

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
INSTITUTO DE FÍSICA

JESRRAEL FONSECA SANTOS

GRUPOS DE LIE, SIMETRIAS
E SUAS APLICAÇÕES EM FÍSICA

UBERLÂNDIA
2020

JESRRAEL FONSECA SANTOS

**GRUPOS DE LIE, SIMETRIAS
E SUAS APLICAÇÕES EM FÍSICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto de Física da Universidade Federal
de Uberlândia para a obtenção do título de
Licenciado em Física.

Orientador: Professor Dr. Marcel Novaes

UBERLÂNDIA

2020

Este trabalho é fruto de esforço pessoal, mas também da paciência e do incentivo de minha esposa, Laucielly e de meus filhos, Anna Laura e Davi, a quem devotamente o dedico. Postumamente, também dedico a meu avô, Alvarindo Lourenço da Fonseca, exemplo de homem e pai.

“Dedication is belief transitioned into action which is transformed into change”

Byron Pulsifer

AGRADECIMENTOS

Ao longo desta jornada foram muitos os ombros que me apoiaram. Citar todos aqui demandaria espaço que não disponho neste trabalho, ainda assim, é necessário mencionar nominalmente alguns.

- Laucielly, minha esposa, suportou minhas noites de vigília e meus dias de isolamento, seja enquanto estudava para exames do curso, seja quando me debruçava horas a fio sobre o trabalho de conclusão de curso. Seu cuidado e amor criaram as condições para que este objetivo fosse realizado. Muito obrigado!
- Sr. Antero do Santos e Sra. Ângela Fonseca Santos, meus pais. Foram com seus exemplos, palavras e condutas que aprendi que a maior herança que o homem pode ter é o caráter. Obrigado pelos ensinamentos e pelas lições que nenhuma universidade é capaz de ensinar. Gratidão eterna!
- Ao Dr. Marcel Novaes, mais do que meu orientador, meu exemplo de mestre. Não me enganei quando assisti sua primeira ministração na universidade e me maravilhei. Seu rigor, precisão, conhecimento e paciência me inspirarão sempre. Sem sua orientação e persistência comigo, esse trabalho dificilmente se concretizaria!
- E por fim, mas principalmente, ao Autor da minha vida e Consumador de minha fé: Deus! Sem seu amor e proteção, nada do que faço teria sentido ou objetivo. Graças te dou por tudo!

Enfim, todos os que convivem com você contribuem para sua peregrinação nesta Terra. A todo(a)s esse(a)s, citado(a)s ou não, deixo o texto bíblico registrado pelo apóstolo Lucas:

“e serás bem-aventurado; porque eles não têm com que to recompensar; mas recompensado serás na ressurreição dos justos.”

Lucas 14.14

RESUMO

Na natureza há uma variedade de fenômenos que muitas vezes possuem alto grau de simetria. Podemos citar desde a simetria de figuras poligonais ou circulares, passando por elementos naturais que por eles podem ser representados como cristais, flores, colmeias, átomos, etc., no entanto, este trabalho versa sobre um dos melhores exemplos de simetria que rege nossa vida: as leis da física são invariantes diante da mudança de referencial.

Esse texto é dedicado a estudar tais simetrias lançando mão de uma extraordinária ferramenta matemática: a Teoria de Grupos, essencialmente os grupos de Lie. Aqui, exploramos a riqueza das propriedades herdadas desses grupos que abrange desde o formalismo da mecânica clássica, passando pela revolução da relatividade especial até o maravilhoso mundo da mecânica quântica.

Palavras – Chave: Simetrias – Grupos – Lie - Invariância

ABSTRACT

In nature, there is a variety of phenomena that often has a high degree of symmetry. We can cite from the symmetry of polygonal or circular figures, passing through natural elements that can be represented by them as crystals, flowers, hives, atoms, etc. However, this paper deals with one of the best examples of symmetry that rules our life: the laws of physics are invariant by reference frames changes..

This text is dedicated to studying such symmetries using an extraordinary mathematical tool: the Group Theory, essentially the Lie groups. Here, we explore the wealth of properties inherited from these groups that range from the formalism of classical mechanics, through the revolution of special relativity to the wonderful world of quantum mechanics.

keywords: Symmetry – Groups – Lie - Invariance

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
CAPÍTULO 1 - Conceitos Preliminares em Teoria de Grupos	12
1.1) Definição de Grupo	12
1.2) Definição de Subgrupo.....	12
1.3) Homomorfismos de Grupos	13
1.4) Isomorfismos de Grupos	13
1.5) Representações de um Grupo	13
1.6) Grupos Contínuos.....	14
1.7) Grupos de Lie	14
1.8) Exemplos de Grupos de Lie	14
CAPÍTULO 2 - Grupos de Lie e Rotações e Translações no Plano	16
2.1) Grupos Ortogonais	16
2.2) Rotações no Espaço $\mathbb{R}^2$	16
2.3) Rotações no Espaço $\mathbb{R}^3$	19
2.4) Geradores Diferenciais	20
2.5) A Importância da Comutação entre Geradores Diferenciais.....	22
CAPÍTULO 3 - Grupos de Lie sua Aplicação nas Leis de Movimento	23
3.1) Grupos de Simetria.....	23
3.2) A Invariância das Leis de Movimento de Newton em Referenciais Inerciais	23
3.3) Os Grupos de Simetria e a Invariância das Leis de Newton	26
CAPÍTULO 4 - Grupos de Lie e o Formalismo da Mecânica Clássica	28
4.1) A Formulação Lagrangeana da Mecânica Clássica.....	28
4.2) Simetrias e Leis da Conservação da Lagrangeana	28
4.3) A Formulação Hamiltoniana da Mecânica Clássica	31
4.4) Notação Simplética	31
4.5) As Transformações Canônicas	33
4.6) Transformações Canônicas em Notação Simplética e Grupo Simplético.....	33
4.7) O Parênteses de Poisson.....	35
4.8) Equações de Hamilton e Parênteses de Poisson.....	35
4.9) Invariância do Parênteses de Poisson sob Ação do Grupo Simplético	36
CAPÍTULO 5 - Grupos de Lie e a Relatividade Especial	38
5.1) A Transformação de Lorentz.....	39

5.2) Transformação de Velocidades	41
5.3) Dinâmica Relativística	41
5.4) Eletrodinâmica Relativística	46
5.5) A Invariância da Equação de Onda sob a Ação da Transformação de Lorentz	50
5.6) Rotações no Espaço de Minkowski.....	51
5.7) O Grupo de Lorentz $\mathcal{L}$	52
CAPÍTULO 6 - Grupos de Lie e Mecânica Quântica	56
6.1) Grupo Unitário	56
6.2) O Operador Unitário e Sua Interpretação Física	57
6.3) Rotações Infinitesimais em Mecânica Quântica	57
6.4) A Comutatividade do Momento Angular em Mecânica Quântica.....	59
6.5) Spin e as Matrizes de Pauli	60
6.6) SU(2) e SO(3)	63
CAPÍTULO 7 -Considerações Finais.....	65

INTRODUÇÃO

“Symmetry, as wide or narrow as you may define its meaning, is one idea by which man through the ages has tried to comprehend and create order, beauty, and perfection”

Hermann Weyl

Na ciência, a simetria é um poderoso conceito que pode ser usado para descrever as propriedades de elementos animados ou inanimados, sejam eles naturais ou “construídos” pelo homem. A simetria e a complexidade determinam a essência do progresso não linear da ciência e podem ser usadas para descrever a expansão do universo, a evolução da vida, o comportamento de partículas subatômicas e até mesmo o fenômeno da globalização da economia e da sociedade humana.

Inicialmente, a simetria estava associada a ordem, simplicidade, beleza e harmonia, mas a ausência de simetria também é relevante! O Universo não é propriamente um ente estático, equilibrado e bem ordenado. O fenômeno da quebra de simetria provoca novas ordens, estruturas e transições de estados estáveis para equilibrados regidos por leis da dinâmica não linear.

A simetria é um fenômeno multicultural. É visualmente atraente para o olho humano provocando o prazer estético. Pode ser encontrada em fotos, desenhos, esculturas, arquitetura, música, têxteis e decoração de cerâmica e muitos outros objetos feitos pelo homem. Simetria e quiralidade são reconhecidas na Natureza desde o período pré-histórico.



Figura 1) A esquerda temos a Catedral de Saint Jacob, em Sibenick, na Croácia. A direita, temos o mausoléu Taj Mahal, na Índia. Ambas as construções revelam o poder estético da simetria nas construções humanas. Fonte: Google Images

Mas, o que é simetria?

A simetria de um objeto é definida como transformações que trazem o objeto de volta para seu estado inicial. Isso significa que um elemento é invariante ou imutável sob uma certa

transformação. De maneira geral, essas transformações podem ser entendidas como rotações, translações, inversões e reflexões.

Entretanto, esse conceito precisa ser aprofundado, dando a ele um verniz matemático, para que possa modelar objetos estéticos (flores, cristais ...) ou numéricos (leis da física, equações polinomiais...) que não podem ser restringidos apenas a conjuntos. O interesse é na *estrutura* e assim, a melhor maneira de estudar as transformações de simetria de qualquer elemento é a Teoria de Grupos.

A Teoria de Grupos fornece a linguagem matemática natural para descrever a simetria do mundo físico. Embora a teoria de grupos e a física da simetria não tenham se desenvolvido simultaneamente, como aconteceu com a mecânica newtoniana e o cálculo, a íntima ligação entre elas foi completamente esclarecida e formulada nos trabalhos de Eugene Wigner (1902 – 1995) e Hermann Weyl (1885 – 1955), entre outros.

A estreita conexão entre simetria e teoria de grupos é nítida na estrutura da mecânica quântica, mas muitas propriedades da física clássica que envolvem transformações simétricas podem ser elucidadas por meio da abordagem de teoria de grupos. Mais especificamente, as soluções das equações da física matemática clássica e os vetores de estado da mecânica quântica formam espaços vetoriais lineares. As simetrias desses sistemas físicos fundamentais exigem estruturas distintas de regularidade. Esses padrões diferentes são descritos pela teoria de grupos de simetria e são independentes de outros detalhes destes sistemas.

Portanto, além de fornecer uma ferramenta poderosa para estudar problemas físicos, a abordagem envolvendo teoria de grupos adiciona muitos ‘insights’ a antigos resultados obtidos inicialmente por métodos analíticos bastante trabalhosos. Desde 1950, a aplicação da teoria de grupos na física tornou-se cada vez mais importante, permeando praticamente todos os campos desse ramo da ciência.

A teoria de grupos também ganhou importância na química, pois fornece uma descrição quantitativa das propriedades de simetria dos átomos, moléculas e sólidos. Isso revela que a fonte do poder da teoria de grupos em lidar com fenômenos da física e da química que dependem da simetria é a capacidade de estabelecer uma ponte entre simetrias e números. É o poder desta analogia que fornece representações aritméticas de operações, permitindo obter resultados geométricos de simples operações numéricas.

Neste trabalho, nos propomos a abordar detalhes da aplicação desta ferramenta poderosa em alguns campos da física. Diante de um cenário tão vasto, concentramos na abordagem possibilitada pelos trabalhos do matemático Marius Sophus Lie (1842 - 1899), responsável por elaborar grande parte da álgebra necessária para entendermos os grupos de simetria.

Evidentemente, o presente texto não esgota o tema mas serve ao propósito de ser uma introdução a esse maravilhoso campo da física matemática.

Os capítulos foram divididos de maneira que cada um deles aborde as transformações simétricas em um campo distinto da física pela ótica da teoria de grupos. A exceção é o capítulo 1, em que nos preocupamos em fornecer um subsídio das principais definições e nomenclaturas matemáticas que servirão de alicerce para o que virá a partir do capítulo 2. Além da natureza a que se propõe (ser um trabalho de conclusão de curso), esperamos que este texto instigue e auxilie outros estudantes que se interessarem pelo assunto

CAPÍTULO 1

Conceitos Preliminares em Teoria de Grupos

Neste capítulo apresentaremos definições e propriedades importantes que nos acompanharão ao longo deste trabalho. Por ser um texto de caráter introdutório ao tema, não efetuamos as demonstrações de eventuais teoremas e não citamos exemplos das definições elencadas neste capítulo. Algumas referências estão citadas na bibliografia do trabalho e podem ser fontes de consulta para um estudo mais completo, rigoroso ou aprofundado do tema.

1.1) Definição de Grupo

Um *grupo* é um conjunto G não vazio dotado de uma operação $*$ tal que

$$(x, y) \mapsto x * y, \forall x, y \in G$$

e que se sujeita aos seguintes axiomas:

i) Associatividade

$$(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in G$$

ii) Possui elemento neutro e :

$$e \in G \mapsto x * e = e * x = x, \forall x \in G$$

iii) Todo elemento possui inverso:

$$x^{-1} \in G \mapsto x * x^{-1} = x^{-1} * x = e, \forall x \in G$$

Se, além dos axiomas acima, ainda for válida a propriedade comutativa, ou seja,

$$x * y = y * x, \forall x, y \in G \quad (1.1)$$

o grupo recebe o nome de *grupo abeliano*.

Mantida as notações definidas acima, um grupo será representado apenas por $(G, *)$, em que $*$ indica a operação sobre G .

1.2) Definição de Subgrupo

Seja $(G, *)$ um grupo. Diz-se que um subconjunto não vazio X é um subgrupo de G se $(X, *)$ também é um grupo. É bom ressaltar que aqui o símbolo $*$ indica a restrição da operação de G aos elementos de X .

Se e indica o elemento neutro de G , então obviamente $\{e\}$ é um subgrupo de G . É imediato, também, que o próprio G é um subgrupo de si mesmo. Esses dois subgrupos, $\{e\}$ e G , são chamados de subgrupos triviais de G .

