PLÍNIO JOSÉ OLIVEIRA

OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIAS DE ROBÔS COM ESTRUTURA PARALELA.

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia,

como parte dos requisitos para obtenção do título de **Doutor em Engenharia Mecânica.**

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientadora: Profª Drª. Sezimária F. Pereira Saramago.
Co-Orientador: Prof. Dr. João Carlos Mendes Carvalho.

Uberlândia-MG

2005

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UFU / Setor de Catalogação e Classificação

O48o Oliveira, Plínio José, 1952-
Otimização de trajetórias de robôs com estrutura paralela / Plínio José Oliveira. - Uberlândia, 2005.
122f. : il.
Orientador: Sezimária F. Pereira Saramago.
Tese (doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.
1. Robótica - Teses. 2. Manipuladores (Mecanismo) - Teses. 3. Algo-ritmos genéticos - Teses. I. Saramago, Sezimária F. Pereira. II. Universi-
dade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenha-
ria Mecânica. III. Título.

681.3:007.52 (043.3)

Dedico este trabalho à minha esposa Maria Josefa
e aos nossos filhos Tales e Talita.

Meus agradecimentos,

- à profª Dra. Sezimária Saramago, por ter me aceito como orientando num momento difícil de minha carreira de doutorando e pelo desprendimento em nos orientar sempre que solicitada, mesmo quando muito atarefada .

- ao prof. Dr. João Carlos Mendes de Carvalho, pela co-orientação e contribuição valiosa na análise geométrica, cinemática e dinâmica de estruturas paralelas.

- ao prof. Dr. Valder Steffen pela confiança depositada.

- à memória de meus pais, José Alcides de Oliveira e Hilda Néri Oliveira e de meu sobrinho Juninho que se foi tão cedo.

- ao Rafael Gonçalves Rosa, pela contribuição na construção das figuras do CAPaMan e revisão dos programas de otimização.

- a meus irmãos Dulce, Ideide, Pedro e Joana e ao amigo Paulo Roberto Bergamaschi pela solidariedade e companhia nesta jornada .

- à Prefeitura Municipal de Catalão, pela ajuda de custo oferecida nos dois primeiros anos do curso de doutorado e pela licença concedida, sem a qual este trabalho não seria possível.

- aos professores do Curso de Matemática do Campus de Catalão da Universidade Federal de Goiás, pelo apoio e confiança.

- aos professores do Centro de Ensino Superior de Catalão por estarem sempre me incentivando.

- a todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia.

Oliveira, P. J., **Otimização de Trajetórias de Robôs com Estrutura Paralela.** 2005. 122 f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Resumo

Manipuladores paralelos são de grande interesse principalmente porque apresentam vantagens em várias aplicações, mostrando grande resistência, exatidão de posicionamento, capacidade de carga maior que manipuladores seriais e podem ser operados a altas velocidades e acelerações. No Laboratório de Robótica e Mecatrônica em Cassino, Itália, foi criado um mecanismo paralelo com três graus de liberdade, chamado CaPaMan (Cassino Parallel Manipulator). O objetivo principal deste trabalho é otimizar a trajetória da estrutura paralela CaPaMan. O problema de otimização multi-objetivo considera a minimização da energia gasta pelos atuadores, do tempo total de percurso e da variação de aceleração (jerk). A trajetória é calculada assumindo que os ângulos de entrada são obtidos por uma função do tempo, representada por B-splines uniformes. A modelagem cinemática é obtida derivando-se a equação da trajetória em relação ao tempo. O modelo analítico para a dinâmica inversa do CaPaMan utiliza as equações de Newton-Euler. A cadeia cinemática peculiar e as propriedades de simetria da arquitetura do CaPaMan são úteis nesta formulação, permitindo, para cada trajetória, calcular os torques de entrada e a energia dos atuadores. O vetor de funções multi-objetivo é transformado em uma função escalar usando o Método da Ponderação dos Objetivos. O problema de otimização é investigado aplicando algoritmos genéticos. A presença de mínimos locais justifica a utilização de métodos randômicos. Alguns exemplos numéricos são apresentados para verificação e validação da metodologia proposta.

Palavras Chave: Robótica, Estruturas Paralelas, Trajetórias Ótimas, Algoritmos Genéticos.

Oliveira, P. J., **Optimal Trajectory Planning of Robots with Parallel Structure.** 2005. 122 f. Doctorate Thesis, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG.

Abstract

Parallel manipulators are of great interest mainly because they present advantages in several applications, showing great resistance, positioning accuracy, load capacity larger than serial manipulators and they can be operated to high-speeds and accelerations. In the Laboratory of Robotics and Mechatronics in Casino, Italy, a parallel mechanism was created with three degrees of freedom, called CaPaMan (Cassino Parallel Manipulator). The main objective of this work is obtains the optimal trajectory of the CaPaMan parallel structure. The multi-objective optimization problem is written taking into account the mechanical energy of the actuators, the total traveling time and jerk. The trajectory is calculated assuming that the input angles are given by a function of the time, represented by a uniform B-splines. The kinematic modelling is obtained by deriving the trajectory equation according the time. The analytic model for the inverse dynamics of CaPaMan uses the equations of Newton-Euler. The peculiar kinematic chain and the properties of symmetry of the CaPaMan architecture are useful in this formulation, which allows, for each trajectory, to calculate the input torques and the mechanical energy. The multicriterion vector function is transformed to a scalar function by using the Weighting Objectives Method. The optimization problem is investigated by using genetic algorithms. Some numeric examples are presented for verification and validation of the methodology

Keywords: Robotics, Parallel structures, Optimal Trajectories, Genetic Algorithms.

Lista de Figuras

Figura 1.1. Manipulador paralelo. 04

Figura 1.2. Manipulador serial. 04

Figura 1.3. CaPaMan- Cassino Parallel Manipulator: a) Representação esquemática, b) Conjunto da estrutura. 04

Figura 1.4 Protótipo do CaPaMan- Casino Parallel Manipulator. 05

Figura 2.1. Arquitetura do CaPaMan. 11

Figura 2.2. Mecanismo de acionamento (perna i). 11

Figura 2.3. Orientação da plataforma móvel em função dos ângulos de rotação. 12

Figura 2.4. Representação dos vetores associados às juntas esféricas 15

Figura 2.5. Parâmetros associados à perna i. 16

Figura 4.1. Forças atuantes na PM. 40

Figura 4.2. Forças atuantes nos pontos de articulação H_i. 41

Figura 4.3. Forças atuantes nas juntas esféricas. 45

Figura 4.4. Forças nos paralelogramos articulados. 46

Figura 4.5. Diagrama de corpo livre para análise do efeito da força de inércia no segmento d_i. 46

Figura 5.1. Vetores tangentes nos extremos da curva. 53

Figura 5.2. B-spline, com seus pontos de nó e controle. 56

Figura 5.3. O ponto de controle (3,-1) é movido para (3,0) e depois para (3,3). 57

Figura 5.4. Função de concordância $B_{0,4}$, nos intervalos (0,1), (1,2), (2,3) e (3,4) 61

Figura 5.5. Funções de concordância $B_{0,4}$ e $B_{1,4}$. 61

Figura 5.6. B-spline fechada. 65

Figura 6.1. Esquematização de um cromossomo. 74

Figura 6.2. Fluxograma do algoritmo genético contínuo. 75
Figura 7.1. Fluxograma do procedimento numérico para otimização. 76
Figura 7.2. Trajetória ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan em função do tempo. 78
Figura 7.3. Gráfica das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função no tempo: (a)mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3. 79
Figuras 7.4. Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo. 80
Figura 7.5. Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 80
Figura 7.6. Curvas iniciais e ótimas do jerk nos atuadores em função do tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3. 81
Figura 7.7. Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores em função do tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 81
Figura 7.8. Trajetória ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan em função do tempo. 82
Figura 7.9. Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3. 83
Figura 7.10. Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3. 83
Figura 7.11. Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 83
Figura 7.12. Curvas iniciais e ótimas do jerk nos atuadores em função do tempo: (a) mecanismo1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3. 84
Figura 7.13: Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores em função do tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3 84
Figura 7.14. Trajetória ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan em função do tempo. 85
Figura 7.15. Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função no tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3 85
Figura 7.16. Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 (c) mecanismo 3.86
Figura 7.17. Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 86
Figura 7.18. Curvas iniciais e ótimas do jerk nos atuadores em função do tempo:

(a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3. 87

Figura 7.19. Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 87

Figura 7.20. Trajetória inicial e ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan, considerando o tempo de percurso constante . 90

Figura 7.21. Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada, considerando o tempo total constante: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3. 90

Figura 7.22. Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada, considerando o tempo total constante: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3. 91

Figura 7.23. Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada para tempo constante: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3. 91

Figura 7.24. Gráfico do jerk inicial e ótimo das manivelas de entrada, considerando o tempo total constante: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3. 91

Figura 7.25. Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores para tempo constante: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 92

Figura 7.26. Trajetória inicial e ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan, considerando altas velocidades, para o caso K_1=0,8 e K_2=0,2. 93

Figura 7.27. Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função no tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3. 94

Figura 7.28. Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3. 94

Figura 7.29. Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 94

Figura 7.30. Curva inicial e ótima do jerk das manivelas de entrada, para altas velocidades:(a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3 (K_1=0,8 e K_2=0,2). 95

Figura 7.31. Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3 95

Figura 7.32. Trajetória inicial e ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan, considerando altas velocidades, para o caso K_1= K_2=0,5. 93

Figura 7.33. Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função no tempo, para altas velocidades: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2;

(c) mecanismo 3 (K_1= K_2=0,5). 97
Figura 7.34. Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada, para altas velocidades: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3 (K_1= K_2=0,5). 97
Figura 7.35. Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada, para altas velocidades: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3 (K_1= K_2=0,5). 97
Figura 7.36. Curvas inicial e ótima do jerk das manivelas de entrada, para altas velocidades: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3 (K_1= K_2=0,5). 98
Figura 7.37. Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores, para altas velocidades: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3 (K_1= K_2= 0.5). 98
Figura 7.38. Trajetória ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan (K_1=0,2, K_2=0,8). 99
Figura 7.39. Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função no tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3. 99
Figura 7.40. Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3. 100
Figura 7.41. Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 100
Figura 7.42. Curva inicial e ótima do jerk das manivelas de entrada, para altas velocidades: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3 (K_1=0,2 e K_2=0,8). 100
Figura 7.43. Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 101
Figura 7.44. Gráfico 3D da trajetória ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan, problema de otimização minimizando o jerk . 103
Figura 7.45. Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função no tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3. 104
Figura 7.46. Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3. 104
Figura 7.47. Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 104
Figura 7.48. Curva inicial e ótima do jerk das manivelas de entrada, para altas velocidades: (a) mecanismo 1 ;(b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3 (K_1= K_2=0,2 e K_3=0.6).105
Figura 7.49. Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 105

Figura 7.50. Gráfico 3D da trajetória ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan. 106

Figura 7.51. Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função no tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3. 107

Figura 7.52. Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada do CaPaMan, (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3. 107

Figura 7.53. Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada do CaPaMan em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 107

Figura 7.54 Curva inicial e ótima do jerk das manivelas de entrada, para altas velocidades: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3 (K_1= K_2=0,3 e K_3=0.4). 108

Figura 7.55. Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 108

Figura 7.56. Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores do CaPaMan robusto, modelo dinâmico completo, (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3 112

Figura 7.57. Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores do CaPaMan robusto, modelo dinâmico simplificado, (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 112

Figura 7.58. Gráfico 3D da trajetória ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan usando B-splines de quarta ordem. 113

Figura 7.59. Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função no tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3 (K_1=0,8, K_2=0,2 e K_3=0). 114

Figura 7.60. Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3. 114

Figura 7.61. Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 115

Figura 7.62. Curvas iniciais e ótimas do jerk nos atuadores: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 115

Figura 7.63. Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3. 116

Simbologia

a_i	Bases dos mecanismos de quatro barras.
a_P	Aceleração do centro da PM.
$\vec{a}_{Gbi}$, $\vec{a}_{Gci}$, $\vec{a}_{Gdi}$	Acelerações nos segmentos b_i , c_i e d_i respectivamente.
B	Matriz que define as funções de concordância.
B_{BS}	Matriz base da B-spline.
$B_{k,d}$	Funções de concordância para B-splines de ordem d-1.
$B^i_{k,d}(t)$	Funções de concordância para B-splines de ordem d-1 da trajetória α_i.
G_B	Vetor geometria de Bézier.
b_{ix}, b_{iy}, b_{iz}	Componentes dos vetores b_i.
C	Matriz que representa os coeficientes do polinômio cúbico espacial.
$c\theta$	Co-seno do ângulo θ.
$c^{-1}\theta$	Arco-cosseno do ângulo θ.
c_i	Comprimento das bielas.
C_k	Cromossomos.
d_i	Comprimento das manivelas de saída.
e_{bi}, e_{ci} , e_{di}	Offsets de inércia do centro de massa dos segmentos b_i, c_i e d_i respectivamente.
E, E_0	Energia e energia inicial respectivamente.

δ_i	Ângulos de rotações estruturais entre OX_1 e OX_i, bem como entre PH_1 e PH_i.
f, f_1, f_2	Funções multi-objetivos.
F	Soma das forças de reação $\mathbf{F}_i$ (i=1, 2,3) nos pontos H_i da PM.
F_c	Função custo de adaptação para cadeia genética.
F_{ext}	Forças externas.
F_{in}	Força de inércia.
F_i	Forças nas juntas esféricas.
F_{inbi}	Forças nos segmentos b_i.
F_{inci}	Forças nos segmentos c_i.
F_{indi}	Forças nos segmentos d_i.
F_{iy} , F_{iz}	Forças atuantes nos pontos de articulação H_i.
F_{dci}	Força no segmento c_i devido ao segmendo d_i.
G	Peso da plataforma móvel.
G_1	Vetor geometria de restrições geométricas para curvas cúbicas paramétricas.
$G_{\square}$, G_y, G_z	Vetor das componentes x , y e z do vetor geometria respectivamente.
G_H	Matriz geometria de Hermite.
G_{bi} , G_{ci} , G_{di}	Centro de gravidade dos segmentos b_i , c_i e d_i respectivamente.
G_{Hx}	Componente x do vetor geometria de Hermite .
h_i	Comprimento das barras conectoras entre as pernas do CaPaMan e a plataforma móvel.
H_i	Ponto situado na extremidade da barra conectora onde se localiza as juntas prismáticas.
I	Matriz de inércia da plataforma móvel.
I_c	Matriz de inércia da PM com respeito ao centro de massa P.
I_{Gbi} , I_{Gci} , I_{Gdi}	Momento de inércia nos centros de gravidades dos segmentos b_i , c_i e d_i respectivamente.
J, J_0	Jerk e jerk inicial respectivamente
K_1, K_2, K_3	Parâmetros das funções multi-objetivos.
L_i	Vetores com origem nos pontos O_i, e extremidades nas juntas esféricas H_i.
L_{ix},L_{iy},L_{iz}	Componentes dos vetores L_i. em relação ao sistema inercial.
$(L_i)_{OiXiYiZi}$	Vetores L_i em relação ao sistema cartesiano $O_iX_iY_iZ_i$.
m_i	Comprimento das manivelas de entrada.
m_{bi} , m_{ci} ,m_{di}	Massa dos segmentos b_i , c_i e d_i respectivamente.

M	Massa da PM.
M_1	Matriz base para curvas cúbicas paramétricas.
M_H	Matriz base de Hermite.
M_B	Matriz base para B-splines cúbicas periódicas e uniformes.
M_{coef}	Matriz dos coeficientes .
N	Torque resultante devido as forças F_i, em relação ao sistema de referência OXYZ fixo na base PF.
N_{in}	Torque de inércia.
P^*_i	Vetores com origem no centro da plataforma fixa e extremidade nas juntas prismáticas.
$P^*_{ix}, P^*_{iy}, P^*_{iz}$	Componentes dos vetores P^*_i.
P_i	vetores com origem no centro da plataforma móvel e extremidades nas juntas esféricas correspondendo aos respectivos δ_i .
p_i	Probabilidade do indivíduo i.
p^i_k	Pontos de controle geradores da B-spline da trajetória α_i.
$P(u)$	Segmento de curva B-spline.
P_{ix}, P_{iy}, P_{iz}	Componentes dos vetores P_i.
PF	Plataforma fixa.
PM	Plataforma móvel.
PH_i	Segmentos que unem o centro da plataforma móvel a cada uma das juntas prismáticas.
O	Centro da plataforma fixa.
O_i	Pontos médios das bases dos paralelogramos articulados.
OX_i	Segmento de mesma direção do eixo X_i e com origem no centro da plataforma fixa.
$OXYZ$	Sistema cartesiano inercial atado à plataforma fixa.
$O_iX_iY_iZ_i$	Sistemas cartesianos cujos centros são os pontos médios das bases dos mecanismos de quatro barras.
$OX'Y'Z'$	Sistema cartesiano obtido após a primeira rotação de um ângulo θ em torno do eixo Z.
$OX''Y''Z''$	Sistema cartesiano obtido após a segunda rotação de um ângulo φ_y em torno do eixo Y'.
$OX'''Y'''Z'''$	Sistema cartesiano obtido após a terceira rotação de um ângulo ψ em torno do eixo Z''.
$PX_PY_PZ_P$	Sistema cartesiano não inercial atado à plataforma móvel.

P	Centro da plataforma móvel.
$Q(t)$	Polinômio cúbico espacial definido no intervalo [0,1].
$\dot{Q}(t)$	Derivada primeira de Q(t).
q_i	Probabilidade acumulativa de cada cromossomo.
X^p	Vetor das coordenadas do ponto P em relação ao sistema $OX'''Y'''Z'''$.
X	Vetor das coordenadas de P em relação ao sistema $OXYZ$.
X^1	Vetor das coordenadas de P em relação ao sistema $OX''Y''Z''$.
X^2	Vetor das coordenadas de P em relação ao sistema $OX'Y'Z'$.
(x^l_i, x^u_i)	Intervalo de busca para algoritmos genéticos
r_B	Raio da plataforma fixa.
r_P	Raio da plataforma móvel.
R	Matriz de transformação.
R^t	Transposta da matriz de transformação.
$R(\theta, z)$	Matriz de rotação de um ângulo θ em torno do eixo Z.
$R(\varphi_y, y)$	Matriz de rotação de um ângulo φ_y em torno do eixo Y'.
$R(\psi, z)$	Matriz de rotação de um ângulo ψ em torno do eixo Z''.
$R(-\psi, z)$	Matriz de rotação de um ângulo $-\psi$ em torno do eixo Z''.
$R(-\varphi_y, y)$	Matriz de rotação de um ângulo $-\varphi_y$ em torno do eixo Y'.
$R(-\theta, z)$	Matriz de rotação de um ângulo -θ em torno do eixo Z.
$[R_i]$	Matriz de rotação de um ângulo δ_i em torno do eixo Z.
R_{ij}	Elemento da linha i e coluna j da matriz de transformação.
$s\theta$	Seno do ângulo θ.
$s^{-1}\theta$	Arco-seno do ângulo θ.
S_i	Deslocamentos das juntas prismáticas.
T	Matriz 1x4 que representa a variáveis do polinômio cúbico.
Tt, T_0	Tempo total de percurso e tempo inicial respectivamente.
$Tt^l \leq Tt \leq Tt^u$	Intervalo de variação de Tt.
$\boldsymbol{t}$	Vetor que une os centros das duas plataformas.
t	Tempo de percurso da trajetória α_i.
t_{ii}	Tempo inicial da trajetória α_i.
t_{if}	Tempo final da trajetória α_i.

