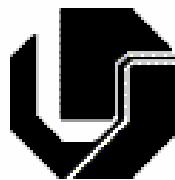


**THIAGO ALVES DE QUEIROZ**

**PROJETO ÓTIMO DE COLUNAS SEMI-  
ENTERRADAS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**2008**



**THIAGO ALVES DE QUEIROZ**

**PROJETO ÓTIMO DE COLUNAS SEMI-ENTERRADAS**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof.<sup>a</sup> Dra. Sezimária de Fátima Pereira Saramago

**UBERLÂNDIA – MG**

**2008**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Q3p      Queiroz, Thiago Alves de, 1987-  
            Projeto ótimo de colunas semi-enterradas / Thiago Alves de Queiroz.  
            - 2008.  
            100 f.

Orientadora: Sezimária de Fátima Pereira Saramago.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Colunas - Testes - Modelos matemáticos - Teses. 3. Otimização matemática - Teses. 4. Algoritmos genéticos - Teses. I. Saramago, Sezimária de Fátima Pereira. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Aos meus pais, Orlando e Charlene,  
às minhas irmãs, Joyce e Monique  
e, o grande amor da minha vida, Layane.



## AGRADECIMENTOS

Ao pai celestial, *nosso* senhor *Deus*, por tudo o que tem me dado, tanto coisas boas como as ruins. Tudo é uma lição. “...o choro pode durar uma noite, mas a alegria vem pela manhã.”

A meus pais, Orlando e Charlene, que mesmo longe, sempre estão por perto, dando conselhos e cuidados, que só os pais podem fornecer.

Às minhas irmãs, Joyce e Monique, pelo apoio dado para que eu sempre siga a frente com meus sonhos.

À minha namorada Layane, pelo constante amor, companheirismo e afeto em todas as horas. “*A promessa vai ser realizada*”.

A minha Orientadora, querida Prof.<sup>a</sup> Sezimária F. P. Saramago, por todos os seus ensinamentos, conselhos, apoio, dedicação e principalmente pela amizade demonstrada.

Ao meu amigo, Donald Santee, que acreditou na continuidade do trabalho e, que de alguma forma participou na elaboração deste, seja com idéias, ou até mesmo, nas horas de *conversas paralelas*.

A todos os meus familiares que, de certo modo, acreditam na minha vitória.

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica, mais especificadamente, o Programa de Pós-Graduação, pela oportunidade de participar deste renomado curso.

Aos amigos (alunos, professores e técnicos) da FEMEC que me ajudaram nesta jornada.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro oferecido.



QUEIROZ, T. A. Projeto Ótimo de Colunas Semi-Enterradas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia – MG, 2008.

## Resumo

Colunas semi-enterradas são elementos estruturais com grande aplicação no dia-a-dia, principalmente na fundação/estrutura de plataformas, pontes, construções civis, torres, etc. Estes elementos possuem comportamento instável, exigindo o desenvolvimento de modelos teóricos confiáveis para o seu projeto estrutural. O objetivo deste trabalho é o projeto ótimo de colunas semi-enterradas, cujas variáveis de decisão são os parâmetros dimensionais da coluna. Com esta finalidade é escrito um problema de otimização multi-objetivo que busca maximizar a distância entre as três primeiras frequências naturais, ao mesmo tempo em que considera outra função objetivo, conflitante, relacionada com a minimização do volume da coluna. Este problema de otimização está sujeito a restrições que limitam a altura da fundação e verificam se a carga crítica de Euler foi obedecida. O modelo dinâmico desenvolvido para a coluna utiliza a formulação de Lagrange, para descrever o comportamento em um solo não-linear. Para resolver o problema de otimização, são aplicados dois métodos numéricos que trabalham com populações de indivíduos e baseiam-se no processo de evolução natural: o método da Evolução Diferencial e o Algoritmo Genético. Os resultados obtidos são comparados e a performance dos métodos analisada através dos seguintes critérios: esforço computacional, esforço algorítmico e tempo de execução. Várias simulações numéricas são apresentadas, comprovando a eficácia da metodologia desenvolvida. O projeto ótimo da coluna semi-enterrada é calculado, resultando em uma solução segura em termos de prevenção das oscilações dinâmicas e econômica em termos de custo material, obedecendo às condições estabelecidas pelo projetista.

---

*Palavras chave: Colunas Semi-Enterradas, Frequências Naturais, Otimização, Evolução Diferencial, Algoritmo Genético.*



QUEIROZ, T. A. Optimal Project of Semi-Embedded Columns. Master's Dissertation, Federal University of Uberlandia, Uberlandia – MG, 2008.

## **Abstract**

Semi-embedded columns are structural elements with many day-a-day practical applications, mainly in foundation/structures of platforms, bridges, civil constructions, towers, etc. These elements have unstable behavior, requiring the development of reliable theoretical models for its structural project. The objective of this work is the optimal project of semi-embedded columns, whose decision variables are the dimensional parameters of the column. For this purpose is writing a multi-objective optimization problem that seeks to maximize the distance among the first three natural frequencies, at the same time is considering other conflicting objective function related to minimize the volume of the column. This optimization problem is subject to the constraints that limit the height of the foundation and verify if the critical load of Euler was obeyed. The dynamic model developed for the column uses the formulation of Lagrange to describe the behavior in a nonlinear soil. To solve the optimization problem two numerical methods are applied. These methods work with populations and are based on the natural process of evolution: the Differential Evolution method and Genetic Algorithm. The obtained results are compared and the methods performance analyzed by the following criteria: computational effort, algorithmic effort and execution time. Several numerical simulations checking the effectiveness of the developed methodology are presented. The optimal project of semi-embedded columns is calculated, resulting in a safe solution in terms of prevention of the dynamic oscillations and economic in terms of material cost, according to the conditions set by the designer.

---

*Keywords: Semi-Embedded Columns, Natural Frequencies, Optimization, Differential Evolution, Genetic Algorithm.*



## LISTA DE FIGURAS

| <b>Figura</b> | <b>Descrição</b>                                                                                                          | <b>Página</b> |
|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Figura 2.1.   | Modelo da coluna semi-enterrada.                                                                                          | 8             |
| Figura 2.2.   | Linha neutra da coluna como sendo uma linha reta após a deformação.                                                       | 10            |
| Figura 2.3.   | Representação esquemática da interação solo-coluna.                                                                       | 15            |
| Figura 2.4.   | Resultado da curva carga-deflexão lateral para diferentes parâmetros de forma no modelo modificado de Ramberg-Osgood.     | 16            |
| Figura 3.1.   | Condições de contorno para diferentes tipos de apoio na coluna.                                                           | 22            |
| Figura 4.1.   | Problema de otimização bidimensional e restrito.                                                                          | 42            |
| Figura 4.2.   | Exemplo de mínimo local e global.                                                                                         | 43            |
| Figura 4.3.   | Classificação dos principais métodos de otimização (OLIVEIRA, 2006).                                                      | 44            |
| Figura 4.4.   | Exemplo de cruzamento por um único ponto.                                                                                 | 52            |
| Figura 4.5.   | Exemplo de cruzamento uniforme.                                                                                           | 53            |
| Figura 4.6.   | Exemplo de mutação de ponto único.                                                                                        | 54            |
| Figura 4.7.   | Funcionamento iterativo do Algoritmo Genético.                                                                            | 55            |
| Figura 4.8.   | Criação do vetor doador $V^{(q+1)}$ .                                                                                     | 56            |
| Figura 4.9.   | Operação de cruzamento binomial.                                                                                          | 57            |
| Figura 4.10.  | Operação de cruzamento exponencial.                                                                                       | 57            |
| Figura 5.1.   | Representação em Ansys® da coluna semi-enterrada sem carga aplicada.                                                      | 62            |
| Figura 5.2.   | Diferentes tipos de secção transversal: (a) circular cheia, (b) tubular, (c) retangular, (d) hexagonal e (e) perfil em I. | 68            |



## LISTA DE TABELAS

| <b>Figura</b> | <b>Descrição</b>                                                                                                             | <b>Página</b> |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Tabela 4.1.   | Estratégias do método da Evolução Diferencial.                                                                               | 59            |
| Tabela 5.1.   | Freqüências resultantes do modelo analítico e numérico para o primeiro caso, com $Eti=3,6 \text{ MPa}$ e $P=0 \text{ N}$ .   | 63            |
| Tabela 5.2.   | Freqüências resultantes do modelo analítico e numérico para o segundo caso, com $Eti=6,3 \text{ MPa}$ e $P=140 \text{ KN}$ . | 64            |
| Tabela 5.3.   | Solução ideal para a coluna cilíndrica circular cheia.                                                                       | 69            |
| Tabela 5.4.   | Resultados obtidos para a coluna cilíndrica circular cheia.                                                                  | 69            |
| Tabela 5.5.   | Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna cilíndrica circular cheia.                                          | 70            |
| Tabela 5.6.   | Solução ideal para a coluna cilíndrica tubular.                                                                              | 70            |
| Tabela 5.7.   | Resultados obtidos para a coluna cilíndrica tubular.                                                                         | 71            |
| Tabela 5.8.   | Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna cilíndrica tubular.                                                 | 71            |
| Tabela 5.9.   | Solução ideal para a coluna retangular.                                                                                      | 72            |
| Tabela 5.10.  | Resultados obtidos para a coluna retangular.                                                                                 | 72            |
| Tabela 5.11.  | Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna retangular.                                                         | 72            |
| Tabela 5.12.  | Solução ideal para a coluna hexagonal.                                                                                       | 73            |
| Tabela 5.13.  | Resultados obtidos para a coluna hexagonal.                                                                                  | 73            |
| Tabela 5.14.  | Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna hexagonal.                                                          | 74            |
| Tabela 5.15.  | Solução ideal para a coluna perfil em I.                                                                                     | 74            |
| Tabela 5.16.  | Resultados obtidos para a coluna perfil em I.                                                                                | 75            |
| Tabela 5.17.  | Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna perfil em I.                                                        | 75            |
| Tabela 5.18.  | Solução ideal para a coluna com comprimento variável.                                                                        | 76            |
| Tabela 5.19.  | Resultados obtidos para a coluna com comprimento variável.                                                                   | 76            |
| Tabela 5.20.  | Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna com comprimento variável.                                           | 77            |

|              |                                                                                                                                     |    |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 5.21. | Solução ideal para a coluna com comprimento e secção variável.                                                                      | 77 |
| Tabela 5.22. | Resultados obtidos para a coluna com comprimento e secção variável.                                                                 | 78 |
| Tabela 5.23. | Valores das frequências e funções objetivo para a coluna com comprimento e secção variável.                                         | 78 |
| Tabela 5.24. | Solução ideal para a coluna altura da fundação variável.                                                                            | 79 |
| Tabela 5.25. | Resultados obtidos para a coluna com altura da fundação variável.                                                                   | 79 |
| Tabela 5.26. | Valores das frequências e funções objetivo para a coluna com altura da fundação variável.                                           | 79 |
| Tabela 5.27. | Solução ideal para o problema definido na Eq. (5.16), com $Eti=3,6 \text{ MPa}$ .                                                   | 80 |
| Tabela 5.28. | Resultados obtidos para o problema definido na Eq. (5.16), com $Eti=3,6 \text{ MPa}$ .                                              | 81 |
| Tabela 5.29. | Valores das frequências e funções objetivo para o problema definido na Eq. (5.16), com $Eti=3,6 \text{ MPa}$ .                      | 81 |
| Tabela 5.30. | Solução ideal para o problema definido na Eq. (5.16), com $Eti=6,3 \text{ MPa}$ .                                                   | 81 |
| Tabela 5.31. | Resultados obtidos para o problema definido na Eq. (5.16), com $Eti=6,3 \text{ MPa}$ .                                              | 82 |
| Tabela 5.32. | Valores das frequências e funções objetivo para o problema definido na Eq. (5.16), com $Eti=6,3 \text{ MPa}$ .                      | 82 |
| Tabela 5.33. | Solução ideal para o problema definido na Eq. (5.22), com $Eti=3,6 \text{ MPa}$ e $P=250 \text{ KN}$ .                              | 85 |
| Tabela 5.34. | Resultados obtidos para o problema definido na Eq. (5.22), com $Eti=3,6 \text{ MPa}$ e $P=250 \text{ KN}$ .                         | 86 |
| Tabela 5.35. | Valores das frequências e funções objetivo para o problema da Eq. (5.22), com $Eti=3,6 \text{ MPa}$ e $P=250 \text{ KN}$ .          | 86 |
| Tabela 5.36. | Valor final das restrições dado o problema definido na Eq. (5.22), com $Eti=3,6 \text{ MPa}$ e $P=250 \text{ KN}$ .                 | 87 |
| Tabela 5.37. | Solução ideal para o problema definido na Eq. (5.22), com $Eti=6,3 \text{ MPa}$ e $P=500 \text{ KN}$ .                              | 87 |
| Tabela 5.38. | Resultados obtidos para o problema definido na Eq. (5.22), com $Eti=6,3 \text{ MPa}$ e $P=500 \text{ KN}$ .                         | 88 |
| Tabela 5.39. | Valores das frequências e funções objetivo para o problema definido na Eq. (5.22), com $Eti=6,3 \text{ MPa}$ e $P=500 \text{ KN}$ . | 88 |

Tabela 5.40. Valor final das restrições dado o problema definido na Eq. (5.22), 89  
com  $E_{ti}=6,3 \text{ MPa}$  e  $P=500 \text{ KN}$ .



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras Latinas

|            |                                                              |
|------------|--------------------------------------------------------------|
| $a_j$      | j-ésima constante multiplicativa do método de Rayleigh-Ritz. |
| $a_h$      | Lado de um hexágono.                                         |
| $a_r, b_r$ | Lados de um retângulo.                                       |
| $A_0$      | Amplitude do carregamento harmônico.                         |
| $A_d$      | Função de amortecimento para a parte desenterrada da coluna. |
| $A_e$      | Função de amortecimento para a parte enterrada da coluna.    |
| $B_p$      | Comprimento do perfil I.                                     |
| $ds$       | Comprimento infinitesimal do elemento curvo.                 |
| $d_t$      | Diâmetro interno de um tubo.                                 |
| $dx$       | Elemento linear na direção do eixo axial.                    |
| $D_c$      | Diâmetro de um círculo.                                      |
| $D_t$      | Diâmetro externo de um tubo.                                 |
| $E$        | Módulo da elasticidade ou módulo de Young.                   |
| $E_{ti}$   | Módulo de elasticidade tangente inicial.                     |
| $E_{tf}$   | Módulo de elasticidade tangente final.                       |
| $f(X)$     | Função objetivo do problema de otimização.                   |
| $f_j(X)$   | j-ésima função objetivo de um problema multi-objetivo.       |
| $f_j^0$    | j-ésima solução ideal.                                       |
| $f$        | Função de aproximação do método de Rayleigh-Ritz.            |
| $F$        | Força aplicada transversalmente na coluna.                   |
| $F_d$      | Função de dissipação de Rayleigh.                            |
| $F_{fr}$   | Força restauradora da fundação elástica.                     |
| $F_p$      | Fator de perturbação dos indivíduos da população.            |
| $F_{wp}$   | Trabalho realizado por uma força externa periódica.          |
| $g_i(X)$   | i-ésima restrição de desigualdade do problema de otimização. |
| $h_j(X)$   | j-ésima restrição de igualdade do problema de otimização.    |

|              |                                                                        |
|--------------|------------------------------------------------------------------------|
| $h_p$        | distância interna entre as abas do perfil I.                           |
| $H$          | Altura da fundação.                                                    |
| $H_p$        | Largura do perfil I.                                                   |
| $I$          | Momento de inércia da secção transversal.                              |
| $k_{ij}$     | Termo da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz de rigidez.          |
| $k_j$        | Parâmetro que define a j-ésima forma dos modos de vibração.            |
| $k_p$        | Fator de penalidade na função pseudo-objetivo.                         |
| $[K]$        | Matriz de rigidez.                                                     |
| $L$          | Comprimento total da coluna.                                           |
| $L_g$        | Lagrangeano.                                                           |
| $L_y$        | Largura ou diâmetro da coluna (depende do tipo de secção transversal). |
| $m$          | Densidade linear de massa [kg/m].                                      |
| $m_i$        | Tamanho do i-ésimo gene do Algoritmo Genético.                         |
| $[M]$        | Matriz de densidade linear de massa.                                   |
| $n_c$        | Número total de coordenadas generalizadas.                             |
| $n_p$        | Parâmetro que define o tipo de solo.                                   |
| $n_t$        | Número de termos da série de Rayleigh.                                 |
| $p_c$        | Posição de cruzamento na cadeia de bits de cada cromossomo.            |
| $p_j$        | j-ésimo coeficiente de ponderação da função multi-objetivo.            |
| $P$          | Carga axial aplicada na extremidade desenterrada da coluna.            |
| $P_c$        | Probabilidade de cruzamento.                                           |
| $P^c_1$      | Primeira carga crítica de Euler.                                       |
| $P_f(X)$     | Função de penalidade na função pseudo-objetivo.                        |
| $P_u$        | Resistência última do solo.                                            |
| $prec_s$     | Precisão requerida pelo Algoritmo Genético.                            |
| $q_k$        | Coordenadas generalizadas.                                             |
| $\dot{q}_k$  | Derivada primeira das coordenadas generalizadas em relação ao tempo.   |
| $Q_k$        | Forças generalizadas.                                                  |
| $rand_i$     | i-ésimo número gerado aleatoriamente.                                  |
| $r_j=r_j(t)$ | j-ésima função $r$ em relação ao tempo.                                |

|                                              |                                                                                                      |
|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\bar{r}_j$                                  | j-ésima constante da solução de $r_j(t)$ .                                                           |
| $\{\bar{r}_j\}$                              | Vetor com as constantes $\bar{r}_j$ da solução de $r_j(t)$ .                                         |
| $\bar{r}_j^{norm}$                           | j-ésimo elemento normalizado do vetor $\{\bar{r}_j\}$ .                                              |
| $R^n$                                        | Conjunto que define o espaço de busca do problema de otimização.                                     |
| $\frac{1}{R_0}$                              | Curvatura do eixo da coluna indeformada.                                                             |
| $\frac{1}{R_f}$                              | Curvatura do eixo da coluna deformada.                                                               |
| $S$                                          | Resistência generalizada do solo.                                                                    |
| $t$                                          | Tempo.                                                                                               |
| $T$                                          | Energia cinética.                                                                                    |
| $u$                                          | Deslocamento axial da coluna.                                                                        |
| $U$                                          | Energia interna de deformação.                                                                       |
| $U_{fd}$                                     | Energia interna de deformação da fundação elástica.                                                  |
| $U_{pt}$                                     | Energia potencial total.                                                                             |
| $U^{(q+1)}$                                  | Vetor resultante ou vetor experimental da Evolução Diferencial.                                      |
| $V$                                          | Energia potencial.                                                                                   |
| $V_p$                                        | Potencial das cargas externas.                                                                       |
| $V^{(q+1)}$                                  | Vetor modificado ou vetor doador da Evolução Diferencial.                                            |
| $x$                                          | Coordenada axial.                                                                                    |
| $x_k$                                        | k-ésima variável de projeto.                                                                         |
| $x_k^{inf}$                                  | Limite inferior das variáveis de projeto.                                                            |
| $x_k^{sup}$                                  | Limite superior das variáveis de projeto.                                                            |
| $X$                                          | Vetor das variáveis de projeto.                                                                      |
| $X_{best}$                                   | Melhor indivíduo da população na Evolução Diferencial.                                               |
| $X_{s,\alpha,\beta,\gamma,\rho,\delta}$      | Vetores escolhidos aleatoriamente na população para gerar um novo indivíduo da Evolução Diferencial. |
| $w =$                                        | Deslocamento lateral ou deflexão lateral da coluna em função de $x$ e $t$ .                          |
| $w(x, t)$                                    |                                                                                                      |
| $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)$ | Velocidade da deflexão lateral da coluna em função do tempo.                                         |
| $y_g$                                        | Deslocamento generalizado da coluna.                                                                 |

## Letras Gregas

|                                |                                                                                  |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| $\beta_d$                      | Parâmetro de amortecimento da parte desenterrada da coluna.                      |
| $\beta_e$                      | Parâmetro de amortecimento da parte enterrada da coluna.                         |
| $\Delta$                       | Encurtamento total da coluna.                                                    |
| $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ | Valores admissíveis para a convergência dos métodos de otimização.               |
| $\theta$                       | Ângulo entre o eixo da coluna deformada e o eixo x.                              |
| $\lambda$                      | Freqüência natural ao quadrado, i.e., $\omega^2$ .                               |
| $\lambda_j$                    | j-ésima raiz da equação de freqüência.                                           |
| $\mu_j$                        | j-ésimo coeficiente da equação de freqüência.                                    |
| $\xi$                          | Parâmetro adimensional da coordenada axial.                                      |
| $\varphi(X)$                   | Função pseudo-objetivo.                                                          |
| $\chi$                         | Variação da curvatura do eixo da coluna.                                         |
| $\Phi_j$                       | j-ésima função constituinte da função de aproximação do método de Rayleigh-Ritz. |
| $\omega$                       | Freqüência natural da coluna.                                                    |
| $\omega_j$                     | j-ésima freqüência natural da coluna.                                            |
| $\Omega$                       | Freqüência da excitação externa.                                                 |

## Abreviaturas

|      |                       |
|------|-----------------------|
| AG   | Algoritmo Genético.   |
| cos  | Função cosseno.       |
| ED   | Evolução Diferencial. |
| sign | Função sinal          |
| sin  | Função seno.          |



## SUMÁRIO

|                                                                              |               |
|------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| <b>Resumo .....</b>                                                          | <b>xi</b>     |
| <b>Abstract .....</b>                                                        | <b>xiii</b>   |
| <b>LISTA DE FIGURAS .....</b>                                                | <b>xv</b>     |
| <b>LISTA DE TABELAS .....</b>                                                | <b>xvii</b>   |
| <b>LISTA DE SÍMBOLOS .....</b>                                               | <b>xxi</b>    |
| <br><b>CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO .....</b>                                     | <br><b>1</b>  |
| <b>1.1. Organização do Texto .....</b>                                       | <b>5</b>      |
| <br><b>CAPÍTULO II – MODELAGEM MATEMÁTICA DA COLUNA SEMI-ENTERRADA. ....</b> | <br><b>7</b>  |
| <b>2.1. Apresentação do Modelo .....</b>                                     | <b>8</b>      |
| <b>2.2. Energia Potencial Total (<math>U_{pt}</math>) .....</b>              | <b>10</b>     |
| <b>2.3. Energia Cinética (<math>T</math>) .....</b>                          | <b>13</b>     |
| <b>2.4. Modelo do Solo e a Fundação Elástica (<math>U_{fd}</math>) .....</b> | <b>14</b>     |
| <b>2.5. Forças Não-Conservativas .....</b>                                   | <b>17</b>     |
| <b>2.6. Função Lagrangeana para a Coluna .....</b>                           | <b>18</b>     |
| <br><b>CAPÍTULO III – MODELO DINÂMICO DA COLUNA SEMI-ENTERRADA .....</b>     | <br><b>20</b> |
| <b>3.1. Obtenção da Função de Deflexão Lateral .....</b>                     | <b>20</b>     |
| <b>3.2. Freqüências Naturais e Modos de Vibração .....</b>                   | <b>25</b>     |
| <b>3.3. Equação de Movimento da Coluna .....</b>                             | <b>35</b>     |
| <br><b>CAPÍTULO IV – PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO – CONCEITOS IMPORTANTES .</b>    | <br><b>40</b> |
| <b>4.1. Formulação Geral do Problema de Otimização .....</b>                 | <b>40</b>     |
| <b>4.1.1. Classificação dos métodos de otimização .....</b>                  | <b>44</b>     |

|                                                                                                                                |               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| 4.1.2. Critérios de convergência .....                                                                                         | 46            |
| 4.1.3. Funções de penalidade para problemas restritos .....                                                                    | 47            |
| <b>4.2. Algoritmo Genético .....</b>                                                                                           | <b>48</b>     |
| 4.2.1. Codificação das variáveis do problema .....                                                                             | 48            |
| 4.2.2. Criação dos indivíduos iniciais: População inicial .....                                                                | 50            |
| 4.2.3. Seleção .....                                                                                                           | 50            |
| 4.2.4. Cruzamento .....                                                                                                        | 52            |
| 4.2.5. Mutação .....                                                                                                           | 53            |
| <b>4.3. Evolução Diferencial .....</b>                                                                                         | <b>55</b>     |
| 4.3.1. Mutação .....                                                                                                           | 55            |
| 4.3.2. Cruzamento .....                                                                                                        | 56            |
| 4.3.3. Seleção .....                                                                                                           | 58            |
| 4.3.4. Estratégias da Evolução Diferencial .....                                                                               | 58            |
| <br><b>CAPÍTULO V – SIMULAÇÕES NUMÉRICAS – APLICAÇÕES .....</b>                                                                | <br><b>61</b> |
| <b>5.1. Comparação do Modelo Analítico com um Modelo Numérico .....</b>                                                        | <b>61</b>     |
| <b>5.2. Considerações Gerais .....</b>                                                                                         | <b>65</b>     |
| <b>5.3. Problema de Otimização Irrestrito .....</b>                                                                            | <b>66</b>     |
| 5.3.1. Influência do tipo de secção transversal no momento de inércia de<br>área ( $I$ ) .....                                 | 67            |
| 5.3.2. Influência do comprimento da coluna ( $L$ ).....                                                                        | 76            |
| 5.3.3. Influência do comprimento da coluna e do parâmetro da secção<br>transversal ( $L$ , $a_h$ ) .....                       | 77            |
| 5.3.4. Influência da altura da fundação ( $H$ ) .....                                                                          | 78            |
| 5.3.5. Influência da altura da fundação, do comprimento total e da secção<br>transversal da coluna ( $H$ , $L$ , $a_h$ ) ..... | 80            |
| <b>5.4 Problema de Otimização com Restrições .....</b>                                                                         | <b>83</b>     |

|                                                           |           |
|-----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>CAPÍTULO VI – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS .....</b> | <b>91</b> |
| <b>CAPÍTULO VII – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>    | <b>95</b> |





# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

Equações diferenciais vêm sendo utilizadas, ao longo dos anos, para representar a modelagem de diversos problemas do mundo real. Estes modelos podem descrever uma dinâmica populacional, reações químicas, disseminação de uma doença, circuitos elétricos, movimento de veículos, etc.

Uma importante classe de problemas está relacionada com a teoria de oscilações, isto é, a solução de um dado sistema possui característica oscilatória e descreve seu comportamento dinâmico. Além do caráter oscilatório, tal sistema pode ser influenciado por fenômenos não-lineares, como forças externas que atuam diretamente no modelo.

Um problema que tem merecido atenção envolve o projeto ótimo de colunas semi-enterradas. Colunas semi-enterradas aparecem em diversas aplicações práticas, como na fundação/estrutura de plataformas de petróleo “*off-shore*”, pontes, torres, chaminés e várias construções civis.

Ao tratar de estudos e modelos matemáticos para colunas semi-enterradas, Andrade (1993) estudou a estabilidade de colunas em contato com uma base elástica utilizando o método de Ritz junto com elementos finitos.

Sampaio (2004) desenvolveu o equacionamento para um modelo linear e não-linear de coluna semi-enterrada. A partir deste, fez uma análise do comportamento dinâmico mediante fórmulas exatas para as frequências naturais e modos de vibração, caso linear. Então, estendeu a análise para o modelo não-linear baseado na não-linearidade presente na geometria da coluna. Ambas as análises são feitas para vibrações livres e forçadas. A interação solo-coluna seguiu o modelo proposto por Winkler, que considera o solo linear e inclui dentro do equacionamento da coluna a interação solo-coluna.

Serebrenick (2004) seguiu a mesma formulação de Sampaio (2004), porém com o intuito de estudar colunas semi-enterradas esbeltas e submetidas a esforços axiais de compressão. Em sua análise linear, verificou a influência dos diferentes tipos de apoio e

fundação nas cargas críticas e modos críticos. Na análise do modelo não-linear obteve o caminho pós-crítico da coluna mediante o método de Rayleigh-Ritz, comparando os resultados com um modelo de elementos finitos. O solo foi modelado, respectivamente, pelo modelo de Winkler linear e não-linear.

Cabral, Sieira e Silva (2006) fizeram um estudo paramétrico da resposta dinâmica de colunas semi-enterradas utilizando um modelo de elementos finitos. Para o solo foi adotado o modelo linear de Winkler e os resultados, comparados com Sampaio (2004), mostraram a precisão obtida através do modelo numérico.

O modelo de Winkler é, geralmente, utilizado para representar o solo, mais precisamente, a interação solo-coluna. Como descrito em Pyke (1979), Sampaio (2004), Serebrenick (2004), Jaradat (2005), Thanasattayawibul (2006), este é um modelo simples, que pode ser integrado diretamente na equação diferencial da coluna e apto a fornecer bons resultados.

Por outro lado, através de resultados experimentais, Greiman et al., (1987) diz que grande parte dos solos apresenta uma não linearidade do tipo *softening* (com enfraquecimento) e podem ser modelados através de parábolas, hipérboles ou o modelo de Ramberg-Osgood, mais precisamente, modelo modificado de Ramberg-Osgood. Em linhas gerais, este modelo representa a interação solo-coluna como não-linear e dada por uma curva carga-deflexão. Esta curva simula um conjunto de molas paralelas, isto é, não conectadas, que são não-lineares e conectadas na parte enterrada da coluna (JARADAT, 2005).

