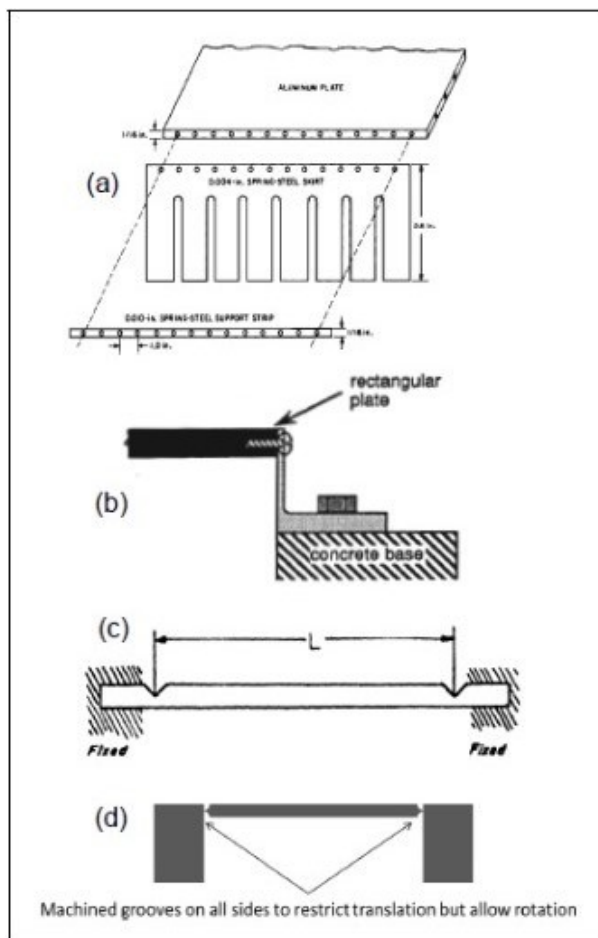
As condições de contorno, bem como suas combinações, exercem grande influência sobre a vibração da placa e a radiação acústica, sendo que o caso da placa simplesmente apoiada apresenta-se como a questão fundamental em diversas referências, posto que o

mesmo fornece uma solução analítica simples e exata para a equação do movimento da placa (ROBIN et al., 2016).

Neste sentido, este trabalho foi desenvolvido para que resultados analíticos e numéricos confiáveis fossem encontrados para as frequências naturais, os modos de vibração e as respostas a diferentes excitações da placa. Com sua conclusão, será consolidada a base do projeto teórico para posterior elaboração de uma bancada experimental que represente fielmente o objeto de estudo em questão com as condições de contorno selecionadas.

A fim de descrever e validar uma técnica que configure a condição de contorno de simples apoio, Robin et al. (2016) desenvolvem um estudo no qual inicialmente são apresentadas quatro possibilidades para a realização de testes vibro-acústicos, sugeridas por diferentes autores. Estas estão ilustradas na Figura 5.9 e limitações que podem ser observadas em 5.9(a) e 5.9(b) referem-se à montagem com a utilização de parafusos que pode ser complexa dependendo da espessura da placa, enquanto que em 5.9(c) e 5.9(d) as ranhuras usinadas podem ser colocadas em prática com certa dificuldade e caso elas se danifiquem dificilmente serão restauradas.

Figura 5.9 – Ideias de representação experimental da condição de contorno de simples apoio



Fonte: Robin et al. (2016)

Diante do observado, a ideia que se propõe para a execução do experimento é a usinagem de entalhes em V tanto na face superior quanto na face inferior da placa, com extensões ao longo das dimensões L_x e L_y da placa.

Para isso, seria necessário deixar pequena quantidade de sobremetal nas bordas (a placa apresentaria dimensões reais pouco maiores que os valores de L_x e L_y), de modo que as estruturas de sustentação mencionadas no início do capítulo sejam posicionadas e fixadas nas direções dos entalhes que simulariam a condição de contorno de simples apoio nos limites da placa (permitindo a rotação e impedindo a translação ao longo dos eixos).