$tg\theta$	Tangente do ângulo θ.
$tg^{-1}\theta$	Arco-tangente do ângulo θ.
u	Parâmetros das splines.
u_{ix} , u_{iy} , u_{iz}	Componentes dos vetores com origem em P e extremidade em nas juntas esféricas H_i.
V_i $(i=1,5)$	Expressões simplificadoras das equações de velocidade e acelerações angulares, eqs. (3.12) a (3.16).
v_i $(i=1,2,3)$	Os vetores com origem no centro da plataforma fixa e extremidades nos pontos O_i centros dos mecanismos de quatro barras
V_i $(i=6,24)$	Expressões simplificadoras dos vetores de força e torques, eqs. (4.10) e (4.11).
$\bar{x}_i$	Fórmula de conversão de binário para decimal.
x,y,z	Componentes do vetor t.
x_i,y_i,z_i	Componentes dos vetores (L_i)$O_iX_iY_iZ_i$.
$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$	Derivadas primeiras das componentes do vetor t.
$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$	Derivadas segundas das componentes do vetor t.
$\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$	Derivadas primeiras das componentes dos vetores (L_i) $O_iX_iY_iZ_i$.
$\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$	Derivadas segundas das componentes dos vetores (Li) $O_iX_iY_iZ_i$.
x_{H_i}, y_{H_i}, z_{H_i}	Componentes das juntas esféricas.
θ, φ, ψ	Ângulos de Euler.
$\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$	Derivadas primeiras dos ângulos de Euler.
$\ddot{\theta}, \ddot{\varphi}, \ddot{\psi}$	Derivadas segundas dos ângulos de Euler.
φ_y	Ângulo de rotação em torno do eixo Y'.
α_i	Ângulos de entrada formados entre as manivelas de entrada e as bases de cada um dos mecanismos de quatro barras.
(α_i^l, α_i^u)	Intervalo de variação de α_i.
$\alpha_i(t)$	Trajetória da perna i num instante t.

β_i	Maior ângulo entre as bielas dos mecanismos quatro barras e os vetores $\vec{a}_{Gci}$.
$\dot{\alpha}_i$	Derivadas primeiras dos ângulos de entradas (velocidades angulares).
$\ddot{\alpha}_i$	Derivadas segundas dos ângulos de entradas (acelerações angulares).
α_{ii}	Ponto inicial da trajetória i.
α_{if}	Ponto final da trajetória i.
τ_i	Torque total de entrada.
$\tau_i^l \leq \tau_i \leq \tau_i^u$	Intervalo de variação de τ_i.
τ_{Pi}	Torque de entrada devido a PM.
τ_{Mi}	Torque de entrada devido às pernas.
ψ	ângulo de rotação em torno do eixo Z_P.
ω	Vetor velocidade angular.
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	Componentes do vetor velocidade angular.
$\dot{\omega}$	Vetor aceleração angular.
$\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$	Componentes do vetor aceleração angular.
$\dot{\omega}_{bi}, \dot{\omega}_{ci}, \dot{\omega}_{di}$	Acelerações angulares dos segmentos b_i, c_i e d_i respectivamente.

Sumário

Resumo..... VI
Abstract..... VII
Lista de Figuras..... VIII
Simbologia..... XIII

I. Introdução..... 1

II. Modelagem Geométrica do CaPaMan..... 8
2.1 Sistemas robóticos..... 8
2.2 Descrição do CaPaMan..... 10
2.3 Modelo geométrico..... 11
2.4 Cálculo dos ângulos de orientação ψ, φ e θ..... 25
2.5 Cálculo do deslocamento da junta prismática..... 30

III. Modelo Cinemático do CaPaMan..... 32

IV. Modelo Dinâmico do CaPaMan..... 38
4.1 Dinâmica da Plataforma Móvel... 39
4.2 Dinâmica dos Paralelogramos Articulados. 45
4.3 O Torque Total de Entrada.....47

V. Revisão: B-splines..... 48
5.1 Curvas Cúbicas Paramétricas.....48
5.1.1 Curva de Hermite.....51
5.1.2 Curvas de Bézier.....53
5.1.3 B-splines Uniformes (não-racionais).....55
5.2 Curvas B-spline……59
5.2.1 B-splines uniformes e periódicas..... 62
5.2.2 B-splines uniformes quadráticas..... 63
5.2.3 B-splines cúbicas uniformes..... 66
5.2.4 B-splines uniformes de quarta ordem..... 67

VI. Formulação do Problema Ótimo..... 69
6.1 Revisão: Algoritmos genéticos.....72

VII. Simulações numéricas..... 76
7.1 Trajetórias ótimas considerando a minimização da energia e do tempo de percurso 76
7.1.1 Prioridade para a minimização da energia: K_1=0, 8, K_2=0,2..... 78
7.1.2 Prioridade igual para a minimização da energia e do tempo: K_1=K_2=0.5..... 81
7.1.3 Prioridade para a minimização do tempo de percurso: K_1=0,2, K_2=0,8..... 84
7.1.4 Comparação dos resultados..... 87

7.2 Trajetórias ótimas considerando apenas a minimização da energia (tempo total de percurso constante)....88
7.3 Simulação a altas velocidades.... 92
7.3.1 Simulação a altas velocidades, priorizando a minimização da energia: K_1=0,8, K_2=0,2.... 92
7.3.2 Simulação a altas velocidades, mesma prioridade para a energia e o tempo: K_1= K_2=0,5.... 95
7.3.3 Simulação a altas velocidades, priorizando a minimização do tempo: K_1=0,2, K_2=0,8.... 98
7.4 Simulação a altas velocidades com controle do jerk 102
7.4.1 Simulação a altas velocidades com controle do jerk (K_1=K_2=0,2 e K_3=0,6)..... 103
7.4.2 Simulação a altas velocidades com controle do jerk (K_1= K_2=0.3 e K_3=0.4).....105
7.5 Simulação para um CaPaMan robusto considerando K_1=0.8, K_2=0,2 e K_3=0.....109
7.6 Simulação usando B-splines de quarta ordem....112

VIII. Conclusões e trabalhos futuros....117

Referências Bibliográficas....119

Capítulo I

Introdução

A motivação para se criar máquinas que possam substituir o homem na realização de tarefas é uma característica intrínseca da cultura humana. Segundo Romano e Dutra (2002) uma referência explícita a esta idéia foi feita por Aristóteles (séc. IV ac): “se os instrumentos pudessem realizar suas próprias tarefas, obedecendo ou antecipando o desejo das pessoas...”. Mesmo os povos primitivos usavam ferramentas e utensílios que os auxiliavam na realização das tarefas diárias, relacionadas às suas necessidades de sobrevivência.

Em 1921 o termo “robot”, que significa trabalho escravo em eslavo, foi utilizado pelo tcheco Karel Capek em sua peça teatral “O Robô Universal de Rossum” a qual tinha o seguinte enredo: O homem constrói o robô e o robô mata o homem. Em 1941 o escritor de ficção científica Isaac Asimov usou a palavra “robotics” para “descrever” a tecnologia dos robôs e predizer um poderoso crescimento da indústria de robôs. Em 1942 Asimov escreveu “Runaround”, uma estória sobre robôs na qual continha três leis fundamentais da robótica:

- Um robô nunca deve atacar a um ser humano, nem omitir socorro a um ser humano em perigo.
- Um robô deve sempre obedecer às ordens dadas pelos seres humanos, a não ser que esta entre em conflito com a primeira lei.
- Um robô nunca deve se autodestruir e destruir a um dos seus, a não ser que esta entre em conflito com a primeira e segunda lei.

Em 1948 Norbert Wiener publicou “Cibernetics”, uma influencia em pesquisa de inteligência artificial.

Segundo a revista eletrônica Science Education, no artigo “A Short History of Robots” (2005), em 1956, George Devol e Joseph Engelberger criaram “The world’s”, a primeira companhia de robôs. O primeiro robô industrial, denominado Unimate, foi criado em 1961 pela empresa Unimation Inc de propriedade de Joe Engelberger, considerado o “pai da robótica”. Este robô foi utilizado pela linha de produção da fábrica de automóveis General Motors, em New Jersey, no mesmo ano de sua criação. Portanto, observa-se que a robótica é uma tecnologia científica relativamente nova. Neste mesmo artigo a revista eletrônica Science Education afirma que entre entre os anos de 1963 e 1980 foram criados nos Estados Unidos os seguintes dispositivos:

- 1963 - The Rancho Arm: o primeiro braço robótico artificial para ser controlado pelo computador foi projetado e suas seis articulações davam-lhe as flexibilidades de um braço humano.
- 1965 – DENDRAL: um sistema especializado ou programa projetado para executar conhecimentos de peritos no assunto.
- 1970 - Shakey foi apresentado como um robô controlado por inteligência artificial, construído pela SRI Internacional.
- 1974 - Foi construído um braço robótico (The Silver Arm) que executou a montagem de pequenas partes usando realimentação de toque e sensores de pressão.
- 1979 –O robô móvel Stanford Cart cruzou uma sala cheia de cadeiras sem a assistência humana. O carro tinha uma câmera que tirava fotos de vários ângulos e as enviava para um computador. O computador analisava a distância entre o carro e os obstáculos.

Desde 1980, tem havido uma expansão de robôs industriais em indústrias não-automotivas. O principal fator, responsável por este crescimento, tem sido a melhora nos robôs devido ao avanço da microeletrônica e dos computadores. A idéia de se ter robôs andróides funcionando perfeitamente está vários anos adiante da realidade devido aos inúmeros problemas que ainda devem ser resolvidos. Contudo, robôs sofisticados estão atualmente em uso e estão revolucionando os locais de trabalho. Estes robôs não se assemelham ao conceito romântico de robôs andróides, são manipuladores industriais e controlados por computadores.

Os robôs oferecem benefícios para trabalhadores, indústrias e países. Se introduzidos corretamente, robôs industriais podem melhorar a qualidade de vida dos trabalhadores, livrando-os de trabalhos insalubres, perigosos e pesados. Segundo Rosário (2005) os robôs atualmente são utilizados em tarefas inacessíveis ao homem como, por exemplo, em explorações espaciais; também têm sido utilizados na medicina. É verdade que os robôs podem causar desemprego, substituindo trabalhadores humanos por robôs, mas podem também criar novas funções: técnicos em robótica, vendedores, engenheiros, programadores e supervisores. Os benefícios dos robôs na indústria incluem melhora no controle da administração, produtividade e alta qualidade dos produtos. Robôs industriais podem trabalhar dia e noite numa linha de montagem sem se cansar e sem perda de performance. Conseqüentemente, eles podem reduzir muito o custo de bons produtos manufaturados. Como resultado destes benefícios industriais, países que usarem efetivamente robôs em suas indústrias podem obter vantagens econômicas no mundo dos negócios e conseqüentemente obter recursos para reduzir e, financiar o desemprego através de políticas públicas corretas.

Na robótica, uma das maneiras de se classificar robôs é através de sua estrutura topológica. De acordo com este critério um robô pode ter:

- Estrutura serial.
- Estrutura paralela.
- Estrutura híbrida.

Segundo a *International Federation for the Theory of Machines and Mechanisms* (IFFToMM), na revista científica *"Mechanisms and Machine Theory",* (2005) um robô ou manipulador com estrutura paralela é aquele que controla o movimento de seu órgão terminal por meio de pelo menos duas cadeias cinemáticas seriais entre esse órgão terminal e à base do robô. Robôs com esta configuração são ditos de cadeia fechada. Se o robô controla o movimento de seu órgão terminal por meio de apenas uma cadeia cinemática, indo de extremidade até à base do robô, ele é dito de estrutura serial e possui cadeia cinemática aberta. Os robôs híbridos possuem cadeias cinemáticas abertas e fechadas. As Fig. 1.1 e 1.2 mostram exemplos de manipuladores paralelo e serial, respectivamente. Apesar de que a maioria dos processos industriais utiliza manipuladores seriais, (Saramago e Steffen, 1999a), arquiteturas paralelas têm sido extensivamente estudadas nos últimos anos. Muito se tem feito para aumentar a quantidade de aplicações industriais para robôs paralelos tais como manipulação, empacotamento, montagem e processos de separação, simulação de movimentos e máquinas de moer.

Manipuladores paralelos, (Carvalho e Ceccarelli, 1999a), são de grande interesse principalmente porque eles têm vantagens inerentes para várias aplicações. Eles possuem mais resistência, exatidão de posicionamento, capacidade de carga maior que manipuladores seriais e podem ser operados a altas velocidades e acelerações. Em aplicações de usinagem e soldagem utilizam-se manipuladores que trabalham a baixas velocidades com em Siqueira et al (2001). Em geral, robôs paralelos possuem espaços de trabalho menores do que aqueles produzidos por robôs seriais. Para resolver este tipo de problema tem-se construído robôs paralelos sobre plataformas móveis e com pernas que podem modificar o comprimento através de dispositivos tais como uma junta prismática linear.

O objetivo deste trabalho é otimizar trajetórias de robôs com estrutura paralela, aplicando a metodologia desenvolvida à estrutura paralela denominada CaPaMan (Cassino Parallel Manipulator), desenvolvida no Laboratório de Robótica e Mecatrônica em Cassino, Itália, Fig.1.3 (Carvalho e Ceccarelli,2001). Na Fig. 1.4 é mostrado o protótipo do CaPaMan construído na Universidade de Cassino Itália.

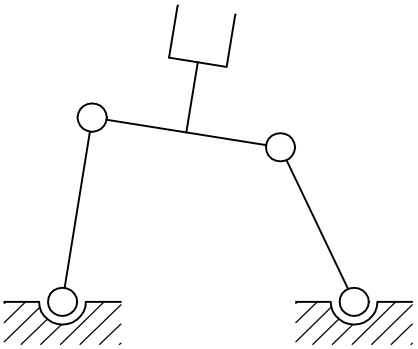


Figura 1.1. Manipulador paralelo.

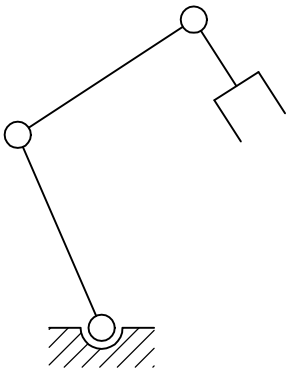
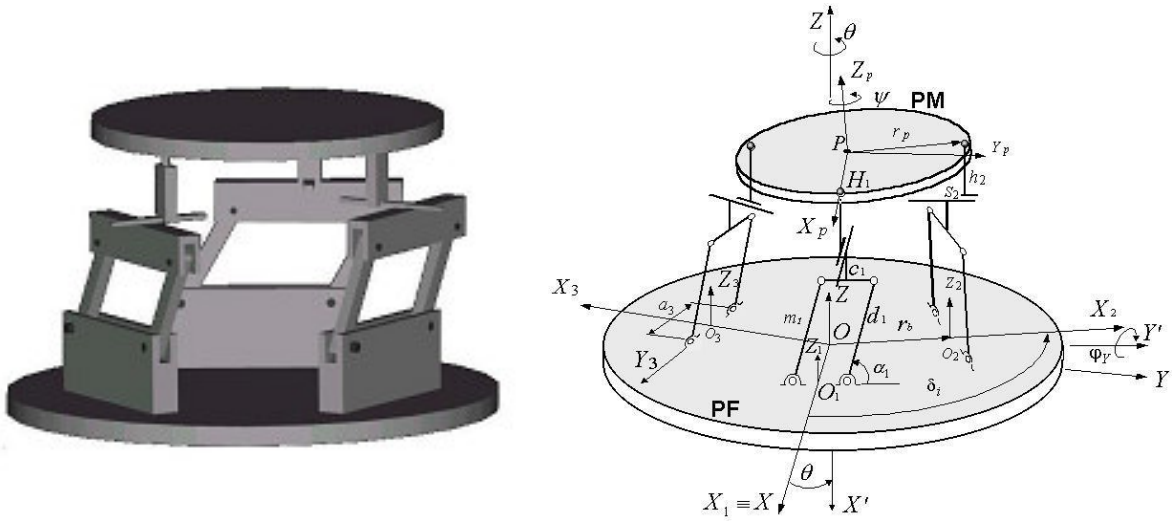


Figura 1.2. Manipulador serial.



(a) (b)

Figura 1.3 CaPaMan- Cassino Parallel Manipulator: a) Representação esquemática, b) Conjunto da estrutura.

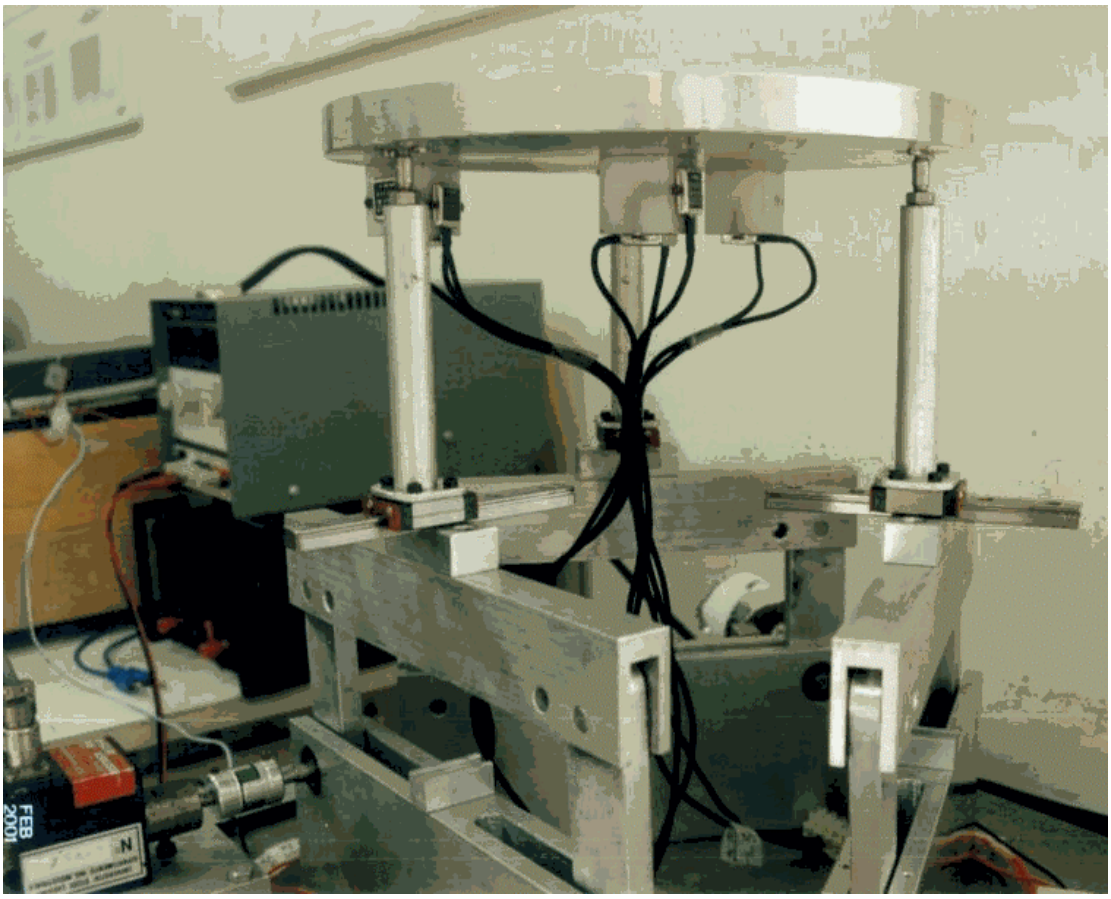


Figura 1.4 Protótipo do CaPaMan- Cassino Parallel Manipulator.