Jaradat (2005) e Thanasattayawibul (2006) estudaram a interação, através de um modelo de elementos finitos, de colunas de pontes com o solo, o qual é representado pelo modelo Modificado de Ramberg-Osgood.

Santee & Gonçalves (2006) trataram de uma viga submetida a um carregamento harmônico e sobre uma base elástica não-linear, no caso, o solo dado pelo modelo modificado de Ramberg-Osgood. A partir disto, fizeram um estudo paramétrico do carregamento harmônico suportado mediante a interação entre solo e coluna cujos resultados mostraram que a viga passa a ter sua capacidade de carga afetada, tornando-se sensível a imperfeições.

Queiroz & Santee (2006) iniciaram um estudo sobre colunas semi-enterradas em um solo do tipo com enfraquecimento, dado pelo modelo modificado de Ramberg-Osgood. A modelagem matemática seguiu o princípio de Hamilton, assim como em Sampaio (2004) e Serebrenick (2004), diferenciando-se por considerar apenas o primeiro modo de vibração. Ao obter uma equação de movimento não-linear do elemento, foram apresentadas soluções no tempo através de métodos numéricos e de perturbação.

Apesar dos trabalhos já desenvolvidos com respeito a colunas semi-enterradas, ainda não existe uma base de dados contundente sobre o assunto, principalmente em se tratando de modelos analíticos, devido à alta complexidade envolvida na formulação. Como exposto anteriormente, um uso constante deste elemento no dia a dia justifica a continuidade de estudos sobre o tema, permitindo obter um projeto de acordo com as reais necessidades do usuário.

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma metodologia para o projeto ótimo de colunas semi-enterradas. Com esta finalidade, escreve-se uma função multi-objetivo visando maximizar a primeira frequência natural, bem como distanciar entre si as três primeiras frequências naturais. Além disso, restrições foram consideradas visando obter um projeto seguro e economicamente viável.

A partir disto, inicialmente, formulou-se a modelagem matemática de uma coluna semi-enterrada considerando o solo dado pelo modelo modificado de Ramberg-Osgood. Então, busca-se, além de uma abordagem totalmente analítica do ponto de vista de formulação do problema, otimizar o elemento tanto em termos de segurança, quanto em custo material.

Diferentemente dos trabalhos discutidos, a modelagem foi desenvolvida em cima das Equações de Lagrange para obter os funcionais de energia e, conseqüentemente, as equações de movimento. Neste estudo, o objetivo não foi a obtenção da equação diferencial parcial que descreve a deflexão do elemento, para depois resolvê-la e escrever as expressões para as frequências naturais e modos de vibração. Até porque, em tal metodologia, a equação deve ser linearizada para permitir a aplicação do método de separação de variáveis e a obtenção da solução do problema.

Considerando que o problema é não-linear em sua formulação e o fato de lidar apenas com as três primeiras frequências naturais no projeto ótimo, adota-se a utilização de uma aproximação dada pelo método de Rayleigh-Ritz em substituição a função que representa a deflexão lateral da coluna. Por conseguinte, o modelo resulta em um problema de autovalores e autovetores cujos autovalores são as frequências de interesse.

No trabalho proposto por Sampaio (2004) e Serebrenick (2004) é sugerido modelar o problema de forma individual, ou seja, considerar de forma separada uma função para a deflexão lateral da parte enterrada e outra para a parte desenterrada. Porém, esta técnica exige que, além das condições de contorno, sejam consideradas condições de continuidade que devem ser satisfeitas. Nesta pesquisa, de forma diferente, considera-se a coluna como um todo, tal que uma única função contínua representa sua deflexão lateral. Com isso, satisfazendo diretamente as condições de continuidade. Vale ressaltar que, o modelo

analítico desenvolvido é comparado a um modelo de elementos finitos com o intuito de validar a metodologia desenvolvida.

Ao obter analiticamente as frequências naturais do modelo em estudo, torna-se possível escrever de forma simples o problema de otimização. No projeto ótimo da coluna é imprescindível que a coluna tenha o menor volume possível e respeite as restrições relacionadas ao projeto.

Ao mesmo tempo em que o distanciamento das frequências naturais fornece uma estrutura segura e estável, a minimização do seu volume garante menor custo material. Além do que, a coluna deve satisfazer critérios relacionados à prevenção de oscilações que surgem tanto na fundação quanto na própria coluna que interage com a fundação.

Nos dias atuais evidencia-se a escassez de recursos bem como o encarecimento dos mesmos, o que justifica, mais uma vez, a necessidade de projetar/desenvolver de maneira otimizada. Deste modo, existem técnicas de otimização que, selecionadas de acordo com o problema, ajudam na resolução destes buscando obter o ótimo do projeto em desenvolvimento.

A otimização pode ser aplicada em várias áreas do conhecimento e sua utilização nas últimas décadas tem crescido consideravelmente. Existem muitos métodos de otimização, sendo que a escolha de qual método utilizar depende de uma série de características do problema a ser otimizado, principalmente do comportamento da função que o representa.

Neste estudo, dois métodos estocásticos de otimização, que são baseados em população, são apresentados e discutidos, a saber: o Algoritmo Genético e a Evolução Diferencial.

Como o próprio nome sugere, o Algoritmo Genético (HOLLAND, 1975) é um método baseado no princípio de seleção natural proposto por Charles Darwin em 1859. Em linhas gerais, os indivíduos mais aptos irão se propagar nas gerações subseqüentes por meios de operações de seleção, cruzamentos e mutação, enquanto os mais fracos tendem a desaparecer. O método da Evolução Diferencial, criado por Storn & Price (1995), baseia-se em gerar novos indivíduos, denotados vetores, baseado na diferença vetorial ponderada entre dois indivíduos aleatórios da população. Assim como o Algoritmo Genético, também utiliza os operadores de mutação, cruzamento e seleção para gerar novas populações.

Finalmente, várias simulações numéricas são executadas permitindo verificar que a metodologia desenvolvida fornece um elemento estrutural que respeita as condições de projeto, sendo seguro, estável, barato, e ao mesmo tempo “ótimo” sob o ponto de vista da engenharia. Isto significa que muitas vezes não será possível garantir que a solução represente o ótimo global da função objetivo, mas representará uma solução melhor para o projetista.

### **1.1. Organização do Texto**

Esta dissertação está dividida em seis capítulos descritos brevemente adiante.

Neste primeiro capítulo é exposta uma introdução a respeito do trabalho desenvolvido, abordando fatores de motivação e relevância para estudo do tema abordado.

No capítulo dois é descrito o modelo matemático de uma coluna semi-enterrada em um solo não-linear do tipo com enfraquecimento. Partir-se-á da representação do modelo físico para a determinação do Lagrangeano.

No capítulo três determinam-se as frequências naturais e os respectivos modos de vibração associados a tais frequências. Em seguida, desenvolve-se a equação que descreve o movimento dinâmico da coluna semi-enterrada.

O capítulo quatro aborda a formulação geral do problema de otimização, considerando conceitos importantes sobre o tema. Além disso, discute-se uma estratégia utilizada para resolver problemas multi-objetivos e lidar com problemas restritos, além de apresentar uma revisão sobre os dois métodos considerados no trabalho, isto é, o Algoritmo Genético e a Evolução Diferencial.

No capítulo cinco faz-se um modelo de elementos finitos com o objetivo de validar o modelo dinâmico formulado. Além disso, realizam-se as simulações envolvendo a aplicação dos métodos de otimização para a obtenção do projeto ótimo da coluna semi-enterrada. Diversas simulações são executadas para diferentes parâmetros da coluna. As soluções são apresentadas e discutidas.

Finalmente, o capítulo seis apresenta as principais conclusões obtidas a partir do trabalho efetuado e sugere alguns estudos para a continuidade desta pesquisa.



## **CAPÍTULO II**

### **MODELAGEM MATEMÁTICA DA COLUNA SEMI-ENTERRADA**

Colunas são elementos críticos em construções civis, seu estudo merece minuciosa atenção e os critérios para o seu dimensionamento devem ser bem estabelecidos para garantir a segurança da estrutura, evitando o comprometimento da mesma.

O estudo da vibração de tal elemento relaciona os movimentos oscilatórios dos corpos e as forças que estão associadas aos componentes. Considerando que grande parte das estruturas encontram-se sujeitas a certo grau de vibração, torna-se imprescindível, deste modo, a determinação do seu comportamento oscilatório, bem como das frequências naturais relacionadas a tal comportamento.

Dependendo do uso, uma coluna pode aparecer totalmente enterrada, desenterrada ou semi-enterrada nos mais diferenciados tipos de solos. Existem modelos e soluções propostas para o caso totalmente enterrado e totalmente desenterrado, como o que se encontra em Chajes (1974), Shaker (1975), Warburton (1976), Bazant & Cedolin (1991). Já para o caso da coluna semi-enterrada, poucas são as referências na literatura, sendo alguns modelos conhecidos, como os propostos por Sampaio (2004), Serebrenick (2004) e Queiroz & Santee (2006).

Neste capítulo será proposto um modelo matemático que descreve o comportamento de uma coluna semi-enterrada em um solo não-linear do tipo “com enfraquecimento”. Análises efetuadas mostram que essa é uma configuração estrutural potencialmente perigosa em termos de estabilidade da coluna.

Como o interesse está na obtenção das frequências naturais da coluna modelada, tal estudo será apresentado detalhadamente no capítulo três, porém seguindo os equacionamentos proposto neste capítulo. Também, será fornecida a equação de movimento para coluna de acordo com a formulação das Equações de Lagrange.

## 2.1. Apresentação do Modelo

Considere a coluna apresentada na Fig. 2.1 como esbelta tendo comprimento total  $L$  e rigidez flexional  $EI$ , enterrada a certa altura  $H$ , carregada por uma força axial  $P$  que mantém a mesma intensidade e direção à medida que a coluna se deforma. Além disso, seja  $F$  a força aplicada transversalmente e todo e qualquer atrito lateral que a coluna venha a sofrer é desconsiderado. Também, considera-se que  $P$  é menor que a carga crítica de Euler, isto é, supõe-se que a coluna não flambou.

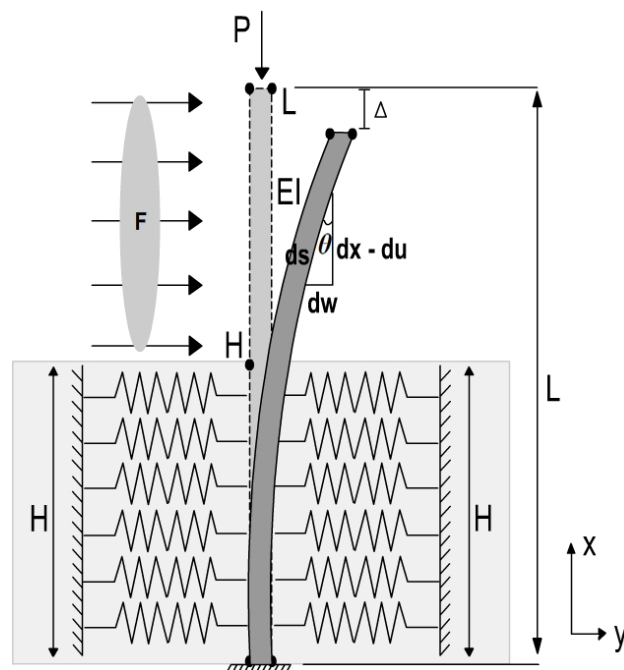


Figura 2.1 - Modelo da coluna semi-enterrada.

A análise da coluna semi-enterrada é feita mediante a aplicação da teoria de Euler-Bernoulli, a qual considera que a força de cisalhamento e a inércia de rotação são desprezadas, ou seja, as secções se mantêm planas e normais ao eixo da coluna após a deformação (HAN et al., 1999). Seguindo para a obtenção da equação de movimento da mesma, utilizam-se as Equações de Lagrange (HURTY & RUBINSTEIN, 1964; MEIROVITCH, 1990).

Segundo Hurty & Rubinstein (1964) a formulação de Lagrange é composta por equações diferenciais que consideram a energia do sistema instantaneamente no tempo. É, pois, diferente do Princípio de Hamilton que é expresso como uma equação integral que considera a energia total integrada sobre um intervalo de tempo.

Outro motivo, segundo Meirovitch (1990), para o uso das Equações de Lagrange, decorre do trabalho repetitivo de certas operações que devem ser feitas ao utilizar o Princípio de Hamilton. Assim, o custo destas operações pode ser minimizado pelo uso das Equações de Lagrange. Admitindo que o sistema estudado seja holonômico, considera-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_g}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L_g}{\partial q_k} = Q_k \quad (2.1)$$

sendo que o ponto sobre o símbolo (letra) representa a derivada em relação ao tempo  $t$ ,  $q_k$  representa as coordenadas generalizadas,  $L_g$  é o Lagrangeano e  $Q_k$ , ( $k=1, 2, \dots, n_c$ ), são as forças generalizadas, com  $n_c$  representando o número total de coordenadas generalizadas. Sabe-se que o Lagrangeano é definido como:

$$L_g = T - V \quad (2.2)$$

em que  $T$  é a Energia Cinética e  $V$  é a Energia Potencial oriunda de qualquer fonte potencial. Assim, considerando o problema da coluna apresentado, tem-se a energia potencial  $V$  descrita como:

$$V = U_{pt} + U_{fd} \quad (2.3)$$

onde  $U_{pt}$  é a energia potencial total e  $U_{fd}$  é a energia interna de deformação da fundação elástica.

Já para o caso das forças generalizadas  $Q_k$ , tendo em vista forças não-conservativas atuando no sistema, considera-se a função de dissipação de Rayleigh ( $F_d$ ) e o trabalho realizado por uma força externa periódica ( $F_{wp}$ ) que excita o sistema. Logo, chega-se na seguinte Equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_g}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L_g}{\partial q_k} + \frac{\partial F_d}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial F_{wp}}{\partial q_k} \quad (2.4)$$

A seguir, apresentam-se as formulações de cada parcela que compõe a Eq. (2.4) até chegar à equação diferencial ordinária que descreve o movimento da coluna semi-enterrada.

## 2.2. Energia Potencial Total ( $U_{pt}$ )

Para a obtenção da energia potencial total da estrutura foram considerados os estudos desenvolvidos por Sampaio (2004), Serebrenick (2004) e Orlando (2006). Seja,

$$U_{pt} = U + V_p \quad (2.5)$$

sendo que  $U$  representa a energia interna de deformação e  $V_p$  o potencial das cargas externas conservativas.

Com isso, mediante a Fig. 2.1, à medida que a coluna se deforma, cada ponto do seu eixo central move-se para uma posição vertical (deslocamento axial  $u$ ) e uma posição horizontal (deslocamento lateral  $w$ ). É considerada, também, a hipótese da linha neutra da coluna ser inextensível, isto é, o comprimento  $L$  da coluna permanece o mesmo após esta sofrer qualquer deformação. Assim, a deflexão lateral da coluna é descrita pela função  $w=w(x,t)$ , em que  $x$  varia de 0 a  $L$  e  $t$  representa o tempo.

Ao fato da coluna ser considerada inextensível, permite-se supor que o elemento linear  $dx$  seja igual ao elemento curvo  $ds$ , conforme se ilustra na Fig. 2.2.

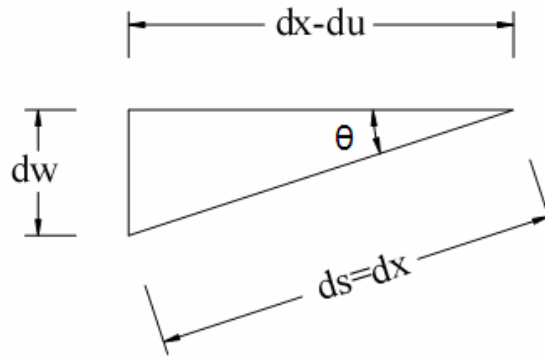


Figura 2.2 - Linha neutra da coluna como sendo uma linha reta após a deformação.

Assim, da Fig. 2.2 obtém-se a seguinte relação:

$$\sin(\theta) = \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} = w' \rightarrow \theta = \sin^{-1}(w') \quad (2.6)$$

em que  $\sin$  representa a função seno,  $\theta$  é o ângulo entre o eixo da coluna deformada e o eixo  $x$ ,  $w'$  denota a derivada primeira de  $w$  em relação a  $x$ .

Então, tem-se que a variação da curvatura,  $\chi$ , é dada pela diferença da curvatura do eixo da coluna deformada ( $1/R_f$ ) em relação a curvatura do eixo da coluna indeformada ( $1/R_0$ ). Ou seja, é definida pela taxa de variação do ângulo  $\theta$  em relação ao comprimento do arco para cada configuração da coluna, deformada e indeformada. Observe que a curvatura do eixo da coluna indeformada é nula, dado que neste caso não existe variação do ângulo  $\theta$ . Logo:

$$\chi = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_f} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{w''}{\sqrt{1-w'^2}} \quad (2.7)$$

Sendo assim, tem-se que a energia interna de deformação  $U$  é definida apenas para a energia de flexão (DYM & SHAMES, 1973) a qual resulta do alongamento das fibras tracionadas e do encurtamento das fibras comprimidas. O fato de ser desprezada a parcela referente à deformação axial na energia interna de deformação decorre de que, nesta análise, considera-se o elemento estrutural esbelto (TIMOSHENKO & GERE, 1961). Ou seja, a altura da coluna é muita pequena quando comparada com o seu comprimento total  $L$ . Assim, obtém-se:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI \chi^2 dx \quad (2.8)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade ou módulo de Young,  $I$  o momento de inércia da seção transversal, resultando em  $EI$  como a rigidez à flexão da coluna.

A partir de  $\chi$  definido na Eq. (2.7), obtém-se  $\chi^2$  como:

$$\chi^2 = w'^2 (1 - w'^2)^{-1} \quad (2.9)$$

Expandindo  $f(w') = (1 - w'^2)^{-1}$  em série de Taylor até segunda ordem, em torno do ponto  $w'=0$ , obtém-se:

$$f(w') = (1 + w'^2) \quad (2.10)$$

Substituindo a Eq. (2.10) na Eq. (2.9) tem-se:

$$\chi^2 \cong w'^2 (1 + w'^2) \quad (2.11)$$

Logo, chega-se a:

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^L w'^2 (1 + w'^2) dx \quad (2.12)$$

Por outro lado, define-se o potencial das cargas externas conservativas como sendo o produto entre a carga aplicada  $P$  e o encurtamento total da coluna  $\Delta$ . Assim:

$$V_p = P\Delta \quad (2.13)$$

O valor de  $\Delta$  é obtido considerando a seguinte relação, conforme observado na Fig. 2.2:

$$(ds)^2 = (dx - du)^2 + (dw)^2 \quad (2.14)$$

Então, dividindo a Eq. (2.14) por  $(dx)^2$  e admitindo a coluna como sendo inextensível,  $dx=ds$ , obtém-se:

$$1 = \left(1 - \frac{du}{dx}\right)^2 + w'^2 \quad (2.15)$$

A Eq. (2.15) pode ser reescrita como:

$$\frac{du}{dx} = 1 - \sqrt{1 - w'^2} \quad (2.16)$$

Assim, partindo da relação:

$$\Delta = \int_0^L du \quad (2.17)$$

chega-se a:

$$\Delta = \int_0^L \left[ 1 - \sqrt{1 - w'^2} \right] dx \quad (2.18)$$

Seja  $f(w') = 1 - \sqrt{1 - w'^2}$ , expandindo esta função em série de Taylor até a quarta ordem em torno do ponto  $w'=0$ , obtém-se:

$$\Delta = -\int_0^L \left[ \frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{8} w'^4 \right] dx \quad (2.19)$$

Com isso, tem-se a expressão para o potencial da carga axial como:

$$V_p = -\int_0^L P \left( \frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{8} w'^4 \right) dx \quad (2.20)$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (2.12) e (2.20) na Eq. (2.5), a energia potencial total é escrita da seguinte forma:

$$U_{pt} = \frac{1}{2} EI \int_0^L w''^2 (1 + w'^2) dx - P \int_0^L \left( \frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{8} w'^4 \right) dx \quad (2.21)$$

### 2.3. Energia Cinética (T)

A energia cinética T é definida, segundo Meirovitch (1990), da seguinte maneira:

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.22)$$

sendo  $m$  a densidade linear de massa da coluna e  $\left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)$  representando a velocidade da deflexão lateral da coluna em função do tempo.

## 2.4. Modelo do Solo e a Fundação Elástica ( $U_{fd}$ )

Solos geralmente são formados por materiais não-homogêneos, partículas sólidas, cujo tamanho variam de micron (equivalente a um milionésimo do metro) a alguns milímetros. Muito solos resultam dos sedimentos das rochas que formam a crosta da terra. Além disso, entre tais partículas existem espaços preenchidos parcialmente por água ou ar.

O solo está dividido em camadas, sendo que cada camada pode possuir propriedades diferentes da camada seguinte, com isso a interação coluna-solo (ou solo-coluna) não possui o mesmo comportamento sobre toda a parte enterrada da coluna. Assim, torna-se importante que tal variação das propriedades do solo seja levada em consideração durante sua modelagem, sendo fundamental conhecer o tipo de solo onde a estrutura estará enterrada, de modo que sua representação seja a mais precisa possível (JARADAT, 2005; THANASATTAYAWIBUL, 2006).

Assumindo que a resposta da interação coluna-solo é não-linear e considerando que a maioria dos solos apresenta uma não-linearidade como sendo do tipo “com enfraquecimento”, do inglês “*softening*” (PYKE, 1979; GREIMANN et al., 1987), tem-se o solo representado por uma série de molas não-lineares, não conectadas entre si. Este modelo representa o comportamento coluna-solo na forma de uma curva carga-deflexão lateral, ou seja, a coluna está sujeita a uma resistência lateral do solo quando for excitada ou tiver submetida a algum carregamento lateral.

Em outras palavras, tal curva carga-deflexão lateral representa a relação entre a resistência lateral do solo contra a coluna (em unidade de força por unidade de comprimento da coluna) e o correspondente deslocamento lateral da coluna (ou deflexão lateral), conforme representado na Fig. 2.3. Uma característica importante desta curva é a independência em relação à forma e a rigidez da coluna, sendo que em Greimann et al. (1987) e Kumar & Lalvani (2004) encontra-se tal curva denominada curva  $p$ - $y$ , onde  $p$  é a resistência generalizada do solo e  $y$  é o deslocamento generalizado da coluna.

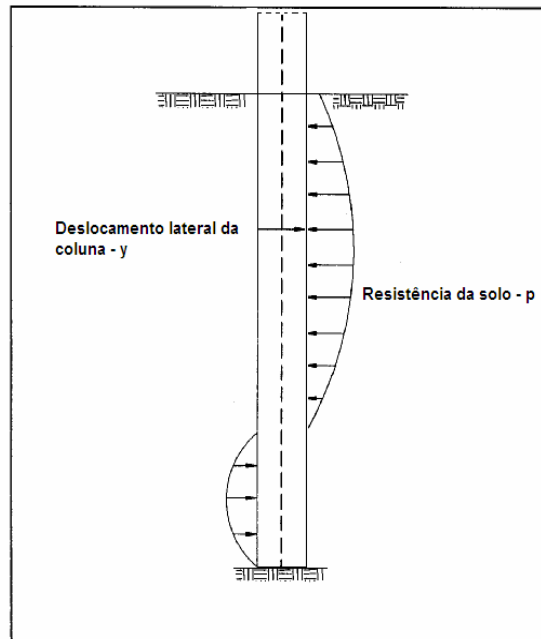


Figura 2.3 - Representação esquemática da interação solo-coluna.

De acordo com Greimann et al. (1987) e Helwany et al. (2001) este tipo de comportamento coluna-solo é usualmente representado pelo modelo modificado de Ramberg-Osgood. Tal modelo recebe a denominação de modificado, pois é obtido a partir de uma suave modificação da relação empírica definida por Ramberg & Osgood (1943) que representa o comportamento elástico-plástico de diversos materiais. A função do modelo modificado de Ramberg-Osgood que descreve o comportamento do solo é dada por:

$$S = \frac{(E_{ti} - E_{tf})y_g}{\sqrt[n_p]{1 + \left| \frac{(E_{ti} - E_{tf})y_g}{P_u} \right|^{n_p}}} + E_{tf}y_g \quad (2.23)$$

sendo  $E_{ti}$  o módulo de elasticidade tangente inicial,  $E_{tf}$  o módulo de elasticidade tangente final,  $S$  a resistência generalizada do solo,  $P_u$  a resistência última do solo,  $n_p$  o parâmetro de forma que determina o tipo do solo e  $y_g$  o deslocamento generalizado da coluna.

A força restauradora da fundação elástica  $F_{fr}$  é dada por uma expansão em série de Taylor até segunda ordem da função  $S$ , em torno do ponto  $y_g=0$ , considerando  $(E_{ti} - E_{tf}) > 0$ ,  $P_u > 0$  e que o parâmetro de forma seja  $n_p=1$ , sendo que este valor do parâmetro de forma representa um solo de argila mole (JARADAT, 2005). Logo:

$$F_{fr} = - \frac{(E_{ti} - E_{tf})^2 y_g |y_g|}{P_u} + E_{ti} y_g \quad (2.24)$$

A parcela  $y_g/|y_g|$  na Eq. (2.24) aparece devido à simetria da força em relação ao deslocamento lateral, isto é, com a inversão do deslocamento lateral, a direção da força de resistência do solo também se inverte.

A energia interna de deformação armazenada na fundação elástica é calculada integrando a força restauradora  $F_{fr}$  ao longo de  $y_g$  e  $x$ . Assim, resultando em:

$$U_{fd} = \int_0^H \int_0^w (F_{fr}) dy_g dx = \int_0^H \left( - \frac{(E_{ti} - E_{tf})^2 |w|^3}{3P_u} + \frac{E_{ti} w^2}{2} \right) dx \quad (2.25)$$

Note que a integral ao longo do comprimento varia até  $H$ , uma vez que essa parcela só existe na região enterrada da coluna.

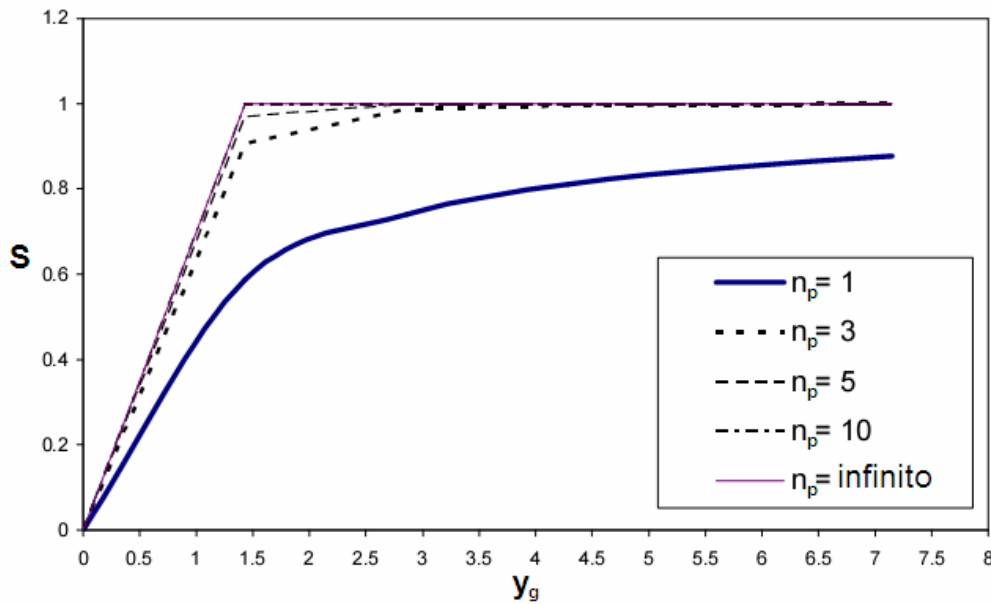


Figura 2.4 - Resultado da curva carga-deflexão lateral para diferentes parâmetros de forma no modelo modificado de Ramberg-Osgood.

A Fig. 2.4 mostra a influência do parâmetro de forma no modelo modificado de Ramberg-Osgood, Eq. (2.23), sendo que para outros tipos de solo como argila muito rija tem-se  $n_p=2$ , já para areia tem-se  $n_p=3$  (JARADAT, 2005).

Os valores utilizados para as constantes que determinam o solo de argila mole são (JARADAT, 2005):

- $3,219 \leq E_{ti} \leq 6,4638 \text{ MPa}$ ;
- $E_{ti}=0 \text{ Pa}$ ;
- $161595L_y \leq P_u \leq 323190L_y \text{ N/m}$ , onde  $L_y$  é a largura ou diâmetro da coluna, em metros (eixo de referência  $y$ , vide Fig. 2.1), e depende do tipo de secção transversal.

Valores para outros tipos de solo podem ser obtidos de Greimnan et al. (1987), Kumar & Lalvani (2004) ou Jaradat (2005).

## 2.5. Forças Não-Conservativas

Por se tratar de um problema que sofre a influência de uma força externa de excitação que varia no tempo, além do fato que o amortecimento está presente em todos os sistemas oscilatórios, escreve-se um funcional para as forças não-conservativas atuantes no modelo.