A ideia proposta é ilustrada na Figura 5.10 que mostra o duplo entalhe em V em uma viga utilizada no Laboratório de Mecânica das Estruturas da UFU:

Figura 5.10 – Estrutura de sustentação e duplo entalhe em V para condição de contorno de simples apoio



Fonte: A autora.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou como objetivo principal a validação da análise numérica da vibração de uma placa metálica. Para isto, inicialmente, foram introduzidos os conceitos mais importantes a respeito de dinâmica e vibrações, vibrações de placa e métodos numéricos.

Além disso, foi desenvolvido também todo o procedimento analítico de cálculo relativo à flexão de placas, de acordo com a Teoria de Kirchhoff, fornecendo o embasamento teórico principal para a obtenção da equação diferencial do movimento de uma placa.

A partir da fundamentação teórica explicitada neste projeto, é possível concluir a pertinência da utilização da Teoria Clássica de Placas com as devidas simplificações, bem como a compreensão desta como uma extensão da Teoria de Vigas em diversos momentos.

As condições de contorno estabelecidas para o estudo foram de apoio simples em todas as bordas da placa, situação única em que a solução analítica é exata. Deste modo, foi possível obter resultados de simulação das soluções analítica e numérica para comparação e validação da modelagem numérica da placa.

Os parâmetros analisados foram: as frequências naturais, segundo solução exata, aproximada (método de Rayleigh) e numérica; os modos de vibração, a partir de resultados gráficos simulados analítica e numericamente; e o comportamento dinâmico da placa em resposta às vibrações forçadas em diferentes frequências de excitação, de acordo com a teoria e o modelo numérico.

As frequências calculadas pelo método aproximado (de energia) apresentaram exatamente os valores resultantes da solução analítica, comprovando a confiabilidade do uso do método de Rayleigh para a determinação das frequências naturais, o qual pode ser utilizado para placas retangulares em outras 20 diferentes configurações das condições de contorno com boa exatidão. Os valores resultantes da solução numérica, por sua vez, foram

muito próximos dos valores exatos, diferindo apenas por casas decimais, muito provavelmente devido à malha utilizada e ao próprio método de aproximação em si que é utilizado na simulação.

Os modos de vibração expostos a partir de rotinas estabelecidas nos softwares MATLAB® R2015a e ANSYS® R18.1 concordaram bastante entre si, refletindo exatamente os padrões esperados de acordo com a teoria. E as respostas da placa a diferentes excitações externas harmônicas, também avaliadas analítica e numericamente, forneceram padrões muito próximos entre si para cada frequência, de modo a ser possível afirmar que os resultados obtidos também foram adequadamente precisos neste caso.

Dessa forma, pode-se concluir que a implementação do modelo numérico da placa no ANSYS® produziu resultados muito satisfatórios. Estes refletiram bem as respostas esperadas conforme a teoria, apropriadamente apresentadas de acordo com o programa desenvolvido no MATLAB®, comprovando o alcance de dois dos principais objetivos deste estudo.

Por fim, a proposta de execução de um experimento que possa validar as análises realizadas foi sugerida ao longo de praticamente todo o trabalho, tendo sido apresentado um projeto conceitual inicial referente à montagem experimental. Diversos estudos e adaptações ainda deverão ser realizados para que o aparato experimental reproduza fielmente as condições estabelecidas, mas já se pode afirmar de antemão que o modelo numérico proposto neste projeto é definitivamente válido para futuras comparações.

SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

São sugeridos alguns trabalhos futuros como sequência deste:

- a) Representação experimental de diferentes condições de contorno no estudo de vibração de placas metálicas retangulares
- b) Avaliação experimental da vibração de uma placa metálica retangular simplesmente apoiada
- c) Análise numérica da vibração de uma placa retangular com apenas duas bordas opostas simplesmente apoiadas

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADINI, A.; CLOUGH, R. W. **Analysis of plate bending by the finite element method.** Report submitted to National Science Foundation, Washington D.C., Grant G7337, 1960.