Devido à escassez de energia no mundo moderno torna-se cada vez mais necessário construir máquinas que efetuem trabalho com o menor gasto possível de energia e que tenham um bom desempenho. Os manipuladores paralelos trabalham a altas velocidades e, em geral, executam movimentos repetitivos, isto é, realizam a mesma trajetória várias vezes num curto espaço de tempo. Este processo justifica a necessidade de se otimizar trajetórias de robôs com estrutura paralela em termos do consumo de energia. Deseja-se, com este trabalho, apresentar uma formulação genérica para a otimização de trajetórias de estruturas paralelas. A formulação é desenvolvida conforme o descrito a seguir.

Para a obtenção de trajetórias ótimas de robôs com estrutura paralela, escreve-se um problema de otimização multi-objetivo que considera a minimização da energia gasta por seus atuadores, do tempo total de percurso e da variação das acelerações (*jerk*). As trajetórias são modeladas utilizando-se curvas paramétricas B-splines (Foley et all, 1990), em que seus pontos de controle são adotados como variáveis de projeto. Este procedimento demanda

menor custo computacional no processo de otimização do que quando se consideram os coeficientes da B-spline como variáveis de projeto, conforme utilizado por Saramago e Steffen (1999b) e Oliveira et al (2004). A importância de se usar B-splines é porque, geralmente, elas são curvas suaves, evitando desta forma variações bruscas na velocidade e conseqüentemente na energia. Como uma nova contribuição para a modelagem de trajetórias, além das B-splines cúbicas, apresenta-se também a modelagem das trajetórias por B-splines de quarta ordem. No processo de otimização, um código geral de análise, foi acoplado ao programa de otimização. Este código de análise permite calcular os modelos, geométrico, cinemático e dinâmico resultando no cálculo de energia para cada trajetória do manipulador. Dados os pontos inicial e final do centro da plataforma móvel, o programa de otimização gera trajetórias aleatórias que obedecem a estes pontos, as quais são submetidas ao código de análise para calcular o valor da função multi-objetivo. Durante o procedimento de otimização utilizou-se algoritmos genéticos, sendo aplicado o código comercial GAOT (Genetic Algorithms Optimization on Toolbox) desenvolvido por Houck et al (1995). A presença de vários mínimos locais e de descontinuidades na função que calcula a energia justifica a opção por algoritmo genético. Algoritmo Genético (Haupt, 1998) é uma estratégia de busca estocástica, originado dos mecanismos de seleção natural e dificilmente torna-se preso em ótimos locais, pois busca a solução ótima global manipulando uma população de soluções, ou seja, buscando simultaneamente a solução em diferentes regiões do espaço de busca. Além disso, é muito eficaz para resolver problemas de otimização com função objetivo descontínua, pois não requerer informação de derivadas (Cheng e Hwang, 2001).

O CaPaMan é composto de uma plataforma fixa (PF) e uma móvel (PM) que são conectadas por três pernas, conforme representado na Fig. 1.3. Cada uma das pernas está fixada à PF através de um mecanismo articulado de quatro barras, os quais se mantém sempre na vertical e possuem juntas rotacionais. Os centros das bases destes mecanismos estão dispostos nos vértices de um triângulo eqüilátero na PF, de modo que os planos que os contém, formam entre si ângulos de 120°, atribuindo desta forma propriedades de simetria ao manipulador (Ceccarelli e Figlioline, 1997).

No Capítulo II é apresentada a modelagem geométrica do CaPaMan. Para isto são considerado dois sistemas de coordenadas, um inercial fixado à PF e outro não inercial atado à PM. A orientação do sistema móvel em relação ao fixo é dada pelos ângulos de Euler. Através de rotações, translações e manipulações algébricas convenientes obtém-se os ângulos de Euler em função das coordenadas das juntas esféricas da PM. De posse dos ângulos de Euler, determina-se a matriz de transformação R e as coordenadas do centro da PM são escritas em função dos elementos da matriz R num instante t qualquer.

No Capítulo III descreve-se o modelo cinemático do CaPaMan da seguinte forma: determinam-se as derivadas temporais das coordenadas das juntas esféricas, em termos das variáveis cinemáticas, obtendo-se a velocidade e aceleração do centro da PM. As velocidades e acelerações angulares também são obtidas em função das derivadas dos ângulos de Euler.

No Capítulo IV usam-se as equações de Newton-Euler para obter um modelo analítico para a dinâmica inversa do CaPaMan. Para simplificar a análise dinâmica o manipulador foi decomposto, considerando a plataforma móvel e as pernas do mecanismo. Em seguida, aplicou-se o princípio da superposição para escrever a equação para o torque total de entrada.

No Capítulo V, inicialmente faz-se uma revisão bibliográfica de curvas cúbicas paramétricas e, dentro deste contexto, analisa-se o comportamento das curvas B-splines cúbicas. Em seguida considera-se a formulação para B-splines de quarta ordem. Apresentam-se também as propriedades das B-splines, que são úteis na obtenção das trajetórias ótimas.

No Capítulo VI apresenta-se a formulação, do problema ótimo, escrito como uma função multi-objetivo que considera a minimização da energia consumida pelos atuadores, a minimização do tempo total de percurso e da variação de aceleração (*jerk*). O problema multi-critério é transformado em um problema escalar usando o Método da Ponderação dos Objetivos. Neste capítulo faz-se também algumas considerações sobre algoritmos genéticos.

No Capítulo VII simulações numéricas são feitas para validar a metodologia proposta. No Capítulo VIII são apresentados as conclusões do trabalho e os trabalhos futuros para continuidade da pesquisa e finalmente no Capítulo IX constam as referências bibliográficas.

Capítulo II

Modelagem Geométrica do CaPaMan.

Este capítulo inicia-se com uma breve revisão sobre sistemas robóticos e apresenta uma descrição do CaPaMan. Em seguida é feita a modelagem geométrica do CaPaMan, utilizando dois sistemas de coordenadas, um inercial fixado à plataforma fixa (PF) e outro não inercial na plataforma móvel (PM). A orientação do sistema móvel em relação ao fixo é dada pelos ângulos de Euler. Através de rotações, translações e manipulações algébricas convenientes obtém-se os ângulos de Euler em função das coordenadas de juntas. Conhecendo-se os ângulos de Euler determina-se a matriz de transformação R, e as coordenadas do centro da PM, são escritas em função dos elementos da matriz R num instante t qualquer. Em seguida determinam-se os deslocamentos das juntas prismáticas.

2.1 Sistemas robóticos.

Um sistema robótico (Tsai,1999) consiste basicamente de um manipulador mecânico com um efetuador na extremidade e munido dos seguintes subsistemas: atuadores, sistema de controle e sensores. Os robôs podem ser classificados de acordo com vários critérios, tais como: graus de liberdade, estrutura cinemática, tecnologia de locomoção, geometria do espaço de trabalho e características de movimento. A robótica pode ser dividida em duas grandes áreas, a robótica fixa (manipuladores) e a móvel, um dos problemas da robótica móvel é a irregularidade do solo (Martins-Filho e Prajoux, 1999). Segundo Pizziolo (2003) os robôs móveis podem diferir muito quanto à modelagem matemática e ao meio onde operam, afirma ainda que os robôs terrestres são representáveis por um modelo puramente inercial e que nos aquáticos a dinâmica deve ser levada em conta na modelagem matemática.

Um esquema usual é categorizar robôs de acordo com seus graus de liberdade (gdl). Um robô manipulador pode ter seis gdl para manipular objetos livremente no espaço tridimensional, neste caso ele é chamado robô de propósito geral; de robô redundante caso tenha mais de seis gdl e de deficiente caso tenha menos de seis gdl. Um robô redundante tem mais liberdade para contornar obstáculos e operar num espaço de trabalho rigidamente definido. Por outro lado, para algumas aplicações especiais como ajustar componentes num plano, quatro gdl é suficiente.

Quanto ao acionamento, as formas mais comuns são a elétrica, hidráulica e pneumática. A elétrica é mais limpa e facilita o controle, mas à medida que velocidades maiores e/ou alta

capacidade de carga são exigidas o acionamento hidráulico ou pneumático é mais conveniente. A maior desvantagem de se usar o acionamento pneumático é a dificuldade de controle.

Um outro esquema é classificar os robôs de acordo com sua estrutura topológica. Segundo este critério, um robô ou manipulador com estrutura paralela é aquele que controla o movimento de seu efetuador por meio de pelo menos duas cadeias cinemáticas indo do efetuador até à base do robô. Robôs com esta configuração são ditos de cadeia fechada. Se o robô controla o movimento da extremidade de seu efetuador por meio de apenas uma cadeia cinemática indo da extremidade do efetuador até à base do robô ele é dito de estrutura serial. Os robôs híbridos possuem cadeias cinemáticas abertas e fechadas.

Outra forma de classificar os sistemas robóticos é quanto à geometria do espaço de trabalho. O espaço de trabalho de um manipulador é definido como o conjunto de pontos atingíveis pelo efetuador. Embora não seja uma condição necessária, muitos manipuladores seriais são projetados dando prioridade aos seus três primeiros segmentos. Assim, os três primeiros segmentos são usados para determinar a posição e os segmentos restantes são usados para definir a orientação do efetuador. Por esta razão, a montagem formada pelos três primeiros segmentos é denominada braço e a montagem associada aos segmentos restantes é o punho. Segundo o IFFToM, “Mechanisms and Machine Theory”, (2005), braço é um conjunto de segmentos conectados por articulações(juntas) as quais suportam posições e movem o efetuador de um manipulador. Exceto para manipuladores redundantes, o braço tem usualmente três gdl enquanto que o punho tem de um a três gdl. Freqüentemente os punhos são projetados de modo que os eixos das juntas se interceptem num único ponto denominado de centro do punho. Os braços podem assumir várias configurações cinemáticas e conseqüentemente gerar diferentes espaços de trabalho. Conforme (Tsai, 1999) a mais simples estrutura do braço de um robô é constituído por três juntas prismáticas mutuamente perpendiculares, este tipo de robô é conhecido como robô cartesiano. A posição do centro do punho de um robô cartesiano pode ser descrita pelas três coordenadas associadas com as três juntas prismáticas, obviamente o volume de trabalho de um robô cartesiano é um paralelepípedo retangular reto. Existem várias configurações de braços de robôs que geram os mais diversos espaços de trabalhos.

Robôs manipuladores podem também ser classificados de acordo com a natureza de seus movimentos tais como planares, cilíndricos esféricos, etc.

O número de graus de liberdade de um mecanismo é o número de parâmetros independentes ou entradas necessárias para especificar completamente o mecanismo. Em geral manipuladores paralelos consistem de uma plataforma móvel que é conectada a uma base fixa por várias pernas. Geralmente o número de pernas é igual ao número de graus de

liberdade, tal que cada perna é controlada por um atuador e todos os atuadores podem ser montados na plataforma fixa, ou próximo dela, por esta razão algumas vezes eles são denominados manipuladores plataforma. Um manipulador paralelo é dito simétrico se satisfaz as seguintes condições: o número de pernas é igual ao número de graus de liberdades da plataforma móvel; o tipo e o número de juntas em todas as pernas são dispostos de forma idêntica; o número e a localização das juntas em todas as pernas são o mesmo. Quando as condições mencionadas anteriormente não são satisfeitas, o manipulador é denominado assimétrico.

2.2 Descrição do Capaman.

O CaPaMan é um manipulador paralelo simétrico com três graus de liberdade, composto de uma plataforma fixa (PF) e uma móvel (PM) que são conectadas por três pernas. Cada uma das pernas está fixada à PF através de um mecanismo articulado de quatro barras, os quais se mantém sempre na vertical em relação à PF e possuem juntas rotacionais. Os centros das bases destes mecanismos estão dispostos nos vértices de um triângulo eqüilátero na PF, de modo que os planos que os contém, formam entre si ângulos de 120°; atribuindo desta forma propriedades de simetria ao manipulador. Conforme pode ser observado nas Fig. 2.1, as barras de ligações (conectoras) entre os mecanismos de quatro barras h_i, $i = 1, 2, 3$ e a PM contém duas juntas; uma esférica conectando a extremidade superior da barra à PM nos respectivos H_i e a outra prismática, a qual é fixada no ponto médio e perpendicular à biela do mecanismo de quatro barras. Os parâmetros dimensionais do CaPaMan $i = 1,2,3$, conforme Figs. 2.1 e 2.2 são: a_i é o comprimento da base do mecanismo de acionamento (perna); m_i é o comprimento da manivela de entrada; c_i é comprimento da biela; d_i é comprimento da manivela de saída; h_i comprimento da barra conectora; r_P raio da PM dado pela distância do centro P da PM às juntas esféricas H_i; r_B raio da PF dado pela, distância do seu centro O aos pontos médios O_i das bases a_i. S_i é a variável deslocamento da junta prismática; δ_i, ângulos de rotações estruturais entre OX e OX_i bem como entre PX_P e PH_i; α_i variáveis cinemáticas: ângulos de entrada formados entre as bases e manivelas de entrada dos mecanismos de acionamento(pernas).

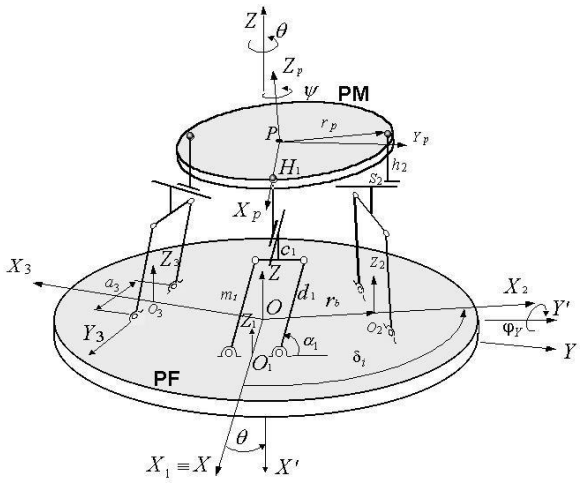


Figura 2.1 Arquitetura do CaPaMan.

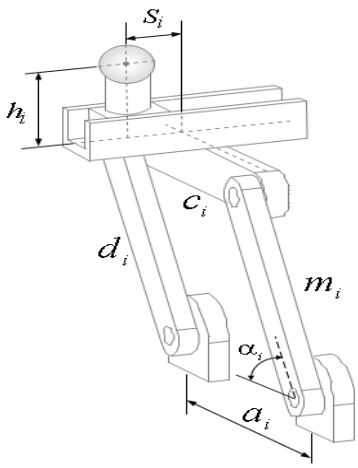


Figura 2.2 Mecanismo de acionamento (perna i).

2.3 Modelo geométrico.

Para descrever o comportamento cinemático e dinâmico do CaPaMan, consideram-se dois sistemas de coordenadas. Um sistema inercial OXYZ é fixado à PF, cuja origem O é o centro da PF e o outro $PX_PY_PZ_P$ é fixado à PM sendo P o centro da PM. O eixo X tem a mesma direção do segmento ligando os pontos O e O_1. O eixo Z é perpendicular ao plano da PF e Y é tomado neste plano de modo a definir um sistema cartesiano ortogonal. O sistema móvel $PX_PY_PZ_P$ é fixado de modo que o eixo X_P seja coincidente com a linha unindo os pontos P e H_1, o Z_P é perpendicular à PM e o eixo Y_P é colocado sobre a PM de maneira que o referencial móvel seja ortogonal. Como os planos que contém os mecanismos de quatro barras formam

entre si ângulos de 120° cada sistema cartesiano de referência $O_iX_iY_iZ_i$ para i=1,2,3 é tomado de maneira que O_i coincida com o centro da base a_i do mecanismo de quatro barras. O eixo X_i é perpendicular ao plano do mecanismo de quatro barras, o eixo Y_i coincide com a base do mecanismo e Zi é tomado de modo que o sistema de referência $O_iX_iY_iZ_i$ seja cartesiano. Desse modo cada eixo X_i é girado de 120° em relação ao X_i imediatamente anterior.

A orientação do sistema móvel $PX_PY_PZ_P$ fixo à PM é descrita em relação ao sistema inercial PXYZ fixo à PF, pelos ângulos de Euler θ, φ, e ψ, Fig. 2.3. A Fig. 2.3, mostra a plataforma móvel após três rotações, de acordo com a regra da mão direita, na seguinte seqüência: a primeira rotação, de um ângulo θ é realizada em torno do eixo Z no sistema OXYZ , produzindo assim um novo sistema OX'Y'Z'. A segunda rotação φ_y é feita em torno do eixo *Y'*, pertencente ao sistema OX'Y'Z', obtendo-se o sistema OX''Y''Z''. A terceira rotação ψ, é realizada em torno do eixo Z'' do sistema OX''Y''Z'', obtendo-se finalmente o sistema OX'''Y'''Z'''. Fazendo-se a translação do sistema OX'''Y'''Z''' com centro em O, para o centro da plataforma móvel, no ponto P, obtém-se o sistema $PX_pY_pZ_p$. Considere X_P o vetor das coordenadas do ponto P em relação ao sistema *OX'''Y'''Z'''*, e X^1 o vetor das coordenadas de P em relação ao sistema *OX''Y''Z''*.