Segundo Thomson (1978) a parcela referente ao amortecimento tem o objetivo de simular a dissipação de energia que os sistemas reais exibem. A parcela de amortecimento ocasiona mudanças características no movimento da coluna, sendo que esta pode chegar a perder seu caráter oscilatório.

A força de amortecimento no modelo desenvolvido é caracterizada de forma diferenciada na parte enterrada e na parte desenterrada da coluna. Na parte enterrada, além da influência das características geométricas da própria coluna, ocorre a influência direta do solo, enquanto que na parte desenterrada esta última influência não ocorre. Assim, escreve-se as forças de amortecimento segundo a função de dissipação de Rayleigh (HURTY & RUBINSTEIN, 1964), sendo formuladas como:

- Parte enterrada da coluna:

$$A_e = \int_0^H \frac{1}{2} \beta_e \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.26)$$

- Parte desenterrada da coluna:

$$A_d = \int_H^L \frac{1}{2} \beta_d \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.27)$$

em que  $\beta_e$  representa o parâmetro de amortecimento para a parte enterrada e  $\beta_d$  o parâmetro de amortecimento para a parte desenterrada da coluna.

Com isso, a função de dissipação ( $F_d$ ) é escrita da seguinte maneira:

$$F_d = A_e + A_d = \int_0^H \frac{1}{2} \beta_e \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \int_H^L \frac{1}{2} \beta_d \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.28)$$

Com a introdução de um carregamento externo transversal na parte desenterrada da coluna, considerado uniformemente distribuído e periodicamente dependente do tempo, são geradas respostas transientes e estacionárias no sistema. Assim, com a atuação do amortecimento, tem-se que a parte transiente da resposta desaparece ficando apenas a resposta permanente.

Mediante isto, define-se o trabalho realizado por esta força externa como:

$$F_{wp} = \int_H^L A_0 \cos(\Omega t) w dx \quad (2.29)$$

em que  $\cos$  representa a função cosseno,  $A_0$  é a amplitude do carregamento harmônico e  $\Omega$  é a frequência da excitação externa.

## 2.6. Função Lagrangeana para a Coluna

Com base nas Eqs. (2.21), (2.22) e (2.25), escreve-se a função de Lagrange ou Lagrangeano para a coluna apresentada, a saber:

$$\begin{aligned} L_g = T - U_{pt} - U_{td} = & \int_0^L \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} EI \int_0^L w''^2 (1 + w'^2) dx + \\ & + P \int_0^L \left( \frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{8} w'^4 \right) dx - \int_0^H \left( - \frac{(E_{ti} - E_{tf})^2 |w|^3}{3 P_u} + \frac{E_{ti} w^2}{2} \right) dx \end{aligned} \quad (2.30)$$

A partir desta função, Eq. (2.30), apresenta-se no capítulo seguinte a obtenção das frequências naturais e dos correspondentes modos de vibração. Também, formula-se a equação de movimento da coluna.

## **CAPÍTULO III**

### **MODELO DINÂMICO DA COLUNA SEMI-ENTERRADA**

## **CAPÍTULO III**

### **MODELO DINÂMICO DA COLUNA SEMI-ENTERRADA**

Conhecendo as equações apresentadas no capítulo dois, busca-se determinar as frequências naturais e os respectivos modos de vibração associados a estas e, em seguida, determinar a equação que descreve o movimento da coluna semi-enterrada.

Segundo Hurty & Rubinstein (1964) quando um sistema, após um distúrbio inicial, é deixado para vibrar por si próprio, a frequência com a qual ele oscila sem a presença de forças externas é conhecida como sua frequência natural e, a cada frequência natural está associado um modo de vibração ou modo natural. Tal modo é dado por uma configuração de deflexão do elemento estrutural no qual o movimento de cada ponto do elemento é harmônico, sendo que uma estrutura pode possuir diversos modos de vibração.

Como especificado, o objetivo do trabalho é obter as frequências naturais e, então, através da aplicação de métodos evolutivos de otimização, distanciá-las de modo a obter um projeto ótimo da coluna. Desta forma, aplica-se ao problema o método de Ritz (ou Rayleigh-Ritz), que consiste em substituir a função de deflexão da coluna,  $w(x,t)$  por uma função aproximada desenvolvida em séries (REZENDE, 2005). No decorrer deste capítulo será descrito cada passo necessário para a obtenção das frequências naturais, dos modos de vibração e da equação de movimento.

#### **3.1. Obtenção da Função de Deflexão Lateral**

Com o intuito de reduzir a complexidade do problema utiliza-se o método de Rayleigh-Ritz, dado que este se apresenta como uma boa ferramenta para realizar uma análise linear e não-linear do problema. A partir deste método, obtém-se a função de deflexão lateral da coluna e, então, os modos de vibração com as respectivas frequências naturais. Tal método geralmente é descrito em séries da seguinte maneira (REZENDE, 2005):

$$f = \sum_{j=1}^{n_t} a_j \Phi_j \quad (3.1)$$

sendo  $a_j$  as constantes multiplicadoras das funções  $\Phi_j$ , previamente estabelecidas;  $n_t$  corresponde ao número de termos da série necessários para descrever o campo de deslocamentos do elemento.

Diante do exposto, considere a seguinte expansão da Eq. (3.1) sugerida por Eisenberg (1980):

$$f(x) = a_1 \sin(k_j x) + a_2 \cos(k_j x) + a_3 x + a_4 \quad (3.2)$$

sendo  $k_j$  o parâmetro que define a  $j$ -ésima forma do modo de vibração da coluna em função da deflexão lateral. As constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$  são definidas a partir das condições de contorno as quais estão relacionadas ao tipo de apoio onde a coluna se encontra. A Eq. (3.2) foi adotada, pois representa a solução geral da equação de Euler que descreve o movimento de uma viga-coluna possuindo condições de contorno gerais (Eisenberg, 1980).

Quando é mencionada a forma do modo de vibração, deve-se entender que se trata de uma representação aproximada. Isto é, o correspondente modo de vibração da coluna é semelhante à forma do modo, não exatamente igual, pois o modo de vibração do elemento é descrito em função dos parâmetros do elemento, como rigidez, massa, momento de inércia, etc, portanto existe tal variação em relação à forma.

A Fig. 3.1 apresenta alguns dos diversos tipos de apoios que podem ser adotados para a coluna, sendo que cada tipo de apoio define as condições de contorno para o problema.

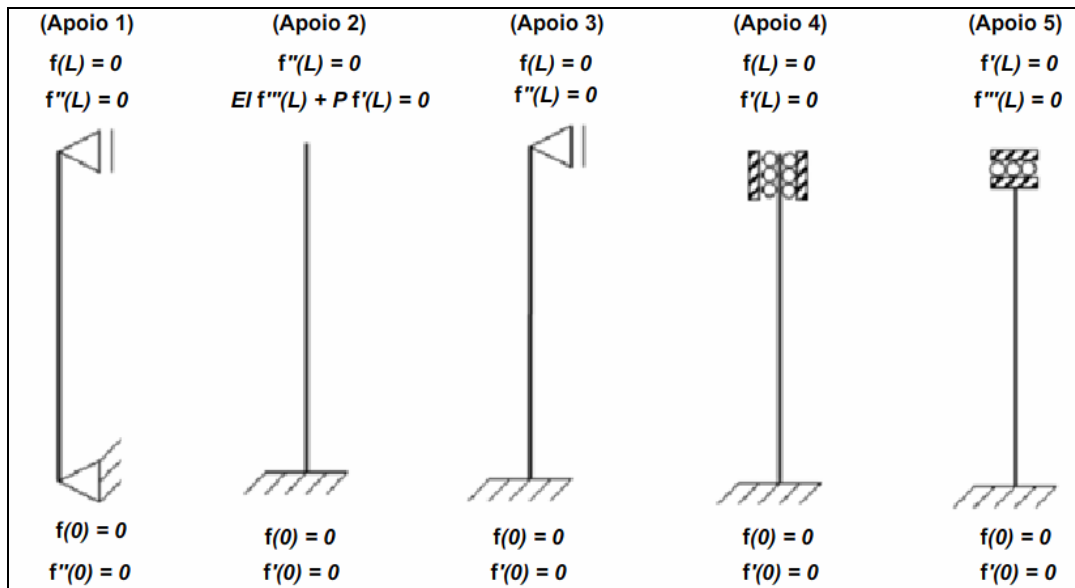


Figura 3.1 - Condições de contorno para diferentes tipos de apoio da coluna.

Considera-se a coluna com apoio do tipo 5, conforme apresentado na Fig. 3.1. Deve-se ressaltar que, qualquer um dos tipos de apoios listados na Fig. 3.1 ou que se encontram na literatura (HURTY & RUBINSTEIN, 1964; SHAKER, 1975), podem ser utilizados para a modelagem do problema. Um exemplo prático do tipo de apoio adotado é encontrado em estruturas como pontes, docas, plataformas, etc., sendo este um dos motivos para a sua escolha em relação aos demais.

Para cada tipo de apoio devem ser definidas as condições de contorno às quais o problema está sujeito, ou seja, a função que representa a deflexão lateral da coluna é descrita em termos destas condições de contorno. Então, para a coluna semi-enterrada e com o apoio tipo 5 as condições de contorno são:

- $f(x)|_{x=0} = 0$ , refere-se à coluna não sofrer deslocamentos transversais no ponto  $x=0$ ;
- $\frac{d}{dx}(f(x))|_{x=0} = f'(0) = 0$ , refere-se à coluna não sofrer rotação no ponto  $x=0$ ;
- $\frac{d}{dx}(f(x))|_{x=L} = f'(L) = 0$ , refere-se à coluna não sofrer rotação no ponto  $x=L$ ;
- $\frac{d^3}{dx^3}(f(x))|_{x=L} = f'''(L) = 0$ , refere-se à coluna não sofrer cisalhamento no ponto  $x=L$ .

Assim, aplicando cada uma das condições de contorno na Eq. (3.2), obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k_j & 0 & 1 & 0 \\ k_j \cos(k_j L) & -k_j \sin(k_j L) & 1 & 0 \\ -k_j^3 \cos(k_j L) & k_j^3 \sin(k_j L) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

A Eq. (3.3) representa um problema de autovalor que admite a solução trivial  $a_1=a_2=a_3=a_4=0$ , sendo que fisicamente tal solução representa a coluna em sua posição vertical inicial. Com o intuito de obter uma solução não trivial, ou seja, que caracterize a deflexão lateral da coluna de acordo com os parâmetros que a descrevem, torna-se necessário que o determinante da matriz dos coeficientes  $a_j$  seja igual à zero, isto é,

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k_j & 0 & 1 & 0 \\ k_j \cos(k_j L) & -k_j \sin(k_j L) & 1 & 0 \\ -k_j^3 \cos(k_j L) & k_j^3 \sin(k_j L) & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

Sendo o resultado da Eq. (3.4) igual a:

$$k_j^4 \sin(k_j L) = 0 \quad (3.5)$$

Considerando  $k_j \neq 0$ , a Eq. (3.5) é satisfeita para:

$$k_j = \frac{j\pi}{L}, \text{ com } j=1, 2, 3, \dots, \infty \quad (3.6)$$

em que cada valor associado a  $k_j$ , como dito, serve para determinar a forma do  $j$ -ésimo modo de vibração da coluna na função de deflexão lateral. Assim, para determinar o valor das constantes multiplicadoras ( $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$ ), toma-se  $j=1$  na Eq. (3.6) e, então, substitui o valor encontrado na Eq. (3.3), resultando em:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{\pi}{L} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\pi}{L} & 0 & 1 & 0 \\ \left(\frac{\pi}{L}\right)^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Da Eq. (3.7) vem:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 = 0; \\ a_2 &= -a_4; \end{aligned} \quad (3.8)$$

Portanto, substituindo na Eq. (3.2), obtém-se:

$$f_j(x) = a_4 - a_4 \cos(k_j x) \quad (3.9)$$

A Eq. (3.9) fornece as formas dos modos de vibração da coluna, sendo que  $k_j$  é dado pela Eq. (3.6). Para obter o valor de  $a_4$  normaliza-se a Eq. (3.9) de modo a tornar seu máximo valor unitário, ou seja:

$$\int_0^L (f(x))^2 dx = 1 \quad (3.10)$$

resultando em:

$$a_4 = \pm \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{L}} \quad (3.11)$$

A partir da Eq. (3.9), escreve-se a função de deflexão lateral da coluna  $w(x,t)$  que, neste trabalho, inclui somente os três primeiros modos de vibração. Obviamente, isto não impede que tal função seja reescrita incluindo outros modos de vibração. Assim, tem-se:

$$w(x,t) = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{L}} \left[ r_1(t) \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) \right) + r_2(t) \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \right) + r_3(t) \left( 1 - \cos\left(\frac{3\pi}{L} x\right) \right) \right] \quad (3.12)$$

sendo que  $r_1(t)=r_1$ ,  $r_2(t)=r_2$  e  $r_3(t)=r_3$  são funções dependente do tempo. Para obter a forma do primeiro modo de vibração da coluna, faz-se  $r_1(t)=1$  e  $r_2(t)=r_3(t)=0$ , e para os outros modos de vibração o procedimento é similar. Observa-se que a Eq. (3.12) é uma expansão da Eq. (3.1), a qual define o método de Rayleigh-Ritz, em que todos os  $r_j(t)$  equivalem ao  $a_j$  e os termos entre parênteses na Eq. (3.12) são os  $\Phi_j$ , para  $j=1, 2$  e  $3$ .

A seguir, dada a determinação da função que descreve a deflexão da coluna, obtêm-se as freqüências naturais e os correspondentes modos de vibração.

### 3.2. Freqüências Naturais e Modos de Vibração

Como mencionado anteriormente, o interesse geral do trabalho está nas freqüências naturais para cada modo de vibração da coluna, considerando apenas os três primeiros modos, conforme a função de deflexão representada pela Eq. (3.12).

Com isso, faz-se a substituição da Eq. (3.12) no Lagrangeano, Eq. (2.30), e resolvem-se as integrais presentes obtendo a Eq. (3.13). Na equação de Lagrange são desprezadas as forças não-conservativas em  $Q_k$ , no caso, o amortecimento e a força de excitação externa.

Esta simplificação é justificada pelo fato das freqüências naturais e os modos de vibração serem características exclusivas da estrutura, não dependendo das forças externas aplicadas, nem do amortecimento. Deve-se ressaltar que, nesta modelagem, foi considerado o amortecimento viscoso, porém, caso fosse adotado a existência de um amortecimento estrutural na coluna, o mesmo deveria estar presente no Lagrangeano (MEIROVITCH, 1986).

Segundo Eisenberg (1980), em sistemas como o considerado para a coluna, em que a deflexão lateral do elemento é escrita por uma função da forma dos modos de vibração e de funções em relação ao tempo, como as  $r_j(t)$ , tem-se que cada função do tempo representa as coordenadas generalizadas do sistema para as equações de Lagrange.

Dada a função de Lagrange na Eq. (3.13), aplica-se a Equação de Lagrange, Eq. (2.1), desconsiderando as forças não-conservativas. Com isso, obtêm-se um sistema de equações de movimento composto por três equações diferenciais ordinárias acopladas, as quais são apresentadas nas Eqs. (3.14a) até (3.14c).

$$\begin{aligned}
L_g = & \frac{m(3\dot{r}_1^2 + 4\dot{r}_1(\dot{r}_2 + \dot{r}_3) + 3\dot{r}_3^2 + 4\dot{r}_2\dot{r}_3 + 3\dot{r}_2^2)}{6} - \frac{E_{ii}r_3^2 \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{36\pi} - \frac{E_{ii}r_2r_3 \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} + \\
& - \frac{E_{ii}(2r_1r_3 + r_2^2) \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{24\pi} - \frac{E_{ii}(r_1(r_2 - 2r_3) - 2r_3(r_2 + r_3)) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \\
& - \frac{E_{ii}(r_1^2 + 2r_1(r_3 - 2r_2) - 4r_2^2 - 4r_2r_3) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{12\pi} + \frac{E_{ii}(2r_1^2 + r_1(2r_3 + r_2) - r_2r_3) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \\
& - \frac{E_{ii}H(3r_1^2 + 4r_1(r_3 + r_2) + 3r_2^2 + 4r_2r_3 + 3r_3^2) +}{6L} \\
& \pi^2 \left( \frac{4\pi^2 E I \left( 6L^3(r_1^2 + 16r_2^2 + 81r_3^2) + \pi^2 \left( r_1^4 - 12r_1^3r_3 + 20r_1^2(2r_2^2 + 9r_3^2) + \right. \right. \right.}{144L^7} + \left. \left. \left. + 216r_1r_2^2r_3 + 64r_2^4 + 936r_2^2r_3^2 + 729r_3^4 \right) \right) + \right. \\
& \left. - 3L^2P \left( 8L^3(r_1^2 + 4r_2^2 + 9r_3^2) + \pi^2 \left( r_1^4 - 4r_1^3r_3 + 4r_1^2(2r_2^2 + 9r_3^2) + 48r_1r_2^2r_3 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 16r_2^4 + 144r_2^2r_3^2 + 81r_3^4 \right) \right) \right) + \\
& + \left( \text{sign} \left( r_3 \cos\left(\frac{3\pi H}{L}\right) + r_2 \cos\left(\frac{2\pi H}{L}\right) + r_1 \cos\left(\frac{\pi H}{L}\right) - r_1 - r_2 - r_3 \right) \right) x \\
& \times \left( \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{ii})^2 r_3^3 \sin\left(\frac{9\pi H}{L}\right)}{486\pi P_u \sqrt{L}} + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{ii})^2 r_2r_3^2 \sin\left(\frac{8\pi H}{L}\right)}{144\pi P_u \sqrt{L}} + \right. \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{ii})^2 r_3(r_1r_3 + r_2^2) \sin\left(\frac{7\pi H}{L}\right)}{126\pi P_u \sqrt{L}} + \frac{2\sqrt{6}(E_{ii} - E_{ii})^2 r_1^3 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right) \cos^2\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{81\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{ii})^2 (6r_1r_3(r_2 - r_3) + r_2^3 - 6r_2r_3^2 - 6r_3^3) \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{324\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{ii})^2 (r_1^2r_3 + r_1(r_2^2 - 4r_2r_3 + r_3^2) - 4r_2r_3(r_2 + r_3)) \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{90\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{ii})^2 (r_1^2(r_2 - 4r_3) - 2r_1(r_2^2 + r_2r_3 + 2r_3^2) - r_2(2r_2^2 + 2r_2r_3 - r_3^2)) \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{72\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& - \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{ii})^2 (2r_1^2(2r_2 - 3r_3) + r_1(3r_2^2 - 4r_2r_3 - 8r_3^2) - r_3(6r_2^2 + 8r_2r_3 + 5r_3^2)) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{54\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& - \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{ii})^2 (2r_1^3 + 2r_1^2(3r_3 - 2r_2) - 2r_1(4r_2^2 + 3r_2r_3 - 2r_3^2) - r_2(5r_2^2 + 8r_2r_3 + 6r_3^2)) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{36\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{ii})^2 (44r_1^3 + 9r_1^2(4r_2 + 9r_3) + 18r_1(r_2^2 + 3r_3^2) - 9r_2r_3(3r_2 + 4r_3)) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{162\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& - \frac{\sqrt{6}(E_{ii} - E_{ii})^2 H(10r_1^3 + 3r_1^2(5r_2 + 6r_3) + 18r_1(r_2^2 + r_2r_3 + r_3^2) + 2(5r_2^3 + 9r_2^2r_3 + 9r_2r_3^2 + 5r_3^3))}{54\pi P_u \sqrt{L^3}} \Big)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
& m\ddot{r}_1 + \frac{2m\ddot{r}_2}{3} + \frac{2m\ddot{r}_3}{3} + \frac{E_{ti}r_3 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} - \frac{2E_{ti}r_3 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \frac{E_{ti}r_2 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \\
& + \frac{E_{ti}r_1 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} - \frac{E_{ti}r_2 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{E_{ti}r_3 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} - \frac{4E_{ti}r_1 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \\
& - \frac{E_{ti}r_2 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} - \frac{2E_{ti}r_3 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{\pi^6 E l r_1^3}{9L^7} - \frac{\pi^4 P r_1^3}{12L^5} - \frac{\pi^6 E l r_3 r_1^2}{L^7} + \\
& + \frac{\pi^4 P r_3 r_1^2}{4L^5} + \frac{2E_{ti}Hr_2}{3L} + \frac{2E_{ti}Hr_3}{3L} + \frac{6\pi^6 E l r_3 r_2^2}{L^7} - \frac{\pi^4 P r_3 r_2^2}{L^5} + \frac{E_{ti}Hr_1}{L} + \frac{\pi^4 E l r_1}{3L^4} + \\
& - \frac{\pi^2 P r_1}{3L^2} + \frac{20\pi^6 E l r_1 r_2^2}{9L^7} - \frac{2\pi^4 P r_1 r_2^2}{3L^5} + \frac{10\pi^6 E l r_1 r_3^2}{L^7} - \frac{3\pi^4 P r_1 r_3^2}{2L^5} + \\
& - \left( \text{sign}\left(r_3 \cos\left(\frac{3\pi H}{L}\right) + r_2 \cos\left(\frac{2\pi H}{L}\right) + r_1 \cos\left(\frac{\pi H}{L}\right) - r_1 - r_2 - r_3\right) \right) x \\
& \times \left( \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 r_3^2 \sin\left(\frac{7\pi H}{L}\right)}{126\pi P_u \sqrt{L}} + \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 r_3 (r_2 - r_3) \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{54\pi P_u \sqrt{L}} + \right. \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (2r_1 r_3 + r_2^2 - 4r_2 r_3 + r_3^2) \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{90\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (r_1 (r_2 - 4r_3) - r_2^2 - r_2 r_3 - 2r_3^2) \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{36\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& - \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (4r_1 (2r_2 - 3r_3) + 3r_2^2 - 4r_2 r_3 - 8r_3^2) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{54\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& - \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (3r_1^2 + 2r_1 (3r_3 - 2r_2) - 4r_2^2 - 3r_2 r_3 + 2r_3^2) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{18\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{2\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 r_1^2 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right) \cos^2\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{27\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (22r_1^2 + 3r_1 (4r_2 + 9r_3) + 3r_2^2 + 9r_3^2) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{162\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& \left. - \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 H (5r_1^2 + r_1 (5r_2 + 6r_3) + 3r_2^2 + 3r_2 r_3 + 3r_3^2)}{9\pi P_u \sqrt{L^3}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.14a}$$

$$\begin{aligned}
& m\ddot{r}_2 + \frac{2m\ddot{r}_1}{3} + \frac{2m\ddot{r}_3}{3} + \frac{20\pi^6 Elr_2 r_1^2}{9L^7} - \frac{2\pi^4 Pr_2 r_1^2}{3L^5} + \frac{12\pi^6 Elr_1 r_2 r_3}{L^7} + \\
& - \frac{2\pi^4 Pr_1 r_2 r_3}{L^5} + \frac{2E_{ti} Hr_1}{3L} + \frac{64\pi^6 Elr_2^3}{9L^7} - \frac{4\pi^4 Pr_2^3}{3L^5} + \frac{52\pi^6 Elr_2 r_3^2}{L^7} + \\
& - \frac{6\pi^4 Pr_2 r_3^2}{L^5} + \frac{E_{ti} Hr_2}{L} + \frac{16\pi^4 Elr_2}{3L^4} - \frac{4\pi^4 Pr_2}{3L^2} + \frac{2E_{ti} Hr_3}{3L} + \\
& + \frac{E_{ti} r_3 \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} + \frac{E_{ti} r_2 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} + \frac{E_{ti} r_1 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \\
& - \frac{2E_{ti} r_3 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{E_{ti}(r_1 + 2r_2 + r_3) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{E_{ti}(r_3 - r_1) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \\
& - \left( \text{sign}\left(r_3 \cos\left(\frac{3\pi H}{L}\right) + r_2 \cos\left(\frac{2\pi H}{L}\right) + r_1 \cos\left(\frac{\pi H}{L}\right) - r_1 - r_2 - r_3\right) \right) \times \\
& \left( \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 r_3^2 \sin\left(\frac{8\pi H}{L}\right)}{144\pi P_u \sqrt{L}} + \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 r_2 r_3 \sin\left(\frac{7\pi H}{L}\right)}{63\pi P_u \sqrt{L}} + \right. \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (2r_1 r_3 + r_2^2 - 2r_3^2) \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{108\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (r_1(r_2 - 2r_3) - 2r_3(2r_2 + r_3)) \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{45\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (r_1^2 - 2r_1(2r_2 + r_3) - 6r_2^2 - 4r_2 r_3 + r_3^2) \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{72\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& - \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (2r_1^2 + r_1(3r_2 - 2r_3) - 6r_2 r_3 - 4r_3^2) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{27\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (4r_1^2 + 2r_1(8r_2 + 3r_3) + 15r_2^2 + 16r_2 r_3 + 6r_3^2) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{36\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (2r_1^2 + 2r_1 r_2 - r_3(3r_2 + 2r_3)) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{9\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& \left. - \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 H(5r_1^2 + 6r_1(2r_2 + r_3) + 10r_2^2 + 12r_2 r_3 + 6r_3^2)}{18\pi P_u \sqrt{L^3}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.14b}$$

$$\begin{aligned}
& m\ddot{r}_3 + \frac{2m\ddot{r}_1}{3} + \frac{2m\ddot{r}_2}{3} - \frac{\pi^6 Elr_1^3}{3L^7} + \frac{\pi^4 Pr_1^3}{12L^5} + \frac{10\pi^6 Elr_3r_1^2}{L^7} - \frac{3\pi^4 Pr_3r_1^2}{2L^5} + \\
& + \frac{6\pi^6 Elr_1r_2^2}{L^7} - \frac{\pi^4 Pr_1r_2^2}{L^5} + \frac{2E_{ti}Hr_1}{3L} + \frac{52\pi^6 Elr_3r_2^2}{L^7} - \frac{6\pi^4 Pr_3r_2^2}{L^5} + \\
& + \frac{2E_{ti}Hr_2}{3L} + \frac{81\pi^6 Elr_3^3}{L^7} - \frac{27\pi^4 Pr_3^3}{4L^5} + \frac{E_{ti}Hr_3}{L} + \frac{27\pi^4 Elr_3}{L^4} - \frac{3\pi^2 Pr_3}{L^2} + \\
& - \frac{E_{ti}(2r_1 - r_2)\sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)\left(\frac{E_{ti}r_1}{6\pi} - \frac{E_{ti}r_2}{3\pi}\right) + \frac{E_{ti}r_1\sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} + \\
& - \frac{2E_{ti}(r_1 + r_2 + 2r_3)\sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \frac{E_{ti}r_2\sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} + \frac{E_{ti}r_3\sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{18\pi} + \\
& - \left( \text{sign}\left(r_3\cos\left(\frac{3\pi H}{L}\right) + r_2\cos\left(\frac{2\pi H}{L}\right) + r_1\cos\left(\frac{\pi H}{L}\right) - r_1 - r_2 - r_3\right) \right) x \\
& \times \left[ \begin{aligned}
& \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 r_3^2 \sin\left(\frac{9\pi H}{L}\right)}{162\pi P_u \sqrt{L}} + \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 r_2 r_3 \sin\left(\frac{8\pi H}{L}\right)}{72\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (2r_1 r_3 + r_2^2) \sin\left(\frac{7\pi H}{L}\right)}{126\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (r_1(r_2 - 2r_3) - 2r_2 r_3 - 3r_3^2) \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{54\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (r_1^2 + 2r_1(r_3 - 2r_2) - 4r_2(r_2 + 2r_3)) \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{90\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& - \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (2r_1^2 + r_1(r_2 + 4r_3) + r_2^2 - r_2 r_3) \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{36\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (6r_1^2 + 4r_1(r_2 + 4r_3) + 6r_2^2 + 16r_2 r_3 + 15r_3^2) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{54\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& - \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (3r_1^2 + r_1(4r_3 - 3r_2) - 4r_2^2 - 6r_2 r_3) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{18\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& + \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 (9r_1^2 + 12r_1 r_3 - r_2(3r_2 + 8r_3)) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{18\pi P_u \sqrt{L}} + \\
& - \frac{\sqrt{6}(E_{ti} - E_{tf})^2 H(3r_1^2 + 3r_1(r_2 + 2r_3) + 3r_2^2 + 6r_2 r_3 + 5r_3^2)}{9\pi P_u \sqrt{L^3}}
\end{aligned} \right] = 0
\end{aligned}
\tag{3.14c}$$

Para obter as freqüências naturais e os respectivos modos de vibração é preciso que as equações de movimento, Eqs. (3.14), sejam linearizadas. Assim, para realizar tal linearização, dado que  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  são as coordenadas do problema, desprezam-se os termos em que a potência de qualquer destas variáveis seja maior que um e/ou exista a multiplicação entre qualquer uma delas. Além disso, serão admitidas as soluções  $r_j(t) = \bar{r}_j e^{i\omega t}$ , sendo  $\bar{r}_j$  constantes que irão definir os modos de vibração e  $\omega$  a freqüência natural da coluna.

