

Universidade Federal de Uberlândia
Universidade Aberta do Brasil
Centro de Educação a Distância

Cálculo 3

Lúcia Resende Pereira
Ana Maria Amarillo Bertone



Sobre o curso

A Matemática é a ciência que melhor permite desenvolver a capacidade de raciocínio e de resolução de problemas.

Desde a antiguidade, o homem utiliza a Matemática para facilitar a vida e organizar a sociedade. No mundo atual ela está presente no dia-dia das pessoas, ela ajuda a:

- obter um melhor aproveitamento dos alimentos;
- otimizar o processo de irrigação;
- fazer uma análise da topologia dos terrenos;
- estudar a evolução de determinadas doenças;
- analisar o diagnóstico por imagens;
- facilitar o nosso processo de locomoção, fazendo uma análise do tráfego, por exemplo;
- desenvolver softwares eficientes para o bom funcionamento dos computadores e celulares, permitindo a troca de informações;

dentre outras coisas.

Vocês já tinham pensado nisso ?

Espero que se sintam motivados a continuar neste processo de formação de profissionais que irão atuar na área de Matemática, oferecido pelas instituições de ensino superior.

Desde o século *XVII*, com Leibniz e Newton, o Cálculo Diferencial e Integral, uns dos ramos da Matemática, tornou-se um instrumento cada vez mais indispensável pela sua aplicabilidade em diversos campos da ciência. Por essa razão, dentre as disciplinas no qual o curso é dividido tem-se a **Cálculo Diferencial e Integral**.

No Cálculo 1 e 2 foram estudadas as funções de uma variável real, onde introduzimos os conceitos de limite, continuidade e diferenciabilidade. Estas ferramentas são usadas para a resolução de uma série de problemas, dentre outros, os problemas de otimização. Porém, a maioria das relações que ocorrem na física, economia e, de modo geral, na natureza, são traduzidas por

funções de duas, três ou mais variáveis reais, de onde se conclue a conveniência de um estudo mais detalhado de tais funções.

Na prática, é comum lidarmos com situações em que aparecem funções de mais de uma variável. Por exemplo, no cálculo da área da superfície total S de um reservatório de água de formato cilíndrico circular reto, fechado nas extremidades com base de raio r e altura h , tem-se:

$$S = 2\pi r.h + 2\pi r^2$$

Neste caso, a área da superfície total depende de r e de h .

Podemos nos interessar pela temperatura T de um ponto da superfície da terra a qual depende de sua latitude x e longitude y .

A presente disciplina está dividida em quatro módulos:

- ▷ Funções de duas e três variáveis a valores reais;
- ▷ Diferenciabilidade em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$;
- ▷ Máximo e mínimos de funções de duas e três variáveis;
- ▷ Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª e 2ª ordem.

A duração de cada módulo é de quinze dias. O texto básico da disciplina é contemplado com exercícios estrategicamente posicionados, de tal forma que o conteúdo previamente estudado fique bem assimilado em seus conceitos mais básicos.

O texto básico da disciplina é contemplado com exemplos e exercícios propostos, alguns sob a forma de **desafio**, que você encontrará estrategicamente posicionados. Os desafios são resolvidos no final de cada módulo. Para acessar a resposta dos mesmos você vai clicar um hiperlink que o levará de ida e volta para o final de módulo ou para a página do desafio. Para maior eficiência desta metodologia, recomendamos ao prezado aluno tentar o desafio antes de clicar o hiperlink que o conduz à resposta.

Quanto à metodologia, o curso seguirá com a seguinte base: estudo da teoria do livro texto, com o treino através dos exercícios nele contidos, resolução do *Caderno de Exercícios*, onde se encontram os exercícios a serem entregues e outros para que o aluno se pratique. Atividades

que serão passadas para os alunos dentro do período de vigência de cada módulo, e que farão parte do processo de avaliação, assim como as provas presenciais.

Quanto ao sistema de avaliação, serão distribuídos 100 pontos, sendo 60 pontos de provas escritas em modo presencial e 40 pontos das atividades passadas pelo Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA).

Quanto ao cronograma, descrito mais adiante, as 90 horas do curso são distribuídas nos módulos de acordo com o número de semanas, considerando 4 horas de atividades de estudo da teoria por semana, sendo necessário considerar para cada hora de estudo em teoria pelo menos uma hora de estudo através de exercícios. Esse esquema tem por finalidade assegurar um treino mínimo nos módulos.

Desejamos ao caro aluno um ótimo curso, torcendo para que atinja com sucesso os objetivos da disciplina.

Estamos à disposição em <https://sites.google.com/site/anamariaufumat/Home>

Grande abraço,

Lúcia e Ana Maria

Informações Úteis	7
Módulo 1 - Funções de duas e três variáveis a valores reais	9
1.1 Alguns conceitos dos espaços vetoriais e distância em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$	9
1.2 Conceito de uma função de duas e três variáveis	16
1.3 Domínio, curvas e superfícies de nível e gráfico de uma função de duas e três variáveis	18
1.4 Noção de limite e continuidade de uma função de duas e três variáveis	35
1.5 Soluções dos desafios do módulo I	45
Módulo 2 - Diferenciabilidade em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$	51
2.1 Definição de função diferenciável. Comparação com a diferencial em $\mathbb{R}$	51
2.2 Derivadas parciais de funções de duas variáveis.	
Significado geométrico	57
2.2.1 Interpretação geométrica das derivadas parciais	58
2.3 Derivadas parciais de funções de três variáveis	63
2.4 Derivadas direcionais e vetores gradiente	65
2.5 Regra da Cadeia	80
2.5.1 Interpretação geométrica para o vetor gradiente de uma função de três variáveis	88
2.6 Soluções dos desafios do módulo II	92
Módulo 3 - Máximos e mínimos de funções de duas e três variáveis	99
3.1 Derivadas de ordem superior	99
3.2 Máximos e mínimos relativos e absolutos de funções de duas e três variáveis	103
3.3 Critérios para caracterização de pontos críticos de funções de duas variáveis;	111
3.4 Análise dos valores de uma função de duas variáveis nos pontos da fronteira de seu domínio	115
3.5 Máximos e mínimos condicionados: Multiplicadores de Lagrange	118
3.6 Problemas de otimização	128
3.7 Soluções dos desafios do módulo III	138
Módulo 4 - Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª e 2ª ordem	149
4.1 Definição e classificação das equações diferenciais	149
4.1.1 EDO lineares	155
4.2 Equações de 1ª ordem e fator integrante	159
4.3 Equações diferenciais de variáveis separáveis	164

4.4	Equações exatas	167
4.5	Equações diferenciais de 2ª ordem homogêneas e não homogêneas com coeficientes constantes	172
4.5.1	A fórmula de Euler	177
4.5.2	A equação característica com raízes complexas	179
4.5.3	O método dos coeficientes indeterminados	181
4.6	Aplicações das EDO de 1ª e 2ª ordem	185
4.6.1	Aplicações das EDO de 1ª ordem	185
4.6.2	Aplicações das EDO de 2ª ordem	193
4.7	Soluções dos desafios do módulo IV	195

Informações úteis

Prezado(a) aluno,

Lembramos novamente como no módulo I que no texto básico você encontrará alguns “ ícones” que lhe ajudará a identificar as atividades. Fique atento ao significado de cada um deles, isso facilitará a sua leitura e seus estudos.



Desejamos ao caro aluno(a) um ótimo segundo módulo, torcendo para que atinja com sucesso os seus objetivos.

Estamos à disposição em <https://sites.google.com/site/anamariaufumat/Home>

Grande abraço,

Lúcia e Ana Maria

Módulo 1

Funções de duas e três variáveis a valores reais

No término do módulo I, o aluno estará familiarizado com os seguintes conceitos:

- ▷ Alguns conceitos dos espaços vetoriais e distância em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
- ▷ Conceito de uma função de duas e três variáveis;
- ▷ Domínio, curvas e superfícies de nível e gráfico de uma função de duas e três variáveis;
- ▷ Noção de limite e continuidade de uma função de duas e três variáveis;

1.1 Alguns conceitos dos espaços vetoriais e distância em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Para as funções de um variável real, denotada por x , que toma valores em um subconjunto $\mathbb{R}$, temos uma imagem $y = f(x)$, de tal forma que o conjunto dos pares ordenados de números reais $(x, y) = (x, f(x))$, determinam o gráfico da função f . Estes pontos pertencem ao plano euclidiano, onde foi definido um sistema de coordenadas cartesianas, que denotamos por $\mathbb{R}^2$.

Analogamente, as funções de duas variáveis tem como gráfico o conjunto de ternas de números reais, (x, y, z) , com $z = f(x, y)$, subconjunto do espaço euclidiano tridimensional, onde tem-se definido um sistema de coordenadas cartesiano, como mostra a figura 1.1.

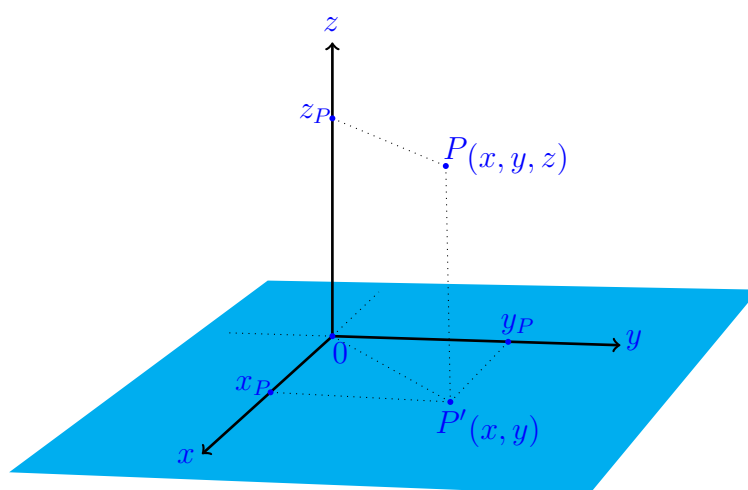


FIGURA 1.1: O sistema de coordenadas cartesiano.

Uma definição mais geral pode ser feita como a descrita a seguir.

Definição 1.1. Seja $n \in \mathbb{N}$. O **espaço euclidiano** será denotado e definido por $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}}$, ou seja, o conjunto $\{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$, de todas as n -uplas ordenadas de números reais.

Note que se $n = 1$: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$: conjunto dos números reais, cuja representação geométrica é na reta numérica.

No caso $n = 2$: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$: conjunto dos pares ordenados de números reais, cuja representação geométrica é no plano.

Finalmente, se $n = 3$: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$: conjunto das ternas ordenadas de números reais, cuja representação geométrica é no espaço tridimensional.

Vocês se lembram do estudo sobre vetores do plano da Geometria Analítica, como seria somar vetores e multiplicar vetor por escalar ?



Iremos identificar a cada par ordenado (x, y) de números reais um ponto P do plano de abscissa x e ordenada y , e a cada ponto do plano associaremos um vetor de coordenadas (x, y) que tem origem em $(0, 0)$ e extremidade em P , como mostra a figura 1.2. Assim costumamos escrever $\overrightarrow{OP} = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$, onde $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$.

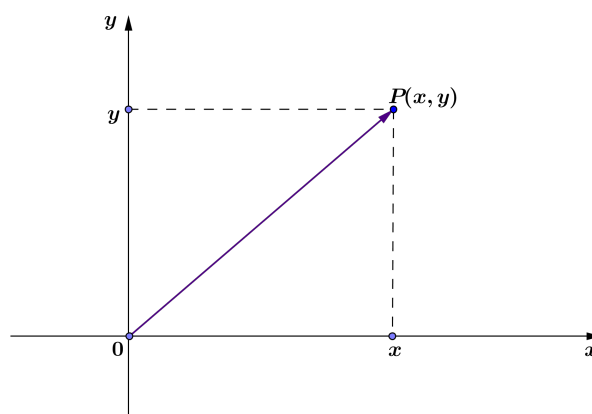


FIGURA 1.2: O ponto e seu correspondente vetor.

Lembremos que multiplicar um vetor por escalar λ seria:

$$\lambda \overrightarrow{OP} = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y),$$

ou seja é um ponto de coordenadas $(\lambda x, \lambda y)$.

Somar dois vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ é efetuar

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = (x, y) + (s, t) = (x + s, y + t) = \overrightarrow{OR},$$

isto é, um ponto de coordenadas $(x + s, y + t)$.

Isso nos sugere a seguinte definição:

Definição 1.2. Dados dois pontos (x, y) e $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ define-se a **adição e multiplicação por escalar** como sendo

$$(x, y) + (s, t) = (x + s, y + t);$$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Ou seja, somar dois pontos é somar coordenada à coordenada e multiplicar um ponto por escalar é multiplicar cada coordenada pelo escalar.

É possível mostrar que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ se trata de um espaço vetorial real.

Definição 1.3. O **produto escalar** entre os vetores $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ é o número $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_n y_n$.

Exemplo 1.1. Dados $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 3, 1\right)$ e $\vec{v} = (-1, -1, 0)$. Vamos calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\text{Temos } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(-1) + 3(-1) + 1(0) = -\frac{7}{2}.$$

Valem propriedades tais como

Proposição 1.1.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0; \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Definição 1.4. Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **ortogonais**, se e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemplo 1.2. Sejam $\vec{u} = (-2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, -2)$. Vamos decidir se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais. Basta calcularmos $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Neste caso,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2)(-1) + (1)(-2) = 2 - 2 = 0.$$

Logo, de acordo com a definição acima, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais.

Vocês estão lembrados de como seria a equação de uma reta r no plano, que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e tem a direção de $\vec{v} = (a, b) \neq (0, 0)$?



Na figura 1.3 é mostrado no plano cartesiano a reta paralela ao vetor $\vec{v}$.

Note que um ponto $P = (x, y) \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$, ou seja, $P - P_0 = t\vec{v}$, donde

$$(x, y) - (x_0, y_0) = t(a, b), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Assim, a equação vetorial de uma reta que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e tem a direção de $\vec{v} = (a, b)$ será

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b), \text{ para todos } t \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

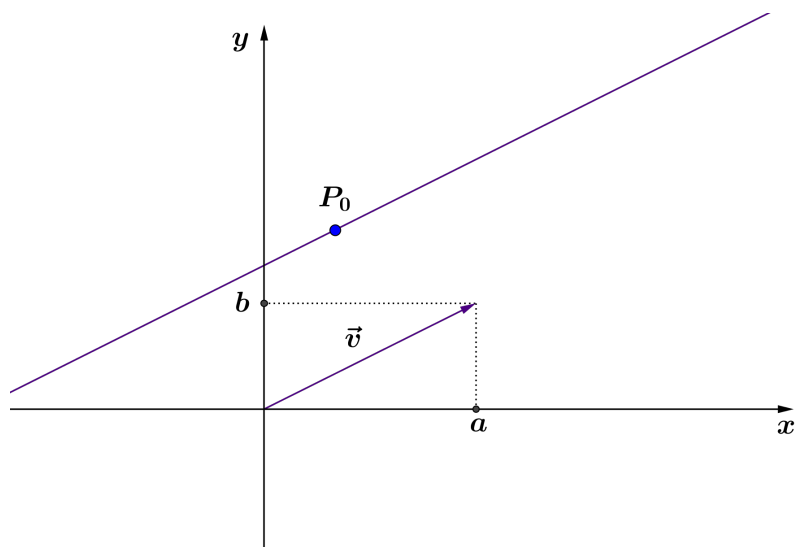


FIGURA 1.3: A reta paralela por P_0 ao vetor $\vec{v}$.

que são as equações paramétricas da reta.

Agora, suponhamos que estamos interessados na equação da reta r que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e é perpendicular à direção de $\vec{v} = (a, b) \neq (0, 0)$, como mostra a figura 1.4.

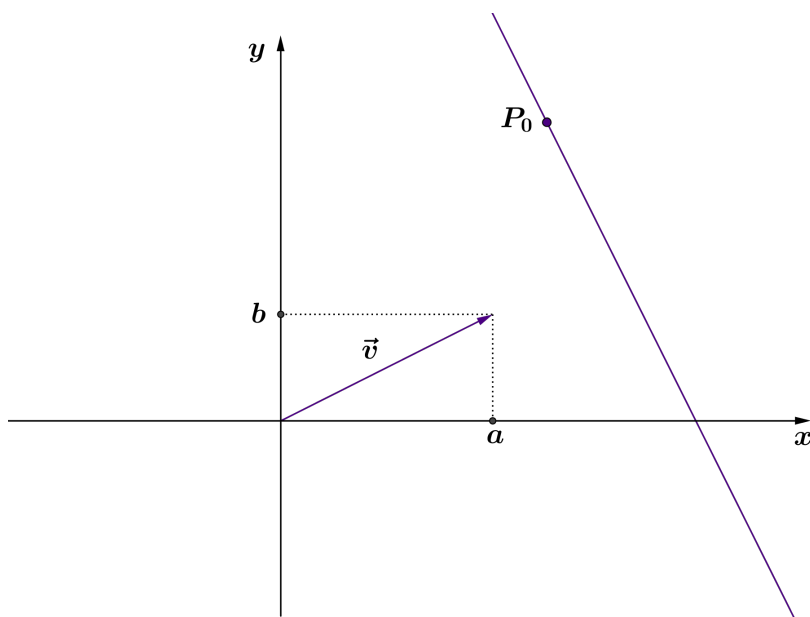


FIGURA 1.4: A reta perpendicular por P_0 ao vetor $\vec{v}$.

Um ponto $P = (x, y) \in r$ deve satisfazer: $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{v} = 0$, e assim,

$$[(x, y) - (x_0, y_0)] \cdot (a, b) = 0$$

Daí, $(x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0$, concluindo que $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Portanto, temos que $ax + by = ax_0 + by_0 = c$.

Assim, a equação da reta será da forma $ax + by = c$ e observe que os coeficientes das variáveis x e y são exatamente as coordenadas de um vetor perpendicular à essa reta.

Exemplo 1.3. Se tivermos uma reta de equação $r : -3x + 9y = 17$ vamos identificar as coordenadas de um vetor perpendicular à essa reta ?

Basta olharmos para os coeficientes das variáveis x e y na equação da reta, que neste caso são -3 e 9 . Assim, o vetor $(-3, 9)$ é perpendicular à reta dada.

Exemplo 1.4. Vamos achar a equação vetorial da reta que passa por $P_0 = (-\frac{1}{2}, -1)$ e que é perpendicular à reta $y = x + 1$.

Procuraremos por uma reta r que passa por P_0 e que é perpendicular à reta $s : -x + y = 1$. Como $\vec{u} = (-1, 1) \perp s$, segue-se que a reta procurada tem a mesma direção de $\vec{u}$, logo a equação vetorial da reta será

$$(x, y) = (-\frac{1}{2}, -1) + t(-1, 1), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Desafio!

Escreva no caderno a equação vetorial da reta que passa por $P_0 = (0, 3)$ e que é perpendicular à reta $2x - 3y = 5$.



Clique aqui para ver a resposta.

Outros elementos que usaremos para estudar as funções de várias variáveis é o conceito de plano. Veremos que o equivalente a reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto, estudado no cálculo I, teremos um plano tangente a uma superfície em um ponto. Para isso devemos nos lembrar como se faz para determinar um plano que passa por um ponto dado e é perpendicular a um vetor dado. Ou seja, iremos determinar a equação geral do plano π que passa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e que tenha o vetor $\vec{n} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ como vetor normal.

Para que um ponto $P = (x, y, z) \in \pi$, devemos ter $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$, ou seja, $(P - P_0) \cdot \vec{n} = 0$, donde

$$[(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] \cdot (a, b, c) = 0.$$

Assim,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ou ainda,

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 = d.$$

Logo, a equação geral do plano π será da forma $ax + by + cz = d$, em que os coeficientes das variáveis x , y e z são exatamente as coordenadas de um vetor normal ao plano.

Ilustramos esta teoria com o exemplo 1.5.

Exemplo 1.5. Vamos achar a equação geral do plano π_1 que passa por $P_0 = (1, 2, 1)$ e que é paralelo ao plano π_2 de equação $-2x + 2y - z = 0$.

Como o plano π_1 é paralelo ao plano π_2 , um vetor que é normal ao plano π_2 poderá ser tomado como um vetor normal ao plano π_1 . Pela equação de π_2 , que é

$$-2x + 2y - z = 0,$$

teremos que $(-2, 2, -1)$ será o vetor normal desejado.

Assim, a equação geral de π_1 que passa por $P_0 = (1, 2, 1)$ e tem $(-2, 2, -1)$ como vetor normal, será da forma

$$-2x + 2y - z + d = 0.$$

Usando o fato de que $P_0 = (1, 2, 1) \in \pi_1$, significa que as coordenadas deste ponto satisfazem a equação do plano, ou seja, $-2(1) + 2(2) - (1) + d = 0$, donde $d = -1$ e assim a equação do plano será

$$\pi_1 : -2x + 2y - z - 1 = 0.$$

Definição 1.5. Define-se a **norma** de um vetor $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ em $\mathbb{R}^2$, como sendo o seu comprimento que será dado pelo número $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Da mesma forma, define-se a **norma** de um vetor $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$, como sendo o seu comprimento que será dado pelo número $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Definição 1.6. A **distância** entre dois pontos A e B será denotada e definida por $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Exemplo 1.6. Vamos determinar a distância entre os pontos $A = (2, 3, -1)$ e $B = (0, 1, 1)$ do espaço. De acordo com a definição,

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|B - A\| = \|(-2, -2, 2)\|.$$

Logo a distância será dada por $d(A, B) = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

1.2 Conceito de uma função de duas e três variáveis

Na apresentação do curso destacamos a importância do estudo de funções de várias variáveis nas aplicações e pelo próprio valor na formação de um professor de matemática. Passamos agora a ver as definições do ponto de vista teórico.

Definição 1.7. *Função de duas variáveis:* Seja $D \subset \mathbb{R}^2$. Uma função de duas variáveis reais a valores reais é uma relação que transforma cada par de números reais $(x, y) \in D$ num único número real z . O conjunto D é chamado de **domínio** da função. Notação: $D = D(f) = D_f$.

Para denotar a dependência de z com o par (x, y) escreve-se $z = f(x, y)$ ou $z = g(x, y)$ ou ainda, $z = z(x, y)$. Neste caso, z é a variável dependente e x, y são as variáveis independentes.

A título de aplicação, suponhamos que temos uma chapa plana de metal com a forma de D . A cada ponto (x, y) da chapa corresponde uma temperatura $f(x, y)$ que possa ser registrada em um termômetro representado por esse eixo, como mostra a figura 1.5.

Uma outra maneira de denotar uma função f , definida num certo domínio D e tomando valores em $\mathbb{R}$, é

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$

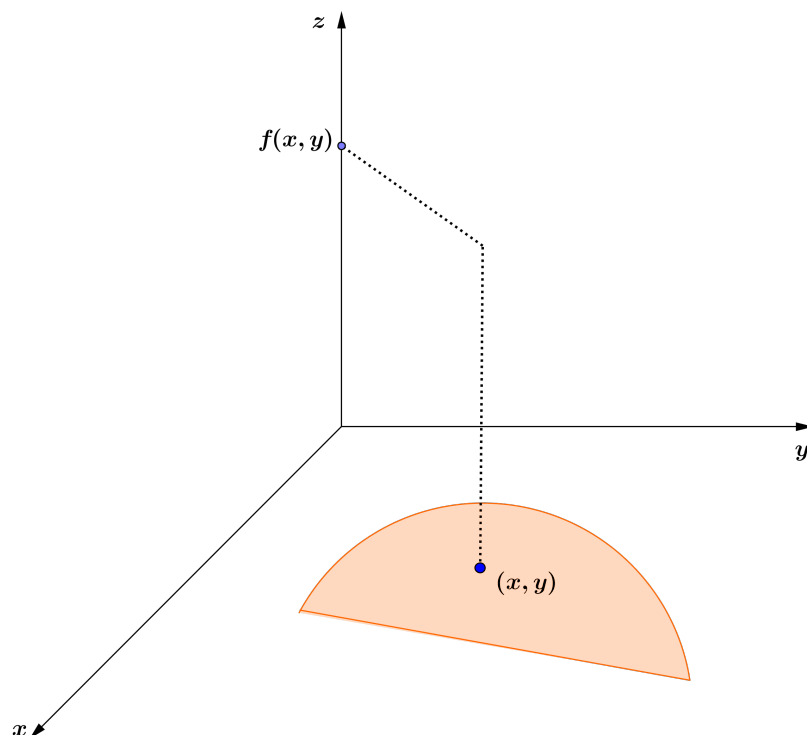


FIGURA 1.5: A função $f(x, y)$ representa a temperatura da chapa plana de metal em forma de D .

Uma definição similar tem-se para funções $f(x, y, z)$ definidas sobre pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, como a seguir.

Definição 1.8. **Função de três variáveis:** Seja $D \subset \mathbb{R}^3$. Uma função de três variáveis reais a valores reais é uma relação que transforma cada terna de números reais $(x, y, z) \in D$ num único número real w . O conjunto D é chamado de **domínio** da função e a notação é a mesma que adotada para duas variáveis: $D = D(f) = D_f$.

Da mesma forma que ilustramos uma aplicação para funções de duas variáveis, podemos supor que temos a chapa D da figura 1.5, aonde a temperatura em cada ponto (x, y) varia com o tempo t . Assim, definimos uma função $g(x, y, t)$, que descreve a temperatura em cada ponto (x, y) no instante t .

Como no caso de funções de uma variável real, os principais elementos estudados são o domínio, ou seja, o conjunto onde a função está definida, os limites para os pontos onde a função não está definida, crescimento e decrescimento, entre outros. Nas seções a seguir vamos estudar esses mesmos tópicos, do ponto de vista das funções definidas nesta seção.

1.3 Domínio, curvas e superfícies de nível e gráfico de uma função de duas e três variáveis



Vocês se lembram como seria a imagem, o domínio e o gráfico da função de uma variável $y = f(x) = x^2$?

Note que f está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ donde o domínio $D(f) = \mathbb{R}$.

A imagem de f será o conjunto

$$\text{Im}f = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) = x^2\} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = \mathbb{R}^+.$$

O gráfico de f será

$$G(f) = \{(x, y) : x \in D(f) = \mathbb{R} \text{ e } y = f(x) = x^2\},$$

ou seja,

$$G(f) = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\},$$

cujo conjunto representa uma parábola de vértice na origem e voltada para cima.

Observação 1.1. Em geral o domínio D de uma função f de duas ou três variáveis é fornecido. Quando este não for o caso, assumiremos que D é o maior conjunto de pares ordenados ou ternas ordenadas no qual a regra de obter as imagens faça sentido.

Exemplo 1.7. O domínio da função

$$f(x, y) = \frac{1}{x - y}$$

é todo $\mathbb{R}^2$ exceto os pontos (x, y) para os quais $x = y$. Isto é, o domínio é o conjunto

$$D = \{(x, y) : x \neq y\}.$$

O gráfico da função f é mostrado na figura 1.6. Na figura 1.7 é mostrada função com o plano que divide o gráfico em duas regiões. Na figura 1.8 é mostrado o conjunto domínio no plano cartesiano xOy .

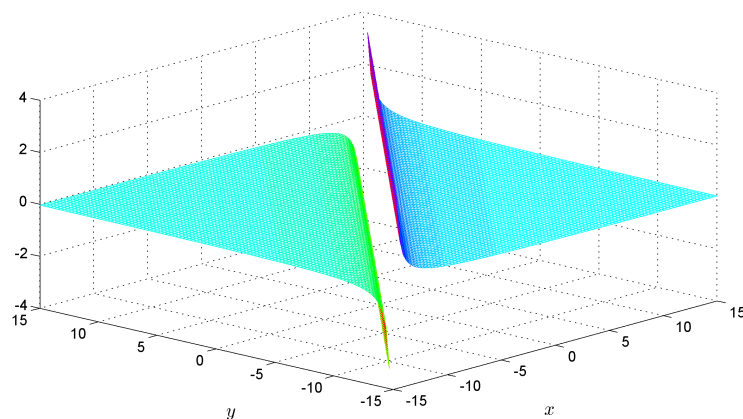


FIGURA 1.6: A função $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$. Note que os pontos da reta $x = y$ não pertencem ao domínio.

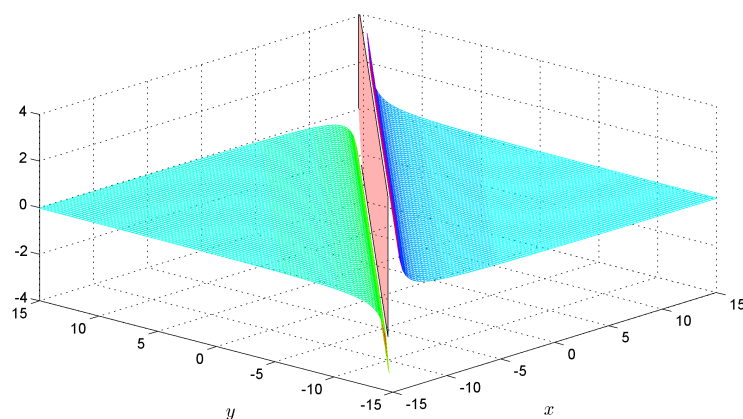


FIGURA 1.7: A função $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$ com o plano $x = y$ em cor vermelha.

Exemplo 1.8. O domínio da função

$$f(x, y) = \frac{xy - 5}{y - x^2}$$

é todo $\mathbb{R}^2$ exceto os pontos (x, y) para os quais $y = x^2$.

Na figura 1.9 mostra-se o gráfico desta função.

Você reconhece a curva de pontos onde a função não está definida?



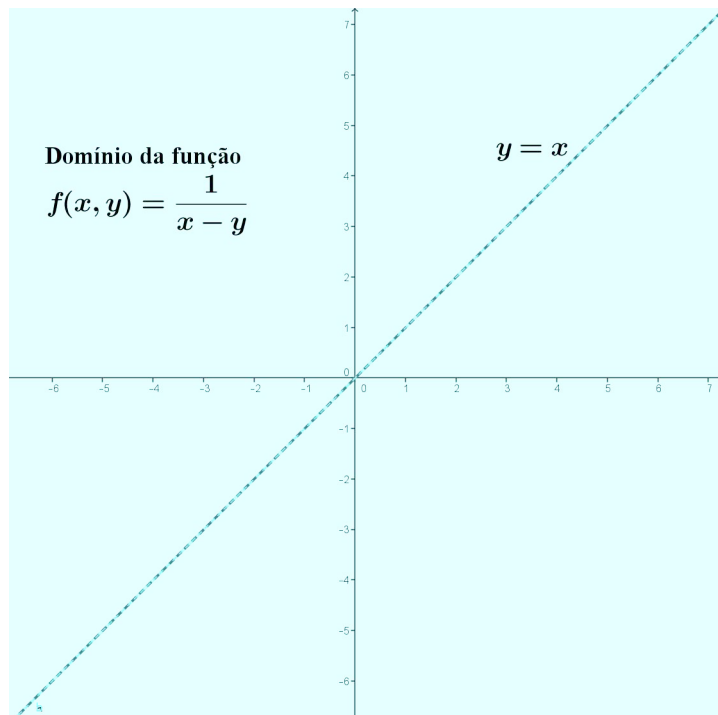


FIGURA 1.8: A função $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$. Note que os pontos da reta $x = y$ não pertencem ao domínio.

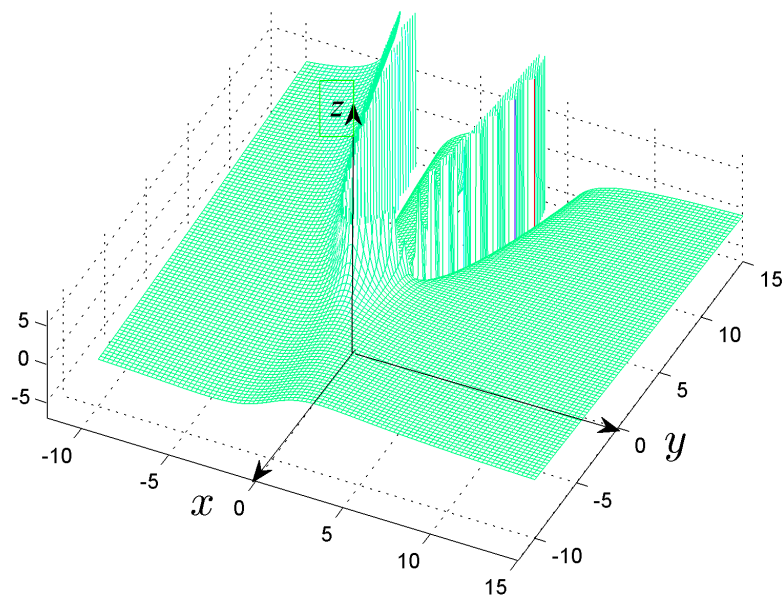


FIGURA 1.9: A função $f(x, y) = \frac{xy - 5}{y - x^2}$. Note a função não tem gráfico ao longo da parábola de equação $y = x^2$.

De fato, a curva é uma parábola como na figura 1.10. A parte de cor azul é o domínio da função. Entendeu por quê?

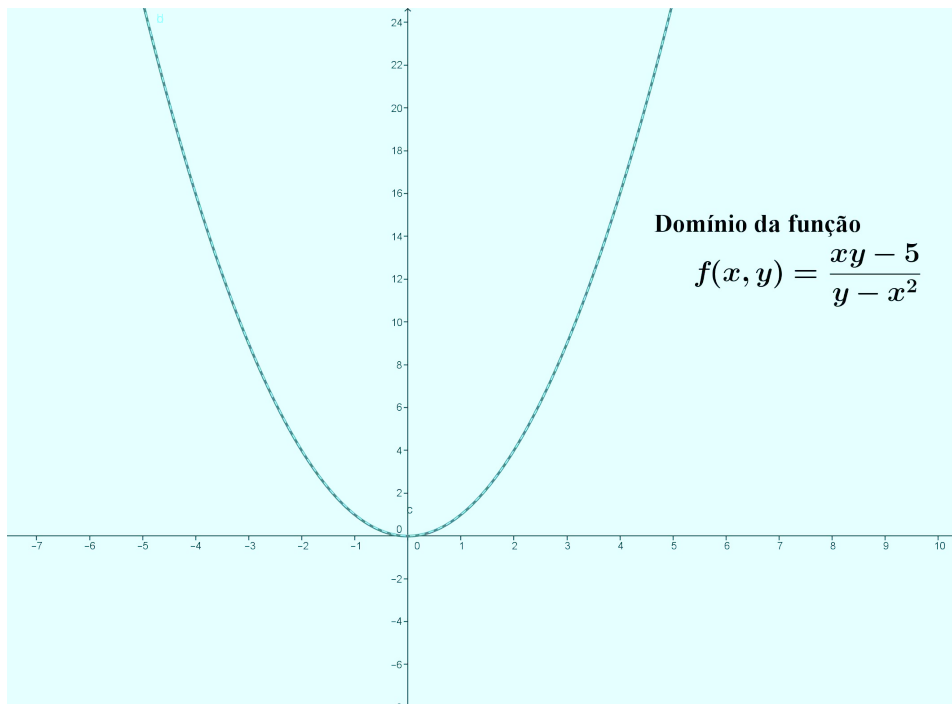


FIGURA 1.10: O domínio da função $f(x, y) = \frac{xy - 5}{y - x^2}$ no plano cartesiano xy .

A seguir vemos um exemplo do domínio de uma função de várias variáveis. Neste caso, note que os conjuntos domínios deste tipo de funções são subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, portanto podem ser **hipersuperfícies** como esferas ou hiperbolóides, ou, como no caso de

$$f(x, y, z) = e^{x+y-z},$$

o conjunto $\mathbb{R}^3$, pois a exponencial com base e está definida para qualquer valor real.

Exemplo 1.9. Considere $z < 0$. O domínio da função

$$g(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

é o conjunto (x, y, z) tais que

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0, \quad z < 0,$$

ou seja,

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z < 0.$$

O gráfico do domínio g é mostrado na figura 1.11.

Voltemos para o estudo do domínio de funções definidas em $\mathbb{R}^2$ e para alguns desafios nesse sentido!

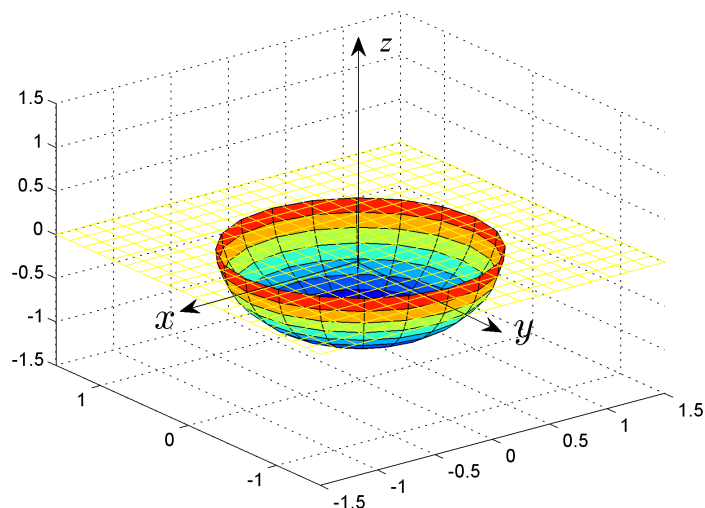


FIGURA 1.11: O gráfico do domínio da função $g(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ com $z < 0$. Note que é uma semi-esfera no semi-espaço inferior determinado pelo plano $z = 0$.

Exemplo 1.10. O domínio da função

$$f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

é o conjunto (x, y) tais que $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, ou seja, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Note que o gráfico da função do exemplo 1.10 é o domínio da função do exemplo 1.9. Note também que a “sombra” da função sobre o plano xy é o domínio D , que é mostrado na figura 1.12. Vemos que este conjunto consiste em todos os pontos interiores e sobre a circunferência de raio 1 em $\mathbb{R}^2$ (D é às vezes chamado de “disco unitário fechado”).

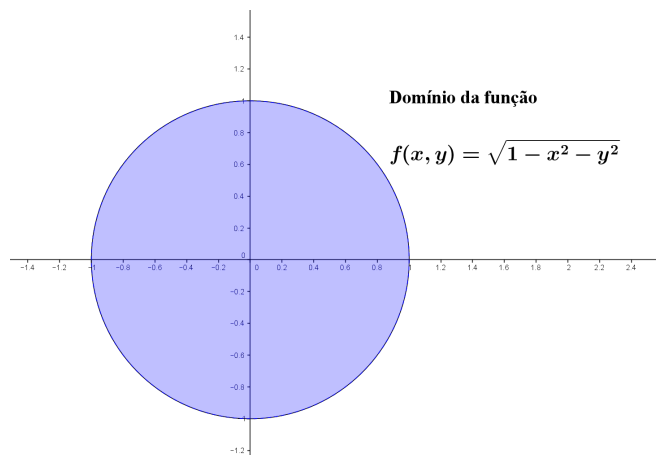


FIGURA 1.12: O domínio da função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ no plano cartesiano xy .

Exemplo 1.11. Seja a função definida por

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3xy + y^2}{\sqrt{y - 2x}}$$

Note que, para que a função fique bem definida devemos ter $(y - 2x) > 0$, ou ainda, $y > 2x$, donde o domínio da função consiste de todos os pontos do semiplano definido pela inequação $y > 2x$.

Para saber se os pontos deste semiplano estão acima ou abaixo da reta de equação $y = 2x$, podemos fazer um teste tomando pontos específicos abaixo da reta ou pontos acima da reta. Por exemplo, abaixo da reta podemos tomar o ponto $(3, 1)$ de abscissa $x = 3$ e ordenada $y = 1$, como $1 \not> 6 = 2(3)$, tem-se que o ponto $(3, 1)$ não satisfaz $y > 2x$, assim ele não pertencerá ao semiplano desejado. Portanto poderemos afirmar que os pontos deste semiplano estão acima da reta, conforme figura 1.13.

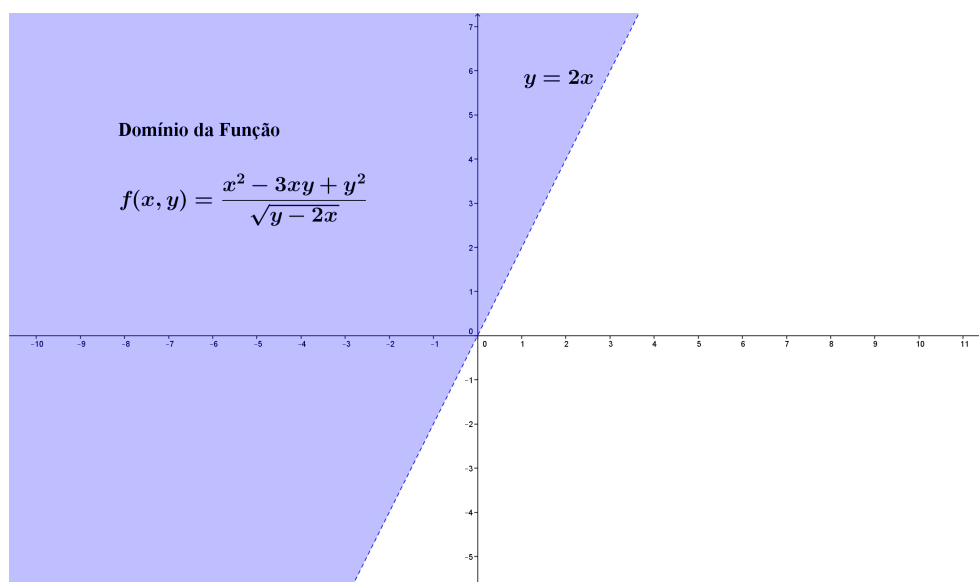


FIGURA 1.13: O domínio da função $f(x, y) = \frac{x^2 - 3xy + y^2}{\sqrt{y - 2x}}$ no plano cartesiano xOy .

Voltamos para um outro exemplo de funções de três variáveis

Exemplo 1.12.

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$$

O domínio da função é $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 9 \geq 0\}$, isto é, $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \geq 9\}$, o qual constitui-se de todos os pontos exteriores à esfera centrada na origem e raio 3.

Agora é a sua vez de praticar com os próximos desafios.

Desafio!

Escreva no caderno o conjunto domínio da função $f(x, y) = \frac{2}{\sqrt{-xy}}$.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

Desafio!

Dada a função $f(x, y, z) = \frac{1}{x \cdot y \cdot z}$, determine o seu domínio.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

Desafio!

Determine o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{x^3 - y}$.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

Define-se a **imagem** da função f como sendo o conjunto formado por todos os elementos do contra-domínio $\mathbb{R}$, que são imagem de algum ponto do domínio; ou seja, o conjunto imagem será denotado e definido por

$$Imf = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x, y), \text{ para algum } (x, y) \in D\}$$

A imagem é obtida aplicando a relação f aos pares ordenados $(x, y) \in D$.

O **gráfico** de f é o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ denotado e definido por

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ e } z = f(x, y)\}$$

ou ainda,

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

Assim o gráfico de f pode ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, y, f(x, y))$ quando (x, y) percorre o domínio de f , como mostrado na figura 1.14.

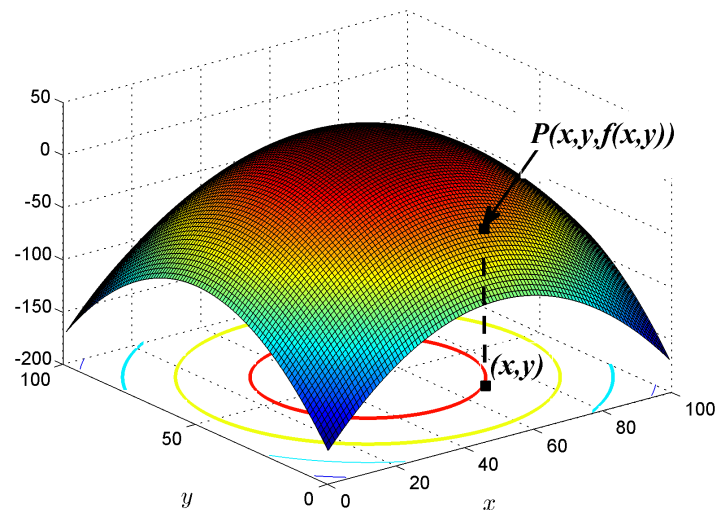


FIGURA 1.14: Um elemento do domínio de f e seu ponto correspondente $(x, y, f(x, y))$ do espaço $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 1.13. Considere a função

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z = f(x, y) = x - y + 2 \end{aligned}$$

Vamos determinar o domínio e a imagem de f . Neste caso, $D(f) = \mathbb{R}^2$, pois a função está definida em todo o conjunto $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} Imf &= \{z \in \mathbb{R} : z = f(x, y), \text{ para algum } (x, y) \in D\} \\ &= \{z \in \mathbb{R} : z = x - y + 2, \text{ para algum } (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Analisando mais o conjunto (1.1), suponha que nos dão como valor da imagem $z = 1$. Então, temos que

$$z = 1 = x - y + 2, \quad (1.2)$$

e, neste caso, basta tomarmos $x = 0$, obtendo-se $y = 1$, satisfazendo a igualdade (1.2).

Isso será conseguido para qualquer número real z fornecido. Assim, dado qualquer número real z , nós sempre conseguiremos achar dois números reais x e y tais que verificam (1.2). Portanto, $Im f = \mathbb{R}$.

E qual seria o conjunto que representa o gráfico ?



O conjunto gráfico da função f vem dado por

$$G(f) = \{(x, y, z) : (x, y) \in D(f) = \mathbb{R}^2, z = f(x, y) = x - y + 2\},$$

ou seja, de forma equivalente, escrevendo como equação, temos que

$$G(f) = \{(x, y, z) : x - y - z + 2 = 0\}. \quad (1.3)$$

A representação geométrica do conjunto 1.3 é um plano, mostrado na figura 1.15.

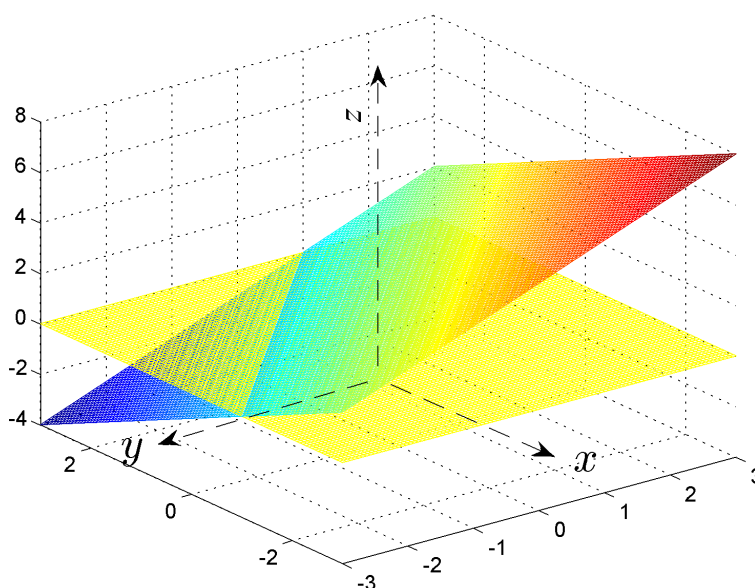


FIGURA 1.15: Gráfico da função do exemplo 1.13.