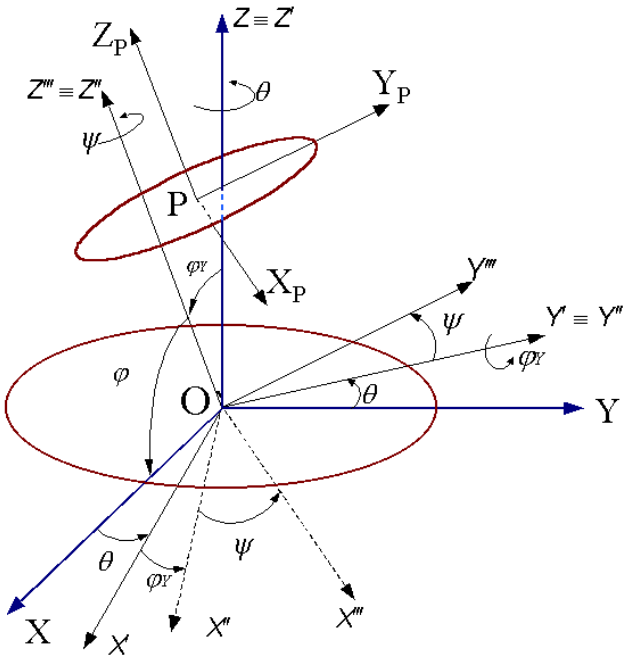


Figura 2.3 - Orientação da plataforma móvel em função dos ângulos de rotação θ , φ. e ψ .

$$X^1 = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X^p \tag{2.1}$$

Se X^2 é o vetor das coordenadas de P em relação ao sistema $OX'Y'Z'$, então:

$$X^2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_y & 0 & \operatorname{sen}\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y \end{pmatrix} X^1 \tag{2.2}$$

Finalmente, se X é o vetor das coordenadas de P em relação ao sistema $OXYZ$, tem-se:

$$X = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X^2 \tag{2.3}$$

Das Eqs. (2.1), (2.2) e (2.3) obtém-se:

$$X = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_y & 0 & \operatorname{sen}\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X^p \tag{2.4}$$

Escrevendo a Eq. (2.4) na forma simplificada tem-se:

$$X = [R(\theta, z)][R(\varphi_y, y)][R(\psi, z)]X^p \tag{2.5}$$

Fazendo $R = [R(\theta, z)][R(\varphi_y, y)][R(\psi, z)]$ e efetuando o produto, obtém-se a matriz de transformação em função dos ângulos de Euler:

$$R = \begin{pmatrix} c\theta\, c\varphi_y\, c\psi - s\theta . s\psi & -c\theta\, c\varphi_y\, s\psi - s\theta\, c\psi & c\theta\, s\varphi_y \\ s\theta\, c\varphi_y c\psi + c\theta\, s\psi & -s\theta\, c\varphi_y\, s\psi + c\theta\, c\psi & s\theta\, s\varphi_y \\ -s\varphi_y\, c\psi & s\varphi_y\, s\psi & c\varphi_y \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Observe na Fig. 2.3 que $\varphi_y = \frac{\pi}{2} - \varphi$, portanto:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\varphi_y = \cos\varphi \\ \cos\varphi_y = \operatorname{sen}\varphi \end{cases} \tag{2.7}$$

Substituindo a Eq. (2.7) na Eq. (2.6) tem-se:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\psi - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi & -\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\theta \cos\psi & \cos\theta\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\psi + \cos\theta \operatorname{s}\operatorname{sen}\psi & -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi + \cos\theta\cos\psi & \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ -\cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi \operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Assim, a Eq. (2.5) pode ser escrita da forma,

$$X = R\,X^p \tag{2.9}$$

Na Fig. 2.4, observe que $\delta_1 = 0^o$, $\delta_2 = 120^o$ e $\delta_3 = 240^o$. Além disso, O_1, O_2, O_3 são os centros das bases fixas dos mecanismos de quatro barras.

A partir das Figs. 2.4 e 2.5, pode-se escrever os seguintes vetores.

Os vetores com origem no centro da plataforma fixa e extremidades nos pontos O_i centros dos mecanismos de quatro barras, escritos no referencial inercial, para *i* = 1, 2,3 representados por:

$$v_i = \begin{pmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Os vetores com origem nos pontos O_i e extremidades nas juntas esféricas H_i , $i = 1,2,3$ escritos no referencial OXYZ, são dados por:

$$L_i = \begin{pmatrix} L_{ix} \\ L_{iy} \\ L_{iz} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

Os vetores com origem no centro da PF e extremidade nas juntas prismáticas, no referencial OXYZ, $i = 1,2,3$ podem ser escritos como:

$$P_i^* = \begin{pmatrix} P_{ix}^* \\ P_{iy}^* \\ P_{iz}^* \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Os vetores P_i, $i = 1,2,3$ possuem origem no centro da plataforma móvel e extremidades nas juntas esféricas, escrito em relação à plataforma móvel é :

$$P_i = \begin{pmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

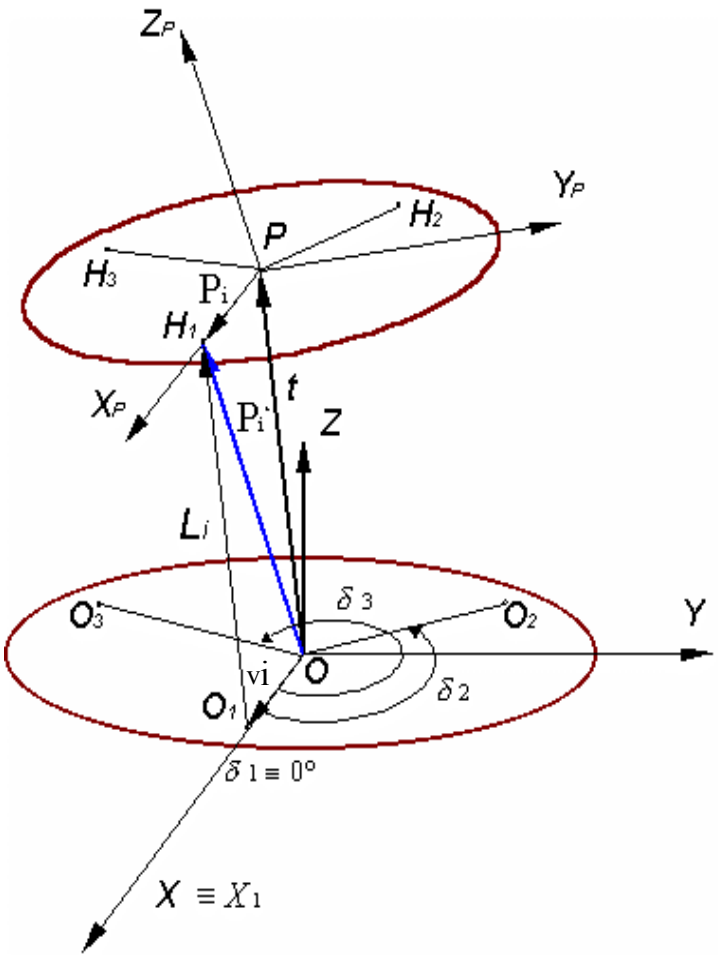


Figura 2.4. Representação dos vetores associados às juntas esféricas (H1, H_2, H_3).

Considerando t o vetor que une os centros das duas plataformas; móvel e fixa podem-se escrever as seguintes relações:

$$P_i^* = R\ P_i + t \tag{2.14}$$

$$P_i^* = v_i + L_i \tag{2.15}$$

Os vetores v_i são tomados de modo que $|v_1| = |v_2| = |v_3| = r_B$ (raio da PF); portanto:

$$v_i = r_B \begin{pmatrix} \cos\delta_i \\ \operatorname{sen}\delta_i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

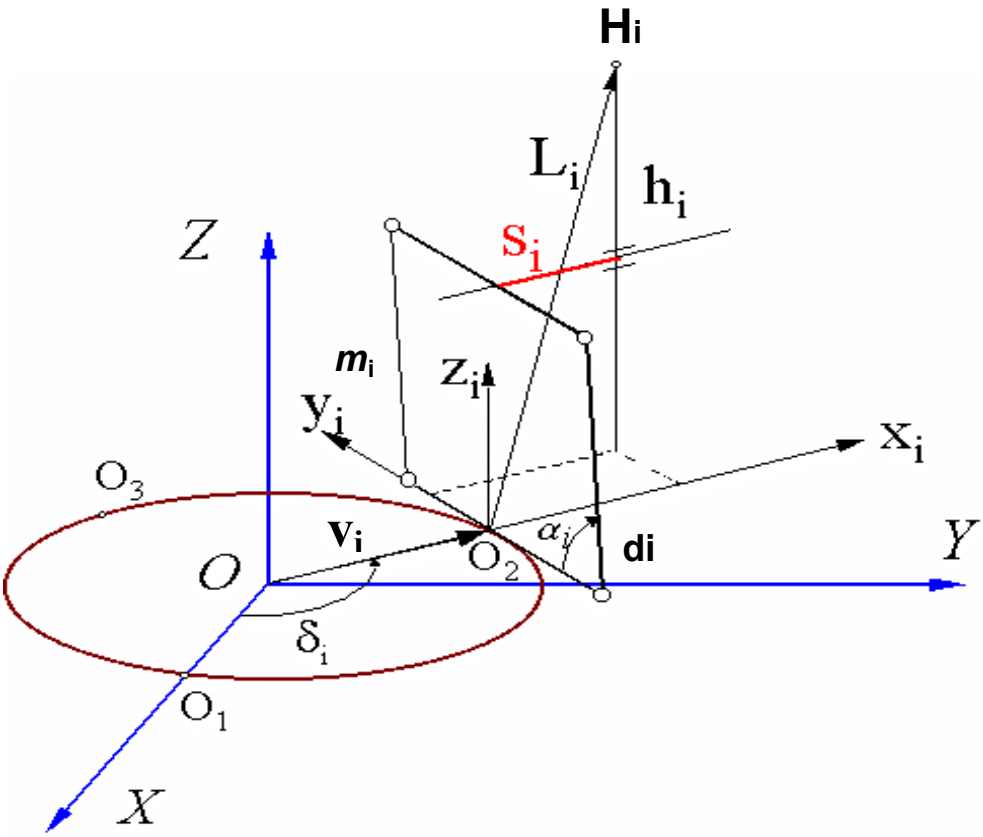


Figura 2.5. Parâmetros associados à perna i.

Sendo δ_1 =0°; δ_2 =120° e δ_3 =240° pode-se escrever:

$$v_1 = \begin{pmatrix} r_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} r_B \\ \frac{\sqrt{3}}{2} r_B \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} r_B \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} r_B \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Das Figs. 2.4 e 2.5, considerando m_i=d_i tem-se:

$$(L_i)_{O_iX_iY_iZ_i} = \begin{pmatrix} S_i \\ m_i \cos\alpha_i \\ m_i \operatorname{sen}\alpha_i + h_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

$$(L_i)_{OXYZ} = [R_i](L_i)_{O_iX_iY_iZ_i} \tag{2.19}$$

onde, $[R_i]$ é a matriz de rotação de um ângulo δ_i em torno do eixo Z e é dada por:

$$[R_i] = \begin{pmatrix} \cos\delta_i & -\operatorname{sen}\delta_i & 0 \\ \operatorname{sen}\delta_i & \cos\delta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Utilizando as Eqs. (2.18), (2.19) e (2.20), pode-se escrever:

$$L_i = \begin{pmatrix} \cos\delta_i & -\operatorname{sen}\delta_i & 0 \\ \operatorname{sen}\delta_i & \cos\delta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_i \\ m_i \cos\alpha_i \\ m_i \operatorname{sen}\alpha_i + h_i \end{pmatrix} = [R_i] \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Efetuando-se o produto em ambos os membros, têm-se:

$$L_i = \begin{pmatrix} S_i \cos\delta_i - m_i \operatorname{sen}\delta_i \cos\alpha_i \\ S_i \operatorname{sen}\delta_i + m_i \cos\delta_i \cos\alpha_i \\ m_i \operatorname{sen}\alpha_i + h_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \cos\delta_i - y_i \operatorname{sen}\delta_i \\ x_i \operatorname{sen}\delta_i + y_i \cos\delta_i \\ z_i \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Como $\delta_i = 0°$ $\delta_2 = 120°$ e $\delta_3 = 240°$, para $i = 1,2,3$,resulta:

$$L_1 = \begin{pmatrix} S_1 \\ m_1 \cos\alpha_1 \\ m_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}S_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}m_2 \cos\alpha_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}S_2 - \frac{1}{2}m_2 \cos\alpha_2 \\ m_2 \operatorname{sen}\alpha_2 + h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}S_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}m_3 \cos\alpha_3 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}S_3 - \frac{1}{2}m_3 \cos\alpha_3 \\ m_3 \operatorname{sen}\alpha_3 + h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_3 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x_3 - \frac{1}{2}y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

De forma semelhante à Eq. (2.16), para a plataforma móvel tem-se:

$$P_i = r_P \begin{pmatrix} \cos\delta_i \\ \operatorname{sen}\delta_i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

sendo,

$$r_P = |P_1| = |P_2| = |P_3| \tag{2.27}$$

pode-se escrever:

$$P_1 = \begin{pmatrix} r_P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} r_P \\ \frac{\sqrt{3}}{2} r_P \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} r_P \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} r_P \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Da Fig. 2.4 observa-se que o ponto P, extremidade do vetor t é o baricentro do triângulo eqüilátero formado pelos pontos H_1, H_2 e H_3, os quais são extremidades dos vetores P_1^* , P_2^* e P_3^* respectivamente. Desta forma conclui-se que:

$$t = \frac{1}{3}\left(P_1^* + P_2^* + P_3^*\right) \tag{2.29}$$

Substituindo a Eq. (2.15) na Eq. (2.29), obtém-se:

$$\mathrm{t} = \frac{1}{3}\left[\left(\mathrm{v}_1 + \mathrm{L}_1\right) + \left(\mathrm{v}_2 + \mathrm{L}_2\right) + \left(\mathrm{v}_3 + \mathrm{L}_3\right)\right] \tag{2.30}$$

Da Eq. (2.15) , da Fig. 2.4 e do fato da extremidade do vetor P_i^* coincidir com a extremidade do vetor H_i conclui-se que:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x}_{\mathrm{H_i}} \\ \mathrm{y}_{\mathrm{H_i}} \\ \mathrm{z}_{\mathrm{H_i}} \end{pmatrix} = \mathrm{v}_\mathrm{i} + \mathrm{L}_\mathrm{i} \tag{2.31}$$

Fazendo $i = 1,2,3$ na Eq. (2.31), tem-se:

$$\begin{pmatrix} x_{H_1} \\ y_{H_1} \\ z_{H_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_B + x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

$$\begin{pmatrix} x_{H_2} \\ y_{H_2} \\ z_{H_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} r_B \\ \frac{\sqrt{3}}{2} r_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} y_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 - \frac{1}{2} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} r_B - \frac{1}{2} x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} y_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} r_B + \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 - \frac{1}{2} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

$$\begin{pmatrix} x_{H_3} \\ y_{H_3} \\ z_{H_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} r_B \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} r_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} y_3 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} x_3 - \frac{1}{2} y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} r_B - \frac{1}{2} x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} y_3 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} r_B - \frac{\sqrt{3}}{2} x_3 - \frac{1}{2} y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

Das Eqs. (2.30) e (2.31) conclui-se:

$$t = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} x_{H_1} \\ y_{H_1} \\ z_{H_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{H_2} \\ y_{H_2} \\ z_{H_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{H_3} \\ y_{H_3} \\ z_{H_3} \end{pmatrix} \right] \tag{2.35}$$

Efetuando os cálculos obtém-se:

$$t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} y_3 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} x_3 + y_1 - \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{2} y_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

Fazendo $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$ e substituindo na Eq. (2.14) obtém-se:

$$\begin{pmatrix} x_{H_i} \\ y_{H_i} \\ y_{H_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} P_i + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

Substituindo os valores de P_i ($i = 1$,2,3) dado pelas Eqs. (2.28), obtém-se:

$$\begin{pmatrix} x_{H_1} \\ y_{H_1} \\ y_{H_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_P\, R_{11} \\ r_P\, R_{21} \\ r_P\, R_{31} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

$$\begin{pmatrix} x_{H_2} \\ y_{H_2} \\ y_{H_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} r_P\, R_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2} r_P\, R_{12} \\ -\frac{1}{2} r_P\, R_{21} + \frac{\sqrt{3}}{2} r_P\, R_{22} \\ -\frac{1}{2} r_P\, R_{31} + \frac{\sqrt{3}}{2} r_P\, R_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

$$\begin{pmatrix} x_{H_3} \\ y_{H_3} \\ y_{H_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} r_P\, R_{11} - \frac{\sqrt{3}}{2} r_P\, R_{12} \\ -\frac{1}{2} r_P\, R_{21} - \frac{\sqrt{3}}{2} r_P\, R_{22} \\ -\frac{1}{2} r_P\, R_{31} - \frac{\sqrt{3}}{2} r_P\, R_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

Das Eqs. (2.14) e (2.15), tem-se:

$$\mathrm{v_i} + \mathrm{L_i} = [\mathrm{R}]\mathrm{P_i} + \mathrm{t} \tag{2.41}$$

Substituindo os valores dados pelas Eqs. (2.31), (2.32) e (2.36) para (i=1, 2,3) as Eqs. (2.41) podem ser escritas como:

para i=1,

$$\begin{pmatrix} r_B + x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_P\, R_{11} \\ r_P\, R_{21} \\ r_P\, R_{31} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

para i=2,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r_B - \frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}r_B + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r_P R_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2}r_P R_{12} \\ -\frac{1}{2}r_P R_{21} + \frac{\sqrt{3}}{2}r_P R_{22} \\ -\frac{1}{2}r_P R_{31} + \frac{\sqrt{3}}{2}r_P R_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

para $i = 3$,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r_B - \frac{1}{2}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_3 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}r_B - \frac{\sqrt{3}}{2}x_3 - \frac{1}{2}y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r_P R_{11} - \frac{\sqrt{3}}{2}r_P R_{12} \\ -\frac{1}{2}r_P R_{21} - \frac{\sqrt{3}}{2}r_P R_{22} \\ -\frac{1}{2}r_P R_{31} - \frac{\sqrt{3}}{2}r_P R_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

Da Eq. (2.42), tem-se:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_B - r_P R_{11} + x_1 \\ -r_P R_{21} + y_1 \\ -r_P R_{31} + z_1 \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

Da primeira linha da Eq. (2.45) vem que $x_1 = x - r_B + r_P R_{11}$. Como $r_B = r_P$ segue-se que

$$x_1 = x - r_P(1 - R_{11}) \tag{2.46}$$

E da segunda linha da Eq. (2.45), resulta:

$$\mathrm{y} = -\mathrm{r_P}\ \mathrm{R}_{21} + \mathrm{y1} = \mathrm{y}_1 - \mathrm{r_p}(\cos\theta\ \mathrm{sen}\,\psi + \mathrm{sen}\,\theta\ \mathrm{sen}\,\varphi\cos\psi) \tag{2.47}$$

Portanto,

$$\mathrm{y} = \mathrm{y}_1 - \mathrm{r_p}(\cos\theta\ \mathrm{sen}\,\psi + \mathrm{sen}\,\theta\ \mathrm{sen}\,\varphi\ \cos\psi) \tag{2.48}$$