Desta forma, obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{aligned}
 & -m\omega^2 \bar{r}_1 - \frac{2m\omega^2 \bar{r}_2}{3} - \frac{2m\omega^2 \bar{r}_3}{3} + \frac{E_{ti} \bar{r}_3 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} + \frac{E_{ti} \bar{r}_2 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \\
 & - \frac{2E_{ti} \bar{r}_3 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \frac{E_{ti} \bar{r}_1 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} + \frac{E_{ti} \bar{r}_3 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} + \\
 & - \frac{E_{ti} \bar{r}_2 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} - \frac{4E_{ti} \bar{r}_1 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} - \frac{2E_{ti} \bar{r}_3 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \\
 & - \frac{E_{ti} \bar{r}_2 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{ti} H \bar{r}_3}{3L} + \frac{E_{ti} H \bar{r}_1}{L} + \frac{\pi^4 E I \bar{r}_1}{3L^4} - \frac{\pi^2 P \bar{r}_1}{3L^2} + \frac{2E_{ti} H \bar{r}_2}{3L} = 0
 \end{aligned} \tag{3.15a}$$

$$\begin{aligned}
 & -m\omega^2 \bar{r}_2 - \frac{2m\omega^2 \bar{r}_1}{3} - \frac{2m\omega^2 \bar{r}_3}{3} + \frac{E_{ti} \bar{r}_3 \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} + \frac{E_{ti} \bar{r}_2 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} + \\
 & + \frac{E_{ti} \bar{r}_1 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{2E_{ti} \bar{r}_3 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{2E_{ti} \bar{r}_2 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \\
 & - \frac{E_{ti} \bar{r}_1 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} - \frac{E_{ti} \bar{r}_3 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} - \frac{E_{ti} \bar{r}_1 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{E_{ti} \bar{r}_3 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \\
 & + \frac{E_{ti} H \bar{r}_2}{L} + \frac{16\pi^4 E I \bar{r}_2}{3L^4} - \frac{4\pi^4 P \bar{r}_2}{3L^2} + \frac{2E_{ti} H \bar{r}_1}{3L} + \frac{2E_{ti} H \bar{r}_3}{3L} = 0
 \end{aligned} \tag{3.15b}$$

$$\begin{aligned}
& -m\omega^2\bar{r}_3 - \frac{2m\omega^2\bar{r}_1}{3} - \frac{2m\omega^2\bar{r}_2}{3} + \frac{E_{\bar{t}}\bar{r}_3 \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{18\pi} + \frac{E_{\bar{t}}\bar{r}_2 \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} + \\
& + \frac{E_{\bar{t}}\bar{r}_1 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} - \frac{2E_{\bar{t}}\bar{r}_2 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{2E_{\bar{t}}\bar{r}_1 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \\
& - \frac{4E_{\bar{t}}\bar{r}_3 \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{E_{\bar{t}}\bar{r}_2 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{E_{\bar{t}}\bar{r}_1 \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} + \frac{E_{\bar{t}}\bar{r}_2 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \\
& - \frac{2E_{\bar{t}}\bar{r}_1 \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{\bar{t}}H\bar{r}_2}{3L} + \frac{2E_{\bar{t}}H\bar{r}_1}{3L} + \frac{E_{\bar{t}}H\bar{r}_3}{L} + \frac{27\pi^4 EI\bar{r}_3}{L^4} - \frac{3\pi^2 P\bar{r}_3}{L^2} = 0
\end{aligned} \tag{3.15c}$$

As equações algébricas, Eqs. (3.15), são reescritas na forma matricial da seguinte maneira:

$$[K - \omega^2 M] \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

sendo  $[M]$  a matriz de massa e  $[K]$  a matriz de rigidez dadas por:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & \frac{2m}{3} & \frac{2m}{3} \\ \frac{2m}{3} & m & \frac{2m}{3} \\ \frac{2m}{3} & \frac{2m}{3} & m \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

em que,

$$k_{11} = \frac{E_{\bar{t}} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} - \frac{4E_{\bar{t}} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{3E_{\bar{t}}HL^3 + \pi^2(\pi^2 EI - L^2 P)}{3L^4} \tag{3.18a}$$

$$k_{12} = \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} - \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{ti}H}{3L} \quad (3.18b)$$

$$k_{13} = \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} - \frac{2E_{ti} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} - \frac{2E_{ti} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{ti}H}{3L} \quad (3.18c)$$

$$k_{21} = \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} - \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{ti}H}{3L} \quad (3.18d)$$

$$k_{22} = \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} - \frac{2E_{ti} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{ti}HL^3 + 4\pi^2(4\pi^2EI + L^2P)}{3L^4} \quad (3.18e)$$

$$k_{23} = \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} - \frac{2E_{ti} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{ti}H}{3L} \quad (3.19f)$$

$$k_{31} = \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} - \frac{2E_{ti} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} - \frac{2E_{ti} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{ti}H}{3L} \quad (3.18g)$$

$$k_{32} = \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} - \frac{2E_{ti} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{ti}H}{3L} \quad (3.18h)$$

$$k_{33} = \frac{E_{ti} \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{18\pi} - \frac{4E_{ti} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \frac{E_{ti}HL^3 + 3\pi^2(9\pi^2EI - L^2P)}{L^4} \quad (3.18i)$$

Observe que as matrizes  $[K]$  e  $[M]$  são simétricas, o que será útil para os cálculos adiantes. Para obter as frequências naturais e os respectivos modos de vibração da coluna, deve-se considerar que o determinante da matriz que pré-multiplica o vetor  $\{\bar{r}_j\}$  na Eq.

(3.16) seja nulo. Então, através deste procedimento, é possível obter as soluções não-triviais da Eq. (3.16). Assim,

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (3.19)$$

Note, na Eq. (3.19), que se trata de um problema de autovalor em que  $\omega^2$  representa os autovalores, isto é, as frequências naturais da coluna e o vetor  $\{\bar{r}_j\}$  representa os autovetores para cada autovalor, ou seja, os parâmetros para as autofunções que definirão os modos de vibração.

A resolução da Eq. (3.19) resulta na equação de frequência (ou equação característica) do problema. Para efeito de simplificação dos cálculos, reescreve-se  $\omega^2 = \lambda$ , resultando em:

$$\begin{aligned} & 7m^3 \lambda^3 - 3m^2 \lambda^2 (5k_{11} + 5k_{22} + 5k_{33} - 4k_{12} - 4(k_{13} + k_{23})) + \\ & + 9m \lambda \left( k_{11}(3k_{22} + 3k_{33} - 4k_{23}) + k_{22}(3k_{33} - 4k_{13}) - 4k_{33}k_{12} + \right. \\ & \left. - 3k_{12}^2 + 4k_{12}(k_{13} + k_{23}) - 3k_{13}^2 + 4k_{13}k_{23} - 3k_{23}^2 \right) + \\ & - 27(k_{11}(k_{22}k_{33} - k_{23}^2) - k_{22}k_{13}^2 - k_{33}k_{12}^2 + 2k_{12}k_{13}k_{23}) = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Após algumas operações algébricas, reescreve-se a equação característica, Eq. (3.20), de modo a obter uma melhor representação da mesma, isto é:

$$\lambda^3 + \mu_1 \lambda^2 + \mu_2 \lambda + \mu_3 = 0 \quad (3.21)$$

em que:

$$\mu_1 = -\frac{3(5k_{11} + 5k_{22} + 5k_{33} - 4k_{12} - 4(k_{13} + k_{23}))}{7m} \quad (3.21a)$$

$$\mu_2 = -\frac{9 \left( k_{11}(3k_{22} + 3k_{33} - 4k_{23}) + k_{22}(3k_{33} - 4k_{13}) - 4k_{33}k_{12} + \right.}{7m^2} \left. - 3k_{12}^2 + 4k_{12}(k_{13} + k_{23}) - 3k_{13}^2 + 4k_{13}k_{23} - 3k_{23}^2 \right) \quad (3.21b)$$

$$\mu_3 = -\frac{27(k_{11}(k_{22}k_{33} - k_{23}^2) - k_{22}k_{13}^2 - k_{33}k_{12}^2 + 2k_{12}k_{13}k_{23})}{7m^3} \quad (3.21c)$$

Resolvendo a Eq. (3.21), que é um polinômio de terceiro grau em  $\lambda$ , obtêm-se suas raízes, a saber:

$$\lambda_1 = -\frac{2\sqrt{(\mu_1^2 - 3\mu_2)} \cos\left(\frac{1}{3} \cos^{-1}\left(\frac{2\mu_1^3 - 9\mu_1\mu_2 + 27\mu_3}{\sqrt{(2(\mu_1^2 - 3\mu_2))^3}}\right)\right)}{3} - \frac{\mu_1}{3} \quad (3.22a)$$

$$\lambda_2 = -\frac{2\sqrt{(\mu_1^2 - 3\mu_2)} \sin\left(-\frac{1}{3} \sin^{-1}\left(\frac{2\mu_1^3 - 9\mu_1\mu_2 + 27\mu_3}{\sqrt{(2(\mu_1^2 - 3\mu_2))^3}}\right)\right)}{3} - \frac{\mu_1}{3} \quad (3.22b)$$

$$\lambda_3 = -\frac{2\sqrt{(\mu_1^2 - 3\mu_2)} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \sin^{-1}\left(\frac{2\mu_1^3 - 9\mu_1\mu_2 + 27\mu_3}{\sqrt{(2(\mu_1^2 - 3\mu_2))^3}}\right)\right)}{3} - \frac{\mu_1}{3} \quad (3.22c)$$

Finalmente para obter as freqüências naturais da coluna, faz-se:

$$\omega_j = \sqrt{\lambda_j} \quad ; (j=1, 2 \text{ e } 3) \quad (3.23)$$

sendo o menor valor de  $\omega_j$  correspondente a primeira freqüência natural e, assim, sucessivamente. Para obter os autovetores substitui-se a respectiva  $\omega_j$  da Eq. (3.23) na Eq. (3.16) e adota-se um valor arbitrário para qualquer um dos  $\bar{r}_i$ , por exemplo,  $\bar{r}_1 = 1$ , do vetor  $\{\bar{r}_j\}$ , visando obter o valor dos outros  $\{\bar{r}_j\}$ . De modo geral, faz-se:

$$[K - \omega_j^2 M] \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; (j=1, 2 \text{ e } 3) \quad (3.24)$$

Os valores de  $\{\bar{r}_j\}_j$  obtidos utilizando a Eq. (3.24) para cada freqüência natural  $\omega_j$ , são substituídos na solução admitida, isto é,  $r_j(t) = \bar{r}_j e^{i\omega t}$ . A expressão resultante é substituída na função de deflexão lateral  $w(x,t=0)$ , Eq. (3.12), de onde, finalmente, calcula-se as

autofunções  $w_j(x)$  que, para cada frequência  $\omega_j$ , define o respectivo modo de vibração da coluna, a saber:

$$w_j(x, t)|_{t=0} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{L}} \left[ \bar{r}_1 \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) \right) + \bar{r}_2 \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \right) + \bar{r}_3 \left( 1 - \cos\left(\frac{3\pi}{L} x\right) \right) \right] \quad (3.25)$$

Com o intuito de tornar o comprimento da coluna unitário, toma-se o parâmetro adimensional  $\xi$ , tal que,  $\xi=x/L$ . Também, normalizam-se as autofunções, Eq. (3.25), para que a amplitude máxima de cada modo seja sempre unitária, isto é:

$$\{\bar{r}_i^{norm}\}_j = \frac{\{\bar{r}_i\}_j}{\sqrt{\sum \{\bar{r}_i\}_j^2}}; (i=1, 2, 3, \text{ para } j=1, 2 \text{ e } 3) \quad (3.26)$$

em que  $\bar{r}_i^{norm}$  representa cada elemento  $\bar{r}_i$  normalizado do vetor  $\{\bar{r}_j\}$ . Assim, resultando em:

$$w_j(\xi, t)|_{t=0} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{L}} \left[ \bar{r}_1^{norm} (1 - \cos(\pi\xi)) + \bar{r}_2^{norm} (1 - \cos(2\pi\xi)) + \bar{r}_3^{norm} (1 - \cos(3\pi\xi)) \right] \quad (3.27)$$

Em relação à estabilidade do problema, tem-se que a coluna analisada possui diversas cargas críticas, as quais estão associadas com os autovalores obtidos, sendo que a cada carga crítica está relacionado um modo crítico da coluna ou modo de flambagem dado pela respectiva autofunção. A carga crítica representa o valor para o qual a estrutura, a partir dele, perde sua estabilidade e começa a flambar.

Na seção seguinte é apresentada a equação de movimento completa para a coluna.

### 3.3. Equação de Movimento da Coluna

Na seção anterior obteve-se parte da equação de movimento para a coluna representada pelas Eqs. (3.14). Nesta seção é feito o desenvolvimento das outras parcelas da equação de Lagrange, Eq. (2.4), visando obter a equação de movimento completa para a coluna abordada neste trabalho.

Em relação à parcela de amortecimento, substituindo a função de deflexão lateral, Eq. (3.12) na Eq. (2.28) e resolvendo as integrais presentes, obtém-se:

$$\begin{aligned}
F_d = & \frac{(\beta_e - \beta_d)\dot{r}_3 \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{36\pi} + \frac{(\beta_e - \beta_d)\dot{r}_2 \dot{r}_3 \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} + \\
& + \frac{(\beta_e - \beta_d)\sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)(2\dot{r}_3\dot{r}_1 + \dot{r}_2^2)}{24\pi} + \\
& + \frac{(\beta_d - \beta_e)\sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)(\dot{r}_1(2\dot{r}_3 - \dot{r}_2) + 2\dot{r}_3(\dot{r}_3 + \dot{r}_2))}{9\pi} + \\
& + \frac{(\beta_e - \beta_d)\sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)(\dot{r}_1^2 + 2\dot{r}_1(\dot{r}_3 - 2\dot{r}_2) - 4\dot{r}_2(\dot{r}_3 + \dot{r}_2))}{12\pi} + \\
& + \frac{(\beta_d - \beta_e)\sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)(2\dot{r}_1^2 + \dot{r}_1(2\dot{r}_3 + \dot{r}_2) - \dot{r}_2\dot{r}_3)}{3\pi} + \\
& + \frac{(3\dot{r}_1^2 + 4\dot{r}_1(\dot{r}_3 + \dot{r}_2) + 3\dot{r}_3^2 + 4\dot{r}_2\dot{r}_3 + 3\dot{r}_2^2)(H(\beta_e - \beta_d) + L\beta_d)}{6L}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Aplicando a Eq. (3.28) na Equação de Lagrange, Eq. (2.4), resulta em:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_d}{\partial \dot{r}_1} = & \frac{(\beta_e - \beta_d)\dot{r}_3 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} + \frac{(\beta_d - \beta_e)\sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)(2\dot{r}_3 - \dot{r}_2)}{9\pi} + \\
& + \frac{(\beta_e - \beta_d)\sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)(\dot{r}_1 + \dot{r}_3 - 2\dot{r}_2)}{6\pi} + \frac{(\beta_d - \beta_e)\sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)(4\dot{r}_1 + 2\dot{r}_3 + \dot{r}_2)}{3\pi} + \\
& + \frac{(3\dot{r}_1 + 2(\dot{r}_3 + \dot{r}_2))(H(\beta_e - \beta_d) + L\beta_d)}{3L}
\end{aligned} \tag{3.29a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_d}{\partial \dot{r}_2} = & \frac{(\beta_e - \beta_d)\dot{r}_3 \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} + \frac{(\beta_e - \beta_d)\dot{r}_2 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} + \\
& + \frac{(\beta_e - \beta_d)\sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)(\dot{r}_1 + 2\dot{r}_3)}{9\pi} + \frac{(\beta_d - \beta_e)\sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)(\dot{r}_1 + \dot{r}_3 + 2\dot{r}_2)}{3\pi} + \\
& + \frac{(\beta_d - \beta_e)\sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)(\dot{r}_1 - \dot{r}_3)}{3\pi} + \frac{(2\dot{r}_1 + 3\dot{r}_2 + 2\dot{r}_3)(H(\beta_e - \beta_d) + L\beta_d)}{3L}
\end{aligned} \tag{3.29b}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_d}{\partial \dot{r}_3} = & \frac{(\beta_e - \beta_d)\dot{r}_3 \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{18\pi} + \frac{(\beta_e - \beta_d)\dot{r}_2 \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} + \\
& + \frac{(\beta_e - \beta_d)\dot{r}_1 \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} + \frac{2(\beta_d - \beta_e)\sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)(\dot{r}_1 + 2\dot{r}_3 + \dot{r}_2)}{9\pi} + \\
& + \frac{(\beta_e - \beta_d)\sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)(\dot{r}_1 - 2\dot{r}_2)}{6\pi} + \frac{(\beta_d - \beta_e)\sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)(2\dot{r}_1 - \dot{r}_2)}{3\pi} + \\
& + \frac{(2\dot{r}_1 + 2\dot{r}_2 + 3\dot{r}_3)(H(\beta_e - \beta_d) + L\beta_d)}{3L}
\end{aligned} \tag{3.29c}$$

A contribuição da força de excitação externa atuando na coluna, Eqs. (2.29), é obtida substituindo a função de deflexão lateral, Eq. (3.12), nesta e resolvendo as integrais presentes, resultando em:

$$\begin{aligned}
F_{wp} = & \frac{A_0 \sqrt{6L} \cos(\Omega t) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right) r_3}{9\pi} + \frac{A_0 \sqrt{6L} \cos(\Omega t) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right) r_2}{6\pi} + \\
& \frac{A_0 \sqrt{6L} \cos(\Omega t) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right) r_1}{3\pi} + \frac{A_0 \sqrt{6}(L-H)(r_1 + r_2 + r_3) \cos(\Omega t)}{3\sqrt{L}}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Finalmente, substituindo a Eq. (3.30) na Equação de Lagrange, Eq. (2.4), têm-se:

$$\frac{\partial F_{wp}}{\partial r_1} = \frac{A_0 \sqrt{6L} \cos(\Omega t) \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{A_0 \sqrt{6}(L-H) \cos(\Omega t)}{3\sqrt{L}} \tag{3.31a}$$

$$\frac{\partial F_{wp}}{\partial r_2} = \frac{A_0 \sqrt{6L} \cos(\Omega t) \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} + \frac{A_0 \sqrt{6}(L-H) \cos(\Omega t)}{3\sqrt{L}} \tag{3.31b}$$

$$\frac{\partial F_{wp}}{\partial r_3} = \frac{A_0 \sqrt{6L} \cos(\Omega t) \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \frac{A_0 \sqrt{6}(L-H) \cos(\Omega t)}{3\sqrt{L}} \tag{3.31c}$$

Para escrever a equação geral do movimento, ou equação de Euler-Lagrange, para a coluna semi-enterrada, considera-se a soma da Eqs. (3.14) com Eqs. (3.29) igualando-as a Eqs. (3.31). Com isso, chega-se a um sistema composto por três equações diferenciais ordinárias acopladas não-lineares.

As equações de movimento podem ser resolvidas de maneira numérica ou utilizando algum método de perturbação, dado que até o momento tais equações não possuem solução analítica exata.

Para os casos em que seja necessária a solução destas equações, pode-se aplicar o método de Runge-Kutta de quarta ordem, pois fornece bons resultados numéricos ao resolver este tipo de problema, além de ser de fácil codificação (QUEIROZ & SANTEE, 2006).

Desta forma, torna-se necessário reescrever o conjunto de equações em um sistema de equações de primeira ordem, obtendo ao todo seis equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. A partir daí, aplica-se o método sugerido e obtém-se a solução desejada.

## **CAPÍTULO IV**

### **PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO – CONCEITOS IMPORTANTES**

## CAPÍTULO IV

### PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO – CONCEITOS IMPORTANTES

A idéia fundamental da otimização é melhorar um processo sem ter que testar todas as possibilidades. Seja uma função de  $n$  variáveis que representa o problema, o objetivo é determinar quais os parâmetros ou variáveis de projeto tornam tal processo ótimo respeitando as restrições impostas. Portanto, esta metodologia apresenta vantagens como diminuir o tempo destinado ao projeto e permitir o tratamento de uma grande quantidade de variáveis e restrições.

Os métodos de otimização procuram dentro de um espaço de busca, que é limitado pelas restrições, qual valor torna a função objetivo ótima. Nem sempre é garantido encontrar o melhor valor da função, visto que isto depende, entre outras coisas, da função tratada. Também, o método escolhido para realizar a tarefa de otimização traz forte influência sob esta característica.

No decorrer deste capítulo será feita uma revisão sobre otimização, discutindo a formulação geral do problema, a metodologia adotada para resolver problemas multi-objetivos e o tratamento de problemas restritos. Dois métodos estocásticos são estudados, baseados em população, a saber: Algoritmo Genético e a Evolução Diferencial.

#### 4.1. Formulação Geral do Problema de Otimização

Antes de apresentar a forma geral de um problema de otimização, define-se os diversos conceitos relacionados à otimização (DEB, 1995). Em outras palavras:

- Variáveis de projeto ou de decisão: São os parâmetros do problema que podem ser alterados de forma a melhorar o sistema durante o processo de otimização. Tais variáveis podem ser discretas ou contínuas;

- Função objetivo: Esta função quantifica o que se procura otimizar e depende das variáveis de projeto escolhidas, devendo ser usada como uma medida de eficiência durante a tarefa de otimização. A escolha de tal função deve ser feita com total empenho e cuidado, podendo tal ser unidimensional (definida apenas para uma variável de projeto) ou multidimensional (para mais de uma variável de projeto). Também é classificada em simples (quando apresenta apenas um objetivo) ou multi-objetivo (quando se têm mais de um objetivo).
- Espaço de busca: Região em que se encontram as possíveis soluções do problema;
- Restrições: São as limitações impostas ao problema (igualdades ou desigualdades) e que delimitam o espaço de busca;
- Restrições laterais: Delimitam as variáveis de projeto e definem, junto com as restrições, o espaço de busca;
- Domínio de otimização: Dividido em: domínio viável, que é a parte do domínio em que as restrições são respeitadas, e domínio inviável, que é a parte do domínio em que alguma restrição não é respeitada;
- Solução ótima: Conjunto formado pelo ponto ótimo (vetor com as variáveis de projeto que caracterizam a melhor solução, ou solução ótima) e pelo correspondente valor da função objetivo.

Sejam as funções:  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $g: R^n \rightarrow R$ ,  $h: R^n \rightarrow R$ . O problema geral de otimização é descrito como segue:

$$\text{Minimizar } f(X), \text{ com } X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \text{ e } X \in R^n \quad (4.1)$$

sujeito a:

$$\begin{cases} g_i(X) \leq 0, & i = 1, 2, \dots, I \\ h_j(X) = 0, & j = 1, 2, \dots, J \\ x_k^{\inf} \leq x_k \leq x_k^{\sup}, & k = 1, 2, \dots, K \end{cases} \quad (4.2)$$

sendo  $f(X)$  a função objetivo;  $X$  é o vetor de variáveis de projeto;  $R^n$  define o espaço de busca;  $g_i(X)$  são as restrições de desigualdade;  $h_j(X)$  são as restrições de igualdade;  $x_k^{\inf}$  e  $x_k^{\sup}$  representam, respectivamente, o limite lateral inferior e superior para cada uma das variáveis de projeto.

Para transformar o problema de minimização em maximização multiplica-se  $f(X)$  por -1, pois a solução para um problema de minimização é a mesma para um problema de maximização, apenas com o sinal trocado para o valor da função objetivo (IZMAILOV & SOLODOV, 2005).

As funções (objetivo, de restrições) que fazem parte do problema de otimização podem ser lineares ou não-lineares, convexas, contínuas no intervalo definido, descontínuas em tal intervalo, apresentar ruídos, serem diferenciáveis, não-diferenciáveis, implícitas, explícitas, unimodais, multimodais, etc.

Na Fig. 4.1 é apresentado um exemplo de problema de otimização bidimensional e restrito, isto é, composto de duas variáveis de projeto ( $x_1$  e  $x_2$ ) e quatro restrições de desigualdade ( $g_1, g_2, g_3, g_4$ ).

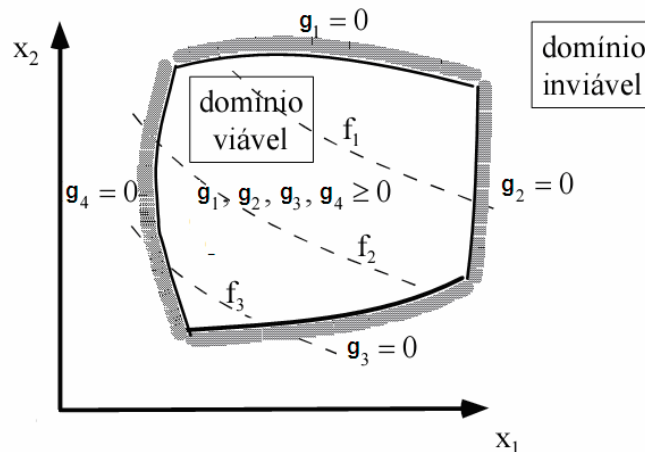


Figura 4.1 - Problema de otimização bidimensional e restrito.

Na grande maioria dos problemas não é possível determinar com exatidão se o mínimo encontrado é global. Apenas quando se trabalha com funções convexas pode-se ter uma garantia de tal mínimo. Para exemplificar com maior clareza a diferença entre os mínimos de uma função, considere a Fig. 4.2. Nesta figura, o ponto marcado como “mínimo global” é o ponto em que a função objetivo assume seu menor valor dentro do espaço de busca. Geralmente existe uma grande dificuldade em encontrar tal ponto devido à complexidade envolvida na tarefa de otimização.

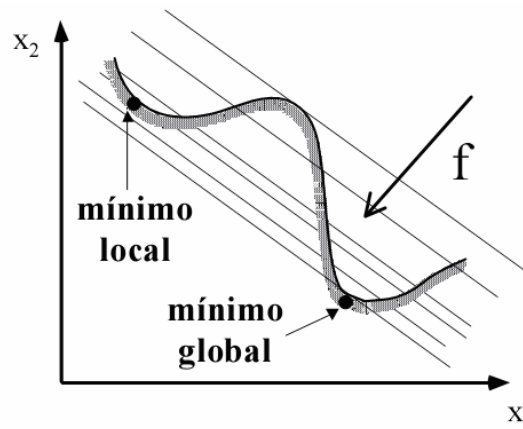


Figura 4.2 - Exemplo de mínimo local e global.

Quando o ponto de mínimo faz com que a restrição se anule, tem-se restrições ativas no final do processo de otimização. Caso contrário, tem-se que tais restrições são inativas e poderão ser eliminadas da tarefa de otimização sem interferir na solução final. Entretanto, no início do processo é desconhecida a solução final do problema, logo não é tão óbvio assimilar quais restrições, realmente, irão ou não interferir no problema.

Dado a complexidade existente em muitos problemas, vários deles apresentam mais de um objetivo a ser otimizado simultaneamente, sendo que, na maioria das vezes, estes objetivos são conflitantes entre si. Ou seja, a melhora de um ocasiona a piora em outro, gerando uma *otimização de compromisso* ou *ótimo de Pareto* (KOSKI, 1981; HALEJA & LIN, 1992), representada por um conjunto de soluções não inferiores, isto é, soluções para as quais não existem maneiras de melhorar um dos objetivos sem piorar pelo menos algum outro.

A formulação de uma função multi-objetivo deve ser feita com cuidado de modo a encontrar as variáveis de projeto que satisfaçam as restrições e otimize um vetor de funções objetivo, tal como:

$$\text{Minimizar } f(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_j(X)] \quad (4.3)$$

Dentre as técnicas existentes para lidar com problemas multi-objetivos, aborda-se neste trabalho o Método da Ponderação dos Objetivos (OLIVEIRA, 2005). Neste método, os objetivos são ponderados através de pesos para obter uma função objetivo escalar.

Seria muito interessante que cada peso indicasse a importância do objetivo que o acompanha, porém esta não é uma tarefa elementar. Também, fazem-se necessário normalizar cada componente da função objetivo de modo a se ter as variáveis dentro da mesma ordem de grandeza. Portanto, a função objetivo escalar é descrita como:

$$f(X) = \sum_{j=1}^J p_j \frac{f_j(X)}{f_j^0} \quad (4.4)$$

sendo que a soma de todos os pesos ( $p_j$ ), fatores de ponderação, deve ser igual a 1. A solução ideal  $f_j^0$  é obtida otimizando cada função objetivo  $f_j(X)$  separadamente e de acordo com as restrições do problema original, isto é, Eq. (4.2).

#### 4.1.1. Classificação dos métodos de otimização

Existem diversos métodos de otimização, sendo a grande maioria organizada em dois grandes grupos: métodos determinísticos e métodos estocásticos baseados em processos naturais. A Fig. 4.3 exemplifica com clareza boa parte destes métodos, apontando o grupo a que cada pertence.