1.3) Homomorfismos de Grupos

Chamamos de homomorfismo de um grupo $(G, *)$ num grupo $(H, .)$ a toda aplicação $f : G \rightarrow H$, tal que, $\forall x, y \in G$

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y) \quad (1.2)$$

A título de simplificação de linguagem, refere-se a $f : G \rightarrow H$ como um homomorfismo de grupo. Em termos pictóricos, podemos descrever o homomorfismo pela ilustração abaixo

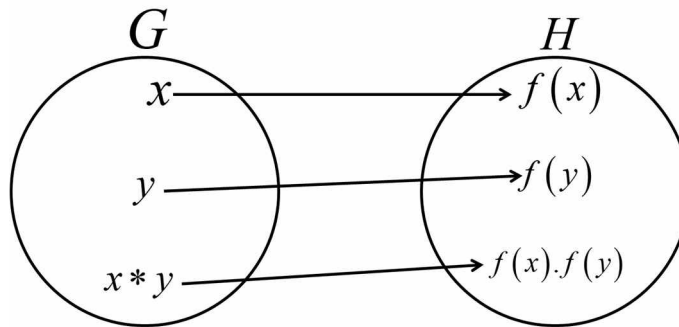


Figura 2) Homomorfismo

1.4) Isomorfismos de Grupos

Seja $f : G \rightarrow H$ um homomorfismo de grupos. Se f for também uma bijeção, então será chamado de isomorfismo do grupo G no grupo H . Neste caso, diz-se que f é um *isomorfismo de grupos*.

1.5) Representações de um Grupo

Um *operador* é um mapeamento atuando nos elementos de um espaço vetorial e que produz outros elementos do mesmo espaço. Se existir um homomorfismo de um grupo G a um grupo de operadores $U(G)$ que agem sobre um espaço vetorial V dizemos que $U(G)$ forma uma representação do grupo G . [10]

De maneira mais formal, uma representação é um mapeamento

$$g \in G \xrightarrow{U} U(g) \quad (1.3)$$

onde $U(g)$ é um operador atuando em um espaço vetorial V tal que

$$a) U(g_1)U(g_2) = U(g_1, g_2)$$

$$b) U(g^{-1}) = [U(g)]^{-1}, \forall g \in G$$

$$c) U(e) = I; e : \text{elemento unitário de } G.$$

A representação pode ser de dois tipos

i) *representação fiel*, se for isomórfica.

ii) *representação degenerada*, se não for fiel.

1.6) Grupos Contínuos

O número de elementos de um grupo é chamado de *ordem* do grupo. A partir dessa característica, um grupo pode ser classificado em finitos ou infinitos.

Um grupo cujos elementos são caracterizados por um número de parâmetros contínuos é chamado de *Grupo Contínuo*.

A definição acima pode ser mais detalhada se assumirmos uma quantidade r de parâmetros. Nesse caso, dizemos que um grupo contínuo de r – *parâmetros* é um grupo cujos elementos dependem de parâmetros reais a_λ , onde $\lambda = 1, 2, \dots, r$.

1.7) Grupos de Lie

Um grupo de Lie é um grupo contínuo G munido de uma estrutura diferenciável de modo que as funções

$$\begin{aligned}(g, h) &\in G \times G \mapsto gh \in G \\ g &\in G \mapsto g^{-1} \in G\end{aligned}$$

sejam diferenciáveis.

1.8) Exemplos de Grupos de Lie

A) Grupo Ortogonal de dimensão n - $O(n)$

É o grupo de Lie formado por todas as transformações que deixam invariante a forma quadrada $\sum_{i=1}^n x_i^2$. Dado $A \in O(n)$, a condição de ortogonalidade é descrita como $A^{-1} = A^T$.

O grupo $O(n)$ possui um subgrupo, denotado por $SO(n)$, que é composto pelas matrizes ortogonais com determinante igual a 1. Esses grupos são denominados grupos ortogonais especiais.

B) Grupo unitário de dimensão n - $U(n)$

É o grupo de Lie que deixa invariante o produto escalar $\langle x; x \rangle$ em um espaço complexo n – dimensional. Tal grupo é formado pelas matrizes que obedecem a relação $U^{-1} = U^*$, onde U^* é a matriz transposta conjugada.

$U(n)$ possui um subgrupo, denotado por $SU(n)$, que é composto pelas matrizes unitárias com determinante igual a 1. Esses grupos são denominados grupos unitários especiais.

[1]

C) Grupos Simpléticos – $Sp(n)$

Os grupos simpléticos são grupos que mantêm invariantes formas simpléticas, ou seja, formas bilineares¹ alternantes (antissimétricas) e não degeneradas².

Um exemplo particularmente importante neste trabalho são as matrizes $(2n) \times (2n)$ dadas por

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_n & 1_n \\ -1_n & \mathbb{O}_n \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Onde 1_n e $\mathbb{O}_n$ são a matriz identidade e a matriz identicamente nula $n \times n$, respectivamente.

¹ Seja V um espaço vetorial. Uma forma bilinear sobre V é uma função f que associa a cada par ordenado de vetores α, β em V um escalar $f(\alpha, \beta)$ e que satisfaz

$$f(c\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = cf(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta)$$

$$f(\alpha, c\beta_1 + \beta_2) = cf(\alpha, \beta_1) + f(\alpha, \beta_2)$$

² Uma forma bilinear f sobre um espaço vetorial V é dita não-degenerada (ou não-singular) se sua matriz em relação a alguma (toda) base ordenada de V é uma matriz não-singular,

CAPÍTULO 2

Grupos de Lie e Rotações e Translações no Plano

Tomemos o plano Euclidiano convencional $\mathbb{R}^2$. Sabemos que $\mathbb{R}^2$ é um espaço bidimensional, mas podemos ir além e generalizar suas propriedades se o analisarmos sob a ótica de distância entre pontos. Uma maneira de compreender o plano Euclidiano é encontrar suficientes características que descrevam sua geometria em termos de distância entre seus pontos.

A teoria de Grupos se encarrega de generalizar tal propriedade. Ao invés de ficar analisando distância entre pontos no plano, abstraímos o conceito através de transformações que preservam as distâncias e por meio de suas propriedades, estudamos suas operações e as relações entre essas transformações. O conjunto fundamental da Teoria de Grupos não é o conjunto de pontos no plano, mas o conjunto de transformações no plano.

Uma transformação no plano que preserva as distâncias é chamada de *Isometria*. Uma isometria T no plano Euclidiano associa cada ponto a a um ponto Ta do plano e essa associação conserva a distância, ou seja, se a e b são pontos do plano e suas imagens são Ta e Tb , respectivamente, então a distância $d(Ta; Tb) = d(a; b)$. É bom destacar ainda que se uma transformação linear conserva as distâncias, também irá conservar outras propriedades quantitativas como áreas e ângulos.

O conjunto de todas as isometrias de um plano tem estrutura de grupo. Concentraremos a análise nas isometrias decorrentes de grupos contínuos ou grupos de Lie. Tais propriedades versam sobre a rotação e translação de objetos sob a ótica matricial.

2.1) Grupos Ortogonais

Em muitas transformações na Física é necessário preservar as distâncias em um espaço apropriado. Se o espaço é o plano euclidiano de n - dimensões, para que as distâncias sejam preservadas é necessário que

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad (2.1)$$

O grupo correspondente a essa propriedade é chamado de grupo ortogonal e são denotados por $O(n)$.

2.2) Rotações no Espaço $\mathbb{R}^2$

2.2.1) Utilizando Matrizes Reais

Inicialmente, iremos analisar as rotações no plano. Representaremos por $\mathbb{R}^2$ tal região, sendo que o eixo horizontal será dado por x e o eixo vertical dado por y .

A rotação de um ângulo θ do plano em torno da origem determina uma transformação $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. É possível verificar que as imagens $T(\ell_1)$ e $T(\ell_2)$ podem ser escritas como

$$\begin{cases} T(\ell_1) = (\cos \theta; \sin \theta) \\ T(\ell_2) = (-\sin \theta; \cos \theta) \end{cases} \quad (2.2)$$

Podemos ainda reescrever em termos dos versores ℓ_1 e ℓ_2 :

$$\begin{cases} T(\ell_1) = (\cos \theta) \ell_1 + (\sin \theta) \ell_2 \\ T(\ell_2) = (-\sin \theta) \ell_1 + (\cos \theta) \ell_2 \end{cases} \quad (2.3)$$

Figura 3

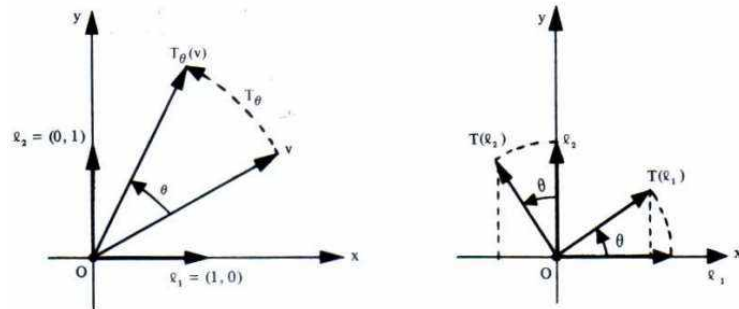


Figura 4) Fonte: Steinbruch e Winterle 2010, p. 201

Logo, a matriz canônica de rotação T_θ é

$$\begin{bmatrix} T_\theta \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Observe que o produto $\begin{bmatrix} T_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_\theta \end{bmatrix}^T = I$, onde I é a matriz identidade. Quando o produto entre uma matriz $\begin{bmatrix} T_\theta \end{bmatrix}$ e sua transposta $\begin{bmatrix} T_\theta \end{bmatrix}^T$ resulta na matriz identidade I , tal matriz é chamada de ortogonal. O conjunto de todas as matrizes ortogonais tem estrutura de um grupo pois:

- i) o produto entre duas matrizes ortogonais produz uma matriz ortogonal,
- ii) a identidade I também é uma matriz ortogonal
- iii) a inversa de uma matriz ortogonal é ortogonal.

As matrizes ortogonais de duas dimensões formam o grupo $O(2)$. É relevante, entretanto, destacar que nem todas as matrizes ortogonais são matrizes de rotação. Isso porque

o grupo $O(2)$ abrange as matrizes de rotação, as matrizes de inversão (que é outra transformação isométrica no plano) e os demais elementos são obtidos pelo produto matricial entre uma rotação e uma inversão.

Se nos restringirmos apenas as matrizes de rotação no plano, teremos o Grupo $SO(2)$, também chamado de Grupo Ortogonal Especial. Tal grupo está contido no grupo das matrizes ortogonais, ou seja, $O(2) \supset SO(2)$.

Por fim, vale ressaltar que a matriz de rotação no plano é comutativa, algo que não se repetirá, como veremos, nas rotações no espaço.

2.2.2) Utilizando Números Complexos

Um número complexo é definido por dois parâmetros reais a e b , onde a é chamado de parte real e b é chamado de parte imaginária. Na sua forma algébrica, esse número bidimensional pode ser escrito como $z = a + bi$. Sobre esses números, são válidas as seguintes afirmações:

a) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

b) Sua forma trigonométrica, também chamada de forma polar é dada por $z = |z| \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$. Tal forma também pode ser representada na chamada “notação de Euler”, $z = |z| \cdot e^{i \cdot \theta}$. Como na rotação queremos preservar o módulo do vetor a ser rotacionado, nossa atenção se voltará especialmente para os números complexos cujo módulo é 1. Dessa forma, nosso operador rotação será escrito, na forma polar, como $z = e^{i \cdot \theta}$. Tais números serão aqui chamados de complexos unitários.

Os números complexos unitários formam o conjunto $U(1)$. É possível verificar que esse conjunto possui estrutura de grupo. É possível estabelecer uma relação bijetiva entre $U(1)$ e $SO(2)$ e ainda verificar que as estruturas algébricas de ambos são iguais ($T_\theta \cdot T_\delta = T_{\theta+\delta}$ e $e^\theta \cdot e^\delta = e^{\theta+\delta}$). Dessa forma, estabelece-se um isomorfismo entre $U(1)$ e $SO(2)$.

A propriedade dos argumentos serem somados na multiplicação significa que podemos pensar na multiplicação entre dois complexos como uma operação de rotação. No caso de um complexo unitário, será efetuado uma rotação pura que alterará apenas a orientação de um outro

vetor. Em particular, a unidade imaginária $\mathbf{i}$, que corresponde ao vetor $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, representará sempre uma rotação anti-horária de $\frac{\pi}{2}$ radianos em torno da origem.

2.2.3) Utilizando Operadores Diferenciais:

Na seção anterior, analisamos as rotações em torno de um ponto ou eixo utilizando os números complexos. Podemos abordar tais rotações também pela ótica de operadores diferenciais, considerando que uma rotação nada mais é do que uma translação efetuada sobre uma variável angular θ .

Considere o operador $D_\theta = \frac{d}{d\theta}$ e seu valor por meio da expansão de Taylor em torno de um ponto $\theta + \varepsilon$:

$$f(\theta + \varepsilon) = f(\theta) + [D_\theta f](\theta)\varepsilon + \frac{1}{2} \left[D_\theta^2 f \right](\theta)\varepsilon^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left[D_\theta^n f \right](\theta)\varepsilon^n \dots \quad (2.5)$$

mas, sem atermos aos detalhes algébricos, temos que tal expansão é equivalente a $f(\theta + \varepsilon) = e^{\varepsilon D_\theta} f(\theta)$.

Note que a analogia com a forma polar de Euler é quase imediata. Observe ainda que o isomorfismo com o grupo $SO(2)$ existe pois $e^{\varepsilon D_\theta} \cdot e^{\beta D_\theta} = e^{(\varepsilon + \beta) D_\theta}$. Assim, temos uma rotação de θ expressa por meio de operador diferencial e uma nova maneira de representar o grupo $SO(2)$.^[14]

2.3) Rotações no Espaço $\mathbb{R}^3$

Assim como em $\mathbb{R}^2$, há um conjunto de matrizes ortogonais de rotação em $\mathbb{R}^3$ que formam, por analogia, o grupo $SO(3)$ que por sua vez estão dentro do conjunto $O(3)$ (conjunto de todas as matrizes ortogonais no espaço). A abordagem da rotação tridimensional pode ser feita geometricamente por meio dos ângulos de Euler, entretanto, a rotação em $\mathbb{R}^3$ por meio dos quatérnions nos provê um meio mais direto de efetuarmos a tal transformação.