ASDEC. **Laser vibrometry case study: Chladni plate.** 3rd March 2015. Disponível em: <<http://asdec.co/2015/03/03/laser-vibrometry-case-study-chladni-plate/>>. Acesso em: 5 de dezembro de 2019. il. color.

BLEVINS, R. D. **Formulas for natural frequency and mode shape.** Reprint Edition. Malabar: Krieger Publishing Company, 2001. 492 p.

BRAUER, J. R. **What every engineer should know about finite element analysis.** 2. ed. rev. and expanded. New York: Marcel Dekker, Inc., 1993. 321 p.

CHRÓŚCIELEWSKI, J.; GILEWSKI, W.; KREJA, I. **Fifty years of Finite Element Analysis of plates and shells (1960-2010).** Proceedings of 19 International Conference on Computer Methods in Mechanics, Warsaw, Poland, 2011.

CLOUGH, R. W.; TOCHER, J. L. **Finite element stiffness matrices for the analysis of plate bending.** Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Analysis, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and applications of finite element analysis.** 4. ed. New York: Wiley, 2001. 719 p.

GÉRADIN, M.; RIXEN, D. **Mechanical vibrations: theory and application to structural dynamics.** 2. ed. Chichester: John Wiley & Sons Inc., 1997. 425 p.

GUPTA, K. K.; MEEK, J. L. **A brief history of the beginning of the finite element method.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 39, p. 3761-3774, 1996.

HARD. **Barras Roscada HBR A36.** 2018. Disponível em: <<https://hard.com.br/produto/barras-roscadas-a36/>>. Acesso em: 5 de dezembro de 2019. il. color.

JBM INSTRUMENTOS. **Gerador de funções de sinais elétricos de formas de onda**. 2009. Disponível em: <http://www.jbminstrumentos.com.br/instrumentos-medicao/gerador_funcao.html>. Acesso em: 5 de dezembro de 2019. il. color.

LEISSA, A. W. **The free vibrations of rectangular plates**. Journal of Sound and Vibration, v. 31, p. 257-293, 1973.

MERCADO LIVRE. **Chapa Alumínio 15cm x 30cm x 1,00mm**. Disponível em: <https://produto.mercadolivre.com.br/MLB-751645987-chapa-aluminio-15cm-x-30cm-x-100mm_JM?matt_tool=79246729&matt_word&gclid=EAlalQobChMlybjijYm05gIVhYORCh3iPgK0EAYYAiaABEgl2sfD_BwE&quantity=1>. Acesso em: 5 de dezembro de 2019. il. color.

PHYSICS BRIDGE COURSE. **Chladni Plates – Sand Vibration Patterns**. 13 November 2013. Disponível em: <<https://physicsbridgecourse.blogspot.com/2013/11/chladni-plates-sand-vibration-patterns.html>>. Acesso em: 5 de dezembro de 2019. il. color.

RAO, S. S. **Mechanical vibrations**. 5. ed. Upper Saddle River: Pearson Education, Inc., Prentice Hall, 2004. 1084 p.

REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method**. 3. ed. New York: McGraw-Hill Higher Education, 2006. 766 p.

ROBIN, O.; CHAZOT, J. D.; BOULANDET, R.; MICHAU, M.; BERRY, A.; ATALLA, N. **A plane and thin panel with representative simply supported boundary conditions for laboratory vibroacoustic tests**. Acta Acustica united with Acustica, v. 102, n. 1, p. 170-182, 2016.

SANTANA, D. C. **Controle ativo de ruído empregando placas retangulares com atuadores piezoelétricos distribuídos**. 2002. 198 p. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2002.

SUBIR QUADRADO. **Sal fora do saleiro**. 25 de abril de 2010. Disponível em: <http://subirquadrado.blogspot.com/2010/04/sal-fora-do-saleiro_25.html>. Acesso em: 5 de dezembro de 2019. il. color.