Exemplo 1.14. Seja $f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Temos que o domínio será o conjunto $D(f) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, desde que a quantidade dentro da raiz quadrada é não-negativa, ou seja, se e somente se

$$4 - (x^2 + y^2) \geq 0. \quad (1.4)$$

O conjunto imagem vem dado pelo conjunto

$$Imf = \{z \in \mathbb{R} : z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \text{ para algum } (x, y) \in D(f)\}.$$

Note que no exemplo 1.14, usando o fato de que estamos no domínio, ou seja (1.4), obtemos que

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad (1.5)$$

e multiplicando ambos os membros de (1.5) por -1 , obtém-se

$$0 \geq -(x^2 + y^2) \geq -4. \quad (1.6)$$

Somando 4 a ambos os membros da desigualdade (1.6), chegamos à conclusão que

$$4 \geq 4 - (x^2 + y^2) \geq 0. \quad (1.7)$$

Extraindo a raiz de ambos os membros de (1.7), temos

$$\sqrt{4} \geq \sqrt{4 - (x^2 + y^2)} \geq 0 \quad (1.8)$$

Finalmente, multiplicando (1.8) por -1 , chega-se à

$$-2 \leq -\sqrt{4 - (x^2 + y^2)} \leq 0.$$

Logo, conclui-se que

$$Imf = \{z \in \mathbb{R} : -2 \leq z \leq 0\} = [-2, 0].$$

O gráfico é dado pelo conjunto

$$G(f) = \{(x, y, z) : (x, y) \in D(f) \text{ e } z = f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}\},$$

que é o mesmo conjunto que

$$G(f) = \{(x, y, z) : z^2 = 4 - x^2 - y^2 \text{ e } z \leq 0\},$$

ou ainda,

$$G(f) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2^2 \text{ e } z \leq 0\},$$

o qual é a parte inferior da esfera centrada na origem e raio 2.

Desafio!

Dada a função

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Escreva no caderno o conjunto domínio, a imagem e esboce o gráfico da função.



Clique aqui para ver a resposta.

Como já observamos anteriormente, o gráfico de uma função de duas variáveis é o subconjunto em $\mathbb{R}^3$, na verdade uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Os traços dessa superfície nos planos $z = k$, onde k variam sobre $\mathbb{R}$, são chamadas curvas de nível da função. Precisamente, tem-se a seguinte definição 1.9.

Definição 1.9. Dada

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$

Considere $k \in \text{Im} f$.

A **curva de nível** k da função f será denotada e definida por $C_k = \{(x, y) \in D(f) : f(x, y) = k\}$, ou seja, constitui-se dos pontos do domínio onde a função assume sempre o mesmo valor constante e igual à k .

Se o escalar $f(x, y)$ associado ao ponto (x, y) representar, por exemplo, a função temperatura em (x, y) , a curva de nível seria a curva ao longo da qual a temperatura manteve-se constante e igual à k e, neste caso, são chamadas de *isotérmicas*.

Se o escalar $f(x, y)$ representar a função pressão atmosférica, as curvas de nível são chamadas de *isobáricas*.

Curvas de nível são frequentemente projetadas sobre o plano- xy para dar uma idéia de vários níveis de elevação da superfície (como feito em topografia).

Na verdade, geometricamente as curvas de nível são obtidas da seguinte forma:

Seja S a superfície a qual é gráfico de uma função $z = f(x, y)$. Interceptando-se S com

um plano horizontal $z = k$ obtém-se uma curva formada por pontos da superfície que estão a k unidades acima do plano- xy . A projeção perpendicular desta curva sobre o plano- xy nos fornece a curva de nível k da função f . Assim, a curva de nível nada mais é do que a projeção no plano- xy da interseção do gráfico com o plano $z = k$. Desenhando um certo número de linhas de contorno (curvas de nível) cada qual identificada pelo próprio valor de k a ela associada, obteremos um mapa de contorno da superfície, permitindo assim sua visualização.

Exemplo 1.15. Vamos desenhar as curvas de nível da função $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

Temos que o domínio da função vem dado pelo conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (16 - x^2 - y^2) \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4^2\},$$

e o conjunto imagem por

$$Imf = \{z \in \mathbb{R} : z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \text{ para algum } (x, y) \in D\} = [0, 4]$$

Consideraremos $k \in Imf$, isto é, $0 \leq k \leq 4$. Assim,

$$C_k = \{(x, y) \in D(f) : f(x, y) = k\},$$

que é igual ao conjunto

$$\{(x, y) \in D(f) : \sqrt{16 - x^2 - y^2} = k\}.$$

A equação da curva de nível será

$$x^2 + y^2 = 16 - k^2,$$

a qual representa circunferências centradas na origem e raio $\sqrt{16 - k^2}$.

Para auxiliar no esboço das curvas de nível, vamos atribuir alguns valores à constante k , com $0 \leq k \leq 4$:

Se $k = 0$, a curva de nível zero da função terá equação $C_0 : x^2 + y^2 = 16$ sendo a circunferência centrada na origem e raio 4.

Se $k = 1$, tem-se $C_1 : x^2 + y^2 = 16 - 1 = 15 = (\sqrt{15})^2$

Se $k = 2$, tem-se $C_2 : x^2 + y^2 = 16 - 2^2 = 12 = (\sqrt{12})^2$

Se $k = 3$, tem-se $C_3 : x^2 + y^2 = 16 - 3^2 = 7 = (\sqrt{7})^2$

Se $k = \frac{7}{2}$, tem-se $C_{\frac{7}{2}} : x^2 + y^2 = 16 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{15}{4} = \left(\sqrt{\frac{15}{4}}\right)^2$

Se $k = 4$, tem-se $C_4 : x^2 + y^2 = 16 - 4^2 = 0$ e a curva de nível se reduz ao ponto $(0, 0)$.

Estas curvas de nível, na ordem crescente de k começando pela curva azul, estão ilustradas na figura 1.16.

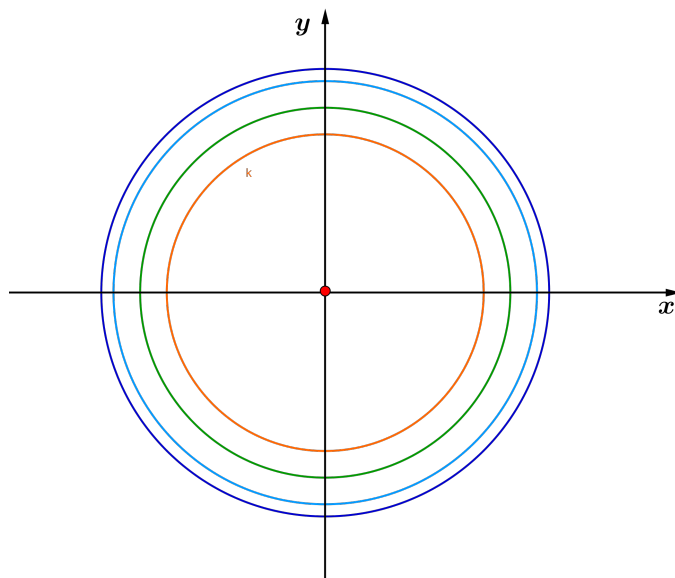


FIGURA 1.16: As curvas de nível da função $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

Exemplo 1.16. Suponhamos que D represente uma chapa plana e $T(x, y)$ a temperatura em cada ponto (x, y) da chapa. Vamos determinar as isotérmicas, representando-as geometricamente, sabendo-se que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e que $T(x, y) = x^2 + y^2$.

A imagem de f será

$$Im f = \{z \in \mathbb{R} : z = T(x, y) = x^2 + y^2, \text{ para algum } (x, y) \in D\} = [0, 1],$$

visto que, do fato de $(x, y) \in D$, tem-se

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 1,$$

ou seja, $0 \leq z \leq 1$. Como $k \in Im f$, isto é, $0 \leq k \leq 1$, obtém-se

$C_k = \{(x, y) \in D(f) : T(x, y) = k\} = \{(x, y) \in D(f) : x^2 + y^2 = k = (\sqrt{k})^2\}$,
ou seja, as curvas de nível são circunferências centradas na origem e raio $\sqrt{k}$.

Novamente, para facilitar a visualização, calculamos as isotérmicas para valores específicos de k :

Para $k = 0$, $C_0 : x^2 + y^2 = 0$ e a curva de nível se reduz a um ponto $(0, 0)$.

Para $k = \frac{1}{2}$, tem-se $C_{\frac{1}{2}} : x^2 + y^2 = \frac{1}{2} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$

Se $k = 1$, tem-se $C_1 : x^2 + y^2 = 1 = 1^2$.

As isotérmicas estão ilustradas na figura 1.17.

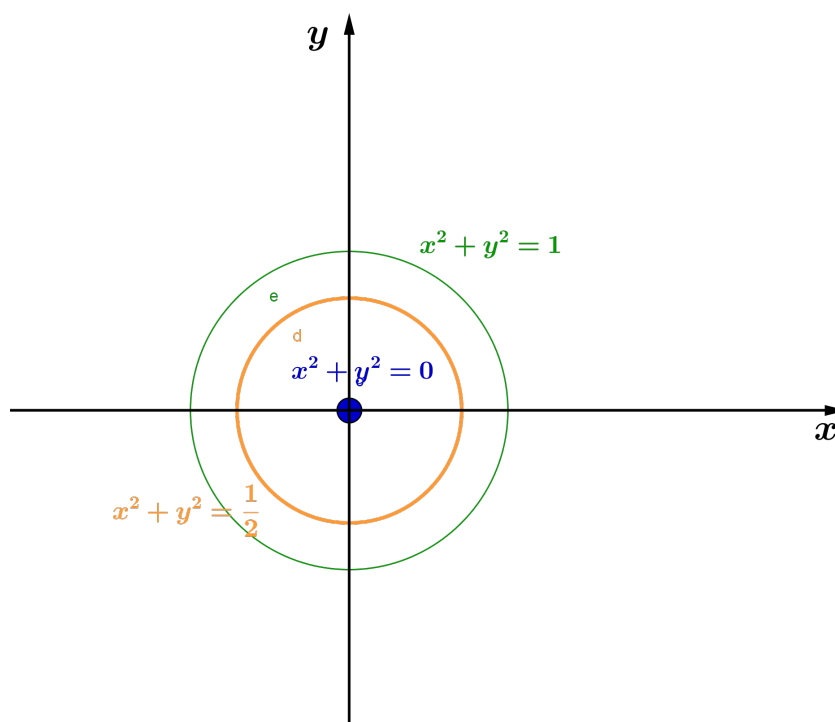


FIGURA 1.17: As curvas de nível da função $T(x, y) = x^2 + y^2$.

Exemplo 1.17. Vamos desenhar as curvas de nível correspondentes à $z = f(x, y) = k$ para os valores de $k = -2; k = 0; k = 2; k = 4$, considerando a função $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Para $z = -2$ temos que

$$C_{-2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = -2\}.$$

Note que da igualdade

$$x^2 - y^2 = -2,$$

multiplicando ambos os membros por $-\frac{1}{2}$, obteremos

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1,$$

a qual poderemos reescrever como

$$\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} = 1,$$

que reconheceremos como a forma canônica de uma hipérbole de eixo real sobre o eixo dos y .

Para descobrir em que pontos ela corta o eixo dos y , façamos $x = 0$ em sua equação obtendo-se $y^2 = 2$ donde $y = \pm\sqrt{2}$ e os pontos da hipérbole que corta o eixo dos y serão $(0, \sqrt{2})$ e $(0, -\sqrt{2})$. Podemos confirmar que a hipérbole não corta o eixo dos x , pois, fazendo $y = 0$ em sua equação obtém-se $x^2 = -2$ e sabemos que não existe $x \in \mathbb{R} : x^2 = -2$; veja gráfico.

Para $z = 0$; $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$. De $x^2 - y^2 = 0$ o que equivale à $x^2 = y^2$, ou seja $x = \pm y$ e tem-se duas retas passando pela origem com coeficientes angulares 1 e -1 .

Para $z = 2$; $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 2\}$. A igualdade $x^2 - y^2 = 2$ equivale à $\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$ a qual sabemos ser uma hipérbole de eixo real sobre o eixo dos x .

Para $z = 4$; $C_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 4\}$; a qual também se trata de uma hipérbole de eixo real sobre o eixo dos x . Estas curvas de nível estão ilustradas na figura 1.18

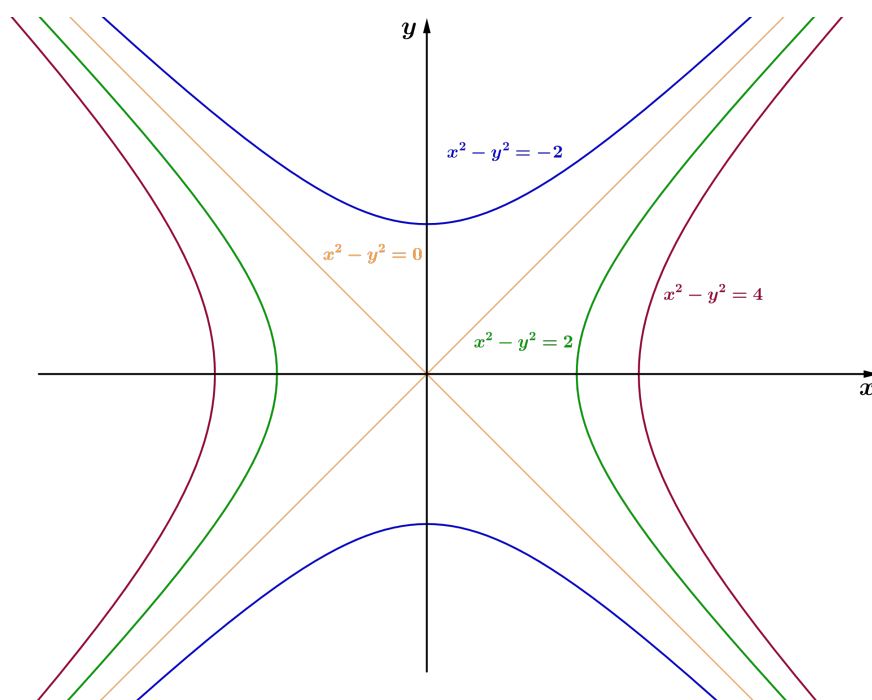


FIGURA 1.18: As curvas de nível da função $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Agora a sua vez de se praticar no próximo desafio.

Desafio!

Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$ o conjunto que representa uma chapa plana e $T(x, y) = 1 - x^2$ a temperatura em cada ponto (x, y) da chapa. Faça no caderno como seriam as isotérmicas e represente-as geometricamente:



Clique aqui para ver a resposta.

Dada a função $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $(x, y, z) \mapsto w = f(x, y, z)$, temos que

$$G(f) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = f(x, y, z), \text{ com } (x, y, z) \in D\},$$

que é o gráfico de f , é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$, não nos sendo possível, portanto, representá-lo geometricamente. Para se ter uma visão geométrica de tal função podemos nos valer de superfícies de nível, definidas em 1.10

Definição 1.10. Seja $k \in \text{Im} f$.

O conjunto $S_k = \{(x, y, z) \in D : f(x, y, z) = k\} \subset \mathbb{R}^3$ será chamado de **superfície de nível** k da função.

Exemplo 1.18. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Temos que o conjunto imagem é

$$\text{Im} f = \{w \in \mathbb{R} : w = x^2 + y^2 + z^2, \text{ para algum } (x, y, z) \in D = \mathbb{R}^3\},$$

ou ainda, podemos expressá-lo

$$\text{Im} f = \{w \in \mathbb{R} : w \geq 0\}$$

Assim, $k \geq 0$ e as superfícies de nível terão por equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = k.$$

Note que no exemplo 1.18, para o caso $k = 0$ a equação será $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, o que corresponde à origem $(0, 0, 0)$.

Também, se $k > 0$ as superfícies de nível da função f do exemplo 1.18 tem como equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt{k})^2,$$

as quais representam as superfícies esféricas centradas na origem e com raio $\sqrt{k}$.

Desafio!

No caderno ache a equação da superfície de nível de $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z^2$ que contém o ponto $P = (2, -1, 3)$.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

Exemplo 1.19. O gráfico da função $f(x, y) = \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ é mostrado na figura 1.19, junto com as curvas de nível, projetadas no plano xy , que são círculos concêntricos centrados na origem.

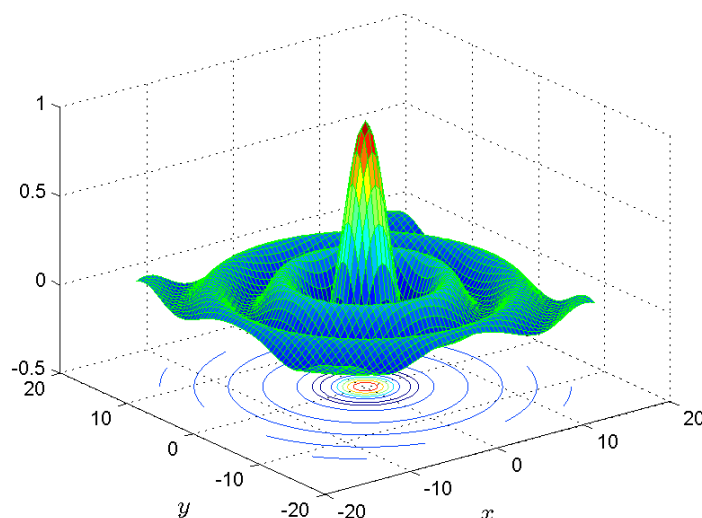


FIGURA 1.19: A função do exemplo 1.19

1.4 Noção de limite e continuidade de uma função de duas e três variáveis



Você deve estar pensando o que aconteceu com a função no exemplo 1.19 no ponto $(x, y) = (0, 0)$, desde que ambos, o numerador e denominador, são 0 neste ponto. A função não está definida em $(0, 0)$, mas o *limite* da função existe, e é igual à 1, quando (x, y) se aproxima de $(0, 0)$.

Iniciaremos explicitamente o que queremos dizer por limite de uma função de duas variáveis.

Definição 1.11. Seja (a, b) um ponto em $\mathbb{R}^2$, e seja $f(x, y)$ uma função a valores reais definida sobre algum conjunto contendo (a, b) (mas não necessariamente definida em (a, b)). Então nós diremos que o **limite** de $f(x, y)$ é igual à L quando (x, y) se aproxima de (a, b) , escreveremos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L \quad (1.9)$$

se dado algum $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta.$$

Uma definição similar pode ser feita para funções de três variáveis. A ideia dada acima é que os valores de $f(x, y)$ podem ser próximos arbitrariamente à L se nós tomarmos (x, y) suficientemente próximos à (a, b) (i.é. em torno de um círculo centrado em (a, b) com algum raio δ suficientemente pequeno).

Exemplo 1.20. Teremos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{(1)(2)}{1^2 + 2^2} = \frac{2}{5}$$

desde que se $x \rightarrow 1$ e $y \rightarrow 2$ a função $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \rightarrow \frac{2}{5}$

Observação 1.2. Para a existência do limite não é necessário que a função esteja definida em (a, b) . Como afirmamos anteriormente, no exemplo 1.19 a função não está definida em $(0, 0)$, entretanto existe o limite e vale 1. Para justificar isso, poderíamos fazer a substituição $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ e usar o limite fundamental, que frequentemente aparecia no cálculo de limite para função de uma variável. Ou seja,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin r}{r} = 1$$

Vimos no estudo sobre limite para função de uma variável, que existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, se e somente se, existem os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e são iguais. E só tem duas direções para se aproximar de a , pela direita ou pela esquerda. Agora, em se tratando de limite de funções de duas variáveis, teremos que não só (x, y) se aproxima do ponto (a, b) pela direita ou pela esquerda, mas também por qualquer outra direção, até mesmo ao longo de uma curva. Assim, a maior diferença entre limites em uma variável e limites em duas ou mais variáveis é como o ponto é aproximado. Esta ideia está ilustrada na figura 1.20

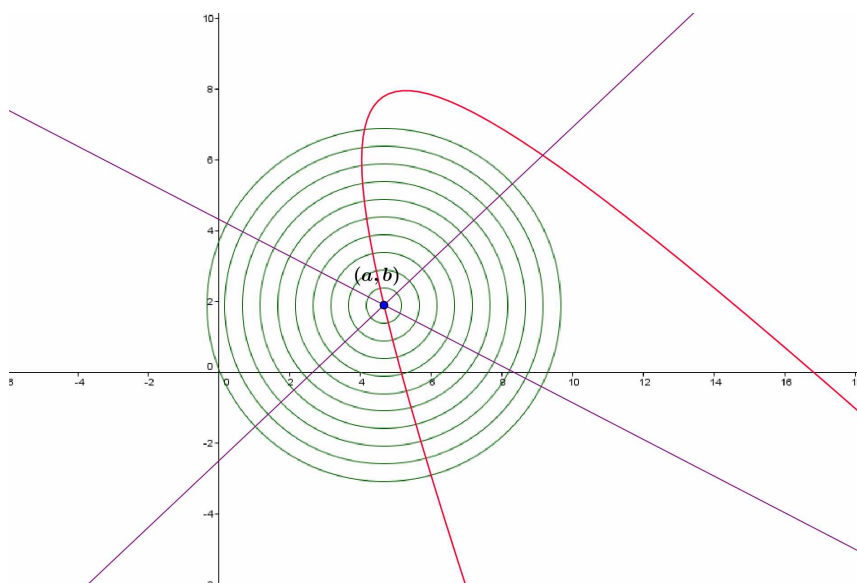


FIGURA 1.20: Os caminhos que chegam ao ponto (a, b) .

Exemplo 1.21. O limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

não existe.



Vamos aprender como justificar a afirmação do exemplo 1.21. A ideia é escolher vários caminhos, não necessariamente retilíneos, para testar em primeira instância, se o limite é diferente dependendo do caminho.

Note que, nós não podemos simplesmente substituir $(x, y) = (0, 0)$ na função, visto que isso nos leva a uma forma indeterminada $0/0$. Para mostrar que o limite não existe, mostraremos que a função se aproxima de diferentes valores à medida que (x, y) se aproxima de $(0, 0)$ ao longo de caminhos distintos em $\mathbb{R}^2$.

Para ver isso, calculemos o limite de f ao longo do eixo- x , de equação $y = 0$:

$$\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0,$$

Agora, tomando (x, y) tendendo para $(0, 0)$ ao longo da reta $y = x$ que passa pela origem, então temos que

$$\lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

Como os limites obtidos são diferentes, quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, ao longo de caminhos distintos podemos afirmar que o limite não existe.

Vamos usar esta técnica para mostrar que o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{x^8 + y^2}.$$

não existe.

Novamente, suponha que $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo do eixo- x , $y = 0$. Logo,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{x^8 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 \cdot 0}{x^8 + 0^2} = 0.$$

Tomando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo de qualquer reta $y = mx$ obtém-se

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{x^8 + y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 \cdot mx}{x^8 + m^2 x^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{mx^5}{x^2(x^6 + m^2)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{mx^3}{x^6 + m^2} = 0 \end{aligned}$$



Então... o limite é 0 ?

Não! pois, se $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo da curva $y = x^4$ ficamos com

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{x^8 + y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 \cdot x^4}{x^8 + (x^4)^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^8}{x^8 + x^8} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^8}{2x^8} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Como os limites obtidos são diferentes, quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, ao longo de caminhos distintos podemos afirmar que o limite não existe.

Observação 1.3. Observe que, o exemplo acima nos mostra que a princípio poderia se pensar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$, já que ao longo de uma família inteira de retas o limite vale 0. Mas pode existir alguma curva fora da família para a qual o limite seja diferente de zero ou até mesmo não exista.

Exemplo 1.22. Seja $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$. Vamos calcular o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo do caminho $y = 0$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + 0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Vamos calcular o mesmo limite ao longo do eixo dos y .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{0^3}{0^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{0}{y^2} = 0.$$

A conclusão do exemplo 1.22 é que ao longo dos eixos coordenados o limite é igual a 0. No desafio tal, você vai estudar ao longo de qualquer reta que passe pela origem.

Desafio!

Utilize do caderno para calcular os limites da função do exemplo 1.22 ao longo das retas $y = kx$.



Clique aqui para ver a resposta.

E ao longo da curva $y = x^3$? como fica o limite ?



Para a curva $y = x^3$, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + (x^3)^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{1 + x^4} = \frac{0}{1} = 0.$$

Então... o limite é 0 ?



Por enquanto obtivemos esse número como candidato ao limite. Não poderemos afirmar diretamente que é zero, pois poderia ocorrer, como vimos anteriormente, de existir outro caminho ao longo do qual o limite seja diferente de zero.

Observação 1.4. Para concluir se o limite da função do exemplo 1.22 é zero, vamos precisar do teorema 1.1, o qual enunciaremos sem prova. Veremos no enunciado desse teorema que o limite de funções de várias variáveis obedecem as mesmas regras algébricas, como no caso de uma variável.

Teorema 1.1. Suponha que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)$ ambos existem, e que k é algum escalar. Então:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \right] \pm \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) \right]$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} k f(x,y) = k \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \right]$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y)g(x,y)] = \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \right] \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) \right]$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)} \text{ desde que } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) \neq 0$$

(e) Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = 0$ e se $|g(x,y)| \leq M$ para todo (x,y) tal que $0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta$ onde $\delta > 0, M > 0$ então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \cdot g(x,y) = 0.$$

Exemplo 1.23. Voltando ao exemplo 1.22, mostraremos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0$$

usando a propriedade do limite no item (e) do teorema 1.1. Com efeito, temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

Agora, como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$, e pelo fato de que a desigualdade

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$$

é sempre verdadeira, segue-se que

$$\left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1.$$

Logo, pelo teorema 1.1, conclui-se que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0$

Desafio!

Utilize do caderno para mostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^2 + y^2} = 0$.



Clique aqui para ver a resposta.

Definição 1.12. Uma função a valores reais $f(x, y)$ com domínio D em $\mathbb{R}^2$ é **contínua** em um ponto $(a, b) \in D$ se $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

Diremos simplesmente que $f(x, y)$ é contínua, se ela é contínua em todos os pontos do seu domínio D .

Observação 1.5. Uma função não será contínua no ponto (a, b) no caso que não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ ou existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \neq f(a, b)$.

Exemplo 1.24. Vamos verificar que a função $f(x, y) = x^3 \cdot y^2 + 3$ é contínua no ponto $(2, -1)$. Usando as propriedades dos limites mencionadas no teorema 1.1 tem-se:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} x^3 \cdot y^2 + 3 &= \lim_{x \rightarrow 2} x^3 \cdot \lim_{y \rightarrow -1} y^2 + \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} 3. \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} x^3 \cdot y^2 + 3 &= \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{y \rightarrow -1} y \cdot \lim_{y \rightarrow -1} y + 3. \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} x^3 \cdot y^2 + 3 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-1)(-1) + 3 = 11.\end{aligned}$$

Portanto, a função é contínua em $(2, -1)$.

Observação 1.6. Note que, de acordo com a definição 1.12, a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^8 + y^2}, & \text{para todo } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

não é contínua no ponto $(0, 0)$, pois já mostramos anteriormente que não existe o limite de f quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Exemplo 1.25. Vamos verificar se a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{para todo } (x, y) \neq (0, 0) \\ 5, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua em $(0, 0)$. Temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0,$$

já justificado no exemplo 1.22. Logo,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 \neq 5 = f(0, 0).$$

Assim, f não é contínua em $(0, 0)$.

Exemplo 1.26. Vamos verificar que a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{para todo } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua em $(0, 0)$. Fazendo a mudança $r = x^2 + y^2$, obtemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{sen}r}{r} = 1,$$

por ser um limite fundamental para funções de uma variável. Portanto,

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1 = f(0, 0)$, e a função f é contínua em $(0, 0)$.

Desafio!

Faça no caderno e decida se a função $f(x, y)$ é contínua em $(0, 0)$, sendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2}, & \text{para todo } (x, y) \neq (0, 0) \\ -2, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

Teorema 1.2. *Sejam f e g funções contínuas em (a, b) e k uma constante. Então: $f + g$; $k \cdot f$; $f \cdot g$ são contínuas em (a, b) .*

Se $g(a, b) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ é contínua em (a, b) . Ou seja, o quociente de funções contínuas é contínuo exceto onde o denominador se anula.

Observação 1.7. *Decorre do teorema 1.2 acima que toda função polinomial de duas variáveis é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$.*

Exemplo 1.27. *Vamos decidir qual é o maior conjunto de $\mathbb{R}^2$ onde a função*

$$f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{1 - x \cdot y},$$

é contínua. Podemos observar que $x^3 y^2$ e $1 - x \cdot y$ são funções polinomiais e, pela observação 1.7, são funções contínuas. Assim, $f(x, y)$ é um quociente de funções contínuas e, devido ao teorema 1.2, segue-se que $f(x, y)$ é contínua em todo $\mathbb{R}^2$, exceto nos pontos da hipérbole $x \cdot y = 1$, como mostra a figura 1.21.

Terminamos este módulo com um desafio!

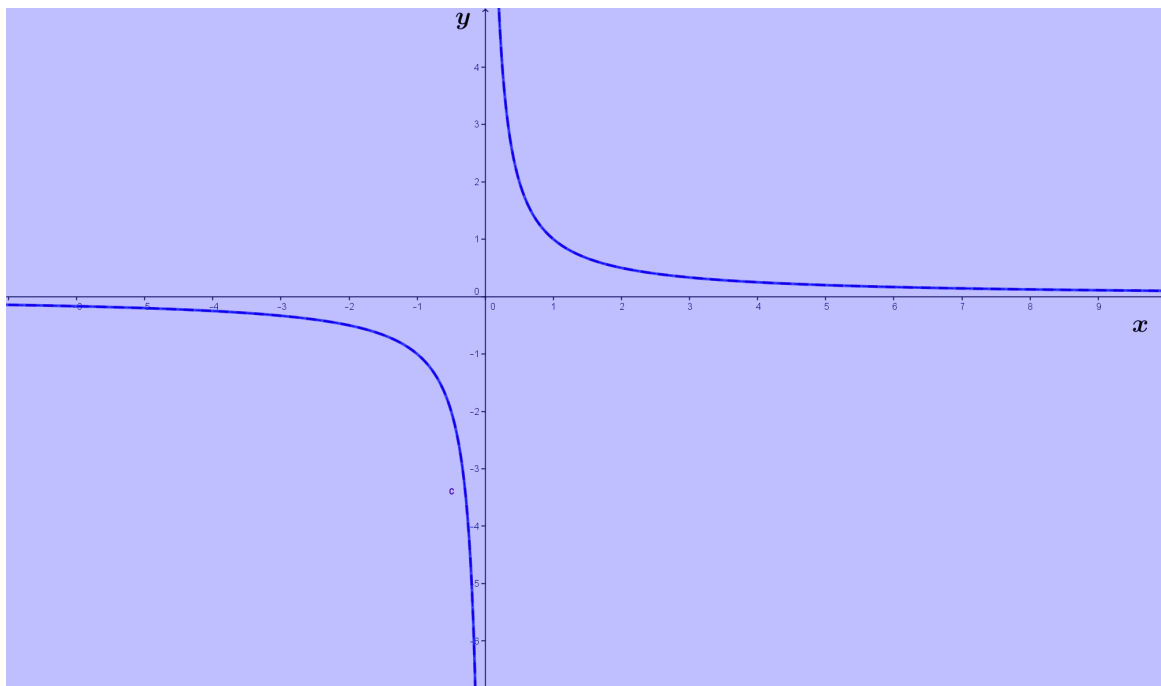


FIGURA 1.21: O domínio da função é o conjunto azul, exceto pela curva pontilhada.

Desafio!

Determine qual é o maior conjunto de $\mathbb{R}^2$ para o qual a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{7x^2(y^3 + 1) + 7y^2}{x^2 + y^2}, & \text{para todo } (x, y) \neq (0, 0) \\ 7, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

1.5 Soluções dos desafios do módulo I

- Desafio da página 14.

Queremos a equação de uma reta r que passa por $P_0 = (0, 3)$ e que é perpendicular à reta $s : 2x - 3y = 5$. Sabemos que $\vec{u} = (2, -3) \perp s$, e assim a reta procurada tem a mesma direção de $\vec{u}$, logo a equação vetorial da reta será

$$(x, y) = (0, 3) + t(2, -3), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

- Desafio da página 24.

O domínio será constituído pelo conjunto $D = \{(x, y) : -xy > 0\}$,

ou seja, $D = \{(x, y) : xy < 0\}$ o qual constitui-se dos pontos no segundo e quarto quadrantes do plano cartesiano excluindo-se os pontos sobre o eixo dos x e sobre o eixo dos y , conforme podemos ver na figura 1.22

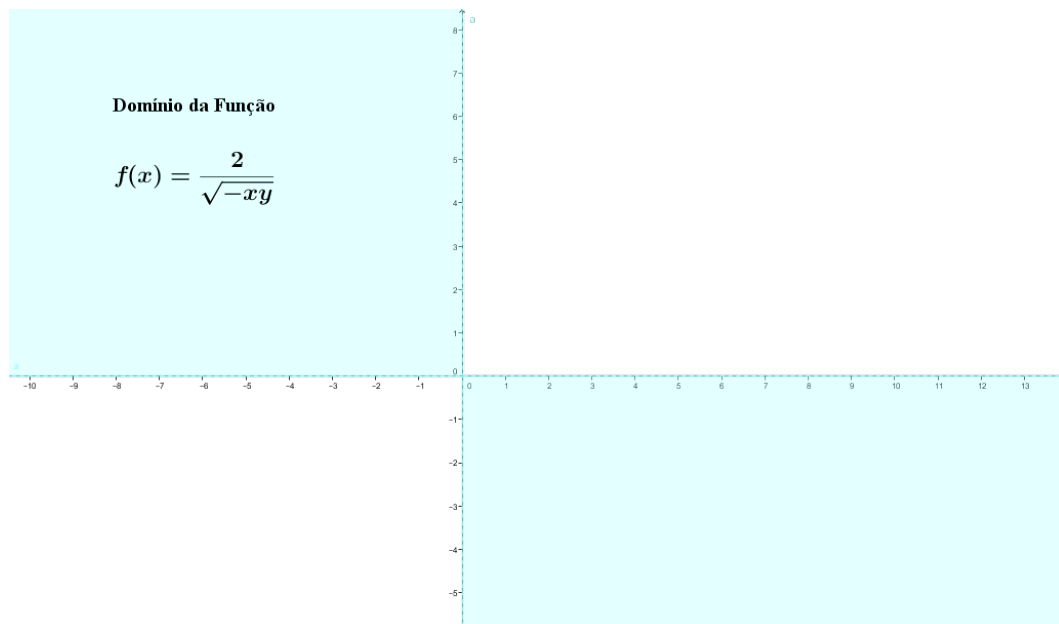


FIGURA 1.22: O domínio da função em cor azul.

- Desafio da página 24

Temos a função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x \cdot y \cdot z}$$

O domínio da função é $D = \{(x, y, z) : x \cdot y \cdot z \neq 0\}$ e assim,

$D = \{(x, y, z) : x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0\}$, sendo o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ excluindo os pontos sobre os eixos coordenados e sobre os planos coordenados.

- Desafio da página 24

Teremos $D = \{(x, y) : (x^3 - y) \geq 0\}$, ou equivalentemente, $D = \{(x, y) : y \leq x^3\}$. A partir do gráfico da cúbica de equação $y = x^3$, analisemos alguns pontos interiores ou exteriores à curva, verificando qual deles irá satisfazer a condição $y \leq x^3$. Considerando, por exemplo, o ponto $(2, 3)$ ele é tal que $y = 3 < 2^3$, ou seja, satisfaz a condição $y \leq x^3$, daí localiza-se o ponto e identifica-se a parte da região a ser hachurada, como podemos ver na figura 1.23.

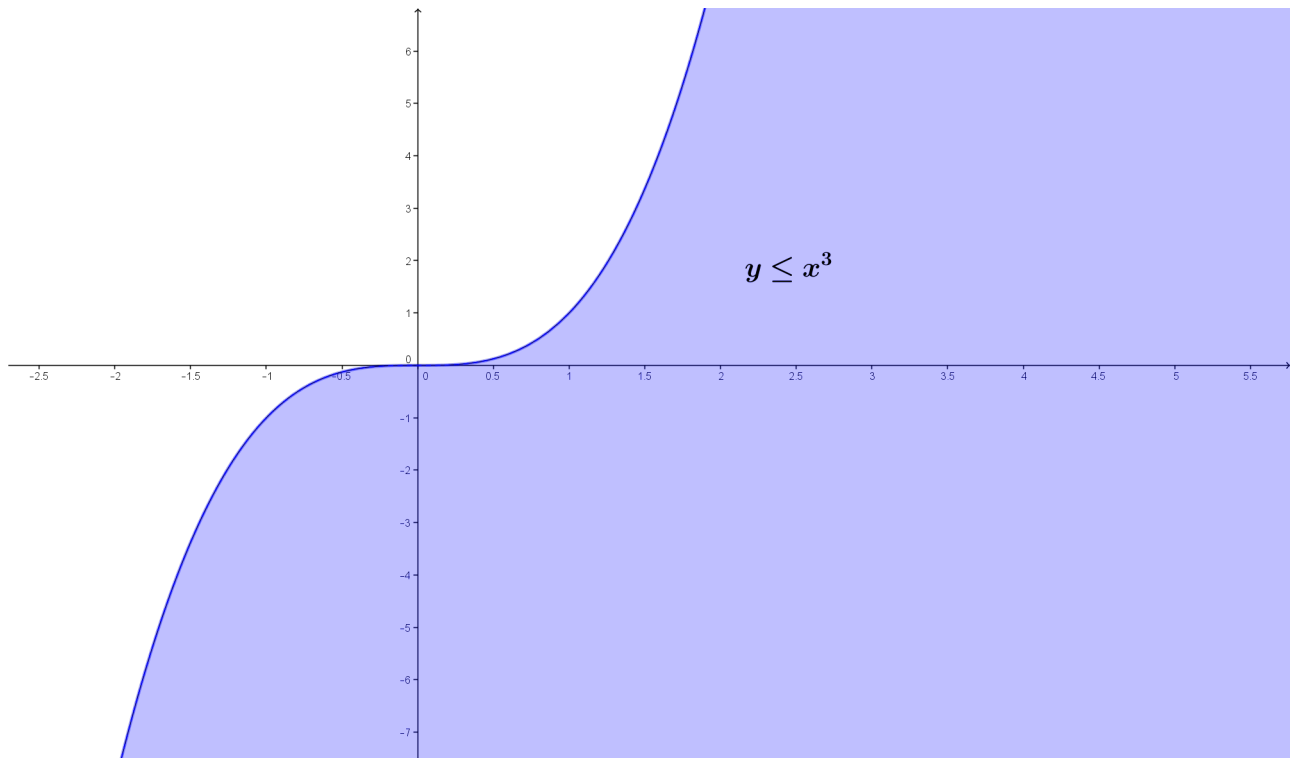


FIGURA 1.23: O domínio da função em cor azul.

- Desafio da página 28.

Como a desigualdade $(x^2 + y^2) \geq 0$ estará sempre satisfeita para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $y \in \mathbb{R}$, o domínio será o conjunto $D(f) = \mathbb{R}^2$

O conjunto imagem será

$$Imf = \{z \in \mathbb{R} : z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ para algum } (x, y) \in D(f)\}.$$

$$Imf = \{z \in \mathbb{R} : z \geq 0\} = [0, +\infty).$$

O gráfico de f será dado por

$$G(f) = \{(x, y, z) : (x, y) \in D(f) \text{ e } z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

ou ainda,

$$G(f) = \{(x, y, z) : z^2 = x^2 + y^2 \text{ e } z \geq 0\},$$

e assim $G(f)$ é a parte do cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ acima do plano- xy .

- Desafio da página 33.

Inicialmente identificaremos o conjunto imagem:

$$Imf = \{z \in \mathbb{R} : z = 1 - x^2 \text{ para algum } (x, y) \in D\}.$$

Como $0 \leq x \leq 1$, tem-se $0 \leq x^2 \leq 1$, da qual, multiplicando ambos os membros por -1, obtém-se

$$0 \geq -x^2 \geq -1. \quad (1.10)$$

Somando-se 1 em ambos os membros da desigualdade (1.10), chegamos à conclusão que

$$-1 \leq 1 - x^2 \leq 0.$$

Assim, o conjunto imagem de f vem dado por

$$Imf = \{z \in \mathbb{R} : 0 \leq z \leq 1\} = [0, 1].$$

Seja $0 \leq k \leq 1$. Então, a curva de nível k de f é o conjunto

$$C_k = \{(x, y) \in D : T(x, y) = k\} = \{(x, y) \in D : 1 - x^2 = k\}.$$

Da igualdade

$$1 - x^2 = k \text{ tem-se que } x^2 = 1 - k$$

o que equivale à igualdade

$$x = \pm \sqrt{1 - k}.$$

Sendo $x \geq 0$, conclui-se que as curvas de nível de f são segmentos de retas de equação

$$x = \sqrt{1 - k}, \text{ com } 0 \leq k \leq 1.$$

Em particular, temos que

$$C_0 : x = \sqrt{1 - 0} = 1$$

e

$$C_{\frac{1}{2}} : x = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

e

$$C_1 : x = \sqrt{1 - 1} = 0$$

Neste último caso, a curva de nível coincide com o eixo dos y , para os valores $0 \leq y \leq 2$.

Note que, o gráfico de $z = 1 - x^2$ é uma superfície cilíndrica parabólica. A figura desta função e as curvas de nível são mostradas na figura 1.24.

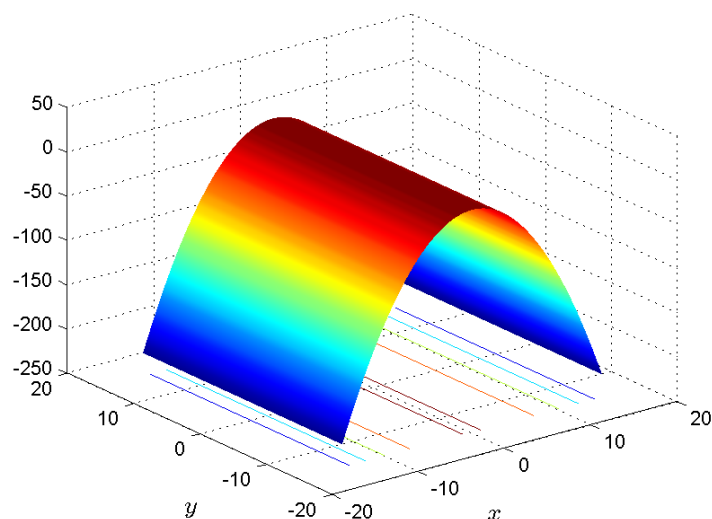


FIGURA 1.24: A função “calha” e suas curvas de nível.

- Desafio da página 34.

A superfície

$$S_k = \{(x, y, z) \in D = \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = k\}$$

e que passa pelo ponto $(2, -1, 3)$ será

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = f(2, -1, 3) = k\}.$$

Assim, a equação da superfície de nível que passa pelo ponto P é dada por

$$x^2 + 4y^2 - z^2 = (2)^2 + 4(-1)^2 - (3)^2 = -1,$$

ou ainda,

$$-x^2 - 4y^2 + z^2 = 1.$$

A superfície se trata de um hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo dos z , como mostra a figura 1.25.

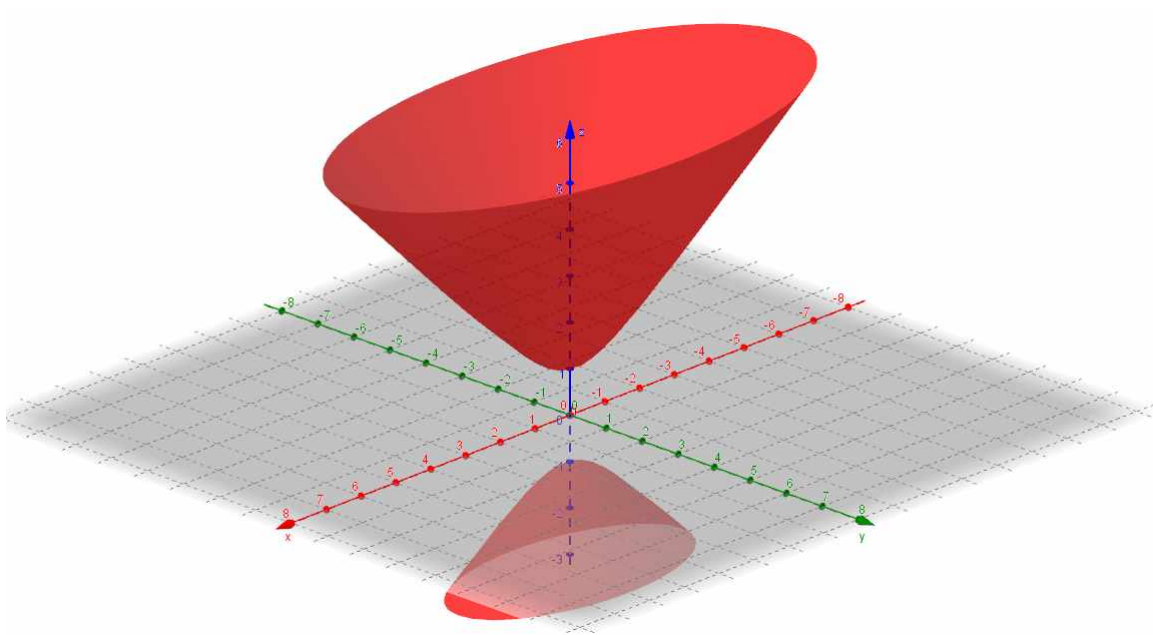


FIGURA 1.25: A função $-x^2 - 4y^2 + z^2 = 1$.

- Desafio da página 39.

Vamos ter que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + (kx)^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2(1 + k^2)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{1 + k^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Desafio da página 41.

Desde que substituindo $(x, y) = (0, 0)$ sobre a função, isso nos forneceria a forma indeterminada $\frac{0}{0}$, necessitaremos de um método alternativo para avaliar o limite. Usaremos o teorema 1.1(e). Primeiro, note que o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^2 + y^2},$$

pode ser reescrito como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^2 \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2},$$

de onde obtemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^2 = 0 \text{ e } \left| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1.$$

Conclui-se, pelo último item do teorema 1.1, que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^2 + y^2} = 0.$$

- Desafio da página 43.

Calcularemos $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Temos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}$.

Agora observe que, tomando-se $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo do eixo- x positivo, assim como que $y = 0$ ao longo deste caminho, obtém-se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + 0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x},$$

com $x > 0$ no denominador.

Sabemos que, se x assumir valores suficientemente pequenos e próximos de zero então $\frac{1}{x}$ assumirá valores suficientemente grandes e não tenderá a um único valor, donde não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ e assim não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}$, donde não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Consequentemente a função dada não é contínua em $(0, 0)$.

- Desafio da página 43 Como a função é quociente de dois polinômios, então é contínua exceto nos pontos onde $x^2 + y^2 = 0$, que é o conjunto unitário $\{(0, 0)\}$. Para saber se a função é contínua em $(0, 0)$, calculamos o limite a seguir:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{7x^2(y^3 + 1) + 7y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{7x^2 + 7y^2}{x^2 + y^2} + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{7x^2y^3}{x^2 + y^2}$$

e como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{7x^2y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{7x^2 \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0,$$

então temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{7x^2(y^3 + 1) + 7y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{7x^2 + 7y^2}{x^2 + y^2} = 7.$$

Como, por definição, temos $f(0, 0) = 7$, então a função é contínua para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Módulo 2

Diferenciabilidade em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

No término do módulo II, o aluno estará familiarizado com os seguintes conceitos:

- ▷ Definição de função diferenciável. Comparação com a diferencial em $\mathbb{R}$;
- ▷ Derivadas parciais de funções de duas variáveis. Significado geométrico;
- ▷ Derivadas parciais de funções de três variáveis.
- ▷ Derivadas direcionais e vetores gradiente;
- ▷ A Regra da Cadeia.