Da segunda linha de (2.43) tem-se também que,

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}\, r_B + \frac{1}{2} r_P\, R_{21} - \frac{\sqrt{3}}{2} r_P\, R_{22} + \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 - \frac{1}{2} y_2 \tag{2.49}$$

Comparando as Eqs. (2.48) e (2.49) e isolando x_2, obtém-se:

$$x_2 = -r_B - \frac{3}{\sqrt{3}} r_P\, R_{21} + r_P\, R_{22} + \frac{2}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 \tag{2.50}$$

como $r_P = r_B$, colocando-se r_P em evidência, obtém-se:

$$x_2 = -r_P \left(1 + \sqrt{3}\, R_{21} - R_{22}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 \tag{2.51}$$

Da segunda linha da Eq. (2.44),

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} r_B + \frac{1}{2} r_P\, R_{21} + \frac{\sqrt{3}}{2} r_P\, R_{22} - \frac{\sqrt{3}}{2} x_3 - \frac{1}{2} y_3 \tag{2.52}$$

Comparando as Eqs. (2.48) e (2.52), tem-se:

$$y_1 - r_P\, R_{21} = -\frac{\sqrt{3}}{2} r_B + \frac{1}{2} r_P\, R_{21} + \frac{\sqrt{3}}{2} r_P\, R_{22} - \frac{\sqrt{3}}{2} x_3 - \frac{1}{2} y_3 \tag{2.53}$$

isolando x_3 na Eq. (2.53), obtém-se:

$$x_3 = -r_P \left(1 - \sqrt{3}\, R_{21} - R_{22}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\, y_3 - \frac{2}{\sqrt{3}}\, y_1 \tag{2.54}$$

Da primeira linha da Eq. (2.36), tem-se:

$$x = \frac{1}{3}\left(x_1 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} y_3 \right) \tag{2.55}$$

Substituindo-se as Eqs. (2.46), (2.2.51) e (2.42) na Eq. (2.55), obtém-se:

$$x = \frac{1}{3}\left[x + (R_{11} - R_{22}) r_P - \frac{2\sqrt{3}}{3} y_2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} y_3 \right] \tag{2.56}$$

isolando x em (2.56) tem-se:

$$x = \frac{y_3 - y_2}{\sqrt{3}} + \frac{r_P}{2}(R_{11} - R_{22}) \tag{2.57}$$

substituindo R_{11} e R_{12}, obtidos na matriz (2.8), em (2.57), resulta:

$$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{y}_3 - \mathrm{y}_2}{\sqrt{3}} - \frac{\mathrm{r}_\mathrm{P}}{2}\left[\cos\theta\cos\psi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi - \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\right] \tag{2.58}$$

Da Eq. (2.58) , por fatoração, primeiro colocando $-\operatorname{sen}\varphi$ em evidência e depois $\cos\theta\cos\psi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi$, tem-se:

$$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{y}_3 - \mathrm{y}_2}{\sqrt{3}} - \frac{\mathrm{r}_\mathrm{P}}{2}(1 - \operatorname{sen}\varphi)\cos(\psi - \theta) \tag{2.59}$$

Da terceira linha da Eq. (2.43), tem-se:

$$z_2 = -\frac{1}{2} r_P R_{31} + \frac{\sqrt{3}}{2} r_P R_{32} + z \tag{2.60}$$

Da terceira linha da Eq. (2.44), tem-se:

$$z_3 = -\frac{1}{2} r_P R_{31} - \frac{\sqrt{3}}{2} r_P R_{32} + z \tag{2.61}$$

Subtraindo-se a Eq. (2.62) da Eq. (2.60), obtém-se:

$$z_2 - z_3 = \sqrt{3}\, r_P R_{32} \tag{2.62}$$

substituindo R_{32} na Eq. (2.62) e isolando $\operatorname{sen}\psi$, pode-se escrever:

$$\operatorname{sen}\psi = \frac{z_2 - z_3}{\sqrt{3}\, r_P \cos\varphi} \tag{2.63}$$

Somando-se as Eqs. (2.60) e (2.61), obtém-se:

$$z_2 + z_3 = -r_P\, R_{31} + 2\, z \tag{2.64}$$

Mas, da Eq. (2.42) verifica-se que,

$$z = -r_P\left(-\cos\varphi\cos\psi\right) + z_1 \tag{2.65}$$

Portanto, a plataforma móvel tem posição definida pelas Eqs. (2.48), (2.59) e (2.65), escrito em função das coordenadas das juntas esféricas H_1, H_2 e H_3 e também dos ângulos de rotação θ, φ e ψ.

$$\begin{cases} x = \dfrac{y_3 - y_2}{\sqrt{3}} - \dfrac{r_P}{2}\left(1 - \operatorname{sen}\varphi\right)\cos\left(\psi - \theta\right) \\ y = y_1 - r_p\left(\cos\theta\ \operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\varphi\ \cos\psi\right) \\ z = r_P \cos\varphi\cos\psi + z_1 \end{cases} \tag{2.66}$$

2.4 Cálculo dos ângulos de orientação ψ, φ e θ.

Substituindo a Eq. (2.65) na Eq. (2.64), resulta:

$$z_2 + z_3 = -3\, r_P\, R_{31} + 2\, z_1 \tag{2.67}$$

substituindo R_{31} na Eq. (2.67) e isolando $\cos\psi$, obtém-se:

$$\cos\psi = \frac{z_2 + z_3 - 2\, z_1}{3\, r_P \cos\varphi} \tag{2.68}$$

Dividindo a Eq. (2.63) pela Eq. (2.68), tem-se:

$$tg\,\psi = \sqrt{3}\,\frac{z_3 - z_2}{2\,z_1 - z_2 - z_3} \tag{2.69}$$

Resolvendo a Eq. (2.69) em ψ, pode-se esvrever:

$$\psi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\sqrt{3}\,\frac{z_3 - z_2}{2\,z_1 - z_2 - z_3}\right) \tag{2.70}$$

Da Eq. (2.62), tem-se:

$$z_2 - z_3 = \sqrt{3}\,r_P \cos\varphi \,\mathrm{sen}\,\psi \tag{2.71}$$

Da Eq. (2.67), tem-se:

$$z_2 + z_3 - 2\,z_1 = 3\,r_P \cos\varphi \cos\psi \tag{2.72}$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros das Eqs. (2.71) e (2.72) respectivamente, obtém-se:

$$(z_2 - z_3)^2 = 3\,r_P{}^2 \cos\varphi^2\,\mathrm{sen}\,\psi^2 \tag{2.73}$$

$$(z_2 + z_3 - 2\,z_1)^2 = 9\,r_P{}^2 \cos\varphi^2 \cos\psi^2 \tag{2.74}$$

Multiplicando a Eq. (2.73) por três,

$$3\,(z_2 - z_3)^2 = 9\,r_P{}^2 \cos\varphi^2\,\mathrm{sen}\,\psi^2 \tag{2.75}$$

Somando-se as Eqs. (2.74) e (2.75), obtém-se:

$$3\,(z_2 - z_3)^2 + (z_2 + z_3 - 2\,z_1)^2 = 9\,r_P{}^2 \cos\varphi^2 \left(\mathrm{sen}\,\psi^2 + \cos\psi^2\right) \tag{2.76}$$

Como $\mathrm{sen}\,\psi^2 + \cos\psi^2 = 1$ a Eq. (2.76) se reduz a:

$$3(z_2 - z_3)^2 + (z_2 + z_3 - 2z_1)^2 = 9r_P{}^2 \cos\varphi^2 \tag{2.77}$$

desenvolvendo os quadrados na Eq. (2.77) e resolvendo em $\cos\varphi^2$, pode-se escrever:

$$\cos\varphi^2 = \frac{4\left(z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3\right)}{9r_P{}^2} \tag{2.78}$$

ou,

$$\cos\varphi = \pm\frac{2}{3r_P}\sqrt{z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3} \tag{2.79}$$

Resolvendo a Eq. (2.79) em φ, tem-se:

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\pm\frac{2}{3r_P}\sqrt{z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3}\right) \tag{2.80}$$

Caso de interesse:

Observe que se o termo dentro da raiz da Eq. (2.80) for igual a zero, tem-se:

$$z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3 = 0 \tag{2.81}$$

Da Eq. (2.79) conclui-se que, $\cos(\varphi) = 0$ se e somente se $z_1=z_2=z_3$ portanto, $\varphi = 90°$. Este ângulo nos dá a situação geométrica em que a plataforma móvel é paralela à plataforma fixa. Da primeira linha da Eq. (2.43), tem-se:

$$x = -\frac{1}{2}r_B + \frac{1}{2}r_P R_{11} - \frac{\sqrt{3}}{2}r_P R_{12} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 \tag{2.82}$$

Da primeira linha da Eq. (2.44), tem-se:

$$x = -\frac{1}{2} r_B + \frac{1}{2} r_P R_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2} r_P R_{12} - \frac{1}{2} x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} y_3 \tag{2.83}$$

Comparando as Eqs. (2.82) e (2.83), obtém-se:

$$x_3 - x_2 = \sqrt{3}\, y_3 + \sqrt{3}\, y_2 + 2\sqrt{3}\, r_P R_{12} \tag{2.84}$$

Da segunda linha da Eq. (2.43), tem-se:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} r_B + \frac{1}{2} r_P R_{21} - \frac{\sqrt{3}}{2} r_P R_{22} + \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 - \frac{1}{2} y_2 \tag{2.85}$$

Da segunda linha da Eq. (2.44), tem-se:

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} r_B + \frac{1}{2} r_P R_{21} + \frac{\sqrt{3}}{2} r_P R_{22} - \frac{\sqrt{3}}{2} x_3 - \frac{1}{2} y_3 \tag{2.86}$$

Somando-se as Eq. (2.85) e (2.86), obtém-se:

$$2\, y = r_P R_{21} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x_3 - x_2 \right) - \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{2} y_3 \tag{2.87}$$

Da segunda linha da Eq. (2.45), tem-se:

$$y = y_1 - r_P R_{21} \tag{2.88}$$

Substituindo as Eqs. (2.84) e (2.88) na Eq. (2.87), obtém-se:

$$R_{21} - R_{12} = \frac{2}{3 r_P} \left(y_1 + y_2 + y_3 \right) \tag{2.89}$$

Substituindo R_{21} e R_{12} na Eq. (2.89) e simplificando sucessivamente, pode-se escrever:

$$\mathrm{sen}(\theta + \psi) = \frac{2 \left(\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2 + \mathrm{y}_3 \right)}{3\, \mathrm{r}_\mathrm{P} \left(1 + \mathrm{sen}\, \varphi \right)} \tag{2.90}$$

Resolvendo a Eq. (2.90), para θ+ψ, obtém-se:

$$\theta + \psi = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{2\left(y_1 + y_2 + y_3\right)}{3\,r_P\left(1 + \operatorname{sen}\varphi\right)}\right] \tag{2.91}$$

ou ainda,

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{2\left(y_1 + y_2 + y_3\right)}{3\,r_P\left(1 + \operatorname{sen}\varphi\right)}\right] - \psi \tag{2.92}$$

Portanto, das Eqs. (2.70), (2.80) e (2.92) os ângulos de orientação ψ , φ e θ podem ser obtidos em função das coordenadas dos pontos H_1, H_2 e H_3, correspondentes à posição das juntas esféricas como:

$$\begin{cases} \psi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\sqrt{3}\,\dfrac{z_3 - z_2}{2\,z_1 - z_2 - z_3}\right) \\ \varphi = \cos^{-1}\left(\pm\dfrac{2}{3\,r_P}\sqrt{z_1^{\,2} + z_2^{\,2} + z_3^{\,2} - z_1\,z_2 - z_1\,z_3 - z_2\,z_3}\right) \\ \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left[\dfrac{2\left(y_1 + y_2 + y_3\right)}{3\,r_P\left(1 + \operatorname{sen}\varphi\right)}\right] - \psi \end{cases} \tag{2.93}$$

A ambigüidade existente na Eq. (2. 80) que define o ângulo φ devido ao sinal $\pm$, pode ser resolvida considerando a geometria e o modelo do CaPaMan que dá φ maior que 90° quando a ordenada z do ponto H_1 é maior que a ordenada z do ponto P e φ é menor que 90° caso contrário. Portanto se $z \geq z_1$ usa-se o sinal (+) em φ, caso contrário usa-se (-). Quando $z_1=z_2=z_3$, ψ e θ são indeterminados, mas a soma destes ângulos pode ser dada pela Eq. (2.91). As coordenadas $y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ são obtidas a partir das Eq. (2.23), (2.24) e (2.25). Observando estas equações, verifica-se que os ângulos ψ , φ e θ dependem dos parâmetros dimensionais do robô m_i, h_i , S_i e dos ângulos de entrada α_i, $i = 1,2,3$, formados pelos braços laterais dos três mecanismos de quatro barras acoplados à plataforma fixa. Portanto a plataforma móvel PM tem posição dada pelas Eqs. (2.66) e orientação definida pelas Eqs. (2.93).

2.5 Cálculo do deslocamento S_i da junta prismática.

Relembrando que o ponto P é extremidade do vetor t, e usando a Eq. (2.14), tem-se:

$$P_i^* = t + R\,P_i \tag{2.94}$$

Substituindo P_i^* , t e P_i na Eq. (2.94), tem-se:

$$\begin{pmatrix} x_{H_i} \\ y_{H_i} \\ z_{H_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + r_P\,R \begin{pmatrix} \cos\delta_i \\ \operatorname{sen}\delta_i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.95}$$

Substituindo $[R]$ e efetuando o produto matricial na Eq. (2.95), obtém-se:

$$\begin{pmatrix} x_{H_i} \\ y_{H_i} \\ z_{H_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + r_P \begin{pmatrix} \cos\delta_i\,R_{11} + \operatorname{sen}\delta_i\,R_{12} \\ \cos\delta_i\,R_{21} + \operatorname{sen}\delta_i\,R_{22} \\ \cos\delta_i\,R_{31} + \operatorname{sen}\delta_i\,R_{32} \end{pmatrix} \tag{2.96}$$

Pode-se também , obter P_i^* a partir da Eq. (2.15) e substituindo os valores de v_i e L_i, ou seja:

$$P_i^* = R_i \begin{pmatrix} v_i + S_i \\ m_i \cos\alpha_i \\ m_i \operatorname{sen}\alpha_i + h_i \end{pmatrix} \tag{2.97}$$

Substituindo R_i e P_i^* na Eq. (2.97), obtém-se:

$$\begin{pmatrix} x_{H_i} \\ y_{H_i} \\ z_{H_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta_i & -\operatorname{sen}\delta_i & 0 \\ \operatorname{sen}\delta_i & \cos\delta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i + S_i \\ m_i \cos\alpha_i \\ m_i \operatorname{sen}\alpha_i + h_i \end{pmatrix} \tag{2.98}$$

Efetuando-se o produto matricial, pode-se esvrever:

$$\begin{pmatrix} x_{H_i} \\ y_{H_i} \\ z_{H_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta_i\,(v_i + S_i) - \operatorname{sen}\delta_i\, m_i \cos\alpha_i \\ \operatorname{sen}\delta_i\,(v_i + S_i) + \cos\delta_i\, m_i \cos\alpha_i \\ m_i \operatorname{sen}\alpha + h_i \end{pmatrix} \tag{2.99}$$

Comparando a primeira linha da equação matricial (2.96) com a primeira da (2.99), obtém-se:

$$x + r_P(\cos\delta_i\, R_{11} + \operatorname{sen}\delta_i\, R_{12}) = \cos\delta_i\,(v_i + S_i) - \operatorname{sen}\delta_i\, m_i \cos\alpha_i \tag{2.100}$$

Observando que $m_i = b$ (manivela de entrada) para $i = 1,2,3$. E que $v_i = r_B = r_P$ com $i = 1,2,3$ pode-se escrever (2.100) como:

$$x + r_P(\cos\delta_i\, R_{11} + \operatorname{sen}\delta_i\, R_{12}) = \cos\delta_i\,(r_P + S_i) - \operatorname{sen}\delta_i\; b\cos\alpha_i \tag{2.101}$$

Da Eq. (2.101), tem-se:

$$\cos\delta_i\,(r_P + S_i) = x + r_P(\cos\delta_i\, R_{11} + \operatorname{sen}\delta_i\, R_{12}) + \operatorname{sen}\delta_i\, b\cos\alpha_i \tag{2.102}$$

Dividindo a Eq. (2.102) por $\cos\delta_i$, tem-se:

$$r_P + S_i = \frac{x}{\cos\delta_i} + r_P\,(R_{11} + \operatorname{tg}\delta_i\, R_{12}) + \operatorname{tg}\delta_i\; b\cos\alpha_i \tag{2.103}$$

Mas, conforme segunda linha da Eq. (2.18) $m_i \cos\alpha_i = y_i$, portanto :

$$y_i = b\cos\alpha_i \tag{2.104}$$

pois $m_i = b = d$, logo:

$$S_i = \frac{x}{\cos\delta_i} + r_P\,(R_{11} + \operatorname{tg}\delta_i\, R_{12}) + y_i\, \operatorname{tg}\delta_i - r_P \tag{2.105}$$

Cabe salientar que, o movimento é possível ou não, se o deslocamento S_i está dentro dos limites de movimento da junta prismática.

Capítulo III

Modelo Cinemático do CaPaMan.

Neste trabalho as trajetórias $\alpha_i(t)$ serão modeladas por B-splines cúbicas ou de quarta ordem, como será posteriormente apresentado no Capítulo V.

O objetivo deste capítulo é a obtenção do modelo cinemático do CaPaMan, ou seja, velocidades e acelerações lineares e angulares.

Para simplificar a compreensão, será adotado, inicialmente,uma representação simples e muito usual na robótica industrial onde as trajetórias são dadas por polinômio cúbicos do tempo t entre os ângulos inicial α_{ii} e final α_{if} nos respectivos tempos t_{ii} e t_{if} como:

$$\alpha_i = \alpha_{ii} + \frac{3(\alpha_{if} - \alpha_{ii})}{(t_{if} - t_{ii})^2} t^2 - \frac{2(\alpha_{if} - \alpha_{ii})}{(t_{if} - t_{ii})^3} t^3 \qquad i=1,2,3. \tag{3.1}$$

Este procedimento é possível devido ao fato de que na robótica industrial as unidades de motor são controladas em posição e velocidade. Mais detalhes sobre o uso da Eq. (3.1) pode ser visto em Ceccarellie Figliolini (1997).

As derivadas temporais de primeira e segunda ordem de (3.1) são dadas por:

$$\dot{\alpha}_i = \frac{6(\alpha_{if} - \alpha_{ii})}{(t_{if} - t_{ii})^2} t - \frac{6(\alpha_{if} - \alpha_{ii})}{(t_{if} - t_{ii})^3} t^2 \tag{3.2}$$

$$\ddot{\alpha}_i = \frac{6(\alpha_{if} - \alpha_{ii})}{(t_{if} - t_{ii})^2} - \frac{12(\alpha_{if} - \alpha_{ii})}{(t_{if} - t_{ii})^3} t \tag{3.3}$$

Da segunda e terceira linha da Eq. (2.20) tem-se:

$$y_i = m_i \cos\alpha_i \tag{3.4}$$

$$z_i = m_i \operatorname{sen}\alpha_i + h_i \tag{3.5}$$

Assim, as Eqs. (3.4), (3.5), (2.66) e (2.93) podem ser usadas para simular as operações cinemáticas do CaPaMan quando as suas dimensões e parâmetros de movimento são fornecidos.