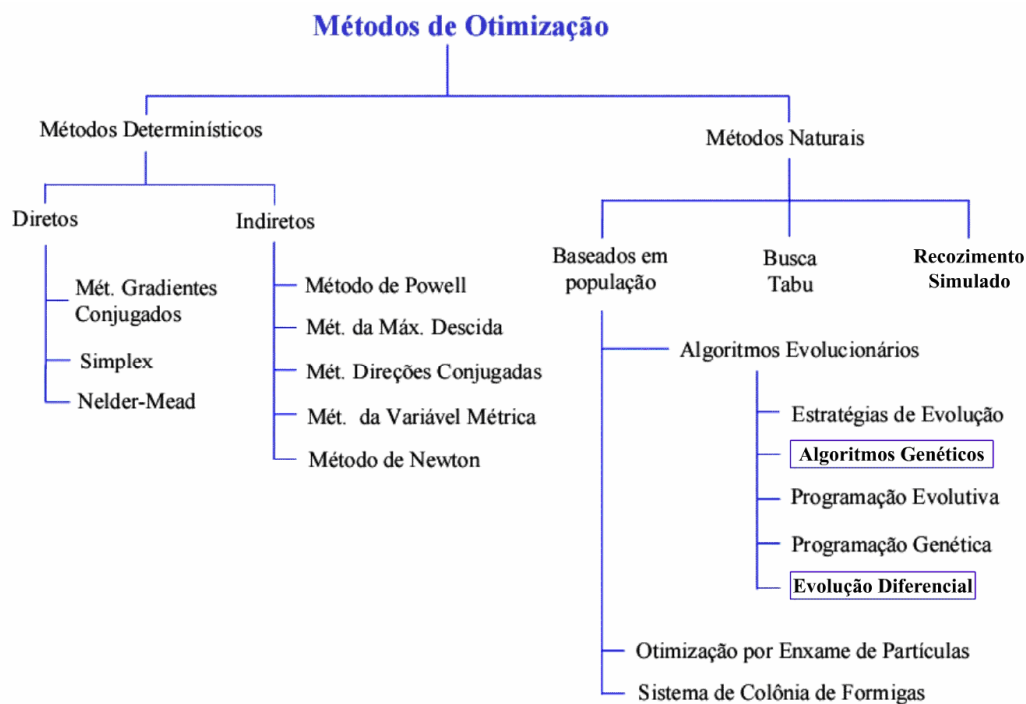


Figura 4.3 - Classificação dos principais métodos de otimização (OLIVEIRA, 2006).

Uma característica dos métodos de otimização é que alguns métodos obtêm melhores resultados quando aplicados a um problema do que outros métodos, tornando necessário testar diferentes métodos para resolver distintos problemas.

Os métodos determinísticos apresentados dependem de características de função objetivo para obter bons resultados, como a função ser contínua, convexa e com um único ponto de mínimo ou máximo (unimodal) (FOX, 1971; VANDERPLAATS, 1999). Dentre os métodos determinísticos existem dois subgrupos principais vide Fig. 4.3, que são:

- a) Métodos Diretos: Utilizam somente os valores da função objetivo e das restrições com o intuito de conduzir o processo de otimização. Porém são métodos lentos, dado que fazem muitas avaliações da função objetivo;
- b) Métodos Indiretos: Tais métodos utilizam informações da primeira e/ou segunda derivada da função objetivo e/ou restrições com o intuito de conduzir o processo de otimização. Assim, o processo tende a convergir mais rapidamente, porém depende das derivadas que nem sempre são fáceis de serem obtidas.

Os métodos estocásticos (ou naturais) baseiam-se em regras de probabilidade para obter a melhor solução de maneira “aleatória orientada”, utilizando apenas informações da função a ser otimizada. Assim, não dependem das características citadas pelos métodos determinísticos, então possuem, em linhas gerais, uma gama maior de problemas que podem solucionar (HAUPT & HAUPT, 1998; DEB, 2001; SARAMAGO & FARIA, 2001). Porém, tais métodos necessitam de várias avaliações da função objetivo, aumentando o custo computacional.

Segundo a Fig. 4.3, dentro dos métodos naturais, existem três subgrupos, a saber:

- a) Métodos Baseados em População: Como o próprio nome indica, tais métodos baseiam-se em uma população de indivíduos, sendo que cada indivíduo representa um ponto de busca no espaço das soluções viáveis. Assim, após a definição das variáveis de projeto e da função objetivo, faz-se uma codificação de tais variáveis e, então, realiza-se uma seqüência repetitiva de passos que consistem em avaliar, selecionar, recombinar e modificar os indivíduos, gerando, novas populações;
- b) Busca Tabu: É uma metaheurística de melhoramento local que utiliza uma lista de movimentos proibidos para avançar em direção ao ótimo. Assim, a Busca Tabu baseia-se em uma função de avaliação (objetivo) que escolhe, a cada iteração, o movimento com o maior valor da função na vizinhança e que respeite as restrições (restrições tabu) da solução corrente. A busca é restringida por uma estratégia de proibição cuja função é controlar e atualizar uma lista (lista tabu), a qual tem o objetivo de evitar que seqüências de soluções sejam repetidas até um número pré-determinado de iterações. Com isto, induz-se a exploração de novas regiões no espaço de busca;

- c) Recozimento Simulado: Faz uma analogia com o processo de recozimento (*annealing*) da metalurgia, ou seja, o metal é aquecido a altas temperaturas com o intuito de causar um choque violento em seus átomos. Se o metal for resfriado de forma brusca, tem-se que sua microestrutura tenderá a um estado aleatoriamente instável. Porém, se o metal for resfriado de forma suficientemente lenta, o sistema procurará um ponto de equilíbrio caracterizado por uma microestrutura ordenada e estável. O processo computacional começa gerando um conjunto de números aleatórios para as variáveis de projeto, os quais dependem dos valores das temperaturas. A seguir, verificam-se os respectivos valores da função objetivo (nível de energia), sendo que os melhores valores definem o centro das iterações para a próxima temperatura. Após este passo, reduz-se a temperatura e repete-se o processo até que algum critério de parada ou de convergência seja alcançado.

Grande parte dos sistemas atuais é complexa, representados por funções altamente não-lineares, dificilmente diferenciáveis, apresentando descontinuidades e diversos pontos de mínimo ou máximo (entre outros problemas). Devido a estes fatores, os métodos determinísticos apresentam dificuldades em resolvê-los.

Diante disto e do grande avanço computacional que vem ocorrendo, as estratégias baseadas em métodos estocásticos ganham espaço de utilização devido à praticidade, simplicidade e bons resultados fornecidos. Apesar de tais métodos exigirem alto esforço computacional devido ao elevado número de avaliações da função objetivo, estes possuem características que permite serem utilizados em computação paralela.

#### 4.1.2. Critérios de convergência

É necessário definir critério(s) de parada ou de convergência para os métodos de otimização, visto decorrerem, geralmente, de um processo iterativo. Assim, definem-se os seguintes critérios, os quais podem ser utilizados separadamente ou em conjunto (VANDERPLAATS, 1999):

- Número máximo de iterações;
- Número de iterações sucessivas sem melhorar o processo de otimização;
- Variação absoluta da função objetivo, ou seja,

$$|f(X^j) - f(X^{j-1})| \leq \varepsilon_1 \quad (4.5)$$

- Variação relativa da função objetivo, ou seja,

$$\frac{|f(X^j) - f(X^{j-1})|}{\max[f(X^j), 10^{-10}]} \leq \varepsilon_2 \quad (4.6)$$

#### 4.1.3. Funções de penalidade para problemas restritos

Diversos processos reais apresentam restrições de igualdade e/ou desigualdade e, como muitos métodos de otimização foram desenvolvidos para problemas irrestritos. Deste modo, torna-se necessário reescrever a função objetivo para trabalhar com um problema equivalente, mas sem restrições.

Uma forma bastante usual é introduzir uma função de penalidade na função objetivo original com o intuito de limitar a violação das restrições presentes. Esta nova função objetivo passa a ser denominada função pseudo-objetivo, tal que toda vez que uma restrição for violada a função pseudo-objetivo é penalizada (MARTINEZ & SANTOS, 1995).

Várias são as técnicas existentes para inserir uma função de penalidade na função objetivo e transformar o problema com restrição em um problema sem restrição. Uma das estratégias utilizadas consiste em criar a função pseudo-objetivo da seguinte maneira:

$$\varphi(X) = f(X) + k_p Pf(X) \quad (4.7)$$

$$Pf(X) = \left[ \sum_{i=1}^I \{\max[0, g_i(X)]\}^2 + \sum_{j=1}^J [h_j(X)]^2 \right] \quad (4.8)$$

sendo  $f(X)$  a função objetivo original;  $k_p$  um escalar que determina o fator da penalidade;  $Pf(X)$  a função de penalidade descrita de acordo com a Eq. (4.8);  $g_i(X)$  e  $h_j(X)$  são, respectivamente, as restrições de desigualdade e igualdade.

As Eqs. (4.7) e (4.8) determinam o método conhecido como método da função de Penalidade Exterior. Este método penaliza a função objetivo somente quando as restrições são violadas.

Em relação ao escalar  $k_p$ , tem-se que um valor pequeno faz com que a função pseudo-objetivo seja facilmente otimizada, porém as restrições podem ser violadas. Caso seja escolhido um valor grande para  $k_p$ , as restrições são respeitadas, porém pode trazer mal condicionamento numérico, pois a função pseudo-objetivo torna-se não-linear causando, por exemplo, lenta taxa de convergência. Com isso, a escolha deste fator de penalidade deve ser efetuada com cuidado.

## 4.2. Algoritmo Genético

Como o próprio nome sugere, este é um método baseado no princípio da seleção natural proposto por Charles Darwin (1859). Este princípio menciona que os indivíduos, ou características, mais aptos irão se propagar nas gerações subseqüentes por meio de cruzamentos e mutação, enquanto os mais fracos tendem a desaparecer.

Diante disto, John Holland (1975) criou um método de busca e otimização baseado nos princípios desta teoria é resumido em uma população de indivíduos em que, dados os mecanismos de sobrevivência e reprodução, os mais aptos possuem maior chance de serem selecionados. Então, pelas operações de cruzamento e mutação, formam novas populações. Também, é dado mérito a David Goldberg (1989), aluno de John Holland, que difundiu o método do Algoritmo Genético. Para uma melhor abordagem sobre este método é dada uma breve descrição dos termos mais comuns, a saber:

- Cromossomo (genótipo): Estrutura que representa as variáveis do problema e é chamado de indivíduo, o qual forma a população do Algoritmo Genético. Cada cromossomo corresponde a uma solução do problema dentro do espaço de busca;
- Gene: São os constituintes dos cromossomos, ou seja, cada cromossomo é formado por um conjunto de genes. Cada gene representa uma variável de projeto;
- Alelos: São as unidades presentes nos genes;
- Fenótipo: Representa um cromossomo decifrado;
- Operações Genéticas: Operações realizadas sobre os através de sucessivas iterações. Estas incluem seleção, cruzamento e mutação;
- Geração: Corresponde a iteração atual do Algoritmo Genético;

Para realizar o processo de otimização via Algoritmo Genético é necessário seguir seis operações básicas que compreendem: codificação das variáveis do problema; criação dos indivíduos iniciais, ou seja, formar a população inicial; avaliar os indivíduos da população; selecionar tais indivíduos, de acordo com critérios estabelecidos; realizar o cruzamento entre os indivíduos e; aplicar mutação nestes indivíduos. As operações de selecionar, cruzar e mutação são repetidas até atingir algum critério de convergência como estabelecido na *subseção 4.1.3*. Ao final, o melhor indivíduo é apresentado como a solução do problema.

### 4.2.1. Codificação das variáveis do problema

Para trabalhar com Algoritmo Genético é preciso codificar as informações, variáveis de projeto, do problema em uma estrutura denominada cromossomo, de modo que o método consiga trabalhar com os dados que lhe são fornecidos.

O processo de codificação das variáveis pode ser realizado por meio de uma representação binária, de ponto flutuante ou inteira. Geralmente, trabalha-se com a representação binária em que cada valor associado representa a presença (valor 1) ou não (valor 0) de certa característica no indivíduo.

A representação de ponto flutuante é muito utilizada para tratar de problemas com variáveis reais, porém é mais difícil de manipular. Em comparação com a representação binária, a representação de ponto flutuante resulta em maior velocidade de processamento, boa consistência nos resultados obtidos a cada iteração e melhor precisão nos resultados (MICHALEWICZ, 1996). Por outro lado, a representação por inteiros é bem adequada para problemas que envolvem variáveis inteiras, tais como em arranjos ou combinatória (SOARES, 1997).

Na representação binária, uma variável de projeto  $x_i$  é descrita por um vetor de  $m_i$  bits (*zeros* ou *uns*). Equivalentemente, faz-se para as outras representações a conversão para binário. De modo geral, um cromossomo binário é descrito como:

$$\text{cromossomo} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] = [010101011001 \dots 101010] \quad (4.9)$$

sendo para este exemplo:

$$\begin{aligned} x_1 &= 010101 \\ x_2 &= 011001 \\ &\vdots \\ x_i &= \dots \\ &\vdots \\ x_n &= 101010 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Na Eq. (4.9), cada  $x_i$  equivale a um gene e os alelos são representados por cada um de seus bits. O processo de decodificação dos cromossomos é realizado pela seguinte função matemática (OLIVEIRA, 2006):

$$x_i = x_i^{\text{inf}} + \left( \sum_{j=0}^{m_i-1} (x_i(j)) 2^j \right) \left( \frac{x_i^{\text{sup}} - x_i^{\text{inf}}}{2^{m_i} - 1} \right) \quad (4.11)$$

em que:

$$m_i = \log_2 \left( \frac{x_i^{\text{sup}} - x_i^{\text{inf}}}{\text{prec}s} \right) \quad (4.12)$$

sendo *prec*s a precisão requerida para a solução do problema e  $m_i$  o tamanho do  $i$ -ésimo gene. Ressalta-se que o Algoritmo Genético trabalha com a codificação de um conjunto de parâmetros, não com os próprios parâmetros.

#### 4.2.2. Criação dos indivíduos iniciais: População inicial

Definido o processo de codificação das variáveis do problema, torna-se necessário criar os indivíduos que irão formar a população inicial. Como dito, cada indivíduo é formado por um cromossomo, então, geralmente os indivíduos iniciais da população são criados de maneira totalmente aleatória e/ou através de uma distribuição uniforme pelo espaço de busca. Também, heurísticas podem ser utilizadas para criar tal população inicial.

Entende-se que o tamanho da população é importante para o método, pois populações pequenas reduzem o espaço de busca e antecipam a solução para um ótimo local, já populações muito grande acarretam em lentidão operacional (Haupt & Haupt, 1998). Assim, a escolha do tamanho da população deve ser feito com cautela e baseado em pré-simulações.

Destaca-se que no Algoritmo Genético o trabalho é realizado sobre uma população de pontos e não apenas sobre um único ponto do espaço de busca.

#### 4.2.3. Seleção

Com a população definida na etapa anterior, precisa-se avaliar o desempenho de cada indivíduo desta população. Este processo é feito simplesmente pelo cálculo da função objetivo, também chamada função custo ou função de avaliação, a qual pode ser complexa quando há restrições e/ou um conjunto de funções objetivo no problema. Vale destacar que, para este cálculo, não existe dependência das derivadas da função objetivo nem qualquer outra informação secundária.

Tal função deve ser calculada rapidamente e de maneira eficiente, pois determinará o esforço computacional do método durante a tarefa de otimização, além de medir a proximidade que um indivíduo se encontra da solução desejada. Desta forma, a função objetivo deve ser capaz de diferenciar indivíduos bons dos ruins de maneira significativa.

Com o desempenho de cada indivíduo, o operador de seleção irá determinar quais indivíduos estão aptos para realizar o cruzamento. Existem algumas técnicas para realizar a escolha destes indivíduos. Apresentam-se as principais técnicas baseando em trabalhos de DeJong (1975), Goldberg, (1989) e Haupt & Haupt (1998).

A seleção Elitista consiste em substituir os piores indivíduos da próxima geração pelos melhores indivíduos da geração atual. Em outras palavras, faz-se a cópia dos  $k$  melhores indivíduos da população atual na população subsequente para garantir que estes permaneçam nas gerações futuras e não sejam afetados pelas etapas de cruzamento e mutação.

Esta estratégia possui como vantagem principal manter o melhor indivíduo na população, desta forma, fornece uma sequência em que o resultado permanece o mesmo ou é melhorado. A desvantagem está em cair prematuramente em um ótimo local mesmo o método possuindo estratégias para escapar de tal dificuldade. Assim, a melhor metodologia seria utilizar este método em conjunto com outros métodos de seleção na tentativa de aumentar a velocidade de convergência do Algoritmo Genético.

A seleção Aleatória consiste em selecionar os indivíduos de maneira totalmente aleatória sem levar em consideração sua aptidão na população. Segundo Soares (1997) fazer a escolha desta maneira não trará resultados satisfatórios para boa parte das aplicações.

Outra estratégia é a seleção por Torneio, na qual grupos, contendo dois indivíduos cada, são formados pela escolha aleatória de indivíduos da população. O melhor indivíduo de cada grupo é selecionado baseando-se em uma probabilidade previamente definida. Então, a partir de um número aleatório no intervalo real  $[0, 1]$ , se este número for menor que a probabilidade, significa que o melhor indivíduo será o escolhido, caso contrário, o outro será selecionado.

A seleção por torneio é muito utilizada, pois a comparação para a seleção entre os indivíduos não é realizada entre todos os indivíduos da população. Porém, ainda assim, garantindo bons resultados.

Por fim, cita-se o método de seleção pela Roleta, no qual a chance de um indivíduo ser selecionado está proporcionalmente ligada a sua aptidão fornecida através da função objetivo. Em linhas gerais, cada indivíduo da população é representado em uma roleta de acordo com a relação entre o seu valor de aptidão e o soma total das aptidões dos indivíduos, gerando, então, uma porcentagem da roleta que o indivíduo ocupa.

Para selecionar um indivíduo, geram-se uma quantidade de números aleatórios entre  $[0, 1]$  igual à quantidade de indivíduos na população. Para cada indivíduo na roleta, faz-se a comparação entre o valor de sua porcentagem com o número aleatório gerado. Caso a porcentagem na roleta seja maior que o número gerado, este indivíduo será selecionado, senão passa para o próximo indivíduo até que todos os números aleatórios tenham sido comparados. Note que a seleção por Roleta privilegia os indivíduos mais aptos, dado que

estes podem ser selecionados mais de uma vez, ao passo que os piores indivíduos são descartados.

Definido o método de seleção utilizado, obtêm-se, então, os indivíduos que irão participar da próxima etapa do Algoritmo Genético, denominada cruzamento.

#### 4.2.4. Cruzamento

O cruzamento é um procedimento no qual indivíduos trocam material genético formando seus descendentes, ou seja, novos indivíduos. Geralmente, este processo ocasiona a propagação das características dos indivíduos mais aptos da população, além de fazer o método buscar soluções em regiões não conhecidas do espaço de projeto. Além disso, o processo de cruzamento é uma condição necessária para que a convergência do método seja alcançada ao longo das gerações (RODRIGUES, 2000).

A forma tradicional de realizar o cruzamento envolve dois indivíduos, caracterizados como pais, escolhidos através de uma probabilidade de cruzamento  $P_c$ . Desta forma, estes indivíduos através de alguma estratégia de cruzamento trocam seu material genético. Geralmente  $P_c$  está definida entre 60% e 80%.

Uma das estratégias de cruzamento mais utilizadas é a de estabelecer um ponto de cruzamento (*single-point crossover*). A partir deste ponto é realizada a troca de alelos entre os cromossomos pais, conforme pode ser observado na Fig. 4.4.



Figura 4.4 - Exemplo de cruzamento por um único ponto.

A escolha do ponto de cruzamento é feita de forma aleatória conforme a seguinte equação (OLIVEIRA, 2006):

$$p_c = 1 + rand[\sum (m_i - 1) - 1] \quad (4.13)$$

sendo *rand* um número aleatório entre  $[0, 1]$  e  $m_i$  representa o tamanho do  $i$ -ésimo cromossomo. Outra possibilidade para este tipo de cruzamento é, ao invés de, fazer o cruzamento escolhendo um único ponto, efetuar a escolha de mais pontos e, então, seguir a mesma metodologia.

Uma segunda estratégia é denominada cruzamento uniforme (*uniform crossover*) e baseia-se em uma máscara de cruzamento gerada aleatoriamente e de tamanho igual ao do cromossomo. Para criar os filhos, faz-se uma análise bit-a-bit da máscara em que o valor 1 corresponde ao alelo ser copiado do primeiro pai e o valor 0 corresponde ao alelo ser copiado do segundo pai. A Fig. 4.5 exemplifica o cruzamento uniforme.

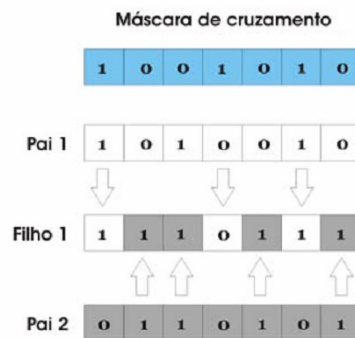


Figura 4.5 - Exemplo de cruzamento uniforme.

Existem diversas outras técnicas para realizar a operação de cruzamento no Algoritmo Genético, bastando para isto, consultar a bibliografia especializada (ESHELMAN & SHAFFER, 1993; MICHALEWICZ, 1996; HAUPT & HAUPT, 1998).

#### 4.2.5. Mutação

O operador mutação é necessário para a introdução e manutenção da diversidade genética na população, alterando arbitrariamente um ou mais alelos de um indivíduo escolhido. Deste modo, fornecendo meios para introdução de diferentes indivíduos na população.

A mutação assegura que a probabilidade de se chegar a qualquer ponto do espaço de busca nunca seja zero, além de ajudar a contornar o problema de ótimos locais, pois com este mecanismo, altera-se levemente a direção da busca.

O operador de mutação é aplicado aos indivíduos com uma probabilidade dada pela taxa de mutação  $P_m$ . Segundo Hessen & Manner (1990) a probabilidade de mutação pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$Pm = \frac{1}{N_p \sqrt{\sum m_i}} \quad (4.14)$$

sendo  $N_p$  o número total de indivíduos na população. Porém, geralmente se adota tal valor entre 0,1% e 5%.

Uma das estratégias utilizadas pelo operador mutação, considerando a representação binária, corresponde a uma mutação pontual, ou mutação de ponto único. A partir de um conjunto de números aleatórios entre  $[0, 1]$  e de tamanho igual ao total de bits da população, tem-se que para cada bit da população, caso o respectivo número aleatório gerado seja menor que a taxa de mutação  $Pm$ , o bit é invertido, isto é, se for zero vira um, vice-versa.

Segue-se este princípio para todos os bits da população, com exceção dos melhores indivíduos. A Fig. 4.6 mostra a operação de mutação sendo realizada.

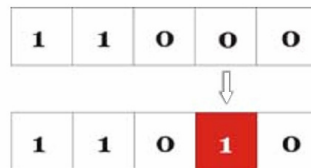


Figura 4.6 - Exemplo de mutação de ponto único.

Ao realizar todos estes passos, completa-se uma iteração do Algoritmo Genético ou uma geração é passada. Então, as operações descritas são repetidas até atingir algum critério de parada.

No fim, o indivíduo com melhor valor de função objetivo será selecionado como sendo a solução para o problema. A Fig. 4.7 mostra um fluxograma que detalha o funcionamento do Algoritmo Genético.

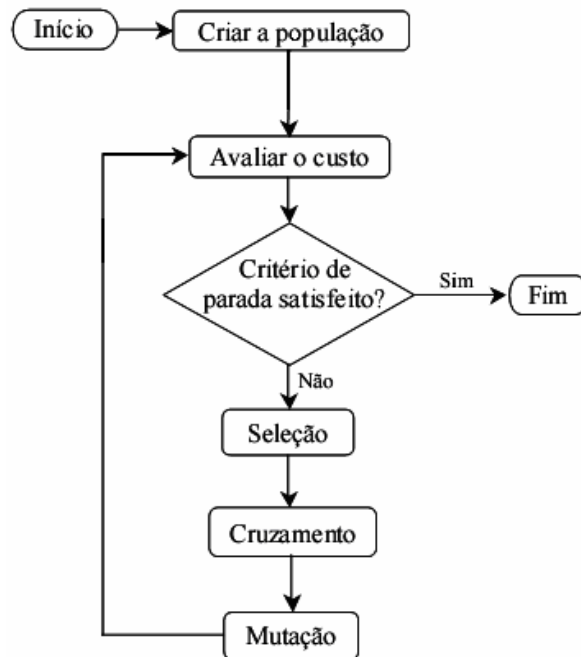


Figura 4.7 - Funcionamento iterativo do Algoritmo Genético.

### 4.3. Evolução Diferencial

Este método surgiu quando Storn & Price (1995) tentavam solucionar o problema de ajuste polinomial de Chebychev e, então, utilizaram uma abordagem diferente das encontradas nas estratégias de evolução que tratam de problemas de otimização.

O método inicia com uma população de  $N_p$  indivíduos gerada de maneira aleatória, ou por uma distribuição de probabilidade uniforme, obedecendo aos limites laterais estabelecidos para as variáveis de projeto.

Cada indivíduo, chamado de vetor, possui  $n$  componentes representadas por valores reais, sendo  $n$  o número de variáveis de projeto. Assim, a população segue uma evolução natural, em que o número de indivíduos é constante durante todas as gerações.

Assim como o Algoritmo Genético, a Evolução Diferencial apresenta algumas operações a serem seguidas durante cada geração para manter a convergência não-prematura do método, garantindo, então, a diversidade da população e a obtenção da solução ótima, ou próxima desta.

#### 4.3.1. Mutação

Após a criação da população inicial, realiza-se a operação de mutação que consiste em criar novos indivíduos pela adição da diferença vetorial ponderada entre dois indivíduos

aleatórios da população,  $F_p(\vec{X}_\beta^{(q)} - \vec{X}_\gamma^{(q)})$ , a um terceiro indivíduo,  $\vec{X}_\alpha^{(q)}$ , (vetor a ser perturbado), gerando os chamados vetores modificados ou doadores,  $\vec{V}^{(q+1)}$ , conforme mostrado na Fig. 4.8.

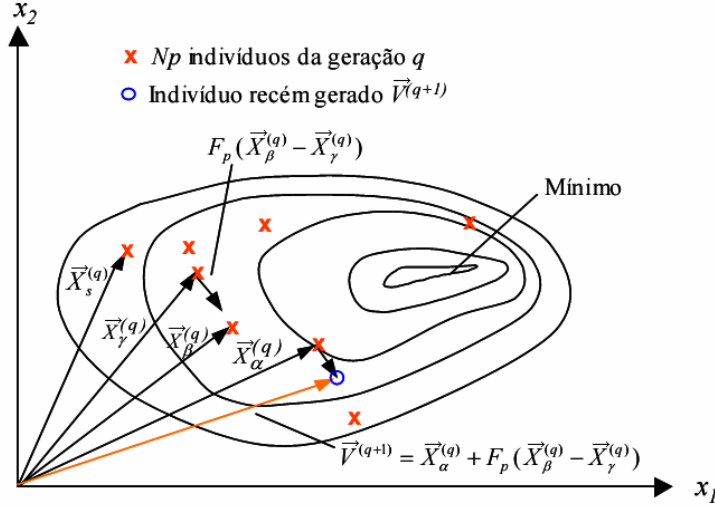


Figura 4.8 - Criação do vetor doador  $\vec{V}^{(q+1)}$ .

De acordo com a Fig. 4.8, tem-se que o vetor doador da iteração seguinte,  $(q+1)$ , é representado por  $\vec{V}^{(q+1)}$  e os vetores  $\vec{X}_s^{(q)}$ ,  $\vec{X}_\alpha^{(q)}$ ,  $\vec{X}_\beta^{(q)}$  e  $\vec{X}_\gamma^{(q)}$  representam indivíduos que são diferentes entre si e fazem parte da população na iteração atual,  $q$ . O fator de perturbação,  $F_p$ , encontra-se no intervalo  $[0, 2]$  e controla a amplitude do vetor diferença. Assim, o processo de mutação, dado na Fig. 4.8, é escrito da seguinte maneira:

$$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_\alpha^{(q)} + F_p(\vec{X}_\beta^{(q)} - \vec{X}_\gamma^{(q)}) \quad (4.15)$$

Existem outras maneiras, que serão apresentadas adiante, de realizar a operação de mutação, o que diferencia as diversas estratégias que podem ser utilizadas pelo método da Evolução Diferencial.

#### 4.3.2. Cruzamento

Em seguida, na operação cruzamento, as componentes do vetor doador,  $\vec{V}^{(q+1)}$ , são misturadas com as componentes de outro indivíduo escolhido aleatoriamente e diferente dos anteriores,  $\vec{X}_s^{(q)}$  (vetor alvo), segundo uma probabilidade de cruzamento  $P_c$  entre  $[0, 1]$ .

Desta forma, obtém-se o vetor tentativa ou experimental,  $\vec{U}^{(q+1)}$ , definido como:

$$U_i^{(q+1)} = \begin{cases} v(i)^{(q+1)}, & \text{se } rand_i \leq Pc. \\ x_s(i)^{(q)}, & \text{se } rand_i > Pc, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.16)$$

sendo,  $v(i)^{(q+1)}$  e  $x_s(i)^{(q)}$ , respectivamente, a  $i$ -ésima componente do vetor doador  $\vec{V}^{(q+1)}$  e do vetor alvo  $\vec{X}_s^{(q)}$  e,  $rand_i$  um número gerado aleatoriamente no intervalo  $[0, 1]$ . O cruzamento dado pela Eq. (4.16) é denominado de cruzamento binomial e pode ser observado na Fig. 4.9.