Os quatérnions são definidos por quatro parâmetros a, b, c e d , com $\{a, b, c, d\} \in \mathbb{R}$ e, de forma análoga aos números complexos, possuem uma parte real e uma parte imaginária. Entretanto, se diferenciam dos elementos de $\mathbb{C}$ pois sua parte imaginária possui três componentes distintas, denominadas de agora em diante de i, j e k . Assim, um quatérnions

pode ser escrito, na forma algébrica, como $q = (a, b, c, d) \Rightarrow q = a + bi + cj + dk$. Observe ainda que, em um quatérnion, seus valores unitários são tais que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Dadas essas definições, tratemos agora da rotação de um vetor $\vec{r} = (r_x; r_y; r_z)$. Esse vetor será representado agora como um quatérnion de parte real nula $p = (0, \vec{r})$.

Se desejamos aplicar a um ponto $\vec{r}$ uma rotação de um ângulo θ , no sentido anti-horário, ao redor de um eixo definido pelo vetor unitário $\vec{u}$ utilizando os quatérnions, seguiremos os seguintes passos:

- Representamos $\vec{r}$ pelo quatérnion $p = (0, \vec{r})$.
- Adotamos como operador de rotação o quatérnion $q = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{u} \right]$
- Realizamos a operação qpq^* , onde q^* é o quatérnion conjugado.
- O resultado será um quatérnion cuja parte real é zero e a parte imaginária será justamente o resultado de uma rotação θ de $\vec{r}$ ao redor do eixo de orientação $\vec{u}$ (vetor diretor).

Ao fim da discussão da rotação em $\mathbb{R}^3$ por meio dos quatérnions é necessário fazer as seguintes observações:

- O conjunto dos quatérnions H é isomórfico ao grupo $SU(2)$.
- O conjunto H não é propriamente isomorfo de $SO(3)$ pois não há uma relação bijetiva entre $SU(2)$ e $\mathbb{Z}_2$.
- A multiplicação de quatérnions não é comutativa. Como a multiplicação de quatérnions unitários corresponde à composição de rotações tridimensionais, essa propriedade implica que as rotações tridimensionais não são comutativas em geral. ^[14]

2.4) Geradores Diferenciais

Ao analisarmos a rotação em $\mathbb{R}^2$, observamos que é possível escrever o grupo $SO(2)$ por meio de operadores diferenciais a partir da expansão de Taylor. Cada rotação de um ângulo finito pode ser obtido por meio da exponencial de uma matriz X , que é chamado de gerador infinitesimal de rotações. Como $X^2 = -I$, é imediato que

$$e^{iX} = I \cos \theta + X \sin \theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Para derivar os operadores associados com as rotações infinitesimais, expandimos em $d\theta$ para obtermos as transformações

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta = x - y d\theta \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta = x d\theta + y \end{aligned} \quad (2.7)$$

Agora, ao trabalharmos com rotações em $\mathbb{R}^3$, uma alternativa para a matriz de representação de geradores infinitesimais é escrevê-la em termos de operadores diferenciais. Assim, escrevemos as rotações gerais como uma expansão de primeira ordem em cada θ_i . Isso nos leva a matriz de transformação.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 1 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Substituindo tais coordenadas em uma função diferenciável $F(x, y, z)$

$$F(x', y', z') = F(x - \theta_3 y + \theta_2 z, y + \theta_3 x - \theta_1 z, z - \theta_2 x + \theta_1 y) \quad (2.9)$$

A expansão em primeira ordem do segundo membro em θ_1 leva a seguinte expressão

$$F(x', y', z') = F(x, y, z) + \left(\frac{\partial F}{\partial z} y - \frac{\partial F}{\partial z} z \right) \theta_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} z - \frac{\partial F}{\partial z} x \right) \theta_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} x - \frac{\partial F}{\partial x} y \right) \theta_3 \quad (2.10)$$

Já que F é uma função diferenciável arbitrária qualquer, podemos identificar os geradores diferenciais X_i de rotações sobre os eixos de coordenadas a partir dos coeficientes θ_i , ou seja, pelos operadores diferenciais

$$\begin{aligned} X_1 &= y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \\ X_2 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \\ X_3 &= x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.11)$$

É válido observar que X_3 é um operador de $SO(2)$. Nós podemos dar uma interpretação física a esses operadores se os compararmos com as componentes vetoriais dos operadores angulares em um sistema de coordenadas obtidos pela definição

$$L = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (-i\hbar \nabla) \quad (2.12)$$

Dessa maneira, efetuando o produto vetorial, obtemos as seguintes expressões padrão

$$\begin{aligned}
L_x &= -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
L_y &= -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
L_z &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)
\end{aligned} \quad (2.13)$$

2.5) A Importância da Comutação entre Geradores Diferenciais

Nosso conhecimento das propriedades dos operadores de momento angular é agora apresentado sob uma perspectiva diferente - as relações de comutação entre operadores de momento angular. Vamos efetuar o produto vetorial $L = \vec{r} \times \vec{p}$.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{yp_z - zp_y}_{L_x}, \underbrace{zp_x - xp_z}_{L_y}, \underbrace{xp_y - yp_x}_{L_z} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Agora, verifiquemos se as componentes comutam entre si.

$$\begin{aligned}
[L_x, L_y] &= [L_x L_y - L_y L_x] \\
[L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\
[L_x, L_y] &= [yp_z, zp_x] - \underbrace{[yp_z, xp_z]}_0 - \underbrace{[zp_y, xp_z]}_0 - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z] \\
[L_x, L_y] &= y \underbrace{[p_z, z]}_{-i\hbar} p_x + x \underbrace{[z, p_z]}_{+i\hbar} p_y \\
[L_x, L_y] &= i\hbar (xp_y - yp_x) \\
[L_x, L_y] &= i\hbar L_z
\end{aligned} \quad (2.15)$$

De forma semelhante, concluímos que $[L_y, L_z] = i\hbar L_x$ e $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$. Logo, podemos afirmar que os geradores não comutam. As relações de comutação entre os geradores são identificadas como estruturas da álgebra de Lie. Seu papel central na teoria do momento angular é explicado pelo fato de gerarem um grupo de rotação. ^[7]

Como complemento, queremos ressaltar que das relações de não comutação depreende-se que L_x, L_y e L_z não podem ser medidos simultaneamente. A medida de um acaba prejudicando a medida do outro e dificulta a previsão das medidas de observáveis com esse comportamento.

CAPÍTULO 3

Grupos de Lie sua Aplicação nas Leis de Movimento

No primeiro capítulo, foi apresentado, de forma geral, o conceito de simetria e sua relação com transformações e seus invariantes. Uma vez a apresentação feita, precisamos olhar de maneira mais formal para a aplicação deste elemento matemático a situações específicas da Física. Para que o proveito seja maior, definiremos o que é grupo de simetria e em seguida, utilizaremos o conceito por trás desta ideia para analisarmos as leis de movimento sob a ótica da mecânica clássica.

3.1) Grupos de Simetria

Na teoria dos grupos, o grupo de simetria é o grupo de todas as transformações sob as quais um objeto é invariável, dotado da operação de composição. Essa transformação “move” o objeto, mas preserva toda a sua estrutura relevante. Uma notação frequente para o grupo de simetria de um objeto X é $G(X)$. Para um objeto em um espaço métrico, suas simetrias formam um subgrupo do grupo isometria do espaço ambiente.

Para a simetria de objetos físicos, consideramos sua composição física como parte do modelo. (Um modelo ou padrão pode ser especificado formalmente, por exemplo, como um campo escalar, como um campo vetorial ou como uma função mais geral no objeto.). O grupo de simetria $G(X)$ consiste nas isometrias que mapeiam X . Dizemos que X é *invariante* sob esse mapeamento, e o mapeamento é uma *simetria* de X . [5]

3.2) A Invariância das Leis de Movimento de Newton em Referenciais Inerciais

Uma vez que a importância da simetria para uma teoria científica já foi enunciada no primeiro capítulo deste trabalho, passemos agora a analisar sua aplicabilidade em uma das teorias físicas mais conhecidas: As Leis de Movimento de Newton.

Especificamente, na Mecânica Newtoniana, estamos falando sobre três leis:

1ª Lei: Em um sistema de referencial inercial, um corpo se move sempre em velocidade constante a menos que uma força resultante atue sobre ele.

2ª Lei: A taxa de variação do momento de um corpo é igual a força resultante aplicada sobre o corpo.

3ª Lei: Se um objeto A exerce uma força sobre um objeto B, então o objeto B exerce uma força sobre o objeto A. Tais forças possuem mesmo módulo e mesma direção, porém, atuam em sentidos opostos.

Enunciado Alternativo para a 3ª Lei: Na ausência de qualquer força externa, o momento total $\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$ de um sistema é constante.

Além disso, vamos definir alguns termos que serão recorrentes ao longo deste estudo:

Sistema de Referência: É um conjunto de coordenadas no qual representaremos as medidas centrais da mecânica newtoniana, ou seja, posição, tempo e aceleração.

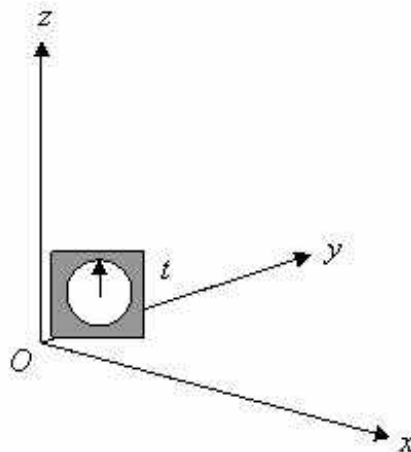


Figura 5) Um sistema de Referência. Fonte: http://virginia.edu/classes/252/lecture1_files/image009.gif

Sistema de Referência Inercial: É um sistema no qual as leis de Newton são válidas. Nesse sistema, qualquer corpo livre da influência de uma força externa permanece em repouso se seu estado inicial for repouso, ou movimento caso esse seja seu estado anterior.

Agora, munidos das definições e postulados acima, observemos com mais atenção a Segunda Lei de Newton. Essa lei é, para referenciais inerciais, familiarmente descrita como

$$F = m \cdot a \quad (3.1)$$

onde m é massa inercial (um escalar) e a é a aceleração (um vetor). Vale a pena destacar que a aceleração é a taxa de variação da velocidade, que por sua vez é a taxa de variação do deslocamento ao longo de um intervalo de tempo. Assim

$$a = \frac{d}{dt} v = \frac{d^2}{dt^2} x \quad (3.2)$$

A questão apresentada é: Supondo que tais leis da mecânica sejam válidas para um determinado sistema referencial, elas continuarão sendo válidas para um outro sistema movendo-se em relação ao sistema inicial?

Para responder esse questionamento, precisamos relacionar **posição**, **velocidade** e **aceleração** no sistema de referência inicial a seus correspondentes no segundo sistema de

referência. Obviamente, os dois sistemas precisam se mover com velocidade relativa constante caso contrário a Lei da Inércia (1ª Lei) não será válida para ambos.

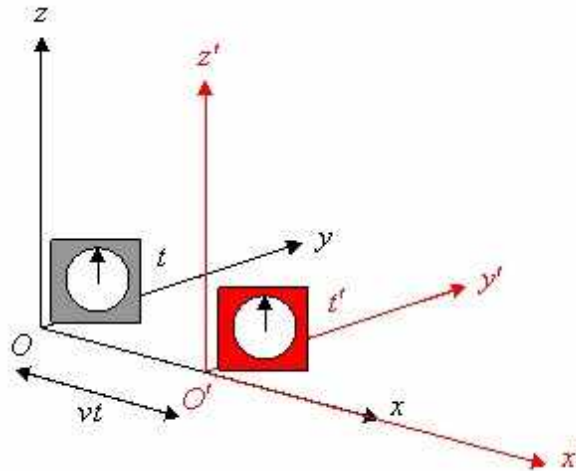


Figura 6) Dois Sistemas de Referência se movendo relativamente em relação ao outro ao longo do eixo x. Fonte: http://virginia.edu/classes/252/lecture1_files/image021.gif

O sistema inicial será representado por S e o segundo sistema por S' . Suponha que S' se desloque em relação a S ao longo do eixo x , conforme descrito na figura 2. Por conveniência, vamos chamar o momento em que O' passa por O como o ponto inicial (ou ponto zero) do cronômetro.

Se um evento qualquer acontece nas coordenadas (x, y, z, t) em S , quais serão suas coordenadas (x', y', z', t') em S' ?

Como sincronizamos os relógios quando O' passou por O , é trivial dizer que $t = t'$. Também, extraíndo da figura 2, é evidente que $y' = y$ e $z' = z$. Também podemos verificar que $x = x' + vt$. Assim, (x, y, z, t) em S se relacionará com as coordenadas (x', y', z', t') em S' pelas seguintes transformações:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z \\ t' &= t. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Tais transformações são chamadas de Transformações de Galileu e nos mostram a transformação das posições. Vamos analisar agora as consequências dessas transformações na velocidade e na aceleração.

Sendo v'_x a velocidade em S' na direção x , temos

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{d(x - vt)}{dt} = \frac{dx}{dt} - v = v_x - v. \quad (3.4)$$

que traduz um resultado já esperado: A fórmula da adição de velocidades $v_x = v'_x + v$.

E como a aceleração se transforma?

$$\frac{dv'_x}{dt'} = \frac{dv'_x}{dt} = \frac{d}{dt'}(v_x - v) = \frac{dv_x}{dt} \quad (3.5)$$

já que v é constante.