2.1 Definição de função diferenciável. Comparação com a diferencial em $\mathbb{R}$

Lembra o que é a derivada de uma função em um ponto e sua interpretação geométrica? Pois estas noções são muito importantes para entender e estender o conceito de “derivação” para funções de várias variáveis.



Dada uma função f de valores reais a valores reais definida em uma vizinhança do ponto a pertencente ao domínio de f , se define como derivada de f em a ao **número real**, denotado por $f'(a)$, sendo este número dado por

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad (2.1)$$

se existir. O número $f'(a)$ representa geometricamente, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $A(a, f(a))$, como mostra a figura 2.1.

O limite (2.1) se existir e for igual a $f'(a)$, é equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = 0,$$

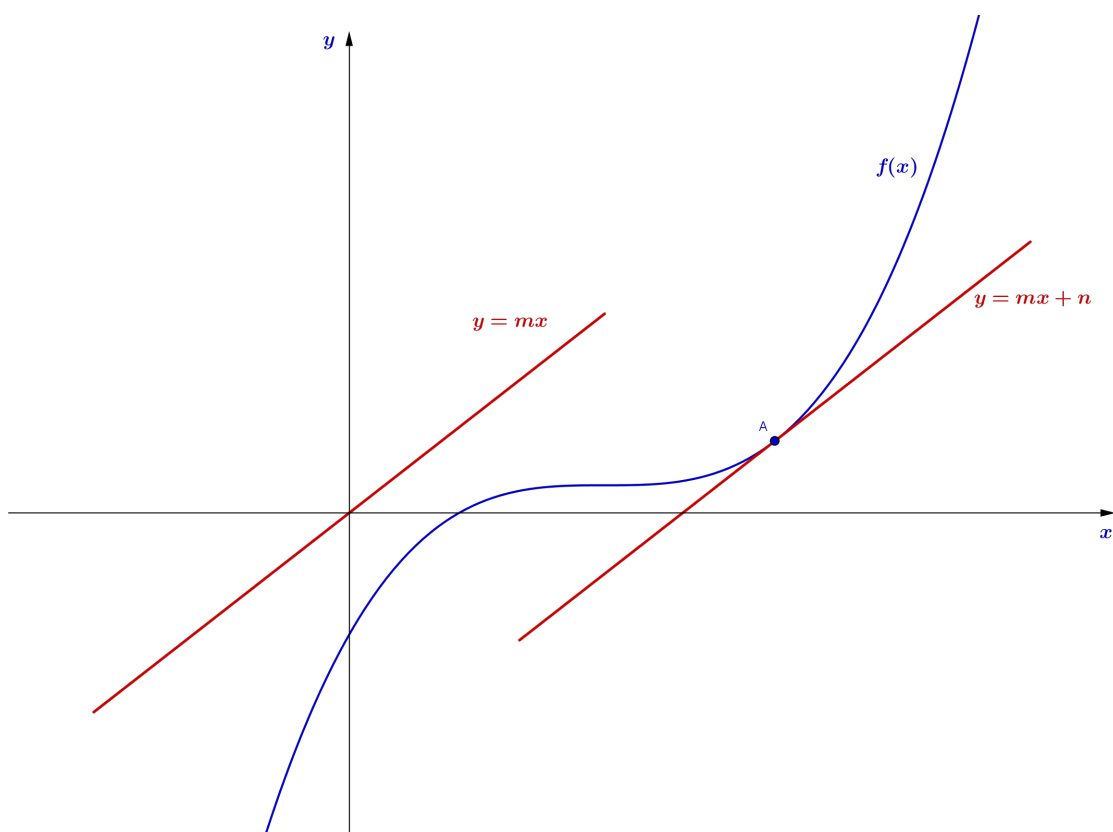


FIGURA 2.1: A função f e a tangente geométrica $y = mx + n$ passando pelo ponto $A(a, f(a))$. A função $y = mx$ representa geometricamente a reta que passa pela origem paralela à tangente da função f pelo ponto A .

ou ainda equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0. \quad (2.2)$$

Assim, denotando $f'(a) = m$ temos definida uma função da forma $T(h) = mh$, para h número real. Note que T definida dessa maneira é uma **transformação linear** (TL) do espaço vetorial $\mathbb{R}$ em si mesmo. De fato! T é uma TL definida em $\mathbb{R}$, pois verifica que

$$T(h_1 + h_2) = mh_1 + mh_2 = T(h_1) + T(h_2);$$

$$T(\alpha h) = m(\alpha h) = \alpha(mh) = \alpha T(h).$$

Voltando para o limite (2.2), concluímos que, associada ao número $f'(a)$, existe uma transformação linear $T_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(h) = f'(a)h$, chamada de **diferencial de f no ponto a** .

Como toda transformação linear $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pode-se ser identificada pelo coeficiente angular da reta que representa os pontos do gráfico de T , então, no caso das funções de uma variável real a valores reais, existe uma identificação entre o número $f'(a)$ (que é o coeficiente angular da reta tangente no ponto a) e T_a , a diferencial de f no ponto a . Na figura 2.1 está ilustrada esta ideia, aonde a reta tangente ao gráfico de f no ponto $A(a, f(a))$, de equação $y = mx + n$, e $m = f'(a)$, é paralela à função linear $T(x) = y = mx$, que é o gráfico da diferencial de f no ponto a .

Desafio!

Ache a diferencial da função $f(x) = x^2 + x$ no ponto $x = 2$. Construa o gráfico da diferencial de f em 2 e da tangente ao gráfico no mesmo ponto.



Clique aqui para ver a resposta.

Vamos estender estes conceitos revisados e aprendidos (derivada e diferencial) para funções de duas e três variáveis, nos inspirando na formulação do limite (2.2). De fato, vamos definir diferencial de uma função de mais de uma variável, adotando o limite envolvido em (2.2) aos conceitos de limite em várias variáveis. Começamos por duas variáveis com a definição 2.1.

Definição 2.1. Dada uma função definida f de duas variáveis e $a \in \mathbb{R}^2$ tal que um disco de centro a está contido totalmente no domínio de f . Diz-se que f é **diferenciável** no ponto a se existir uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{|h|} = 0. \quad (2.3)$$

Observação 2.1. Note que h é um vetor do espaço $\mathbb{R}^2$, ou seja, da forma $h = (h_1, h_2)$ e $|h|$ representa o módulo desse vetor, ou seja, $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.

Lembre também que toda transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ é da forma

$$T(x, y) = mx + ny, \quad (2.4)$$

para algum m, n números reais. Com a informação (2.4), vamos ver agora um exemplo simples do cálculo da diferencial de uma função de duas variáveis em um ponto do domínio nas condições da definição 2.1.

Exemplo 2.1. Seja a função definida por $f(x, y) = x + y - 2$. Vamos determinar a diferencial de f no ponto $(1, 2)$. Como f está definida em todo o espaço $\mathbb{R}^2$, podemos aplicar diretamente a definição 2.1. Além disso, denotando $h = (h_1, h_2)$, $a = (1, 2)$, usando a fórmula (2.4) e a definição 2.1, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{|h|} &= \lim_{h \rightarrow (0,0)} \frac{f((1+h_1, 2+h_2)) - f((1, 2)) - T((h_1, h_2))}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow (0,0)} \frac{(1+h_1) + (2+h_2) - 2 - 1 - mh_1 - nh_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow (0,0)} \frac{(1-m)h_1 + (1-n)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}. \end{aligned}$$

Como queremos que o limite seja zero, a única alternativa para isso ocorrer é que $1 - m = 0$ e $1 - n = 0$, de onde $T(x, y) = x + y$, sendo esta TL a diferencial de f no ponto $(1, 2)$. A função f e sua diferencial T no ponto $(1, 2)$ tem como gráficos dois planos paralelos, o da diferencial passando pela origem, como mostra a figura 2.2.

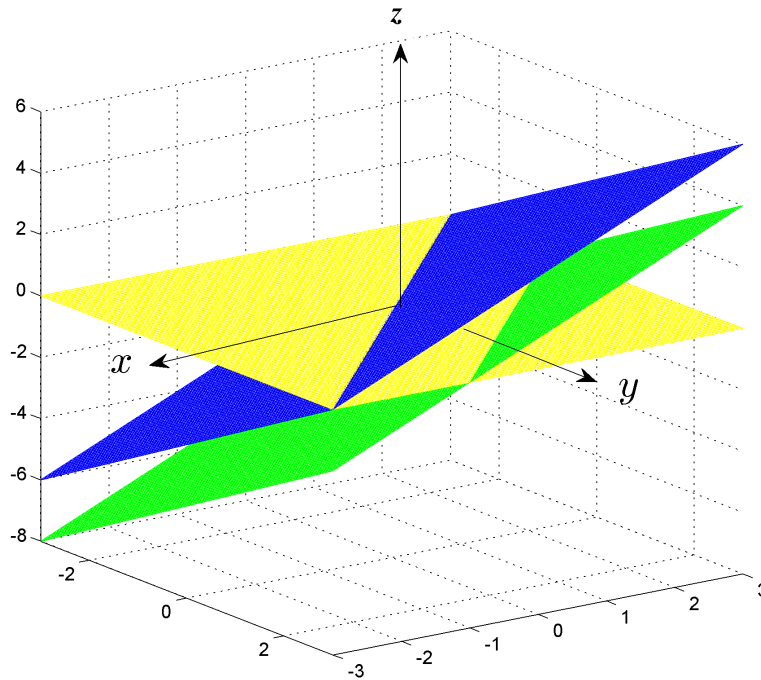


FIGURA 2.2: Os gráficos do exemplo 2.1 da função f , em cor azul e sua diferencial, representada pelo plano em cor vermelha.



O exemplo 2.1 mostrou que a diferencial da função de primeiro grau $f(x, y) = x + y - 2$ é exatamente a função $f + 2$. Isto no ponto $(1, 2)$. Observando o cálculo...depende do ponto?

A resposta é negativa! O resultado não depende do ponto e ainda as conclusões são de fato uma propriedade geral: se uma função é da forma $f(x) = mx + ny + c$, então essa função tem como diferencial em qualquer ponto a transformação linear $T(x) = mx + ny$.

Todas essas conclusões podem ser estendidas para funções de três variáveis. Lembrando que uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$ é da forma $T(x, y, z) = mx + ny + pz$, deixamos como desafio o cálculo da diferencial de uma função de três variáveis.

Desafio!

Ache a diferencial da função $f(x, y, z) = xyz$ no ponto $(1, 1, -1)$.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

Na seção 2.4 veremos como calcular a diferencial de uma função sem a necessidade de usar o limite da definição 2.1. Para isso precisaremos de lembrar a proposição 2.1 da Álgebra Linear que enunciamos a seguir.

Proposição 2.1. *Dada uma transformação linear T de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, $n = 2, 3$, existe uma matriz $1 \times n$ associada a T em bases determinadas do domínio e do contradomínio.*

Usando as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ para $n = 2, 3$, então a matriz associada a T terá a forma $[T(1, 0), T(0, 1)]$ no caso de $n = 2$ e $[T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)]$ no caso de $n = 3$, ou

seja, será uma matriz linha com entradas as imagens pela transformação linear da base canônica do domínio.

Observação 2.2. Mostraremos na seção 2.4 qual será a matriz associada à diferencial de uma função diferenciável em um ponto nas bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) e $\mathbb{R}$.

Para finalizar esta seção lembremos algumas afirmações do cálculo de uma variável.

Proposição 2.2. *Se uma função de uma variável é derivável no ponto a interior ao domínio, então é contínua no ponto a .*

Como consequência temos a proposição 2.3 a seguir.

Proposição 2.3. *Se uma função de uma variável não é contínua no ponto a interior ao domínio, então não pode ser derivável no ponto a .*

Estas proposições também são verdadeiras para funções de várias variáveis e a demonstração procede da mesma forma que para funções de uma variável. De fato, se uma função de várias variáveis é diferenciável, então existe uma transformação linear T tal que

$$\lim_{h \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{|h|} = 0.$$

Daí,

$$\lim_{h \rightarrow (0,0)} f(a+h) - f(a) = \lim_{h \rightarrow (0,0)} |h| \frac{(f(a+h) - f(a) - T(h))}{|h|} + T(h) = 0,$$

pois $T(0) = 0$ por ser T uma transformação linear. Isto mostrou que

$$\lim_{h \rightarrow (0,0)} f(a+h) = f(a),$$

que é a definição de continuidade de uma função f em um ponto.

Como a proposição 2.3 é a contrarecíproca da proposição 2.2, então temos as mesmas conclusões para as funções de várias variáveis.

2.2 Derivadas parciais de funções de duas variáveis.

Significado geométrico

Agora que temos uma ideia de como são as funções de várias variáveis, e de como um limite de tais funções é, podemos começar a desenvolver o conceito da derivada de uma função de duas ou mais variáveis.



Vocês se lembram do significado da derivada de uma função de uma variável ?

De fato, já vimos o significado geométrico da derivada de uma função f em um ponto a , denotada $f'(a)$, como sendo a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$; bem como a derivada pode ser interpretada como a taxa de variação da função na direção do eixo x positivo.

Definição 2.2. Seja $f(x, y)$ uma função a valores reais com domínio D em $\mathbb{R}^2$, e seja (a, b) um ponto em D . A **derivada parcial de f com relação à x** calculada no ponto (a, b) , é denotada e definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \quad (2.5)$$

Nota: O símbolo ∂ é pronunciado “del”.

Exemplo 2.2. Seja $f(x, y) = x^2 \cdot y$. Vamos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$. Teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h, 2) - f(1, 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h)^2(2) - (1)^2(2)}{h}. \end{aligned}$$

Assim, desenvolvendo o quadrado, obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + 4h + 2h^2 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 4 + 2h = 4.$$



E qual será o valor $\frac{\partial f}{\partial x}$ para qualquer (x, y) ?

Procedemos da mesma forma que fizemos com o par $(1, 2)$. De fato,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 y - x^2 y}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2)y - x^2 y}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 y + 2xhy + h^2 y - x^2 y}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} 2xy + hy = 2xy\end{aligned}$$

Note que, esse resultado generaliza o exemplo 2.2: fazendo $x = 1$ e $y = 2$ obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2(1)(2) = 4.$$

2.2.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DERIVADAS PARCIAIS

Considere uma função $f(x, y)$ e fixe um ponto (a, b) . Conforme vimos na observação 2.3, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{d}{dx}[f(x, b)]|_{x=a} = \frac{d}{dx}[g(x)]|_{x=a} = g'(a).$$

Portanto $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $(a, g(a))$. Agora, como $g(x) = f(x, b)$ então para visualizarmos o gráfico de $g(x)$ basta interceptar o gráfico de f com o plano $y = b$, conforme ilustração da Figura 2.3.

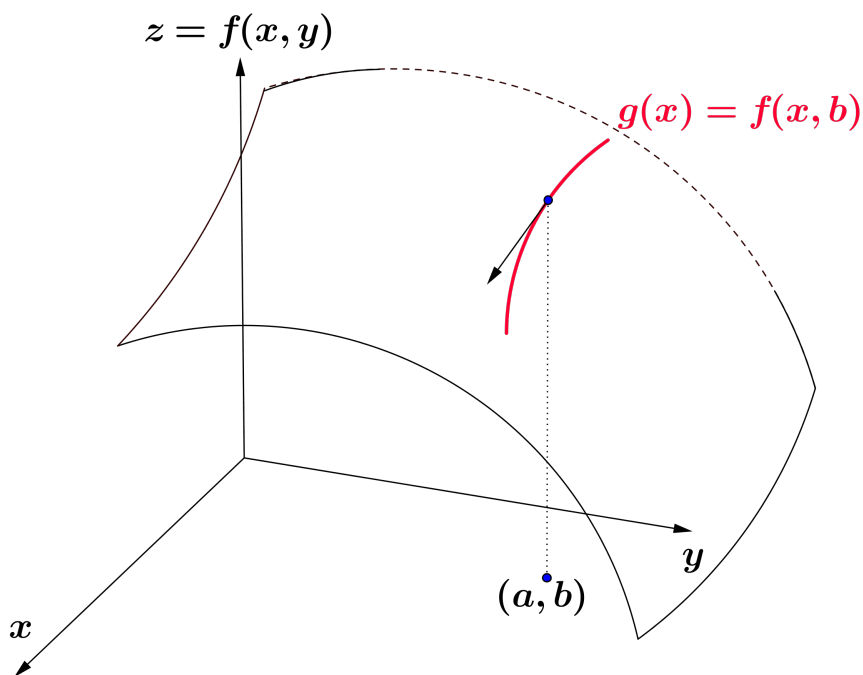


FIGURA 2.3: A interpretação da derivada parcial.

Observação 2.3. Observe que se na função $f(x, y)$ fixarmos a variável y em b e variarmos apenas x , obteremos uma função que depende apenas de x , a saber, $g(x) = f(x, b)$. Agora, usando a definição de derivada para função de uma variável, poderemos concluir que:

$$g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}[g(x)] \big|_{x=a} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).$$

Usualmente, adota-se a notação d para derivada de funções de uma variável e o símbolo ∂ para derivadas parciais de funções de várias variáveis.

E assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{d}{dx}[f(x, b)] \big|_{x=a}.$$

Consequentemente, para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ faz-se y constante e age-se como se $f(x, y)$ dependesse apenas de x e utiliza-se todas as regras de derivação já aprendidas no cálculo para funções de uma única variável.

Exemplo 2.3. Usando a ideia da observação 2.3, calcularemos $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ para a função $f(x, y) = x^2y$ do exemplo 2.2.

Tratando y como uma constante e derivando $f(x, y)$ com relação à x , obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dx}[x^2y]$$

Como a derivada de uma constante vezes uma função é igual à constante vezes a derivada da função, segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{d}{dx}[x^2]$$

e sendo $\frac{d}{dx}[x^2] = 2x$, obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$$

coincidindo com o resultado obtido anteriormente usando a definição de derivada parcial através de limite.

Analogamente define-se a derivada parcial de f com relação à y , como na definição 2.3 a seguir

Definição 2.3. Seja $f(x, y)$ uma função a valores reais com domínio D em $\mathbb{R}^2$, e seja (a, b) um ponto em D . A **derivada parcial de f com relação à y** calculada no ponto (a, b) , é denotada e definida por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h} \quad (2.6)$$

Observação 2.4. Vale observações análogas às anteriores para o cálculo de $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, isto é, “congela-se” x e age-se como se $f(x, y)$ dependesse apenas de y .

Vamos escrever em forma simplificada $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em vez de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, a não ser que o ponto seja importante para o cálculo da derivada parcial.

Vamos ver alguns exemplos de como calcular a derivada parcial de uma função com respeito a y .

Exemplo 2.4. Iremos achar $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ para a função $f(x, y) = \frac{\sin(xy^2)}{x^2 + 1}$.

Tratando y como uma constante e derivando $f(x, y)$ com relação à x , usando a regra de derivação para o quociente e regra da cadeia, teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2 + 1)(y^2 \cos(xy^2)) - (2x) \sin(xy^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

Tratando x como uma constante e derivando $f(x, y)$ com relação à y segue-se pela regra de derivação para o quociente e regra da cadeia que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2 + 1)2xy \cos(xy^2) - \sin(xy^2) [0]}{(x^2 + 1)^2}$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy \cos(xy^2)}{(x^2 + 1)}.$$

Exemplo 2.5. Dada $f(x, y) = \ln(x + x^2y^3)$.

Vamos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Lembrando que $(\ln(u))' = \frac{1}{u} \cdot u'$ tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x + x^2y^3} \frac{\partial}{\partial x} [x + x^2y^3] \\ &= \frac{1}{x + x^2y^3} [1 + 2xy^3] \\ &= \frac{1 + 2xy^3}{x + x^2y^3} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{x + x^2y^3} \frac{\partial}{\partial y} [x + x^2y^3] \\ &= \frac{1}{x + x^2y^3} [3x^2y^2] \\ &= \frac{3x^2y^2}{x + x^2y^3} \end{aligned}$$

Exemplo 2.6. Iremos determinar $\frac{\partial f}{\partial y}$ sendo $f(x, y) = \cos(x^2 y^2) \cdot y^3$.

Usando a regra de derivação do produto:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [\cos(x^2 y^2)] \cdot y^3 + \cos(x^2 y^2) \cdot \frac{\partial}{\partial y} [y^3].$$

Segue-se da regra da cadeia que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= -\sin(x^2 y^2) [2x^2 y] \cdot y^3 + \cos(x^2 y^2) [3y^2] \\ &= -2x^2 y^4 \sin(x^2 y^2) + 3y^2 \cos(x^2 y^2). \end{aligned}$$

Desafio!

Seja $f(x, y) = \frac{x^2 - y}{y^2 + 1}$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, sem usar limite.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

Desafio!

Dada $f(x, y) = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$. Use o caderno para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

2.3 Derivadas parciais de funções de três variáveis

Da mesma forma que estudamos derivadas parciais para funções de duas variáveis, nesta seção definimos o mesmo conceito para funções de três variáveis, isto feito na definição 2.4 a seguir.

Definição 2.4. Seja $w = f(x, y, z)$ uma função de três variáveis reais a valores reais e seja (a, b, c) um ponto em seu domínio D .

- A **derivada parcial de f com relação à x** calculada no ponto (a, b, c) , é denotada e definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b, c) - f(a, b, c)}{h} \quad (2.7)$$

- A **derivada parcial de f com relação à y** calculada no ponto (a, b, c) , é denotada e definida por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h, c) - f(a, b, c)}{h}$$

- A **derivada parcial de f com relação à z** calculada no ponto (a, b, c) , é denotada e definida por

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b, c + h) - f(a, b, c)}{h}$$

Observação 2.5. Note que a definição 2.4 é inteiramente análoga à definição para funções de duas variáveis.

Além disso, a observação 2.3, também se aplica nestes casos.

Ou seja,

para se calcular as derivadas parciais, congela-se duas das variáveis e age-se como se a função dependesse apenas da outra variável

Isto será ilustrado no exemplo 2.7.

Exemplo 2.7. Iremos achar $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ para a função $f(x, y, z) = x^2y^3 + z^4 \cdot \text{sen}(x)$.

De fato, considerando y e z como constantes e derivando-se em relação à x obteremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + z^4 \cos(x)$$

Tomando-se x e z como constantes e derivando-se em relação à y obtém-se:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$$

Congelando-se x e y e derivando-se em relação à z obteremos:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4z^3 \cdot \text{sen}(x)$$

Desafio!

Dada $f(x, y, z) = y e^z \cdot \text{sen}(xz)$, faça no caderno o cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

Observação 2.6. As notações $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ e $f_z(x, y, z)$ também podem ser usadas para representar as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$, respectivamente.

Exemplo 2.8. Calcularemos agora $f_z(0, 0, \frac{\pi}{4})$, onde

$$f(x, y, z) = \sqrt{\sin^2(x) + \sin^2(y) + \sin^2(z)}$$

Mantendo-se x e y como constantes e derivando-se em relação à z

$$f_z(x, y, z) = \frac{1}{2} (\sin^2(x) + \sin^2(y) + \sin^2(z))^{-\frac{1}{2}} 2\sin(z) \cos(z)$$

e assim

$$f_z(0, 0, \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \left(\sin^2(0) + \sin^2(0) + \sin^2(\frac{\pi}{4}) \right)^{-\frac{1}{2}} 2\sin(\frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Desafio!

Use o caderno para calcular a derivada parcial no ponto indicado, ou seja, $f_y(2, 1, -1)$ sendo $f(x, y, z) = \frac{y}{x + y + z}$;



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

2.4 Derivadas direcionais e vetores gradiente

Para a função $z = f(x, y)$, podemos pensar que as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ podem representar a taxa de variação instantânea de f nas direções positivas x e y , respectivamente.

Mas no espaço não temos só essas duas direções. Podemos tomar uma direção $\vec{u} = (1, 1)$.

Como podemos achar a taxa de variação em qualquer direção?



Para isto iremos definir um tipo de derivada chamada derivada direcional e que definimos precisamente na definição 2.5 a seguir.

Definição 2.5. Seja $f(x, y)$ uma função a valores reais com domínio D em $\mathbb{R}^2$, e seja (x_0, y_0) um ponto em D . Dado $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário em $\mathbb{R}^2$. Então a **derivada direcional** de f em (x_0, y_0) na direção de $\vec{u}$ será denotada e definida por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$

desde que o limite exista e seja finito. Podemos dizer que esta derivada é a taxa de variação de f no ponto (x_0, y_0) na direção de $\vec{u}$.

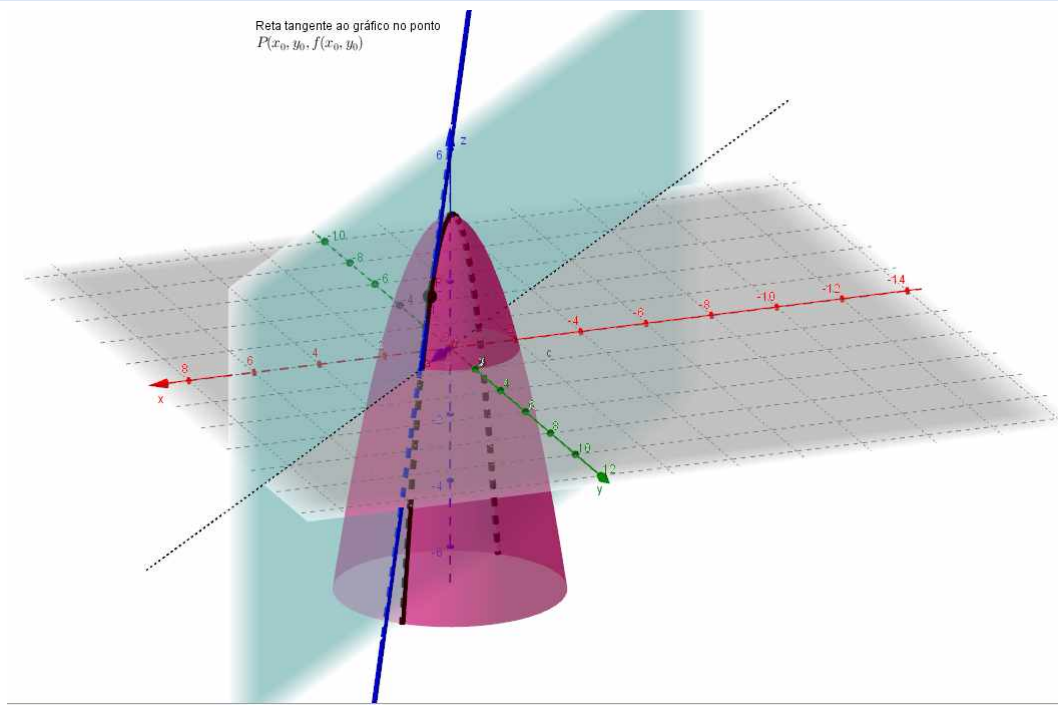


FIGURA 2.4: A derivada direcional no ponto P .

Denotaremos a derivada direcional de f na direção $\vec{u}$ da forma $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ ou $\frac{df}{d\vec{u}}$ ou $D_{\vec{u}}f$.

Note que, se $\vec{u} = (1, 0) = \vec{i}$ ficaremos com

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Se $\vec{u} = (0, 1) = \vec{j}$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

e assim as derivadas parciais são particulares derivadas direcionais.

Definição 2.6. Um **versor** de um vetor qualquer $\vec{v}$ é definido como sendo um vetor unitário $\vec{u}$ de mesma direção e sentido do que $\vec{v}$.

Observação 2.7. Observe que, dado $\vec{v}$ um vetor qualquer, basta tomarmos $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, para obter o versor de $\vec{v}$.

Usaremos a definição 2.6 e a observação 2.7 no próximo exemplo 2.9.

Exemplo 2.9. Seja $f(x, y) = 2x^2y$. Vamos calcular $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2)$ onde $\vec{u}$ é o versor de $\vec{v} = (1, -1)$. Inicialmente calcularemos $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2)$ na direção de um vetor unitário qualquer $\vec{u} = (a, b)$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 + at, 2 + bt) - f(1, 2)}{t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(1 + at)^2(2 + bt) - 2(1)^2(2)}{t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4 + 2bt + 8at + 4abt^2 + 4a^2t^2 + 2a^2bt^3 - 4}{t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} 2b + 8a + (4ab + 4a^2)t + 2a^2bt^2 \\&= 2b + 8a.\end{aligned}$$

Como $\vec{u}$ é o versor de $\vec{v}$, tem-se $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(1, -1)}{\|(1, -1)\|}$. Assim, $\vec{u} = \frac{(1, -1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, e como, neste caso, temos $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $b = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = 2 \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + 8 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

Desafio!

Faça no caderno o cálculo da derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2)$ usando a definição 2.5, sendo $f(x, y) = x^2 + xy$, e $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.



Clique aqui para ver a resposta.

Qual é a importância de que a direção tomada seja um vetor unitário?



Na figura ?? mostra-se o versor v determina a tangente direcional t no ponto (x, y) ao gráfico de $z = f(x, y)$ nesse ponto. Traçando pelo extremo A do vetor $\vec{v}$ uma perpendicular ao plano xOy e traçando pelo ponto O uma paralela a t , temos B como ponto de interseção com a perpendicular por A . Note que no triângulo OAB , retângulo em A , temos

$$\operatorname{tg} \widehat{OAB} = \frac{\overline{AB}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\overline{AB}}{1},$$

que é exatamente o coeficiente angular da reta t .

Isto mostra a necessidade de tomar a direção sempre com módulo 1. Dessa forma o cálculo da derivada direcional é exatamente o cálculo da tangente trigonométrica do ângulo que forma a tangente com o plano xOy .

Este fato geométrico é também importante para calcular taxas de variação em certas direções. Por exemplo, serve para calcular a direção de maior taxa de variação de uma temperatura em uma chapa, ou qual é a direção de maior altura de em uma vizinhança de uma cadeia de montanhas.

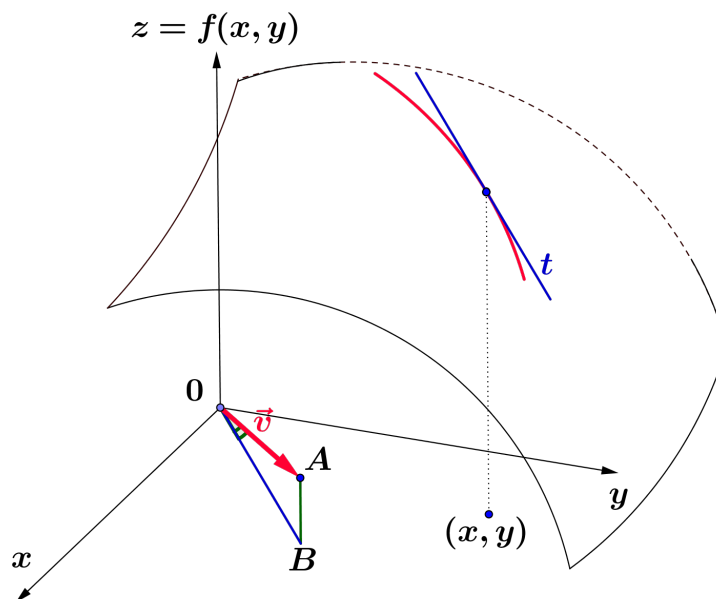


FIGURA 2.5: A importância de direção unitária no cálculo da derivada direcional.

Vamos agora mostrar um exemplo de uma função

Exemplo 2.10. Seja $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário dado. Calcularemos $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$ onde

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{para todo } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + at, 0 + bt) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\frac{(at)^3}{(at)^2 + (bt)^2} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\frac{a^3 t^3}{a^2 t^2 + b^2 t^2} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^3}{a^2 + b^2} = a^3, \end{aligned}$$

onde aqui usamos que $\vec{u}$ é unitário, ou seja, $a^2 + b^2 = 1$.

Observação 2.8. O exemplo 2.10 mostra uma função que pode ser contínua em um ponto, ter derivada direcional em todas direções neste ponto e, mesmo assim, não ser diferenciável neste ponto.

De fato, usando a definição de diferencial 2.1, pode-se mostrar que a função não possui diferencial na origem. Ou seja, não existe uma transformação linear que verifique a definição.

O que veremos a seguir é que, se a função f for diferenciável em um ponto dado, então f admitirá derivada direcional em todas direções neste ponto e, ainda, poderemos calcular a derivada direcional em termos do **vetor gradiente** da função, o qual é feito na definição 2.7.

Definição 2.7. Seja $z = f(x, y)$ uma função que admite derivadas parciais em (a, b) . O **vetor gradiente** de f em (a, b) será denotado e definido por

$$\nabla f(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$$

Exemplo 2.11. Dada $f(x, y) = e^y + \cos(xy)$. Vamos calcular $\nabla f(x, y)$.

Pela definição teremos

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (-y \sin(xy), e^y - x \sin(xy)).$$

Desafio!

Faça no caderno o cálculo de $\nabla f(-1, 3)$, onde $f(x, y) = x^2 y^3 - 2xy + 4$.



Clique aqui para ver a resposta.



Qual é a relação entre diferencial de uma função em um ponto e o vetor gradiente dessa função no mesmo ponto?

Vamos mostrar que na realidade o vetor gradiente de uma função f diferenciável em um ponto (a, b) não é nada mais que

a matriz associada à diferencial nas bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$.

De fato, lembremos que para achar a matriz associada à uma transformação linear, neste caso, nas bases canônicas do domínio, $\mathbb{R}^2$, e no codomínio, $\mathbb{R}$, basta aplicar a diferencial na base domínio e “pendurar” as coordenadas da imagem na base do codomínio. Se $T_{(a,b)}$ é a diferencial de f em (a, b) , então temos, pela definição 2.1, e usando $h = te_1$, onde $e_1 = (1, 0)$, que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((a+t, b)) - f((a, b)) - T_{(a,b)}(t, 0)}{|t|} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((a+t, b)) - f((a, b)) - tT_{(a,b)}((1, 0))}{t}, \end{aligned}$$

onde aqui usamos que $T_{(a,b)}$ é uma transformação linear. Assim,

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((a+t, b)) - f((a, b))}{t} - T_{(a,b)}(e_1),$$

e usando a definição de derivada parcial com respeito a x , concluímos que

$$T_{(a,b)}(e_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).$$

Da mesma forma, mostra-se que, para $e_2 = (0, 1)$ temos

$$T_{(a,b)}(e_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Portanto a matriz associada a $T_{(a,b)}$ nas bases canônicas é exatamente o gradiente de f no ponto (a, b) .

O teorema 2.1 é o que relaciona a derivada direcional e vetor gradiente, fornecendo uma forma bem prática de calcular a derivada direcional.

Teorema 2.1. Seja $f(x, y)$ uma função diferenciável em (a, b) , então f admitirá derivada direcional em (a, b) , na direção $\vec{u}$ e,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \vec{u}$$

Exemplo 2.12. Seja $f(x, y) = 2x^2y$. Iremos determinar $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2)$ onde $\vec{u}$ é o versor de $\vec{v} = (1, -1)$.

Já fizemos este cálculo no exemplo 2.9 usando a definição de derivada direcional através de limite, agora usaremos o teorema 2.1 visto que temos uma função polinomial a qual é diferenciável:

Sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot \vec{u}$$

Temos $\vec{u} = \frac{(1, -1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)$

Agora $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (4xy, 2x^2)$

Logo

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = (8, 2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{8}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

conforme resultado já obtido anteriormente.

Desafio!

Ache a derivada direcional de $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$, em $(1, 0)$, na direção do vetor unitário que faz um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ com eixo x positivo.



Clique aqui para ver a resposta.

Observação 2.9. Seja $f(x, y)$ uma função diferenciável em (a, b) , tal que $\nabla f(a, b) \neq \vec{0}$. Procuraremos por um vetor unitário $\vec{u}$ cuja direção a taxa de variação da função é máxima, ou seja, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b)$ seja máxima. Note que,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(a, b)\| \|\vec{u}\| \cos \theta$$

onde θ é o ângulo entre ∇f e $\vec{u}$ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \|\nabla f(a, b)\| \cos \theta$$

e este número terá valor máximo quando $\cos \theta$ for máximo, ou seja, $\cos \theta = 1$, que é verdadeiro quando $\theta = 0$. Consequentemente, $\vec{u}$ será um vetor unitário de mesma direção e sentido de ∇f , isto é, $\vec{u}$ é o conhecido versor de ∇f .

Portanto, o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b)$ será $\|\nabla f(a, b)\|$ e ocorre quando

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(a, b)}{\|\nabla f(a, b)\|}.$$

Podemos concluir que, o gradiente de um campo escalar $f(x, y)$ calculado no ponto (a, b) é um vetor cuja direção indica que o campo escalar aumentará mais rapidamente movendo-se nessa direção e movendo-se na direção oposta o campo escalar diminuirá.

Vejamos no exemplo 2.13 uma ilustração do comentado na observação obsimportante2.

Exemplo 2.13. Vamos decidir em que direção a função $f(x, y) = xy^2 + x^3y$ cresce mais rapidamente a partir do ponto $(1, 2)$? E em que direção a função decresce mais rapidamente?

Como temos $\nabla f(x, y) = (y^2 + 3x^2y, 2xy + x^3)$, então $\nabla f(1, 2) = (10, 5) \neq \vec{0}$.

Um vetor unitário na direção será $\vec{u} = \frac{\nabla f(1, 2)}{\|\nabla f(1, 2)\|}$, ou seja, $\vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$. Assim

f cresce mais rapidamente na direção de $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ e decresce mais rapidamente

na direção de $\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right)$.

Desafio!

Encontre a direção na qual a função $f(x, y) = x^2y + e^{xy}\sin(y)$ cresce mais rapidamente em $(1, 0)$. Depois ache a derivada da função nessa direção.



Clique aqui para ver a resposta.

Observação 2.10. Todos os conceitos introduzidos até agora, se estendem naturalmente para funções de três ou mais variáveis:

Se $f = f(x, y, z)$ então $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$.

Se $\vec{u}$ é um vetor unitário então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{u}$$

E, a direção de máxima variação de $f(x, y, z)$ é a direção do vetor $\nabla f(a, b, c)$ e o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b, c)$ será $\|\nabla f(a, b, c)\|$.

Ilustraremos com mais um exemplo 2.14, os comentários feitos na observação 2.10.

Exemplo 2.14. A temperatura T de um sólido é dada por $T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-2y} + e^{4z}$, onde x, y, z são as coordenadas em um sistema cartesiano cuja origem é o centro do sólido. Vamos determinar em que direção, a partir do ponto $(1, 1, 1)$, na qual a temperatura decresce mais rapidamente?

Desde que $\nabla f = (-e^{-x}, -2e^{-2y}, 4e^{4z})$, então a temperatura decresce mais rapidamente na direção do vetor $-\nabla f(1, 1, 1) = -(-e^{-1}, -2e^{-2}, 4e^4) = (e^{-1}, 2e^{-2}, -4e^4)$.

Definição 2.8. Uma função a valores reais $z = f(x, y)$ cujas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem e são contínuas é chamada **continuamente diferenciável**.

Assumiremos que $f(x, y)$ é continuamente diferenciável e que $\nabla f \neq \vec{0}$. Seja c um número real na imagem de f e seja $\vec{u}$ um vetor unitário em $\mathbb{R}^2$ o qual é tangente à curva de nível $f(x, y) = c$ como mostra a figura 2.6.

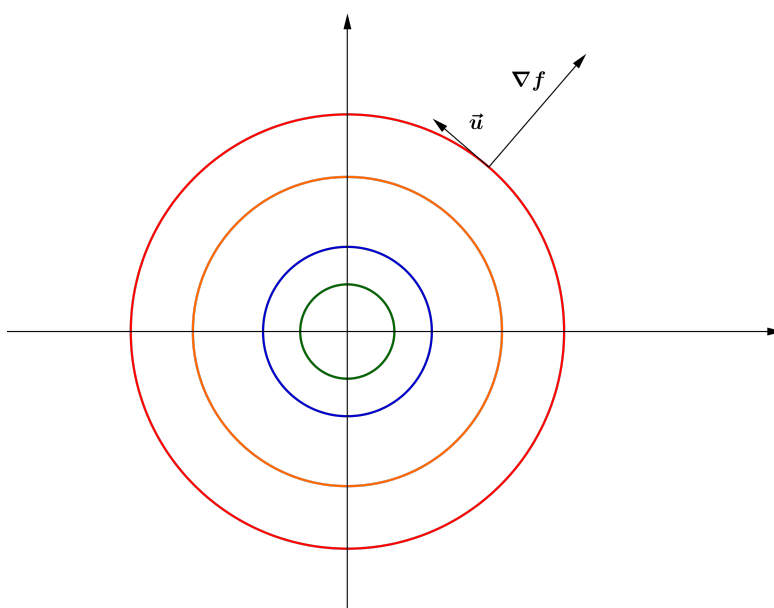


FIGURA 2.6: O vetor tangente à curva de nível.

O valor de $f(x, y)$ é constante ao longo da curva de nível, assim como que $\vec{u}$ é um vetor tangente à essa curva, então a taxa de variação de f na direção de $\vec{u}$ é 0, i.é. $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = 0$.

Mas sabemos que,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u}.$$

Consequentemente

$$\nabla f \cdot \vec{u} = 0.$$

Em outras palavras, ∇f é perpendicular ao vetor $\vec{u}$, do qual podemos dizer que ∇f é *normal* à curva de nível.

Obtemos assim o resultado que nos fornece uma interpretação geométrica para o vetor gradiente, enunciado na proposição 2.4 a seguir.

Proposição 2.4. Se $f(x, y)$ é continuamente diferenciável, então, o vetor $\nabla f(a, b)$ é normal à curva de nível de f que passa pelo ponto (a, b) .

Usaremos a propriedade geométrica do gradiente enunciada na proposição 2.4 no seguinte exemplo 2.15.

Exemplo 2.15. Iremos encontrar uma equação para a reta tangente à elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ no ponto $(-2, 1)$. Pensemos a elipse como uma curva de nível da função $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$ e usaremos que o vetor $\nabla f(-2, 1)$ é normal à curva de nível, portanto normal à elipse. Um vetor que é normal à curva, significa que é normal à reta tangente à curva. Assim, procuramos uma reta r que passa pelo ponto $(-2, 1)$ e tem $\nabla f(-2, 1)$ como vetor normal. Teremos que $P(x, y) \in r$, se e só se,

$$[(x, y) - (-2, 1)] \cdot \nabla f(-2, 1) = 0.$$

Calculando o gradiente, obtemos que $\nabla f(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, 2y\right)$, donde $\nabla f(-2, 1) = \left(\frac{1}{2}2(-2), 2(1)\right) = (-1, 2)$. Logo a equação da reta tangente à elipse será dada por $(x + 2, y - 1) \cdot (-1, 2) = 0$ ou, equivalentemente, $(-1)(x + 2) + (2)(y - 1) = 0$, ou ainda $x - 2y = -4$.

A figura da tangente t por P à elipse é ilustrada na figura 2.7.

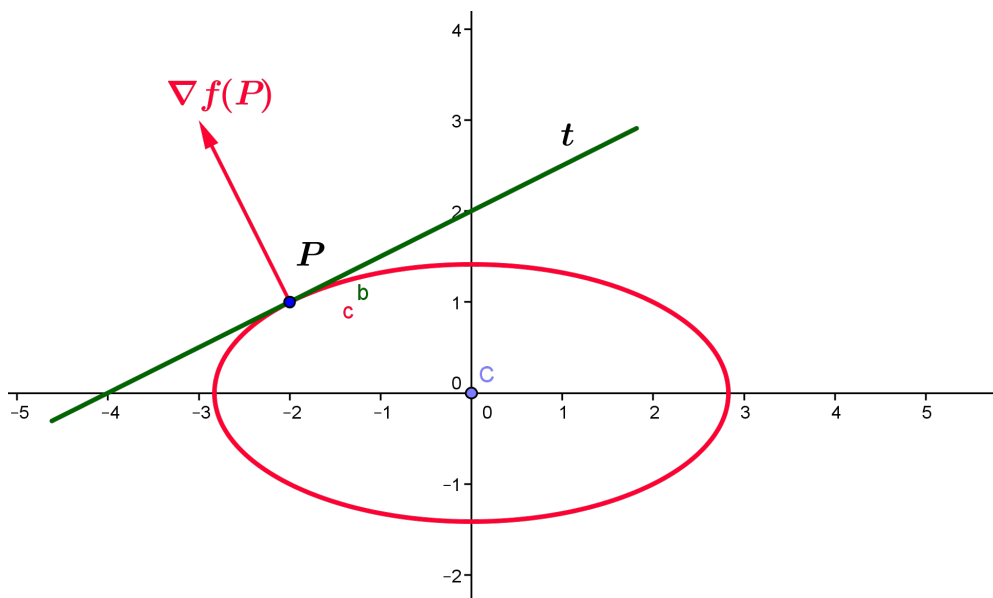


FIGURA 2.7: A reta tangente SCMt por P à elipse do exemplo exe:perp.

Desafio!

Escreva uma equação da reta tangente à curva $xy = -4$ no ponto $(2, -2)$.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

A seguir vamos ilustrar uma aplicação da propriedade geométrica do gradiente, descrita na proposição 2.4.

Suponha que $T(x, y) = 4x^2 + y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy . Vamos determinar uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1, 1)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

Sabemos que a direção e sentido de máximo crescimento da função $T(x, y)$, a partir de $(1, 1)$, é determinada por $\nabla T(x, y) = (8x, 2y)$. E ainda, $\nabla T(x, y)$ é sempre perpendicular às curvas de nível, que neste caso tem equação $4x^2 + y^2 = k$ as quais são elipses.

Queremos determinar as funções $x(t)$ e $y(t)$ tais que a curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ satisfaça as condições

$$\begin{cases} \gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = (1, 1) \end{cases}$$

Ou seja,

$$(x'(t), y'(t)) = (8x(t), 2y(t))$$

com $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$.

Equivalentemente temos:

$$\begin{cases} x'(t) = 8x(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Como $x'(t) = 8x(t)$, integrando-se ambos os membros em relação à t , tem-se:

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int 8 dt.$$

Chamando $u = x(t)$ tem-se $du = x'(t)dt$, obteremos

$$\int \frac{du}{u} = \int 8dt,$$

ou seja,

$$\ln|u| = 8t + K_0,$$

o que implica

$$\ln|x(t)| = 8t + K_0.$$

Consequentemente,

$$|x(t)| = e^{8t+K_0}$$

ou seja,

$$|x(t)| = e^{8t} \cdot e^{K_0}$$

tomando-se $e^{K_0} = K_1$, ficaremos com

$$|x(t)| = K_1 e^{8t}.$$

Logo,

$$x(t) = \pm K_1 e^{8t},$$

ou ainda,

$$x(t) = K_2 e^{8t}.$$

Usando o fato de que $x(0) = 1$, obtém-se $K_2 = 1$, e assim

$$x(t) = e^{8t}.$$

Analogamente, também temos que

$$y'(t) = 2y(t)$$

da qual obtemos

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int 2dt.$$

Fazendo $v = y(t)$, donde $dv = y'(t)dt$, tem-se:

$$\int \frac{dv}{v} = \int 2dt$$

$$\ln|v| = 2t + C_0$$

$$\ln|y(t)| = 2t + C_0$$

Assim,

$$|y(t)| = e^{2t+C_0}$$

ou ainda

$$|y(t)| = e^{2t} \cdot e^{C_0}$$

fazendo $e^{C_0} = C_1$, tem-se

$$|y(t)| = C_1 e^{2t}.$$

Portanto,

$$y(t) = \pm C_1 e^{2t},$$

ou ainda,

$$y(t) = C_2 e^{2t}.$$

Como $y(0) = 1$, obtém-se $C_2 = 1$, e assim $y(t) = e^{2t}$.