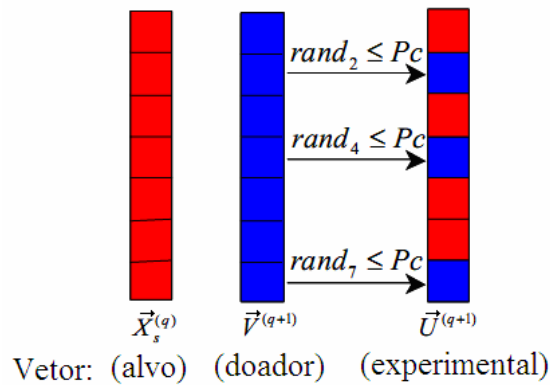


Figura 4.9 - Operação de cruzamento binomial.

Outra forma de realizar o cruzamento, denominado cruzamento exponencial, é definida segundo a Fig. 4.10. As componentes do vetor experimental são dadas pelas componentes do vetor doador enquanto o número gerado aleatoriamente for menor ou igual à probabilidade de cruzamento  $Pc$ .

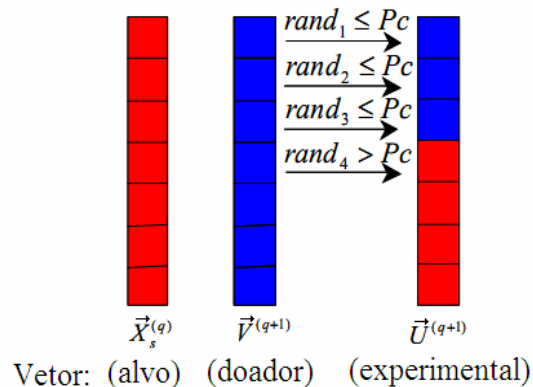


Figura 4.10 - Operação de cruzamento exponencial.

Ao término do cruzamento, se houver alguma componente do vetor experimental (variável de projeto) fora dos limites laterais definidos, tais são ajustadas como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } U_i^{(q+1)} < x_i^{\text{inf}} \text{ então} \\ \quad U_i^{(q+1)} = x_i^{\text{inf}} \\ \\ \text{Se } U_i^{(q+1)} > x_i^{\text{sup}} \text{ então} \\ \quad U_i^{(q+1)} = x_i^{\text{sup}} \end{array} \right. , \text{ com } i = 1, \dots, n \quad (4.17)$$

#### 4.3.3. Seleção

O processo de seleção realizado pela Evolução Diferencial é bem simples e consiste em comparar, utilizando a função objetivo, o custo do vetor experimental,  $\vec{U}^{(q+1)}$ , com o custo do vetor alvo,  $\vec{X}_s^{(q)}$ . Logo, faz-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } f(\vec{U}^{(q+1)}) \leq f(\vec{X}_s^{(q)}) \text{ então} \\ \quad \vec{X}_s^{(q+1)} = \vec{U}^{(q+1)} \\ \\ \text{Senão} \\ \quad \vec{X}_s^{(q+1)} = \vec{X}_s^{(q)} \end{array} \right. \quad (4.18)$$

O processo iterativo continua até que seja alcançado algum critério de parada de modo que a tarefa de otimização finaliza, senão, repetem-se os passos anteriores até atingir algum destes critérios.

#### 4.3.4. Estratégias da Evolução Diferencial

Vale ressaltar que a Evolução Diferencial apresenta diferentes estratégias obtidas a partir da forma com que os operadores de mutação e cruzamento trabalham.

Em outras palavras, as estratégias, vide Tab. 4.1, diferenciam-se pelo tipo de indivíduo a ser modificado na formação do vetor doador, quantos vetores diferenciais (diferenças ponderadas) são considerados e o tipo de cruzamento a ser utilizado (STORN & PRICE, 1995). Deste modo, utiliza-se a notação “ED/a/b/c”, em que:

- $a$  – representa o vetor a ser perturbado, ou seja, caso este vetor seja escolhido aleatoriamente entre os indivíduos da população, tem-se “ $a = \text{rand}$ ”. Caso este vetor seja adotado como o vetor de custo ótimo da população, tem-se “ $a = \text{best}$ ”;

- $b$  – especifica o número de vetores diferença utilizados na operação de mutação para obter o vetor doador, ou seja, para utilizar apenas um vetor diferença, tem-se “ $b = 1$ ”;
- $c$  – determina o tipo de cruzamento utilizado, ou seja, caso seja utilizado o cruzamento binomial, usa-se “ $c = bin$ ”. Caso seja o cruzamento exponencial, usa-se “ $c = exp$ ”.

Tabela 4.1 - Estratégias do método da Evolução Diferencial.

| Estratégia | Operador <i>mutação</i>                                                                                                                       | Notação               |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 1          | $\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_\alpha^{(q)} + F_p(\vec{X}_\beta^{(q)} - \vec{X}_\gamma^{(q)})$                                                    | ED/rand/1/bin         |
| 2          | $\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{best}^{(q)} + F_p(\vec{X}_\beta^{(q)} - \vec{X}_\gamma^{(q)})$                                                    | ED/best/1/bin         |
| 3          | $\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_\alpha^{(q)} + F_p(\vec{X}_\rho^{(q)} - \vec{X}_\beta^{(q)}) + F_p(\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$   | ED/rand/2/bin         |
| 4          | $\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{best}^{(q)} + F_p(\vec{X}_\alpha^{(q)} - \vec{X}_\beta^{(q)}) + F_p(\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$ | ED/best/2/bin         |
| 5          | $\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{old}^{(q)} + F_p(\vec{X}_{best}^{(q)} - \vec{X}_{old}^{(q)}) + F_p(\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$  | ED/rand-to-best/2/bin |
| 6          | $\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_\alpha^{(q)} + F_p(\vec{X}_\beta^{(q)} - \vec{X}_\gamma^{(q)})$                                                    | ED/rand/1/exp         |
| 7          | $\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{best}^{(q)} + F_p(\vec{X}_\beta^{(q)} - \vec{X}_\gamma^{(q)})$                                                    | ED/best/1/exp         |
| 8          | $\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_\alpha^{(q)} + F_p(\vec{X}_\rho^{(q)} - \vec{X}_\beta^{(q)}) + F_p(\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$   | ED/rand/2/exp         |
| 9          | $\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{best}^{(q)} + F_p(\vec{X}_\alpha^{(q)} - \vec{X}_\beta^{(q)}) + F_p(\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$ | ED/best/2/exp         |
| 10         | $\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{old}^{(q)} + F_p(\vec{X}_{best}^{(q)} - \vec{X}_{old}^{(q)}) + F_p(\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$  | ED/rand-to-best/2/exp |

Neste trabalho utiliza-se a estratégia 7 em que: o vetor a ser perturbado é escolhido como sendo o indivíduo de custo ótimo na população; utiliza-se apenas um vetor diferença na operação de mutação para obter o vetor doador, conforme Fig. 4.8 e; o tipo de cruzamento utilizado corresponde ao cruzamento exponencial, conforme apresentando na Fig. 4.10.

Vale ressaltar que durante as simulações numéricas as outras estratégias foram testadas. Analisando os resultados obtidos, observou-se que foram independentes das estratégias utilizadas, uma vez que todas conseguiram praticamente a mesma solução, apenas com uma pequena variação no número de avaliações da função objetivo.



## CAPÍTULO V

### SIMULAÇÕES NUMÉRICAS – APLICAÇÕES

Os capítulos anteriores apresentaram o embasamento teórico necessário para a obtenção do projeto ótimo de uma coluna semi-enterrada. Em linhas gerais, o objetivo é maximizar a primeira frequência natural e distanciar as três primeiras frequências naturais entre si. Para os casos mais críticos, considera-se a minimização do volume da coluna e restrições quanto à profundidade de enterramento e a carga crítica suportada.

Com isso, as simulações baseiam-se em aplicar dois métodos estocásticos de otimização na função objetivo de interesse variando os parâmetros que definem a coluna. Para esta finalidade, utilizam-se como variáveis de projeto, os parâmetros que definem a área da seção transversal e influenciam no momento de inércia de área  $I$ , o comprimento total  $L$  e a altura da fundação  $H$ . Também, faz-se a comparação entre as soluções obtidas por estes dois métodos, assim, como compara o desempenho para obter tal solução.

Todas as simulações visam obter um elemento estrutural que respeite as condições de projeto, sendo seguro, estável, barato, e ao mesmo tempo “ótimo” sob o ponto de vista da engenharia. Isto significa que muitas vezes não será possível garantir que a solução represente o ótimo global da função objetivo.

#### 5.1. Comparação do Modelo Analítico com um Modelo Numérico

Com a finalidade de validar o modelo desenvolvido analiticamente, construiu-se um modelo de elementos finitos equivalente utilizando o software Ansys®. O valor das frequências obtidas por ambas as metodologias foram comparados de acordo com a variação dos parâmetros a serem utilizados no processo de otimização.

O modelo de elementos finitos é relativamente simples, conforme mostra a Fig. 5.1, sendo a representação 2D, com a coluna dada por um elemento do tipo BEAM3 e o solo,

representado por um conjunto de molas não-lineares não-conectadas, sendo do tipo COMBIN39, em que os dados usados para representar o movimento não-linear das molas foram obtidos da Eq. (2.23) e Fig. 2.4.

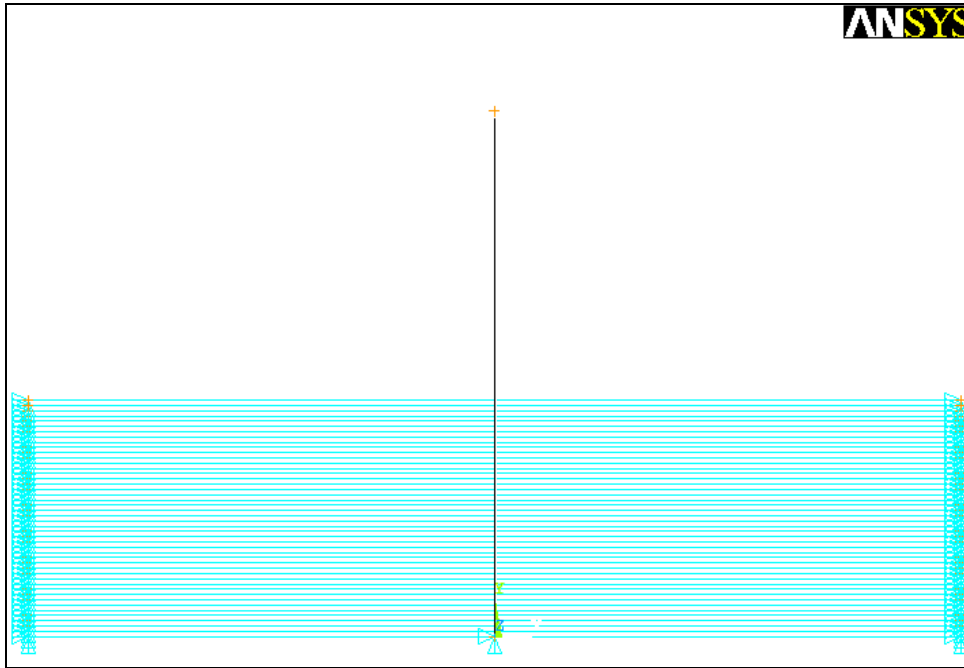


Figura 5.1 - Representação em Ansys® da coluna semi-enterrada sem carga aplicada.

Para a comparação entre os modelos, adota-se uma coluna de aço fundido,  $E=206$  GPa, com comprimento total  $L=50$  m, densidade do elemento,  $\rho=7.860$  kg/m<sup>3</sup>, área da secção transversal hexagonal regular de lado  $0,3 \leq a_h \leq 0,6$  m, sem carga aplicada,  $P=0$  N. A coluna enterrada  $0,3L \leq H \leq 0,6L$  m no solo de argila mole em que a rigidez  $Eti=3,6$  MPa. Um segundo caso é estudado considerando os mesmos parâmetros, porém a carga aplicada é de  $P=140$  KN e o solo de argila mole tem rigidez  $Eti=6,3$  MPa.

A Tab. 5.1 apresenta os resultados para o primeiro caso, sem carga e rigidez do solo  $Eti=3,6$  MPa, já a Tab. 5.2 apresenta para o segundo caso, com carga aplicada e a rigidez do solo  $Eti=6,3$  MPa. Para auxiliar a comparação foram calculadas as seguintes grandezas estatísticas:

$$desvio\_medio = \frac{\sum \left( \frac{\omega_{anal} - \omega_{num}}{\omega_{anal}} \right)}{n_{testes}} \quad (5.1)$$

$$Coef. \_ Correlação = \frac{\sum (\omega_{anal} - \bar{\omega}_{anal})(\omega_{num} - \bar{\omega}_{num})}{\sqrt{\sum (\omega_{anal} - \bar{\omega}_{anal})^2} \sqrt{\sum (\omega_{num} - \bar{\omega}_{num})^2}} \quad (5.2)$$

para,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{anal} &= \frac{\sum \omega_{anal}}{n_{testes}} \\ \bar{\omega}_{num} &= \frac{\sum \omega_{num}}{n_{testes}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

sendo que  $n_{testes}$  representa o número total de testes executados;  $\omega_{anal}$  e  $\omega_{num}$  os valores das frequências naturais obtidos pelo modelo analítico e pelo método de elementos finitos, respectivamente. A Eq. (5.1) permite calcular o desvio médio entre estas duas grandezas, enquanto que a Eq. (5.2) calcula o coeficiente de correlação entre as frequências obtidas, em que a Eq. (5.3) representa a obtenção da média destas frequências.

Tabela 5.1 - Frequências resultantes do modelo analítico e numérico para o primeiro caso, com  $Eti=3,6 \text{ MPa}$  e  $P=0 \text{ N}$ .

|                               |              | $\omega_1$ (Hz) |          |               | $\omega_2$ (Hz) |          |               | $\omega_3$ (Hz) |          |               |
|-------------------------------|--------------|-----------------|----------|---------------|-----------------|----------|---------------|-----------------|----------|---------------|
| H<br>(m)                      | $a_h$<br>(m) | Analítico       | Numérico | Desvio<br>(%) | Analítico       | Numérico | Desvio<br>(%) | Analítico       | Numérico | Desvio<br>(%) |
| 15                            | 0,3          | 0,391           | 0,367    | 6,138         | 2,088           | 1,902    | 8,908         | 5,230           | 4,320    | 17,4          |
| 22,5                          | 0,3          | 0,581           | 0,541    | 6,885         | 2,992           | 2,726    | 8,890         | 7,015           | 5,340    | 23,877        |
| 30                            | 0,3          | 0,957           | 0,876    | 8,464         | 5,207           | 4,040    | 22,412        | 7,349           | 5,554    | 24,425        |
| 15                            | 0,45         | 0,505           | 0,486    | 3,762         | 2,528           | 2,442    | 3,402         | 5,677           | 5,520    | 2,766         |
| 22,5                          | 0,45         | 0,717           | 0,697    | 2,789         | 3,400           | 3,205    | 5,735         | 6,215           | 5,856    | 5,776         |
| 30                            | 0,45         | 1,119           | 1,069    | 4,468         | 4,518           | 4,052    | 10,314        | 6,285           | 5,920    | 5,807         |
| 15                            | 0,6          | 0,588           | 0,586    | 0,340         | 2,981           | 2,974    | 0,235         | 7,075           | 6,961    | 1,611         |
| 22,5                          | 0,6          | 0,807           | 0,805    | 0,248         | 3,557           | 3,518    | 1,096         | 7,255           | 7,102    | 2,109         |
| 30                            | 0,6          | 1,192           | 1,185    | 0,587         | 4,113           | 4,013    | 2,431         | 7,314           | 7,170    | 1,969         |
| Desvio Médio (%)              |              | 3,742           |          |               | 7,047           |          |               | 9,527           |          |               |
| Coeficiente de Correlação (%) |              | 99,50           |          |               | 94,59           |          |               | 71,36           |          |               |

Tabela 5.2 - Frequências resultantes do modelo analítico e numérico para o segundo caso, com  $E_t=6,3 \text{ MPa}$  e  $P=140 \text{ KN}$ .

| $\omega_1$ (Hz)               |              |           |          |               | $\omega_2$ (Hz) |          |               | $\omega_3$ (Hz) |          |               |
|-------------------------------|--------------|-----------|----------|---------------|-----------------|----------|---------------|-----------------|----------|---------------|
| H<br>(m)                      | $a_h$<br>(m) | Analítico | Numérico | Desvio<br>(%) | Analítico       | Numérico | Desvio<br>(%) | Analítico       | Numérico | Desvio<br>(%) |
| 15                            | 0,3          | 0,399     | 0,383    | 4,010         | 2,191           | 2,011    | 8,215         | 6,364           | 4,684    | 26,398        |
| 22,5                          | 0,3          | 0,622     | 0,571    | 8,199         | 3,306           | 2,941    | 11,041        | 8,986           | 6,309    | 29,791        |
| 30                            | 0,3          | 1,025     | 0,944    | 7,902         | 6,436           | 4,571    | 28,978        | 9,529           | 7,021    | 26,320        |
| 15                            | 0,45         | 0,536     | 0,516    | 3,731         | 2,739           | 2,615    | 4,527         | 6,093           | 5,851    | 3,972         |
| 22,5                          | 0,45         | 0,766     | 0,748    | 2,350         | 3,789           | 3,607    | 4,803         | 7,119           | 6,533    | 8,231         |
| 30                            | 0,45         | 1,230     | 1,177    | 4,309         | 5,478           | 4,916    | 10,259        | 7,240           | 6,608    | 8,729         |
| 15                            | 0,6          | 0,626     | 0,623    | 0,479         | 3,136           | 3,128    | 0,255         | 7,243           | 7,163    | 1,105         |
| 22,5                          | 0,6          | 0,882     | 0,882    | 0,000         | 3,988           | 3,944    | 1,103         | 7,593           | 7,443    | 1,976         |
| 30                            | 0,6          | 1,337     | 1,332    | 0,374         | 4,901           | 4,769    | 2,693         | 7,670           | 7,528    | 1,851         |
| Desvio Médio (%)              |              |           |          | 3,484         | 7,986           |          |               | 12,041          |          |               |
| Coeficiente de Correlação (%) |              |           |          | 99,63         | 92,41           |          |               | 47,53           |          |               |

Ao analisar os dados das Tabs. 5.1 e 5.2, nota-se que as primeiras e a segundas frequências, obtidas pelo modelo analítico e pelo método de elementos finitos, resultam em valores muito próximos. Observe que o desvio relativo é pequeno, na média, não ultrapassa 3,8%, e que o coeficiente de correlação comprova que os valores estão altamente relacionados, com valores superiores a 99,5%. Em relação à terceira frequência natural, os resultados não foram tão significativos. Para esta frequência, fazendo a média dos dois casos apresentados, obtém-se o desvio médio de 10,78% e um coeficiente de correlação baixo, dado por 59,44%.

Como observado, o maior erro está associado à terceira frequência natural. Este erro deve-se ao fato do modelo analítico ter considerado apenas as três primeiras frequências naturais, mais precisamente, três graus de liberdade. Assim, o erro de truncamento é somado à última frequência, terceira frequência, prejudicando os resultados analíticos.

Estima-se que melhores resultados seriam obtidos trabalhando com quatro frequências, quatro graus de liberdade, porém, considerando a análise para somente as três primeiras frequências naturais, pois o erro de truncamento seria somado à quarta frequência e não influenciaria, de modo significativo, as três primeiras frequências. Além disso, deve-se considerar que uma melhora significativa no modelo numérico como, por exemplo, refinando

a malha, poderia aproximar ainda mais as frequências numéricas das obtidas analiticamente.

Deste modo, tem-se que o modelo analítico desenvolvido possui uma precisão significativa, além de demonstrar a correta utilização das técnicas de modelagem abordadas. Este modelo, então, pode ser utilizado para o estudo da coluna semi-enterrada aplicando os métodos de otimização e qualquer outra análise que venha a ser realizada.

Ainda, para os resultados mostrados na Tabs 5.1 e 5.2, vale lembrar que diversas simplificações foram feitas durante o processo analítico de modelagem, vide capítulos dois e três, para tentar diminuir a complexidade envolvida no problema e, mesmo assim, o modelo resultante foi validado com segurança. Uma das vantagens em utilizar o modelo analítico será na rapidez e no pequeno esforço computacional necessário ao avaliar, várias vezes, a função objetivo, como é exigido pelos métodos evolutivos.

## 5.2. Considerações Gerais

Os métodos de otimização foram executados utilizando códigos computacionais contidos no *Simple Optimization Toolbox* de autoria de Viana (2008) e implementados em Matlab7®. O computador utilizado nas simulações possui as seguintes configurações: processador Intel® Core™ 2 Duo 1.66 GHz com 2 GB de memória RAM.

Em relação ao código computacional usado, tem-se que cada método de otimização executa passos iterativos até alcançar qualquer um dos critérios de convergência definidos a seguir:

- Número máximo de iterações (número de gerações adotadas nos métodos);
- Número de iterações sucessivas sem melhorar a tarefa de otimização, padrão de 15 iterações sucessivas.

Em relação aos algoritmos utilizados, baseando em testes preliminares e dados da literatura (Oliveira, 2006), adotaram-se:

- **Algoritmo Genético:**
  - Número de indivíduos = 100;
  - Número de gerações = 200;
  - Seleção do tipo Torneio com 5 rodadas;
  - Cruzamento do tipo uniforme;
  - Probabilidade de Mutação  $P_m = 1\%$ .
- **Evolução Diferencial:**
  - Número de indivíduos = 100;

- Número de gerações = 200;
- Fator de perturbação  $F_p = 0,8$ ;
- Probabilidade de Cruzamento  $P_c = 0,7$ .

Com o interesse em comparar a eficiência dos métodos estocásticos utilizados, consideram-se ainda os seguintes critérios:

- **Esforço computacional:** Número de avaliações da função objetivo efetuadas ao total;
- **Esforço algorítmico:** Número de iterações gastas na tarefa de otimização até atingir qualquer critério de convergência;
- **Tempo de execução:** Tempo gasto na execução de cada método. Este tempo é obtido em relação ao tempo de execução do método da Evolução Diferencial para evitar certa dependência da máquina utilizada nos testes.

É importante destacar que ao executar cada simulação (teste), repetiu-se o mesmo processo diversas vezes com a intenção de obter a resposta média e dar uma garantia mínima de que o método de otimização não convergirá prematuramente para um ótimo local. Além disso, o código computacional para o modelo dinâmico da coluna semi-enterrada foi desenvolvido pelo autor, implementado em Matlab7<sup>®</sup> e acoplado aos programas de otimização.

### 5.3. Problema de Otimização Irrestrito

Trata-se, nesta seção, de um problema de otimização multi-objetivo irrestrito composto por três objetivos, vide Eq. (5.4):

- (i) maximizar a primeira frequência natural da coluna;
- (ii) maximizar a distância entre a primeira e a segunda frequência natural;
- (iii) maximizar a distância entre a segunda e a terceira frequência natural.

$$\begin{cases} f(X) = [f_1(X) \ f_2(X) \ f_3(X)]^T \\ f_1(X) = \max \ \omega_1 \\ f_2(X) = \max \ (\omega_2 - \omega_1) \\ f_3(X) = \max \ (\omega_3 - \omega_2) \end{cases} \quad (5.4)$$

em que a função objetivo escalar, escrita utilizando o método dos objetivos ponderados (Oliveira, 2005), é dada como:

$$\text{Maximizar } f(X) = p_1 \frac{f_1(X)}{f_1^o} + p_2 \frac{f_2(X)}{f_2^o} + p_3 \frac{f_3(X)}{f_3^o} \quad (5.5)$$

sendo que o vetor de variáveis de projeto,  $X$ , é definido em cada simulação e o problema de otimização consiste em maximizar a função objetivo definida na Eq. (5.5).

Assume-se para análise que os objetivos tenham o mesmo grau de importância na Eq. (5.5), ou seja, os fatores de ponderação são iguais ( $p_1=p_2=p_3=0,3334$ ), de tal forma que a somatória deles seja igual a 1. A solução das funções objetivo ideais presentes na Eq. (5.5) são determinadas como segue:

$$\begin{cases} f_1^o(X) = \max f_1(X) \\ f_2^o(X) = \max f_2(X) \\ f_3^o(X) = \max f_3(X) \end{cases} \quad (5.6)$$

Para realizar os testes, considera-se a coluna de aço fundido com módulo de elasticidade  $E=206 \text{ GPa}$  e densidade  $\rho=7.860 \text{ kg/m}^3$ , sendo os demais parâmetros definidos em cada um das simulações a serem realizados.

### 5.3.1. Influência do tipo de secção transversal no momento de inércia de área ( $I$ )

Entre os diversos parâmetros da coluna semi-enterrada, a primeira variável estudada nas simulações são os parâmetros de diferentes tipos de secções transversais. Estes parâmetros dependem do tipo de secção e influenciam o momento de inércia de área,  $I$ , o qual mede a rigidez, ou seja, a resistência a flexão da coluna em relação ao eixo que passa pelo seu centro de gravidade.

Com isso, adotam-se as seguintes secções transversais conforme se mostra, em vista superior, na Fig. 5.2 (a) até (e):

- Secção circular cheia, Fig. 5.2 (a):

$$I = \frac{\pi D_c^4}{64}, \text{ sendo que } D_c \text{ é o diâmetro do círculo;} \quad (5.7a)$$

- Secção tubular, Fig. 5.2 (b):

$$I = \frac{\pi(D_t^4 - d_t^4)}{64}, \text{ sendo } D_t \text{ o diâmetro externo e } d_t \text{ o diâmetro interno do tubo;} \quad (5.7b)$$

- Secção retangular, Fig. 5.2 (c):

$$I = \frac{b_r a_r^3}{12}, \text{ sendo } a_r \text{ e } b_r \text{ os lados do retângulo;} \quad (5.7c)$$

- Secção hexagonal, Fig. 5.2 (d):

$$I \cong 0,5413 a_h^4, \text{ sendo } a_h \text{ correspondendo ao lado do hexágono;} \quad (5.7d)$$

- Perfil em I, Fig. 5.2 (e):

$$I = \frac{(B_p H_p^3 - b_p h_p^3)}{12}, \text{ sendo } H_p \text{ a largura do perfil, } B_p \text{ o comprimento do perfil, } h_p \text{ a distância interna entre as abas do perfil.} \quad (5.7e)$$

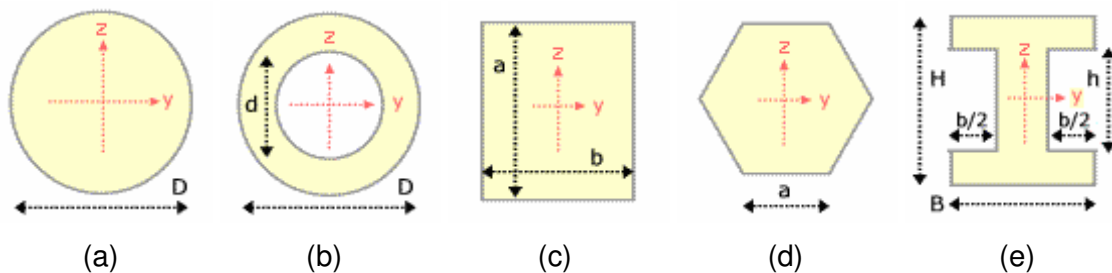


Figura 5.2 - Diferentes tipos de secção transversal: (a) circular cheia, (b) tubular, (c) retangular, (d) hexagonal e (e) perfil em I.

Nesta primeira simulação, adota-se uma coluna de aço fundido com comprimento total  $L=50 \text{ m}$ ; densidade linear de massa  $m$  em  $[\text{kg/m}]$  obtida pelo produto entre a densidade do elemento pela área da secção transversal considerada; com uma carga aplicada  $P=140 \text{ KN}$  e enterrada 50% no solo ( $H=0,5L$ ) de argila mole, em que a rigidez  $Eti=3,6 \text{ MPa}$ .

#### a) Caso 1: Coluna cilíndrica circular cheia

Ao considerar a coluna com uma secção circular cheia, tem-se o momento de inércia de área calculado pela Eq. (5.7a), sendo o diâmetro do círculo, o único parâmetro a ser definido como variável de projeto no problema de otimização. Assim,

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[D_c]^T \\ & \text{Sujeito a: } 0,3 \leq D_c \leq 0,6 \text{ [m]} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Inicialmente, obtém-se a solução ideal calculada conforme a Eq. (5.6), sendo os resultados mostrados na Tab. 5.3.

Tabela 5.3 - Solução ideal para a coluna cilíndrica circular cheia.

|           | $f_1^0(X)$ | $f_2^0(X)$ | $f_3^0(X)$ |
|-----------|------------|------------|------------|
| <b>ED</b> | 0,711      | 2,885      | 3,148      |
| <b>AG</b> | 0,711      | 2,885      | 3,148      |

Pelos dados da Tab. 5.3, nota-se que os métodos utilizados alcançaram, praticamente, a mesma solução no processo de otimização. Apresenta-se na Tab. 5.4 o valor final das variáveis de projeto, além dos resultados obtidos em relação aos critérios de comparação dos métodos utilizados.

Tabela 5.4 - Resultados obtidos para a coluna cilíndrica circular cheia.

|           | $D_c$ [m] | Esforço Computacional | Esforço Algorítmico | Tempo      | Tempo (s) |
|-----------|-----------|-----------------------|---------------------|------------|-----------|
| <b>ED</b> | 0,6       | 7800 avaliações       | 77 iterações        | 1 (padrão) | 215       |
| <b>AG</b> | 0,6       | 7700 avaliações       | 76 iterações        | 0,883      | 189       |

Em relação aos resultados da Tab. 5.4, os métodos, apesar de alcançarem soluções iguais, tiveram comportamentos diferentes, ou seja, gastaram diferentes esforços computacionais e número de iterações para alcançar a solução, sendo o Algoritmo Genético mais rápido que a Evolução Diferencial. O tempo de processamento gasto para os métodos alcançarem a solução foi, na média, em torno de 4 minutos.