Isso significa que $a'_x = a_x$, ou seja, a aceleração é a mesma em ambos os sistemas de referência. Agora, é um fato experimental (pelo menos no domínio da mecânica clássica) que as medições de massa de qualquer objeto fornecem o mesmo resultado em todos os referenciais inerciais. Logo, a massa medida em S e S' são iguais. Isso garante que a Segunda Lei de Newton expressa o mesmo resultado em qualquer um dos referenciais ($F' = F$). [7]

Podemos mostrar que tal transformação garante a invariância da primeira e da terceira lei de Newton. Observe:

Invariância da Primeira Lei de Newton:

$$\text{Em } S: \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t \quad (3.6)$$

$$\text{Em } S': \vec{x}' = \vec{x}'_0 - \vec{v} t = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t - \vec{v} t = \vec{x}_0 + (\vec{v}_0 - \vec{v}) t, \quad (3.7)$$

Como v é constante, garante-se a equivalência de ambas as leis.

Invariância da Terceira Lei de Newton:

$$\text{Momento em } S: \vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = cte \quad (3.8)$$

$$\text{Momento em } S': \vec{P}' = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i' = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i' = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{x}_i'}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt}(\vec{x}_i - \vec{v} t) = \vec{P} - M\vec{v} = cte. \quad (3.9)$$

3.3) Os Grupos de Simetria e a Invariância das Leis de Newton

No capítulo 2 vimos que as rotações e translações sob a mesma origem são isometrias. Dessa maneira, é direta a constatação de que as Leis de Newton atendem a simetria das rotações e translações efetuadas no mesmo sistema de referência inercial. Tal característica implica que as leis de Newton são invariantes sob a ação do chamado Grupo Euclidiano.

O grupo Euclidiano $E(n)$ é o grupo de isometrias do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Em outros termos, são as transformações do espaço que conservam as distâncias euclidianas entre dois pontos (chamadas de transformações euclidianas). No grupo euclidiano $E(n)$ estão incluídas as rotações, translações, reflexões e suas combinações, sendo todas isométricas.

Por sua vez, a análise das leis de Newton sob o ponto de vista da mudança do sistema de coordenadas mostra um novo tipo de simetria, pois vimos que a transformação de coordenadas pode depender do tempo, $x' = x - vt$. O grupo de transformações que deixa as leis de Newton invariantes é chamado de Grupo de Galileu. Esse é o grupo de transformações associadas aos sistemas inerciais. Claramente o Grupo de Galileu também consiste em um Grupo Euclidiano de deslocamento rígido, ampliado para incluir as transformações de Galileu e as translações temporais. O Grupo de Galileu é um grupo contínuo de dez parâmetros, com três parâmetros para determinar as rotações (orientação da base), três parâmetros para as translações espaciais (posição da origem), três parâmetros para as transformações de Galileu (velocidade do centro de massa) e um parâmetro para as translações temporais (zero do cronômetro). Normalmente é representado por $G(r, t)$, onde $r \rightarrow r' = Rr + x_0 + Vt$ e $t \rightarrow t' = t + t_0$.

A invariância das leis de Newton sob a ação de um Grupo Euclidiano significa que ela fornece uma descrição do movimento das partículas e das interações que é independente da posição relativa e da orientação de um corpo de referência. A invariância das translações implica que todos os lugares no espaço posicional são equivalentes, ou seja, o espaço posicional é homogêneo. Invariância das rotações significa que todas as direções no espaço físico são equivalentes, ou seja, o espaço físico é isotrópico. Similarmente, invariância sob translações temporais significa que o tempo é homogêneo. Em síntese, as leis da física são as mesmas em todos os tempos e em todos os lugares.

CAPÍTULO 4

Grupos de Lie e o Formalismo da Mecânica Clássica

Uma das bases estruturais da Mecânica Newtoniana é o chamado Princípio Determinístico. Tal princípio se alicerça na afirmação de que, conhecidas as forças e o estado inicial de um sistema, é possível sempre calcular seu estado futuro. Entretanto, há situações bem mais complicadas, onde encontrar a trajetória de um sistema não é possível apenas aplicando a segunda lei de Newton.

Assim, utilizamos duas abordagens alternativas, que podem ser vistas como uma “remodelação” da segunda lei de Newton. A primeira, elaborada por Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) utiliza diretamente a segunda lei de Newton e satisfaz o conceito de “mínima ação”³ e a segunda, desenvolvida por William Rowan Hamilton (1805- 1865), é, de certa forma, mais geral e usa o Princípio Variacional de Hamilton⁴.

4.1) A Formulação Lagrangeana da Mecânica Clássica

Na abordagem Lagrangeana, para caracterizar a configuração da mecânica de um sistema escolhemos um conjunto de coordenadas generalizadas $(q_1, q_2, \dots, q_n)$, sendo n a dimensão do Espaço de Configurações. Para cada coordenada q , iremos associar suas respectivas coordenadas velocidades generalizadas $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ associadas a um parâmetro temporal t . A função de todas essas coordenadas é chamada de função Lagrangeana L e é dada por $L = T - V$, onde T é a energia cinética e V a energia potencial do sistema, ambas escritas em função das coordenadas generalizadas.

Toda a abordagem da segunda lei de Newton passa agora a ser expressa pela versão única das equações de Euler – Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (4.1)$$

4.2) Simetrias e Leis da Conservação da Lagrangeana

Analisemos algumas simetrias específicas na função Lagrangeana.

³ **Princípio da Mínima Ação de Maupertuis** é um princípio formulado por Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698 – 1759) que afirma que o movimento de um sistema entre dois estados, A e B , se dá de tal forma que a ação realizada pelo sistema entre esses dois estados é mínima, sendo a ação definida como a integral da lagrangeana L em relação ao tempo.

⁴ **O Princípio Variacional de Hamilton** se diferencia do Princípio da Mínima Ação de Maupertuis em pelo menos dois aspectos: Hamilton insere os tempos fixos t_1 e t_2 enquanto Maupertuis não faz nenhuma referência a tempo e finalmente, Maupertuis exige que a energia seja conservada ao longo de toda a trajetória enquanto que o Princípio de Hamilton não exige tal conservação.

4.2.1) Translação Espacial

Na equação de Euler – Lagrange, uma lei da conservação surge naturalmente se considerarmos a situação em que a Lagrangeana não depende explicitamente de uma certa coordenada q_i , ou seja, $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$. Nesse caso, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ é constante ao longo do tempo. As coordenadas que não aparecem na Lagrangeana são chamadas de coordenadas ignoráveis ou cíclicas.

Por definição, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ é chamado de momentâneo canônico conjugado. Ou seja, se q_i

é cíclico, então o momento conjugado é conservado. Dizemos então que a translação em q_i não muda a forma da Lagrangeana. Isso significa que a translação em q_i é uma simetria da Lagrangeana ou que a Lagrangeana é invariante sob a ação da translação em q_i .

4.2.2) Rotação ao Redor de um Eixo

Para analisarmos uma rotação infinitesimal de um ângulo θ , vamos utilizar a notação cartesiana e adotaremos, sem perda de generalidade, o eixo z como referência. A Lagrangeana pode ser escrita como

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (4.2)$$

As coordenadas cartesianas podem ser associadas as novas coordenadas através das seguintes transformações

$$x' = x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta, \quad y' = x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta, \quad z' = z \quad (4.3)$$

e

$$x'^2 + y'^2 = (x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta)^2 + (x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta)^2 \Rightarrow$$

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \quad (4.4)$$

Procedendo de forma análoga, obtemos

$$\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (\text{Eq. 4.5})$$

Assim, concluímos que a Lagrangeana L é igual a Lagrangeana L' , ou seja, a Lagrangeana é invariante sob a ação de uma rotação.

Considere a Lagrangeana em coordenadas cilíndricas

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(r) \quad (4.6)$$

Não há nenhuma dependência de z na Lagrangeana, ou seja, $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = cte$. Além disso, não há nenhuma dependência de θ e consequentemente

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad (4.7)$$

é constante. Da definição de momento conjugado como $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$, temos que $mr^2\dot{\theta}$ é o momento angular p_θ de rotação ao redor do eixo z , ou seja, p_θ é constante. ^[9]

Concluimos, portanto, que o momento angular é a constante de movimento se a Lagrangeana for invariante por rotação ao redor de um eixo fixo.

4.2.3) Teorema de Noether⁵

Na seção anterior vimos que a ausência explícita de uma coordenada na Lagrangeana L leva a independência desta frente a uma transformação que altere o valor da variável, fornecendo a conservação do momento generalizado. Tal sentença é expressa no Teorema de Noether, que associa uma transformação simétrica na variável q_i à uma grandeza conservada G .



Figura 7) Figura Pictórica do Teorema de Noether

Para a Lagrangeana $L(q, \dot{q}, t)$, o teorema de Noether é dado por

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \delta_t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] = 0 \quad (4.8)$$

O Teorema de Noether será utilizado para entendermos a conservação na translação temporal, entretanto, é possível extrairmos dele tanto a conservação do momento linear (na translação espacial) quanto do momento angular (na rotação espacial).

4.2.4) Translação Temporal

Uma translação temporal é definida como

$$t' = t - \delta t_0, \quad \delta q_i = 0 \quad (4.9)$$

Levando essas transformações para (Eq. 4.6) temos

⁵ Amalie Emmy Noether, matemática alemã (1882 – 1935).

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \right] = 0 \Rightarrow E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = cte \quad (4.10)$$

Ou seja, na translação temporal a energia total E do sistema se conserva.^[16]

4.3) A Formulação Hamiltoniana da Mecânica Clássica

As equações de Lagrange para um sistema com n graus de liberdade formam um conjunto de n equações diferenciais de segunda ordem no tempo. O formalismo de Hamilton transforma essas equações em um novo conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, porém, com $2n$ equações.

Embora nenhuma física nova seja acrescentada, a formulação de Hamilton apresenta algumas vantagens técnicas sobre a de Lagrange, como por exemplo, a unicidade das soluções no espaço de fases⁶, as transformações canônicas e a semelhança entre a descrição hamiltoniana da mecânica clássica e a mecânica quântica, que também analisaremos mais à frente.

Na descrição Hamiltoniana, além das coordenadas generalizadas de posição q_i , também são introduzidas as coordenadas dos seus respectivos momentos conjugados p_i , ou seja, a função das coordenadas agora é chamada de Hamiltoniana e expressa por

$$H = (q_1; q_2; \dots; q_n; p_1; p_2; \dots; p_n; t) \quad \text{tal que} \quad H = (q; p_1; p_2; \dots; p_n; t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t). \quad A$$

introdução dessas novas variáveis possibilita a redução da ordem das equações, de forma que agora, as equações de movimento são escritas como

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{e} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4.11)$$

E uma terceira relação envolvendo o tempo, que é dada por

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (4.12)$$

4.4) Notação Simplética

Para uma análise mais “elegante” do formalismo Hamiltoniano, vamos utilizar a notação matricial para escrever as Equações de Hamilton.

Construímos primeiramente um vetor de $2n$ componentes contendo as posições e momentos generalizados e o correspondente operador gradiente:

⁶ Nos sistemas mecânicos, definimos como *Espaço de Fases* Γ o espaço formado por todos os possíveis valores das posições generalizadas e seus correspondentes momentos conjugados.

$$\eta = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \frac{\partial}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} \partial / q_1 \\ \vdots \\ \partial / q_n \\ \partial / p_1 \\ \vdots \\ \partial / p_n \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

É possível observar que $\frac{\partial}{\partial \eta}$ corresponde ao lado direito das equações de Hamilton.

Entretanto, precisamos associar $\dot{q}_i$ a p_i e vice-versa. Além disso, uma das equações de Hamilton possui sinal negativo. Para calibrar tais características, definimos a matriz $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, onde cada um dos elementos é um bloco $n \times n$. Observe

$$J = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 \dots 0 & 0 & +I & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & +I \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 \dots +I & 0 \\ \hline -I & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & -I \dots 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 \dots -I & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \end{array} \right)$$

A matriz J é conhecida como matriz simplética⁷ fundamental e tem as seguintes propriedades:

P1) $J^T = -J$

P2) $J^2 = -I$

P3) $JJ^T = I$.

Com as definições e propriedades acima, as equações de Hamilton são escritas de maneira compacta como

$$\dot{\eta} = J \frac{\partial H}{\partial \eta}. \quad (4.14)$$

⁷ Simplética = palavra de origem grega cujo significado é “entrelaçado”. Foi cunhada por H. Weyl em 1939)

4.5) As Transformações Canônicas

No formalismo Lagrangiano, as equações de movimento são invariantes sob qualquer transformação de coordenadas generalizadas, ou seja, a forma das equações de Euler – Lagrange não mudam se mudarmos a escolha das coordenadas generalizadas. Por sua vez, no formalismo Hamiltoniano, transformações arbitrárias no espaço de fases não preservam necessariamente a forma Hamiltoniana das equações de movimento. Assim, restringiremos nosso interesse a mudanças de variáveis no espaço de fases que preservem a forma Hamiltoniana das equações.

As transformações que nos interessa portanto, são da forma $Q_i = Q_i(q, p, t)$ e $P_i = P_i(q, p, t)$, com $i = 1, 2, \dots, n$, formada por $2n$ equações invertíveis e que permitem encontrar uma função $K(Q, P, t)$ que satisfaça as equações de Hamilton, ou seja:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \text{ e } \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \text{ com } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.15)$$

A função $K(Q, P, t)$ é chamada de Hamiltoniana Modificada ou simplesmente Kamiltoniana e as transformações Q_i e P_i são chamadas de transformações canônicas. ^[16]

4.6) Transformações Canônicas em Notação Simplética e Grupo Simplético

Nesta seção vamos obter a condição necessária e suficiente para que uma transformação seja canônica. A título de ilustração, iremos trabalhar com as transformações que não dependem do tempo, entretanto, o raciocínio pode ser expandido para as transformações que dependem do tempo.