Portanto, $\gamma(t) = (e^{8t}, e^{2t}), t \geq 0$ é uma parametrização da trajetória descrita por P . Isto é ilustrado na figura 2.8.

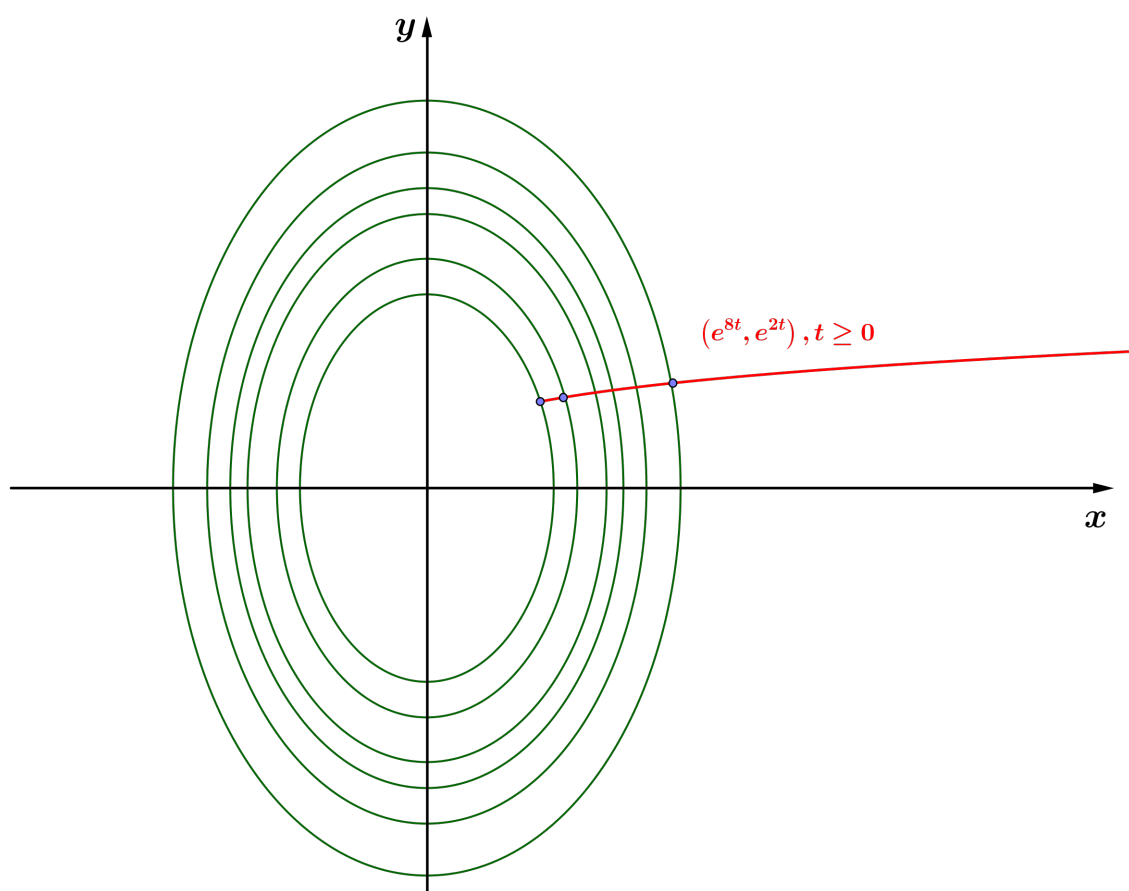


FIGURA 2.8: A trajetória descrita pelo ponto P .

2.5 Regra da Cadeia

Lembremos que a regra da cadeia para funções de uma variável afirma que se $h(t) = f(g(t))$, ou seja h é a função composta das funções g e f , então

$$h'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t), \quad (2.8)$$

desde que essa expressão faça sentido em termos de domínio e imagem.

Por exemplo, se $f(x) = \sin x$, e $g(t) = t^2$, tem-se $h(t) = f(g(t)) = \sin(t^2)$, então $h'(t) = \cos(t^2) \cdot (2t)$.

A afirmação (2.8) é verdadeira para funções diferenciáveis de várias variáveis, entendendo a fórmula em termos das diferenciais das funções envolvidas.

De fato, traduzindo a fórmula 2.8 para funções de várias variáveis, as funções g , f e h tais que $h(t) = f(g(t))$, com $g = (x, y)$, x , y funções componentes reais, nas condições do esquema da figura 2.9, obtemos a fórmula correspondente a 2.8 para este caso como

$$h'(t_0) = \nabla f(g(t_0)) \cdot g'(t_0), \quad (2.9)$$

onde t_0 é um ponto do domínio da função g .

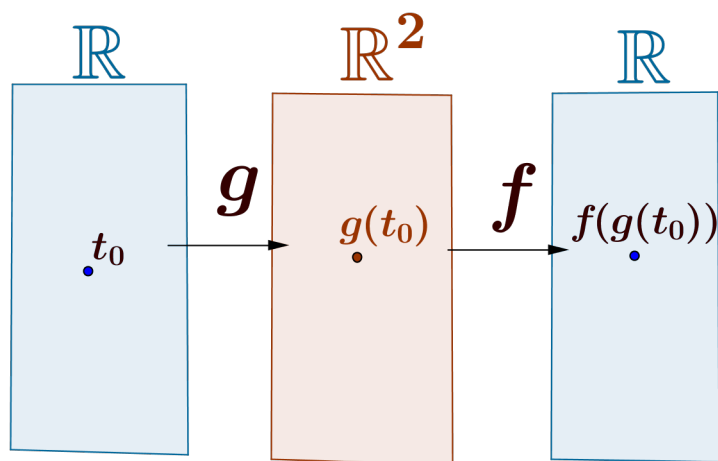


FIGURA 2.9: A composição de funções de várias variáveis

Note que as diferenciais das funções f e g são **vetores**. Portanto, o símbolo $\cdot$ que aparece na fórmula (2.9) é do **produto escalar** de dois vetores de $\mathbb{R}^2$!



Do refletido anteriormente e do fato de que $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ e que $g' = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$, deduzimos que a derivada da função h no ponto t_0 é

$$h'(t_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}, \quad (2.10)$$

onde as derivadas parciais são calculadas no ponto $g(t_0)$ e as derivadas unidimensionais no ponto t_0 .

A formalização destas ideias está enunciada no seguinte teorema:

Teorema 2.2. *Sejam as funções $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e a função composta $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de f com g , ou seja, $h(t) = f(g(t))$.*

Seja $t_0 \in \mathbb{R}$. Se g for uma função diferenciável em t_0 e f diferenciável em $g(t_0)$, então h é diferenciável em t_0 e

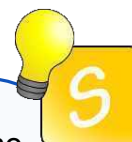
$$h'(t_0) = \nabla f(g(t_0)) \cdot g'(t_0).$$



Note que se denotarmos $y = f(x)$, $x = g(t)$, $y' = \frac{dy}{dx}$, $x' = \frac{dx}{dt}$ e $h'(t) = \frac{dy}{dt}$, então podemos reescrever a regra da cadeia como

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}. \quad (2.11)$$

Note que na fórmula 2.11 os pontos onde as derivadas são calculadas não estão considerados como no caso da fórmula 2.9.



A fórmula 2.11 é válida no caso de uma função de uma variável e neste caso particular de função de duas variáveis. Pode-se provar que a mesma fórmula funciona para outros casos de duas ou três variáveis e suas diferentes combinações, conforme veremos posteriormente.

Exemplo 2.16. Iremos usar a regra da cadeia para calcular $\frac{dz}{dt}$, sendo $z = f(x, y) = xy$ e $x = \cos(t)$ e $y = \sin(t)$. Composto as funções, temos que $z(t) = f(x(t), y(t))$. Note que z é uma função de duas variáveis x e y e cada uma delas dependem de t e assim z depende de t e estaremos interessados na derivada $\frac{dz}{dt}$. Usando a regra da cadeia, teremos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = y(-\sin(t)) + x(\cos(t))$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dt} = (\sin(t))(-\sin(t)) + (\cos(t))(\cos(t)) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t).$$

Para ajudar na memorização da regra da cadeia, podemos pensar que é a derivada parcial de f em relação à primeira variável, que neste caso é x , multiplicada pela derivada dessa variável x em relação à t , somada à derivada parcial de f em relação à segunda variável y , multiplicada pela derivada de y em relação a t .



Este exemplo poderia ter sido resolvido por um cálculo “direto” !

De fato, como $z = f(x, y) = xy = \cos(t) \cdot \sin(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)$, obtém-se por um cálculo direto da derivada de uma variável, que $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} \cos(2t) \cdot 2 = \cos(2t)$.

Vejamos mais um exemplo 2.17 de aplicação da regra da cadeia.

Exemplo 2.17. Seja $z = f(x, y) = e^{x^3 y^2}$ e $x(t) = e^t$, $y(t) = t^3$. Vamos usar a regra da cadeia e calcular $\frac{dz}{dt}$. Composto, temos que $z = f(e^t, t^3)$, donde

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 3x^2 y^2 e^{x^3 y^2} (e^t) + 2x^3 y e^{x^3 y^2} (3t^2),$$

ou, ainda,

$$\frac{dz}{dt} = 3e^{2t} t^6 e^{e^{3t} t^6} e^t + 2e^{3t} t^3 e^{e^{3t} t^6} 3t^2.$$

Agora a sua vez de se praticar com o próximo desafio!

Desafio!

Calcule $\frac{dz}{dt}$, sendo $z = f(x, y) = \sin(x^2y)$ e $x(t) = e^t$ e $y(t) = \ln(t)$.



Clique aqui para ver a resposta.

Nos próximos exemplos, 2.18 e 2.19, veremos o uso da regra da cadeia para o caso que algumas das funções envolvidas não são conhecidas.

Exemplo 2.18. Dada $z = f(x^2, 3x + 1)$, onde $f(u, v)$ é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Gostaríamos de

- (a) Expressar $\frac{dz}{dx}$ em termos das derivadas parciais de f .
- (b) Verificar que $\frac{dz}{dx} \big|_{x=1} = 2 \frac{\partial f}{\partial u}(1, 4) + 3 \frac{\partial f}{\partial v}(1, 4)$

Para realizar estas tarefas, pensaremos z como função de duas variáveis u e v , onde cada uma das variáveis dependem de x , ou seja, $z = f(u, v)$, onde $u = x^2$ e $v = 3x + 1$.

Como não conhecemos a função f , deixamos indicado as suas derivadas, donde $\frac{dz}{dx}$ ficará em termos das derivadas parciais de f , como segue

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}(x^2, 3x + 1)2x + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2, 3x + 1)3 \quad (2.12)$$

Agora, para a resolução do item (b), note que o ponto dado $(u, v) = (1, 4)$ corresponde à $x = 1$. Assim, fazendo $x = 1$ em 2.12, temos

$$\frac{dz}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{\partial f}{\partial u}(1, 4)2(1) + \frac{\partial f}{\partial v}(1, 4)3, \text{ de onde obtemos}$$

$$\frac{dz}{dx} \Big|_{x=1} = 2\frac{\partial f}{\partial u}(1, 4) + 3\frac{\partial f}{\partial v}(1, 4).$$

Passemos agora ao exemplo 2.19, que ilustra cálculos com funções não necessariamente conhecidas.

Exemplo 2.19. Seja $g(x) = f(x, x^3 + 2)$ e $f(x, y)$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Iremos expressar $g'(x)$ em termos das derivadas parciais de f . Temos $g(x) = f(x, y)$ e $y(x) = x^3 + 2$. Usando a regra da cadeia, obtém-se

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dx},$$

ou seja,

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x^3 + 2)(1) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x^3 + 2)3x^2.$$

Portanto

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x^3 + 2) + 3x^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, x^3 + 2).$$

Agora, a vez do seu desafio!

Desafio!

Suponha que $f(2x, x^2) = \arctg(x)$, para todo x , onde $f(u, v)$ é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Faça no caderno o cálculo de $\frac{\partial f}{\partial u}(2, 1)$ sabendo-se que $\frac{\partial f}{\partial v}(2, 1) = -3$.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

Observação 2.11. Se w é uma função de x , de y e de z , e cada uma dessas 3 variáveis são funções de t , analogamente tem-se a regra da cadeia:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

desde que w seja diferenciável nos pontos adequados e que as derivadas

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} \text{ e } \frac{dz}{dt} \text{ existam.}$$

Iremos aplicar nos exemplos a regra da cadeia na interpretação da observação 2.11.

Exemplo 2.20. Seja $w = xy + z$, onde $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$ e $z = t$. Vamos decidir qual o valor da derivada $\frac{dw}{dt}$ em $t = 0$?

Temos

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} = y(-\sin(t)) + x(\cos(t)) + 1(1).$$

Assim

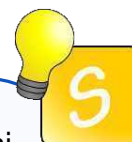
$$\frac{dw}{dt} = \sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t)(\cos(t)) + 1 = \cos^2(t) - \sin^2(t) + 1.$$

podemos reescrever

$$\frac{dw}{dt} = \cos(2t) + 1.$$

Logo

$$\frac{dw}{dt} \Big|_{t=0} = \cos(2(0)) + 1 = 1 + 1 = 2.$$



Uma interpretação física da regra da cadeia da observação 2.11, seria considerar $w = T(x, y, z)$ como a temperatura relativa à t , ao longo da curva com equações paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. A derivada $\frac{dw}{dt}$, será então a taxa instantânea de variação de temperatura ao longo da curva.

Consideremos agora o caso em que

$$z = f(x, y), \text{ com } x = g(s, t) \text{ e } y = h(s, t).$$

ou seja, z depende de duas variáveis x e y enquanto que x e y dependem de duas outras variáveis s e t .

Assim, z acaba dependendo de s e t e estaremos interessados nas derivadas $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Para calcular $\frac{\partial z}{\partial s}$, supõe-se temporariamente que t se mantenha constante e age-se como se x e y dependesse apenas de s . E a derivada parcial de z com relação à s é, pela regra da cadeia, da forma

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad (2.13)$$

admitindo que f é diferenciável e que as derivadas parciais

$$\frac{\partial x}{\partial s}, \text{ e } \frac{\partial y}{\partial s}, \text{ existam.}$$

De forma análoga, se f é diferenciável e que as derivadas parciais

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \text{ e } \frac{\partial y}{\partial t} \text{ existem,}$$

então, temos a fórmula da regra da cadeia para esta caso, expressa da forma

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Vamos aplicar as fórmulas (2.13) e (2.14), nos exemplos 2.21 e 2.22, a seguir.

Exemplo 2.21. Vamos calcular $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$, se $z = x^2 + y^2$, onde $x = s - t$, $y = s + t$. Teremos, a partir das fórmula (2.13), que

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = 2x(1) + 2y(1).$$

Assim, substituindo pela expressão das funções x e y dadas, obtemos que

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2(s - t) + 2(s + t) = 2s - 2t + 2s + 2t = 4s.$$

Usando agora (2.14),

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 2x(-1) + 2y(1).$$

Logo

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -2(s - t) + 2(s + t) = -2s + 2t + 2s + 2t = 4t.$$

Exemplo 2.22. Seja $V = f(2x + 3y, e^x)$. Supondo que: f é diferenciável em $(3, 1)$, $f_1(3, 1) = 2$ e $f_2(3, 1) = -5$. Vamos determinar $\frac{\partial V}{\partial x}$ e $\frac{\partial V}{\partial y}$ quando $x = 0$ e $y = 1$. Podemos pensar que $V = f(s, t)$, onde $s = 2x + 3y$ e $t = e^x$. Usaremos a notação $f_1(s, t)$, para indicar derivada parcial de f em relação à primeira variável, que neste caso é s , ou seja, significa o mesmo que $\frac{\partial V}{\partial s}$. Com $f_2(s, t)$, denota-se derivada parcial de f em relação à segunda variável, donde é igual à $\frac{\partial V}{\partial t}$. Assim, usando as fórmulas (2.13) e (2.14), obtém-se

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = f_1(s, t)(2) + f_2(s, t)(e^x),$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = f_1(s, t)(3) + f_2(s, t)(0).$$

Note que, quando $x = 0$ e $y = 1$, tem-se $(s, t) = (2(0) + 3(1), e^0) = (3, 1)$. Consequentemente,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f_1(3, 1)(2) + f_2(3, 1)(e^0) = (2)(2) + (-5)(1) = -1$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial y} = f_1(3, 1)(3) + 0 = (2)(3) = 6.$$

A seguir, dois desafios para você aplicar os ensinamentos dos exemplos 2.21 e 2.22.

Desafio!

Dada $z = e^x \sin(y)$, onde $x = st^2$ e $y = s^2t$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$.



Clique aqui para ver a resposta.

Desafio!

Seja $F(x, y) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$. Verifique que $x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = 0$.



Clique aqui para ver a resposta.

2.5.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA PARA O VETOR GRADIENTE DE UMA FUNÇÃO DE TRÊS VARIÁVEIS

Seja $f(x, y, z)$ uma função continuamente diferenciável e (x_0, y_0, z_0) um ponto da superfície de nível $f(x, y, z) = k$; suponhamos que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$.

Tomaremos uma curva $\gamma(t)$, $t \in I$ (intervalo), passando pelo ponto $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ e que esteja contida na superfície de nível $f(x, y, z) = k$. Consequentemente, $f(\gamma(t)) = k, \forall t \in I$.

Derivando-se ambos os membros em relação à t da igualdade

$$f(x(t), y(t), z(t)) = k,$$

obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

Podemos reescrever

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0, \forall t \in I$$

ou ainda

$$\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0$$

obtendo-se assim que $\nabla f(\gamma(t_0))$ e $\gamma'(t_0)$ são ortogonais.

O gradiente de $f(x, y, z)$ é normal em (x_0, y_0, z_0) a toda curva diferenciável γ passando por este ponto, contida na superfície de nível de f , como ilustra a figura 2.10

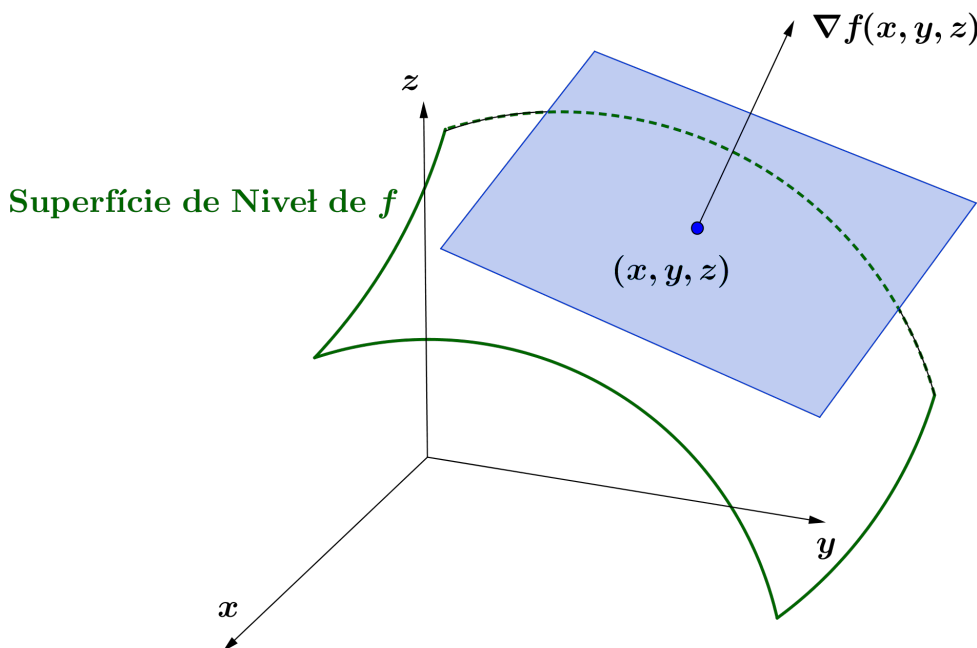


FIGURA 2.10: A superfície de nível de f : o gradiente de f no ponto da superfície é perpendicular à superfície nesse ponto.

Assim, temos a seguinte propriedade geométrica do gradiente de uma função de três variáveis, enunciada na proposição 2.5, a seguir.

Proposição 2.5. Se $f(x, y, z)$ é continuamente diferenciável, então, o vetor $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é normal à superfície de nível de f que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) .

A proposição 2.5 nos indica uma forma de achar a equação do plano passando por (x_0, y_0, z_0) e tendo $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ como um vetor normal, que será chamado de **plano tangente** à superfície $f(x, y, z) = k$.

Quando dissermos que um vetor é **normal à superfície** em um certo ponto, queremos dizer que o vetor é normal ao plano tangente à superfície nesse ponto.

Como $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é um ponto do plano, ao tomarmos um outro ponto $P = (x, y, z)$ qualquer do plano teremos $\overrightarrow{P_0P} \perp \nabla f(x_0, y_0, z_0)$. E assim a equação do plano tangente será

$$[(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] \cdot \nabla f(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (2.15)$$

Veremos no exemplo 2.23, como aplicar a fórmula (2.15) para achar a equação do plano tangente ao gráfico de uma função de duas variáveis.

Exemplo 2.23. Iremos determinar a equação do plano tangente à superfície $S = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, sendo f uma função diferenciável a duas variáveis. Esta superfície S pode ser vista como o gráfico de uma função da forma

$$z = f(x, y) \text{ ou } f(x, y) - z = 0,$$

bem como a superfície de nível zero da função

$$G(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Sabemos que $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$ é o vetor normal à superfície no ponto de coordenadas $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Neste caso temos

$$\nabla G(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right).$$

Portanto, a equação do plano tangente à superfície no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, será

$$[(x, y, z) - (x_0, y_0, f(x_0, y_0))] \cdot \nabla h(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = 0,$$

ou seja

$$(x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right) = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0,$$

Consequentemente, a equação do plano tangente é da forma

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (2.16)$$



Lembre que a fórmula (2.16) é exatamente aquela usada para aproximação linear para funções de duas variáveis.

Poderemos afirmar que, para que f admita plano tangente no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a função f deve ser diferenciável em (x_0, y_0) .

Vamos aplicar a fórmula (2.16) no exemplo 2.24, a seguir.

Exemplo 2.24. Iremos achar a equação do plano tangente à superfície $ze^{x-y} + z^3 = 2$ no ponto $(2, 2, 1)$.

Temos que $ze^{x-y} + z^3 - 2 = 0$, que é equivalente a $f(x, y, z) = 0$ e, assim, podemos pensar na superfície dada como superfície de nível zero de f , chamada de S_0 .

Sabemos que $\nabla f(x, y, z) \perp S_0$. Temos $\nabla f(x, y, z) = (ze^{x-y}, -ze^{x-y}, e^{x-y} + 3z^2)$ donde $\nabla f(2, 2, 1) = (1e^{2-2}, -1e^{2-2}, e^{2-2} + 3(1)^2) = (1, -1, 4)$.

E a equação do plano tangente à superfície no ponto $(2, 2, 1)$ será

$$[(x, y, z) - (2, 2, 1)] \cdot \nabla f(2, 2, 1) = 0$$

ou seja

$$[(x, y, z) - (2, 2, 1)] \cdot (1, -1, 4) = 0$$

e assim

$$(x - 2, y - 2, z - 1) \cdot (1, -1, 4) = 0$$

logo

$$(x - 2) + (-1)(y - 2) + 4(z - 1) = 0$$

ou equivalentemente

$$x - y + 4z - 4 = 0$$

Finalizamos o módulo com dois desafios para você!

Desafio!

Dada $z = f(x, y) = x^2y^3 - 4x + 5$. Vamos achar a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, -1, f(2, -1))$.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

Desafio!

Encontre a equação do plano tangente à superfície $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ em $(0,0,3)$.



Clique aqui para ver a resposta.

2.6 Soluções dos desafios do módulo II

- Desafio da página 53

A solução está ilustrada na figura 2.11

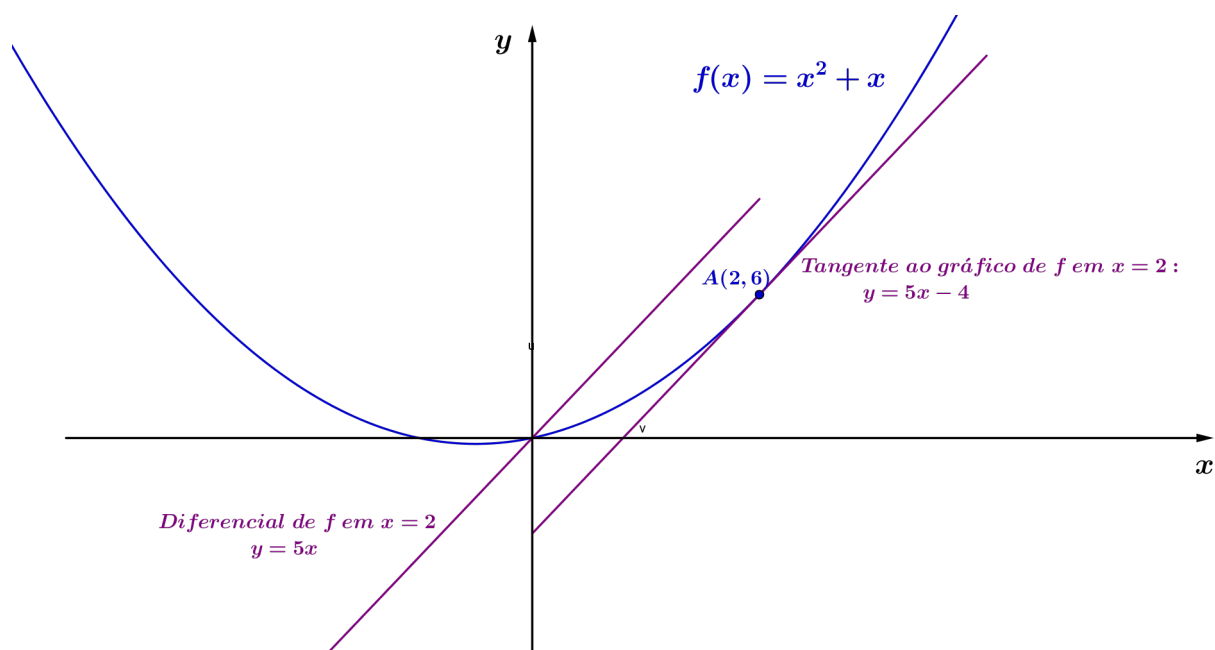


FIGURA 2.11: A diferencial cujo gráfico passa pela origem tem como equação $y = 5x$ e a tangente ao gráfico por A é $y = 5x - 4$.

- Desafio da página 55 Temos que

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow (0,0,0)} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{|h|} \\
&= \lim_{h \rightarrow (0,0,0)} \frac{f(1+h_1, 1+h_2, -1+h_3) - f((1, 1, -1)) - (mh_1 + nh_2 + ph_3)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \\
&= \lim_{h \rightarrow (0,0,0)} \frac{(1+h_1)(1+h_2)(-1+h_3) + 1 - mh_1 - nh_2 - Ph_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \\
&= \lim_{h \rightarrow (0,0,0)} \frac{-(m+1)h_1 + -(m+1)h_2 + (1-p)h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \\
&\quad + \frac{-h_1h_2 + h_1h_3 - h_2h_3 + h_1h_2h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}},
\end{aligned}$$

que será zero se $m = -1$, $n = -1$ e $p = 1$, pois a fração

$$\frac{-h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3 + h_1h_2h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$$

tende para zero quando $h \rightarrow (0, 0, 0)$. Assim, a diferencial de f é $T(x, y, z) = -x - y + z$.

- Desafio da página 62.

Primeiramente calculamos a derivada parcial em forma geral. Tomando y fixo, derivando em relação à x , temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(y^2 + 1)}{(y^2 + 1)^2},$$

e tomando o ponto $(0, 0)$, temos $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. Analogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-(y^2 + 1) - 2y(x^2 - y)}{(y^2 + 1)^2},$$

que avaliada no ponto $(0, 0)$ vale 1.

- Desafio da página 62.

Tomando y fixo, derivando em relação à x e lembrando que

$$(\arctg(u))' = \frac{u'}{1 + u^2},$$

tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right)}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} = \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{1}{y} \cdot \frac{y^2}{y^2 + x^2} = \frac{y}{y^2 + x^2}$$

Agora, “congelando” a variável x e derivando em relação à y , obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right)}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} = \frac{\frac{-x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{-x}{y^2} \cdot \frac{y^2}{y^2 + x^2} = \frac{-x}{y^2 + x^2}$$

- Desafio da página 64. Considerando y e z como constantes e derivando-se em relação à x , usando a regra do produto e regra da cadeia obteremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot e^z \cdot z \cdot \cos(xz)$$

Tomando-se x e z como constantes e derivando-se em relação à y , aplicando-se a regra do produto obtém-se:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^z \cdot \sin(xz)$$

Congelando-se x e y e derivando-se em relação à z , aplicando-se a regra do produto e regra da cadeia ficamos com:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y \cdot [e^z \cdot \sin(xz) + e^z \cdot x \cdot \cos(xz)]$$

- Desafio da página 65. Considerando x e z como constantes e derivando-se em relação à y obteremos:

$$f_y(x, y, z) = \frac{(1)(x + y + z) - y(1)}{(x + y + z)^2} = \frac{x + z}{(x + y + z)^2}$$

calculando-se a derivada no ponto dado, obtém-se

$$f_y(2, 1, -1) = \frac{2 + (-1)}{(2 + 1 + (-1))^2} = \frac{1}{4}$$

- Desafio da página 68.

O cálculo da derivada será:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}t\right) - f(1, 2)}{t}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}t\right) - ((1)^2 + (1)(2))}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(1 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}t + \frac{t^2}{2}\right) + \left(2 + \frac{3t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2}\right) - 3}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{5t}{\sqrt{2}} + t^2}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + t\right) \\
&= \frac{5}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

- Desafio da página 70.

Calcularemos inicialmente

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2xy^3 - 2y, 3x^2y^2 - 2x).$$

Substituindo $x = -1$ e $y = 3$, obtém-se

$$\nabla f(-1, 3) = (2(-1)(3)^3 - 2(3), 3(-1)^2(3)^2 - 2(-1)) = (-60, 29).$$

- Desafio da página 72.

Temos

$$\vec{u} = \left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Sabemos que,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot \vec{u}.$$

Assim, calculando

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{x^2+y^2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2ye^{x^2+y^2},$$

obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 0) = (2e, 0) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{2}e + 0 = \sqrt{3}e.$$

- Desafio da página 74.

Temos

$$\nabla f(x, y) = (2xy + ye^{xy}\sin(y), x^2 + xe^{xy}\sin(y) + e^{xy}\cos(y)),$$

então $\nabla f(1, 0) = (0, 2)$. Um vetor unitário na direção será

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(1, 0)}{\|\nabla f(1, 0)\|}, \text{ ou seja, } \vec{u} = \frac{(0, 2)}{\sqrt{0^2 + 2^2}} = (0, 1).$$

Assim, f cresce mais rapidamente na direção de $(0, 1)$. Ainda,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot \vec{u} = (0, 2) \cdot (0, 1) = 2.$$

- Desafio da página 77.

Reescreveremos $xy = -4$ como $f(x, y) = -4$ e a curva poderá ser pensada como curva de nível de $f(x, y) = xy$. Temos,

$$\nabla f(x, y) = (y, x), \text{ donde, } \nabla f(2, -2) = (-2, 2).$$

Portanto a equação da reta tangente será:

$$(x - (2), y - (-2)) \cdot \nabla f(2, -2) = 0,$$

ou seja, $2x - 2y = 8$.

- Desafio da página 83.

Sabemos, pela regra da cadeia, que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2xy \cos(x^2y)e^t + x^2 \cos(x^2y) \frac{1}{t},$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dt} = 2e^t \ln t \cos(e^{2t} \ln t) e^t + e^{2t} \cos(e^{2t} \ln t) \frac{1}{t}.$$

- Desafio da página 84.

Como queremos $\frac{\partial f}{\partial u}(2, 1)$ e temos informação sobre a derivada $\frac{\partial f}{\partial v}(2, 1)$, espera-se que em algum momento devemos derivar!

Podemos considerar $z = f(u, v)$ onde $u = 2x$ e $v = x^2$. Decorre da regra da cadeia que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \frac{dv}{dx}.$$

Lembrando que como a função f não é conhecida, trabalharemos em termos das derivadas parciais de f . Assim,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)2 + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)2x,$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dx} = 2 \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + 2x \frac{\partial f}{\partial v}(u, v),$$

onde $u = 2x$ e $v = x^2$.

Agora derivando-se ambos os membros da igualdade $f(2x, x^2) = \arctg(x)$, em relação à x , ficaremos com

$$2 \frac{\partial f}{\partial u}(2x, x^2) + 2x \frac{\partial f}{\partial v}(2x, x^2) = \frac{1}{1+x^2} \quad (2.17)$$

Note que, temos informação sobre $\frac{\partial f}{\partial v}(2, 1) = -3$, e o ponto $(u, v) = (2, 1)$ corresponde à $x = 1$. Logo, substituindo-se $x = 1$ em 2.17, obteremos

$$2 \frac{\partial f}{\partial u}(2, 1) + 2(1) \frac{\partial f}{\partial v}(2, 1) = \frac{1}{1+1^2}.$$

Consequentemente, $2 \frac{\partial f}{\partial u}(2, 1) + 2(-3) = \frac{1}{2}$ ou equivalentemente $2 \frac{\partial f}{\partial u}(2, 1) = \frac{1}{2} + 6$.

Concluimos portanto que $\frac{\partial f}{\partial u}(2, 1) = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{13}{2} = \frac{13}{4}$.

- Desafio da página 87.

Usando a fórmula (2.13), obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial s} = e^x \sin(y)(t^2) + e^x \cos(y)(2st) = t^2 e^{st^2} \sin(s^2 t) + 2st e^{st^2} \cos(s^2 t),$$

e, usando a fórmula (2.14), segue-se

$$\frac{\partial z}{\partial t} = e^x \sin(y)(2st) + e^x \cos(y)(s^2).$$

Logo

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2st e^{st^2} \sin(s^2 t) + s^2 e^{st^2} \cos(s^2 t).$$

- Desafio da página 88.

Temos $z = f(m, n)$ onde $m = \frac{x}{y}$ e $n = \frac{y}{x}$. Usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial m} \left(\frac{1}{y}\right) + \frac{\partial f}{\partial n} \left(\frac{-y}{x^2}\right) \quad (2.18)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial m} \left(\frac{-x}{y^2} \right) + \frac{\partial f}{\partial n} \left(\frac{1}{x} \right) \quad (2.19)$$

Agora, multiplicando ambos os membros da igualdade 2.18 por x e ambos os membros da igualdade 2.19 por y e somando-se, obteremos

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{y} \frac{\partial f}{\partial m} - \frac{y}{x^2} x \frac{\partial f}{\partial n} - \frac{x}{y^2} y \frac{\partial f}{\partial m} + \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial n},$$

donde

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{y} \frac{\partial f}{\partial m} - \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial n} - \frac{x}{y} \frac{\partial f}{\partial m} + \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial n} = 0.$$

Vimos que a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, -1, f(2, -1))$ será

$$z = f(2, -1) + \frac{\partial f}{\partial x}(2, -1)(x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, -1)(y - (-1))$$

Vamos calcular todos os elementos dessa equação.

Temos que $f(2, -1) = 2^2(-1)^3 - 4(2) + 5 = -7$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3 - 4 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2,$$

de onde concluímos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, -1) = 2(2)(-1)^3 - 4 = -8 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(2, -1) = 3(2)^2(-1)^2 = 12.$$

Portanto a equação obtida é $8x - 12y + z - 21 = 0$.

• Desafio da página 92.

Sabemos que a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 3)$ será

$$z = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0)$$

Calculemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} (9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} (9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} (-2y)$$

donde,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{1}{2} (9 - 0^2 - 0^2)^{-\frac{1}{2}} (-2(0)) = 0,$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{1}{2} (9 - 0^2 - 0^2)^{-\frac{1}{2}} (-2(0)) = 0.$$

Portanto a equação fica da forma

$$z = 3 + (0)(x - 0) + (0)(y - 0) \Leftrightarrow z = 3.$$

Módulo 3

Máximos e mínimos de funções de duas e três variáveis

No término do módulo III, o aluno estará familiarizado com os seguintes conceitos:

- ▷ Derivadas de ordem superior;
- ▷ Máximos e mínimos relativos e absolutos de funções de duas e três variáveis;
- ▷ Critérios para caracterização de pontos críticos de funções de duas variáveis;
- ▷ Análise dos valores de uma função de duas variáveis nos pontos da fronteira de seu domínio.
- ▷ Máximos e mínimos condicionados: Multiplicadores de Lagrange.
- ▷ Problemas de otimização.

3.1 Derivadas de ordem superior

Estudamos no módulo II o cálculo das derivadas parciais de uma função de duas variáveis $f(x, y)$.

Desde que ambas $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são também funções de x e y , nós poderemos derivá-las parcialmente com relação à x e à y . E assim:

Definição 3.1. As **derivadas parciais de ordem superior** são definidas por

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) & \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \\ & \vdots \end{array}$$

Apresentaremos um exemplo em que calcularemos as derivadas parciais de ordem superior.

Exemplo 3.1. Vamos calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
onde $f(x, y) = 7x^2 - 13xy + 18y^2$.

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 14x - 13y$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -13x + 36y$$

Prosseguindo no cálculo, encontraremos as derivadas parciais de ordem 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 14;$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 36.$$

Ainda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = -13$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -13.$$

Observação 3.1. Para denotar as derivadas parciais, poderemos usar notações indiciais, por exemplo $f_{12} = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$.

Na notação indicial, a ordem dos índices da esquerda para a direita indica a ordem da diferenciação parcial: f_{12} indica uma diferenciação parcial em relação à primeira variável x seguida por uma diferenciação parcial em relação à segunda variável y , enquanto que na notação $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, a ordem está indicada da direita para esquerda.

No próximo exemplo, calcularemos as derivadas parciais indicadas com as notações indiciais:

Exemplo 3.2. Iremos fazer o cálculo de f_{11} ; f_{22} ; f_{12} e f_{21} sendo $f(x, y) = x \cos(y) + ye^x$.

Temos

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(y) + ye^x$$

e

$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin(y) + e^x$$

Derivando-se novamente em relação às variáveis indicadas, obteremos:

$$f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = ye^x;$$

e

$$f_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -x \cos(y).$$

Ainda

$$f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\sin(y) + e^x$$

e

$$f_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -\sin(y) + e^x.$$

Observação 3.2. Conforme vocês podem ter notado, as derivadas parciais mistas $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ do exemplo 3.2 são iguais. Isso não foi coincidência. Elas vão ser iguais sempre que f , $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ forem contínuas, como afirmado no teorema a seguir:

Teorema 3.1. Se $f(x, y)$ e suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ forem definidas em uma região aberta contendo um ponto (a, b) e todas forem contínuas em (a, b) , então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

No exemplo 3.3, veremos que as derivadas parciais de ordem superior são geralmente calculadas por diferenciações sucessivas, e em cada etapa de tal cálculo todas as regras de derivação, incluindo as regras da cadeia, podem ser usadas.

Exemplo 3.3. Dada $w = x^4 y^2 z + \sin(xy)$. Vamos verificar, por cálculo direto, que

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}$$

Inicialmente calcularemos

$$\frac{\partial w}{\partial z} = x^4 y^2.$$

Assim

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = 2x^4 y,$$

de modo que,

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) = 2(4)x^3 y = 8x^3 y.$$

Por outro lado, tem-se a igualdade

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 4x^3 y^2 z + y \cos(xy).$$

na qual usamos a regra da cadeia.

Agora, usando a regra do produto e a regra da cadeia, obtém-se

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 8x^3 y z + [1 \cdot \cos(xy) - xy \operatorname{sen}(xy)].$$

Logo

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) = 8x^3 y + 0 = 8x^3 y.$$

Portanto, podemos ver que

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = 8x^3 y = \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}.$$

Desafio!

Use o caderno para calcular $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$, se $z = f(x, y) = 1 - 2xy^2 + x^3y$.



Clique aqui para ver a resposta.

3.2 Máximos e mínimos relativos e absolutos de funções de duas e três variáveis



Vocês se lembram como resolver problemas de achar máximos e mínimos de funções de uma variável ?

Tais problemas são chamados de **problemas de otimização**. Trataremos agora da determinação dos valores máximos e mínimos de funções com mais de uma variável. Por exemplo, poderemos nos interessar em resolver problemas do tipo:

"Quais as dimensões de uma caixa retangular sem tampa com volume fixado V e com a menor área de superfície possível ? "

Para tal, inicialmente precisaremos das seguintes definições:

Definição 3.2. Dada uma função de duas variáveis reais $f(x, y)$ e um ponto $(a, b) \in D(f)$, dizemos que (a, b) é :

- ponto de **máximo local** de f se $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo $(x, y) \in D(f)$ dentro de algum disco de raio positivo centrado em (a, b) , i.é. existe algum $r > 0$ suficientemente pequeno tal que $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo $(x, y) \in D(f)$ tal que $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$.
- ponto de **mínimo local** de f se $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in D(f)$ dentro de algum disco de raio positivo centrado em (a, b) .

Da mesma forma que em Cálculo 1, distinguiremos os máximos e mínimos locais daqueles que são máximos e mínimos em todo o domínio.

Definição 3.3. Dizemos que (a, b) é :

- ponto de **máximo global ou absoluto** de f se $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo $(x, y) \in D(f)$. E, neste caso, dizemos que $f(a, b)$ é o valor máximo absoluto de f .
- ponto de **mínimo global ou absoluto** de f se $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in D(f)$. E, neste caso, dizemos que $f(a, b)$ é o valor mínimo absoluto de f .

Definição 3.4. Os pontos de máximos ou de mínimos de uma função f denominam-se **extremantes** de f .

Na figura 3.1 se ilustra o gráfico de uma função com máximos e mínimos absolutos e relativos.

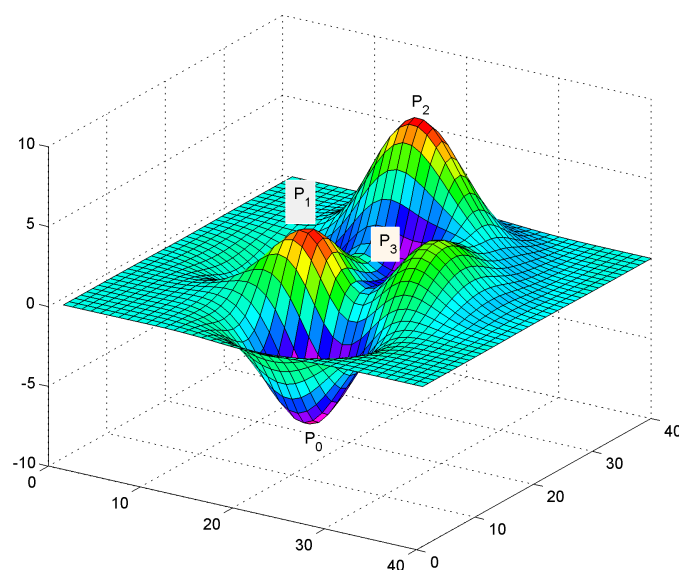


FIGURA 3.1: o gráfico de uma função onde P_0 é um ponto de mínimo absoluto e relativo; P_3 é um ponto de mínimo relativo mas não absoluto; P_1 e P_2 são máximos relativos, sendo que P_2 é máximo absoluto.

A seguir, no exemplo 3.4 mostra-se uma função que possui um máximo absoluto.

Exemplo 3.4. Seja $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$. Vamos verificar que $(0, 0)$ é ponto de máximo absoluto de f .

Sabemos que a desigualdade $(x^2 + y^2) \geq 0$ é sempre verdadeira para quaisquer valores de x e de y ; assim, podemos afirmar que $2 - (x^2 + y^2) \leq 2$. Observe que $f(0, 0) = 2$, consequentemente temos $f(x, y) \leq 2 = f(0, 0)$ para todo $(x, y) \in D(f) = \mathbb{R}^2$.

De acordo com a definição, $(0, 0)$ é ponto de máximo absoluto de f e podemos dizer que f atinge um valor máximo absoluto 2, em $(0, 0)$.

Na figura 3.2 se mostra o gráfico da função com o seu máximo.

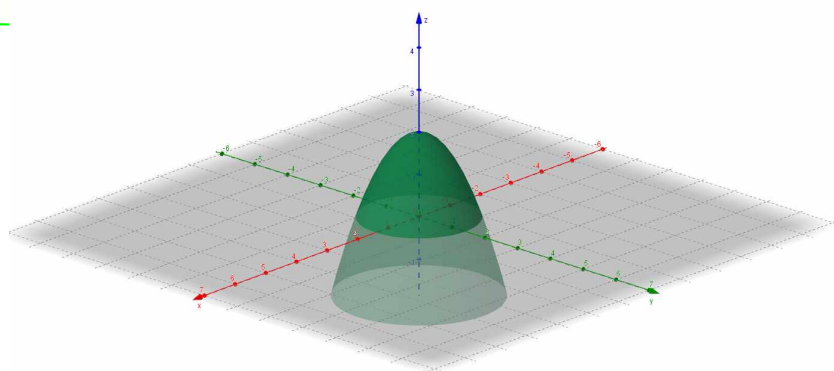


FIGURA 3.2: O gráfico da função do exemplo 3.4 .

Veremos no próximo exemplo que, será útil reescrever a expressão da função dada de outra

forma, para que fique mais fácil de identificar quem seria um ponto de mínimo absoluto.

Exemplo 3.5. Dada $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Iremos verificar que $(1, 3)$ é ponto de mínimo absoluto de f .

Note que, usando o método de completar os quadrados podemos ver que

$$f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 6y + 14 = (x - 1)^2 - 1 + (y - 3)^2 - 9 + 14$$

ou seja,

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 4$$

Consequentemente, $f(x, y) \geq 4$ para todos os valores de x e y . E neste caso, $4 = f(1, 3)$.

Portanto, $f(x, y) \geq f(1, 3)$ e $(1, 3)$ será um ponto de mínimo absoluto de f .

Na figura 3.3 podemos ver o gráfico da função com o seu mínimo.

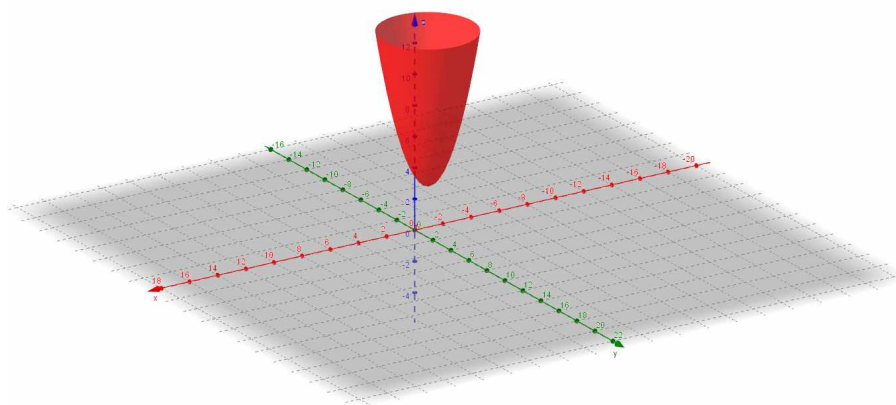


FIGURA 3.3: o gráfico da função do exemplo 3.5.

Desafio!