SZILARD, R. **Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods**. Hoboken: John Wiley & Sons Inc., 2004. 1024 p.

TENLEE PIEZOTRONICS INC. **Electrodynamic Vibration Exciter Modal Shaker**. 1st September 2012. Disponível em: <https://tenleesensor.en.ec21.com/Electrodynamic_Vibration_Exciter_Modal_Shaker--7046797_7047011.html>. Acesso em: 5 de dezembro de 2019. il. color.

THOMSON, W. T.; DAHLEH, M. D. **Theory of vibration with applications**. 5. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, Inc., 1998. 524 p.

TSE, F. S.; MORSE, I. E.; HINKLE, R. T. **Mechanical vibrations: theory and applications**. 2. ed. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1978. 449 p.

TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C.; TOPP, I. J. **Stiffness and deflection analysis of complex structures**. Journal of Aeronautical Sciences, v. 23, p. 805-824, 1956.

UNIVERSITY OF MICHIGAN. **SharePoint Physics – Demonstration Lab: 3D40.31 – Driven Chladni Plates**. Disponível em: <<https://sharepoint.umich.edu/lisa/physics/demolab/SitePages/3D40.31%20-%20Driven%20Chladni%20Plates.aspx>>. Acesso em: 20 de janeiro de 2020. il. color.

How to build a Chladni plate. Mr. Gadget. **Youtube**. 9 de agosto de 2017. 8min27s (1min50s). il. color. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=qSfRp-oe8_A>. Acesso em: 5 de dezembro de 2019.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The finite element method: its basis and fundamentals**. 7. ed. Waltham: Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2013. 714 p.

ANEXO A – CÓDIGO DO PROGRAMA NO MATLAB®

%% Código Matlab - Frequências Naturais, Modos de Vibração e Resposta da Placa a Excitações Externas

```
clear all; close all; clc;
```

%Características da Placa Adotada (Tabela 3.2)

```
Lx=0.3;
Ly=0.35;
h=0.001;
E=69e9;
ni=0.33;
rho=2700;
ms=rho*h;
```

%Módulo de Rigidez à Flexão da Placa (Equação 2.26)

```
D=E*h^3/(12*(1-ni^2));
```

%Índices dos modos

```
r=3;
n=3;
```

% Cálculo das Frequências Naturais Exatas (Equação 3.7)

```
Freq=zeros(r,n);
```

```
for ii=1:r
```

```
    for jj=1:n
```

```
        Freq(ii,jj)=pi^2*((ii/Lx)^2+(jj/Ly)^2)*sqrt(D/ms);
```

```
    end
```

```
end
```

%Frequências Naturais Exatas em rad/s

```
Freq
```

%Frequências Naturais Exatas em Hz

```
Fn=Freq./(2*pi);
```

```
Fn
```

%% Cálculo das Frequências Naturais Aproximadas (Equação 3.23 e Tabela 3.1)

%Placa Simplesmente Apoiada nas Quatro Bordas

%Apoio Simples em x=0 e x=Lx: q=r e G=G1 H=H1 J=J1

%Apoio Simples em y=0 e y=Ly: q=n e G=G2 H=H2 J=J2

```
for i=1:r
```

```
    for j=1:n
```

```

        G=[1, 2, 3];
        J=G.^2;
        H=J;

        FnAprox(i,j)=pi/2*([(G(i)/Lx)^4+(G(j)/Ly)^4+(2*J(i)*J(j)+2*ni*(H(i)*H(j))-(J(i)*J(j)))]/(Lx^2*Ly^2))^(1/2)*sqrt(D/ms);

    end
end

FnAprox

%% Erros relativos - frequências exatas, aproximadas e numéricas

%Frequências Aproximadas
erro=100*[abs(Fn-FnAprox)./Fn]

%Frequências Numéricas (valores obtidos com modelo numérico implementado no Ansys)
FreqNum=[46.8032, 106.2680, 205.3760; 127.7420, 187.1960, 286.2820;
262.6310, 322.0690, 421.1250];
error=100*[abs(Fn-FreqNum)./Fn]

%% Modos de Vibração para um Modo Específico (definido pelo vetor "modo")

nex=100;
ney=100;
dx=Lx/nex;
dy=Ly/ney;
xx=0:dx:Lx;
yy=0:dy:Ly;

%Modo de Vibração (3,2)
modo=[3,2];

W=zeros(length(xx),length(yy));

for ll=1:length(xx)
    for kk=1:length(yy)

        W(ll,kk)=sin(modo(1)*pi*xx(kk)/Lx)*sin(modo(2)*pi*yy(ll)/Ly);

    end
end

figure (1)
surf(xx,yy,W)
xlabel ('x')
ylabel ('y')

figure (2)
contourf(xx,yy,W)
xlabel ('x')
ylabel ('y')