A solução encontrada para a variável de projeto mostra que quanto menor o diâmetro do círculo da secção transversal, mais distante estará as frequências naturais. A Tab. 5.5 apresenta o resultado das frequências e funções objetivo, sendo a melhor solução encontrada pelo método da Evolução Diferencial.

Tabela 5.5 - Valores das frequências e funções objetivo para a coluna cilíndrica circular cheia.

|           | $\omega_1$ [Hz] | $\omega_2$ [Hz] | $\omega_3$ [Hz] | $f_1(X)$ | $f_2(X)$ | $f_3(X)$ |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|----------|----------|
| <b>ED</b> | 0,711           | 3,596           | 6,744           | 0,711    | 2,885    | 3,148    |
| <b>AG</b> | 0,711           | 3,596           | 6,744           | 0,711    | 2,885    | 3,148    |

Ao final da tarefa de otimização, o valor encontrado para a densidade linear de massa foi  $m=2222,4 \text{ kg/m}$ .

b) Caso 2: Coluna cilíndrica tubular

Nesta simulação, o momento de inércia de área é calculado pela Eq. (5.7b) e os parâmetros definidos como variáveis de projeto são o diâmetro interno e externo do tubo.

O problema de otimização é definido por:

$$\text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[D_t, d_t]^T \quad (5.9)$$

Sujeito a:  $0,6 \leq D_t \leq 0,8 \text{ [m]}$

$0,2 \leq d_t \leq 0,3 \text{ [m]}$

A solução ideal para o problema é mostrada na Tab. 5.6, sendo os resultados obtidos com pequena diferença entre a Evolução Diferencial e o Algoritmo Genético.

Tabela 5.6 - Solução ideal para a coluna cilíndrica tubular.

|           | $f_1^o(X)$ | $f_2^o(X)$ | $f_3^o(X)$ |
|-----------|------------|------------|------------|
| <b>ED</b> | 0,866      | 3,273      | 3,666      |
| <b>AG</b> | 0,866      | 3,255      | 3,580      |

A Tab. 5.7 apresenta os valores das variáveis de projeto e o resultado dos critérios de comparação. Observa-se que os métodos alcançaram praticamente o mesmo valor para as variáveis de projeto. Novamente o Algoritmo Genético foi mais rápido, com menor custo computacional, do que a Evolução Diferencial.

Tabela 5.7 - Resultados obtidos para a coluna cilíndrica tubular.

|           | $D_t$ [m] | $d_t$ [m] | Esforço Computacional | Esforço Algorítmico | Tempo      |
|-----------|-----------|-----------|-----------------------|---------------------|------------|
| <b>ED</b> | 0,6       | 0,3       | 13300 avaliações      | 132 iterações       | 1 (padrão) |
| <b>AG</b> | 0,604     | 0,299     | 6600 avaliações       | 65 iterações        | 0,427      |

A Tab. 5.8 exibe o valor das frequências naturais e das funções objetivo. Percebe-se que a solução obtida pela Evolução Diferencial é melhor que a do Algoritmo Genético.

Tabela 5.8 - Valores das frequências e funções objetivo para a coluna cilíndrica tubular.

|           | $\omega_1$ [Hz] | $\omega_2$ [Hz] | $\omega_3$ [Hz] | $f_1(X)$ | $f_2(X)$ | $f_3(X)$ |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|----------|----------|
| <b>ED</b> | 0,802           | 4,076           | 7,742           | 0,802    | 3,274    | 3,666    |
| <b>AG</b> | 0,803           | 4,072           | 7,693           | 0,803    | 3,269    | 3,621    |

O valor da densidade linear de massa resultante foi  $m=1666,8 \text{ kg/m}$ , que é menor comparado ao da simulação anterior, caso 1.

### c) Caso 3: Coluna retangular

Considera-se nesta simulação a secção transversal do tipo retangular, caso comum em muitas construções civis, sendo o momento de inércia de área calculado pela Eq. (5.7c). Ao adotar este tipo de secção transversal, os parâmetros são os lados que definem um retângulo e que passam a ser as variáveis de projeto do problema, o qual é definido como:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[a_r, b_r]^T & (5.10) \\
 &\text{Sujeito a: } 0,4 \leq a_r \leq 0,6 \text{ [m]} \\
 &\quad \quad 0,45 \leq b_r \leq 0,55 \text{ [m]}
 \end{aligned}$$

O processo inicia-se com a obtenção da solução ideal cujos resultados são apresentados na Tab. 5.9.

Tabela 5.9 - Solução ideal para a coluna retangular.

|           | $f_1^o(X)$ | $f_2^o(X)$ | $f_3^o(X)$ |
|-----------|------------|------------|------------|
| <b>ED</b> | 0,794      | 3,155      | 4,474      |
| <b>AG</b> | 0,789      | 3,147      | 4,376      |

Os resultados apresentados na Tab. 5.9 são bem similares. A partir destes dados, mostra-se na Tab. 5.10 os valores encontrados para as variáveis de projeto, além dos valores relacionados aos critérios de comparação dos métodos.

Tabela 5.10 - Resultados obtidos para a coluna retangular.

|           | $a_r$ [m] | $b_r$ [m] | Esforço Computacional | Esforço Algorítmico | Tempo      |
|-----------|-----------|-----------|-----------------------|---------------------|------------|
| <b>ED</b> | 0,6       | 0,45      | 10400 avaliações      | 103 iterações       | 1 (padrão) |
| <b>AG</b> | 0,599     | 0,454     | 6700 avaliações       | 66 iterações        | 0,593      |

Com os resultados da Tab. 5.10, verifica-se que todos os métodos conseguiram alcançar, praticamente, a mesma solução para o problema, porém exigindo diferentes esforços computacionais, em que o Algoritmo Genético levou vantagem mais uma vez.

Na Tab. 5.11 é exibido o valor das frequências naturais encontradas por cada método utilizado, bem como o valor de cada função objetivo. Os resultados são similares, uma vez que os valores obtidos para as variáveis de projeto são quase iguais.

Tabela 5.11 - Valores das frequências e funções objetivo para a coluna retangular.

|           | $\omega_1$ [Hz] | $\omega_2$ [Hz] | $\omega_3$ [Hz] | $f_1(X)$ | $f_2(X)$ | $f_3(X)$ |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|----------|----------|
| <b>ED</b> | 0,794           | 3,949           | 7,08            | 0,794    | 3,155    | 3,131    |
| <b>AG</b> | 0,793           | 3,942           | 7,058           | 0,793    | 3,149    | 3,116    |

O valor da densidade linear de massa é  $m=2122,2 \text{ kg/m}$ , que é maior que o do caso anterior, caso 2.

#### d) Caso 4: Coluna hexagonal

Uma coluna com secção hexagonal é considerada. O valor do momento de inércia de área é calculado pela Eq. (5.7d). Neste caso, tem-se uma única variável que é o lado do hexágono, dado que este é regular. Assim, o problema de otimização é descrito como:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[a_h]^T \\ & \text{Sujeito a: } 0,3 \leq a_h \leq 0,6 \text{ [m]} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Obtém-se a solução ideal, conforme a Eq. (5.6), sendo os resultados apresentados em detalhes na Tab. 5.12.

Tabela 5.12 - Solução ideal para a coluna hexagonal.

|           | $f_1^o(X)$ | $f_2^o(X)$ | $f_3^o(X)$ |
|-----------|------------|------------|------------|
| <b>ED</b> | 0,909      | 2,946      | 3,643      |
| <b>AG</b> | 0,909      | 2,946      | 3,473      |

Na Tab. 5.13 tem-se o valor alcançado para a variável de projeto, sendo este igual para ambos os métodos utilizados. É possível observar que, ao contrário das simulações anteriores, a Evolução Diferencial mostrou ser mais eficiente, exigindo menor tempo computacional e número de iterações para resolver o problema.

Tabela 5.13 - Resultados obtidos para a coluna hexagonal.

|           | $a_h$ [m] | Esforço Computacional | Esforço Algorítmico | Tempo      |
|-----------|-----------|-----------------------|---------------------|------------|
| <b>ED</b> | 0,6       | 7000 avaliações       | 69 iterações        | 1 (padrão) |
| <b>AG</b> | 0,6       | 9700 avaliações       | 96 iterações        | 1,361      |

Com o valor final para a variável de projeto, obtiveram-se as frequências naturais e o valor das funções objetivo. De forma similar, os resultados foram iguais conforme mostra a Tab. 5.14, donde se obteve  $m=7351,5 \text{ kg/m}$ .

Tabela 5.14 - Valores das frequências e funções objetivo para a coluna hexagonal.

|           | $\omega_1$ [Hz] | $\omega_2$ [Hz] | $\omega_3$ [Hz] | $f_1(X)$ | $f_2(X)$ | $f_3(X)$ |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|----------|----------|
| <b>ED</b> | 0,908           | 3,757           | 7,229           | 0,908    | 2,848    | 3,473    |
| <b>AG</b> | 0,908           | 3,757           | 7,229           | 0,908    | 2,848    | 3,473    |

Vale destacar que a densidade linear de massa resultante torna impraticável construir tal coluna, pois, mesmo que o elemento seja estável e seguro, o custo é muito elevado devido ao enorme peso da estrutura.

e) Caso 5: Coluna perfil em I

O momento de inércia de área para a coluna que possui secção na forma de perfil I é calculado pela Eq. (5.7e). A equação que define o momento de inércia depende de quatro variáveis relacionadas à dimensão do perfil, vide Fig. 5.1(e). Logo, o problema de otimização é caracterizado da seguinte maneira:

$$\text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[B_p, b_p, H_p, h_p]^T \quad (5.12)$$

Sujeito a:  $0,4 \leq B_p \leq 0,6$  [m]

$0,2 \leq b_p \leq 0,3$  [m]

$0,4 \leq H_p \leq 0,6$  [m]

$0,1 \leq h_p \leq 0,3$  [m]

Como feito nas outras simulações, apresenta-se na Tab. 5.15 a solução ideal para o problema. Nota-se que a Evolução Diferencial e o Algoritmo Genético obtiveram resultados ligeiramente diferentes.

Tabela 5.15 - Solução ideal para a coluna perfil em I.

|           | $f_1^o(X)$ | $f_2^o(X)$ | $f_3^o(X)$ |
|-----------|------------|------------|------------|
| <b>ED</b> | 0,985      | 4,329      | 7,502      |
| <b>AG</b> | 0,959      | 3,838      | 6,6        |

Na Tab. 5.16 apresenta-se o resultado da tarefa de otimização, mostrando os valores obtidos para as variáveis de projeto. Através de uma simples análise é possível verificar que

o Algoritmo Genético exigiu um número inferior de iterações e de tempo, conseqüentemente, menor número de avaliações da função objetivo do que a Evolução Diferencial.

Tabela 5.16 - Resultados obtidos para a coluna perfil em I.

|           | $B_p$ [m] | $b_p$ [m] | $H_p$ [m] | $h_p$ [m] | Esforço Computacional | Esforço Algorítmico | Tempo      |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------------------|---------------------|------------|
| <b>ED</b> | 0,4       | 0,3       | 0,4       | 0,3       | 17100 avaliações      | 170 iterações       | 1 (padrão) |
| <b>AG</b> | 0,425     | 0,294     | 0,469     | 0,297     | 3500 avaliações       | 34 iterações        | 0,159      |

Os resultados atribuídos as variáveis de projeto revelam que o perfil em I deve ter tanto abas finas como uma alma fina, propiciando uma menor área de secção transversal. A densidade linear de massa obtida é  $m=550,2 \text{ kg/m}$ . Este baixo valor representa um dos motivos para este perfil ser o tipo de secção mais comum em colunas.

As variáveis de projeto são utilizadas para calcular as frequências naturais e o valor de cada função objetivo, sendo os resultados apresentados na Tab. 5.17. Neste caso, o resultado alcançado para as funções objetivo, dado a Evolução Diferencial, é melhor do que o alcançado pelo Algoritmo Genético.

Tabela 5.17 - Valores das frequências e funções objetivo para a coluna perfil em I.

|           | $\omega_1$ [Hz] | $\omega_2$ [Hz] | $\omega_3$ [Hz] | $f_1(X)$ | $f_2(X)$ | $f_3(X)$ |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|----------|----------|
| <b>ED</b> | 0,819           | 5,148           | 12,651          | 0,819    | 4,329    | 7,502    |
| <b>AG</b> | 0,857           | 4,684           | 10,212          | 0,858    | 3,827    | 5,528    |

Através das simulações anteriores, que consideraram diferentes tipos de secção transversal para a coluna, os resultados encontrados mostraram uma forte tendência em buscar os valores limites das restrições laterais de cada variável de projeto. Deste modo, obtém-se o maior valor possível para as frequências naturais e para as suas distâncias, traduzindo em estabilidade para a coluna.

Nas próximas seções, apresentam-se estudos sobre a influência de outras variáveis de projeto no projeto ótimo da coluna semi-enterrada. Para isto, assume-se que a coluna possui uma secção hexagonal, pois, torna-se interessante verificar o comportamento da densidade linear de massa. Tal densidade linear de massa resultou em um valor bem alto

na simulação que adotou a secção do tipo hexagonal, assim, tornando de difícil manipulação a coluna com secção hexagonal.

### 5.3.2. Influência do comprimento da coluna ( $L$ )

Esta simulação estuda a influência do comprimento total da coluna. Ao realizar tal análise, assume-se a coluna com uma carga aplicada  $P=140\text{ KN}$ , enterrada 50% no solo ( $H=0,5L$ ) de argila mole em que a rigidez  $Eti=3,6\text{ MPa}$ . Como mencionado, adota-se a secção do tipo hexagonal em que  $a_h=0,6\text{ m}$ .

Então, define-se o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[L]^T \\ &\text{Sujeito a: } 30 \leq L \leq 50 \text{ [m]} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Apresentam-se os valores das soluções ideais na Tab. 5.18. Verifica-se uma pequena diferença entre os resultados obtidos por cada método.

Tabela 5.18 - Solução ideal para a coluna com comprimento variável.

|           | $f_1^o(X)$ | $f_2^o(X)$ | $f_3^o(X)$ |
|-----------|------------|------------|------------|
| <b>ED</b> | 1,710      | 6,294      | 11,102     |
| <b>AG</b> | 1,676      | 6,251      | 10,296     |

Nota-se na Tab. 5.19 que ambos os métodos alcançaram, praticamente, a mesma solução, ou seja, a coluna com o menor comprimento total possível. Porém, tais métodos gastaram diferentes esforços computacionais e algorítmicos, sendo o Algoritmo Genético mais rápido.

Tabela 5.19 - Resultados obtidos para a coluna com comprimento variável.

|           | $L$ [m] | Esforço Computacional | Esforço Algorítmico | Tempo      |
|-----------|---------|-----------------------|---------------------|------------|
| <b>ED</b> | 30,0    | 6500 avaliações       | 64 iterações        | 1 (padrão) |
| <b>AG</b> | 30,103  | 1700 avaliações       | 16 iterações        | 0,221      |

A Tab. 5.20 apresenta o valor das freqüências naturais e das funções objetivo para o valor da variável de projeto dado na Tab. 5.19. O resultado encontrado pela Evolução Diferencial é um pouco melhor que o do Algoritmo Genético.

Tabela 5.20 - Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna com comprimento variável.

|           | $\omega_1$ [Hz] | $\omega_2$ [Hz] | $\omega_3$ [Hz] | $f_1(X)$ | $f_2(X)$ | $f_3(X)$ |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|----------|----------|
| <b>ED</b> | 1,710           | 8,004           | 19,106          | 1,710    | 6,294    | 11,102   |
| <b>AG</b> | 1,702           | 7,957           | 18,978          | 1,702    | 6,253    | 11,022   |

Através desta simulação, conclui-se que para distanciar as freqüências é preciso uma coluna com o menor comprimento total. Desta forma, tornando a estrutura rígida e fazendo com que as oscilações sejam as mínimas possíveis.

### 5.3.3. Influência do comprimento da coluna e do parâmetro da secção transversal ( $L$ , $a_h$ )

Visa-se examinar a influência do comprimento total da coluna juntamente com o parâmetro que define a secção transversal hexagonal. Mediante a isto, escreve-se o problema de otimização como:

$$\text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[L, a_h]^T \quad (5.14)$$

$$\text{Sujeito a: } 30 \leq L \leq 50 \text{ [m]}$$

$$0,3 \leq a_h \leq 0,6 \text{ [m]}$$

Seguindo o padrão das simulações anteriores, mostram-se as soluções ideais na Tab. 5.21.

Tabela 5.21 - Solução ideal para a coluna com comprimento e secção variável.

|           | $f_1^o(X)$ | $f_2^o(X)$ | $f_3^o(X)$ |
|-----------|------------|------------|------------|
| <b>ED</b> | 1,710      | 6,294      | 11,102     |
| <b>AG</b> | 1,662      | 5,739      | 10,671     |

Os métodos retornaram, basicamente, a mesma solução para o problema, porém gastando diferentes iterações e avaliações da função objetivo. Logo, diferentes tempos computacionais conforme apresentado na Tab. 5.22.

Tabela 5.22 - Resultados obtidos para a coluna com comprimento e secção variável.

|           | L [m]  | $a_r$ [m] | Esforço Computacional | Esforço Algorítmico | Tempo      |
|-----------|--------|-----------|-----------------------|---------------------|------------|
| <b>ED</b> | 30,0   | 0,6       | 12300 avaliações      | 122 iterações       | 1 (padrão) |
| <b>AG</b> | 30,954 | 0,597     | 4100 avaliações       | 40 iterações        | 0,275      |

O valor encontrado para a densidade linear de massa é  $m=7351,5 \text{ kg/m}$ , que representa uma coluna bastante pesada e, em termos materiais, bastante cara.

Tabela 5.23 - Valores das frequências e funções objetivo para a coluna com comprimento e secção variável.

|           | $\omega_1$ [Hz] | $\omega_2$ [Hz] | $\omega_3$ [Hz] | $f_1(X)$ | $f_2(X)$ | $f_3(X)$ |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|----------|----------|
| <b>ED</b> | 1,710           | 8,004           | 19,106          | 1,710    | 6,294    | 11,102   |
| <b>AG</b> | 1,636           | 7,546           | 17,883          | 1,636    | 5,910    | 10,337   |

Tais simulações encontraram uma coluna realmente robusta, isto é, que possui o menor comprimento total possível e a maior área de secção transversal. Então, com o maior momento de inércia de área e grande densidade linear de massa. As funções objetivo calculadas usando a Evolução Diferencial foram melhores do que as obtidas com o Algoritmo Genético.

#### 5.3.4. Influência da altura da fundação (H)

Com o intuito de verificar a importância da fundação no projeto da coluna, assume-se que a profundidade da coluna enterrada no solo seja variável. Assim, dada a coluna hexagonal com  $a_h=0,6 \text{ m}$ , comprimento total  $L=50 \text{ m}$ , com uma carga aplicada  $P=140 \text{ KN}$ , enterrada em um solo de argila mole em que a rigidez  $E_t=3,6 \text{ MPa}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[H]^T \\ &\text{Sujeito a: } 20 \leq H \leq 30 \text{ [m]} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Mostram-se na Tab. 5.24 as soluções para as funções objetivo ideais.

Tabela 5.24 - Solução ideal para a coluna com altura da fundação variável.

|           | $f_1^o(X)$ | $f_2^o(X)$ | $f_3^o(X)$ |
|-----------|------------|------------|------------|
| <b>ED</b> | 1,187      | 2,922      | 3,87       |
| <b>AG</b> | 1,187      | 2,922      | 3,87       |

As soluções mostradas na Tab. 5.24 são iguais, o que leva a suposição de ambos os métodos terem encontrado a mesma solução para o problema. Isto é verificado nos resultados expostos na Tab. 5.25, em que o valor encontrado, no final do processo de otimização, para a variável de projeto é o seu limite inferior.

Tabela 5.25 - Resultados obtidos para a coluna com altura da fundação variável.

|           | H [m] | Esforço Computacional | Esforço Algorítmico | Tempo      |
|-----------|-------|-----------------------|---------------------|------------|
| <b>ED</b> | 30,0  | 6800 avaliações       | 67 iterações        | 1 (padrão) |
| <b>AG</b> | 30,0  | 11400 avaliações      | 113 iterações       | 1,399      |

Os métodos tiveram diferentes esforços computacionais e algorítmicos para alcançar à mesma solução, tendo destaque, desta vez, a Evolução Diferencial. Na Tab. 5.26, os valores das freqüências naturais e das funções objetivo são apresentados, sendo que ambos os métodos calcularam valores iguais para as funções objetivo.

Tabela 5.26 - Valores das freqüências e funções objetivo para a coluna com altura da fundação variável.

|           | $\omega_1$ [Hz] | $\omega_2$ [Hz] | $\omega_3$ [Hz] | $f_1(X)$ | $f_2(X)$ | $f_3(X)$ |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|----------|----------|
| <b>ED</b> | 1,187           | 4,098           | 7,285           | 1,187    | 2,911    | 3,188    |
| <b>AG</b> | 1,187           | 4,098           | 7,285           | 1,187    | 2,911    | 3,188    |

Pela análise desta simulação e das anteriores, observou-se que, para obter o ótimo da função objetivo definida pela Eq. (5.2), é preciso que a coluna torne-se robusta. O solo, então, passa a ter grande importância, pois bons resultados para a função objetivo são

encontrados no caso em que a coluna encontra-se enterrada até o limite superior definido para a variável de projeto.

### 5.3.5. Influência da altura da fundação, do comprimento total e da seção transversal da coluna ( $H$ , $L$ , $a_h$ )

Todos os parâmetros utilizados nas simulações anteriores são considerados como variáveis de projeto para esta simulação. Com isso, busca-se analisar o comportamento destas variáveis no projeto ótimo da coluna semi-enterrada variando, apenas, os valores de rigidez para o solo.

#### a) Caso 1: Solo com rigidez $Eti=3,6 \text{ MPa}$

Ao realizar a simulação numérica, assume-se a coluna hexagonal com uma carga aplicada  $P=140 \text{ KN}$ . Logo:

$$\text{Maximizar } f(X), \text{ com } X=[H, L, a_h]^T \quad (5.16)$$

$$\text{Sujeito a: } 20 \leq H \leq 30 \text{ [m]}$$

$$40 \leq L \leq 50 \text{ [m]}$$

$$0,3 \leq a_h \leq 0,6 \text{ [m]}$$

As soluções ideais, calculadas por ambos os métodos, são apresentadas na Tab. 5.27.

Tabela 5.27 - Solução ideal para o problema definido na Eq. (5.16), com  $Eti=3,6 \text{ MPa}$ .

|           | $f_1^o(X)$ | $f_2^o(X)$ | $f_3^o(X)$ |
|-----------|------------|------------|------------|
| <b>ED</b> | 2,399      | 5,178      | 5,918      |
| <b>AG</b> | 2,291      | 4,877      | 5,682      |

Os resultados obtidos, conforme a Tab. 5.28, mostram que o Algoritmo Genético teve maior rapidez ao resolver a tarefa de otimização, gastando menor tempo, número de iterações e, conseqüentemente, menor esforço computacional.

Tabela 5.28 - Resultados obtidos para o problema definido na Eq. (5.16), com  $Eti=3,6 \text{ MPa}$ .

|           | H [m]  | L [m]  | $a_h$ [m] | Esforço Computacional | Esforço Algorítmico | Tempo      |
|-----------|--------|--------|-----------|-----------------------|---------------------|------------|
| <b>ED</b> | 30,0   | 40,0   | 0,6       | 10400 avaliações      | 103 iterações       | 1 (padrão) |
| <b>AG</b> | 29,983 | 41,393 | 0,6       | 3700 avaliações       | 36 iterações        | 0,279      |

A Tab. 5.29 mostra os respectivos valores das frequências naturais e das funções objetivo, tornando possível verificar que a Evolução Diferencial obteve uma resposta mais eficiente do que o Algoritmo Genético.

Tabela 5.29 - Valores das frequências e funções objetivo para o problema definido na Eq. (5.16), com  $Eti=3,6 \text{ MPa}$ .

|           | $\omega_1$ [Hz] | $\omega_2$ [Hz] | $\omega_3$ [Hz] | $f_1(X)$ | $f_2(X)$ | $f_3(X)$ |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|----------|----------|
| <b>ED</b> | 2,173           | 5,295           | 11,115          | 2,173    | 3,123    | 5,820    |
| <b>AG</b> | 1,988           | 5,081           | 10,418          | 1,988    | 3,092    | 5,337    |

Além disso, o valor da densidade linear de massa manteve-se igual ao encontrado nas simulações que consideravam a coluna hexagonal, ou seja,  $m=7351,5 \text{ kg/m}$ , sendo o volume resultante igual a  $37,412 \text{ m}^3$ .

b) Caso 2: Solo com rigidez  $Eti=6,3 \text{ MPa}$

O problema de otimização é o mesmo definido na Eq. (5.16) para uma coluna com secção hexagonal e carga aplicada  $P=140 \text{ KN}$ . Porém, agora a rigidez do solo é  $Eti=6,3 \text{ MPa}$ .

Ao iniciar a simulação, obtiveram-se as soluções ideais, as quais são apresentadas na Tab. 5.30, sendo que os métodos obtiveram resultados próximos.

Tabela 5.30 - Solução ideal para o problema definido na Eq. (5.16), com  $Eti=6,3 \text{ MPa}$ .

|           | $f_1^o(X)$ | $f_2^o(X)$ | $f_3^o(X)$ |
|-----------|------------|------------|------------|
| <b>ED</b> | 2,763      | 6,896      | 5,704      |
| <b>AG</b> | 2,608      | 6,38       | 5,302      |

A solução encontrada para as variáveis de projeto estão na Tab. 5.31 e são bastante similares. Novamente, o Algoritmo Genético gastou menos tempo para obter a solução.

Tabela 5.31 - Resultados obtidos para o problema definido na Eq. (5.16), com  $Eti=6,3 \text{ MPa}$ .

|           | H [m]  | L [m]  | $a_h$ [m] | Esforço Computacional | Esforço Algorítmico | Tempo      |
|-----------|--------|--------|-----------|-----------------------|---------------------|------------|
| <b>ED</b> | 30,0   | 40,0   | 0,6       | 18400 avaliações      | 183 iterações       | 1 (padrão) |
| <b>AG</b> | 29,977 | 40,504 | 0,599     | 7200 avaliações       | 71 iterações        | 0,31       |

Apesar de o Algoritmo Genético ter sido mais rápido na execução, a solução apresentada pela Evolução Diferencial traz um resultado melhor para o problema de otimização, conforme pode ser visto na Tab 5.32. O valor da densidade linear de massa é igual a  $m=7351,5 \text{ kg/m}$  e o volume igual a  $37,412 \text{ m}^3$ .

Tabela 5.32 - Valores das frequências e funções objetivo para o problema definido na Eq. (5.16), com  $Eti=6,3 \text{ MPa}$ .

|           | $\omega_1$ [Hz] | $\omega_2$ [Hz] | $\omega_3$ [Hz] | $f_1(X)$ | $f_2(X)$ | $f_3(X)$ |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|----------|----------|
| <b>ED</b> | 2,616           | 6,025           | 11,443          | 2,616    | 3,409    | 5,418    |
| <b>AG</b> | 2,518           | 5,957           | 11,181          | 2,518    | 3,439    | 5,224    |

Ao comparar os resultados do caso 1 com os do caso 2, tanto a Evolução Diferencial como o Algoritmo Genético chegaram praticamente nos mesmos valores para as variáveis de projeto, vide Tab. 5.28 e 5.31. Então, a rigidez do solo, dado o mesmo tipo de solo, isto é, de argila mole, manteve influência proporcional no cálculo das frequências naturais conforme se tem nas Tabs. 5.29 e 5.32.

Ao analisar os resultados das simulações apresentadas na seção 5.3, verificou-se a tendência em manter a coluna semi-enterrada a mais robusta possível. Em outras palavras, tais resultados mostraram que a coluna deve ter a maior área de seção transversal, conseqüentemente, gerando o maior momento de inércia de área e densidade linear de massa, o menor comprimento total e estar enterrado o mais profundo possível.

Portanto, isto traduz em maior estabilidade a coluna, pois suas frequências tendem a se maximizar garantindo a segurança necessária do projeto. Por outro lado, o peso

calculado torna o projeto impraticável. Desta forma, é dada continuidade ao trabalho de modo a estabelecer um novo objetivo que considera a minimização do volume.

Na prática este resultado é comprovado e pode ser verificado em construções feitas sem o devido projeto de engenharia. Apesar de estas construções oferecerem certa segurança, existem conseqüências em relação ao elevado custo do material e desperdício do mesmo, além do enorme peso da estrutura.

Em relação aos métodos utilizados, diante das simulações realizadas e dos problemas considerados, verificou-se que todos obtiveram resultados muito similares, mas a Evolução Diferencial obteve resultados melhores em termos de solução do problema, enquanto o Algoritmo Genético em termos computacionais.