Faça no caderno a verificação de que $(0, 0)$ é um ponto de mínimo absoluto da função $f(x, y) = x^4 + y^4$.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)



Lembram como fazíamos no Cálculo 1 para descobrirmos os extremantes de uma função de uma variável ?

De fato! Calculamos a derivada da função e igualamos à zero.



Com que objetivo ?

A finalidade era encontrar os pontos **críticos** da função.

Definição 3.5. Seja (a, b) um ponto interior de $D(f)$, dizemos que (a, b) é um **ponto crítico** de $f(x, y)$ se uma das derivadas parciais não existir ou, se ambas as derivadas parciais existem, então verifica-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

Geometricamente, podemos pensar nos pontos críticos de uma função como os pontos em que seu gráfico não possui plano tangente (caso em que uma das derivadas parciais não existe e portanto f não é diferenciável) ou os pontos em que o plano tangente é horizontal, visto que usando que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ na equação do plano tangente

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)[x - a] + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)[y - b]$$

ficamos com $z = k = f(a, b)$ que é equação de plano paralelo ao plano- xy donde estará na posição horizontal.

Nos exemplos 3.6 e 3.7 abaixo, vamos ilustrar pontos críticos para uma função diferenciável e uma função não diferenciável, respectivamente.

Exemplo 3.6. Vamos calcular os possíveis pontos críticos da função $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Note que f é uma função polinomial, a qual é diferenciável. Pela definição de ponto crítico, devemos achar os pontos (x, y) para os quais $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Temos que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$.

Precisaremos resolver o sistema de duas equações $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ cuja solução é $x = 0$ e $y = 0$. Logo $(0, 0)$ é o único ponto crítico da função.

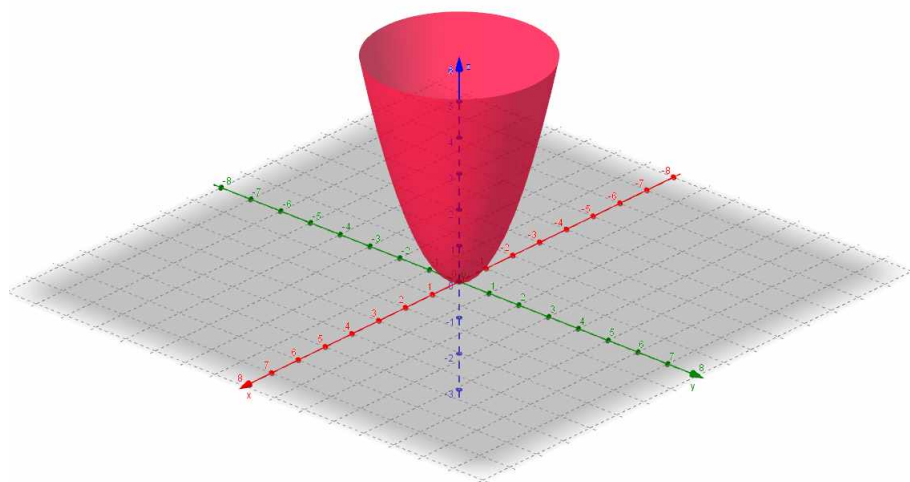


FIGURA 3.4: O gráfico da função do exemplo 3.6 .

Exemplo 3.7. Vamos verificar que o ponto $(0, 0)$ é ponto crítico da função $f(x, y) = |x + y^2|$.

Já vimos no módulo II que, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{d}{dx}[f(x, 0)]|_{x=0}$, e neste caso $f(x, 0) = |x|$ a qual sabemos que não é derivável em $x = 0$; logo não existe $\frac{d}{dx}[f(x, 0)]|_{x=0}$, donde não existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e, conseqüentemente, f não é diferenciável em $(0, 0)$; segue da definição que $(0, 0)$ é ponto crítico de f .

Deixaremos como desafio, a verificação de que uma dada função não possui pontos críticos.

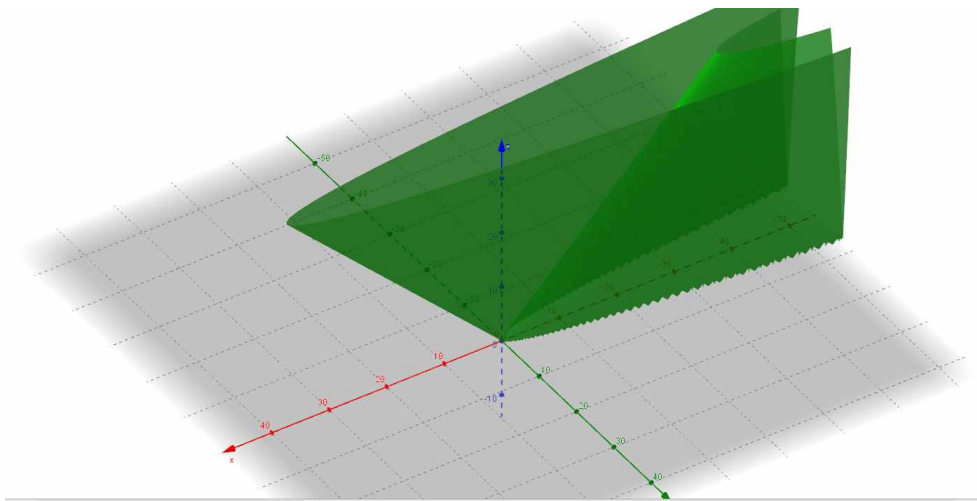


FIGURA 3.5: O gráfico da função do exemplo 3.7 .

Desafio!

Resolva no caderno a procura de pontos críticos, se houver, para a função $f(x, y) = 2x + 3y$.



Clique aqui para ver a resposta.

Veremos um resultado que nos fornece um critério para selecionar entre os pontos interiores ao $D(f)$, candidatos a extremantes locais.

Teorema 3.2. *Seja (a, b) um ponto interior de $D(f)$ e suponhamos que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ existam. Então, se (a, b) é um ponto extremante local de f , então (a, b) é um ponto crítico de f .*

A recíproca deste teorema nem sempre é verdadeira. Existem pontos críticos que não são pontos de máximos e nem de mínimos. Isto motiva a definição 3.6.

Definição 3.6. Um ponto crítico que não é extremante local é chamado de **ponto de sela**.

Observação 3.3. Se (a, b) não for um ponto crítico de f , então ele não é ponto de máximo local e nem de mínimo local. Os pontos críticos de f são, entre os pontos interiores do $D(f)$, os únicos candidatos a extremantes locais. Este resultado só se aplica para pontos interiores; os pontos da fronteira devem ser analisados separadamente.

Exemplo 3.8. Vamos observar que a função $f(x, y) = xy$ tem um ponto crítico $(0, 0)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = y = 0$ se e somente se $y = 0$, e $\frac{\partial f}{\partial y} = x = 0$ se e somente se $x = 0$. Assim, $(0, 0)$ é o único ponto crítico. Mas claramente, f não possui um máximo local ou mínimo em $(0, 0)$, desde que qualquer disco em torno de $(0, 0)$ contém pontos (x, y) onde os valores de x e y tem o mesmo sinal (assim como que $f(x, y) = xy > 0 = f(0, 0)$) e sinais diferentes (assim como que $f(x, y) = xy < 0 = f(0, 0)$). De fato, ao longo do caminho $y = x$ em $\mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2$, o qual tem um mínimo local em $(0, 0)$, enquanto que ao longo do caminho $y = -x$ teremos $f(x, y) = -x^2$, o qual tem um máximo local em $(0, 0)$. Neste caso, $(0, 0)$ é um exemplo de um ponto de sela, i.e. é um máximo local em uma direção e um mínimo local em uma outra direção. O gráfico de $f(x, y)$ é mostrado na figura 3.6, o qual é a superfície conhecida parabolóide hiperbólico.

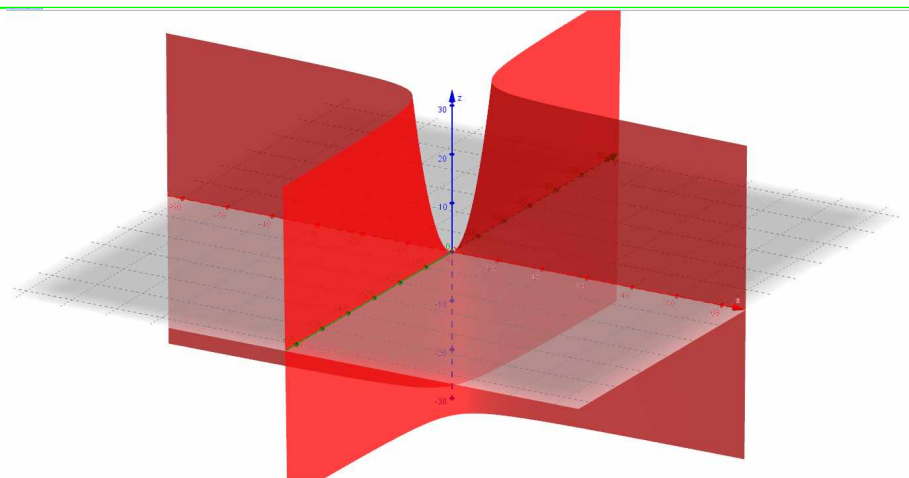


FIGURA 3.6: O gráfico da função do exemplo 3.8.

3.3 Critérios para caracterização de pontos críticos de funções de duas variáveis;

O teorema 3.3 nos fornecerá uma condição suficiente para um ponto crítico ser um extremante local de uma função de classe C^2 , i.é., uma função cujas derivadas parciais até a ordem dois existem e são contínuas. Usaremos a seguinte definição:

Definição 3.7. A **matriz hessiana** da função f calculada no ponto (a, b) será denotada e definida por

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{vmatrix}$$

ou seja,

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \right)^2.$$

E assim, finalmente enunciamos o teorema 3.3:

Teorema 3.3. Seja $f(x, y)$ uma função de classe C^2 , com um ponto crítico em (a, b) , (i.é. $\nabla f(a, b) = \vec{0}$). Então

- (a) Se $D > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$, então f tem um mínimo local em (a, b) .
- (b) Se $D > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$, então f tem um máximo local em (a, b) .
- (c) Se $D < 0$, então (a, b) não é extremante local, será um ponto de sela.
- (d) Se $D = 0$, nada se pode afirmar.

No enunciado do teorema 3.3, usamos o fato de que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, visto que f é uma função de classe C^2 .

Observe que, se $D > 0$ então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = D + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \right)^2 > 0,$$

e assim $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$ tem o mesmo sinal. Isso quer dizer que nas partes (a) e (b) do teorema podemos substituir $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$ por $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$ sempre que quisermos. No próximo exemplo, usaremos o teorema 3.3 para classificar os pontos críticos.

Exemplo 3.9. Vamos achar todos os máximos e mínimos locais de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$. Primeiramente acharemos os pontos críticos, i.é. onde $\nabla f = \vec{0}$. Desde que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$$

então os pontos críticos (x, y) são as soluções comuns das equações

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

as quais tem uma única solução $(x, y) = (2, -1)$. Assim $(2, -1)$ é o único ponto crítico. Para usar o teorema 3.3, nós necessitaremos das derivadas parciais de ordem dois que são $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$ e assim

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, -1) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, -1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, -1) \right)^2 = (2)(2) - 1^2 = 3 > 0$$

e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, -1) = 2 > 0$. Assim, $(2, -1)$ é um ponto de mínimo local. Note que, pela figura 3.7, $(2, -1)$ é na verdade um ponto de mínimo global.

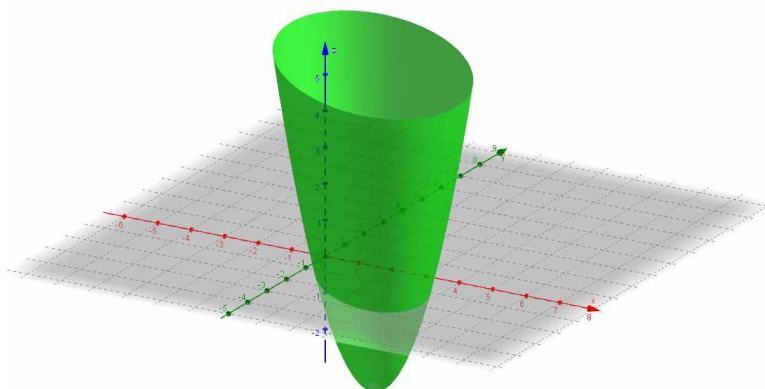


FIGURA 3.7: O gráfico da função do exemplo 3.9.

Apresentaremos um desafio, em que usando o teorema 3.3 classificaremos os pontos críticos.

Desafio!

No caderno, ache todos os máximos e mínimos locais de $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

Os próximos exemplos 3.10 e 3.11 ilustram o caso em que o teorema 3.3 não nos leva a concluir nada, mas devemos usar outros recursos para classificar os pontos críticos.

Exemplo 3.10. Vamos classificar os pontos críticos da função $f(x, y) = (x - 2)^4 + (x - 2y)^2$. Inicialmente acharemos os pontos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x - 2)^3 + 2(x - 2y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4(x - 2y)$$

então os pontos críticos (x, y) são as soluções comuns das equações

$$\begin{cases} 4(x - 2)^3 + 2(x - 2y) = 0 \\ -4(x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Da segunda equação tem-se $x = 2y$, que substituindo-se na primeira equação obtém-se $4(2y - 2)^3 + 2(0) = 0$, a qual equivale à $2y - 2 = 0$ cuja solução é $y = 1$, e assim $x = 2(1) = 2$. Logo, $(2, 1)$ é o único ponto crítico. Usaremos o teorema 3.3 e para tal, necessitaremos das derivadas parciais de ordem dois, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12(x - 2)^2 + 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4$ Assim

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 1) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, 1) \right)^2 = (2)(8) - (-4)^2 = 0$$

e consequentemente o teste é inconclusivo.



Como poderemos fazer nesta situação ?

Algumas vezes isto será possível examinando a função diretamente para ver a natureza do ponto crítico. Em nosso caso, nós veremos que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) , desde que $f(x, y)$ é a soma de potências de expoentes pares de números e daí será sempre não-negativa.

Mas, note que, $f(2, 1) = 0$. Logo $f(x, y) \geq 0 = f(2, 1)$ para todo (x, y) , e daí $(2, 1)$ é de fato, um ponto de mínimo global para f .

Exemplo 3.11. Iremos classificar os pontos críticos da função $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

Inicialmente acharemos os pontos críticos, i.é. onde $\nabla f = \vec{0}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(1 - (x^2 + y^2))e^{-(x^2+y^2)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(1 - (x^2 + y^2))e^{-(x^2+y^2)}$$

então os pontos críticos são $(0, 0)$ e todos os pontos (x, y) sobre o disco unitário $x^2 + y^2 = 1$.

Precisaremos agora usar o teorema 3.3 e para tal, necessitaremos das derivadas parciais de ordem dois :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2[1 - (x^2 + y^2) - 2x^2 - 2x^2(1 - (x^2 + y^2))]e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2[1 - (x^2 + y^2) - 2y^2 - 2y^2(1 - (x^2 + y^2))]e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4xy[2 - (x^2 + y^2)]e^{-(x^2+y^2)}$$

Assim,

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \right)^2 = (2)(2) - (0)^2 = 4$$

Em $(0, 0)$, nós temos $D = 4 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 > 0$, daí $(0, 0)$ é um ponto de mínimo local.

Entretanto, para pontos (x, y) sobre o disco unitário $x^2 + y^2 = 1$, teremos

$$D = (-4x^2e^{-1})(-4y^2e^{-1}) - (-4xye^{-1})^2 = 0$$

e pelo teste nada poderemos afirmar.

Se nós olharmos o gráfico de $f(x, y)$, como mostra a figura, veremos que : tem um máximo local para (x, y) sobre o disco unitário $x^2 + y^2 = 1$.

Se usarmos coordenadas polares (r, θ) em vez de (x, y) em $\mathbb{R}^2$, onde $r^2 = x^2 + y^2$, então conseguiremos escrever $f(x, y)$ como uma função $g(r)$ de apenas uma variável r .

Obtemos: $g(r) = r^2 e^{-r^2}$, com $r > 0$. Então $g'(r) = 2r(1 - r^2)e^{-r^2}$, e tem-se $g'(r) = 0$ se e só se, $r = 0$ ou $r = \pm 1$ e sendo $r > 0$, teremos um ponto crítico em $r = 1$, no qual $g''(1) = -4e^{-1} < 0$, e segue pelo Teste da Derivada Segunda do cálculo de uma variável, que $r = 1$ é um ponto de máximo local. Mas $r = 1$ corresponde ao disco unitário $x^2 + y^2 = 1$.

Consequentemente, os pontos (x, y) sobre o disco unitário $x^2 + y^2 = 1$ são pontos de máximos locais para f . A solução está ilustrada na figura 3.8.

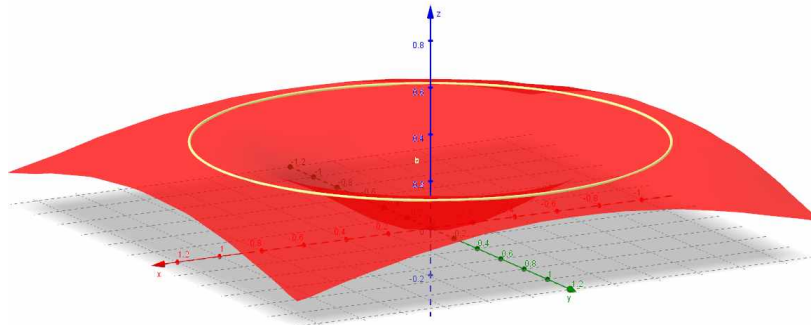


FIGURA 3.8: O gráfico da função do exemplo 3.11.

3.4 Análise dos valores de uma função de duas variáveis nos pontos da fronteira de seu domínio

Teorema 3.4. (Teorema de Weierstrass)

Se $f(x, y)$ for uma função contínua num conjunto fechado e limitado A do $\mathbb{R}^2$, então, $f(x, y)$ assume um valor máximo e um valor mínimo absoluto em A .

Este resultado garante, sob as hipóteses dadas, que a função assumirá valores máximo e mínimo absolutos. Resta-nos agora achar tais valores.

Sabemos que, entre os pontos interiores de A , os únicos com possibilidade de serem extremantes são os pontos críticos. Assim, nossa tarefa será:

- (i) achar os pontos críticos de f que estão no interior de A ;
- (ii) achar os valores máximo e mínimo de f , na fronteira de A ;

(iii) comparar os valores que f assume nos pontos críticos com os valores que f assume na fronteira de A .

Logo, o maior destes valores obtidos em (iii) será o valor máximo absoluto de f , e o menor destes será o valor mínimo absoluto de f em A .

No próximo exemplo 3.12, iremos seguir os passos propostos acima para detectar os pontos de máximos e mínimos absolutos das funções.

Exemplo 3.12. Vamos encontrar o máximo e o mínimo absoluto de $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$, na região triangular T do primeiro quadrante limitada pelas retas $x = 0$, $y = 0$ e $y = 9 - x$.

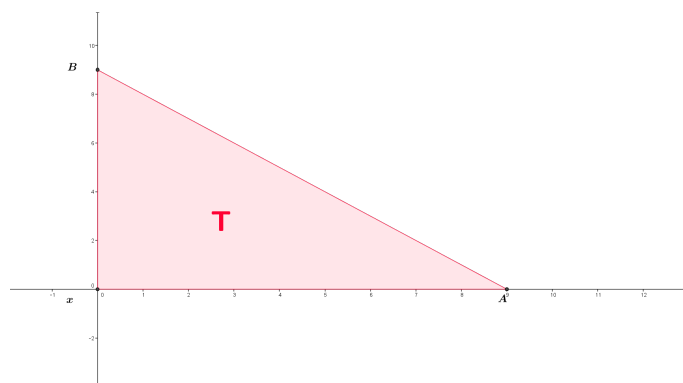


FIGURA 3.9: A figura da região T

Note que f é uma função polinomial, donde teremos uma função contínua numa região fechada e limitada T , assim o teorema 3.4 nos garante que f assume máximo e mínimo absoluto em T .

Inicialmente acharemos os pontos críticos de f que estão no interior de T :

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 - 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 - 2y$$

então os pontos críticos (x, y) são as soluções comuns das equações

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 2 - 2y = 0 \end{cases}$$

as quais tem uma única solução $(x, y) = (1, 1)$.

Logo, $(1, 1)$ é o único ponto crítico de f e está no interior de T . De acordo com a definição da função f , o valor de f calculado no ponto $(1, 1)$ será $f(1, 1) = 4$.

Prosseguindo, o nosso próximo passo é fazer uma análise dos pontos da fronteira de T : Observe que a fronteira de T consiste de três segmentos de reta, cada um dos quais devem ser tratados separadamente.

No segmento $\overline{OA}$, tem-se $y = 0$, substituindo em $f(x, y)$ ficaremos com uma função de uma variável $f(x, 0) = g(x) = 2 + 2x - x^2$, para todo $x \in [0, 9]$.

E assim poderemos aplicar as técnicas do cálculo de uma variável: achando os pontos críticos no interior do intervalo $[0, 9]$ e pensando também que os valores extremos podem ocorrer nas extremidades do intervalo. Na extremidade $x = 0$ do intervalo $[0, 9]$, tem-se $g(0) = f(0, 0) = 2$. Na outra extremidade $x = 9$, donde $g(9) = f(9, 0) = 2 + 2(9) - (9)^2 = -61$. Para pontos interiores de $[0, 9]$, teremos $g'(x) = 2 - 2x = 0$ o que equivale à $x = 1$ e temos candidato $g(1) = f(1, 0) = 2 + 2(1) - 1^2 = 3$

No segmento $\overline{OB}$, tem-se $x = 0$, substituindo em $f(x, y)$ ficaremos com uma função de uma variável $f(0, y) = g(y) = 2 + 2y - y^2$, para todo $y \in [0, 9]$. Analogamente, obtém-se que os candidatos neste segmento são:

$$f(0, 0) = 2; \quad g(9) = f(0, 9) = 2 + 2(9) - (9)^2 = -61$$

e

$$g(1) = f(0, 1) = 2 + 2(1) - 1^2 = 3.$$

No segmento $\overline{AB}$, tem-se $y = 9 - x$, substituindo em $f(x, y)$ ficaremos com uma função de uma variável $f(x, 9 - x) = h(x) = 2 + 2x + 2(9 - x) - x^2 - (9 - x)^2 = -2x^2 + 18x - 61$, para todo $x \in [0, 9]$.

Já levamos em consideração os valores de f nas extremidades de $\overline{AB}$, assim falta examinar os pontos interiores de $\overline{AB}$:

Fazendo $h'(x) = -4x + 18 = 0$ obtém-se $x = \frac{9}{2}$ para o qual $y = 9 - \left(\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2}$, com

$$f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = -2\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 18\left(\frac{9}{2}\right) - 61 = -\frac{41}{2}.$$

Compararemos os valores de f nos pontos críticos interiores e nos pontos de fronteira, nos quais um extremo pode ocorrer.

Obtivemos:

$$f(1, 1) = 4;$$

$$f(0, 0) = 2; \quad f(1, 0) = 3; \quad f(0, 9) = f(9, 0) = -61; \quad f(0, 1) = 3; \quad f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = -\frac{41}{2}.$$

Logo, o valor máximo absoluto de f é 4 o qual corresponde ao ponto de máximo absoluto $(1, 1)$. E o valor mínimo absoluto de f é -61 , o qual é assumido em dois pontos de mínimos absolutos que são $(0, 9)$ e $(9, 0)$.

Desafio!

Faça no caderno a resolução da procura de todos os extremos absolutos da função $f(x, y) = xy$ sobre $C : x^2 + y^2 \leq 1$ com $x \geq 0; y \geq 0$



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

Note que no exemplo 3.12, a resolução se tornou mais fácil considerando uma variável em função de outra e restringindo aos métodos tradicionais para funções de uma variável. Mas, e quando isso não for possível? (o qual pode ser um caso frequente). Na próxima seção, apresentaremos um método mais geral, chamado método dos multiplicadores de Lagrange, para resolver problemas de otimização condicionados (com vínculos).

3.5 Máximos e mínimos condicionados: Multiplicadores de Lagrange

Nosso objetivo será maximizar ou minimizar uma função de várias variáveis quando estas não são independentes, mas satisfazem uma ou mais condições dadas, chamadas **vínculos**. Este método nos ajudará a resolver certos problemas de otimização que são difíceis ou impossíveis de se resolver usando os métodos estudados até agora.

Suponhamos que estamos diante do seguinte problema:

Exemplo 3.13. Minimizar $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeito ao vínculo $x + y = 1$

Vamos usar um argumento que pode ser generalizado para mais variáveis:

Construiremos as curvas de nível da função f e usaremos que o gradiente de f é sempre perpendicular às curvas de nível.

Note que, devemos achar os pontos (x, y) da reta $g(x, y) = x + y = 1$ que minimizam $f(x, y)$.

Podemos pensar na curva restrição (vínculo), como uma curva de nível da função g e assim gradiente de g é perpendicular à essa curva de nível.

Analisando a figura podemos ver que, cada ponto interseção da curva de nível da f com a

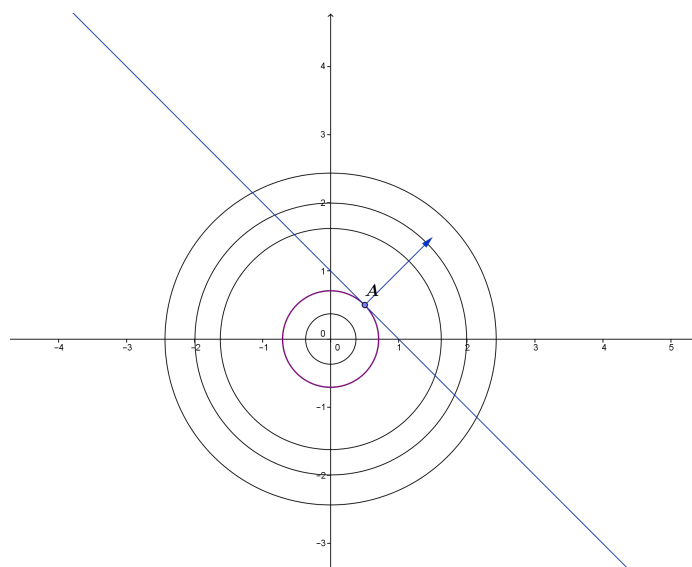


FIGURA 3.10: A figura do exemplo 3.13

curva restrição é um candidato a solução, e neste caso o valor mínimo de f ocorre num ponto no qual a curva de nível de f e a curva restrição somente se tocam, ou seja, as curvas tem uma reta normal em comum. Isso nos sugere que o mínimo de $f(x, y)$, se existir, ocorrerá num ponto (x_0, y_0) sobre a curva restrição no qual os vetores ∇f e ∇g são paralelos, ou seja, são múltiplos escalares um do outro; podemos afirmar que existirá um número real λ tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.

Consequentemente, tal ponto procurado deverá satisfazer o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = 1 \end{cases}$$

o qual é um sistema de 3 equações e 3 incógnitas x_0, y_0 e λ .

A equação $g(x, y) = c$ é chamada **equação de restrição**, e dizemos que x e y são *condicionadas* por $g(x, y) = c$. Pontos (x, y) os quais são máximos ou mínimos de $f(x, y)$ com a condição que eles satisfaçam a equação de restrição $g(x, y) = c$ são chamados pontos de **máximos condicionados** ou **mínimos condicionados**, respectivamente. Definições análogas tem-se para funções de três variáveis.

Agora, voltando ao nosso problema proposto do exemplo 3.13, poderemos resolvê-lo. Temos $\nabla f = (2x, 2y)$ e $\nabla g = (1, 1)$ e devemos ter $\nabla f = \lambda \nabla g$. Assim,

$$\begin{cases} 2x = \lambda 1 \\ 2y = \lambda 1 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Da primeira e segunda equação, concluímos que $x = \frac{\lambda}{2}$ e $y = \frac{\lambda}{2}$, ou seja, $x = y$ o qual substituindo na terceira equação obtém-se $x + x = 1$ o que equivale à $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$.

Logo a função tem um mínimo relativo restrito ocorrendo no ponto $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

E é este método que veremos agora no próximo resultado.

Teorema 3.5. (Teorema de Lagrange)

Sejam as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ definidas e com derivadas parciais primeiras contínuas, e suponha que c é uma constante escalar tal que $\nabla g(x, y) \neq \vec{0}$ para todo (x, y) que satisfaça a equação $g(x, y) = c$. Então para resolver o problema de otimização condicionado

Maximizar (ou minimizar) : $f(x, y)$

dado : $g(x, y) = c$,

acharemos os pontos (x, y) que resolvem a equação $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ para alguma constante λ (o número λ é chamado de multiplicador de Lagrange). Se existir um máximo ou mínimo condicionado ele deve ser um tal ponto que satisfaça essas condições.

Uma prova rigorosa do teorema 3.5, requer o uso de um Teorema da Função Implícita o qual está fora de nossos objetivos. Note que o teorema 3.5 somente nos fornece uma condição necessária para um ponto ser um máximo ou mínimo condicionado. Se um ponto (x, y) que satisfaz $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ para algum λ , realmente é um máximo ou mínimo condicionado pode algumas vezes ser determinado pela natureza do problema em questão.

Exemplo 3.14. Para um retângulo cujo perímetro é 20 m, vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange para achar as dimensões que maximizam a área.

Suponhamos que x e y representam a largura e altura, respectivamente, do retângulo. Queremos

Maximizar : $f(x, y) = xy$

dado : $2x + 2y = 20$

Sabemos que resolver a igualdade $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ para algum λ , quer dizer resolver

as equações $\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$, a saber:

$$\begin{cases} y = 2\lambda \\ x = 2\lambda \end{cases}$$

A idéia geral é resolver para λ em ambas as equações, então resolver para x e y :

$$\frac{y}{2} = \lambda = \frac{x}{2} \quad \text{se e somente se} \quad x = y.$$

Agora, substituindo na equação restrição para resolver para x e y :

$$20 = g(x, y) = 2x + 2y = 2x + 2x = 4x,$$

que é equivalente a $x = 5$, ou seja $y = 5$.

Deve haver uma área máxima, desde que a área mínima é 0 e $f(5, 5) = 25 > 0$, assim como que o ponto $(5, 5)$ deve ser um máximo condicionado. Em consequência, a área máxima ocorre para um retângulo cuja largura e altura ambas são iguais à 5 m.

No desafio abaixo, novamente maximizaremos a área de retângulo usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

Desafio!

Faça no caderno o cálculo das dimensões de um retângulo de área máxima inscrito numa semicircunferência de raio 2.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

No próximo exemplo veremos o uso do método dos multiplicadores de Lagrange para minimizar distância.

Exemplo 3.15. Vamos achar o ponto da parábola $y = x^2$ mais próximo do ponto $(14, 1)$.

A distância d de algum ponto (x, y) ao ponto $(14, 1)$ é

$$d = \sqrt{(x - 14)^2 + (y - 1)^2}$$

e minimizar a distância é equivalente à minimizar o quadrado da distância. Assim, queremos resolver o problema

$$\text{Minimizar : } f(x, y) = (x - 14)^2 + (y - 1)^2$$

$$\text{dado : } g(x, y) = y - x^2 = 0$$

Precisaremos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2(x - 14) = -2\lambda x \\ 2(y - 1) = \lambda \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$$

Note que, da primeira equação $x \neq 0$ desde que, de outra forma levaria à $-28 = 0$. Assim, poderemos dividir por x e isolar λ na primeira equação.

Da primeira e segunda equação teremos $\lambda = \frac{14 - x}{x} = 2(y - 1)$, ou seja, $y = \frac{14 + x}{2x}$.

Substituindo em $y - x^2 = 0$ obteremos $\frac{14 + x}{2x} - x^2 = 0$.

O que equivale à $2x^3 - x - 14 = 0$ a qual possui $x = 2$ como raiz (as outras raízes são complexas). E assim, $y = 4$.

Por inspeção, tomando-se pontos satisfazendo a equação restrição e comparando os valores:

$$f(1, 1) = (1 - 14)^2 + (1 - 1)^2 = 169 > 153 = f(2, 4) = (2 - 14)^2 + (4 - 1)^2.$$

Logo $(2, 4)$ é o ponto procurado.

No desafio abaixo, maximizaremos e minimizaremos distância de um ponto a pontos que satisfazem um determinado vínculo.

Desafio!

Resolver no caderno, achando os pontos sobre o círculo $x^2 + y^2 = 80$ que estão mais próximos e mais distantes do ponto $(1, 2)$.



Clique aqui para ver a resposta.

A seguir apresentaremos um exemplo, que ilustra geometricamente a condição $\nabla f = \lambda \nabla g$ sendo satisfeita num determinado ponto.

Exemplo 3.16. Dada a curva $xy = 1$, com $x > 0$ e $y > 0$; vamos determinar a equação da curva de nível da função $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ que seja tangente à essa curva dada. E qual será o ponto de tangência.

Note que, as curvas de nível k da função f são as elipses de equação $x^2 + 16y^2 = k$. Podemos pensar na curva dada como uma curva de nível 1 da função $g(x, y) = xy$, e assim procuraremos por um ponto pertencente à essa curva no qual a curva de nível da f e a curva de nível da g somente se tocam, ou seja, as curvas tem uma reta normal em comum. Logo, neste tal ponto devemos ter $\nabla f = \lambda \nabla g$.

Podemos dizer que, neste exemplo, queremos minimizar $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ sujeita ao vínculo $g(x, y) = xy = 1$.

Devemos resolver as equações:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ xy = 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2x = \lambda y \\ 32y = \lambda x \\ xy = 1 \end{cases}$$

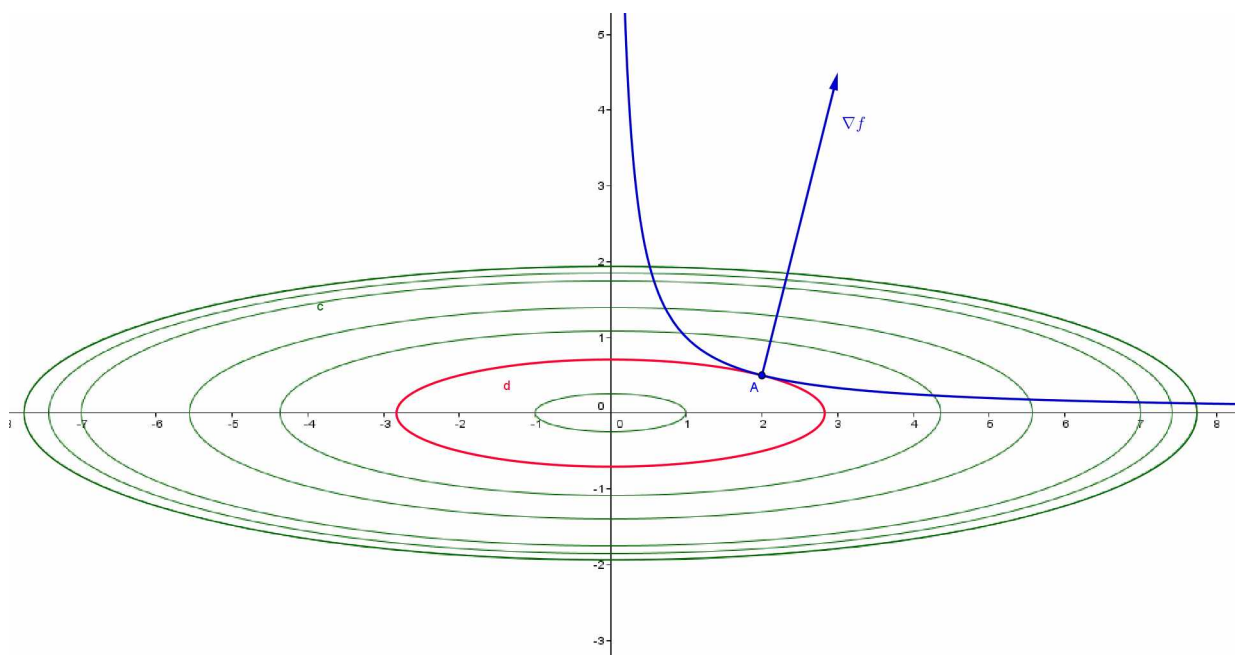


FIGURA 3.11: A figura do exemplo 3.16.

Multiplicando a primeira equação por x e a segunda equação por y , ficaremos com

$$\begin{cases} 2x^2 = \lambda xy \\ 32y^2 = \lambda xy \\ xy = 1 \end{cases}$$

consequentemente podemos concluir que $2x^2 = 32y^2$, ou seja, $x^2 = 16y^2$ que equivale à $x = \pm 4y$. Sendo $x > 0$ e $y > 0$ obtém-se $x = 4y$, o qual substituindo na terceira equação torna-se $(4y)y = 1$ donde $y^2 = \frac{1}{4}$, com $y > 0$ e assim $y = \frac{1}{2}$ e $x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

Logo $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ é o ponto de tangência.

Falta acharmos o valor de k correspondente a equação da curva de nível da $f: x^2 + 16y^2 = k$. Usando o fato de que, em todo ponto da curva de nível k a função f assume sempre o mesmo valor, constante e igual à k . Mais ainda, que o ponto solução encontrado pertence à essa curva. Teremos:

$$k = f\left(2, \frac{1}{2}\right) = 2^2 + 16\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 + 16\left(\frac{1}{4}\right) = 8.$$

Portanto a equação da curva de nível será $x^2 + 16y^2 = 8$.

O método dos multiplicadores de Lagrange pode ser estendido para funções de três variáveis.

Exemplo 3.17.

Maximizar (e minimizar) : $f(x, y, z) = x + z$

dado : $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Resolveremos a equação $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 0 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \end{cases}$$

A primeira equação implica $\lambda \neq 0$ (caso contrário, teríamos $1 = 0$), consequentemente na segunda equação tem-se $y = 0$ e podemos dividir por λ na primeira e terceira equação, obtendo-se $x = \frac{1}{2\lambda} = z$.

Substituindo essas expressões na equação restrição $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ficamos com os pontos críticos condicionados $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Desde que $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, e a equação restrição $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ descreve uma esfera (a qual é limitada) em $\mathbb{R}^3$, então $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é o ponto de máximo condicionado e $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ é o ponto de mínimo condicionado.

No exemplo 3.18, usaremos o método dos multiplicadores de Lagrange para minimizar a soma de quadrados de números satisfazendo um determinado vínculo.

Exemplo 3.18. Vamos encontrar três números reais cuja soma seja 9 e cuja soma de seus quadrados seja a menor possível.

Queremos minimizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeita à $g(x, y, z) = x + y + z = 9$.

Resolveremos as equações:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y, z) = 9 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = \lambda \\ 2z = \lambda \\ x + y + z = 9 \end{cases}$$

Das três primeiras equações deduzimos que $x = y = z$, substituindo-se na última equação obtém-se $x + x + x = 9$, ou seja $3x = 9$, donde $x = 3$; $y = 3$; $z = 3$.

Agora $f(3, 3, 3) = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 27$. Por inspeção, tomando-se pontos satisfazendo a equação restrição e comparando os valores:

$$f(-1, 2, 8) = (-1)^2 + (2)^2 + (8)^2 = 69 > 27 = f(3, 3, 3),$$

concluimos que a solução é $x = 3$; $y = 3$; e $z = 3$.

No desafio abaixo, minimizaremos a soma de três números satisfazendo uma determinada condição.

Desafio!

Usando o caderno, ache três números positivos cuja produto seja 100 e cuja soma seja mínima.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

Teremos mais um exemplo de minimizar distância, agora envolvendo uma função de três variáveis.

Exemplo 3.19. Vamos determinar o ponto sobre o plano $x + 2y + 3z = 13$, mais próximo do ponto $(1, 1, 1)$.

Queremos minimizar a função distância $d((x, y, z), (1, 1, 1))$ sujeita à restrição $x + 2y + 3z = 13$.

Sabemos que minimizar a distância é equivalente à minimizar o quadrado da distância. Trabalharemos então com

$$\begin{aligned} \text{Minimizar : } f(x, y, z) &= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \\ \text{dado : } g(x, y, z) &= x + 2y + 3z = 13 \end{aligned}$$

Precisaremos resolver as seguintes equações:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ x + 2y + 3z = 13 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2(x - 1) = \lambda \\ 2(y - 1) = 2\lambda \\ 2(z - 1) = 3\lambda \\ x + 2y + 3z = 13 \end{cases}$$

Isolando λ nas três primeiras equações, ficaremos com

$$\lambda = 2(x - 1) = (y - 1) = \frac{2}{3}(z - 1)$$

ou equivalentemente

$$y = 2x - 1, \text{ e } z = 3x - 2.$$

Substituindo em $g(x, y, z) = x + 2y + 3z = 13$ tem-se $x + 2(2x - 1) + 3(3x - 2) = 13$, donde $14x = 21$ assim como que $x = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$. Consequentemente $y = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 2$ e

$$z = 3\left(\frac{3}{2}\right) - 2 = \frac{5}{2}.$$

Por inspeção, comparando os valores:

$$f(13, 0, 0) = (13 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (0 - 1)^2 = 146 > \frac{7}{2} = f\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right).$$

Poderemos concluir que o ponto procurado será $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$.

3.6 Problemas de otimização

Nesta seção, usaremos o método de multiplicadores de Lagrange para resolver alguns problemas de otimização.



Lembra como usávamos o critério da derivada primeira, para determinar valores máximos e ou mínimos absolutos ?

E como isso pode ser usado para resolver um problema de otimização ?

Vamos lembrar como resolver o seguinte problema. Suponha que tenhamos 320 metros de cerca disponíveis para cercar um campo retangular. Como a cerca deve ser usada de tal forma que a área incluída seja a máxima possível?

Considerando-se o comprimento e largura do retângulo como sendo x e y , respectivamente. O perímetro total será $2x + 2y$.

Nosso objetivo será maximizar a área $f(x, y) = x \cdot y$ sujeita à restrição $2x + 2y = 320$.

Podemos resolver usando o fato de que $2x + 2y = 320$, ou seja, $x + y = 160$, a qual equivale à $y = 160 - x$.

Substituindo $y = 160 - x$ na função dada, obteremos

$$f(x, 160 - x) = x \cdot (160 - x) = 160x - x^2 = g(x),$$

a qual será uma função de uma variável com $0 \leq x \leq 160$.

E poderemos usar todas as técnicas do cálculo 1: derivando-se e igualando à zero, obtemos $g'(x) = 160 - 2x = 0$ da qual tem-se $x = 80$, o ponto crítico de g .

Comparando os valores de g no ponto crítico com os valores de g nas extremidades do intervalo $[0, 160]$, teremos

$$g(80) = 80(160 - 80) = 80(80) = 6400;$$

$$g(0) = 0(160 - 0) = 0;$$

$$g(160) = 160(160 - 160) = 0.$$

Logo, para que a área incluída seja a máxima devemos tomar $x = 80$ e $y = 160 - (80) = 80$. Observe que, na verdade temos um quadrado.

No exemplo 3.20 a seguir, vamos resolver o mesmo problema usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

Exemplo 3.20. Suponha que tenhamos 320 metros de cerca disponíveis para cercar um campo retangular. Como a cerca deve ser usada de tal forma que a área incluída seja a máxima possível?

Queremos maximizar a área $f(x, y) = x \cdot y$ sujeita à restrição $g(x, y) = 2x + 2y = 320$.

Sabemos que, $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ para algum λ .

Deveremos resolver as equações:

$$\begin{cases} y = 2\lambda \\ x = 2\lambda \\ 2x + 2y = 320 \end{cases}$$

Das duas primeiras equações do sistema, concluímos que $x = y$, a qual levando na terceira equação fica $2x + 2x = 320$, ou seja, $4x = 320$ a qual é equivalente à $x = 80$, e consequentemente $y = 80$.

Logo, para que a área incluída seja a máxima devemos tomar $x = 80$ e $y = 80$.

Que relação tem este problema com o já apresentado no exemplo 3.14 ?



Desafio!

Faça no caderno, a resolução do seguinte problema: um galpão retangular deve ser construído num terreno com a forma de um triângulo, conforme a figura 3.12. Determinar a área máxima possível para o galpão.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

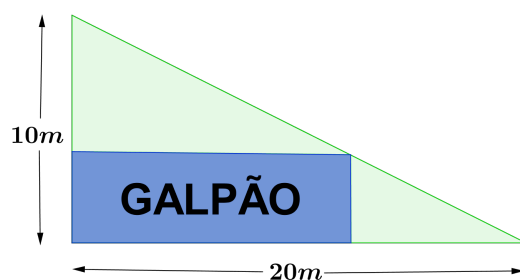


FIGURA 3.12: A figura do desafio do galpão.

No exemplo 3.21, trabalharemos com um problema de maximizar lucro de uma produção.

Exemplo 3.21. Uma fazenda produz dois produtos em uma lavoura, denotados por A e B . O lucro da fazenda pela venda de x unidades do produto A e y unidades do produto B é dado por:

$$L(x, y) = 60x + 100y - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - xy.$$

Supondo que toda a produção seja vendida, determinar a produção que maximiza o lucro. Determine, também, esse lucro.

Nosso objetivo será maximizar o lucro sujeito à restrição de $g(x, y) = x + y = P$, em que P representa a produção total.

Queremos resolver as equações:

$$\begin{cases} \nabla L = \lambda \nabla g \\ x + y = P \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} 60 - \frac{3}{2}(2x) - y = 1\lambda \\ 100 - \frac{3}{2}(2y) - x = 1\lambda \\ x + y = P \end{cases}$$

Podemos observar e concluir que $60 - 3x - y = 100 - 3y - x$, ou seja $2y = 2x + 40$, ou ainda $y = x + 20$.

Substituindo na última equação teremos $x + (x + 20) = P$, donde $2x + 20 = P$.

Consequentemente, $x = \frac{P}{2} - 10$ e $y = \left(\frac{P}{2} - 10\right) + 20 = \frac{P}{2} + 10$.

Portanto deve se produzir $\frac{P}{2} - 10$ unidades do produto A e $\frac{P}{2} + 10$ unidades do produto

B ; e o lucro máximo será

$$L\left(\frac{P}{2} - 10, \frac{P}{2} + 10\right) = 60\left(\frac{P}{2} - 10\right) + 100\left(\frac{P}{2} + 10\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{P}{2} - 10\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{P}{2} + 10\right)^2 - \left(\frac{P}{2} - 10\right)\left(\frac{P}{2} + 10\right).$$

Exemplo 3.22. Deseja-se construir uma arena de teatro com 100 metros quadrados de área total da forma de um semicírculo acoplado a um retângulo como mostrado na figura. Vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar as medidas x e y que dariam o menor perímetro.

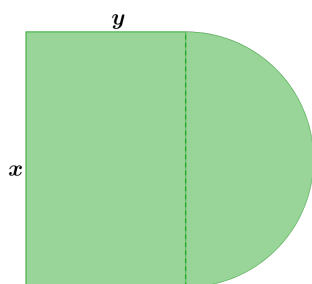


FIGURA 3.13: A figura do exemplo 3.22

De acordo com a figura, note que o semicírculo tem diâmetro igual à x , e assim o perímetro será $p(x, y) = 2y + x + \frac{1}{2}(2\pi)\left(\frac{x}{2}\right)$.

A área total será a área do retângulo mais a área do semicírculo, ou seja

$$g(x, y) = xy + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 100, \text{ donde } g(x, y) = xy + \frac{\pi}{8}x^2 = 100.$$

Minimizaremos $p(x, y) = 2y + x + \pi\frac{x}{2}$ sujeito ao vínculo $g(x, y) = xy + \frac{\pi}{8}x^2 = 100$.