Na seção 4.4 escrevemos as equações Hamiltonianas em notação simplética. É possível observar que

$$H(q, p) = H(\eta). \quad (4.16)$$

Vamos supor uma transformação canônica reduzida, ou seja, não dependente do tempo, escrito na forma compacta por $Q_i = Q_i(q, p)$ e $P_i = P_i(q, p)$.

Definiremos ainda um novo vetor coluna com $2n$ linhas

$$\xi_i = Q_i, \quad \xi_{i+n} = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.17)$$

Derivando em relação ao tempo, obtemos

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.18)$$

Na forma de matriz Jacobiana⁸

$$M_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j} \quad (4.19)$$

Em notação matricial

$$\dot{\xi} = M\dot{\eta} \Rightarrow \dot{\xi} = MJ \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad (4.20)$$

Invertendo $Q_i = Q_i(q, p)$ e $P_i = Q_i(q, p)$ obtemos $H(\xi)$ e

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \frac{\partial H}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_i} = M_{ik} \frac{\partial H}{\partial \xi_j} \quad (4.21)$$

Em notação matricial

$$\frac{\partial H}{\partial n} = M^t \frac{\partial H}{\partial \xi} \quad (4.22)$$

Assim, da (Eq. 4.21) e (Eq. 4.22)

$$\dot{\xi} = MJM^t \frac{\partial H}{\partial \xi} \quad (4.23)$$

O raciocínio aplicado na seção 4.4 ao vetor η pode ser estendido, de forma análoga ao vetor ξ , portanto

$$\dot{\xi} = J \frac{\partial H}{\partial \xi} \quad (4.24)$$

Da igualdade de (Eq. 4.24) e (Eq. 4.23) concluímos que

$$MJM^t = J \quad (4.25)$$

A equação acima é condição necessária e suficiente para que uma transformação independente do tempo seja canônica. Ela é chamada de Condição Simplética para que uma transformação seja canônica.

É possível mostrar que, mesmo quando a transformada canônica depende do tempo, isto é, não é restrita, a Condição Simplética (4.25) continua sendo necessária e suficiente para que a transformação seja canônica.

Assim, podemos afirmar que

P1) a Transformação Identidade é Canônica.

P2) se uma Transformação é Canônica, a Transformação Inversa também será canônica.

⁸ Matriz Jacobiana é a matriz formada pelas derivadas parciais de primeira ordem de uma função vetorial. Seu nome é em homenagem ao matemático alemão Karl Gustav Jakob Jacobi (1804 – 1851).

P3) duas Transformações Canônicas sucessivas (Operação Produto) definem uma Transformação que também é canônica.

P4) A Operação Produto é Associativa.

Essas propriedades garantem que as transformações canônicas possuem estrutura de grupo. O grupo das transformações canônicas é chamado de Grupo Simplético $Sp(n)$.

4.7) O Parênteses de Poisson

O Parênteses de Poisson de duas funções $u(q, p)$ e $v(q, p)$ é definido por

$$[u, v] = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \quad (4.26)$$

ou, no formato matricial

$$[u, v]_{\eta} = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^t J \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (4.27)$$

Admitindo ainda que u e v são $2n$ variáveis canônicas (q, p) , temos

$$[q_j, q_i]_{q, p} = [p_j, p_i]_{q, p} = 0 \quad (4.28)$$

$$[q_j, p_i]_{q, p} = -[p_j, q_i]_{q, p} = \delta_{j,i} \quad (4.29)$$

As duas equações elencadas acima podem ser resumidas em

$$[\eta, \eta]_{\eta} = J \quad (4.30)$$

4.8) Equações de Hamilton e Parênteses de Poisson

Para associarmos os Parênteses de Poisson as equações de movimento de Hamilton, vamos escrever os Parênteses de Poisson em outra notação, mais propícia ao que queremos.

Dado duas funções $f = f(q, p, t)$ e $g = g(q, p, t)$, escrevemos o Parênteses de Poisson como

$$[f, g] = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (4.31)$$

tomemos agora uma função $F = F(q, p, t)$ e a derivamos no tempo,

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (4.32)$$

substituindo as equações de Hamilton $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ e $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ em 4.32

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (4.33)$$

da definição de Parênteses de Poisson (Eq. 4.31), temos

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (4.34)$$

e as equações de movimento de Hamilton podem ser reescritas como

$$\dot{q}_i = [q_i, H] \quad (4.35)$$

e

$$\dot{p}_i = [p_i, H] \quad (4.36)$$

4.9) Invariância do Parênteses de Poisson sob Ação do Grupo Simplético

Sob a ação do grupo simplético temos a transformação canônica de (q, p) para (Q, P) ou de η para ξ :

$$d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j} d\eta_j \Rightarrow \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_k} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial \eta_j}{\partial \eta_k} = M_{ij} \delta_{j,k} = M_{ik}$$

sendo que M é uma matriz Jacobiana $2n \times 2n$. Daí:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta} = M \quad (4.37)$$

se adaptarmos (Eq. 4.27) a ξ , temos

$$[\xi, \xi]_{\eta} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right)^t J \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \quad (4.38)$$

ou ainda

$$[\xi, \xi]_{\eta} = M^t J M \quad (4.39)$$

Da condição simplética segue que

$$[\xi, \xi]_{\eta} = J \quad (4.40)$$

Com isso concluímos que os Parênteses de Poisson fundamentais são invariantes sob a ação de um grupo simplético.

Vamos generalizar essa invariância para todos os Parênteses de Poisson. Para isso, tomemos duas funções u e v dependentes das variáveis canônicas q e p .

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = M^t \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad (4.41)$$

Substituindo v por u e realizando a transposta, temos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^t = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^t M \quad (4.42)$$

De (Eq. 4.26)

$$[u, v]_{\eta} = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^t J \frac{\partial v}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^t M \quad (4.43)$$

Da Condição Simplética, obtemos

$$[u, v]_{\eta} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^t J \frac{\partial v}{\partial \xi} = [u, v]_{\xi} \quad (4.44)$$

Ou seja, todos os Parênteses de Poisson são invariantes por transformações canônicas! Como reescrevemos na seção 4.8 as Equações de Hamilton utilizando os Parênteses de Poisson e acabamos de mostrar que os Parênteses de Poisson são invariantes, concluímos que as equações de Hamilton são invariantes sob a ação do grupo simplético.

CAPÍTULO 5

Grupos de Lie e a Relatividade Especial

No Capítulo 3, vimos que as Leis de Newton são válidas nos chamados referenciais inerciais, onde qualquer um deles se move com velocidade constante relativamente a outro referencial. Vimos ainda que as Leis de Newton são invariantes quando submetidas a uma ação do grupo Euclidiano $E(n)$ (rotações, translações e reflexões) bem como a ação do Grupo de Galileu (mudança do sistema de referências). Entretanto, ao analisar as equações do eletromagnetismo, por exemplo, percebemos que a transformação Galileana não conserva suas leis.

Ora, quer sejam escritas na sua forma compacta (as equações de Maxwell⁹), quer em sua forma original (Lei de Coulomb¹⁰, Lei de Faraday¹¹, etc...), as leis do eletromagnetismo podem ser verdadeiras em um referencial inercial, mas, se o forem, e a transformação Galileana for a transformação correta entre diferentes referenciais inerciais, concluímos que elas não poderiam deixar de ser verdadeiras em qualquer outro referencial inercial. Provavelmente, a maneira mais rápida de verificar isso é lembrar que as equações de Maxwell implicam que a luz (e de forma geral, qualquer onda eletromagnética) se propaga através do vácuo em qualquer direção com velocidade

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3,00.10^8 \text{ m/s} \quad (5.1)$$

Onde ϵ_0 e μ_0 são a permissividade e a permeabilidade do vácuo, respectivamente. Admitindo que as equações de Maxwell são válidas para um referencial S , então a luz deve viajar com a mesma velocidade c em qualquer direção, quando medida em S . Considere, por outro lado, um segundo referencial S' , deslocando-se com velocidade V ao longo do eixo x de S e imagine um feixe de luz viajando na mesma direção.

Em S , a velocidade da luz é $v = c$. Portanto, em S' , a sua velocidade é dada pela fórmula clássica de adição de velocidade

$$v' = v - V \quad (5.2)$$

ou seja,

$$v' = c - V \quad (5.3)$$

⁹ James Clark Maxwell (1831 – 1879) – físico e matemático britânico.

¹⁰ Charles Augustin de Coulomb (1736 – 1806) – físico francês.

¹¹ Michael Faraday (1791 – 1867) – físico e químico britânico.

conforme mostrado na figura 5.1. Similarmente, um feixe de luz viajando para a esquerda terá velocidade v' (medida em S') que varia no intervalo de $c - V$ e $c + V$. Portanto, as equações de Maxwell podem não valer para o referencial S' .

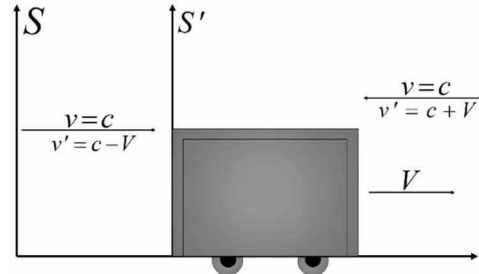


Figura 5.8) Dois referenciais S e S' nas configurações padrão com velocidade relativa V .

Esse problema ilustra uma das motivações que levaram a constituição da Teoria da Relatividade (formalizada por Einstein¹² em 1905), que se propôs a solucionar situações como a descrita acima se alicerçando em dois postulados fundamentais¹³:

Postulado 1: Se S é um referencial inercial e um segundo referencial inercial S' se desloca com a velocidade constante relativa a S , então S' também é um referencial inercial.

Postulado 2: A velocidade da luz (no vácuo) tem o mesmo valor c em qualquer direção em todos os referenciais inerciais.

Munidos com essa perspectiva, vamos definir uma nova transformação capaz de descrever como as medidas de espaço e de tempo estão relacionadas nos sistemas de referência S e S' : A transformação de Lorentz.

5.1) A Transformação de Lorentz

Tomemos dois referenciais: S preso ao solo e S' preso a um móvel deslocando-se com velocidade V relativa a S . Imagine ainda um evento ocorrendo em P' .

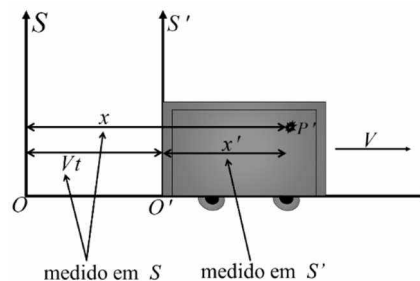


Figura 5.2) A coordenada x' é a distância horizontal, medida em S' , entre a origem O' e o evento P' .

¹² Albert Einstein (1879 – 1955) – físico alemão.

¹³ Os postulados (mais precisamente o segundo postulado) só se tornam relevantes quando objetos viajam com velocidades comparáveis à da luz. No cotidiano, quando todas as velocidades são menores que a velocidade c , esses fenômenos simplesmente não aparecem.

Assumimos ainda que o evento em P' possua coordenadas (x, y, z, t) em S e (x', y', z', t') em S' . Como comprimentos perpendiculares a velocidade relativa são os mesmos em ambos os referenciais, podemos imediatamente escrever que

$$y' = y \quad \text{e} \quad z' = z \quad (5.4)$$

A coordenada x' é distância horizontal entre a origem O' e o evento em P' , medido em S' . A mesma distância medida em S é $x - V.t$, uma vez que x e $V.t$ são as distâncias de O a P' e de O a O' no instante t do evento (medida em S). Agora, utilizaremos a fórmula da contração do comprimento¹⁴

$$l = \frac{l_0}{\gamma} \quad (5.5)$$

onde l_0 denota o comprimento de um objeto medido no referencial de repouso, l é o comprimento em qualquer referencial e γ é dado pela equação

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \quad (5.6)$$

Substituindo $x - V.t$ e x' em (Eq. 5.5) temos

$$x - Vt = \frac{x'}{\gamma} \Rightarrow x' = \gamma \cdot (x - Vt). \quad (5.7)$$

Para obtermos uma equação para t' podemos repetir o argumento anterior, apenas trocando S e S' de posição. Daí,

$$x = \gamma \cdot (x' + Vt'). \quad (5.8)$$

Substituindo (Eq. 5.7) em (Eq. 5.8), temos

$$t' = \gamma \cdot \left(t - Vx/c^2\right). \quad (5.9)$$

As quatro equações obtidas são chamadas de transformação de Lorentz ou transformação de Lorentz – Einstein

$$\left. \begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - Vx/c^2\right) \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

¹⁴ Ao desenvolver seus postulados, Einstein propôs que o comprimento de um corpo, medido em outro referencial em relação ao qual está se movendo (na direção da dimensão que está sendo medida), é sempre menor que o comprimento medido inicialmente. A (Eq. 5.5) faz uma ligação direta entre esses comprimentos.

5.2) Transformação de Velocidades

Assim como obtemos a transformação de Lorentz para relacionar a posição e o tempo de um evento em dois sistemas de coordenadas inerciais S e S' consistente com os postulados da Relatividade, temos também a relação entre as velocidades de um corpo observado em dois sistemas de referência.

Partindo da equação

$$v' = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \quad (5.11)$$

E usando as transformações de Lorentz obtidas na seção 5.1 temos:

$$v' = \frac{v - u}{1 - uv / c^2} \quad (5.12)$$

5.3) Dinâmica Relativística

Na Teoria da Relatividade, o espaço e o tempo são indistintos, ou seja, formam um espaço de quatro dimensões. Esse conceito, introduzido pelo matemático alemão Hermann Minkowski (1864 – 1909), criou uma combinação espaço tempo e uma técnica matemática associada a ele, feita sob medida para a relatividade especial. Nesse espaço, as leis da Física não podem alterar sua forma por meio de rotações já que consideramos o espaço isotrópico. ^[15]

Para expressar melhor essa invariância, Minkowski desenvolveu uma nova “linguagem”. Nessa “linguagem”, a invariância das leis da Física sob a ação de rotações, translações etc. é mais evidente. Para um aproveitamento maior do tópico, apresentaremos algumas definições e novas notações.