```

%% Resposta da Placa a uma Vibração Forçada Externa para uma Frequência de Excitação Específica (definida por fex)

```

ir=8;
in=8;

fex=480;

def=zeros(length(xx),length(yy));
Omega=zeros(ir,in);
Prn=zeros(ir,in);
Wrn=zeros(ir,in);
P=100;

for rr=1:ir
    for nn=1:in

        Omega(rr,nn)=pi^2*((rr/Lx)^2+(nn/Ly)^2)*sqrt(D/ms);

        Prn(rr,nn)=4*P/(Lx*Ly)*sin(rr*pi/2)*sin(nn*pi/2);
        Wrn(rr,nn)=Prn(rr,nn)/(ms*((Omega(rr,nn))^2-(2*pi*fex)^2));

        for pp=1:length(yy)
            for qq=1:length(xx)

defaux(qq,pp)=(Wrn(rr,nn))*sin(rr*pi*xx(pp)/Lx)*sin(nn*pi*yy(qq)/Ly);

                end
            end

        def=def+defaux;

    end
end

figure (3)
surf(xx,yy,def)
xlabel ('x')
ylabel ('y')

figure (4)
contourf(xx,yy,def)
xlabel ('x')
ylabel ('y')

```

ANEXO B – MODELO NUMÉRICO IMPLEMENTADO NO ANSYS®

!!! PARÂMETROS DE SIMULAÇÃO – MODELO NUMÉRICO !!!

! Dimensões da placa

! Dimensão na direção x

$L_x = 0.3$

! Dimensão na direção y

$L_y = 0.35$

! Espessura

$h = 0.001$

! Módulo de Elasticidade

$E_{mat} = 69e9$

! Coeficiente de Poisson

$\nu_i = 0.33$

! Densidade

$\rho = 2700$

! Elementos Finitos

$n_{div} = 100$

!!! Definição do elemento

! Define a característica do elemento da estrutura

! SHELL63 tem seis graus de liberdade (translação e rotação) nos seus quatro nós

ET,1,SHELL63

!!! Definição da constante real

! Define a espessura da placa

R,1,h

!!! Definição das propriedades do material

! Módulo de Elasticidade

MP,EX,1,Emat

! Coeficiente de Poisson

MP,PRXY,1,ni

!Densidade

MP,DENS,1,rho

!!! Construção do modelo geométrico

! Placa retangular com $L_x = 0.3$ e $L_y = 0.35$

BLC4,0,0,Lx,Ly

!!! Malha utilizada

! Definição do tamanho do elemento

esize, size, ndiv

!!! Construção da malha

amesh,1

!!! Definição das condições de contorno

```
allsel,all  
nsel,s,loc,x,0  
nsel,a,loc,x,Lx  
nsel,a,loc,y,0  
nsel,a,loc,y,Ly
```

```
d,all,ux,0  
d,all,uy,0  
d,all,uz,0
```

```
allsel,all  
nummrg,all
```

!!! Definição de um carregamento – para análise harmônica a partir daqui

```
allsel,all  
nsel,s,loc,x,Lx/2  
nsel,r,loc,y,Ly/2
```

```
F,all,FZ,100
```

```
allsel,all  
nummrg,all
```