Resolveremos

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} + 1 = \lambda \left[y + 2\frac{\pi}{8}x \right] \\ 2 = \lambda x \\ xy + \frac{\pi}{8}x^2 = 100 \end{cases}$$

Note que, da segunda equação $\lambda = \frac{2}{x}$, sendo $x \neq 0$ visto que, do contrário levaria à $2 = 0$, que não ocorre.

Substituindo o valor de λ na primeira equação obtém-se $\frac{\pi}{2} + 1 = \frac{2}{x}y + \frac{2}{x}\frac{\pi}{4}x$, ou seja $\frac{\pi}{2} + 1 = 2\frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}$, donde $2\frac{y}{x} = 1$ e assim $y = \frac{x}{2}$ a qual substituindo na terceira equação fica

$$x \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{\pi}{8} x^2 = 100 \text{ levando à } x^2 = \frac{100}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} \right)}.$$

Sendo $x > 0$ e $y > 0$, obteremos $x = \frac{10}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}}}$ e $y = \frac{1}{2} \frac{10}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}}}$ que são as medidas que dariam o menor perímetro.

Neste ponto, apresentaremos um exemplo que envolve minimizar a área de superfície de uma caixa sujeito a um volume fixado $V = 32$, respondendo ao problema apresentado no início da seção 3.2, na qual começamos a falar em máximos e mínimos.

Exemplo 3.23. Vamos decidir quais são as dimensões de uma caixa retangular sem tampa com volume de $32m^3$ e que requer uma quantidade mínima de material para sua construção.

É razoável supor que a caixa com a menor área de superfície possível necessitará de uma quantidade mínima do material, logo nosso objetivo será

Minimizar a área de superfície $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ sujeita à restrição de volume $g(x, y, z) = xyz = 32$, com $x > 0$; $y > 0$ e $z > 0$.

Precisaremos resolver as equações:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ xyz = 32 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} y + 2z = \lambda yz \\ x + 2z = \lambda xz \\ 2x + 2y = \lambda xy \\ xyz = 32 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por x , a segunda equação por y e a terceira equação por z ficaremos com

$$\begin{cases} xy + 2xz = \lambda xyz \\ xy + 2yz = \lambda xyz \\ 2xz + 2yz = \lambda xyz \\ xyz = 32 \end{cases}$$

o que nos leva às igualdades $xy + 2xz = xy + 2yz = 2xz + 2yz$, e a cada duas delas podemos concluir que $x = y$ e $x = 2z$, as quais substituindo na última equação do sistema torna-se

$(2z)(2z)z = 32$ donde $4z^3 = 32$, o que equivale à $z^3 = 8$, obtendo-se $z = 2$; consequentemente $x = 4$; e $y = 4$.

Pela natureza do problema, deduziremos que $(4, 4, 2)$ será o ponto de mínimo procurado.

Logo as dimensões da caixa são: altura igual à $2m$, com comprimento e largura ambos iguais à $4m$.

No exemplo 3.24, usaremos o método dos multiplicadores de Lagrange para maximizar o volume.

Exemplo 3.24. Se o comprimento da diagonal de uma caixa retangular deve ser de L unidades, qual é o maior volume possível ?

Para nos auxiliar, basearemos na figura abaixo em que temos uma caixa com três faces contidas nos três planos coordenados; e consideraremos as dimensões da caixa como sendo x , y e z .

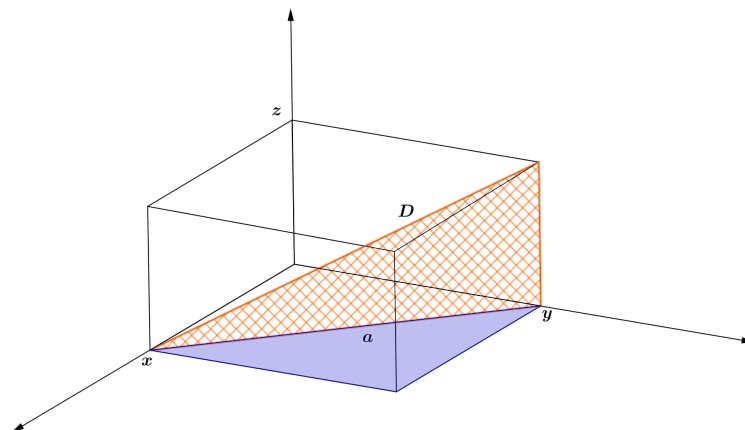


FIGURA 3.14: A figura do exemplo 3.24

Note que, pela figura a diagonal D da caixa será tal que $D^2 = z^2 + a^2$ onde $a^2 = x^2 + y^2$.

Ou seja, $D^2 = x^2 + y^2 + z^2$ donde $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = L$, ou ainda $x^2 + y^2 + z^2 = L^2$.

Nosso objetivo será maximizar o volume $x.y.z$ sujeito à condição $x^2 + y^2 + z^2 = L^2$.

Seja $f(x, y, z) = x.y.z$ e $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Resolveremos as equações:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ x^2 + y^2 + z^2 = L^2 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} yz = \lambda 2x \\ xz = \lambda 2y \\ xy = \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = L^2 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por x , a segunda equação por y e a terceira equação por z obteremos

$$\begin{cases} xyz = \lambda 2x^2 \\ xyz = \lambda 2y^2 \\ xyz = \lambda 2z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = L^2 \end{cases}$$

E assim teremos as igualdades $\lambda 2x^2 = \lambda 2y^2 = \lambda 2z^2$, que após simplificações sendo $\lambda \neq 0$ (senão teríamos do sistema $x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$, o que não ocorre) podemos concluir que $x^2 = y^2 = z^2$, as quais substituindo na última equação do sistema torna-se $x^2 + x^2 + x^2 = L^2$ donde $3x^2 = L^2$, o que equivale à $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$, consequentemente $y = \frac{L}{\sqrt{3}}$; e $z = \frac{L}{\sqrt{3}}$; desde que $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$. Com esses valores das dimensões da caixa, obteremos que o volume máximo possível será igual à $V = \frac{L}{\sqrt{3}} \cdot \frac{L}{\sqrt{3}} \cdot \frac{L}{\sqrt{3}} = \frac{L^3}{3\sqrt{3}}$.

Desafio!

Resolva no caderno o seguinte problema:

Um pacote com o formato de uma caixa retangular pode ser enviado pelo correio como encomenda postal se, a soma de seu comprimento, largura e altura for de, no máximo 99 cm. Determine as dimensões do pacote de maior volume que pode ser enviado como encomenda postal.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

Usando o método dos multiplicadores de Lagrange resolveremos um exemplo que envolve minimizar custo.

Exemplo 3.25. Considere um aquário com formato de uma caixa retangular com tampa e de volume V . Sabendo-se que a base do aquário é feita de ardósia, a tampa e os demais lados são de vidro e que o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro; determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material.

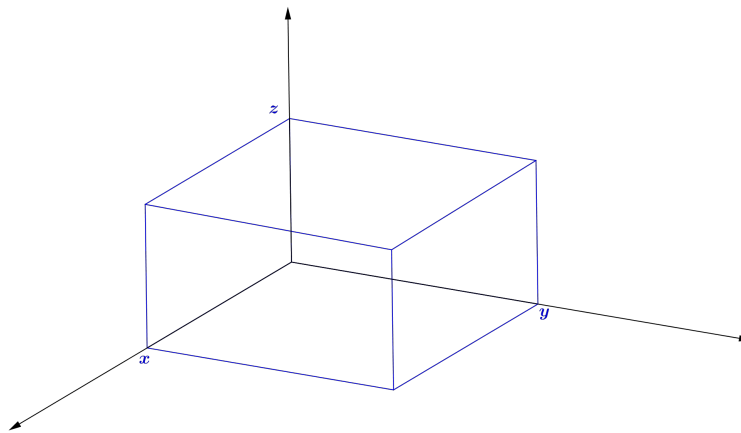


FIGURA 3.15: A figura do exemplo 3.25.

Suponhamos que o preço, por unidade de área, do vidro seja p . Assim, de acordo com os dados do problema o preço da ardósia, por unidade de área, será $5p$. Logo, o custo total será $C(x, y, z) = 5pxy + p[xy + 2xz + 2yz] = p[5xy + xy + 2xz + 2yz]$, sendo p uma constante.

Ou seja, queremos minimizar o custo $6xy + 2xz + 2yz$ sujeito à restrição $x \cdot y \cdot z = V$

Precisaremos resolver:

$$\begin{cases} 6y + 2z = \lambda yz \\ 6x + 2z = \lambda xz \\ 2x + 2y = \lambda xy \\ xyz = V \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por x , a segunda equação por y e a terceira equação por z obteremos as igualdades $6xy + 2xz = 6xy + 2zy = 2xz + 2yz$. Desde que $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $z \neq 0$, a cada duas das igualdades podemos concluir que $x = y$ e $x = \frac{z}{3}$, as quais substituindo

na última equação do sistema torna-se $\frac{z}{3} \cdot \frac{z}{3} \cdot z = V$ donde $\frac{z^3}{9} = V$, o que equivale à $z^3 = 9V$, obtendo-se $z = \sqrt[3]{9V}$; consequentemente $x = \frac{\sqrt[3]{9V}}{3}$; e $y = \frac{\sqrt[3]{9V}}{3}$.

Portanto, as dimensões do aquário para minimizar o custo do material serão $x = \frac{\sqrt[3]{9V}}{3}$; $y = \frac{\sqrt[3]{9V}}{3}$ e $z = \sqrt[3]{9V}$.

Numa situação hipotética de montarmos um radiotelescópio, usaremos o método dos multiplicadores de Lagrange para minimizarmos a intensidade de um campo magnético:

Exemplo 3.26. Suponhamos que estamos encarregado de montar um radiotelescópio em um planeta recém-descoberto. Para minimizar interferências, devemos posicioná-lo onde o campo magnético do planeta seja mais fraco. O planeta é esférico com um raio de 1 unidade. Com base em um sistema de coordenadas cuja origem esteja no centro do planeta, a intensidade do campo magnético é fornecida por $M(x, y, z) = xz + yz + 4$. Onde você deve posicionar o radiotelescópio?

Iremos minimizar a intensidade de um campo magnético $M(x, y, z) = xz + yz + 4$ sujeita à condição $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Precisaremos resolver as equações:

$$\begin{cases} z = \lambda 2x \\ z = \lambda 2y \\ x + y = \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Somando membro a membro das duas primeiras igualdades obteremos: $2z = 2\lambda(x + y)$.

De acordo com a terceira equação, poderemos substituir nessa expressão $(x + y)$ por $\lambda 2z$, ficaremos assim com $2z = 2\lambda(\lambda 2z)$.

Ou seja, $2z = 4\lambda^2 z$, donde $2z(2\lambda^2 - 1) = 0$, o que equivale à $z = 0$ ou $2\lambda^2 = 1$

Se $z = 0$, nas duas primeiras equações deduz-se que $x = y = 0$ ou $\lambda = 0$.

O caso $x = y = z = 0$ não ocorre, visto que não satisfaz a última equação do sistema.

Assim $\lambda = 0$, e substituindo na terceira equação do sistema tem-se $x + y = 0$, ou seja $y = -x$, a qual levando na última equação do sistema teremos $x^2 + (-x)^2 + (0)^2 = 1$, equivalentemente, $2x^2 = 1$, ou ainda, $x^2 = \frac{1}{2}$.

Obtendo-se os pontos $P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ou $P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Agora, analisando o caso $2\lambda^2 = 1$ tem-se $\lambda^2 = \frac{1}{2}$, ou seja $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Substituindo o valor de λ nas duas primeiras equações do sistema e comparando-as temos: $2\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x = 2\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)y$, donde $x = y$, a qual levando na terceira equação fica

$x + x = 2 \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) z$, ou seja, $z = \pm \sqrt{2}x$. E a última equação torna-se $x^2 + x^2 + 2x^2 = 1$, a qual é equivalente à $4x^2 = 1$.

Logo a solução será $x = \pm \frac{1}{2}$; $y = \pm \frac{1}{2}$ e $z = \pm \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \right)$.

Portanto, os pontos correspondentes obtidos serão

$$P_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right); P_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right);$$

$$P_5 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ e } P_6 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Por inspeção, comparando os valores:

$$M \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) = 4$$

$$M \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) = 4$$

$$M \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 4$$

$$M \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 4$$

$$M \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 4$$

$$M \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 4$$

poderemos concluir que os pontos soluções do problema são:

$$P_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ e } P_5 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

3.7 Soluções dos desafios do módulo III

- Desafio da página 103.

Seja $f(x, y) = 1 - 2xy^2 + x^3y$, teremos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4xy + x^3$$

Assim

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -4y + 3x^2.$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = -4$$

- Desafio da página 106.

É fácil ver que, $f(x, y) = x^4 + y^4 \geq 0$ para todos os valores de x e de y .

Agora $f(0, 0) = 0$, e assim $f(x, y) \geq f(0, 0)$ e poderemos diretamente concluir que $(0, 0)$ é um ponto de mínimo absoluto de f .

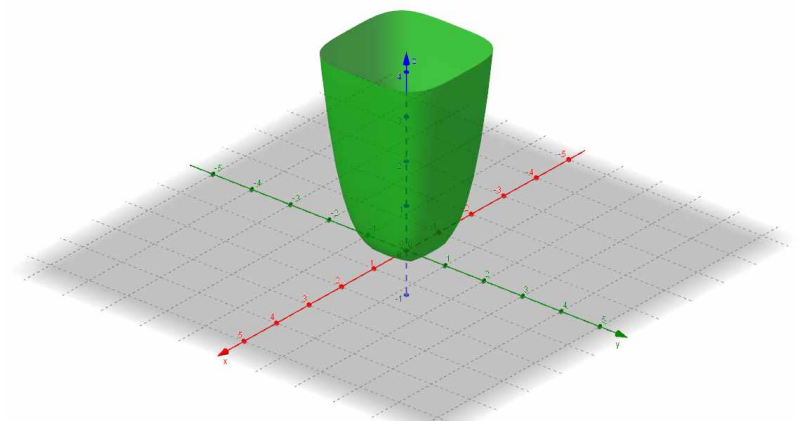


FIGURA 3.16: O gráfico da função deste desafio

- Desafio da página 109.

Como $f(x, y) = 2x + 3y$ é diferenciável e além disso

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \neq 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3 \neq 0,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; poderemos concluir que a função não possui pontos críticos.

- Desafio da página 113.

Primeiramente acharemos os pontos críticos de $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$, i.é. onde $\nabla f = \vec{0}$.

Desde que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 3x^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y$$

então os pontos críticos (x, y) são as soluções comuns das equações

$$\begin{cases} y - 3x^2 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação tem-se $y = 3x^2$, substituindo na segunda equação

obtem-se $x - 6x^2 = 0$, o qual tem as soluções $x = 0$ e $x = \frac{1}{6}$. Assim como que, de $x = 0$ tem-se $y = 3(0)^2 = 0$ e de $x = \frac{1}{6}$ corresponde à $y = 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}$.

Consequentemente, os pontos críticos são $(x, y) = (0, 0)$ e $(x, y) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$.

Para usar o teorema 3.3 nós necessitaremos das derivadas parciais de ordem dois :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$$

Assim

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \right)^2 = (-6(0))(-2) - 1^2 = -1 < 0$$

e $(0, 0)$ é um ponto de sela.

Também,

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) \right)^2,$$

ou seja,

$$D = \left(-6\left(\frac{1}{6}\right) \right) (-2) - 1^2 = 1 > 0$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = -1 < 0$$

Logo, $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ é um ponto de máximo local.

- Desafio da página 118.

Temos que $f(x, y) = xy$ é uma função polinomial, donde teremos uma função contínua numa região fechada e limitada C , assim o teorema 3.4 nos garante que f assume máximo e mínimo absoluto em C .

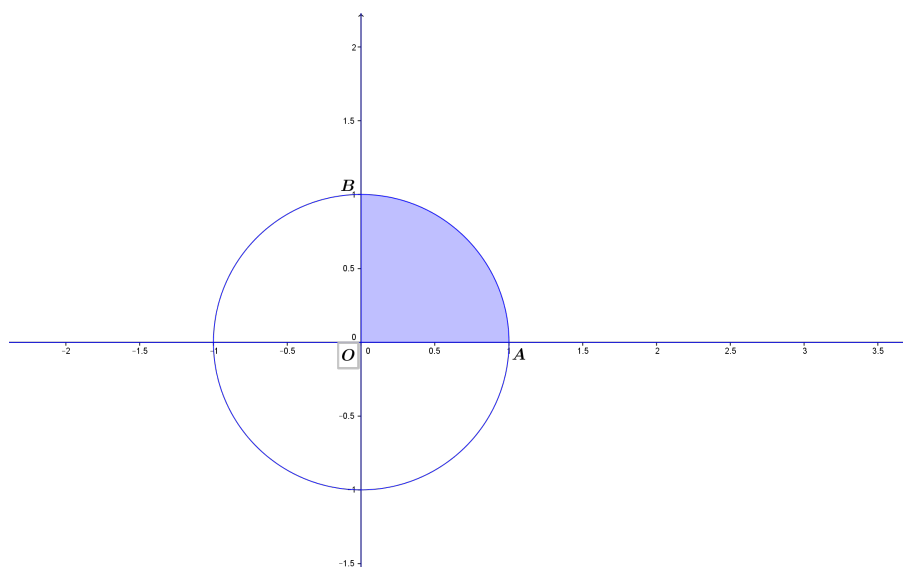


FIGURA 3.17: A região C

Inicialmente calcularemos os pontos críticos de f que estão no interior de C :

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

então os pontos críticos (x, y) são as soluções comuns das equações

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

as quais tem uma única solução $(x, y) = (0, 0)$.

Logo, $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f . Mas, neste caso, não teremos pontos críticos de f no interior de C .

Precisaremos fazer uma análise dos pontos da fronteira de C :

Observe que a fronteira de C consiste de dois segmentos de reta e parte do arco de uma circunferência, cada um dos quais devem ser tratados separadamente.

No segmento $\overline{OA}$, tem-se $y = 0$, substituindo em $f(x, y)$ ficaremos com uma função de uma variável $f(x, 0) = g(x) = 0$, para todo $x \in [0, 1]$.

E assim poderemos aplicar as técnicas do cálculo de uma variável: achando os pontos críticos, se houver, no interior do intervalo $[0, 1]$ e pensando também que os valores extremos podem ocorrer nas extremidades do intervalo. Na extremidade $x = 0$ do intervalo $[0, 1]$, tem-se $g(0) = f(0, 0) = 0$. Na outra extremidade $x = 1$, donde $g(1) = f(1, 0) = 0$. Para pontos interiores de $[0, 1]$, teremos $g'(x) = 0$ para qualquer valor de x , donde qualquer valor de $x \in (0, 1)$ é ponto crítico de g e temos os candidatos $f(x, 0) = 0$ com $x \in (0, 1)$.

No segmento $\overline{OB}$, tem-se $x = 0$, substituindo em $f(x, y)$ ficaremos com uma função de uma variável $f(0, y) = g(y) = 0$, para todo $y \in [0, 1]$. Analogamente, obtém-se que os candidatos neste segmento são:

$$g(0) = f(0, 0) = 0; \quad g(1) = f(0, 1) = 0 \text{ e } g(y) = f(0, y) = 0,$$

com $y \in (0, 1)$. Sobre o arco de circunferência: $x^2 + y^2 = 1$ com $x > 0$ e $y > 0$ tem-se $y = \sqrt{1 - x^2}$,

substituindo em $f(x, y)$ ficaremos com uma função de uma variável

$$f(x, \sqrt{1 - x^2}) = h(x) = x[\sqrt{1 - x^2}], \quad x \in [0, 1]$$

Já levamos em consideração os valores de f nas extremidades do arco, assim falta examinar os pontos sobre o arco:

Fazendo $h'(x) = 0$ o que equivale à $(1)[\sqrt{1 - x^2}] + x[\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)] = 0$,

ou ainda, $\sqrt{1 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$ que corresponde à $x^2 = 1 - x^2$, e assim $2x^2 = 1$, donde $x^2 = \frac{1}{2}$.

Logo obteremos $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Mas como $x \in (0, 1)$, teremos apenas $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Consequentemente, para $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tem-se

$$h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{1 - \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Compararemos os valores de f nos pontos críticos interiores e nos pontos de fronteira, nos quais um extremo pode ocorrer.

Obtivemos:

$$f(0, 0) = 0;$$

$$f(1, 0) = 0; \quad f(0, 1) = 0; \quad f(x, 0) = 0, \text{ com } x \in (0, 1); \quad f(0, y) = 0, \text{ com } y \in (0, 1);$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Logo, o valor máximo absoluto de f é $\frac{1}{2}$ o qual corresponde ao ponto de máximo absoluto

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

E o valor mínimo absoluto de f é 0, o qual é assumido em pontos da forma $(x, 0)$ com $x \in [0, 1]$ e em pontos da forma $(0, y)$ com $y \in [0, 1]$.

- Desafio da página 121.

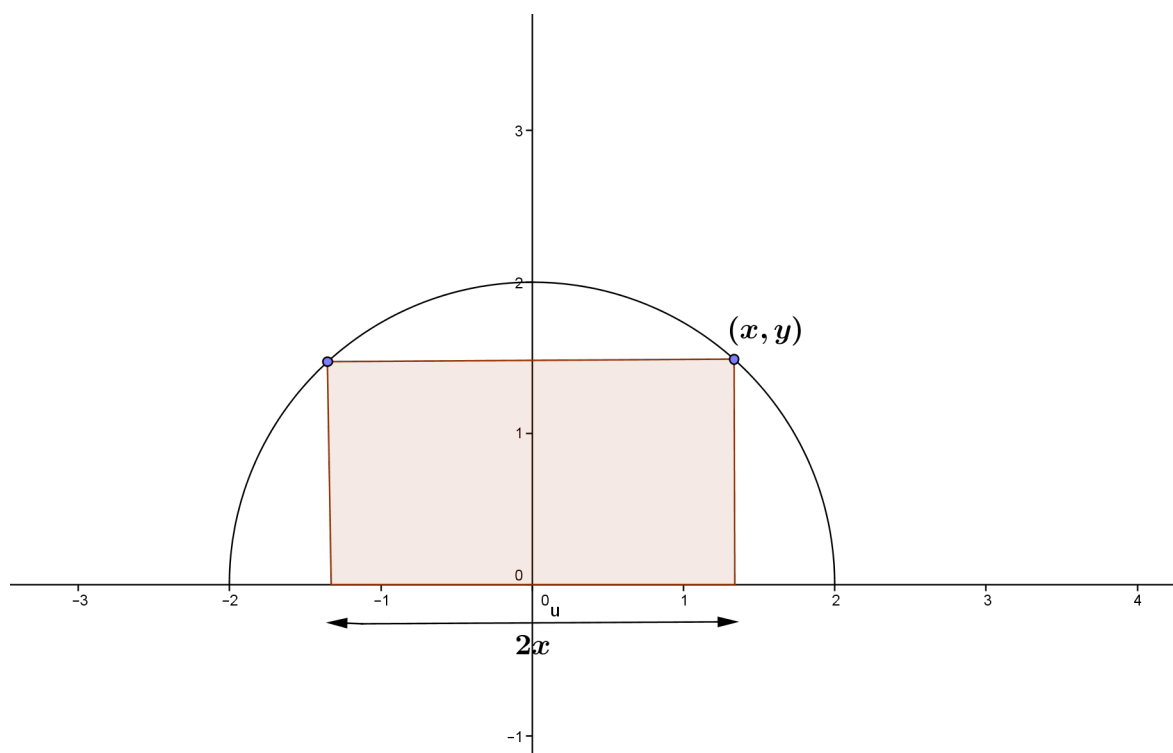


FIGURA 3.18: A figura deste desafio.

Conforme figura, temos um retângulo de comprimento $2x$ e largura y .

Queremos

$$\text{Maximizar : } f(x, y) = 2xy$$

$$\text{dado : } x^2 + y^2 = 4; \text{ com } y > 0$$

Precisaremos resolver a igualdade $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ para algum λ , ou seja

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}, \text{ a saber:}$$

$$\begin{cases} 2y = \lambda 2x \\ 2x = \lambda 2y \end{cases}$$

Mais ainda, (x, y) devem satisfazer $x^2 + y^2 = 4$.

Assim, resolveremos o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2y = \lambda 2x \\ 2x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Após simplificações, multiplicando a primeira equação por x , a segunda equação por y ficaremos com

$$\begin{cases} xy = \lambda x^2 \\ xy = \lambda y^2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

o que nos leva à igualdade $\lambda x^2 = \lambda y^2$, e sendo $\lambda \neq 0$ (caso contrário, no sistema inicial teríamos $x = 0$ e $y = 0$) obtém-se $x^2 = y^2$ donde $x = \pm y$.

Substituindo na última equação do sistema obtém-se $y^2 + y^2 = 4$, ou seja, $2y^2 = 4$, o que equivale à $y^2 = 2$, obtendo-se $y = \pm\sqrt{2}$; mas $y > 0$ consequentemente $y = \sqrt{2}$; e $x = \pm\sqrt{2}$.

Logo os pontos críticos condicionados são $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Comparando os valores:

$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4$ e $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2(-\sqrt{2})\sqrt{2} = -4$, conclui-se que $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ é o ponto de máximo.

Portanto, o comprimento e largura do retângulo são: $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$, respectivamente.

- Desafio da página 123.

A distância d de algum ponto (x, y) ao ponto $(1, 2)$ é

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

e minimizar a distância é equivalente à minimizar o quadrado da distância. Assim o problema pode ser considerado:

$$\text{Minimizar : } f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$\text{dado : } g(x, y) = x^2 + y^2 = 80$$

Resolver $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ é equivalente a resolver as seguintes equações:

$$\begin{cases} 2(x-1) = 2\lambda x \\ 2(y-2) = 2\lambda y \end{cases}$$

Note que $x \neq 0$ desde que, de outra forma $-2 = 0$ na primeira equação. Analogamente, $y \neq 0$. Poderemos resolver ambas as equações para λ como segue:

$$\frac{x-1}{x} = \lambda = \frac{y-2}{y}$$

se e somente se

$$xy - y = xy - 2x,$$

o que é equivalente a $y = 2x$. Substituindo em $g(x, y) = x^2 + y^2 = 80$ tem-se $5x^2 = 80$, assim como que $x = \pm 4$. Consequentemente os dois pontos críticos são $(4, 8)$ e $(-4, -8)$. Desde que $f(4, 8) = 45$ e $f(-4, -8) = 125$, e desde que eles devem estar sobre o círculo e mais próximos e mais distantes do ponto $(1, 2)$, então é o caso em que $(4, 8)$ é o ponto sobre o círculo mais próximo a $(1, 2)$ e $(-4, -8)$ é o mais distante de $(1, 2)$. Veja figura 3.19.

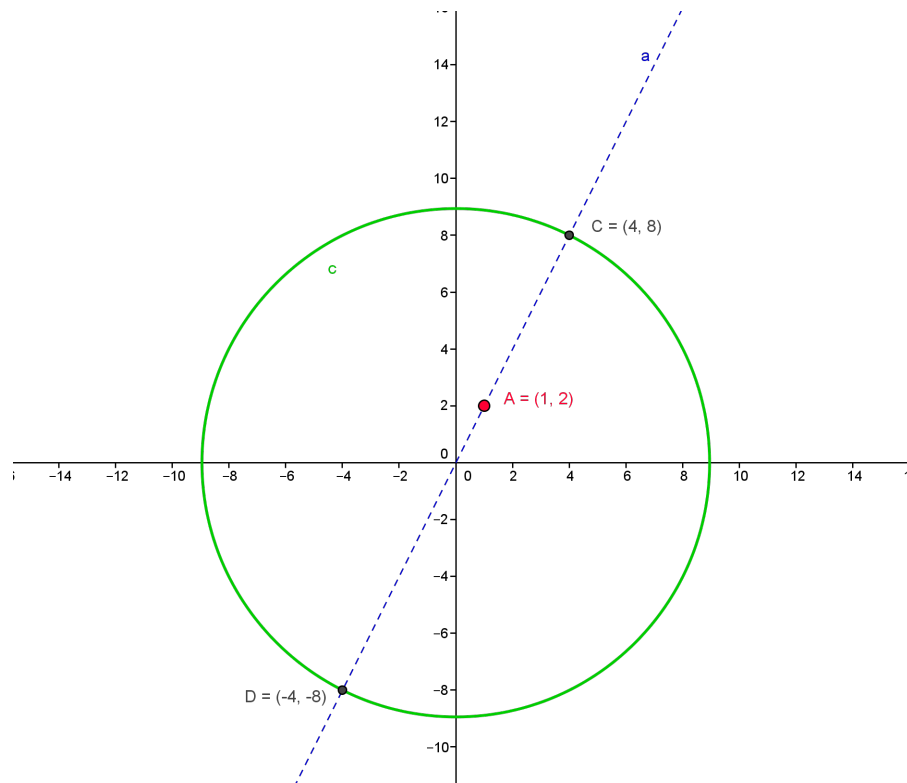


FIGURA 3.19: A figura deste desafio.

Note que a equação $x^2 + y^2 = 80$ descreve um círculo, o qual é um conjunto limitado em $\mathbb{R}^2$, então nós podemos garantir que entre os pontos críticos condicionados encontraremos realmente o máximo e mínimo condicionado.

- Desafio da página 126.

Queremos minimizar $f(x, y, z) = x + y + z$ sujeita à $g(x, y, z) = xyz = 100$.

Resolveremos as equações:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y, z) = 100 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 1 = \lambda yz \\ 1 = \lambda xz \\ 1 = \lambda xy \\ xyz = 100 \end{cases}$$

Das três primeiras equações deduzimos que $\lambda yz = \lambda xz = \lambda xy$.

Sendo $\lambda \neq 0$, $x \neq 0$; $y \neq 0$ e $z \neq 0$, comparando as igualdades duas a duas e após simplificações teremos $x = y = z$.

Substituindo-se na última equação obtém-se,

$$x \cdot x \cdot x = 100, \text{ ou seja, } x^3 = 100,$$

donde $x = \sqrt[3]{100}$; $y = \sqrt[3]{100}$; $z = \sqrt[3]{100}$.

Agora,

$$f(\sqrt[3]{100}, \sqrt[3]{100}, \sqrt[3]{100}) = \sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{100} = 3\sqrt[3]{100}.$$

Por inspeção, tomando-se pontos satisfazendo a equação restrição e comparando os valores:

$$f(2, 2, 25) = 2 + 2 + 25 = 29 > 3\sqrt[3]{100} = f(\sqrt[3]{100}, \sqrt[3]{100}, \sqrt[3]{100}),$$

concluimos que a solução é $x = \sqrt[3]{100}$; $y = \sqrt[3]{100}$; $z = \sqrt[3]{100}$.

- Desafio da página 129.

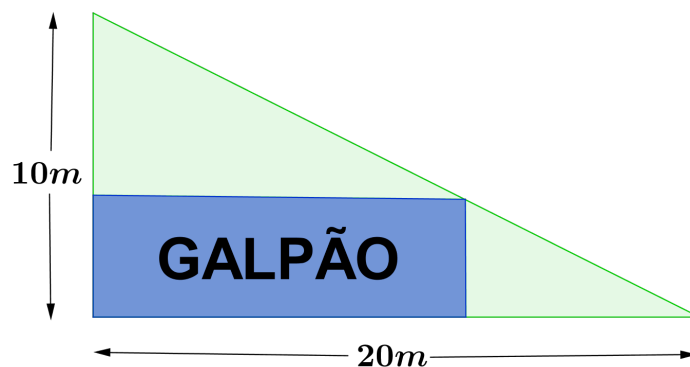


FIGURA 3.20: A figura deste desafio

Denotaremos o comprimento e a largura do retângulo por x e y , respectivamente.

Queremos maximizar a área do retângulo sujeito à condição de x e y pertencerem ao retângulo inscrito no triângulo dado.

Podemos observar que, os dois triângulos menores formados na figura são semelhantes (caso: ângulo-ângulo); assim por propriedades de semelhança teremos:

$$\frac{10 - y}{y} = \frac{x}{20 - x}$$

a qual é equivalente

$$(10 - y)(20 - x) = xy,$$

ou seja,

$$200 - 10x - 20y + xy = xy$$

que após simplificações, obtém-se:

$$x + 2y = 20$$

Logo iremos maximizar $f(x, y) = xy$ sujeita ao vínculo $x + 2y = 20$.

Precisaremos resolver:

$$\begin{cases} y = 1\lambda \\ x = 2\lambda \\ x + 2y = 20 \end{cases}$$

Das duas primeiras equações do sistema, concluímos que $x = 2y$, a qual levando na terceira equação fica $2y + 2y = 20$, ou seja, $4y = 20$ a qual é equivalente à $y = 5$, e consequentemente $x = 2(5) = 10$.

Logo, área máxima possível para o galpão será $f(10, 5) = 10(5) = 50m^2$.

- Desafio da página 134.

Suponhamos que x , y e z representam o comprimento, a largura e altura, respectivamente, da caixa.

Queremos

Maximizar o volume $f(x, y, z) = xyz$ sujeita à restrição de $g(x, y, z) = x + y + z = 99$, com $x > 0$; $y > 0$ e $z > 0$.

Precisaremos resolver as equações:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ x + y + z = 99 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} yz = \lambda 1 \\ xz = \lambda 1 \\ xy = \lambda 1 \\ x + y + z = 99 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por x , a segunda equação por y e a terceira equação por z ficaremos com

$$\begin{cases} xyz = \lambda x \\ xyz = \lambda y \\ xyz = \lambda z \\ x + y + z = 99 \end{cases}$$

o que nos leva às igualdades $\lambda x = \lambda y = \lambda z$. Podemos ver que, $\lambda \neq 0$ (caso contrário, teríamos $x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$) e concluir que $x = y = z$. Substituindo na última equação do sistema obteremos $x + x + x = 99$ donde $3x = 99$, o que equivale à $x = 33$, consequentemente $y = 33$; e $z = 33$.

Pela natureza do problema, deduziremos que $(33, 33, 33)$ será o ponto de máximo procurado.

Logo as dimensões do pacote de maior volume que pode ser enviado como encomenda postal são: comprimento, largura e altura iguais à 33 cm.

Módulo 4

Equações Diferenciais Ordinárias de 1^a e 2^a ordem

No término do módulo IV, o aluno estará familiarizado com os seguintes conceitos:

- ▷ Definição e classificação das equações diferenciais;
- ▷ Equações lineares de 1^a ordem e fator integrante;
- ▷ Equações de variáveis separáveis;
- ▷ Equações exatas;
- ▷ Equações diferenciais de 2^a ordem homogêneas e não homogêneas com coeficientes constantes;
- ▷ Aplicações de EDO de 1^a e 2^a ordem.

4.1 Definição e classificação das equações diferenciais

O que é uma equação? Você saberia definir este conceito sem dúvida?



Fazendo uma definição rigorosa seria a seguinte:

Definição 4.1. Uma equação com uma **incógnita** é uma igualdade cujo valor de verdade (verdadeira ou falsa) depende da incógnita. Uma vez substituída a incógnita, a equação se transforma em uma proposição que pode ser verdadeira ou falsa.

Concorda? Vamos ilustrar equações no exemplo 4.1.

Exemplo 4.1. A expressão $x + 1 = 0$ é uma equação cuja incógnita é x . Substituindo x por 3 notamos que a proposição obtida $3 + 1 = 0$ é **falsa**, enquanto a proposição obtida de substituir x por -1 , ou seja $(-1) + 1 = 0$ é verdadeira!

Da mesma forma, se escrevermos a equação

$$y' = \text{sen}(t), \quad (4.1)$$

tem como incógnita a **$y(t)$** , que é uma função cuja derivada é $\text{sen}(t)$. Assim, tomando $y = t$, teríamos, substituindo em (4.1), a igualdade

$$1 = \text{sen}(t),$$

que seria verdadeira para **alguns** valores específicos de t , mas não para **todo** t . Para que a proposição seja verdadeira para todo t , deveríamos escolher $y = \cos(t)$.

O exemplo 4.1 nos mostra um caso particular de equações que iremos estudar neste módulo IV: as equações diferenciais, que serão a motivação da seguinte definição 4.2.

Definição 4.2. Uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função e suas derivadas. Se tal função é de uma variável, a equação se chama Equação Diferencial Ordinária (EDO). Se a função incógnita é de várias variáveis, a equação é chamada de Equação Diferencial Parcial (EDP).

Vejamos alguns exemplos deste tipo de equações diferenciais no exemplo 4.2 a seguir.

- Exemplo 4.2.**
1. $y' - 5y = t^2$ é uma EDO pois a função incógnita y depende apenas da variável t e a equação envolve a derivada y' que também depende da incógnita t .
 2. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -2\frac{\partial y}{\partial t}$ é uma EDP pois envolve uma função incógnita e suas derivadas parciais com respeito às variáveis x e t .
 3. $f''(x) = 1 - x^2$ é uma EDO.

No caso das equações estudadas nos cursos anteriores, como a considerada no início do módulo, $x + 1 = 0$, costumamos dizer que o número real que substituindo a incógnita por esse número, transforma a equação em uma proposição verdadeira, é uma **solução** da equação. Da mesma maneira, podemos definir solução de uma EDO ou uma EDP, como sendo àquela

função que substituída na equação, faz que a proposição seja verdadeira... para todo valor da(s) variável(s) independente(s).

Também, como nas equações tratadas em outros cursos, resolver uma equação diferencial é encontrar todas as funções que transformam a equação em uma proposição verdadeira para todo valor da(s) variável(s) independente(s). No exemplo 4.1, a função $y = \cos(t)$ é uma solução da equação (4.1), mas não é a única, pois se tomarmos

$$y = \cos(t) + C, \quad (4.2)$$

com C uma constante qualquer, teríamos que

$$y' = (\cos(t) + C)' = \sin(t),$$

para todo t , número real, o que significa que a função (4.2) é solução, qualquer que seja a constante C . Isto ilustra que esta EDO tem infinitas soluções que diferem por uma constante. A família de soluções da EDO (4.1) é mostrada na figura 4.1.

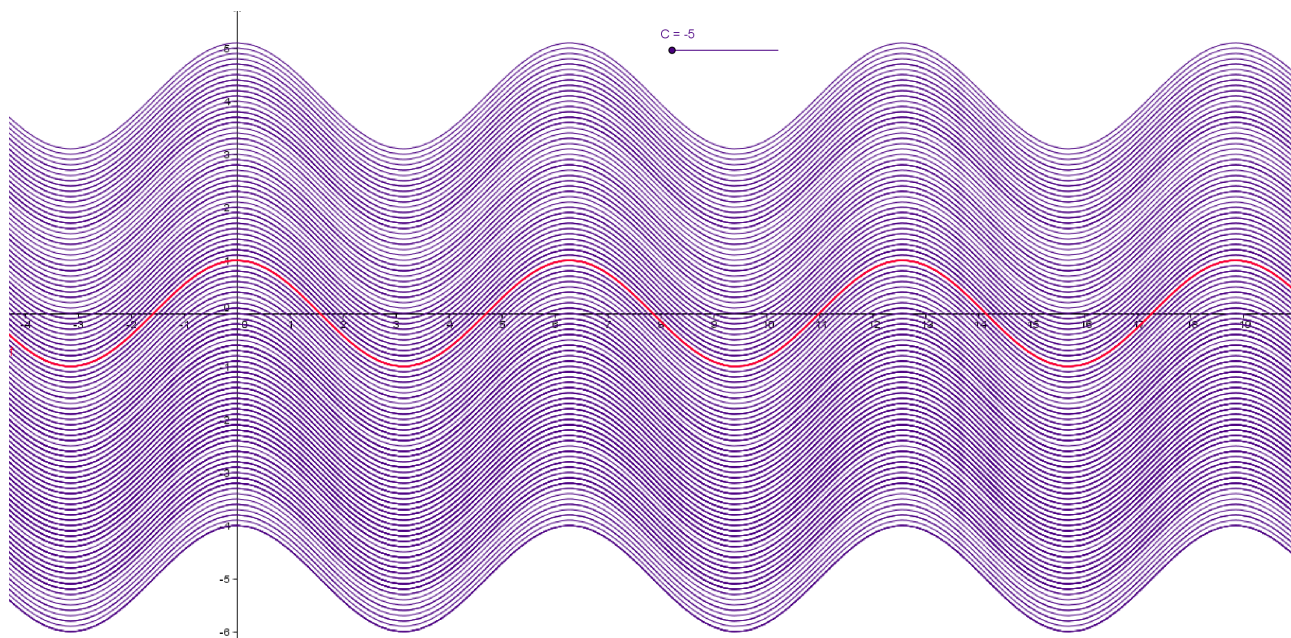


FIGURA 4.1: A família de soluções da EDO(4.1).

Verificar que uma função é uma solução, é substituir a função na equação e verificar se a proposição resultante é verdadeira para todo valor da variável independente. Vejamos alguns exemplos de como comprovar que funções são soluções de uma EDO.

Exemplo 4.3. Dada a EDO

$$y' + 2xy^2 = 0,$$

tem como uma solução a função $y = \frac{1}{x^2+1}$. De fato, temos que

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}, \text{ e } 2xy^2 = 2x \cdot \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

De onde

$$y' + 2xy^2 = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0,$$

o que mostra que é solução.

Vamos para o primeiro desafio deste módulo.

Desafio!

Determine qual das funções $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = e^{-x}$ é solução da EDO

$$(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0.$$



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

Este fato é geral para o caso de equações diferenciais (EDO) que envolve a função incógnita e sua derivada primeira, ou seja, da forma

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (4.3)$$

e que é denominada de EDO de primeira ordem, pela razão de envolver a função incógnita e a sua derivada primeira. A função $y = (x, C)$ que resolve a equação é dita **solução geral**, quando depende de uma constante tal que, qualquer solução da equação diferencial, se obtém dando valores específicos à constante. Quando damos valores concretos à constante da solução geral, obtemos uma **solução particular**. Geometricamente, a solução geral de uma EDO de primeira ordem representa a família de curvas, uma para cada valor assignado à constante.

Na prática, a determinação das constantes que aparecem na solução geral se realiza a partir

da chamada **condição inicial** do problema. A condição inicial do problema é o valor que a função solução ou sua derivada tomam em determinado ponto. Pode ser provado que o problema,

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)); \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (4.4)$$

ou seja, a equação diferencial junto com a condição que o elemento solução y da família solução, passe pelo ponto (x_0, y_0) , tem uma única solução. Em outras palavras, existe só um membro da família solução que passa por esse ponto. Pode-se trocar a condição por uma análoga para a derivada da função em um ponto. Este problema é chamado de **Problema de Valor Inicial** e denotado sinteticamente como (PVI). A afirmação da existência de solução para o (PVI) é um importante teorema da teoria das equações diferenciais ordinárias, cuja demonstração pode-se encontrar amplamente na literatura.

A EDO da forma

$$H(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0,$$

ou seja, uma equação diferencial ordinária em que a função incógnita y , e as suas derivadas, y' e y'' são usadas, é chamada de EDO de segunda ordem. Vamos mostrar com um exemplo que conclusões similares às feitas com a EDO de primeira ordem podem ser concluídas para a EDO de segunda ordem. Isto no exemplo 4.4.

Exemplo 4.4. Dada a EDO de segunda ordem

$$y''(t) = \text{sen}(t).$$

Vamos integrar duas vezes esta equação:

$$y'(t) = -\cos(t) + C_1.$$

$$y(t) = -\text{sen}(t) + C_1 t + C_2,$$

obtendo assim a solução da EDO. Note que neste caso precisamos de duas constantes C_1 e C_2 para determinar a família de soluções, ou seja, teremos $y(x) = y(x, C_1, C_2)$. A figura 4.2 mostra a família solução da EDO, de acordo com as constantes.

Você saberia como resolver o item 3 do exemplo 4.2? Aceite isto como segundo desafio do módulo IV!



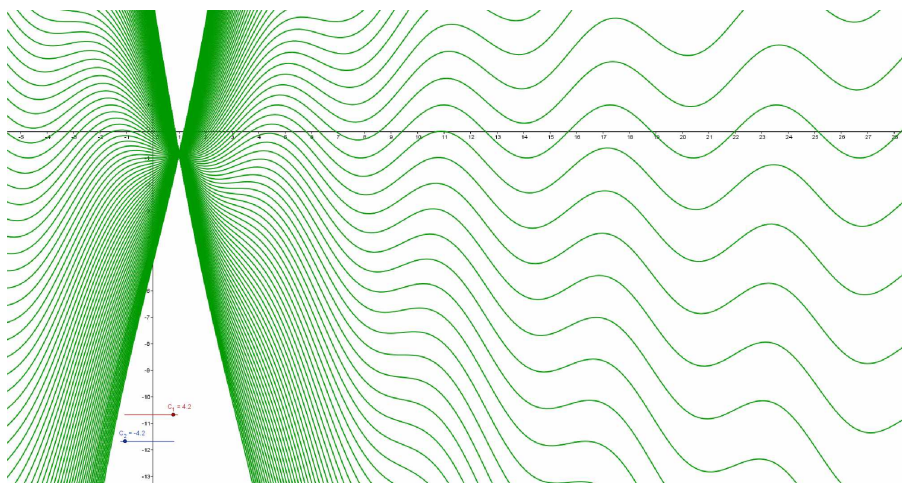


FIGURA 4.2: A família de soluções da EDO do exemplo (4.4).

Desafio!

Ache a família de soluções do item 3 do exemplo 4.2 e esboce o gráfico de algumas delas (tente usar o software GeoGebra!).



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

O que estudamos nas EDO de primeira e segunda ordem, pode-se generalizar para ordens superior, como feito na definição 4.3 a seguir.

Definição 4.3. Se uma EDO envolve uma função incógnita e suas derivadas, de primeira até n -ésima ordem, com n um número natural, então a EDO é dita de ordem n . Esta equação diferencial tem como soluções uma família de funções que dependem de n constantes.

Existem outros tipos de qualificações das equações diferenciais ordinárias que iremos analisar na subseção 4.1.1.

4.1.1 EDO LINEARES

Começamos com a definição de EDO linear. Existem na literatura muitas definições do conceito de EDO linear, como existem também variadas definições de **função linear**.



Que conceito você tem de função linear de uma variável?

Em geral pensamos como função linear de uma variável à função da forma $f(x) = mx + n$, pois esta função tem como representação uma reta. Mas pensando do ponto de vista da

Álgebra Linear, ou seja, pensando f do espaço vetorial $\mathbb{R}$ em si mesmo, a função $f(x) = mx + n$ não preserva linearidade, ou seja, não transforma combinações lineares de elementos do domínio em combinações lineares da imagem. Por exemplo, a função $f(x) = x + 1$, transforma a combinação linear $3 \cdot 1 + 2 \cdot 5$ que é o número 13 no número $f(13) = 13 + 1 = 14$. Por outro lado, fazendo a mesma combinação linear das imagens de 1 e 5, isto é, $3 \cdot f(1) + 2 \cdot f(5)$, obtemos $3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 18$, o que mostra que a função $f(x) = x + 1$ não é uma transformação linear de $\mathbb{R}$ em si mesmo.

Da mesma maneira, pensando em termos da Álgebra Linear, definiremos como EDO linear àquela equação diferencial que **preserva** a linearidade no conjunto solução. Mais precisamente, temos a definição 4.4 a seguir.

Definição 4.4. Uma EDO é linear se verificar as condições:

1. Dado um número real α e uma solução da equação y , então αy é solução.
2. A soma de duas soluções é uma solução da EDO.