5.3.1) Quadrivetor e Quadri-posição

No espaço de Minkowski as medidas serão dadas por vetores de quatro componentes, análogos aos vetores tridimensionais. Logo, um ponto nesse espaço – tempo pode ser descrito pelo vetor posição (ct, x, y, z) cuja magnitude é dada por

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (5.13)$$

Os quatro números constituem um vetor que chamamos de **quadrivetores** para distingui-los dos vetores tridimensionais.

Os quadrivetores podem ser escritos na forma de matrizes colunas 4×1 ,

$$X = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Com essa notação, a transformação de Lorentz pode ser reescrita na forma matricial

$$\begin{pmatrix} c't' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda X \quad (5.15)$$

Como esperado, a magnitude do quadri vetor posição é invariante sob a transformação de Lorentz:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

Substituindo Eq. 5.10 na relação acima, obtemos

$$\begin{aligned} &= \gamma^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2 \gamma^2 \left(t - \frac{Vx}{c^2} \right)^2 \\ &= \gamma^2 \left(x^2 + V^2 t^2 - 2xVt \right)^2 + y^2 + z^2 - c^2 \gamma^2 \left(t^2 + \frac{V^2 x^2}{c^4} - \frac{2Vx}{c^2} t \right)^2 \\ &= \gamma^2 x^2 \left(1 - \frac{c^2 V^2}{c^4} \right)^2 + \gamma^2 xVt + c^2 \gamma^2 \frac{2Vx}{c^2} t + y^2 + z^2 \\ &= \gamma^2 x^2 \underbrace{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}_{\frac{1}{\gamma^2}} + y^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \end{aligned}$$

5.3.2) Nova Notação

Para o que se segue, mudaremos a notação de maneira tal que

$$\begin{aligned} x &= x^1 \\ y &= x^2 \\ z &= x^3 \\ ct &= x^0 \end{aligned}$$

Utilizando esta notação e a linguagem matricial podemos escrever a transformação de Lorentz como

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Ou ainda

$$x' = \Lambda x \quad (5.17)$$

ou, explicitando em componentes

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (5.18)$$

onde μ indica a linha e ν indica a coluna. ^[15]

5.3.3) Quadri-velocidade

O quadrivetor velocidade ou quadri-velocidade U^{μ} é definido similarmente à velocidade usual. É a derivada do quadrivetor posição em relação ao chamado tempo próprio.

$$U^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \quad (5.19)$$

Onde τ é o chamado tempo próprio¹⁵. Note que U^{μ} é realmente um quadrivetor pois, se derivarmos Eq.5.18 em relação a τ , obtemos

$$\frac{dx'^{\mu}}{d\tau} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \Rightarrow U'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} U^{\nu} \quad (5.20)$$

que é a transformação de Lorentz de um quadrivetor.

As componentes da quadri-velocidade são dadas por

$$(U^{\mu}) = \gamma_v (c, v^i) \quad (5.21)$$

onde v^i são as três componentes do vetor tridimensional $\mathbf{v}$.

A transformação de Lorentz para a quadri-velocidade é dada por

$$\begin{cases} U'^0 = \gamma(U^0 - \beta U^1) \\ U'^1 = \gamma(U^1 - \beta U^0) \\ U'^2 = U^2 \\ U'^3 = U^3 \end{cases} \quad (5.22)$$

Ou

$$\gamma'_v = \gamma \left(1 - \frac{V v_x}{c^2} \right) \gamma_v$$

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$$

¹⁵ Tempo Próprio: É o tempo medido pelo observador ao olhar para um relógio em seu pulso, ou seja, é o tempo estático medido na origem do referencial adotado.

$$\begin{aligned}
 v'_y &= \frac{v_y}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \\
 v'_z &= \frac{v_z}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

5.3.4) Quadri-aceleração

Derivando a quadrivelocidade em relação ao tempo próprio temos o quadrivetor aceleração (quadri-aceleração),

$$A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} \quad (\text{Eq. 5.24})$$

Cuja componente temporal é

$$A^0 = c\gamma_v \frac{d\gamma_v}{dt} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c \left(1 - \mathbf{v}^2/c^2\right)^2} = \gamma_v^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c} \tag{5.25}$$

E suas componentes espaciais são

$$A^i = \gamma_v^2 a^i + \frac{v^i}{c} A^0 \tag{5.26}$$

Como a quadri-aceleração é um quadrivetor, suas componentes transformam como

$$\begin{cases}
 A'^0 = \gamma \left(A^0 - \beta A^1 \right) \\
 A'^1 = \gamma \left(A^1 - \beta A^0 \right) \\
 A'^2 = A^2 \\
 A'^3 = A^3
 \end{cases} \tag{5.27}$$

A transformação de Lorentz para as componentes espaciais da quadri-aceleração é

$$\begin{aligned}
 a'_x &= \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)} a_x \\
 a'_y &= \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)^2} \left[a_y + \frac{v_y V}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)} a_x \right]
 \end{aligned}$$

$$a'_z = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)^2} \left[a_z + \frac{v_z V}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)} a_x \right] \quad (5.28)$$

5.3.5) Quadrimomento

Define-se quadrimomento como

$$p^\mu = m_0 U^\mu \quad (5.29)$$

onde m_0 é a massa de repouso da partícula e U^μ é a quadri-velocidade.

Como

$$p^\mu = m_0 U^\mu = m_0 \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (5.30)$$

e $d\tau$ é invariante, então o quadrimomento se transforma por uma transformação de Lorentz como

$$p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu \quad (5.31)$$

e concluímos que Eq.5.29 é um quadrivetor. Este vetor é chamado também de quadrivetor de energia e momento.

As componentes temporal e espaciais do quadrimomento $p^\mu = (p^0, p^i)$ são

$$\begin{aligned} E'/c &= \gamma(E/c - \beta p_x) \\ p'_x &= \gamma(p_x - \beta E/c) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \end{aligned} \quad (5.32)$$

Respectivamente, onde $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ são as componentes da velocidade e $\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ para

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Note que

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{U} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{m \cdot \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (5.33)$$

que é consistente com a lei da conservação total do momento.

5.3.6) Quadriforça e Equação de Movimento

Ao definirmos o vetor quadrimomento, estamos procurando uma equação relativística equivalente a segunda lei de Newton $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$.

Dessa forma, uma equação invariante análoga à segunda Lei de Newton é

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{dU^\mu}{d\tau} = m_0 A^\mu \quad (5.34)$$

desde que f^μ seja um quadrivetor. Se não houver nenhuma força externa atuando sobre a partícula

$$f^\mu = 0 \Rightarrow \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{dp^\mu}{dt} = 0 \quad (5.35)$$

o que implica na conservação do quadrimomento.

A Eq. (5.32) pode ser reescrita para que a derivada seja em relação ao tempo t , usando $dt = \gamma_v d\tau$:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu \Rightarrow \frac{dp^\mu}{dt} \gamma_v = F^\mu \gamma_v, \quad (5.36)$$

Ou seja,

$$\frac{dp^\mu}{dt} = F^\mu \Rightarrow \left(\frac{dp^0}{dt}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) = (F^0, \mathbf{F}) \quad (5.37)$$

A parte espacial é exatamente a segunda lei de Newton e a parte temporal é tal que,

$$\text{sendo } F^0 = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c}, \text{ então } \frac{dp^0}{dt} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c} \quad (5.38).$$

5.4) Eletrodinâmica Relativística

Nesta seção vamos abordar algumas das equações do eletromagnetismo em forma covariante, ou seja, invariante por transformação de Lorentz e, conseqüentemente, coerente com o princípio da invariância da Relatividade Especial. Antes, porém, faremos uma breve revisão de alguns conceitos.

5.4.1) Tensores

Um tensor nada mais é que uma composição de vetores. Essa composição segue a seguinte regra: dado dois vetores a e b (ou seja, num espaço tridimensional) podemos formar com estes dois vetores um tensor T de segunda ordem (que será representado por uma matriz 3×3) cujos elementos são dados por

$$T_{ij} = a_i b_j \quad (5.39)$$

ou seja, o elemento da linha i e coluna j é o elemento i do primeiro vetor e j do segundo vetor. Na notação matricial

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

Da definição acima obtemos que a lei de transformação de um tensor de segunda ordem. Um tensor T é a qualquer quantidade que por uma rotação R do nosso sistema de coordenadas, se transforma como

$$T \rightarrow T' = (Ra)(Rb),$$

Ou, analisando suas componentes

$$T'_{ij} = R_{im} a_m R_{jk} b_k = R_{im} R_{jk} a_m b_k = R_{im} R_{jk} T_{mk}$$

A Eq. 5.39 pode ser escrita em uma notação mais conveniente como

$$T = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \quad (5.40)$$

Onde $\otimes$ é chamado de produto tensorial.

5.4.2) O Operador Gradiente (Quadrigradiente) e Divergente (Quadrdivergente)

Ao trabalhar com quadrivetores, precisamos definir um operador gradiente e divergente que satisfaça as propriedades relativísticas. O quadrigradiente é dado por

$$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (5.41)$$

E o Quadrdivergente é dado como o produto escala de $b_\mu = (b_t, \mathbf{b})$ e ∇_μ , ou seja

$$\nabla_\mu b_\mu = \frac{\partial}{\partial t} b_t - \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) b_x - \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) b_y - \left(-\frac{\partial}{\partial z} \right) b_z \quad (5.42)$$

5.4.3) O Operador de D'Alembert

Assim como em três dimensões temos o Laplaciano, dado por

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (5.43)$$

ao trabalharmos com quadrivetores, também temos o operador equivalente, chamado de Operador de D'Alembert ou Operador D'Alembertiano. O operador de D'Alembert é definido como

$$\nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} - \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) - \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) - \left(-\frac{\partial}{\partial z} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (5.44)$$

Em notação própria

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (5.45)$$

5.4.4) Equações de Maxwell na Forma Clássica

As leis de Maxwell descrevem o surgimento e a propagação do campo elétrico e magnético. Tais equações são dadas por

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Lei de Gauss}) \quad (5.46).$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Inexistência de monopólos magnéticos}) \quad (5.47).$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Lei da indução de Faraday}) \quad (5.48).$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Ampere}) \quad (5.49).$$

onde ρ é a densidade de carga elétrica e $\vec{j}$ é a densidade de corrente elétrica.

5.4.5) O Quadripotencial e a Invariância das Leis de Maxwell por TL

Sendo ϕ o potencial elétrico (escalar) escalar e $\vec{A}$ o potencial magnético (vetorial) de Maxwell, precisamos de um quadrivetor que os defina. Assim, com a notação introduzida na seção 5.3.3 e aplicando a condição de Calibre de Lorenz¹⁶, temos

$$\square^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \square^2 \vec{A} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0}. \quad (5.50)$$

As quatro componentes no segundo membro das duas equações acima são ρ, j_x, j_y, j_z , divididas por ϵ_0 . Então as quatro coordenadas $\rho/\epsilon_0, j_x/\epsilon_0, j_y/\epsilon_0, j_z/\epsilon_0$ formam um quadrivetor.

Em notação compacta, dizemos que o quadrivetor

$$A_\mu = (\phi, \vec{A}) \quad (5.51)$$

é o **vetor quadripotencial**.

Observe ainda que

$$\square^2 A_\mu = \frac{j_\mu}{\epsilon_0} \quad (5.52)$$

¹⁶ Condição de Calibre de Lorenz (ou Condição de Gauge de Lorenz): Condição utilizada para simplificar as equações de Maxwell e expressa por $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0$

Surpreendentemente, a Eq. (5.52) carrega consigo todos os resultados expressos nas quatro equações fundamentais de Maxwell. Além disso, sua descrição possibilita mostrarmos diretamente a invariância dessas equações por transformação de Lorentz^[12]

5.4.6) Outra abordagem para a Invariância de Lorentz nas Equações de Maxwell

A transformação de Lorentz para $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são dadas por

$$E'_x = E_x \quad E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \quad E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \quad (5.53)$$

$$B'_x = B_x \quad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) \quad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \quad (5.54)$$

Vamos mostrar que a equação $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ é invariante por transformação de Lorentz

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \gamma \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\beta}{c} \frac{\partial E_z}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} + \frac{\beta}{c} \frac{\partial E_y}{\partial z'} \right) = 0 \quad (5.55)$$

Lembrando que

$$x' = \gamma(x - vt) \quad ct = (ct' + \beta x') \quad \frac{\partial B_x}{\partial x'} = \gamma \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\beta}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} \right)$$

e substituindo na Eq. (5.55) obtemos

$$\gamma \nabla \cdot \mathbf{B} + \frac{\gamma \beta}{c} \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} + \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.56)$$

Como $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, o segundo termo da equação zera e obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.57)$$

confirmando a invariância da equação de Maxwell por transformação de Lorentz. Tal abordagem pode ser utilizada para verificar a invariância em todas as demais equações

5.4.7) O Tensor de Faraday

O tensor de Faraday é definido, em notação tensorial, como

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (5.58)$$

Onde A é o quadripotencial potencial magnético, $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$, $\partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$ e

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c} \phi, \vec{A} \right)$$

Além disso, o tensor A é antissimétrico, logo

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad (5.59)$$

Claramente, teremos uma matriz diagonal onde a igualdade dos índices tensoriais se estabelecerá quando o elemento matricial f_{ii} for zero,

$$F^{00} = -F^{00}$$

Além disso, podemos fazer uso da simetria para descobrir os demais elementos da matriz. Desenvolvendo $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, obtemos

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E^x & -\frac{1}{c}E^y & -\frac{1}{c}E^z \\ \frac{1}{c}E^x & 0 & -B^3 & B^y \\ \frac{1}{c}E^y & B^3 & 0 & -B^x \\ \frac{1}{c}E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

O Tensor de Faraday, também chamado de Tensor Eletromagnético, é uma descrição completa do campo eletromagnético no espaço – tempo. Sua beleza está no fato de que dois campos anteriormente separados, cuja conexão até então eram as equações de Maxwell estão agora unidos em um objeto matemático pela relatividade especial. ^[12]

5.5) A Invariância da Equação de Onda sob a Ação da Transformação de Lorentz

No eletromagnetismo, a equação da onda é dada por

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.61)$$

Vamos primeiro mostrar que (Eq. 5.61) não é invariante sob a transformação de Galileu.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x'} \times I + \frac{\partial \Psi}{\partial t'} \times 0 \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x'} \times (-V) + \frac{\partial \Psi}{\partial t'} \times I \right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x'} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-V \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x'} + \frac{\partial \Psi}{\partial t'} \right) = 0 \\ & \left(\frac{\partial}{\partial x'} \times I + \frac{\partial}{\partial t'} \times 0 \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x'} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \left(-V \cdot \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right) \left(-V \frac{\partial \Psi}{\partial x'} + \frac{\partial \Psi}{\partial t'} \right) = 0 \\ & \left(\frac{\partial}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x'} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \left(V^2 \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t'^2} - 2V \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x' \partial t'} \right) = 0 \\ & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \left(V^2 \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t'^2} - 2V \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x' \partial t'} \right) = 0 \quad (5.62) \end{aligned}$$

Observe que o resultado obtido não é a equação da onda e nem pode ser convertida na equação da onda por alguma transformação permitida.