Além disso, uma análise do espaço de trabalho, capacidade de orientação e geração de deslocamento para o CaPaMan são apresentados e discutidos em Carvalho e Ceccarelli (1999a) e Ceccarelli e Figlioline (1997) usando a formulação aqui apresentada. As componentes de velocidade e aceleração do ponto P podem ser obtidas das Eqs. (2.66) fazendo-se a primeira e segunda derivada de cada uma destas equações. As derivadas primeira e segunda podem ser representadas respectivamente pelas equações matriciais:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} +$$

$$r_P \begin{pmatrix} -\frac{(1-\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}(\psi-\theta)}{2} & \frac{\cos\varphi\cos(\psi-\theta)}{2} & \frac{(1-\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}(\psi-\theta)}{2} \\ -(\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cos\psi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi) & -\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\psi & \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi - \cos\theta\cos\psi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

$$
\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \end{pmatrix} +
$$

$$
r_P \begin{pmatrix} -\frac{(1-\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}(\psi-\theta)}{2} & \frac{\cos\varphi\cos(\psi-\theta)}{2} & \frac{(1-\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}(\psi-\theta)}{2} \\ -(\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cos\psi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi) & -\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\psi & \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi - \cos\theta\cos\psi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} +
$$

$$
r_P \begin{pmatrix} \frac{(1-\operatorname{sen}\varphi)\cos(\psi-\theta)}{2} & -\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos(\psi-\theta)}{2} & \frac{(1-\operatorname{sen}\varphi)\cos(\psi-\theta)}{2} \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \cos\theta\operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\psi & \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \cos\theta\operatorname{sen}\psi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\varphi}^2 \\ \dot{\psi}^2 \end{pmatrix} +
$$

$$
r_P \begin{pmatrix} \cos\varphi\operatorname{sen}(\psi-\theta) & -(1-\operatorname{sen}\varphi)\cos(\psi-\theta) & -\cos\varphi\operatorname{sen}(\psi-\theta) \\ -2\cos\varphi\cos\theta\cos\psi & 2(\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\theta\cos\psi) & 2\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}\,\dot{\varphi} \\ \dot{\theta}\,\dot{\psi} \\ \dot{\varphi}\,\dot{\psi} \end{pmatrix}
$$

(3.7)

Onde as expressões da primeira e segunda derivadas das coordenadas y_i e z_i, usando as Eqs. (3.4) e (3.5), são dadas respectivamente por:

$$\dot{y}_i = -m_i\,\dot{\alpha}_i \operatorname{sen}\alpha_i \tag{3.8}$$

$$\dot{z}_i = m_i\,\dot{\alpha}_i \cos\alpha_i \tag{3.9}$$

$$\ddot{y}_i = -m_i\,\ddot{\alpha}_i \operatorname{sen}\alpha_i - m_i\,\dot{\alpha}_i^{\,2} \cos\alpha_i \tag{3.10}$$

$$\ddot{z}_i = m_i\,\ddot{\alpha}_i \cos\alpha_i - m_i\,\dot{\alpha}_i^{\,2} \operatorname{sen}\alpha_i \tag{3.11}$$

De modo análogo, as velocidades e acelerações angulares são deduzidas a partir das derivadas dos ângulos de Euler θ, φ e ψ, dadas pelas Eqs. (2.93). Para simplificar as expressões das derivadas, usaremos a notação V_i para representar parte destas expressões.

$$\dot{\psi} = \frac{\sqrt{3}}{2V_1}\left[(z_2 - z_3)\dot{z}_1 - (z_1 - z_3)\dot{z}_2 + (z_1 - z_2)\dot{z}_3\right] \tag{3.12}$$

onde, $V_1 = z_1^{\,2} + z_2^{\,2} + z_3^{\,2} - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3$,

$$\dot{\varphi} = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(9 r_P^{\,2} - 4V_1\right)V_1}}\left[(2z_1 - z_2 - z_3)\dot{z}_1 + (-z_1 + 2z_2 - z_3)\dot{z}_2 + (-z_1 - z_2 + 2z_3)\dot{z}_3\right] \tag{3.13}$$

se $z \geq z_1$ usa-se o sinal $(-)$ em $\dot{\varphi}$, caso contrário usa-se $(+)$

Observe que z é a terceira componente do ponto P (centro da plataforma móvel).

$$\dot{\theta} = \frac{2}{(1+\operatorname{sen}\varphi)\sqrt{V_2}}\left[(1+\operatorname{sen}\varphi)\left(\dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \dot{y}_3\right) - (y_1 + y_2 + y_3)\dot{\varphi}\cos\varphi\right] - \dot{\psi} \tag{3.14}$$

onde $V_2 = 9\,r_P\,(1+\operatorname{sen}\varphi)^2 - 4(y_1 + y_2 + y_3)^2$

$$\begin{aligned}
\ddot{\psi} = {} & \frac{\sqrt{3}}{2V_1}\left[(z_2 - z_3)\ddot{z}_1 - (z_1 - z_3)\ddot{z}_2 + (z_1 - z_2)\ddot{z}_3\right] + \\
& \frac{\sqrt{3}}{2V_1^{\,2}}\left[\begin{array}{l} -(z_2 - z_3)(2z_1 - z_2 - z_3)\dot{z}_1^{\,2} + \\ +(z_1 - z_3)(-z_1 + 2z_2 - z_3)\dot{z}_2^{\,2} - (z_1 - z_2)(-z_1 - z_2 + 2z_3)\dot{z}_3^{\,2} \end{array}\right] + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{V_1^{\,2}}\left[\begin{array}{l} -(z_1 - z_2)(-z_1 - z_2 + 2z_3)\dot{z}_1\dot{z}_2 + (z_1 - z_3)(-z_1 + 2z_2 - z_3)\dot{z}_1\dot{z}_3 - \\ -(z_2 - z_3)(2z_1 - z_2 - z_3)\dot{z}_2\dot{z}_3 \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\ddot{\varphi} = \pm\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{\sqrt{\left(9 r_P^{\,2} - 4V_1\right)V_1}}\left[(2z_1 - z_2 - z_3)\ddot{z}_1 + (-z_1 + 2z_2 - z_3)\ddot{z}_2 + (-z_1 - z_2 + 2z_3)\ddot{z}_3\right] + \\
+\dfrac{1}{2\sqrt{\left[\left(9 r_P^{\,2} - 4V_1\right)V_1\right]^3}}\left(V_3\dot{z}_1^{\,2} + V_4\dot{z}_2^{\,2} + V_5\dot{z}_3^{\,2}\right) + \\
\dfrac{1}{\sqrt{\left[\left(9 r_P^{\,2} - 4V_1\right)V_1\right]^3}}\left[\left(V_5 - 27 r_P^{\,2} V_1\right)\dot{z}_1\dot{z}_2 + \left(V_4 - 27 r_P^{\,2} V_1\right)\dot{z}_1\dot{z}_3 + \left(V_3 - 27 r_P^{\,2} V_1\right)\dot{z}_2\dot{z}_3\right]
\end{array}\right\}$$

(3.16)

se $z \geq z_1$ usa-se o sinal $(-)$ em $\ddot{\varphi}$, caso contrário usa-se $(+)$.

onde

$$V_3 = 16V_1^2 + 3(z_2 - z_3)^2 \left(9r_P^2 - 8V_1\right)$$

$$V_4 = 16V_1^2 + 3(z_1 - z_3)^2 \left(9r_P^2 - 8V_1\right)$$

$$V_5 = 16V_1^2 + 3(z_1 - z_2)^2 \left(9r_P^2 - 8V_1\right)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} = {} & \frac{2}{\sqrt{V_2}}\left(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + \ddot{y}_3\right) - \frac{2(y_1 + y_2 + y_3)\cos\varphi}{(1+\operatorname{sen}\varphi)\sqrt{V_2}}\left(\ddot{\varphi}\right) + \frac{8(y_1 + y_2 + y_3)}{\sqrt{V_2^3}}\left(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2\right) + \\ & + \frac{(y_1 + y_2 + y_3)\left[18 r_P^2 (1+\operatorname{sen}\varphi)\cos^2\varphi + 2V_2\right]}{(1+\operatorname{sen}\varphi)\sqrt{V_2^3}}\dot{\varphi}^2 + \frac{16(y_1 + y_2 + y_3)}{\sqrt{V_2^3}}\left(\dot{y}_1\dot{y}_2 + \dot{y}_1\dot{y}_3 + \dot{y}_2\dot{y}_3\right) - \\ & - \frac{36 r_P^2 (1+\operatorname{sen}\varphi)^2\cos\varphi}{(1+\operatorname{sen}\varphi)\sqrt{V_2^3}}\left(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2\right)\dot{\varphi} - \dot{\psi}\end{aligned} \tag{3.17}$$

As componentes do vetor velocidade angular ω, no referencial inercial, podem ser escritas em termos dos ângulos de Euler e suas derivadas temporais , da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos\varphi\cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ \cos\varphi\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi}\end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Derivando-se as Eq. em (3.18) , as componentes do vetor aceleração $\dot{\omega}$,podem ser escritas como:

$$\begin{pmatrix}\dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ \cos\varphi\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\operatorname{sen}\varphi\cos\psi & \cos\varphi\operatorname{sen}\psi & \cos\psi \\ -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi & \cos\varphi\cos\psi & -\operatorname{sen}\psi \\ \cos\varphi & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}\dot{\varphi} \\ \dot{\theta}\dot{\psi} \\ \dot{\varphi}\dot{\psi}\end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Conhecendo-se as velocidades e acelerações lineares e angulares, torna-se possível obter as forças e torques atuantes na estrutura, permitindo o desenvolvimento do modelo dinâmico, que será apresentado no próximo capítulo.

Capítulo IV

Modelo Dinâmico do CaPaMan.

A análise dinâmica de arquiteturas paralelas é complexa pela existência de várias cadeias fechadas e suas equações dinâmicas são difíceis de serem formuladas analiticamente devido ao alto grau de não linearidade existente nas equações cinemáticas. Vários métodos têm sido propostos, tais como: a formulação de Newton-Euler, a formulação de Lagrange e o Princípio do Trabalho Virtual, (Erdman e Sandor,1991) e soluções nas quais os laços das cadeias cinemáticas fechadas são particionados para obter uma estrutura de árvore.

Usualmente as equações dinâmicas para arquiteturas paralelas são deduzidas usando técnicas clássicas da dinâmica de corpos rígidos e sistemas de multi corpos. Existem dois tipos de problemas dinâmicos: A dinâmica direta e a dinâmica inversa, (Goldstein, 1980). No problema da dinâmica direta, os valores das coordenadas das juntas, suas primeiras derivadas temporais, os torques ou forças aplicadas e os parâmetros inerciais são conhecidos em cada instante dado. Com os dados descritos acima, obtém-se o movimento resultante do manipulador como função do tempo. O problema da dinâmica inversa consiste em encontrar os torques ou forças que os atuadores devem exercer para gerar uma trajetória desejada para o manipulador. A dinâmica inversa é usada para o controle do manipulador. Assim, é muito importante formular um modelo dinâmico inverso eficiente.

As equações de movimento para sistemas de corpos rígidos múltiplos podem ser formuladas através de vários métodos. Os métodos mais aplicados estão baseados em duas formulações: o primeiro resulta em um sistema de equações como as que contêm as forças aplicadas e as forças de restrição obtidas pelo método de Newton-Euler. As forças de restrição podem ser eliminadas considerando as equações que descrevem sua natureza. O segundo elimina as forças de restrição no início, como a formulação Lagrangiana, (Goldstein, 1980). Neste caso, se necessário, as forças de restrição podem ser avaliadas posteriormente. Para simplificar a formulação das equações dinâmicas, várias hipóteses têm sido feitas: todos os segmentos são considerados como corpos rígidos, os efeitos de elasticidade, viscosidade, e atritos nas juntas são desprezados, e a massa de cada segmento pode ser dividida e concentrada em seus extremos (nas juntas de articulação). Podem ser consideradas outras simplificações na análise dinâmica desde que eles não comprometam a validade dos resultados.

Nesta pesquisa utilizou-se a formulação de Newton-Euler, onde as equações do movimento devem ser escritas para cada um dos corpos que compõem o manipulador. Este

procedimento produz um grande número de equações contendo forças e torques aplicados e também forças de restrição. Em geral, manipuladores paralelos são compostos por uma plataforma móvel, uma base fixa e pernas. Então, para simplificar a análise dinâmica, é habitual decompor o manipulador em plataforma móvel e cadeias de pernas. Considera-se o sistema de referência inercial, com respeito ao qual as leis de Newton-Euler serão aplicadas, fixo à base. Neste capítulo é apresentado um modelo analítico para a dinâmica inversa do CaPaMan (Carvalho e Ceccarelli,2001).

4.1 A Dinâmica da plataforma móvel.

A cadeia cinemática peculiar e propriedades de simetria da arquitetura do CaPaMan foram úteis para formular as equações de Newton-Euler numa forma fechada, para calcular os torques de entrada, os quais são necessários para uma determinada trajetória de movimento da plataforma móvel.

Os efeitos de inércia são importantes em operações rápidas de robótica e não podem ser negligenciados. Conseqüentemente, os comportamentos dinâmicos dos robôs devem ser conhecidos para melhorar a exatidão e controle do movimento do robô. As equações dinâmicas para arquitetura paralela são difíceis de serem formuladas analiticamente devido ao alto grau de não linearidade das equações cinemáticas. As equações de Newton-Euler para o CaPaMan podem ser formuladas considerando todos os componentes como corpos rígidos. A posição, a orientação, a velocidade e a aceleração da plataforma móvel são dadas pelas Eqs. (2.66), (2.93) e (3.1) a (3.18).

Nesta formulação assume-se que os três mecanismos de quatro barras são paralelogramos articulados com $a_i = c_i$ e $m_i = d_i$. Considera-se também $r_B=r_P$.

Deste modo, conforme representado na Fig. 4.1, o equilíbrio dinâmico para a PM é representado pelas equações de Newton-Euler na forma :

$$F + F_{ext} + G = F_{in} \tag{4.1}$$

$$N + N_{ext} = N_{in} \tag{4.2}$$

Sendo F_{ext} a força externa, N_{ext} o torque externo, G o peso da plataforma móvel, F a soma das forças de reação F_i (i=1, 2,3) nos pontos H_i da PM e N o torque resultante devido as forças F_i, em relação ao sistema de referência OXYZ fixo na base PF.

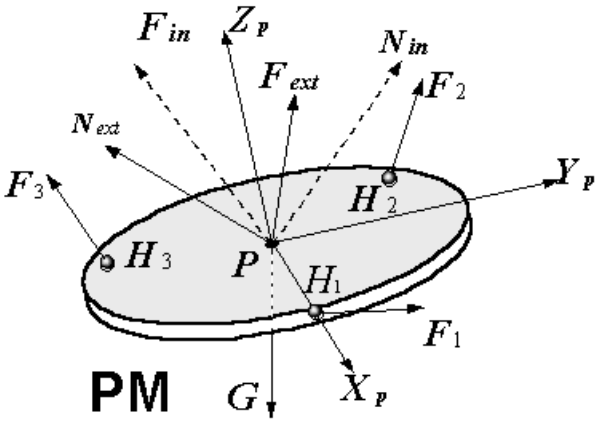


Figura 4.1 Forças atuantes na PM

Além disso, deve-se considerar as expressões:

$$\mathrm{F_{in}} = M\,\mathrm{a_P} \tag{4.3}$$

$$\mathrm{N_{in}} = I\,\dot{\omega} + \omega \times I\,\omega \tag{4.4}$$

$$\mathrm{F} = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{F_i} \tag{4.5}$$

$$\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{3} \left(r_P\, R\,\mathrm{u_{Pi}}\right) \times \mathrm{F_i} \tag{4.6}$$

Onde M é a massa da PM; a_P é a aceleração do ponto central P; $\dot{\omega}$ e ω são a aceleração angular e velocidade angular, respectivamente e I é a matriz de inércia da plataforma móvel em relação ao sistema inercial. A matriz de inércia I pode ser determinada por:

$$\mathrm{I} = \mathrm{R\,I_c\,R^t} \tag{4.7}$$

onde R é a matriz de transformação, dada pela Eq. (2.6), R^t é a sua transposta e $\mathrm{I_c}$ é a matriz de inércia do centro de massa da PM com respeito ao sistema não inercial.

Nesta análise são desprezados os atritos nas juntas do CaPaMan. As componentes das forças atuantes nas articulações H_i, devido às barras conectoras h_i podem ser consideradas como pertencentes a um plano paralelo aos respectivos paralelogramos articulados e mais uma componente na direção ortogonal. Assim, caso a componente ortogonal exista, ela serve para reposicionar a plataforma móvel em uma posição de equilíbrio. Então, as forças nas articulações H_i possuem somente as componentes F_{iy} e F_{iz} para i=1, 2, 3, como esquematizado na Fig. 4.2. Deve-se observar que as componentes de torque são produzidas pela ação, dos atuadores e que as componentes de forças são resultantes do equilíbrio das forças nos corpos.

Resolvendo as equações (4.5) e (4.6) obtém-se as componentes da força resultante F e do torque N em relação ao sistema inercial são dados por:

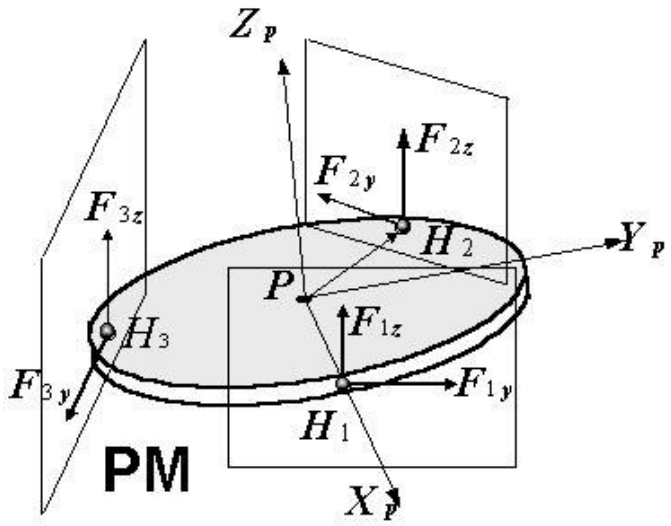


Figura 4.2- Forças atuantes nos pontos de articulação H_i.