#### **5.4. Problema de Otimização com Restrições**

Na seção anterior, abordou-se um problema de otimização que tratava das freqüências naturais da coluna. O principal problema com os resultados obtidos foram a elevada densidade linear de massa e o volume da estrutura, tornando inviável, na prática, construir tal elemento, além do desperdício que possa estar sendo gerado. Desta forma, procura-se obter resultados bons para as freqüências, contornando tais dificuldades apresentadas.

Diante disto, aborda-se a mesma idéia de trabalhar com as freqüências naturais da coluna, porém inserindo um objetivo conflitante que visa minimizar o volume da coluna, conseqüentemente, diminuir a densidade linear e o peso. Também, inserem-se restrições relacionadas à altura da fundação e a carga externa suportada pelo elemento.

O projeto ótimo da coluna semi-enterrada é, então, obtido considerando as seguintes funções objetivo:

- (i) maximizar a primeira freqüência natural;
- (ii) maximizar a distância entre a primeira e a segunda freqüência natural;
- (iii) maximizar a distância entre a segunda e a terceira freqüência natural;
- (iv) minimizar o volume da coluna semi-enterrada.

Sujeito as seguintes restrições:

- a) A coluna deve ficar enterrada entre 30% e 60% de seu comprimento total;
- b) A carga aplicada deve ser menor que a primeira carga crítica de Euler.

De forma matemática, as funções objetivo são definidas como:

$$\begin{cases} f(X) = [f_1(X) \ f_2(X) \ f_3(X) \ f_4(X)]^T \\ f_1(X) = \max \ \omega_1 \\ f_2(X) = \max (\omega_2 - \omega_1) \\ f_3(X) = \max (\omega_3 - \omega_2) \\ f_4(X) = \min \ volume \end{cases} \quad (5.17)$$

sendo o *volume* expresso pelo produto entre o comprimento total e a área da secção transversal, a qual depende explicitamente do tipo de secção transversal da coluna. Em relação às restrições do problema, tem-se:

$$\begin{cases} g(X) = [g_1(X) \ g_2(X) \ g_3(X)]^T \\ g_1(X) = 0,3L - H \leq 0 \\ g_2(X) = H - 0,6L \leq 0 \\ g_3(X) = P - P_1^c \leq 0, \text{ onde } P_1^c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \end{cases} \quad (5.18)$$

A primeira carga crítica de Euler, dada na Eq. (5.18), é proporcional ao módulo de elasticidade do material, ou seja, depende do tipo de material, além do tipo de secção transversal ou, mais precisamente, do momento de inércia de área. Porém, é inversamente proporcional ao quadrado do comprimento total da coluna. Tal carga crítica fornece o limite crítico, a partir do qual a coluna sai da sua condição de equilíbrio estável e passa para o equilíbrio instável.

Os métodos utilizados foram desenvolvidos para resolver problemas irrestritos. Como mencionado no capítulo quatro, deve-se reescrever o problema adicionando a função objetivo original uma nova função, denominada função de penalidade,  $Pf(X)$ .

Esta tem o objetivo de dificultar a violação das restrições, além de transformar o problema com restrições em um problema sem restrições. Assim, ao realizar tal procedimento, obtém-se a função pseudo-objetivo a ser maximizada, ou seja:

$$\text{Maximizar } \varphi(X) = f(X) - k_p Pf(X) \quad (5.19)$$

sendo,

$$f(X) = p_1 \frac{f_1(X)}{f_1^o} + p_2 \frac{f_2(X)}{f_2^o} + p_3 \frac{f_3(X)}{f_3^o} - p_4 \frac{f_4(X)}{f_4^o} \quad (5.20)$$

$$Pf(X) = (\max [0, g_1(X)])^2 + (\max [0, g_2(X)])^2 + (\max [0, g_3(X)])^2 \quad (5.21)$$

em que  $k_p$  é o fator de penalidade escolhido de forma adequada para que as restrições não sejam violadas. Baseando-se em algumas simulações realizadas e dados da literatura (OLIVEIRA, 2006), adota-se o valor  $k_p=1000$  para as simulações a serem realizadas. Também, neste estudo, os fatores de ponderação presentes na Eq. (5.20) possuem valores iguais, isto é,  $p_1=p_2=p_3=p_4=0,25$ .

a) Caso 1: Solo com rigidez  $Eti=3,6 \text{ MPa}$

Busca-se verificar a influência da altura da fundação,  $H$ , do comprimento total,  $L$ , e do parâmetro da secção transversal da coluna,  $a_h$ , para o problema restrito. Assim, considera-se que a coluna possui secção hexagonal com uma carga aplicada  $P=250 \text{ KN}$ , enterrada em um solo de argila mole cuja rigidez é  $Eti=3,6 \text{ MPa}$ . Logo:

$$\text{Maximizar } \varphi(X), \text{ com } X=[H, L, a_h]^T \quad (5.22)$$

Sujeito a: Eq. (5.18)

$$20 \leq H \leq 30 \text{ [m]}$$

$$40 \leq L \leq 50 \text{ [m]}$$

$$0,3 \leq a_h \leq 0,6 \text{ [m]}$$

Inicialmente, calcularam-se as soluções ideais que são apresentadas na Tab. 5.33.

Tabela 5.33 - Solução ideal para o problema definido na Eq. (5.22), com  $Eti=3,6 \text{ MPa}$  e  $P=250 \text{ KN}$ .

|           | $f_1^o(X)$ | $f_2^o(X)$ | $f_3^o(X)$ | $f_4^o(X)$ |
|-----------|------------|------------|------------|------------|
| <b>ED</b> | 1,498      | 4,701      | 5,917      | 9,353      |
| <b>AG</b> | 1,408      | 4,314      | 5,7312     | 11,019     |

A Tab. 5.34 apresenta os valores alcançados para as variáveis de projeto e o resultado dos critérios de comparação. Nota-se que o Algoritmo Genético foi mais rápido para obter a solução, ou seja, exigiu menor esforço computacional, menor número de iterações e de tempo.

Tabela 5.34 - Resultados obtidos para o problema definido na Eq. (5.22), com  $E_t=3,6 \text{ MPa}$  e  $P=250 \text{ KN}$ .

|           | H [m] | L [m]  | $a_h$ [m] | Esforço Computacional | Esforço Algorítmico | Tempo      |
|-----------|-------|--------|-----------|-----------------------|---------------------|------------|
| <b>ED</b> | 24,0  | 40,0   | 0,3       | 14800 avaliações      | 147 iterações       | 1 (padrão) |
| <b>AG</b> | 24,24 | 40,578 | 0,316     | 1700 avaliações       | 16 iterações        | 0,093      |

Como mencionado, o Algoritmo Genético foi computacionalmente mais eficaz para encontrar a solução. Porém, a solução dada pela Evolução Diferencial trouxe resultados melhores, tanto para as frequências, que foram maximizadas, como para o volume da estrutura, que foi minimizado, conforme dado na Tab. 5.35.

Tabela 5.35 - Valores das frequências e funções objetivo para o problema da Eq. (5.22), com  $E_t=3,6 \text{ MPa}$  e  $P=250 \text{ KN}$ .

|           | $\omega_1$ [Hz] | $\omega_2$ [Hz] | $\omega_3$ [Hz] | $f_1(X)$ | $f_2(X)$ | $f_3(X)$ | $f_4(X)$ |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|----------|----------|----------|
| <b>ED</b> | 1,311           | 6,012           | 7,94            | 1,311    | 4,701    | 1,928    | 9,353    |
| <b>AG</b> | 1,298           | 5,825           | 7,732           | 1,298    | 4,527    | 1,907    | 10,507   |

A densidade linear de massa reduziu-se bastante em comparação com as obtidas anteriormente e, principalmente em comparação com a da seção 4.3.5, isto é, decresceu de  $m=7351,5 \text{ kg/m}$  para  $m=1837,9 \text{ kg/m}$ , mesmo para a carga externa  $P$  sendo quase o dobro das anteriores. O volume também reduziu bastante, caindo de  $37,412 \text{ m}^3$  para  $9,353 \text{ m}^3$ .

Em relação às frequências naturais, tanto a primeira como a segunda ficaram próximas das obtidas nas simulações anteriores, vide Tabs. 5.29 e 5.35. Somente para a terceira frequência é que a diferença é considerável, porém é compensada pela redução do volume.

O valor das restrições e da primeira carga crítica de Euler, obtidas mediante as variáveis de projeto da Tab. 5.34, são apresentadas na Tab. 5.36. Percebe-se que as mesmas são satisfeitas para os dois métodos estudados.

Tabela 5.36 - Valor final das restrições dado o problema definido na Eq. (5.22), com  $Eti=3,6$  MPa e  $P=250$  KN.

| Restrições | Evolução Diferencial     | Algoritmo Genético       |
|------------|--------------------------|--------------------------|
| $g_1(x)$   | -12,0 [m]                | -12,0 [m]                |
| $g_2(x)$   | 0,0 [m]                  | 0,0 [m]                  |
| $g_3(x)$   | $-5,072 \times 10^6$ [N] | $-5,072 \times 10^6$ [N] |
| $P_1^c$    | $5,572 \times 10^6$ [N]  | $5,572 \times 10^6$ [N]  |

O valor resultante da primeira carga crítica de Euler,  $P_1^c$ , é bastante alto em comparação a carga que foi aplicada,  $P$ , demonstrando que coluna precisa sofrer uma carga axial muito maior para entrar em uma configuração crítica, e, então, começar a oscilar. Também, é importante observar que, não somente a secção transversal teve sua área diminuída, mas também o comprimento total da coluna, mantendo uma relação de proporcionalidade para com a carga crítica resultante.

b) Caso 2: Solo com rigidez  $Eti=6,3$  MPa

Esta simulação é semelhante ao caso 1 desta seção, porém considera a coluna com uma carga aplicada  $P=500$  KN e rigidez do solo  $Eti=6,3$  MPa. Deste modo, o problema de otimização ainda é dado pela Eq. (5.22).

De maneira similar, calcularam-se as soluções ideais, vide Tab. 5.37, as quais são utilizadas durante a tarefa de otimização.

Tabela 5.37 - Solução ideal para o problema definido na Eq. (5.22), com  $Eti=6,3$  MPa e  $P=500$  KN.

|           | $f_1^o(X)$ | $f_2^o(X)$ | $f_3^o(X)$ | $f_4^o(X)$ |
|-----------|------------|------------|------------|------------|
| <b>ED</b> | 1,718      | 5,794      | 5,699      | 9,353      |
| <b>AG</b> | 1,598      | 5,408      | 5,056      | 10,69      |

Os resultados obtidos para as variáveis de projeto são mostrados na Tab. 5.38. Nota-se que a Evolução Diferencial retorna os mesmos resultados do caso 1, vide comparação com a Tab. 5.34, porém os valores dos critérios computacionais são de ordens diferentes. O Algoritmo Genético obteve uma solução bem similar quando comparado com o caso 1, Tab.

5.34, e com a própria Evolução Diferencial, porém mostrou-se muito mais rápido que a Evolução Diferencial.

Tabela 5.38 - Resultados obtidos para o problema definido na Eq. (5.22), com  $Eti=6,3 \text{ MPa}$  e  $P=500 \text{ KN}$ .

|           | H [m]  | L [m] | $a_h$ [m] | Esforço Computacional | Esforço Algorítmico | Tempo      |
|-----------|--------|-------|-----------|-----------------------|---------------------|------------|
| <b>ED</b> | 24,0   | 40,0  | 0,3       | 17800 avaliações      | 177 iterações       | 1 (padrão) |
| <b>AG</b> | 23,899 | 41,14 | 0,345     | 2900 avaliações       | 28 iterações        | 0,137      |

A solução dada pelo Algoritmo Genético é inferior, em termos quantitativos, em relação à solução dada pela Evolução Diferencial conforme mostra na Tab. 5.39, a qual apresenta o valor final das freqüências e das funções objetivo.

Tabela 5.39 - Valores das freqüências e funções objetivo para o problema definido na Eq. (5.22), com  $Eti=6,3 \text{ MPa}$  e  $P=500 \text{ KN}$ .

|           | $\omega_1$ [Hz] | $\omega_2$ [Hz] | $\omega_3$ [Hz] | $f_1(X)$ | $f_2(X)$ | $f_3(X)$ | $f_4(X)$ |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|----------|----------|----------|
| <b>ED</b> | 1,425           | 7,218           | 9,877           | 1,425    | 5,794    | 2,658    | 9,353    |
| <b>AG</b> | 1,360           | 6,451           | 8,981           | 1,360    | 5,091    | 2,530    | 12,743   |

As freqüências não permaneceram iguais as do caso 1, Tab. 5.35, pois, pela formulação do problema, capítulo três, são afetadas diretamente pela carga axial  $P$ . Por outro lado, obteve-se o mesmo grau de redução da densidade linear de massa e do volume que no caso 1, ou seja,  $m=1837,9 \text{ kg/m}$  e o volume igual a  $9,353 \text{ m}^3$ , pois as variáveis de projeto em ambos os casos são as mesmas, dada a solução pela Evolução Diferencial,.

O valor das restrições e da primeira carga crítica de Euler são apresentados na Tab. 5.40.

Tabela 5.40 - Valor final das restrições dado o problema definido na Eq. (5.22), com  $Eti=6,3$  MPa e  $P=500$  KN.

| Restrições | Evolução Diferencial     | Algoritmo Genético       |
|------------|--------------------------|--------------------------|
| $g_1(x)$   | -12,0 [m]                | -12,0 [m]                |
| $g_2(x)$   | 0,0 [m]                  | 0,0 [m]                  |
| $g_3(x)$   | $-5,072 \times 10^6$ [N] | $-5,072 \times 10^6$ [N] |
| $P_1^c$    | $5,572 \times 10^6$ [N]  | $5,572 \times 10^6$ [N]  |

Percebeu-se, então, que o aumento da carga externa aplicada, o dobro do valor do caso 1, não trouxe influência significativa nos valores das restrições nem na determinação das variáveis de projeto, conforme comparando as Tabs. 5.34 e 5.38.

Analisando os resultados das simulações numéricas, verificou-se que o projeto ótimo da coluna semi-enterrada resulta em um elemento com as seguintes características:

- Menor comprimento total possível;
- Limite máximo de enterramento da coluna;
- Área de secção transversal minimizada.

Os resultados são satisfatórios tanto em termos de segurança estrutural quanto em relação ao custo do material necessário. Com isso, a escolha do projetista em relação ao que considerar no projeto passa a ser importante, ou seja, maximizar as frequências e suas distâncias ou minimizar o volume. Assim, é possível que o projetista obtenha um conjunto de diferentes soluções para um mesmo problema, soluções de *Pareto*, atribuindo diferentes valores para os fatores de ponderação correlacionados a cada um dos objetivos nas Eqs. (5.5) e (5.20). Deste modo, o projetista poderá ver qual a melhor relação custo/benefício e, é claro, tomar a melhor decisão.

Comparando a performance dos métodos evolutivos empregados, observou-se que, de forma geral, o Algoritmo Genético exigiu menor esforço computacional, sendo mais rápido. A Evolução Diferencial, porém, obteve um projeto ótimo melhor, com valores um pouco mais elevados para as frequências naturais e um pouco menor para o volume da coluna.



## **CAPÍTULO VI**

### **CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS**

Neste trabalho foi apresentado o estudo de um problema da teoria de oscilações não-lineares, formulando um modelo matemático para uma coluna semi-enterrada em um solo do tipo “com enfraquecimento”. O sistema, formado por um conjunto de equações diferenciais ordinárias não-lineares, que descreve o comportamento deste elemento foi fornecido.

Os passos necessários para realizar a modelagem do problema físico foram apresentados seguindo a Equação de Lagrange, em que os graus de liberdade do problema foram determinados a partir da aplicação do método de Rayleigh-Ritz. A função Lagrangeana foi escrita permitindo obter a equação de movimento e visando determinar analiticamente as três primeiras frequências naturais. O modelo dinâmico desenvolvido foi validado através da comparação dos resultados obtidos usando um modelo de elementos finitos.

Para o projeto ótimo da coluna semi-enterrada, escreveu-se uma função multi-objetivo que visava a maximização da primeira frequência natural e o distanciamento das três primeiras frequências naturais. Em projetos de engenharia envolvendo colunas é muito importante maximizar estas frequências, pois, a partir do momento que a coluna começa a oscilar na primeira frequência natural, sua estabilidade é rompida e afeta diretamente a segurança da estrutura.

Para a solução do problema de otimização foram considerados os métodos da Evolução Diferencial e o Algoritmo Genético. Deste modo, validaram-se os resultados e, além disso, estudou-se a eficácia destes métodos durante a resolução do problema.

Nas simulações iniciais, verificou-se a influência dos parâmetros que definiam a secção transversal, mais diretamente, o momento de inércia de área. Os resultados alcançados, para os diferentes tipos de secção, permitiram concluir que a coluna com um perfil I fornece, ao mesmo tempo, estabilidade, frequências bem altas e distantes, e baixo

custo material, dado a menor densidade linear de massa. Por outro lado, uma coluna com secção hexagonal, sujeita as mesmas configurações, resulta em um elemento altamente pesado e com baixas frequências naturais, necessitando de maior atenção.

Assim, na continuidade das simulações, considerou-se a coluna com secção hexagonal, inserindo outras variáveis de projeto no problema, isto é, o comprimento total e a altura da fundação. Com isto, a coluna obtida sempre mantinha a característica de apresentar elevados valores para o volume e a densidade linear de massa, apesar de maximizar as frequências. Assim, resultando em uma coluna com o menor comprimento total possível, maior área de secção transversal, logo, maior momento de inércia de área e enterrada o mais profundo possível, independente dos valores de rigidez para um mesmo solo.

Como a densidade linear de massa e o volume da coluna tornaram o projeto impraticável, definiu-se um novo problema de otimização com as mesmas variáveis de projeto e que visava, além dos objetivos anteriores relacionados às frequências naturais, minimizar o volume da coluna. Além disso, buscou-se saber o quanto a profundidade de enterramento e a carga externa aplicada influenciavam no projeto ótimo.

A partir deste novo problema, diversas simulações e análises foram efetuadas permitindo concluir que o projeto ótimo da coluna semi-enterrada resulta em um elemento com: o menor comprimento total; maior profundidade de enterramento no solo (mesmo considerando diferentes rigidezes para o mesmo solo); e, contrariamente aos outros resultados, com uma área de secção transversal pequena. De forma geral, as frequências resultantes foram levemente modificadas em comparação com as do problema anterior, apresentando uma notável diferença somente para a terceira frequência natural. Porém, esperava-se esta diferença, pois as funções objetivo são conflitantes entre si.

O fato de a coluna estar enterrada trouxe resultados interessantes, pois o solo passa a atuar como um obstáculo de sustentação que restringe as oscilações laterais do elemento, dando maior rigidez à coluna, conseqüentemente, maior estabilidade. Em relação à carga aplicada no eixo axial, pouca diferença foi observada nas frequências resultantes quando tal valor de carga foi aumentado, uma vez que tal carga está relacionada diretamente com a carga crítica de Euler e possuía seu valor sempre abaixo desta.

Analisando os métodos de otimização, conclui-se que o método da Evolução Diferencial apresentou ser mais adequado que o Algoritmo Genético, pois resultou, em quase todas as simulações, em um projeto ótimo melhor para os problemas. Porém, a diferença dos resultados não era grande e o mérito do Algoritmo Genético esteve ligado ao fato de apresentar maior rapidez em computar as soluções.

A principal contribuição deste trabalho, além de obter o projeto ótimo da coluna utilizando as técnicas de otimização, foi o desenvolvimento de um modelo analítico adequado para a coluna semi-enterrada. Este problema não é trivial, pois resultou em equações extensas e de difícil manipulação. Além disso, a formulação analítica para o modelo dinâmico da coluna semi-enterrada permitiu uma melhor performance dos métodos de otimização, dando margem a melhores resultados e com menor esforço computacional.

Por último, vale destacar que a metodologia apresentada permite ao projetista ter noção do comportamento global das variáveis de projeto. Assim, capacitando o projetista a fazer a melhor escolha, além de atender as especificações do projeto.

A partir dos resultados obtidos neste trabalho, alguns trabalhos futuros podem ser desenvolvidos, a saber:

- Aumentar o número de graus de liberdade do modelo e verificar qual a melhora se alcança nas frequências;
- Refazer a modelagem para outras condições de apoio na coluna e analisar a influência de cada uma na solução final;
- O solo tem grande importância, então, seria interessante verificar como se comporta a coluna para diferentes tipos de solo. Outros modelos de solo, também, poderiam ser utilizados para a devida comparação dos resultados;
- Fazer um modelo experimental em escala reduzida usando funções de similitude e, então, comparar as frequências de tal modelo com as obtidas de forma analítica;
- Resolver o conjunto de equações de movimento utilizando técnicas numéricas e analíticas aproximadas, isto é, métodos de perturbação, de modo a fornecer uma solução no tempo, além de comparar cada metodologia empregada;
- Fazer uma análise da estabilidade da coluna proposta utilizando, por exemplo, os critérios da Teoria de Bifurcações, estabilidade local, ou o método de Melnikov, estabilidade global, de modo a fornecer expressões analíticas que determinam a carga suportada pela coluna em função dos outros parâmetros que a descrevem;
- Utilizar outros métodos de otimização estocásticos, como Enxame de Partículas, Colônia de Formigas e/ou Ciclo de Vida, de modo a compará-los na resolução do problema.



## CAPÍTULO VII

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDRADE, E. Q. **Instabilidade e Vibrações de Colunas Esbeltas sobre Base Elástica**. 1993. Dissertação de Mestrado – PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- BAZANT, Z. P.; CEDOLIN, L. **Stability of Structures. Elastic-Inelastic Fracture and Damage Theories**. New York: Oxford University Press, 1991.
- CABRAL, V. D.; SIEIRA, A. C. C. F.; SILVA, J. G. S. Estudo da Resposta Dinâmica de Colunas Semi-Enterradas. **Proceedings of XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE**, Belém (Brasil), 2006.
- CHAJES, A. **Principles of Structural Stability Theory**. New Jersey: Prentice-Hall, 1974.
- CHENG, S. L.; HWANG, C. Optimal Approximation of Linear Systems by a Differential Evolution Algorithm. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans**. Vol. 31, n. 6, p. 698-707, 2001.
- DARWIN, C. **On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favored Races in the Struggle for Life**. London: John Murray, 1859.
- DEB, K. **Multi-objective optimization using Evolutionary Algorithms**. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- DEB, K. **Optimization for Engineering Design: Algorithms and Examples**. New Delhi: Prentice-Hall, 1995.

DEJONG, K. A. **An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems.** 1975. PhD Dissertation – University of Michigan, USA.

DYM, C. L.; SHAMES, L. H. **Solid Mechanics: A Variational Approach.** Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha LTD., 1973.

EISENBERG, M. A. **Introduction to the Mechanics of Solids.** California: Addison-Wesley, 1980.

ESHELMAN, L. J.; SHAFFER, J. D. **Real Coded Genetic Algorithms and Interval-Schemata. Foundations of Genetic Algorithms II.** In San Mateo, CA: Morgan Kaufman, p. 187-2002, 1993.

FOX, R. L. **Optimization Methods for Engineering Design.** Reading, MA: Addison-Wesley, 1971.

GREIMANN, L. F.; WOLDE-TINSAE, A. M.; YANG, P. S. Finite Element Model for Soil-Pile Interaction in Integral Abutment Bridges. **Computers and Geotechnics** 4. p. 127-149, 1987.

GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning.** Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.

HALEJA, P.; LIN, C. Y. Genetic Search Strategies in Multicriterion Optimal Design. **Structural Optimization.** Vol. 4, p. 99-107, 1992.

HAN, S. M.; BANAROYA, H.; WEI, I. Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories. **Journal of Sound and Vibration.** Vol. 225, n. 5, p. 935-988, 1999.

HAUPT, R. L.; HAUPT, S. E. **Practical Genetic Algorithms.** New York: John Wiley & Sons, 1998.

HELWANY, S. M. B.; BUDHU, M.; MCCALLEN, D. Seismic Analysis of Segmental Retaining Walls. I: Model verification. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering.** Vol. 127, n. 9, p. 741-749, 2001.

- HESSEN, J.; MANNER, R. Towards an Optimal Mutation Probability for Genetic Algorithms. **Proceedings of the 1<sup>st</sup> Workshop on Parallel Problem Solving from Nature**, London (England), p. 23-32, 1990.
- HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. MIT Press, Illinois Genetic Algorithm Laboratory. IlliGAL, University of Illinois at Urbana-Champaign, p. 11-147, 1975.
- HURTY, W. C.; RUBINSTEIN, M. F. **Dynamics of Structures**. New Jersey: Prentice-Hall, 1964.
- IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. **Otimização – Volume 1: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- JARADAT, Y. M. M. **Soil-Structure Interaction of FRP Piles in Integral Abutment Bridges**. 2005. PhD Thesis – University of Maryland, Maryland, USA.
- KOSKI, J. Multicriterion Optimization in Structural Design. **Proceedings of International Symposium on Optimum Structural Design**, Tucson (Arizona), 1981.
- KUMAR, S.; LALVANI, L. Lateral Load-Deflection Response of Drilled Shafts in Sand. **IE(I) Journal-CV**. Vol. 84, p. 282-286, 2004.
- MARTINEZ, J. M.; SANTOS, S. A. Métodos computacionais de otimização. **XX COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA**, IMPA, 1995, Rio de Janeiro (Rio de Janeiro) (ISBN 85-244-0092-7, 256p).
- MEIROVITCH, L. **Elements of Vibration Analysis**. New York: McGraw-Hill International Editions, 1986.
- MEIROVITCH, L. **Dynamics and Control of Structures**. New York: John Wiley & Sons, 1990.
- MICHALEWICZ, Z. **Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs**. 3.ed. New York: Springer-Verlag, 1996.

- OLIVEIRA, G. T. S. **Estudo e Aplicações da Evolução Diferencial**. 2006. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
- OLIVEIRA, L. S. **Uma Contribuição ao Estudo dos Métodos de Otimização Multi-Objetivo**. 2005. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
- ORLANDO, D. **Absorção Pendular para Controle de Vibrações de Torres Esbeltas**. 2006. Dissertação de Mestrado – PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- PYKE, R. Nonlinear Soil Models for Irregular Cyclic Loadings. **Journal of the Geotechnical Engineering Division**. Vol. 105, n. 6, p. 715-726, 1979.
- QUEIROZ, T. A.; SANTEE, D. M. Modelagem Matemática e Comparação dos Métodos de Perturbação e Numéricos Aplicados a Vibração de Colunas Semi-Enterradas em um Solo Não-Linear. **Mecânica Computacional**. Vol. XXV, p. 1013-1032, 2006.
- RAMBERG, W.; OSGOOD, W. R. **Description of stress-strain curves by three parameters**. National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note No. 902, Washington DC, USA, 1943.
- REZENDE, V. **O Método de Galerkin**. 2005. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Maringá, Paraná, Brasil.
- RODRIGUES, L. F. **Meta-Heurísticas Evolutivas para Dimensionamento de Lotes com Restrições de Capacidade em Sistemas Multiestágios**. 2000. Monografia de Curso de Especialização – Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil.
- SAMPAIO, A. E. G. **Análise do Comportamento Dinâmico de Colunas Semi-Enterradas**. 2004. Dissertação de Mestrado – PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- SANTEE, D. M.; GONÇALVES, P. B. Oscillations of a Beam on a Non-Linear Elastic Foundation under Periodic Loads. **Shock and Vibration**. Vol. 13, n. 4-5/2006, p. 273-284, 2006.

- SARAMAGO, S. F. P.; FARIA, E. D. Constraint Optimization Problems Using Simulated Annealing. **Ciência & Engenharia**. Vol. 10, n. 1, p. 69-75, 2001.
- SEREBRENICK, G. **Análise da Estabilidade de Colunas Parcialmente Enterradas em uma Fundação Elástica Não-Linear**. 2004. Dissertação de Mestrado – PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- SHAKER, F. J. **Effect of Axial Load on Mode Shapes and Frequencies of Beams**. Lewis Research Center Report NASA-TN-8109, Washington DC, USA, 1975.
- SOARES, G. L. **Algoritmos Genéticos: Estudo, Novas Técnicas e Aplicações**. 1997. Monografia de Curso de Especialização – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- STORN, R.; PRICE, K. **Differential Evolution: A Simple and Efficient Adaptive Scheme for Global Optimization over Continuous Spaces**. International Computer Science Institute, Technical Report TR-95-012, Berkeley, USA, 1995.
- STORN, R.; PRICE, K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. **Journal of Global Optimization**. Vol. 11, n. 4, p. 341-359, 1997.
- THANASATTAYAWIBUL, N. **Curved Integral Abutment Bridges**. 2006. PhD Thesis – University of Maryland, Maryland, USA.
- TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability**. New York: Mc-Graw-Hill, 1961.
- THOMSON, W. T. **Teoria da Vibração com Aplicações**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
- VANDERPLAATS, G. N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design**. 3<sup>th</sup> ed. Colorado: Colorado Springs, 1999.
- VIANA, F. A. C. **Surrogate Modeling Techniques and Heuristic Optimization Methods Applied to Design and Identification Problems**. 2008. Tese de Doutorado – Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

WARBURTON. G. B. **The Dynamical Behaviour of Structures**. 2<sup>nd</sup> ed. Oxford: Pergamon Press, 1976.

WIERZBICHI, A. P. On the Use of Penalty Functions in Multiobjective Optimization. **Proceedings of the International Symposium on Operations Research**, Mannheim (Germany), 1978.