Agora utilizaremos a transformação de Lorentz na (Eq. 5.61). Vamos usar a regra da cadeia da mesma forma que fizemos com a transformação de Galileu.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x'} \times \gamma + \frac{\partial \Psi}{\partial t'} \times \frac{-\gamma V}{c^2} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x'} \times \gamma (-V) + \frac{\partial \Psi}{\partial t'} \times \gamma \right) = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial \Psi}{\partial x'} - \frac{\gamma V}{c^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t'} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\gamma V \frac{\partial \Psi}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial \Psi}{\partial t'} \right) = 0 \\
& \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\gamma V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \left(\gamma \frac{\partial \Psi}{\partial x'} - \frac{\gamma V}{c^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t'} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2} + \frac{1}{c^2} \left(\gamma V \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \right) \left(\gamma (-V) \frac{\partial \Psi}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial \Psi}{\partial t'} \right) = 0 \\
& \left(\gamma^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} + \frac{\gamma^2 V^2}{c^4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t'^2} - 2 \frac{\gamma^2 V}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x' \partial t'} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2} + \frac{1}{c^2} \left(\gamma^2 V^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \Psi^2}{\partial t'^2} - 2 \gamma^2 V \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x' \partial t'} \right) = 0 \\
& \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2} + \gamma^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t'} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) - \frac{2V}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x' \partial t'} + \frac{2V}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x' \partial t'} \right) = 0
\end{aligned}$$

Lembrando que

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (5.63)$$

E substituindo na última linha do desenvolvimento obtemos

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t'^2} = 0 \quad (5.64)$$

que é a equação de ondas para o sistema de referência S' . Com isso, provamos que a equação da onda é invariante por transformação de Lorentz.

5.6) Rotações no Espaço de Minkowski

Podemos ver as transformações de Lorentz como rotações no espaço de Minkowski.

Para isso, vamos reescrever as TL

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= \gamma (x_1 - Vt) \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= \gamma (x_4 - Vx_1/c^2) \end{aligned} \right\} \quad (5.65)$$

Assumindo $\beta = \frac{V}{c}$, podemos reescrever as transformações como

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= \gamma x_1 - \gamma\beta x_4 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= -\gamma\beta x_1 + \gamma x_4 \end{aligned} \right\} \quad (5.66)$$

Já que $\gamma \geq 1$ podemos definir um ângulo ψ tal que $\gamma = \cosh \psi$ e $\gamma\beta = \sinh \psi$. Dessa forma, a Eq. 5.66 se estabelece como

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= (\cosh \psi) x_1 - (\sinh \psi) x_4 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= -(\sinh \psi) x_1 + (\cosh \psi) x_4 \end{aligned} \right\} \quad (5.67)$$

Dessa forma, a Eq. 5.16 fica

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi & 0 & 0 \\ -\sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

Logo as transformações de Lorentz podem ser vistas como rotações hiperbólicas no espaço de Minkowski. Além disso, as transformações de Lorentz nos conduzem a um grupo de simetria denominado Grupo de Lorentz.

5.7) O Grupo de Lorentz $\mathcal{L}$

Conforme vimos na seção anterior, as transformações de Lorentz podem ser interpretadas como rotações espaciais em $\mathbb{R}^3$.

O operador L que determinará as transformações de Lorentz é definido como

$$L = Q(\psi)R(\theta) \quad (5.69)$$

Onde $R(\theta)$ é a componente responsável pelas rotações puramente espaciais e $Q(\psi)$ irá abranger as rotações que envolvem o eixo do tempo.

Assim, as rotações espaciais serão

- . Matriz e operador infinitesimal em relação ao eixo x

$$R_X(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

$$X_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- . Matriz e operador infinitesimal em relação ao eixo y

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.71)$$

$$X_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- . Matriz e operador infinitesimal em relação ao eixo z

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

$$X_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora, as rotações temporais, que podem ser representadas em um diagrama espaço – tempo (também chamado de diagrama de Minkowski).

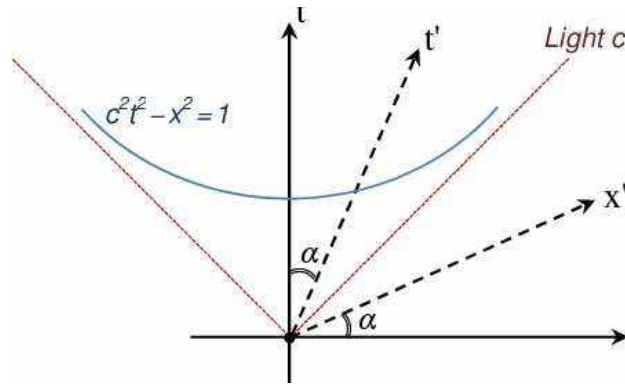


Figura 9) Transformações de Lorentz em um Diagrama de Minkowski. Fonte: https://www.researchgate.net/profile/Valentin_Danci/publication/298786831/figure/fig2/AS:340749766938629@1458252483941/The-representation-of-Lorentz-transformation-by-a-Minkowski-diagram-aimed-to_W640.jpg Acessado em 01/12/2019.

- . Matriz e operador infinitesimal em relação ao eixo X e ct

$$Q_X(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh(\psi) & 0 & 0 & -\sinh(\psi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(\psi) & 0 & 0 & \cosh(\psi) \end{pmatrix} \quad (5.73)$$

$$Y_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- . Matriz e operador infinitesimal em relação ao eixo Y e ct

$$Q_Y(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\psi) & 0 & -\sinh(\psi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sinh(\psi) & 0 & \cosh(\psi) \end{pmatrix} \quad (5.74)$$

$$Y_Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para os eixos Z e ct

$$Q_Z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sinh(\psi) \\ 0 & 0 & \cosh(\psi) & -\sinh(\psi) \\ 0 & 0 & -\sinh(\psi) & \cosh(\psi) \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

$$Y_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

As matrizes de rotações temporais elencadas acima compõem as geradoras das rotações infinitesimais do grupo associado a $Q(\psi)$.

O grupo de Lorentz, em analogia com o grupo de rotações $O(3)$ é chamado de Grupo de Lorentz $O(3,1)$, sendo três dimensões espaciais e uma temporal

CAPÍTULO 6

Grupos de Lie e Mecânica Quântica

As leis de conservação de energia, momento e momento angular para um sistema físico na mecânica clássica estão relacionadas com a invariância da dinâmica deste sistema por ação geral das transformações espaciais e temporais dadas por translações temporais, translações espaciais e rotações espaciais. Neste capítulo vamos examinar os resultados destas transformações na mecânica quântica, em alguns casos sem análogo na mecânica clássica, como é o caso do spin.

6.1) Grupo Unitário

O grupo unitário $U(n)$ em n dimensões é o grupo de transformações invertíveis que preservam o produto interno em um espaço vetorial complexo de n dimensões.

Um operador U é unitário quando sua transposta hermitiana é igual a sua inversa, ou seja

$$U^\dagger = U^{-1} \quad (6.1)$$

ou

$$U^\dagger U = I \quad (6.2)$$

O subgrupo de $U(n)$ cujo determinante é 1 é chamado de $SU(n)$.

O grupo unitário responde por uma série de transformações e rotações (espaciais e temporais) dentro da Mecânica Quântica. Sua importância advém do fato de que o grupo preserva o produto escalar. Tal propriedade é de verificação imediata se tomarmos $|v\rangle$ como um vetor em determinada base e $|d\rangle = U|v\rangle$ o resultado da transformação de $|v\rangle$ por um operador unitário U :

$$\begin{aligned} \langle d|d\rangle &= \langle v|U^\dagger U|v\rangle \Rightarrow \\ \langle d|d\rangle &= \langle v|I|v\rangle \Rightarrow \\ \langle d|d\rangle &= \langle v|v\rangle \end{aligned}$$

O resultado acima é valioso em MQ pois garante que, mesmo mudando os referenciais, os valores medidos fisicamente permanecem os mesmos, já que estão intrinsicamente relacionados com o produto escalar. No tópico seguinte, vamos analisar mais detalhadamente tal interpretação física.

6.2) O Operador Unitário e Sua Interpretação Física

Expandindo o conceito anterior, temos que para qualquer sistema quântico existe um operador unitário $U(t, t_0)$ tal que para qualquer vetor de estado $|\psi, t_0\rangle$ do sistema em um tempo t_0 , o estado do sistema em um tempo t é dado por

$$|\psi, t\rangle = U(t, t_0) |\psi, t_0\rangle, \forall t, t_0 \quad (6.3)$$

É importante destacar que o operador U gera uma evolução temporal para qualquer estado possível a partir de t_0 , independente da escolha do estado em t_0 . Um sistema físico possui apenas um operador U que gera uma evolução temporal de todos os estados possíveis.

Conforme citado no tópico 6.1, o fato do operador ser unitário implica que, no produto escalar, a norma do vetor é conservada. Ora, se tomarmos a função de onda ψ e o vetor de estado $|\psi, t\rangle$ a ela associada, o operador unitário preserva sua norma.

$$\langle \psi, t | \psi, t \rangle = \langle \psi, t_0 | U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) | \psi, t_0 \rangle = \langle \psi, t_0 | \psi, t_0 \rangle \quad (6.4)$$

6.3) Rotações Infinitesimais em Mecânica Quântica

Já analisamos em capítulos anteriores que rotações em torno do mesmo eixo comutam enquanto que rotações efetuadas sobre eixos diferentes não comutam necessariamente. Agora, precisamos entender como isso se aplica a um sistema quântico.

Sabemos que as rotações afetam os sistemas físicos, portanto, esperamos que um ket representando o estado de um sistema rotacionado seja diferente do ket de um sistema original não rotacionado. Para isso, adotemos R como um operador de rotação, representado por uma matriz diagonal 3×3 . Associado a ele, temos um operador $D(R)$ no espaço de kets tal que

$$|\alpha\rangle_R = D(R) |\alpha\rangle \quad (6.5)$$

onde $|\alpha\rangle_R$ e $|\alpha\rangle$ representam, respectivamente, kets do sistema rotacionado e kets do sistema original. A matriz ortogonal R , de ordem 3, atua sobre uma matriz coluna cujos elementos são as três componentes clássicas de um vetor. Por outro lado, o operador $D(R)$ atua em vetores de estado no espaço de kets. A representação matricial de $D(R)$ depende da dimensionalidade N do espaço de kets. Para $N = 2$, que é apropriado para a descrição de sistemas de spin¹⁷ $\frac{1}{2}$ sem quaisquer outros graus de liberdade, $D(R)$ é representado por uma matriz de ordem 2; para

¹⁷ O termo *spin* refere-se ao momento angular total, ou momento angular intrínseco, de um corpo/partícula.

sistemas de spin 1, a representação apropriada é uma matriz unitária de ordem 3. De maneira geral, para um sistema de spin N , a representação será uma matriz de ordem $2N + 1$ ^[11].

Para determinarmos $D(R)$, adotaremos (de forma apropriada)

$$D = U_\varepsilon = 1 - iG\varepsilon, \quad (6.6)$$

com G sendo um operador hermitiano. Especificamente, temos

$$G \rightarrow \frac{p_x}{\hbar}, \quad (6.7)$$

Para translação, onde $\varepsilon = dx'$, e

$$G \rightarrow \frac{H}{\hbar}, \quad (6.8)$$

para a evolução temporal, onde $\varepsilon = dt$.

É de conhecimento, baseado na mecânica clássica, que o momento angular é o gerador das rotações de modo similar a maneira como o momento e o Hamiltoniano geram, respectivamente, a translação e a evolução temporal. Logo, definimos o operador J_k de tal modo que o operador para uma rotação infinitesimal por um ângulo $d\phi$ em torno do k -ésimo eixo possa ser obtido por

$$G \rightarrow \frac{J_k}{\hbar}, \quad (6.9)$$

com $\varepsilon \rightarrow d\phi$

Tomando J_k como hermitiano, garantimos que o operador de rotação infinitesimal seja unitário e reduza-se ao operador identidade quando $d\phi$ tender a zero. Assim, de modo mais geral, temos

$$D(\hat{n}; d\phi) = 1 - i \frac{\mathbf{J} \cdot \hat{n}}{\hbar} d\phi \quad (6.10)$$

onde $\mathbf{D}$ é um operador que, com o auxílio de $\mathbf{J}$, rotacional kets quando o sistema é rodado de $d\phi$ ao redor de $\hat{n}$.