As condições 1 e 2 é equivalente à seguinte condição: se y_1 e y_2 são soluções da EDO e α é um número real, então $y_1 + \alpha y_2$ é também solução da EDO

Observação 4.1. Note que o conjunto das soluções de uma EDO linear constitui um espaço vetorial dentro do espaço vetorial das funções de domínio real.

Exemplo 4.5. A EDO de primeira ordem

$$y' + p(t)y = 0 \quad (4.5)$$

é uma EDO linear de primeira ordem. De fato, tomando duas soluções y_1 e y_2 e um número real α , temos que

$$\begin{aligned} (y_1 + \alpha y_2)' + p(t)(y_1 + \alpha y_2) &= y_1' + \alpha p(t)y_2 + \alpha p(t)y_2 \\ &= (y_1' + p(t)y_1) + \alpha(y_2' + p(t)y_2) \\ &= 0 + 0, \end{aligned}$$

onde, nesta última igualdade, foi usado que as funções y_1 e y_2 são soluções da EDO.

Observação 4.2. Note que a mesma equação com um termo q , independente de y , ou seja, a EDO

$$y' + p(t)y + q(t) = 0, \quad (4.6)$$

não é linear. Basta mostrar uma EDO desse tipo que não preserva a linearidade no conjunto solução. Como mostra o exemplo 4.6.

Exemplo 4.6. A EDO de primeira ordem

$$y' + y + 1 = 0 \quad (4.7)$$

tem como soluções $y_1(x) = e^{-x} - 1$, e $y_2(x) = -e^{-x} - 1$, mas a soma $y_1 + y_2$ não é solução. Isto mostra que a combinação linear de y_1 e y_2 com coeficientes iguais a 1 não é solução e portanto a EDO (4.7) não é linear.

Desafio!

Demonstre que y_1 e y_2 do exemplo 4.6 são soluções da EDO (4.7), mas que y_3 não é.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

Observação 4.3. Não toda combinação linear de soluções da EDO (4.6), é solução da mesma, com observamos no exemplo 4.6.

Por outro lado, é verdade que se y_1 e y_2 são soluções, então, uma combinação do tipo

$$\alpha y_1 + \beta y_2, \text{ com } \alpha + \beta = 1 \quad (4.8)$$

é uma solução.

O tipo de combinações lineares que verificam (4.8), ou seja, àquelas cujos coeficientes somam 1, são chamadas de **combinações lineares convexas**.

Desafio!

Demonstre a afirmação da observação 4.3.



Clique aqui para ver a resposta.

Outra equação linear, desta vez de segunda ordem, vem dada pela EDO

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (4.9)$$

De fato, sejam y_1 e y_2 soluções e α um número real qualquer. Então,

$$\begin{aligned} y_1 + \alpha y_2)'' + p(y_1 + \alpha y_2)' + q(y_1 + \alpha y_2) &= (y_1'' + p y_1' + q y_1) + \alpha (y_2'' + p y_2' + q y_2) \\ &= 0 + 0. \end{aligned}$$

De forma semelhante à EDO de primeira ordem, a equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y + f(x) = 0, \quad (4.10)$$

será não linear.

Desafio!

Mostre que uma conclusão semelhante a da observação 4.2 pode ser aplicada à EDO (4.10).



Clique aqui para ver a resposta.

Uma forma geral da EDO de primeira ordem pode ser escrita como

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x) = 0 \quad (4.11)$$

onde a , b e c são funções quaisquer que dependem de uma variável.

A equação linear associada à EDO (4.11), ou seja, a equação onde $c = 0$, é chamada **homogênea**. Caso a função a não se anule em um intervalo da reta, podemos escrever (4.11) da forma

$$y'(x) + p(x)y(x) + q(x) = 0,$$

já estudada anteriormente.

Da mesma forma, a expressão geral de uma EDO de 2ª ordem é dada por

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) + d(x) = 0, \quad (4.12)$$

onde a , b , c e d são funções quaisquer.

A EDO linear associada chama-se homogênea. Novamente, uma forma mais usada de (4.12) para o caso que a função a não se anule em um intervalo real, é a expressão

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) + f(x) = 0,$$

também já analisada anteriormente.

4.2 Equações de 1ª ordem e fator integrante

Nesta seção iremos estudar a família de soluções da EDO de 1ª ordem (4.11), transformada para a expressão do tipo

$$y'(x) + p(x)y(x) + q(x) = 0. \quad (4.13)$$



Porque estudamos a equação 4.13 no lugar da equação 4.11?

Note que no caso que a função $a(x)$ não se anula em nenhum ponto do domínio, basta dividir por esta função ambos os membros de 4.11 para obter 4.13.

Caso que a função $a(x)$ se anula, estudamos quais são esses pontos e resolver a EDO em intervalos aonde a função não se anula.

Vamos provar que toda solução de (4.13) pode ser escrita como

$$y(x) = Cy_1(x) + y_p(x), \quad (4.14)$$

onde $y_1(x)$ é uma solução da equação homogênea associada, isto é, a equação onde $q(x) = 0$ e $y_p(x)$ é uma solução particular da equação (4.13). De fato, esta equação pode ser escrita equivalentemente como

$$\frac{d}{dx} e^{I(x)} y(x) = e^{I(x)} q(x), \quad (4.15)$$

onde

$$I(x) = \int_0^x p(z) dz, \quad (4.16)$$

de onde temos que $I'(x) = p(x)$. A função $e^{I(x)}$ é chamada de **fator integrante**. Agora, integrando ambos os membros de (4.15) obtemos

$$e^{I(x)} y(x) - e^{I(a)} y(a) = \int_a^x e^{I(z)} q(z) dz, \quad (4.17)$$

ou seja,

$$y(x) = Cy_1(x) + y_p(x),$$

com $y_1(x) = e^{-I(x)}$, $y_p(x) = e^{-I(x)} \int_a^x e^{I(z)} q(z) dz$ e C uma constante.

Mostramos nos exemplos 4.7, 4.8 e 4.9 como é que a técnica do fator integrante funciona.

Exemplo 4.7. Vamos encontrar a solução da EDO

$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = x^3.$$

O fator integrante de acordo com (4.16) é

$$e^{I(x)} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln(x)}.$$

Note que tomamos a integral indefinida do expoente do fator integrante e como constante de integração indefinida, a constante nula. Também observe que devemos tomar $x > 0$ para que o logaritmo faça sentido. Assim temos que $e^{I(x)} = x$ e a EDO pode ser escrita como

$$(xy)' = x^4.$$

Integrando, obtemos $xy = \frac{1}{5}x^5 + C$, ou seja,

$$y = \frac{1}{5}x^4 + \frac{C}{x}.$$

Neste caso temos $y_1(x) = 1/x$ e $y_p(x) = \frac{1}{5}x^4$.

O gráfico da família de soluções é mostrado na figura 4.3

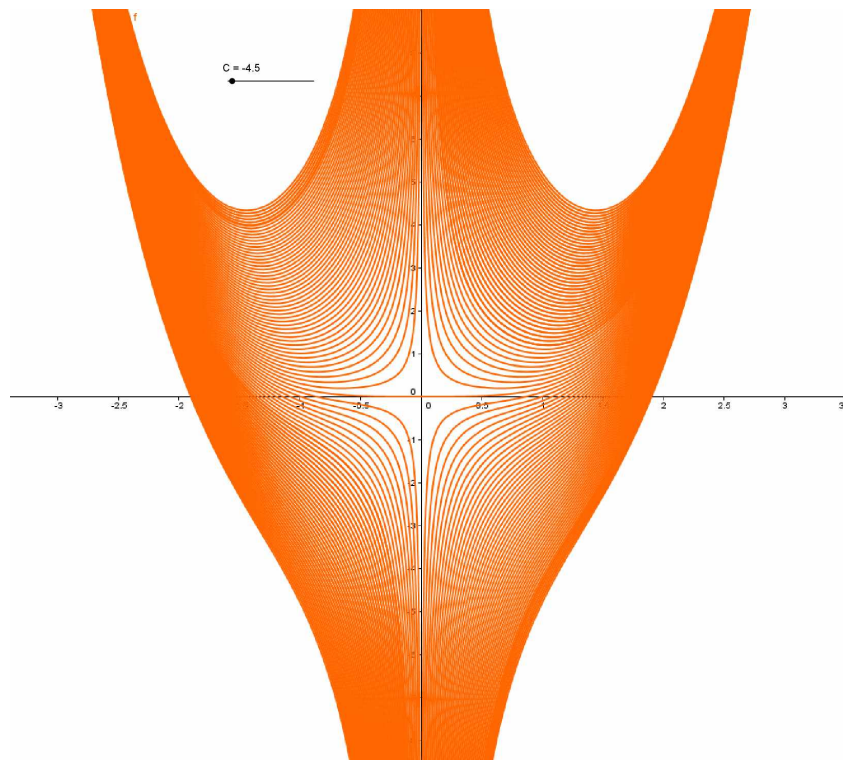


FIGURA 4.3: A família de soluções da EDO do exemplo 4.7.

Exemplo 4.8. Vamos usar novamente a técnica do fator integrante para encontrar a solução da EDO

$$y' - 2y = e^{-x}.$$

O fator integrante da EDO é

$$e^{I(x)} = e^{\int (-2)dx} = e^{-2x}.$$

Multiplicando por este fator a ambos os membros da igualdade, obtemos

$$(e^{-2x}y)' = e^{-2x} \cdot e^{-x},$$

e integrando a ambos os membros, chegamos a que

$$e^{-2x}y = \int e^{-3x} dx. \quad (4.18)$$

Como temos $\int e^{-3x} dx = -\frac{e^{-3x}}{3} + C$, onde C é uma constante arbitrária, ao multiplicar ambos os membros de (4.18) por e^{2x} , concluímos que

$$y(x) = -\frac{e^{-x}}{3} + Ce^{2x},$$

que representa a solução geral da EDO. O gráfico da família de soluções é mostrado na figura 4.4

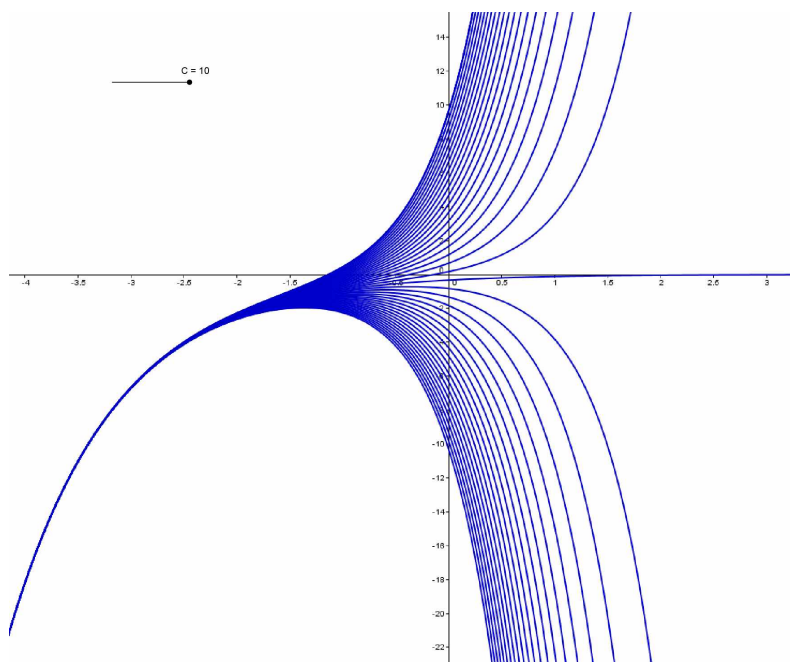


FIGURA 4.4: A família de soluções da EDO do exemplo 4.8.

Exemplo 4.9. Vamos encontrar a solução da EDO

$$(2 + x^2)y' + 2xy = 2x^2 \quad (4.19)$$

Esta EDO está na forma geral (4.11) com o coeficiente funcional de y' sendo $a(x) = 2 + x^2$. Como esta função não se anula para todo valor de x , então podemos dividir ambos os membros de (4.19), para obter

$$y' + \frac{2x}{2+x^2}y = \frac{2x^2}{2+x^2}, \quad (4.20)$$

com a qual podemos usar o método do fator integrante, que é

$$e^{I(x)} = e^{\int \frac{2x}{2+x^2} dx}.$$

Calculando a integral do expoente, tem-se

$$\int \frac{2x}{2+x^2} dx = \int \frac{1}{u} du,$$

onde $u = 2 + x^2$. Assim

$$\int \frac{2x}{2+x^2} dx = \ln(2 + x^2).$$

concluimos que o fator integrante é da forma $e^{\ln(2+x^2)} = 2 + x^2$. Multiplicando ambos os membros de (4.20), obtemos

$$((2 + x^2)y)' = (2 + x^2) \cdot \frac{2x^2}{2+x^2} = 2x^2 \quad (4.21)$$

Note que, sem usar o fator integrante, poderíamos ter observado que o primeiro membro da equação (4.19), é de fato a derivada de um produto, como ficou escrito na equação (4.21)! As vezes, fazendo uma análise antes da divisão pelo coeficiente $a(x)$ pode-se economizar alguns cálculos. De todas formas, note também que o método conduz para a solução correta.

Finalmente, integrando ambos os membros de (4.21), obtemos

$$(2 + x^2)y = 2\frac{x^3}{3} + C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Ou seja,

$$y = \frac{2x^3 + C_1}{3(2+x^2)},$$

é a solução geral da EDO. Note que nomeamos $3C = C_1$.

O gráfico da família de soluções é mostrado na figura 4.5.

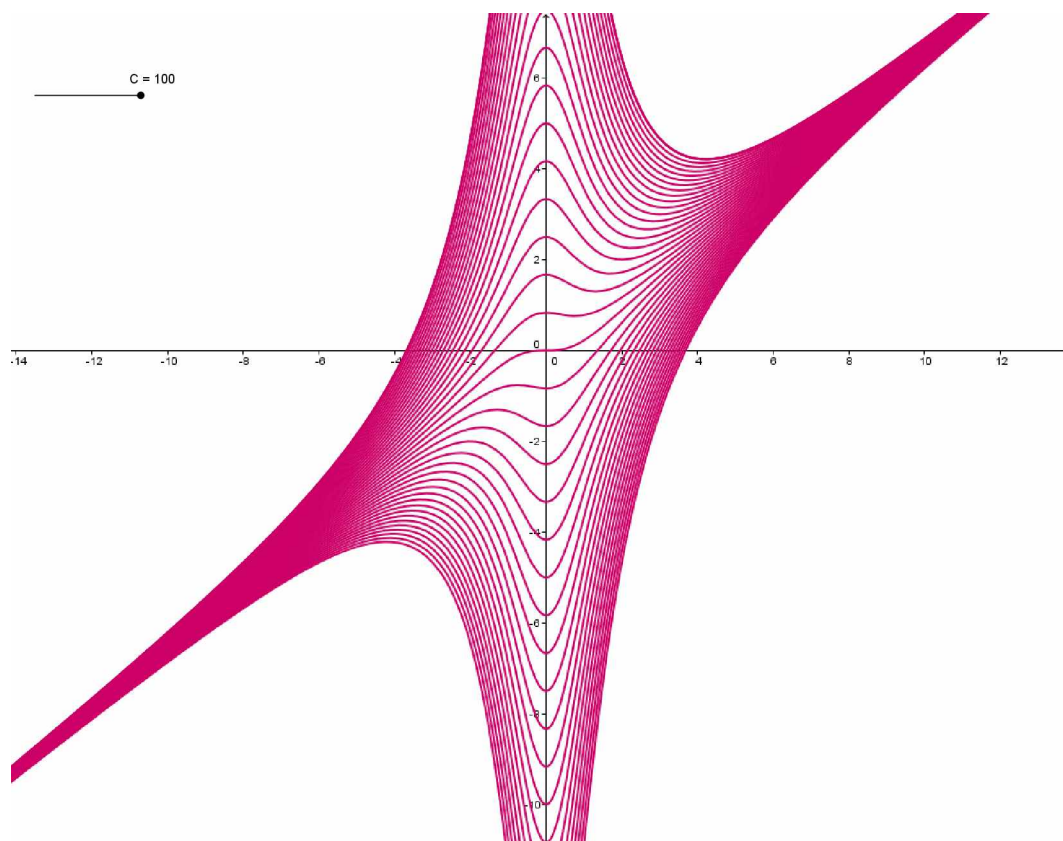


FIGURA 4.5: A família de soluções da EDO do exemplo 4.9.

Desafio!

Mostre que uma conclusão semelhante a da observação 4.2 pode ser aplicada à EDO (4.10) considerando a EDO

$$y'' + \cos(t) = 0, \quad (4.22)$$

calculando por integração direta (duas vezes) o conjunto solução e mostrando que soma de soluções pode não ser uma solução.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

4.3 Equações diferenciais de variáveis separáveis

As equações diferenciais de variáveis separáveis são um tipo específico de EDO cujas características facilitam o uso de uma metodologia de resolução. Vejamos quais são essas características na definição 4.5 a seguir.

Definição 4.5. A equação diferencial de primeira ordem (4.3) se diz de **variáveis separáveis** se a função $f(x, y)$ pode ser escrita da forma

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y). \quad (4.23)$$

Para resolver as EDO de variáveis separáveis se utiliza um procedimento baseado na regra da cadeia em uma variável. De fato, supondo que a função $h(y)$ é da forma

$$h(y) = \frac{1}{r(y)},$$

temos que

$$r(y)y' = g(x), \quad (4.24)$$

de onde, integrando ambos os membros de (4.24), obtemos

$$\int r(y(x))y'(x)dx = \int g(x)dx, \quad (4.25)$$

Sendo R e G primitivas de r e g , respectivamente, tem-se, pela regra da cadeia, que

$$(R(y(x)))' = R'(y(x))y'(x) = r(y(x))y'(x),$$

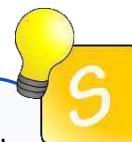
e integrando em x , concluímos que

$$R(y(x)) = \int r(y(x))y'(x)dx = G(x) + C$$

que nos dá uma expressão implícita da solução procurada.

Na **prática**, o procedimento descrito consiste em dividir a expressão em dois membros, um dos quais está relacionado com a variável x e outro com a variável y .

A seguir, integramos ambos os membros da igualdade, cada um com respeito da variável correspondente,



Mostramos no exemplo 4.10 a seguir a metodologia prática deste método.

Exemplo 4.10. Vamos encontrar a solução da EDO

$$y' = 3x^2y. \quad (4.26)$$

Note que aqui temos $r(y) = \frac{1}{y}$ e $g(x) = 3x^2$. Isto pode ser visto mais claramente escrevendo $y' = \frac{dy}{dx}$ e reescrevendo a equação (4.26) como

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2y,$$

e reunindo as variáveis do mesmo tipo, obtendo

$$\frac{1}{y}dy = 3x^2dx.$$

Assim, integrando a ambos os membros nas respectivas variáveis

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 3x^2dx,$$

que é equivalente a

$$\ln(y) = x^3 + C. \quad (4.27)$$

O gráfico da família de soluções é mostrado na figura 4.6

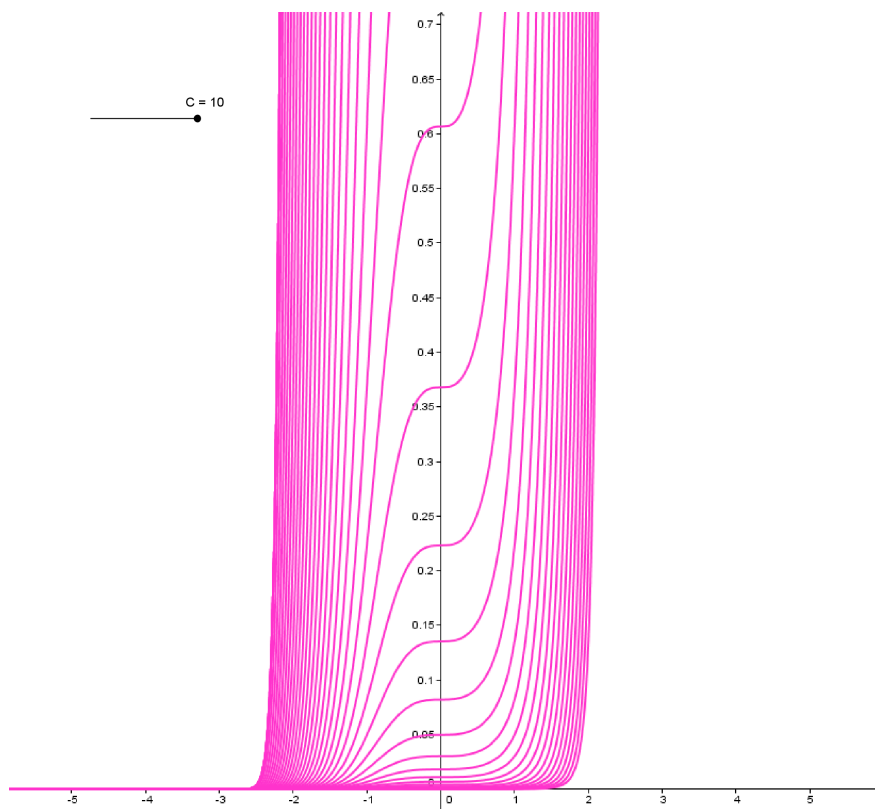


FIGURA 4.6: A família de soluções da EDO do exemplo 4.10.

A expressão (4.27) é a forma **implícita** da solução de EDO (4.26). No caso do exemplo 4.10, podemos particularmente achar a forma **implícita** elevando e ambos os membros de (4.27) para obter $y(x) = e^{x^3+C} = e^{x^3} \cdot e^C = C_1 e^{x^3}$. Note que nesta última expressão trocamos a constante e^C por C_1 .

Vamos mostrar no seguinte exemplo 4.11 um caso em que a solução só pode ser explicitamente expressada.

Exemplo 4.11. Vamos encontrar a solução da EDO

$$x^3 y' = \frac{x^2 + 5}{y^2 + 1}. \quad (4.28)$$

Seguindo a metodologia usada no exemplo 4.10, reescrevemos a equação (4.28) como

$$(y^2 + 1)dy = \frac{x^2 + 5}{x^3} dx,$$

separando as variáveis a cada lado dos membros da equação. Integrando a ambos os membros nas respectivas variáveis, tem-se

$$\int (y^2 + 1)dy = \int \frac{x^2 + 5}{x^3} dx,$$

que é equivalente a

$$\frac{y^3}{3} + y - \ln(x) + \frac{5}{x^2} + C = 0$$

solução implícita da equação equação (4.28).

Chegou a hora do desafio!

Desafio!

Ache a solução do PVI, $y' = -4xy$, $y(0) = 1$ e esboce seu gráfico.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

4.4 Equações exatas

Na seção 4.3 temos notado as duas formas da expressão da solução de uma EDO, uma que chamamos de implícita e pode ser escrita em forma geral como

$$\phi(x, y(x)) = C, \quad (4.29)$$

onde ϕ é uma função de duas variáveis, x , y e C uma constante. Derivando a equação (4.29) implicitamente em relação a x e usando a regra da cadeia para duas variáveis, temos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Chamando

$$M(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ e } N(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (4.30)$$

obtemos a EDO da forma

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0. \quad (4.31)$$

A expressão (4.31) é chamada de **forma diferencial** da EDO.

Na análise feita, vimos que se existir uma função de duas variáveis ϕ que verifique (4.30), então a equação (4.29) define implicitamente a família de soluções da equação (4.29). Daí a definição 4.31 a seguir.

Definição 4.6. A equação diferencial (4.31) se diz **exata** se existir uma função $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de duas variáveis x , y , com derivadas parciais contínuas, tais que verifiquem (4.30) para todo (x, y) no domínio em comum de M , N e as derivadas parciais de ϕ .

Note que a equação (4.31) pode ser expressa em forma equivalente, usando a notação $\frac{dy}{dx}$ e multiplicando simbolicamente por dx , obtendo

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Assim, o método de resolução de equações exatas é encontrar a função ϕ , chamado de **potencial** da EDO, por métodos de **integração parcial**, ou seja, integrando em uma variável e considerando a outra variável como “constante”. No exemplo 4.12 se ilustra como este método funciona.

Exemplo 4.12. Vamos encontrar a solução da EDO 1

$$(2x + 3y)dx + (3x + 2y)dy = 0, \quad (4.32)$$

onde, neste caso, temos $M(x, y) = 2x + 3y$ e $N(x, y) = 3x + 2y$. Gostaríamos encontrar ϕ que verifique (4.30), portanto, integrando com respeito a x a primeira igualdade de (4.30) obtemos

$$\phi(x, y) = \int (2x + 3y)dx = x^2 + 3yx + C(y),$$

onde $C(y)$ é uma função que envolve a variável y e constantes e que representam nesta integração parcial com respeito à x a “constante” de integração indefinida.

Derivando $\phi(x, y)$ com respeito a y , teríamos a segunda identidade de (4.30), ou seja,

$$\frac{\partial(x^2 + 3yx + C(y))}{\partial y} = N(x, y) = 3x + 2y, \text{ equivalente a } 3x + C'(y) = 3x + 2y.$$

Assim, concluímos que $C(y) = y^2 + C$, onde C é uma constante arbitrária. Finalmente temos que a solução da EDO (4.32) vem dada implicitamente por

$$0 = \phi(x, y(x)) = x^2 + y^2 + 3xy + C.$$

A família solução dependendo de C são as cônicas representadas na figura 4.7.

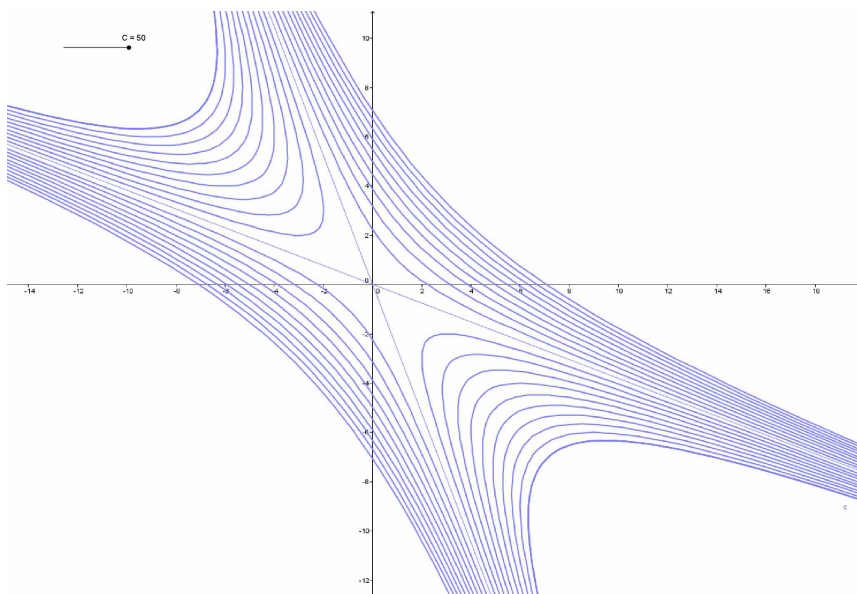


FIGURA 4.7: A família de soluções da EDO (4.32).

O problema deste método é que nem toda equação diferencial do tipo (4.31) é exata, como mostra o exemplo 4.13.

Exemplo 4.13. A equação diferencial

$$(y^2 + 1)dx + yxdy = 0$$

não é exata, pois, sendo $M(x, y) = y^2 + 1$ e $N(x, y) = yx$, a candidata a função ϕ teria que verificar

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 + 1,$$

de onde, integrando com respeito a x , obtém-se $\phi(x, y) = y^2x + x + C(y)$, onde $C(y)$ é uma função de y . Derivando parcialmente com respeito a y , obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2yx + C'(y),$$

e usando que ϕ deve verificar também

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = N(x, y),$$

teríamos que ter $2yx + C'(y) = yx$ ou equivalentemente $C'(y) = -yx$, que é uma contradição, desde que $C(y)$ é um função dependendo só de y .

Então, como podemos distinguir as que são das que não são exatas?



O seguinte teorema 4.1 nos dá a resposta para esta questão.

Teorema 4.1. Se M e N possuem derivadas parciais contínuas em um disco aberto, então a EDO (4.31) é exata se e somente se, para todo (x, y) do disco, verifica-se

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y), \quad (4.33)$$

Agora que temos um critério para saber se uma EDO é exata ou não, vejamos outro exemplo de como resolver uma equação desse tipo.

Exemplo 4.14. A EDO dada por

$$3x^2ydx + x^3dy = 0, \quad (4.34)$$

é exata, pois temos

$$\frac{\partial(3x^2y)}{\partial y} = 3x^2, \text{ e } \frac{\partial x^3}{\partial x} = 3x^2.$$

Calculando o potencial $\phi(x, y)$ da forma diferencial (4.34), consideramos a integral com respeito a x de $M(x, y) = 3x^2y$, obtendo

$$\int 3x^2ydx = x^3y + C(y).$$

Derivando $x^3y + C(y)$ com respeito a y , chegamos à expressão $x^3 + C'(y)$ que deve ser igual a $N(x, y) = x^3$, portanto devemos ter $C'(y) = 0$. O que nos leva a conclusão que $C(y) = C$, onde C é uma constante arbitrária. Finalmente, a expressão implícita da solução vem dada por $0 = \phi(x, y(x)) = x^3y + C$, que é equivalente à expressão explícita $\frac{C}{x^3}$, para todo $x \neq 0$ e cujo gráfico é ilustrado na figura 4.8.

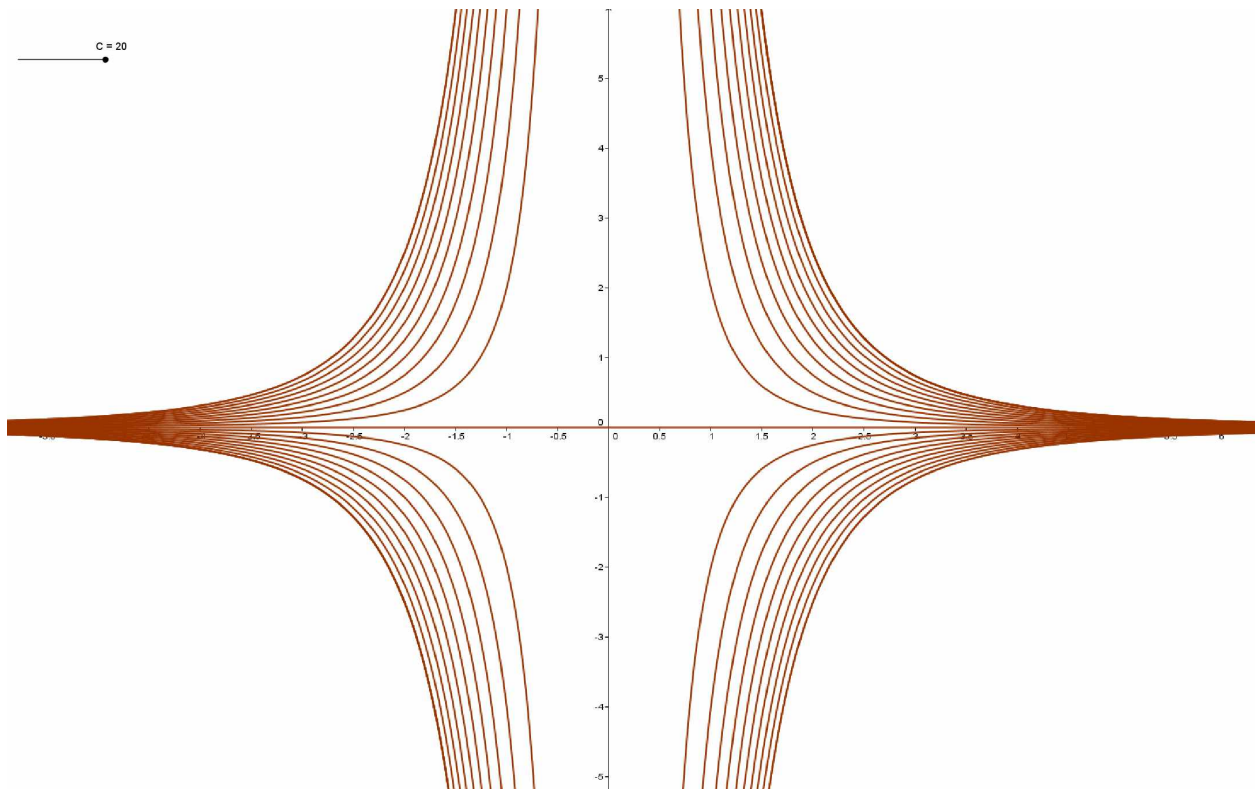


FIGURA 4.8: A família de soluções da EDO (4.34).

Observação 4.4. Note que a EDO do exemplo 4.13 multiplicada pelo fator x a ambos os membros da igualdade, se transforma na EDO exata

$$(xy^2 + x)dx + yx^2dy = 0, \quad (4.35)$$

Definição 4.7. O fator que se multiplica uma EDO não exata para transformá-la em uma EDO exata é chamado de **fator integrante** de EDO não exata.

Desafio!

Mostre que, de fato, o fator x é fator integrante da EDO (4.35), mostrando que a equação obtida (4.35) é exata e a seguir, resolva-a.



Clique aqui para ver a resposta.

Observação 4.5. Existem métodos para calcular o fator integrante de uma EDO não exata. Uns dos métodos que é muito usado é o de encontrar um fator integrante de uma variável.



Pesquise na bibliografia e na internet sobre como calcular o fator integrante de uma variável de uma EDO não exata. Leve a discussão para o forum no Moodle.

4.5 Equações diferenciais de 2ª ordem homogêneas e não homogêneas com coeficientes constantes

Uma equação diferencial de 2ª ordem pode ser expressa em forma geral como

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x), \quad (4.36)$$

onde a , b e c , são funções contínuas. No caso que $a(x)$ não se anule em nenhum ponto do domínio, a equação (4.36) é equivalente à equação

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad (4.37)$$

que é a expressão mais comum para este tipo de equações. Quando o termo fonte f é identicamente nulo, ou seja, da forma

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \quad (4.38)$$

a EDO (4.37) é linear e chamada de homogênea associada a (4.37), em analogia com as EDO de primeira ordem.

Também como no caso da EDO linear de primeira ordem, todas as soluções, ou como chamamos mais comumente, a solução geral de (4.37) vem dada por

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x) \quad (4.39)$$

onde y_1 , y_2 são soluções linearmente independentes da **correspondente** equação homogênea, a função y_p é uma solução particular da equação e C_1 , C_2 são constantes arbitrárias.

Esta afirmação será entendida e demonstrada a partir das seguintes proposições e definições.

Proposição 4.1. Quando f é a função nula em (4.37), então a EDO é linear. Ou seja, se y_1 e y_2 são soluções de (4.37) para $f = 0$ então qualquer combinação linear, $C_1y_1 + C_2y_2$ também é solução.

Esta proposição segue a mesma demonstração que no caso da EDO de primeira ordem. Esta linearidade é também conhecida como **Princípio de Superposição**. Da mesma forma que para as EDO de primeira ordem linear, a EDO de segunda ordem linear é dita homogênea e a cada EDO homogênea temos associada uma não linear com o termo fonte f não se anulando para todo valor do domínio.

Lembrando da Álgebra linear, em um espaço vetorial se todo vetor do espaço pode ser escrito como combinação linear de dois vetores v_1, v_2 , então esses vetores são **geradores** do espaço. No caso em que esses vetores são linearmente independentes, então v_1, v_2 formam uma base do espaço.

A partir do princípio de superposição, vemos que todo par de soluções y_1, y_2 geram o subespaço das soluções S da EDO (4.37). Vamos demonstrar na proposição 4.2, que é possível encontrar uma base para S constituída por duas soluções linearmente independentes.

Proposição 4.2. *Sejam y_1 e y_2 duas soluções da equação (4.37) tais que verificam*

$$\text{Determinante} \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \neq 0, \quad (4.40)$$

para algum número real x_0 . Então, para todo par de condições iniciais (a, b) , o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \\ y(x_0) = a, y'(x_0) = b, \end{cases} \quad (4.41)$$

tem uma única solução da forma

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Demonstração: Vamos determinar as constantes C_1 e C_2 para os quais $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ seja solução do PVI (4.41). No ponto x_0 , usando as condições iniciais, temos que

$$\begin{aligned} a &= y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) \text{ e} \\ b &= y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0). \end{aligned}$$

Note que este sistema tem como incógnitas C_1 e C_2 e tem como determinante dos coeficientes o determinante em (4.40). Logo, se esse determinante é diferente de zero, o sistema tem uma única solução (C_1, C_2) , mostrando o afirmado. ■

Definição 4.8. *Dadas duas funções f e g , chamamos de **determinante Wronskiano** de f e g em x_0 ao determinante*

$$\begin{vmatrix} f(x_0) & g(x_0) \\ f'(x_0) & g'(x_0) \end{vmatrix}$$

e o denotamos como $W[f, g](x_0)$.

Observação 4.6. Note que $W[f, g](x_0)$ é um número real para cada valor de x_0 e portanto $W[f, g](\cdot)$ define uma função real.

Exemplo 4.15. Dadas as funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ então o Wronskiano de f e g em 0 é o determinante

$$\begin{vmatrix} \text{sen}(0) & \cos(0) \\ \cos(0) & -\text{sen}(0) \end{vmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Exemplo 4.16. Em forma mais geral, o Wronskiano das funções $g(x) = \cos(x)$ e $f(x) = \text{sen}(x)$ para qualquer valor real x é

$$\begin{vmatrix} \cos(x) & \text{sen}(x) \\ -\text{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1,$$

ou seja, o $W[\cos, \text{sen}] = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pela observação 4.6 temos então que a função real $W[\cos, \text{sen}]$ é constante igual a 1.

Definição 4.9. Duas soluções y_1 e y_2 da equação homogênea verificando $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$, para algum x_0 do domínio em comum, são chamadas de soluções **fundamentais**.

Observação 4.7. Note que, de acordo com a definição 4.9, o fato de que duas soluções sejam fundamentais em um ponto, pela continuidade, serão fundamentais em um intervalo. Assim, de acordo com a proposição 4.1, as soluções fundamentais constituem uma base do espaço solução nesse intervalo.

Portanto, para encontrar a solução geral y da EDO segunda ordem homogênea, basta encontrar uma base do espaço solução e a solução será uma combinação linear das soluções fundamentais.

A seguir, vamos mostrar a afirmação de que toda solução da EDO (4.37) tem como solução geral a função dada por (4.39).

Proposição 4.3. Se y_p é uma solução particular da equação (4.37) e y_1, y_2 soluções fundamentais da equação homogênea associada, então a solução geral da equação não homogênea é da forma (4.39).

Demonstração: Seja y uma solução da EDO não homogênea (4.37) e considere a função $S = y - y_p$. Vamos provar que S é solução da equação homogênea associada. De fato, derivando S , obtemos que $S' = y' - y'_p$ e derivando novamente, $S'' = y'' - y''_p$. Assim,

$$S'' + p(x)S' + q(x)S = y'' - y''_p + p(x)(y' - y'_p) + q(x)(y - y_p),$$

ou seja,

$$S'' + p(x)S' + q(x)S = \underbrace{(y'' + p(x)y' + q(x)y)}_{f(x)} - \underbrace{(y''_p + p(x)y'_p + q(x)y_p)}_{f(x)} = f - f = 0,$$

o que mostra o afirmado. Portanto, S pode ser escrita como combinação linear das duas soluções fundamentais, ou seja, existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$y - y_p = S = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

de onde concluímos (4.39). ■

Usaremos estas afirmações e conclusões para o caso particular de que os coeficientes da EDO (4.37) sejam constantes.

COEFICIENTES CONSTANTES

Nesta subseção vamos considerar o caso especial onde os coeficientes da EDO de segunda ordem (4.37) tem coeficientes a , b e c constantes, da forma

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x). \quad (4.42)$$

Este tipo de equação é um modelo das vibrações mecânicas, onde a variável a ser usada é t no lugar de x , pois o modelo evolui com o tempo. A função $y = y(t)$ representa o deslocamento desde o ponto de equilíbrio. De fato, a equação do movimento oscilatório harmônico vem dada por

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\omega^2 y(t). \quad (4.43)$$

Acrescentando uma força de amortecimento proporcional à velocidade dy/dt e uma força motriz $f(t)$, periódica ou não, obtém-se

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\omega^2 y(t) - \gamma \frac{dy(t)}{dt} + f(t),$$

que é uma equação de segunda ordem com coeficientes constantes.

Voltando para a equação (4.42) com x como variável, o primeiro passo para resolver este tipo de equação é achar uma solução da equação homogênea associada dada por

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0. \quad (4.44)$$

Esta equação tem como solução uma função exponencial da forma

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

para certos valores de λ que iremos determinar. De fato, derivando y , obtemos

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

Derivando agora y' , chegamos a

$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

de forma que, substituindo na equação (4.44), tem-se

$$ay''(x) + by' + cy = (a\lambda^2 + b\lambda + c)y$$

que se anula se

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \quad (4.45)$$

Definição 4.10. A equação (4.45) é chamada de **equação característica** associada à EDO de segunda ordem com coeficientes constantes (4.44).

Concluimos que $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$, onde λ_1 e λ_2 são raízes da equação característica associada à EDO de segunda ordem de coeficientes constantes.

Vamos mostrar que essas soluções são linearmente independentes. De fato, calculando o Wronskiano de y_1 e y_2 em qualquer ponto x_0 , obtemos

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x_0} & e^{\lambda_2 x_0} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x_0} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x_0} \end{vmatrix} = e^{\lambda_2 x_0} e^{\lambda_1 x_0} (\lambda_2 - \lambda_1),$$

que será diferente de zero *para todo* x_0 se $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Pela proposição 4.1, temos que a solução da equação (4.44) é para o caso que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ é

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Se λ é a única raiz da equação característica, então temos uma solução, dada por $y_1(x) = e^{\lambda x}$ e uma outra solução dada por $y_2(x) = x e^{\lambda x}$ como soluções da EDO. De fato, já provamos que

$y_1(x) = e^{\lambda x}$ é solução. Mostremos que também y_2 é solução. Derivando duas vezes y_2 , obtemos

$$y_2'(x) = \lambda x e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda x + 1),$$

e

$$y_2''(x) = \lambda(\lambda x + 1)e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}(\lambda x + 2),$$

Substituindo na equação, tem-se

$$a\lambda(\lambda x + 2)e^{\lambda x} + b(\lambda x + 1)e^{\lambda x} + cxe^{\lambda x} = e^{\lambda x}(x(a\lambda^2 + b\lambda + c) + 2a\lambda + b) = 0,$$

esta última afirmação sendo verdadeira do fato de ser λ raiz da equação característica e por ser raiz dupla temos $\lambda = \frac{-b}{2a}$. Isto provou a afirmação. Finalmente temos que uma solução geral da equação será

$$y_c(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

Vejamos alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 4.17. A equação $y'' + 3y' + 2y = 0$, tem como equação característica

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

com raízes $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, portanto a solução geral vem dada por

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

Exemplo 4.18. A equação $y'' + 2y' + y = 0$ tem como equação característica

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

que possui uma raiz dupla igual a $\lambda = -1$. Portanto tem como solução geral

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}.$$

No caso que a equação característica tenha raízes complexas, veremos que a solução geral da EDO de segunda ordem homogênea é uma combinação linear de produtos da função exponencial com senos ou cossenos. Para isso vamos estudar a conhecida **fórmula de Euler**. Será motivo de estudo da próxima subseção 4.5.1.

4.5.1 A FÓRMULA DE EULER

Na teoria dos números complexos, podemos definir funções de domínio complexo, como por exemplo a função exponencial

$$f(t) = e^{\omega t}$$

onde $r = a + ib$. Para definir essa função, tem-se a ideia de preservar as propriedades da função exponencial de domínio real, ou seja

$$e^{(a+ib)t} = e^{at} \cdot e^{ibt}, \text{ e} \quad (4.46)$$

$$f'(t) = r e^{rt}. \quad (4.47)$$

Portanto, com esta imposição, a função $g(t) = e^{\omega t}$, ω um número real, é solução da equação

$$y'' + \omega^2 y = 0. \quad (4.48)$$

De fato, pela propriedade (4.46), temos que $g'(t) = i\omega e^{i\omega t}$, $g''(t) = (i\omega)^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 g(t)$, ou seja, $g''(t) + \omega^2 g(t) = 0$, o que mostra a afirmação.

Mostremos agora que $y_1(t) = \cos(\omega t)$ e $y_2(t) = \sin(\omega t)$ são soluções fundamentais da equação (4.48). Primeiramente, observemos que são, de fato, soluções. Temos

$$y_1'(t) = -\omega \sin(\omega t), \text{ e } y_1''(t) = -\omega^2 \cos(\omega t);$$

$$y_2'(t) = \omega \cos(\omega t), \text{ e } y_2''(t) = -\omega^2 \sin(\omega t).$$

Assim,

$$y_1'' + \omega^2 y_1 = -\omega^2 \cos(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t) = 0$$

e

$$y_2'' + \omega^2 y_2 = -\omega^2 \sin(\omega t) + \omega^2 \sin(\omega t) = 0,$$

mostrando que y_1 e y_2 , são soluções da equação.

Desafio!

Mostre que as funções y_1 e y_2 , são soluções fundamentais. Note que isto mostra que elas formam uma base do espaço solução da equação (4.48).



Clique aqui para ver a resposta.

A seguir vamos resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0; \\ y(0) = 1, y'(0) = i\omega, \end{cases} \quad (4.49)$$

De acordo com o demonstrado no desafio anterior, encontraríamos uma única solução dada por

$$y(t) = e^{i\omega t} = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \text{sen}(\omega t), \quad (4.50)$$

onde as constantes C_1 e C_2 são determinadas a partir das condições iniciais. De fato, substituindo $t = 0$ na equação (4.50), concluímos que $C_1 = 1$. Agora, derivando a equação (4.50) em relação a t , obtemos que

$$i\omega e^{i\omega t} = -C_1 \omega \text{sen}(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t),$$

de onde, avaliando a expressão para $t = 0$, chegamos a que o valor de C_2 é o número complexo i . Finalmente, substituindo os valores das constantes na expressão da solução (4.50), obtemos

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \text{sen}(\omega t).$$

Observação 4.8. Observe que usando as propriedades da exponencial (4.46) e (4.47), podemos concluir que

$$e^{(a+ib)t} = e^{at} e^{ibt} = e^{at} (\cos(bt) + i \text{sen}(bt)). \quad (4.51)$$

Também note que se tomarmos $t = 1$, obtemos a fórmula

$$e^{(a+ib)} = e^a (\cos(b) + i \text{sen}(b)), \quad (4.52)$$

conhecida como **fórmula de Euler**.



4.5.2 A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA COM RAÍZES COMPLEXAS

Consideremos a equação de segunda ordem homogênea de coeficientes constantes

$$y''(t) + y(t) + 1 = 0. \quad (4.53)$$

Temos que a equação característica vem dada por

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0,$$

que possui raízes complexas $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. A solução geral do tipo complexa é

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{1}{2}t + i\frac{1}{2}\sqrt{3}t} + C_2 e^{-\frac{1}{2}t - i\frac{1}{2}\sqrt{3}t} \quad (4.54)$$

onde C_1 e C_2 são números complexos constantes e arbitrários. A solução geral **real** pode ser obtida impondo a condição que $C_2 =$ conjugado de C_1 , ou seja, se $C_1 = \frac{1}{2}(A - iB)$, com A e B números reais constantes, então

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + B \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \right), \quad (4.55)$$

ou seja é uma combinação linear das funções de domínio real

$$y_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$$

e

$$y_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right).$$

Desafio!

Mostre que as funções y_1 e y_2 , são soluções fundamentais para todo t .