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} F_{2y} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{3y} \\ F_{1y} - \frac{1}{2} F_{2y} - \frac{1}{2} F_{3y} \\ F_{1z} + \frac{1}{2} F_{2z} + \frac{1}{2} F_{3z} \\ -u_{1z} F_{1y} + \frac{1}{2} u_{2z} F_{2y} + \frac{1}{2} u_{3z} F_{3y} + u_{1y} F_{1z} + u_{2y} F_{2z} + u_{3y} F_{3z} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} u_{2z} F_{2y} + \frac{\sqrt{3}}{2} u_{3z} F_{3y} + -u_{1x} F_{1z} - u_{2x} F_{2z} - u_{3x} F_{3z} \\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} u_{2y} - u_{2x}\right) F_{2y} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} u_{3y} + u_{3x}\right) F_{3y} + u_{1x} F_{1y} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

onde

$$\begin{pmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \end{pmatrix} = r_P\, R \begin{pmatrix} \cos\delta_i \\ \operatorname{sen}\delta_i \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (i=1,\ 2\ ,\ 3) \tag{4.9}$$

As Eqs. de (4.1) a (4.9) podem ser resolvidas para obter as componentes de força F_{iy} e torques N_{iz} expressas pela equação matricial:

$$\begin{pmatrix} F_{1y} \\ F_{2y} \\ F_{3y} \\ N_{1z} \\ N_{2z} \\ N_{3z} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{2}{2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} + u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}} \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} + u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}} \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} + u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}} \\ \dfrac{3V_{10}}{V_6} & \dfrac{3V_{11}}{V_6} & \dfrac{3V_{12}}{V_6} \\ \dfrac{-3V_{16}}{V_6} & \dfrac{-V_{17}}{V_6} & \dfrac{-3V_{18}}{V_6} \\ \dfrac{3V_{22}}{V_6} & \dfrac{3V_{23}}{V_6} & \dfrac{3V_{24}}{V_6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

onde a matriz,

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}\left(-u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} + u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}\right)}{3\left(2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} + u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}\right)} & \dfrac{\sqrt{3}\left(-u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} - u_{3x} - \sqrt{3}\,u_{3y}\right)}{2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} + u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}} & 0 \\ \dfrac{2\sqrt{3}\left(-u_{1x} + u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}\right)}{3\left(2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} + u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}\right)} & \dfrac{-2u_{1x}}{2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} + u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}} & 0 \\ \dfrac{2\sqrt{3}\left(u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y}\right)}{3\left(2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} + u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}\right)} & \dfrac{-2u_{1x}}{2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} + u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}} & 0 \\ \dfrac{V_7}{V_6} & \dfrac{3V_8}{V_6} & \dfrac{3V_9}{V_6} \\ \dfrac{-V_{13}}{V_6} & \dfrac{-3V_{14}}{V_6} & \dfrac{-3V_{15}}{V_6} \\ \dfrac{V_{19}}{V_6} & \dfrac{3V_{20}}{V_6} & \dfrac{3V_{21}}{V_6} \end{pmatrix}$$

(4.11)

sendo, as expressões, V_i , Carvalho e Ceccarelli (1999a) dadas por:

$$V_6 = 3\left[u_{1x}\left(u_{2y} - u_{3y}\right) + u_{2x}\left(-u_{1y} + u_{3y}\right) + u_{3x}\left(u_{1y} - u_{2y}\right)\right]\left(2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} - u_{3x} - \sqrt{3}\,u_{3y}\right)$$

(4.12)

$$V_7 = \sqrt{3}\left(u_{2x} - u_{3x}\right)\begin{bmatrix} u_{1x}\left(-u_{2z} + u_{3z}\right) - u_{1z}\left(-u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} + u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}\right) + \\ u_{2z}\left(u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}\right) + u_{3z}\left(-u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y}\right) \end{bmatrix} + \\ 3\left(u_{2y} - u_{3y}\right)\left[u_{1x}\left(u_{2z} + u_{3z}\right) + u_{3z}\left(-u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y}\right) - u_{2z}\left(u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}\right)\right] \tag{4.13}$$

$$V_8 = \sqrt{3}\,u_{1x}\left(u_{2y} - u_{3y}\right)\left(u_{2z} - u_{3z}\right) + \\ \left(u_{2x} - u_{3x}\right)\left[-u_{1x}\left(u_{2z} + u_{3z}\right) + u_{1z}\left(u_{2x} - \sqrt{3}\,u_{2y} + u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}\right)\right] \tag{4.14}$$

$$V_9 = \left(u_{2x}\,u_{3y} - u_{2y}\,u_{3x}\right)\left(2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} - u_{3x} - \sqrt{3}\,u_{3y}\right) \tag{4.15}$$

$$V_{10} = \left(-u_{2x} + u_{3x}\right)\left(2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} - u_{3x} - \sqrt{3}\,u_{3y}\right) \tag{4.16}$$

$$V_{11} = \left(-u_{2y} + u_{3y}\right)\left(2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} - u_{3x} - \sqrt{3}\,u_{3y}\right) \tag{4.17}$$

$$V_{12} = \sqrt{3}\left(-u_{2y} + u_{3y}\right)\left(u_{2z} - u_{3z}\right) + \left(u_{2x} - u_{3x}\right)\left(-2u_{1z} + u_{2x} + u_{3z}\right) \tag{4.18}$$

$$V_{13} = \sqrt{3}\left(u_{1x} - u_{3x}\right)\begin{bmatrix} u_{1x}\left(u_{3z} - u_{2z}\right) - u_{1z}\left(-u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} + u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}\right) + \\ u_{3z}\left(-u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y}\right) + u_{2z}\left(u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}\right) \end{bmatrix} + \\ + 3\left[u_{1x}\left(u_{2z} + u_{3z}\right)\left(u_{1y} - u_{3y}\right) + u_{3z}\left(u_{1x} - u_{3y}\right)\left(-u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y}\right) - u_{1y}\,u_{2z}\left(u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}\right) + V_7\right] \tag{4.19}$$

$$V_{14} = \sqrt{3}\,u_{1x}\left(u_{1y} - u_{3y}\right)\left(u_{2z} - u_{3z}\right) + \left(u_{3x} - u_{1x}\right)\left[u_{1x}\left(u_{2z} + u_{3z}\right) - u_{1z}\left(u_{2x} - \sqrt{3}\,u_{2y} + u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y}\right)\right]$$

(4.20)

$$V_{15} = \left(u_{1x}\,u_{3y} - u_{1y}\,u_{3x}\right)\left(2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} - u_{3x} - \sqrt{3}\,u_{3y}\right) \tag{4.21}$$

$$V_{16} = (-u_{1x} + u_{3x})(2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} - u_{3x} - \sqrt{3}\,u_{3y}) \tag{4.22}$$

$$V_{17} = (u_{3y} - u_{1y})(2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} - u_{3x} - \sqrt{3}\,u_{3y}) \tag{4.23}$$

$$V_{18} = \sqrt{3}\,(u_{3z} - u_{2z})(u_{1y} - u_{3y}) + (u_{3x} - u_{1x})(2u_{1z} - u_{2z} - u_{3z}) \tag{4.24}$$

$$V_{19} = \sqrt{3}\left\{\begin{array}{l}(u_{1x} - u_{2x})\left[(u_{3z} - u_{1z})(-u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y}) + (u_{2z} - u_{1z})(u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y})\right] + \\ u_{1x}\left[u_{1x}(u_{3z} - u_{2z}) + u_{2x}(u_{2z} + u_{3z})\right] + \\ 3(u_{1y} - u_{2y})\left[u_{1x}(u_{2z} + u_{3z}) + u_{3z}(-u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y}) - u_{2z}(u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y})\right]\end{array}\right\} \tag{4.25}$$

$$V_{20} = \sqrt{3}\,u_{1x}(u_{1y} - u_{2y})(u_{2z} - u_{3z}) + (u_{1x} - u_{2x})\left[-u_{1x}(u_{2z} + u_{3z}) + u_{1z}(u_{2x} - \sqrt{3}\,u_{2y} + u_{3x} + \sqrt{3}\,u_{3y})\right]$$

4.26)

$$V_{21} = (u_{1x}\,u_{2y} - u_{1y}\,u_{2x})(2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} - u_{3x} - \sqrt{3}\,u_{3y}) \tag{4.27}$$

$$V_{22} = (-u_{1x} + u_{2x})(2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} - u_{3x} - \sqrt{3}\,u_{3y}) \tag{4.28}$$

$$V_{23} = (-u_{1y} + u_{2y})(2u_{1x} - u_{2x} + \sqrt{3}\,u_{2y} - u_{3x} - \sqrt{3}\,u_{3y}) \tag{4.29}$$

$$V_{24} = \sqrt{3}\,(-u_{2y} + u_{1y})(-u_{2z} + u_{3z}) + (u_{1x} - u_{2x})(-2u_{1z} + u_{2x} + u_{3z}) \tag{4.30}$$

Observando as Figs. (2.1) e (4.3), os torques de entrada na manivela de cada mecanismo articulado de quatro barras, devido à plataforma móvel, τ_{Pi} i = 1, 2, 3 ; podem ser obtidos do equilíbrio dinâmico das pernas, Carvalho e Ceccarelli (1999a) , através das seguintes expressões:

$$\tau_{Pi} = \frac{F_{iz}\,b_i\,\mathrm{sen}(2\alpha_i)}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha_i} - F_{iy}\,b_i\left(\frac{h_i}{c_i\tan\alpha_i} + 1\right)\left(1 - \frac{h_i}{h_i\cos\alpha_i + c_i\,\mathrm{sen}\,\alpha_i}\right)\mathrm{sen}\,\alpha_i \qquad \text{(i=1, 2,3)} \tag{4.31}$$

Como as Eqs. (3.4), (3.5), (2.66), (2.93) e (3.1) são dadas em função do tempo, as equações de (4.1) a (4.9) podem ser usadas para calcular as forças que atuam nas juntas esféricas e finalmente simular as operações dinâmicas do CaPaMan usando as equações (4.31). A formulação apresentada é utilizada para computar os torques de entrada quando é conhecida a trajetória da plataforma móvel ou das pernas.

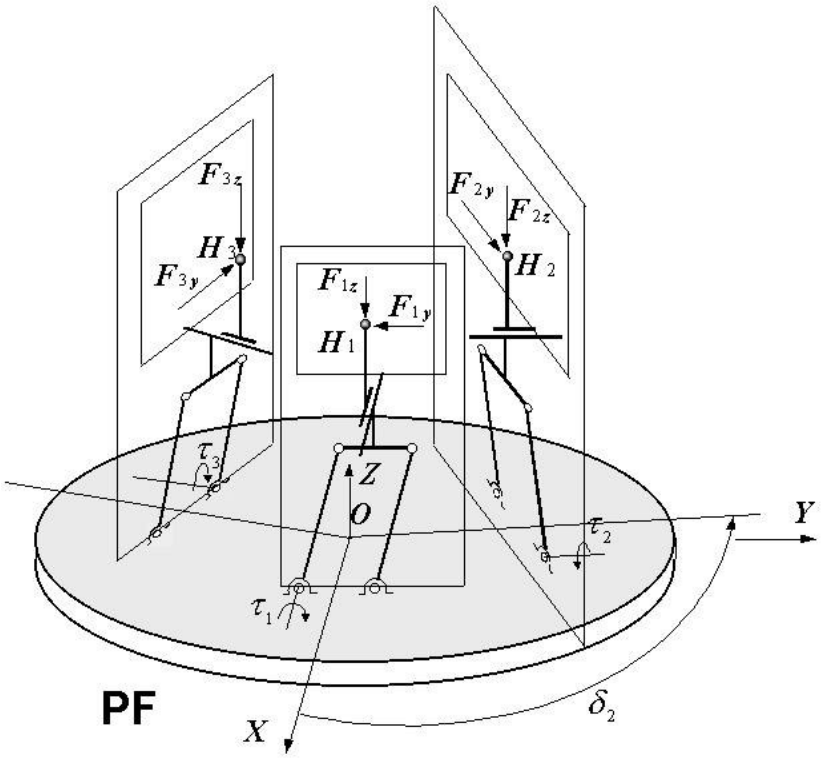


Figura 4.3 Forças atuantes nas juntas esféricas.

4.2 Dinâmica dos paralelogramos articulados.

Para a análise dinâmica dos paralelogramos articulados, assume-se que as acelerações lineares dos centros de massa e as acelerações angulares de cada segmento foram determinadas a partir da análise cinemática dos paralelogramos articulados; os efeitos gravitacionais dos segmentos b_i e d_i são desprezados, devido a sua massa ser muito pequena em comparação com a massa da plataforma móvel; os centros dos segmentos são coincidentes com os centros das figuras. Usando a análise cinetostática de mecanismos, o equilíbrio dinâmico na presença das três forças de inercia F_{inbi}, F_{inci} e F_{indi}, cujos pontos de aplicação são determinados pelos offsets de inércia e_{bi}, e_{ci} e e_{di} do centro de massa dos segmentos b_i, c_i e d_i respectivamente , como mostrado na Fig. 4.4, são dados por:

$$\vec{F}_{inbi} = m_{bi}\,\vec{a}_{Gbi}\,; \qquad \vec{F}_{inci} = -m_{ci}\,\vec{a}_{Gci}\,; \qquad \vec{F}_{indi} = -m_{di}\,\vec{a}_{Gdi} \tag{4.32}$$

$$e_{bi} = \frac{I_{Gbi}\,\dot{\omega}_{bi}}{F_{inbi}} = \frac{I_{Gbi}\,\ddot{\alpha}_i}{F_{inbi}}\,; \qquad e_{ci} = \frac{I_{Gci}\,\dot{\omega}_{ci}}{F_{inci}} = 0\,; \qquad e_{di} = \frac{I_{Gdi}\,\dot{\omega}_{di}}{F_{indi}} = \frac{I_{Gdi}\,\ddot{\alpha}_i}{F_{indi}} \tag{4.33}$$

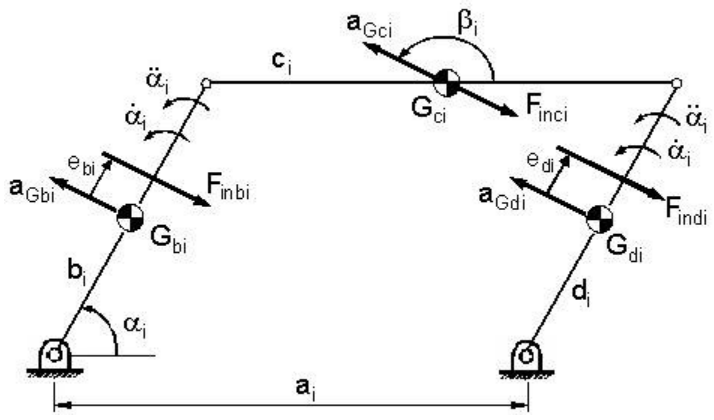


Figura 4.4. Forças nos paralelogramos articulados i (i=1, 2,3).

Usando o princípio da superposição, o efeito das forças de inércia em cada segmento pode ser tratado separadamente e então superposto para determinar o efeito combinado. Com exemplo, a Fig. 4.5 mostra o diagrama de corpo livre devido à força de inércia F_{indi}.

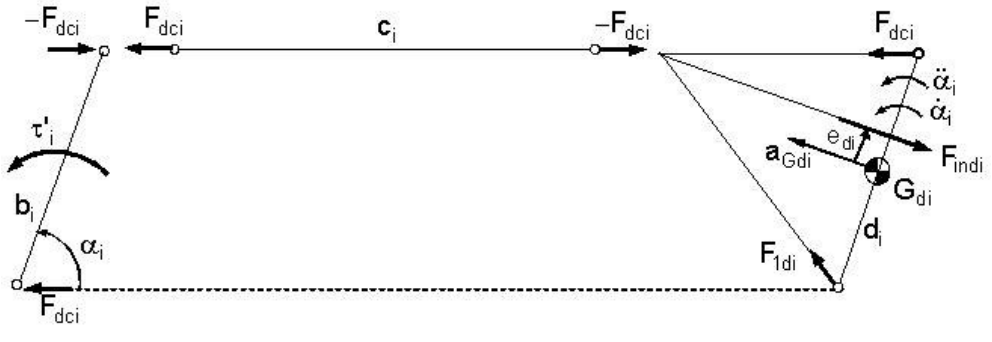


Figura. 4.5. Diagrama de corpo livre para análise do efeito da força de inércia no segmento d_i.

Análise de forças semelhantes são feitas para cada segmento. O torque total de entrada τ_{Mi}, segundo Carvalho e Ceccarelli (1999a) é obtido do efeito de inércia do movimento dos três segmentos e do efeito gravitacional do segmento c_i. Assim, o torque de entrada τ_{Mi} pode ser escrito como:

$$\tau_{Mi} = 2l_{bi}\, F_{inbi}\, sen(\alpha_i - \beta_i + \pi) + F_{23i}\, b\, sen(\alpha_i + \pi - \gamma_i) + b\left[m_{bi}\, cos\alpha_i + \frac{(m_{ci} + mh_i)\, sen2\alpha_i}{2 sen\alpha_i} \right] g \qquad (4.34)$$

com

$$l_{bi} = \frac{b}{2} + \frac{I_{Gbi}\, \ddot{\alpha}_i}{F_{inbi}} \frac{1}{sen\,(\alpha_i - \beta_i + \pi)} \qquad (4.35)$$

$$F_{23i} = \left| \sqrt{\left\{ F_{inci} \left[\cos(\beta_i + \pi) + \frac{sen\,(\pi - \beta_i)}{2 \tan \alpha_i} \right] \right\}^2 + \left[\frac{F_{inci}\, sen\,(\beta_i + \pi)}{2} \right]^2} \right| \qquad (4.36)$$

$$\gamma_i = tg^{-1} \left\{ \frac{\left[\frac{F_{inci}\, sen\,(\beta_i + \pi)}{2} \right]}{F_{inci} \left[\cos(\beta_i + \pi) + \frac{sen\,(\pi - \beta_i)}{2 \tan \alpha_i} \right]} \right\} \qquad (4.37)$$

Nas quais os ângulos β_i definem a direção da aceleração do centro de massa do segmento i com respeito ao eixo horizontal, assumido positivo no sentido anti-horário. Semelhantemente, γ_i define a direção do vetor força de reação atuando na base do segmento d_i.

4.3 O Torque total de entrada.

Visto que as equações deduzidas são algébricas e lineares nas forças de inércia, o princípio da superposição pode ser aplicado. Desse modo, o efeito dinâmico da plataforma móvel pode ser superposto ao efeito dinâmico do paralelogramo articulado.

O torque total τ_i na manivela de entrada de cada paralelogramo articulado pode ser obtido somando os torques τ_{Pi} e τ_{Mi} que são obtidos pela análise dinâmica da plataforma móvel e dos paralelogramos articulados, dados pelas Eqs. (4.31) e (4.34) respectivamente.

$$\tau_i = \tau_{Pi} + \tau_{Mi} \qquad i=1,2,3. \qquad (4.38)$$

Capítulo V

Revisão: B-splines .