Munidos dessas informações, definimos que uma rotação finita nada mais é que sucessivas rotações infinitesimais em torno de um mesmo eixo^[3]. Por exemplo, se tomamos o eixo z como o eixo privilegiado de rotação, temos

$$\begin{aligned} D_z &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 - i \left(\frac{J_z}{\hbar} \right) \left(\frac{\phi}{N} \right) \right]^N = \\ &= \exp \left(\frac{-iJ_z \phi}{\hbar} \right) = \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{iJ_z \phi}{\hbar} - \frac{J_z^2 \phi^2}{2\hbar^2} + \dots \quad (6.11)$$

6.4) A Comutatividade do Momento Angular em Mecânica Quântica

No capítulo 2 analisamos a rotação de um vetor em $\mathbb{R}^3$. Apesar de não ser objeto deste trabalho, é possível escrever as rotações em função dos chamados ângulos de Euler. Tal escolha será conveniente para estudarmos as relações de comutação em mecânica quântica. Neste tópico, vamos adotar como referência uma rotação em torno do eixo z .^[11] Assim, uma rotação de um ângulo ϕ ao redor do eixo z é efetuada pela matriz

$$R_z(\phi) \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Estamos particularmente interessados em uma rotação infinitesimal de R_z

$$R_z(\varepsilon) \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

Observe que, na expansão binomial, ignoramos os termos de ordem maior ou igual a 3. De modo similar, ainda utilizando as rotações pelos ângulos de Euler, temos

$$R_x(\varepsilon) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

e

$$R_y(\varepsilon) \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

Uma manipulação elementar de álgebra matricial nos mostra que

$$\begin{aligned}
R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) - R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^2 & 0 \\ -\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= R_z(\varepsilon^2) - 1
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Note que $1 = R_{\text{qualquer}}(0)$, onde “qualquer” significa qualquer eixo de rotação. Assim, podemos escrever que

$$R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) - R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) = R_z(\varepsilon^2) - R_{\text{qualquer}}(0). \tag{6.17}$$

Agora, utilizaremos a propriedade acima para os operadores matriciais de rotação da Eq. 6.18 obtemos

$$\left(1 - \frac{iJ_x\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right) \left(1 - \frac{iJ_y\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right) - \left(1 - \frac{iJ_y\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right) \left(1 - \frac{iJ_x\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right) = 1 - \frac{iJ_z\varepsilon^2}{\hbar} - 1$$

(6.18)

Igualando os termos de ordem ε^2 de ambos os membros, obtemos

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \tag{6.19}$$

De forma generalizável,

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k \tag{6.20}$$

As relações acima são conhecidas por relações de comutação fundamentais do momento angular.

6.5) Spin e as Matrizes de Pauli

A menor dimensão para a qual as relações de comutação elencadas no tópico anterior são realizáveis é para $N = 2$. Tal dimensão é interessante pois os experimentos físicos realizados até o momento (desde espectroscopia atômica à ressonância magnética nuclear) nos convence de que a natureza se aproveita da realização da menor dimensionalidade possível. Exponenciando esse sistema quântico, teremos o grupo unitário $U(2)$. Se tomarmos o subgrupo $SU(2) \subset U(2)$ cujos elementos são matrizes de determinante 1, teremos uma representação do chamado “spin $\frac{1}{2}$ ”.

Já abordamos o conceito de spin, ainda que de forma generalizada, na seção 6.3. Agora, podemos associar a ele o operador S , tal que, de (6.27),

$$[S_i, S_j] = i\hbar S_k \varepsilon_{ijk} \tag{6.21}$$

O operador spin atua no chamado “espaço de estado de spin” E_s , onde S^2 e S_z são os operadores utilizados na descrição das quantidades que nos importa. O espaço E_s é constituído de vetores $|s, m\rangle$ tal que

$$S^2 |s, m\rangle = s(s+1)\hbar^2 |s, m\rangle \quad (6.22)$$

e

$$S_z |s, m\rangle = m\hbar |s, m\rangle \quad (6.23)$$

sendo que s pode assumir valores inteiros ou semi inteiros e que m assume valores discretos de $-s$ a $+s$.

Se estivermos trabalhando com átomos ou partículas de spin $\frac{1}{2}$ (ou seja, $s = \frac{1}{2}$), então o número quântico m pode assumir dois valores: $m = \pm \frac{1}{2}$. Dessa maneira, (6.30) pode ser reescrito como

$$S_z \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{\hbar}{2} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.24)$$

e

$$S_z \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{\hbar}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.25)$$

Esses dois estados possíveis serão doravante chamados de estados “up” e “down”. Tal denominação leva em conta o alinhamento ou anti-alinhamento desse sistema com um campo magnético. Para uma notação simplificada, adotaremos

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |\uparrow\rangle = |+\rangle \quad (6.26)$$

e

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |\downarrow\rangle = |-\rangle \quad (6.27)$$

Dessa forma, podemos obter as ações dos operadores S :

$$\begin{aligned} S^2 |\pm\rangle &= \frac{3}{4}\hbar^2 |\pm\rangle \\ S_z |\pm\rangle &= \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle \\ S_+ |+\rangle &= 0; S_- |-\rangle = 0 \\ S_+ |-\rangle &= \hbar |+\rangle; S_- |+\rangle = \hbar |-\rangle \end{aligned} \quad (6.28)$$

Qualquer estado de spin genérico $|\varphi\rangle$ de uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ pode ser reescrita como uma combinação linear (real) dos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$. [8]

$$|\varphi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle \quad (6.29)$$

com a e $b \in \mathbb{R}$. Agora, tomemos um operador genérico S_i atuando sobre $|\varphi\rangle$

$$S_i|\varphi\rangle = |\varphi'\rangle = c|+\rangle + d|-\rangle \quad (6.30)$$

com c e $d \in \mathbb{R}$. Em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} \langle +|S_i|+ \rangle & \langle +|S_i|-\rangle \\ \langle -|S_i|+ \rangle & \langle -|S_i|-\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

Mais uma vez, assumindo z como direção privilegiada e lembrando que $\langle \pm|\pm \rangle = 1$ e $\langle \pm|\mp \rangle = 0$, temos

$$\langle +|S_z|+ \rangle = \left\langle + \left| \frac{\hbar}{2} \right| + \right\rangle = \frac{\hbar}{2} \langle +|+ \rangle = \frac{\hbar}{2} \quad (6.32)$$

$$\langle +|S_z|-\rangle = \left\langle + \left| -\frac{\hbar}{2} \right| - \right\rangle = -\frac{\hbar}{2} \langle +|-\rangle = 0 \quad (6.33)$$

$$\langle -|S_z|+ \rangle = \left\langle - \left| \frac{\hbar}{2} \right| + \right\rangle = \frac{\hbar}{2} \langle -|+ \rangle = 0 \quad (6.34)$$

$$\langle -|S_z|-\rangle = \left\langle - \left| -\frac{\hbar}{2} \right| - \right\rangle = -\frac{\hbar}{2} \langle -|-\rangle = -\frac{\hbar}{2} \quad (6.35)$$

Dessa forma, a matriz (6.38) pode ser reescrita como

$$S_z = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\sigma_z} \quad (6.36)$$

A matriz σ_z é uma das três matrizes de Pauli. Devido a sua incidência em problemas de spin $\frac{1}{2}$, recebem nomenclatura especial. Vamos obter σ_x utilizando os operadores $S_{\pm}$, tal que

$$S_{\pm} = S_x \pm iS_y \quad (6.37)$$

adicionando os dois operadores, temos

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \quad (6.38)$$

e nossas equações se tornam

$$\langle + | S_x | + \rangle = \left\langle + \left| \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \right| + \right\rangle = \left\langle + \left| \frac{1}{2}S_+ \right| + \right\rangle + \left\langle + \left| \frac{1}{2}S_- \right| + \right\rangle = \frac{\hbar}{2} \langle + | - \rangle = 0 \quad (6.39)$$

$$\langle + | S_x | - \rangle = \left\langle + \left| \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \right| - \right\rangle = \frac{\hbar}{2} \quad (6.40)$$

$$\langle - | S_x | + \rangle = \left\langle - \left| \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \right| + \right\rangle = 0 \quad (6.41)$$

$$\langle - | S_x | - \rangle = \left\langle - \left| \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \right| - \right\rangle = \frac{\hbar}{2} \quad (6.42)$$

Assim,

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_x} \quad (6.43)$$

De forma análoga, obtemos que

$$S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\hbar}{2} \\ i\frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_y} \quad (6.44)$$

Com isso, nosso operador spin pode ser escrito em função das matrizes de Pauli de forma generalizada como

$$S_i = \frac{\hbar}{2} \cdot \sigma_i \quad (6.45)$$

6.6) SU(2) e SO(3)

Evidentemente, ao abordarmos uma rotação ao redor de um eixo, precisamos especificar três variáveis: os ângulos polares e azimutais tomados na direção do eixo de rotação e o próprio ângulo de rotação. Contudo, tal representação não é conveniente do ponto de vista do estudo de grupos de rotações. É muito mais fácil trabalhar com uma matriz ortogonal R de ordem 3, como já abordamos neste capítulo. Tal simplicidade advém do fato de que as rotações serão obtidas simplesmente multiplicando as matrizes ortogonais apropriadas.

Uma matriz ortogonal real 3×3 possui nove elementos, mas, munidos da condição de ortogonalidade

$$RR^T = 1 \quad (6.46)$$

obtemos seis equações independentes pois RR^T é uma matriz simétrica com seis elementos independentes. Daí, temos três $(9 - 6)$ números independentes em R .

O conjunto de todas as operações de multiplicação com matrizes ortogonais formam um grupo que chamamos de $SO(3)$.

Por outro lado, se tomarmos as rotações em duas dimensões, dado por uma matriz unitária $U(a, b)$ tal que a e b são números complexos e

$$U(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

garantiremos que a matriz tem módulo igual a 1 já que $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Note que a matriz satisfaz a condição de unitariedade descrita na seção 6.1.

$$U(a, b)^\dagger U(a, b) = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (6.48)$$

A matriz de rotação 2×2 de um ângulo ϕ efetuado por uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ ao redor do eixo z é dada por

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - in_z \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) & (-in_x - n_y) \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ (-in_x + n_y) \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + in_z \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

Podemos ver, diretamente, que a matriz 2×2 acima pode ser escrita como uma matriz $U(a, b)$.^[8]

A multiplicação por essas matrizes também possui propriedades de grupo. Esse grupo é denominado $SU(2)$, que é um subgrupo de $U(2)$.

Com isso, podemos concluir que é possível caracterizar as rotações usando ambas as linguagens $SO(3)$ e $SU(2)$. Entretanto, isso não significa que haja uma correspondência biunívoca entre $SO(3)$ e $SU(2)$, ou seja, que sejam isomórficos. A maneira mais adequada de tratar tal propriedade algébrica é dizer que, de modo geral, que $U(a, b)$ e $U(-a, -b)$ correspondem ambas a uma única matriz $SO(3)$, ou seja, a correspondência é de 2 para 1. Dessa forma, dizemos que os dois grupos são *localmente* isomorfos.^[3]

CAPÍTULO 7

Considerações Finais

Ao término de nossa análise, é possível concluir que a simetria é a linguagem natural das leis da física. Dentro desta analogia, a teoria de grupos corresponde à gramática desta linguagem.

A ênfase matemática não pode tirar o brilho da interpretação dos resultados. Aliás, essa é a beleza do tema! Nada expressa tão bem a célebre frase de Galileu de que a matemática é a linguagem com a qual Deus escreveu a natureza do que o estudo de teoria de grupos e suas aplicações. Nosso trabalho enfatizou a ação dos grupos de Lie, que fornece uma ampla visão da invariância das leis da física sob a ação de determinadas transformações. Foi possível perceber que a abordagem proposta pelos grupos de Lie revela a natureza simétrica de fenômenos clássicos e quânticos mostrando-se eficaz para a compreensão da natureza das leis naturais.

O campo é muito mais vasto do que foi apresentado aqui. Na bibliografia do trabalho, o leitor que for instigado pelo que foi descrito pode se aprofundar em detalhes não abordados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] M.A. Armstrong. *Groups and Symmetry*. Springer, 1988
- [2] SAN MARTIN, Luiz Antônio Barrera. *Grupos de Lie*. Editora da UNICAMP, 2012
- [3] GREINER, Walter, MULLER, Berndt. *Quantum Mechanics Symmetries*. Springer, 1992
- [4] WOIT, Peter. *Quantum Theory, Groups and Representations*. Springer, 2017
- [5] BASSALO, José M Filardo, CATTANI, Mauro Sérgio Dorsa. *Teoria de Grupos para Físicos*. Editora USP. 2011
- [6] INUI, Teturo, TANABE, Yukito, ONODERA, Yositaka. *Group Theory and Its Application in Physics*. Springer. 1990
- [7] TUNG, Wu-Ki. *Group Theory in Physics*. World Scientific Publishing. 1985
- [8] LESK, Arthur. *Introduction to Symmetry and Group Theory for Chemists*. Kluwer Academic Publishers. 2004
- [9] MCWEENEY, R, JONES, H. *Symmetry: An Introduction to Group Theory and its Application*. Pergamon press. 1963
- [10] BOURBAKI, Nicolas. *Lie Groups and Lie Algebras*. Springer. 2005
- [11] SAKURAI, Jun John, NAPOLITANO, Jim. *Mecânica Quântica Moderna*. Bookman. 2013
- [12] WIGNER, Eugene P. *Relativistic Invariance and Quantum Phenomena*. Kluwer Academic Publisher. 1957
- [13] RYDER. Lewis. *Introduction to General Relativity*. Cambridge. 2009

- [14] MARSDEN, Jerrold, RATIU, Tudor. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer. 2010.
- [15] FEYNMAN, Richard P. *Six Not so Easy Pieces: Einstein's Relativity, Symmetry and Space – Time*. Basic Books. 2011
- [16] BARATA. *Notas para um Curso de Física – Matemática*. Editora USP. 2019