Clique aqui para ver a resposta.

Exemplo 4.19. Vamos achar as soluções da EDO homogênea

$$y'' + 3y' + 4y = 0. \quad (4.56)$$

A equação característica associada a tem como raízes os números complexos conjugados $-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$. Assim, a solução geral vem dada por

$$y(x) = e^{-\frac{3}{2}t} \left(C_1 \cos \left(\frac{\sqrt{7}}{2}t \right) + C_2 \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{7}}{2}t \right) \right).$$

O CASO NÃO HOMOGÊNEO

O caso da EDO de segunda ordem de coeficientes constantes não homogênea, é dada por

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x), \quad (4.57)$$

onde f é uma função dada.

De acordo com o visto na proposição 4.3, precisamos de uma solução particular y_p da EDO. Dependendo da expressão de f , poderemos concluir qual seria a forma da solução y_p . O método que vamos descrever é conhecido como o método dos coeficientes indeterminados que estudaremos isto a seguir.

4.5.3 O MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Este método de resolução consiste em tentar descobrir soluções particulares de EDO não homogêneas aonde o termo fonte f tem algumas das características descritas a seguir.

Se f é uma função polinomial então y_p também será uma função do tipo polinomial, com grau maior ou igual que o grau de f .

Exemplo 4.20. Considere a equação

$$y'' + 3y' + 2y = 2x + 3, \quad (4.58)$$

tentamos a solução $y_p = Ax + B$, onde os números A e B são valores a determinar. Como queremos impor que seja solução, calculamos as derivadas, obtendo $y'_p = A$ e $y''_p = 0$. Substituindo na equação (4.58), tem-se

$$y''_p + 3y'_p + 2y_p = 3A + 2Ax + 2B,$$

que deve ser igual a $2x + 3$ para ser solução de (4.58). Assim, para que a igualdade seja válida para todo x devemos ter $3A + 2B = 3$ e $2A = 2$, de onde obtemos $A = 1$ e $B = 0$, ou seja, $y_p = x$. Para obter a solução geral, usamos a proposição 4.3, achando as soluções fundamentais da equação homogênea associada, ou seja, as soluções fundamentais de

$$y'' + 3y' + 2y = 0,$$

cujas equação característica tem como raízes -1 e -2 . Portanto,

$$y_c = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Assim, a solução geral de (4.58) é

$$y(x) = y_c + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + x.$$

Agora é sua vez de tentar resolver a EDO do desafio usando o método dos coeficientes indeterminados para o caso do termo fonte f ser um polinômio.

Desafio!

Resolva a EDO $y'' - 3y = x^3$ e esboce o gráfico da função da família que passa pela origem com tangente horizontal.



Clique aqui para ver a resposta.

Se f é uma função exponencial então y_p será uma função proporcional a f .

Exemplo 4.21. Considere a equação

$$y'' + 3y' + 2y = e^x. \quad (4.59)$$

Tentamos a solução $y_p = Ce^x$, onde C é uma constante.

De fato, derivando $y_p = Ce^x$, obtemos

$$y'_p = Ce^x \text{ e } y''_p = Ce^x,$$

de onde, substituindo na equação (4.59), chegamos à identidade

$$(1 + 3 + 2)Ce^x = e^x.$$

Portanto, devemos ter $C = \frac{1}{6}$, que é a constante de proporção procurada. Finalmente, concluímos que

$$y_p(x) = \frac{1}{6}e^x.$$

Assim, a solução geral da equação é

$$y(x) = y_c + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \frac{1}{6}e^x.$$

Desafio!

Resolva a EDO $y'' - 3y = 2e^{-3x}$.



Clique aqui para ver a resposta.

Observação 4.9. No caso em que f é uma solução da EDO homogênea, este método não funciona. Vejamos no exemplo 4.22 de como resolver este problema.

Exemplo 4.22. De fato, considere uma EDO nas condições da observação 4.9, temos a equação

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}. \quad (4.60)$$

Tentamos a solução particular

$$y_p = Cxe^{-x}.$$

Derivando esta função, obtemos

$$y'_p = Ce^{-x} - Cxe^{-x} \text{ e } y''_p = -2Ce^{-x} + Cxe^{-x}.$$

Substituindo na equação (4.60), temos que

$$y''_p + 3y'_p + 2y_p = Cxe^{-x}(1 - 3 + 2) + Ce^{-x}(-2 + 3) = e^{-x}.$$

Assim, concluímos que

$$C = 1 \text{ e } y_p = xe^{-x}.$$

A solução geral pode ser escrita como

$$y = (C_1 + x)e^{-x} + C_2e^{-2x}$$

No caso que f seja da forma $\cos(x)$ ou $\sin(x)$, então a solução particular $y_p(x)$ pode ser tratada como uma combinação linear do tipo $A \cos(x) + B \sin(x)$.

Exemplo 4.23. Considere uma EDO

$$y'' + 3y' + 2y = 2 \cos(x), \quad (4.61)$$

tentamos a solução particular da forma

$$y_p = A \cos(x) + B \sin(x).$$

Derivando esta função, obtemos

$$y'_p = -A \sin(x) + B \cos(x) \text{ e } y''_p = -A \cos(x) - B \sin(x)$$

que, substituindo na equação (4.61), resulta em

$$\begin{aligned} y''_p + 3y'_p + 2y_p &= -A \cos(x) - B \sin(x) \\ &\quad -3A \sin(x) + 3B \cos(x) \\ &\quad +2A \cos(x) + 2B \sin(x) \end{aligned}$$

e assim $A = \frac{1}{5}$ $B = \frac{3}{5}$ e $y_p = \frac{1}{5} \cos(x) + \frac{3}{5} \sin(x)$. A solução geral pode ser escrita como

$$y = \frac{1}{5} \cos(x) + \frac{3}{5} \sin(x) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x}.$$

Desafio!

Encontre uma solução particular da EDO $y'' - 3y = 7 \sin(2x)$.



[Clique aqui para ver a resposta.](#)

4.6 Aplicações das EDO de 1ª e 2ª ordem

Nesta seção iremos ilustrar com exemplos algumas das aplicações das equações diferenciais em várias áreas de conhecimento. Os processos de interpretar as leis da natureza, de origem tecnológica ou até em áreas econômicas ou financeiras, em equações diferenciais se traduzem em termos como taxa de variação para a derivada primeira e em aceleração para a derivada segunda. Em geral estes modelos dependem no tempo e a variável independente mais usada é a variável t .

4.6.1 APLICAÇÕES DAS EDO DE 1ª ORDEM

Veremos a seguir vários exemplos de aplicações das equações diferenciais de primeira ordem. Se apresenta em geral um modelo e a seguir a resolução pelos métodos estudados no texto básico.

Exemplo 4.24. A população de mosquitos em determinada área cresce a uma taxa proporcional à população atual e, na ausência de outros fatores, a população dobra a cada semana. Existem inicialmente, 200.000 mosquitos na área e os predadores (pássaros, morcegos, etc.) comem 20.000 mosquitos por dia. Determine a população de mosquitos na área em qualquer instante t .

Indique por $P(t)$ a população no instante t , medido em semanas. Na ausência de outros fatores, a população cresce a uma taxa proporcional à população atual e, em termos de equações, isso significa que

$$\frac{d}{dt}P(t) = rP(t)$$

onde $r > 0$ é a taxa de crescimento.

Indicaremos por $P_0 = 200.000$ a população inicial. A partir da EDO dada, podemos dividir ambos os membros por $P(t)$ e obter

$$\frac{\frac{d}{dt}P(t)}{P(t)} = r$$

Note que, o primeiro membro da igualdade é a derivada da composta $\ln(P(t))$, assim

$$\frac{d}{dt}[\ln(P(t))] = r.$$

Integrando-se ambos os membros, teremos

$$\ln(P(t)) = rt + k_1;$$

equivalentemente $P(t) = e^{rt+k_1} = e^{k_1} \cdot e^{rt}$, donde $P(t) = P_0 e^{rt}$ com $P(0) = P_0 = e^{k_1}$.

Logo a solução geral da EDO acima será

$$P(t) = P_0 e^{rt};$$

Além disso, como a população dobra a cada unidade de tempo, segue-se que $P_0 e^r = 2P_0$ de onde segue-se que $r = \ln(2)$.

Considere agora a ação dos predadores, que comem 20.000 mosquitos/dia, isto é, $R = 140.000$ mosquitos/semana. Nesse caso, a equação passa a ser

$$\frac{d}{dt}P(t) - rP(t) = -R$$

a qual se trata de uma EDO linear de primeira ordem.

Usando o fator integrante, $\mu(t) = e^{\int -r dt}$, ou seja, $\mu(t) = e^{-rt}$ obtém-se que a solução da equação acima, com $P(0) = P_0$, é dada por

$$P(t) = \frac{R}{r} - \frac{e^{rt}(R - P_0 r)}{r}$$

Substituindo os valores de $P_0 = 200.000$, de $R = 140.000$ e de $r = \ln(2)$ obtém-se a expressão

$$P(t) = 201977,3057 - 1977,3057 e^{\ln(2)t}$$

A figura 4.9 ilustra o gráfico dessa função. Observe que a população de mosquitos é sempre decrescente, e se extingue em aproximadamente $t_0 = 6,6745$ semanas, pois $P(t) = 0$ equivale à $1977,3057 e^{\ln(2)t} = 201977,3057$.

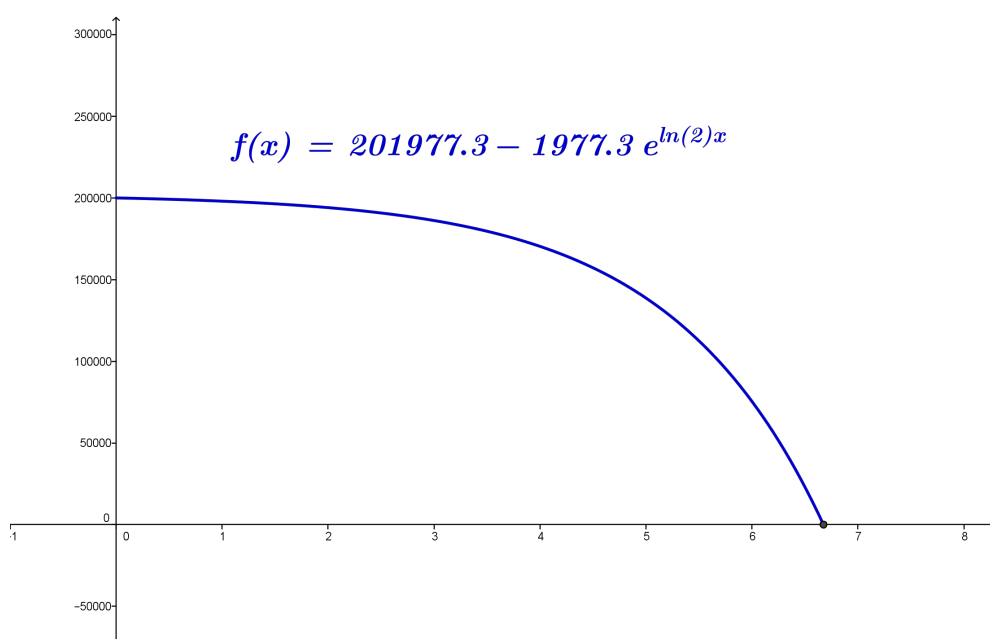


FIGURA 4.9: A função solução do problema do exemplo 4.24.

Exemplo 4.25. Um pequeno lago contém inicialmente 1.000.000 galões de água e uma quantidade Q desconhecida de um produto químico indesejável. O lago recebe água contendo 0,01 grama dessa substância por galão a uma taxa de 300 galões por hora. A mistura sai à mesma taxa, de modo que a quantidade de água no lago permanece constante. Suponha que o produto químico esteja distribuído uniformemente no lago.

- (a) Vamos escrever uma equação diferencial para a quantidade de produto químico no lago em um instante qualquer.
- (b) Iremos resolver a EDO para a condição inicial $Q(0) = 10.000$

Indicaremos por t o tempo (em horas) e por $Q(t)$ a quantidade do produto químico (em gramas) no tempo t . Por um lado, a derivada $Q'(t)$ fornece a variação da quantidade $Q(t)$ por unidade de tempo (por hora). Por outro lado, essa mesma variação pode ser calculada como segue. Entram 300 galões por hora e cada galão contém 0,01 grama, logo entram $300 \times 0,01$ gramas do produto por hora no lago. A mistura sai à mesma taxa de 300 galões por hora e a uma concentração de $Q(t)/1.000.000$ gramas por galão, logo saem $300 \times Q(t)/1.000.000$ gramas do produto por hora do lago. Assim, a variação da quantidade $Q(t)$ por unidade de tempo é a diferença entre o que entra e o que sai por hora no lago, isto é, a variação é dada por

$$300 \times 0,01 - 300 \times Q(t)/1.000.000$$

Igualando essa variação com a derivada de $Q(t)$, obtém-se a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}Q(t) = 300 \times [0,01 - Q(t)/1.000.000]$$

ou equivalentemente,

$$\frac{d}{dt}Q(t) + \frac{300}{10^6}Q(t) = 300[0,01].$$

Ou ainda,

$$\frac{d}{dt}Q(t) + \frac{3}{10^4}Q(t) = 3. \quad (4.62)$$

Calculando o fator integrante, obtém-se:

$$\mu(t) = e^{\frac{3}{10^4}t}.$$

Multiplicando ambos os membros da EDO (4.62) por $\mu(t)$ teremos

$$e^{\frac{3}{10^4}t} \frac{d}{dt}Q(t) + e^{\frac{3}{10^4}t} \frac{3}{10^4}Q(t) = 3e^{\frac{3}{10^4}t}. \quad (4.63)$$

Note que, o primeiro membro da EDO (4.63) pode ser reescrito como uma derivada do produto do fator integrante pela função solução $Q(t)$ e ficaremos com

$$\frac{d}{dt}[e^{\frac{3}{10^4}t}Q(t)] = 3e^{\frac{3}{10^4}t}. \quad (4.64)$$

E assim, integrando-se (4.64) ambos os membros teremos

$$e^{\frac{3}{10^4}t}Q(t) = 3 \left(\frac{10^4}{3} \right) e^{\frac{3}{10^4}t} + k,$$

e isolando $Q(t)$, obteremos

$$Q(t) = 10^4 + k \cdot e^{-\frac{3}{10^4}t}.$$

Finalmente, usando que $Q(0) = 10000 = 10^4$, tem-se $10^4 = 10^4 + k \cdot e^0$, donde $k = 0$.

Logo, $Q(t) = 10^4$, é a solução da EDO. Note que a solução é uma função constante!

Desafio!

Use o caderno para resolver o problema: Um material radioativo, tal como um dos isótopos de tório, o tório-234, se desintegra a uma taxa proporcional à quantidade presente. Se $Q(t)$ é a quantidade presente no instante t , então $\frac{d}{dt}Q(t) = -rQ(t)$, onde $r > 0$ é a taxa de decaimento.

- Se 100 mg de tório-234 decaiem a 82,04 mg em uma semana, determine a taxa de decaimento r .
- Encontre uma equação para a quantidade de tório-234 presente em qualquer instante t .
- Encontre o tempo necessário para que o tório-234 decaia à metade da quantidade original.



Clique aqui para ver a resposta.

Exemplo 4.26. Suponha que uma população $P(t)$ de ratos do campo satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}P(t) = \frac{1}{2}P(t) - 450 \text{ com } t \text{ considerado em meses.}$$

- a) Encontre o instante em que a população é extinta se $P(0) = 850$.
- b) Encontre o instante de extinção se $P(0) = P_0$, com P_0 no intervalo $(0, 900)$.
- c) Encontre a população inicial se a população é extinta em um ano.

O primeiro passo é obter a solução geral da equação. Para isso, observe que ela é equivalente à equação

$$\frac{\frac{d}{dt}P(t)}{P(t) - 900} = \frac{1}{2}. \quad (4.65)$$

Logo, integrando em ambos os lados (4.65), obtém-se que

$$\ln(|P(t) - 900|) = \frac{1}{2}t + C;$$

onde C é uma constante de integração. Isolando o valor de $P(t)$, e considerando que $P(t) < 900$, teremos

$$\ln(900 - P(t)) = \frac{1}{2}t + C,$$

donde

$$900 - P(t) = e^{\frac{1}{2}t}e^C.$$

Concluindo que

$$P(t) = 900 - k \cdot e^{\frac{1}{2}t},$$

onde k é outra constante. Essa constante está relacionada com a população inicial P_0 , uma vez que, fazendo $t = 0$ na equação acima, obtém-se que $k = 900 - P_0$. Assim, em termos da população inicial P_0 , a população $P(t)$ é dada por

$$P(t) = 900 - (900 - P_0) \cdot e^{\frac{1}{2}t}.$$

Agora pode-se responder aos itens pedidos:

- a) Encontre o instante em que a população é extinta se $P(0) = 850$. Se $P(0) = 850 = P_0$, então $P(t) = 900 - (50) \cdot e^{\frac{1}{2}t}$, e a população será extinta no instante em que $P(t) = 0$.

Calculando, obtém-se que esse instante é dado por $t = 2\ln(18) = 5,780743516$

- b) Encontre o instante de extinção se $P(0) = P_0$, com P_0 no intervalo $(0, 900)$.

Nesse caso, a população é dada por

$$P(t) = 900 - (900 - P_0) \cdot e^{\frac{1}{2}t};$$

com $(900 - P_0) \geq 0$. Basta resolvermos a equação $P(t) = 0$. Resolvendo, obtém-se que

$$900 = (900 - P_0) \cdot e^{\frac{1}{2}t};$$

a qual é equivalente à

$$\frac{900}{900 - P_0} = e^{\frac{1}{2}t},$$

donde

$$\frac{t}{2} = \ln \left(\frac{900}{900 - P_0} \right).$$

Assim, o instante t será

$$t = 2 \ln \left(\frac{900}{900 - P_0} \right).$$

c) Encontre a população inicial se a população é extinta em um ano.

Nesse caso, usaremos novamente que

$$P(t) = 900 - (900 - P_0) \cdot e^{\frac{1}{2}t}.$$

Deve-se portanto encontrar o valor de P_0 para o qual $P(12) = 0$. Resolvendo essa equação, obtém-se que

$$900 = (900 - P_0) \cdot e^6,$$

$$\text{logo, } P_0 = 900 \frac{e^6 - 1}{e^6} = 897,7691230.$$

Exemplo 4.27. Denotando por $P(t)$ uma população de organismos zooplancônicos, são colocadas em um béquer 3 fêmeas grávidas *partenogenéticas*, isto é, grávidas sem necessidade de fecundação pelo macho, de um microcrustáceo chamado *cladóceros* em condições ideais de alimentação, temperatura, aeração e iluminação e ausência de predadores. Sabendo-se que em 10 dias havia 240 indivíduos determine a população em função do tempo supondo-se que a taxa de crescimento da população é proporcional à população atual.

Teremos

$$\frac{d}{dt}P(t) = rP(t)$$

onde $r > 0$ é a taxa de crescimento. Podemos dividir ambos os membros por $P(t)$ e obter

$$\frac{\frac{d}{dt}P(t)}{P(t)} = r \tag{4.66}$$

Note que, o primeiro membro de (4.66) é a derivada da composta $\ln(P(t))$, assim

$$\frac{d}{dt}[\ln(P(t))] = r. \quad (4.67)$$

Integrando-se ambos os membros (4.67), teremos que $\ln(P(t)) = rt + k_1$ ou, equivalentemente, $P(t) = e^{rt+k_1} = e^{k_1} \cdot e^{rt}$, donde $P(t) = P_0 e^{rt}$ com $P(0) = P_0 = e^{k_1}$. Logo a solução geral da EDO acima será $P(t) = P_0 e^{rt}$. concluímos que $P_0 = 3$ é a quantidade inicial de indivíduos. Como $P(10) = 240$, tem-se $240 = 3e^{10r}$ e assim $r = \frac{\ln(80)}{10} = 0,4382$. Finalmente, a solução será dada pela função $P(t) = 3e^{0,4382t}$.

Desafio!

Faça no caderno o problema: A população de bactérias em uma cultura cresce a uma taxa proporcional ao número de bactérias no instante t . Após três horas, observou-se a existência de 400 bactérias. Já após as 9 primeiras horas, 2500 bactérias. Qual era o número inicial de bactérias? Use que $\ln(5) = 1,6094$ e $\ln(2) = 0,6931$.



Clique aqui para ver a resposta.

Exemplo 4.28. A população de pássaros de uma ilha experimenta um crescimento sazonal descrito por

$$\frac{dy}{dt} = 3 \sin(2\pi t)y,$$

onde t é o tempo em anos. A migração para dentro e para fora da ilha também é sazonal. A taxa de migração é dada por $M(t) = 2000\sin(2\pi t)$ pássaros por ano. Logo a equação diferencial completa da população é dada por

$$\frac{dy}{dt} = (\text{crescimento sazonal}) + (\text{migração pra dentro/fora}),$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dt} = 3 \sin(2\pi t)y + 2000\sin(2\pi t) \quad (4.68)$$

Vamos determinar $y(t)$ que satisfaz $y(0) = 500$.

Poderemos reescrever a EDO (4.68) como

$$\frac{dy}{dt} - 3 \operatorname{sen}(2\pi t)y = 2000\operatorname{sen}(2\pi t), \quad (4.69)$$

a qual se trata de uma EDO linear de primeira ordem. Usando o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int -3\operatorname{sen}(2\pi t)dt} = e^{3\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t)},$$

multiplamos ambos os membros da EDO (4.69) por $\mu(t)$, obtendo

$$e^{3\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t)} \frac{dy}{dt} - 3\operatorname{sen}(2\pi t)e^{3\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t)}y = 2000\operatorname{sen}(2\pi t)e^{3\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t)} \quad (4.70)$$

Note que, o primeiro membro de (4.70) pode ser reescrito como uma derivada do produto do fator integrante pela função solução $y(t)$ e ficaremos com

$$\frac{d}{dt}[e^{3\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t)}y(t)] = 2000e^{3\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t)}\operatorname{sen}(2\pi t).$$

E assim, integrando-se ambos os membros teremos

$$e^{3\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t)}y(t) = \int 2000e^{3\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t)}\operatorname{sen}(2\pi t)dt$$

ou ainda,

$$e^{3\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t)}y(t) = 2000 \int -e^u \frac{du}{3}$$

onde fizemos a substituição de $3\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t) = u$. Obtém-se, como consequência, que

$$e^{3\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t)}y(t) = -\frac{2000}{3}e^{3\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t)} + k. \quad (4.71)$$

Isolando $y(t)$ em (4.71), obteremos

$$y(t) = -\frac{2000}{3} + ke^{-3\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t)}.$$

Usando que $y(0) = 500$, ficaremos com

$$k = \frac{3500}{3} \cdot e^{-3\frac{1}{2\pi}}.$$

Logo, a solução da EDO (4.68) será

$$y(t) = -\frac{2000}{3} + \frac{3500}{3}e^{-3\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t)} \cdot e^{-3\frac{1}{2\pi}}.$$

4.6.2 APLICAÇÕES DAS EDO DE 2ª ORDEM

Uns dos modelos mais usados na engenharia que envolve EDO de segunda ordem são os chamados **circuitos elétricos**. Um desses modelos são os circuitos RLC, cujas componentes são mostrados na figura 4.10.

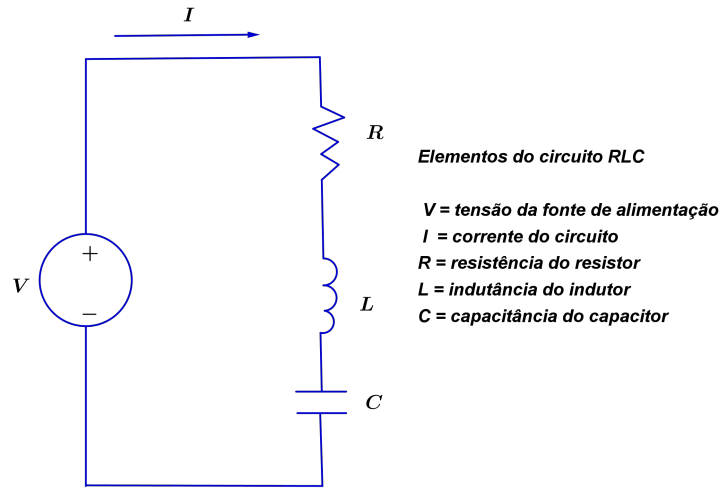


FIGURA 4.10: Circuito RLC.

Dados os parâmetros R , L , e C , a solução para a corrente I , utilizando a Lei da Tensão de Kirchoff, que afirma que a soma algébrica da diferença de potenciais elétricos em um percurso fechado é nula, temos que

$$V_R + V_L + V_C = V.$$

Para uma tensão variável com o tempo $V = V(t)$, isto se transforma em

$$RI(t) + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(\tau) d\tau = V(t).$$

Dividindo por L e derivando ambos os membros com respeito a t , obtem-se a EDO de segunda ordem de coeficientes constantes

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I(t) = \frac{1}{L} \frac{dV}{dt}$$

Definimos os parâmetros

$$\zeta = \frac{R}{2L} \text{ e } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

sendo ambos medidos em radianos por segundo. Substituindo estes parâmetros na equação diferencial, obtemos

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\zeta \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I(t) = \frac{1}{L} \frac{dV}{dt},$$

que é uma EDO de segunda ordem de coeficientes constantes. Colocando a fonte de tensão em zero chegamos a que

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\zeta \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I(t) = 0,$$

com as condições iniciais para a corrente do indutor, $I_L(0)$, e a tensão do capacitor $V_C(0)$, como condições iniciais para $I(0)$ e $I'(0)$. Como a corrente total é igual à corrente no indutor, temos a condição

$$I(0) = I_L(0)$$

e a segunda condição é obtida aplicando a Lei da Tensão de Kirchoff, obtendo

$$V_R(0) + V_L(0) + V_C(0) = 0,$$

ou seja,

$$I(0)R + I'(0)L + V_C(0) = 0,$$

o que implica que

$$I'(0) = \frac{1}{L} (-V_C(0) - I(0)R),$$

que é um problema de valor inicial para uma equação diferencial de segunda ordem homogênea. Substituindo os parâmetros ζ e ω_0 , segue que

$$I'' + 2\zeta I' + \omega_0^2 I = 0.$$

A equação característica desta EDO é

$$\lambda^2 + 2\zeta\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

cujas raízes são $\lambda = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - \omega_0^2}$.

Dependendo dos valores de ζ e ω_0 , existem três possibilidades:

1. *sobrecarga* que é o caso que $\zeta > \omega_0$. Então $RC > 4\frac{L}{R}$ e as soluções da equação característica são dois números reais negativos. As duas raízes reais negativas nos fornecem as soluções da forma

$$I(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

para constantes arbitrárias A e B .

2. *Carga crítica* é o caso que $\zeta = \omega_0$ de onde $RC = 4\frac{L}{R}$.

Neste caso, as raízes da equação característica são iguais a um número negativo. Assim, as soluções são da forma

$$I(t) = (A + Bt)e^{\lambda t}$$

para constantes arbitrárias A e B .

3. *Subcarga* é o caso restante, ou seja, para $\zeta < \omega_0$, de onde temos $RC < 4\frac{L}{R}$. Neste caso as raízes da equação característica são dois número complexos conjugados que tem a parte real negativa. Este fato, chamado de subcarga, resulta em oscilações no circuito. Isto

porque as soluções contêm na sua estrutura cossenos e senos, como visto no desenvolvimento teórico da solução. As soluções

$$I(t) = e^{-\zeta t} (C \operatorname{sen}(\omega_c t) + D \cos(\omega_c t))$$

para constantes arbitrárias C e D .



Uma outra importante aplicação das equações diferenciais de segunda ordem são as conhecidas como **vibrações mecânicas**. Pesquise na bibliografia e na internet sobre esta aplicação tão importante para as engenharias.



Estude os modelos apresentados na Leitura Complementar deste módulo!

4.7 Soluções dos desafios do módulo IV

- Desafio da página 152

A função $y_1(x) = x^2$, tem como derivada $y_1'(x) = 2x$ e como derivada segunda $y_1''(x) = 2$. Substituindo na equação, obtemos que

$$(x + 3)y'' + (x + 2)y' - y = 2(x + 3) + (x + 2) \cdot 2x - x^2 = x^2 + 6x + 6,$$

que não toma o valor zero para todos os valores de x . Portanto não é solução da EDO.

A função $y_2(x) = e^{-x}$, tem como derivada $y_2'(x) = -e^{-x}$ e como derivada segunda $y_2''(x) = e^{-x}$. Substituindo na equação, obtemos que

$$\begin{aligned}(x + 3)y'' + (x + 2)y' - y &= e^{-x}(x + 3) + (x + 2) \cdot (-e^{-x}) - e^{-x} \\ &= e^{-x}(x + 3 - x - 2 - 1) = 0,\end{aligned}$$

a última igualdade é válida para todo x . Portanto y_2 é solução da EDO.

- Desafio da página 154

Para resolver $f''(x) = 1 - x^2$ vamos integrar (em forma indefinida) ambos os membros da equação, obtendo

$$f'(x) = x - \frac{x^3}{3} + C_1,$$

e integrando novamente, chegamos a

$$f(x) = x^2 - \frac{x^4}{12} + C_1x + C_2.$$

A solução está ilustrada na figura 4.11

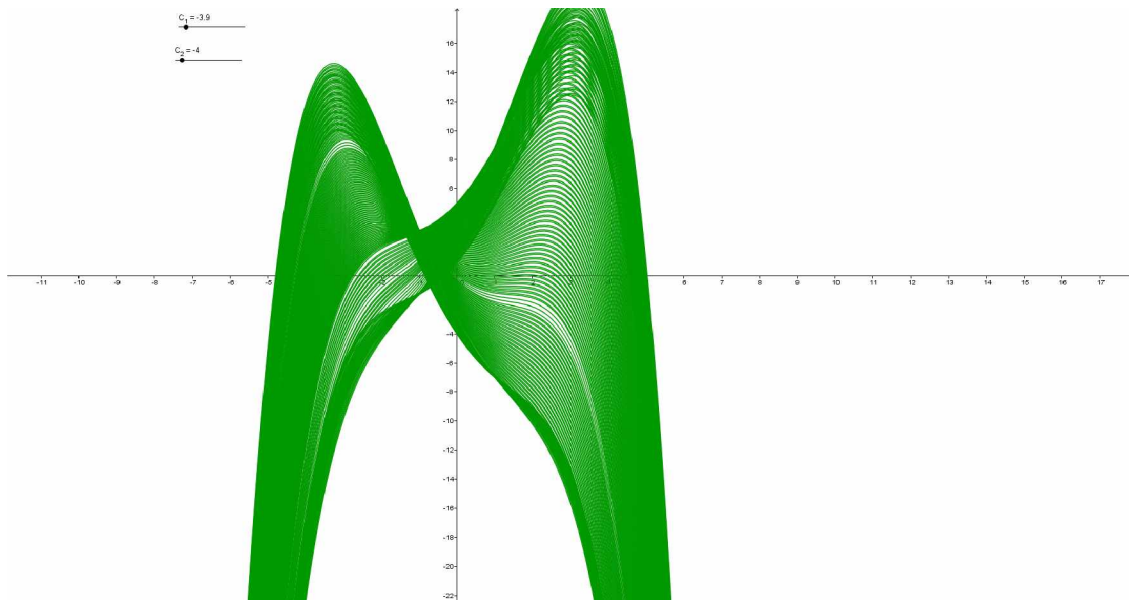


FIGURA 4.11: A família de soluções da EDO.

- Desafio da página 156

Derivando $y_1(x) = e^{-x} - 1$ e $y_2(x) = -e^{-x} - 1$ temos que $y_1'(x) = -e^{-x}$ e $y_2'(x) = e^{-x}$. Assim, substituindo em (4.7), obtemos

$$y_1'(x) + y_1(x) + 1 = -e^{-x} + e^{-x} - 1 + 1 = 0,$$

$$y_2'(x) + y_2(x) + 1 = e^{-x} - e^{-x} - 1 + 1 = 0,$$

o que mostra que y_1 e y_2 são soluções da EDO.

Já a função $y_3 = y_1 + y_2 = -2$ tem como derivada $y_3'(x) = 0$, de onde temos que

$$y_3'(x) + y_3(x) + 1 = -2 + 1 = -1 \neq 0,$$

o que prova que não é solução.

- Desafio da página 157.

Sejam y_1 e y_2 duas soluções da EDO (4.6) e α , β , números reais tais que $\alpha + \beta = 1$. Temos que

$$\begin{aligned} (\alpha y_1 + \beta y_2)' + p(t)(\alpha y_1 + \beta y_2) + q(t) &= \alpha y_1' + \beta y_2' + \alpha p(t)y_1 + \beta p(t)y_2 + (\alpha + \beta)q(t) \\ &= \alpha(y_1' + p(t)y_1 + q(t)) + \beta(y_2' + p(t)y_2 + q(t)) \\ &= 0 + 0, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que y_1 e y_2 são soluções da EDO.

- Desafio da página 158.

Considere y_1 e y_2 duas soluções da EDO (4.6) e α, β , números reais tais que $\alpha + \beta = 1$. Temos que

$$\begin{aligned} & (\alpha y_1 + \beta y_2)'' + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2)' + q(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) + f(x) \\ &= \alpha(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 + f(x)) + \beta(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 + f(x)) \\ &= 0 + 0, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que y_1 e y_2 são soluções da EDO.

- Desafio da página 163.

Integrando a EDO (4.22) duas vezes obtemos

$$y' + \sin(t) + C_1 = 0, \text{ e } y - \cos(t) + C_1 t + C_2 = 0,$$

onde C_1 e C_2 são constantes quaisquer. Portanto o conjunto solução da EDO vem dada pela fórmula

$$y(t) = \cos(t) - C_1 t - C_2,$$

Assim, temos como soluções as funções

$$y_1(t) = \cos(t) - 1 \text{ e } y_2(t) = \cos(t) + 1,$$

para constantes apropriadas. Considerando agora $y_3 = y_1 + y_2 = 2 \cos(t)$ e derivando duas vezes esta função, obtemos que

$$y_3''(t) + \cos(t) = -2 \cos(t) + \cos(t) = -\cos(t) \neq 0 \text{ para todo } t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}$$

o que mostra que a soma das soluções não é uma solução. Portanto a EDO (4.22) não é linear.

- Desafio da página 166.

Para resolver o PVI deste desafio, começamos encontrando a solução geral da EDO. Seguindo a metodologia, escrevemos a EDO como

$$\frac{1}{y} dy = -4x dx,$$

separando as variáveis a cada lado dos membros da equação. Integrando a ambos os membros nas respectivas variáveis, tem-se

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -4x dx, \text{ que é equivalente a } \ln|y| = -2x^2 + C,$$

que é a solução em forma explícita. A forma implícita vem dada por $y = Ce^{-2x^2}$. Agora, usando a condição inicial do PVI, temos que $1 = y(0) = Ce^{-2 \cdot 0^2} = C$, concluímos que a solução procurada é a função $y = e^{-2x^2}$, cujo gráfico é mostrado na figura 4.12.

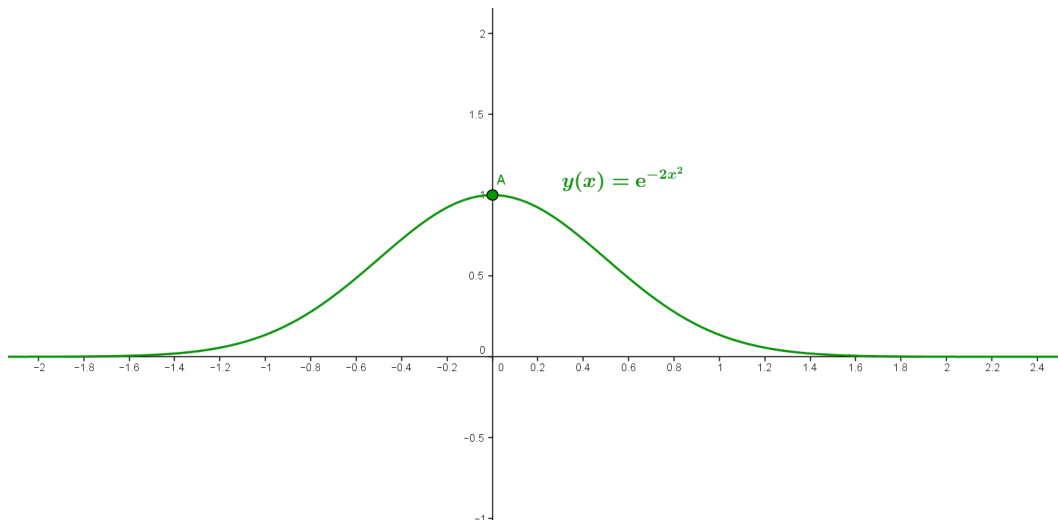


FIGURA 4.12: A família de soluções da EDO.

- Desafio da página 171.

$$(xy^2 + x)dx + yx^2dy = 0, \quad (4.72)$$

Como $M(x, y) = xy^2 + x$ e $N(x, y) = yx^2$, obtemos

$$\frac{\partial(xy^2 + x)}{\partial y} = 2xy \text{ e } \frac{\partial yx^2}{\partial x} = 2xy,$$

provando que a forma diferencial da EDO (4.72) é exata.

Para resolver a EDO (4.72), calculamos o potencial $\phi(x, y)$, integrando com respeito a x a função $M(x, y)$, obtendo

$$\int (xy^2 + x)dx = \frac{1}{2}x^2(y^2 + 1) + C(y).$$

Derivando com respeito a y esta última expressão, chegamos à expressão $yx^2 + C'(y)$ que tem que ser igual a $N(x, y)$. Portanto, $C'(y) = 0$ e daí, $C(y) = C$, com C uma constante arbitrária. Assim, a solução implícita de (4.72) é $\frac{1}{2}x^2(y^2 + 1) + C$.

- Desafio da página 178.

Calculando o determinante de $y_1 = \cos(\omega t)$ e $y_2 = \sin(\omega t)$, temos que o Wronskiano de y_1 e y_2 é

$$\text{Determinante} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \end{bmatrix} = \omega(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) = \omega \neq 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. O que mostra que y_1 e y_2 são soluções fundamentais da equação $y'' + \omega^2 y = 0$.

- Desafio da página 180

Calculando o Wronskiano de

$$y_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \text{ e } y_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \text{Determinante} & \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) & e^{-\frac{1}{2}t} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) & -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t} \text{ que é diferente de zero para todo } t \text{ real.} \end{aligned}$$

- Desafio da página 182

Primeiramente achamos a solução particular da EDO $y'' - 3y = x^3$ usando o método dos coeficientes indeterminados. Tentamos a solução polinomial

$$y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

onde os números reais A , B , C e D serão determinados impondo a condição de que y_p seja solução da EDO. Calculando as derivadas de y_p , obtemos $y'_p(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$ e $y''_p(x) = 6Ax + 2B$. Substituindo na equação, obtemos

$$6Ax + 2B - 3(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = -3Ax^3 - 3Bx^2 + (6A - 3C)x + 2B - 3Dx^3.$$

Comparando os polinômios a ambos os membros da última igualdade, concluímos que $-3A = 1$, $B = 0$, $6A - 3C = 0$ e $2B - 3D = 0$,. Assim, $y_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x$.

Resolvendo a EDO homogênea associada, temos que a equação característica é dada por $x^2 - 3 = 0$ que tem como raízes $\pm\sqrt{3}$. Portanto, a solução geral da EDO é

$$y(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x + C_1e^{-\sqrt{3}x} + C_2e^{\sqrt{3}x}.$$

Para $x = 0$ temos $0 = y(0) = C_1 + C_2$. Calculando a derivada de y , temos

$$y'(x) = -x^2 - \frac{2}{3} - C_1\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}x} + C_2\sqrt{3}e^{\sqrt{3}x},$$

de onde $0 = y'(0) = -C_1\sqrt{3} + C_2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$. Assim, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 + C_2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}, \end{cases}$$

concluímos que as constantes $C_1 = -\frac{\sqrt{3}}{9}$ e $C_2 = \frac{\sqrt{3}}{9}$. Assim, a solução da EDO que passa pela origem com tangente horizontal é

$$y(x) = \frac{1}{3} \left(-x^3 - 2x - \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\sqrt{3}x} + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{\sqrt{3}x} \right).$$

cujo gráfico é mostrado na figura 4.13.

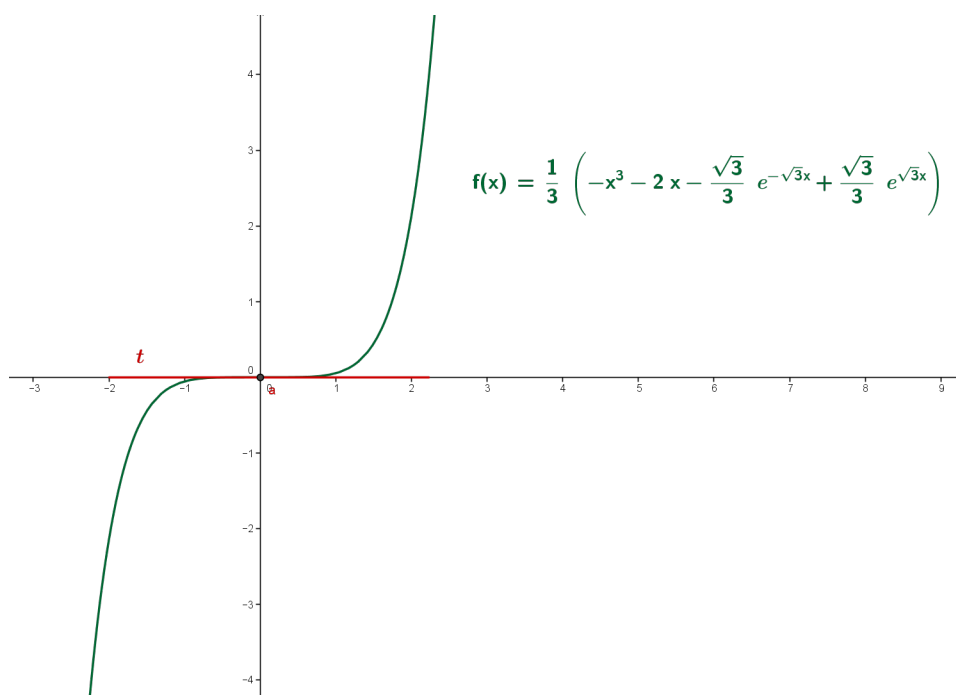


FIGURA 4.13: A solução da EDO.

- Desafio da página 183

Primeiramente achamos a solução particular da EDO $y'' - 3y = 2e^{-3x}$ usando o método dos coeficientes indeterminados. Tentamos a solução exponencial proporcional a $f(x) = 2e^{-3x}$, ou seja, $y_p(x) = Ae^{-3x}$, onde o número real A será determinado impondo a condição de que y_p seja solução da EDO. Calculando as derivadas de y_p , obtemos $y'_p(x) = -3Ae^{-3x}$ e $y''_p(x) = 9Ae^{-3x}$. Substituindo na equação, obtemos

$$9Ae^{-3x} - 3Ae^{-3x} = 2e^{-3x},$$

de onde concluímos que $6A = 2$, ou equivalentemente que $A = \frac{1}{3}$. Assim, $y_p(x) = \frac{1}{3}e^{-3x}$ e a solução geral vem dada por

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{-3x} + C_1e^{-\sqrt{3}x} + C_2e^{\sqrt{3}x}.$$

- Desafio da página 184

Tentamos a solução $y_p(x) = A \sin(2x) + B \cos(2x)$. Derivando y_p , obtemos

$$\begin{aligned} y'_p(x) &= 2A \cos(2x) - 2B \sin(2x) \\ y''_p(x) &= -4A \sin(2x) - 4B \cos(2x). \end{aligned}$$

Portanto, substituindo na EDO, tem-se

$$-4A \sin(2x) - 4B \cos(2x) - 3(A \sin(2x) + B \cos(2x)) = 7 \sin(2x),$$

concluindo que $-7A = 7$, ou equivalentemente, $A = -1$. Assim, uma solução particular é $y_p(x) = -\sin(2x)$.

- Desafio da página 188

Dividindo a equação $\frac{d}{dt}Q(t) = -rQ(t)$ por $Q(t)$, obtém-se

$$\frac{\frac{d}{dt}Q(t)}{Q(t)} = -r$$

Note que, o primeiro membro da igualdade é a derivada da composta $\ln(Q(t))$, assim

$$\frac{d}{dt}[\ln(Q(t))] = -r.$$

Integrando-se ambos os membros, teremos

$$\ln(Q(t)) = -rt + k_1;$$

equivalentemente $Q(t) = e^{-rt+k_1} = e^{k_1} \cdot e^{-rt}$, donde $Q(t) = Q_0 e^{-rt}$ com $Q(0) = Q_0 = e^{k_1}$.

Logo a solução geral da EDO acima será

$$Q(t) = Q_0 e^{-rt};$$

Além disso, supondo que o tempo seja medido em dias, que $Q_0 = 100$ mg e que $Q(7) = 82,04$ mg. Então a taxa r é tal que

$$82,04 = 100e^{-7r};$$

ou seja

$$0,8204 = e^{-7r};$$

de onde segue que

$$\ln(0,8204) = -7r;$$

e basta isolar o valor de r para obter que

$$r = 0,02828.$$

b) Como visto acima, a quantidade de tório-234 presente em qualquer instante é dada por

$$Q(t) = 100e^{-0,02828t};$$

c) Indicando por t o tempo necessário para que o tório-234 decaia à metade da quantidade original, deve-se ter que

$$Q(t) = \frac{Q_0}{2}.$$

Assim, teremos

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-rt}.$$

donde

$$e^{-rt} = \frac{1}{2}.$$

o valor de t segue-se que $t = \frac{\ln(2)}{r} = 24,510$.

- Desafio da página 191

Teremos

$$\frac{d}{dt}B(t) = rB(t)$$

onde $r > 0$ é a taxa de crescimento. Podemos dividir ambos os membros por $B(t)$ e obter

$$\frac{\frac{d}{dt}B(t)}{B(t)} = r$$

Note que, o primeiro membro da igualdade é a derivada da composta $\ln(B(t))$, assim

$$\frac{d}{dt}[\ln(B(t))] = r.$$

Integrando-se ambos os membros, teremos

$$\ln(B(t)) = rt + k_1;$$

equivalentemente $B(t) = e^{rt+k_1} = e^{k_1} \cdot e^{rt}$, donde $B(t) = P_0 e^{rt}$ com $P(0) = P_0 = e^{k_1}$.

Logo a solução geral da EDO acima será

$$B(t) = P_0 e^{rt};$$

Sabemos que $P(3) = 400$ e $P(9) = 2500$, de onde segue que

$$\begin{cases} 400 = P_0 e^{3r} \\ 2500 = P_0 e^{9r} \end{cases}$$

Dividindo a segunda equação pela primeira, obtemos $\frac{e^{9r}}{e^{3r}} = \frac{2500}{400}$, ou seja $e^{6r} = \frac{25}{4}$;

donde $r = \frac{1}{6} \ln\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{1}{6} [\ln(5^2) - \ln(2^2)] = \frac{1}{6} 2 [\ln(5) - \ln(2)] = \frac{1}{3} [1,6094 - 0,6931]$.

Logo, $r = 0,3054$.

Substituindo o valor de r na primeira equação chegamos à $400 = P_0 e^{3(0,3054)}$, da qual obtém-se $P_0 = \frac{400}{e^{0,9163}}$.

Assim o número inicial de bactérias será $P_0 = \frac{400}{e^{0,9163}}$.