No Capítulo III foi considerado que o movimento α_i (t) em cada perna do robô é dado por uma função cúbica do tempo t, Eqs. (3.1) a (3.3), interpolada entre os ângulos iniciais α_{ii} e finais α_{if} nos respectivos tempos t_{ii} e t_{if}. Neste trabalho, porém, serão utilizadas formulações alternativas nas quais as trajetórias $\alpha_i(t)$ são modeladas por B-splines: cúbicas e de quarta ordem. Existem trabalhos em robótica nos quais as B-splines cúbicas foram utilizadas como em Saramago e Steffen (1999b) e também em Chen (1991). B-splines (Hearn e Baker,1994) são freqüentemente utilizadas para aproximar funções que representam a trajetória de sistemas mecânicos, devido à sua característica de permitir o controle do grau de continuidade entre dois segmentos adjacentes. Este fato é muito importante, pois permite transições suaves, sem aplicar esforços excessivos nos atuadores, o que é desejável nas aplicações de sistemas robóticos. Outra vantagem é que o tempo computacional para obter trajetórias com B-splines é pequeno quando comparado com outras formulações. Assim, é bastante adequado para ser utilizado em problemas de otimização. As trajetórias modeladas por B-splines de quarta ordem além das vantagens das cúbicas possuem a vantagem de produzir acelerações mais suáveis, pois sua derivada segunda é dada por união de polinômios quadráticos e os jerks por uniões de segmentos lineares (poligonais).

5.1 Curvas cúbicas paramétricas.

Os polinômios cúbicos que definem um segmento de curva,

$$Q(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)] \tag{5.1}$$

são dados por :

$$\begin{cases} x(t) = a_x\, t^3 + b_x\, t^2 + c_x\, t + d_x \\ y(t) = a_y\, t^3 + b_y\, t^2 + c_y\, t + d_y \\ z(t) = a_z\, t^3 + b_z\, t^2 + c_z\, t + d_z \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1 \tag{5.2}$$

Fazendo,

$$T = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

e definindo a matriz dos coeficientes dos polinômios x(t) , y(t) e z(t) por:

$$C = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}, \tag{5.4}$$

pode-se escrever,

$$Q(t) = T\,C = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Derivando a Eq. (5.5) em relação ao parâmetro t obtém-se:

$$\dot{Q}(t) = \begin{bmatrix} 3a_x t^2 + 2b_x t + c_x & 3a_y t^2 + 2b_y t + c_y & 3a_z t^2 + 2b_z t + c_z \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

Uma curva cúbica paramétrica é definida por vários segmentos de curva cúbicos Q(t) que se unem continuamente da seguinte forma:
Digamos que Q_i (t) e Q_{i+1}(t) sejam segmentos de curva consecutivos, isto é, Q_i (t) está definido no intervalo,

$$\begin{bmatrix} t_k & , & t_{k+1} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

e Q_{i+1}(t) em

$$\begin{bmatrix} t_{k+1} & , & t_{k+2} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

A curva cúbica dada pela união dos segmentos cúbicos Q_i (t) e Q_{i+1}(t) definida no intervalo

$$\begin{bmatrix} t_k & , & t_{k+2} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

é contínua se Q_i (t_{k+1})= $Q_{i+1}(t_{k+1})$, já que Q_i (t) e Q_{i+1}(t) são polinômios cúbicos e portanto contínuos nos seus respectivos intervalos de definição. Um ponto como t_{k+1} é chamado ponto

de nó. Um segmento de curva Q(t) é definido pelas restrições nos pontos extremos, vetores tangentes e continuidade entre os segmentos de curva. Cada polinômio cúbico Q(t) tem quatro coeficientes , assim quatro restrições (condições) devem ser necessárias , permitindo formular quatro equações nas quatro incógnitas e então resolve-las. Os três principais tipos de curvas discutidos nesta secção (Hearn e Baker, 1994) são:

Hermite: definida pelos dois pontos extremos e vetores tangentes nos extremos.

Bézier: definida pelos dois pontos extremos e outros dois que controlam os vetores tangentes nos extremos.

Splines: definida por um conjunto de segmentos cúbicos,sendo que cada segmento cúbico Q_i (t) é definido por quatro pontos, chamados pontos de controle. As Splines tem continuidade C^0, C^1 e C^2 nos nós e aproximam seus pontos de controle; mas, geralmente, não interpolam os pontos de controle. Os principais tipos de Splines são: B-splines Uniformes, B-splines não Uniformes e as Splines naturais, as quais interpolam seus pontos de controle. Para verificar como os coeficientes da Eq. (5.2) dependem das quatro restrições, basta verificar que uma curva cúbica paramétrica é definida pela Eq. (5.5) e reescrever a matriz dos coeficientes como:

$$C = M_1 G_1 \tag{5.10}$$

onde M_1 é uma matriz 4x4, denominada matriz base e G_1 é uma matriz 4x3, formadas pelas restrições geométricas, denominadas vetor geometria. As restrições geométricas são justamente condições, tais como pontos extremos ou vetores tangentes que definem a curva. Adotando G_x para se referir ao vetor coluna de componentes só de x do vetor geometria. G_y e G_z têm definições análogas. M_1 ou G_1, ou ambos, diferem para cada tipo de curva. Os elementos de M_1 e G_1 são constantes, desse modo, o produto,

$$Q(t) = T M_1 G_1 \tag{5.11}$$

fornece justamente os três polinômios em t. G_1 é uma matriz 4x3 e G_x , G_y e G_z são as colunas de G_1. Na realidade,

$$G_1 = \begin{bmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \\ g_{3x} & g_{3y} & g_{3z} \\ g_{4x} & g_{4y} & g_{4z} \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

assim,

$$x(t) = T\,M_1\,G_x = \left(t^3\,m_{11} + t^2\,m_{21} + t\,m_{31} + m_{41}\right)g_{1x} + \left(t^3\,m_{12} + t^2\,m_{22} + t\,m_{32} + m_{42}\right)g_{2x} + \left(t^3\,m_{13} + t^2\,m_{23} + t\,m_{33} + m_{43}\right)g_{3x} + \left(t^3\,m_{14} + t^2\,m_{24} + t\,m_{34} + m_{44}\right)g_{4x} \quad (5.13)$$

A Eq. (5.13) mostra que a curva é uma soma ponderada dos elementos da matriz geométrica G_1. Os pesos são cada polinômio cúbico em t e são denominados funções de concordância (*blending function*), (Hearn e Baker, 1994), são assim referidos, pois a combinação entre as funções possibilita a obtenção de uma curva final suave. As funções de concordância são dadas por,

$$B = T\,M_1 \quad (5.14)$$

5.1.1 Curva de Hermite.

A forma do segmento de uma curva polinomial cúbica paramétrica de Hermite é dada pelas restrições nos pontos extremos P_1 e P_4 e pelos vetores tangentes R_1 e R_4 nos pontos extremos. Para encontrar a matriz base de Hermite M_H, a qual relaciona o vetor geometria de Hermite aos coeficientes polinomiais, deve-se escrever quatro equações, uma para cada restrição, nas quatro variáveis (coeficientes) e então resolver o sistema.

Definindo por,

$$G_{Hx} = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{4x} \\ R_{1x} \\ R_{4x} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

como sendo a componente x da matriz geometria de Hermite e escrevendo

$$x(t) = a_x\,t^3 + b_x\,t^2 + c_x\,t + d_x = T\,C_x = T\,M_H\,G_{Hx} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_H\,G_{Hx} \quad (5.16)$$

Sendo a polinomial paramétrica em t, nos pontos extremos tem-se: t=0 para P_1 e t=1 para P_4. Assim as restrições nos extremos x(0) e x(1) são encontradas por substituição direta na Eq. (5.16) ,

$$x(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] M_H \, G_{Hx} = P_{1x} \tag{5.17}$$

$$x(1) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] M_H \, G_{Hx} = P_{4x} \tag{5.18}$$

Derivando a Eq. (5.16) obtém-se,

$$\dot{x}(t) = [3t^2 \quad 2t \quad 1 \quad 0] M_H \, G_{Hx} \tag{5.19}$$

e portanto as restrições nos vetores tangentes são dadas por,

$$\dot{x}(0) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] M_H \, G_{Hx} = R_{1x} \tag{5.20}$$

$$\dot{x}(1) = [3 \quad 2 \quad 1 \quad 0] M_H \, G_{Hx} = R_{4x} \tag{5.21}$$

Das Eqs. (5.17), (5.18), (5.20) e (5.21) pode-se escrever o sistema de equações matriciais,

$$\begin{bmatrix} P_{1X} \\ P_{4X} \\ R_{1X} \\ R_{4X} \end{bmatrix} = G_{Hx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_H \, G_{Hx} = M_{coef} \, M_H \, G_{Hx} \tag{5.22}$$

Para que a Eq. (5.22) seja verdadeira, a matriz M_H deve ser a inversa da matriz dos coeficientes, M_{coef}, portanto

$$M_H = M_{coef}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

M_H é única e pode ser usada na Eq. (5.16) para encontrar x(t), baseado no vetor geometria G_{Hx}. Analogamente obtém-se y(t) e z(t), conseqüentemente,

$$Q(t) = T\,M_H\,G_H = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)], \tag{5.24}$$

onde G_H em (5.24) é a matriz dada por:

$$G_H = \begin{bmatrix} P_{1x} & P_{1y} & P_{1z} \\ P_{4x} & P_{4y} & P_{4z} \\ R_{1x} & R_{1y} & R_{1z} \\ R_{4x} & R_{4y} & R_{4z} \end{bmatrix}. \tag{5.25}$$

Expandindo o produto TM_H na Eq. (5.24) obtém-se as funções de concordância B_H com os polinômios ponderando cada elemento do vetor geometria.

$$Q(t) = B_H\,G_H = (2t^3 - 3t^2 + 1)P_1 + (-2t^3 + 3t^2)P_4 + (t^3 - 2t^2 + t)R_1 + (t^3 - t^2)R_4 \tag{5.26}$$

5.1.2 Curvas de Bézier.

A forma de Bézier do segmento de curva polinomial, indiretamente especifica os vetores tangentes nos extremos através de dois pontos intermediários que não pertencem à curva, como mostra a Fig. 5.1.

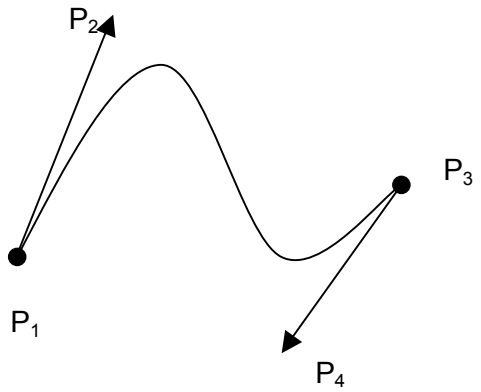


Figura 5.1- Vetores tangentes nos extremos da curva.

Da derivada da Eq. (5.26) tem-se $\dot{Q}(0)$e $\dot{Q}(1)$. Os vetores iniciais e finais são determinados respectivamente, pelos vetores P_1P_2 e P_3P_4 e relacionados a R_1 e R_4 por :

$$R_1 = \dot{Q}(0) = 3(P_2 - P_1) \text{ e } R_4 = \dot{Q}(1) = 3(P_4 - P_3) \tag{5.27}$$

A curva de Bézier interpola os dois pontos de controle extremos e aproxima os outros dois. O vetor geometria de Bézier G_B, consistindo de quatro pontos é dado por:

$$G_B = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

a matriz M_{HB} que define a relação,

$$G_H = M_{HB}\, G_B \tag{5.29}$$

entre G_H, vetor geometria de Hermite e G_B, vetor geometria de Bézier, é a matriz quatro por quatro, obtida a partir da Eq. (5.27), dada por:

$$G_H = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = M_{HB}\, G_B \tag{5.30}$$

Para encontrar a matriz base de Bézier usa-se a Eq. (5.24), da forma de Hermite e substitui-se G_H pelo produto M_{HB} G_B. Dessa forma, tem-se:

$$Q(t) = T\, M_H\, (M_{Hb}\, G_B) = T\,(M_H\, M_{HB})\, G_B = T\, M_B\, G_B \tag{5.31}$$

Da associatividade do produto matricial na Eq. (5.31) conclui-se que:

$$M_B = M_H\, M_{Hb} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

Efetuando o produto representado pela Eq. (5.32), obtém-se:

$$M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

e o produto representado na Eq. (5.31) é dado por:

$$Q(t) = (1-t)^3 P_1 + 3t(1-t)^2 P_2 + 3t^2 (1-t) P_3 + t^3 P_4 \tag{5.34}$$

Os quatro polinômios (pesos) na Eq. (5.34) são chamados de polinômios de Bernstein.

5.1.3 B-splines Uniformes (não racionais).

A equação matemática para as splines físicas, denominada spline cúbica natural, é um polinômio cúbico C^0, C^1 e C^2 contínuo que interpola seus pontos de controle. Os coeficientes polinomiais para uma spline cúbica natural, porém, são dependentes de todos os n pontos de controle; o cálculo deles necessita da inversão de uma matriz de ordem (n+1) por (n+1). Isto tem duas desvantagens: movendo-se qualquer um dos pontos de controle afeta-se a curva toda, e o tempo de cálculo da inversa pode interferir na rapidez de obtenção da curva.

Já as curvas denominadas B-splines, consistem de segmentos de curvas cujos coeficientes polinomiais dependem apenas de uns poucos pontos de controle. Isto é denominado controle local. Assim movendo-se um ponto de controle afeta-se apenas uma pequena parte da curva e o tempo para calcular os coeficientes é bastante reduzido. B-splines tem a mesma continuidade que as splines naturais, mas em geral não interpola seus pontos de controle conforme Fig. 5.2. Na discussão a seguir será adotada uma notação um pouco diferente, pois não será tratado de apenas um segmento de curva e sim uma curva inteira (composta de vários segmentos). O segmento de curva não precisa passar por seus pontos de controle e as condições de continuidade provêm de segmentos adjacentes. Isto é feito compartilhando pontos de controle entre segmentos. Desse modo é melhor descrever o processo em termos de todos os segmentos de curva de uma só vez. B-splines cúbicas aproximam uma série de (m+1) pontos de controle P_0, P_1...,P_m , com m maior ou igual a três, considerando a curva formada por (m-2) segmentos de curva (polinômios cúbicos), Q_3 , Q_4,..Q_m. Embora tais curvas cúbicas possam ser definidas cada uma em seu domínio t, com t maior ou igual a zero e menor ou igual a um, pode-se ajustar o parâmetro (fazendo uma substituição da forma t=t+k) tal que o domínio de parâmetro para vários segmentos de curvas sejam seqüenciais. Assim, define-se que o intervalo de parâmetro no qual Q_i é definido é:

$$t_i \le t \le t_{i+1} \qquad 3 \le i \le m \tag{5.35}$$

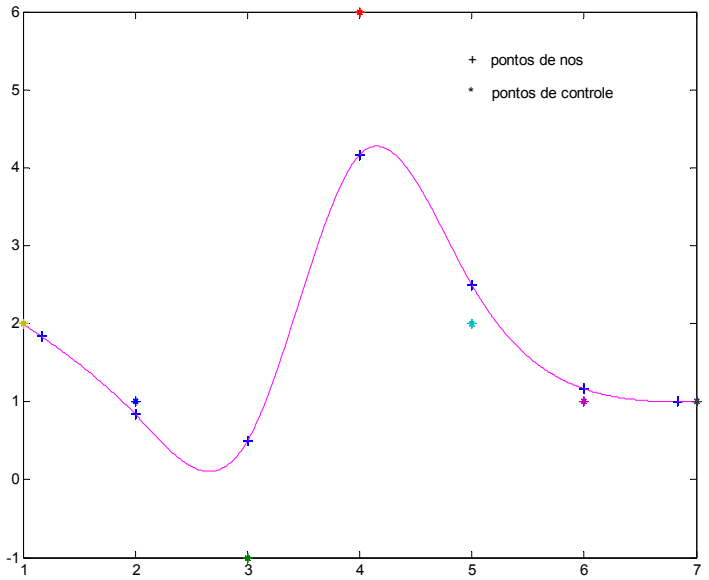


Figura 5.2- B-spline, com seus pontos de nó e controle.

No caso particular de m=3 existe um único segmento de curva Q_3 que é definido no intervalo

$$t_3 \le t \le t_4, \tag{5.36}$$

para quatro pontos de controle, P_0 até P_3 . Para cada i maior ou igual a quatro existe um nó entre Q_{i-1} e Q_i no parâmetro de valor t_i ; o valor do parâmetro em tal ponto é denominado um valor de nó. Os pontos iniciais e finais em t_3 e t_{m+1}, respectivamente, são também denominados nós, assim existe um total de (m-1) nós. Uma curva B-spline fechada é fácil de ser criada: para isso, os pontos de controle P_0, P_1 e P_2 devem ser repetidos no final da seqüência P_m, P_0, P_1, P_2. O termo uniforme quer dizer que os nós são igualmente espaçados no parâmetro t. Sem perda de generalidade pode-se assumir que t_3=0 e que o intervalo t_{i+1} - t_i=1. Cada um dos (m-2) segmentos de curva de uma B-spline é definido por quatro dos seus m+1 pontos de controle. Em particular o segmento de curva Q_i é definido pelos pontos P_{i-3} , P_{i-2} , P_{i-1} , P_i. Assim, o vetor de geometria da B-spline para o segmento Q_i é

$$G_{BS_i} = \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix} \qquad 3 \le i \le m \tag{5.37}$$

O primeiro segmento de curva, é definido pelos pontos P_0, P_1, P_2 e P_3 sobre o intervalo de parâmetro de t_3=0 até t_4=1. Q_4 é definido pelos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 sobre o intervalo de tempo de t_4=1 a t_5=2 e o último segmento de curva Q_m é dado pelos pontos P_{m-3}, P_{m-2}, P_{m-1} e P_m no intervalo de tempo de t_m=m-3 até t_{m+1}=m-2. Em geral o segmento de curva Q_i começa em algum lugar próximo ao ponto P_{i-2} e termina em algum local perto de P_{i-1}. Deve-se observar que todas as funções de concordância da B-spline são não negativas e sua soma é um. Portanto, o segmento de curva Q_i está contido no fecho convexo (convex hull), (Foley et al, 1990), formado pelos seus quatro pontos de controle, sendo que o fecho convexo é o menor conjunto convexo contendo os quatro pontos. Da mesma forma que cada segmento de curva é definido por seus quatro pontos de controle, cada ponto de controle (exceto P_0 , P_1 , P_2 e P_{m-2} , P_{m-1} , P_m) terá influência sobre quatro segmentos de curvas. Movendo-se um ponto de controle numa dada direção, movem-se também os quatro segmentos de curva na mesma direção, sendo que os outros segmentos de curvas permanecem totalmente inalterados, conforme pode ser observado na Fig. 5.3. Esta é a propriedade de controle local da B-spline.

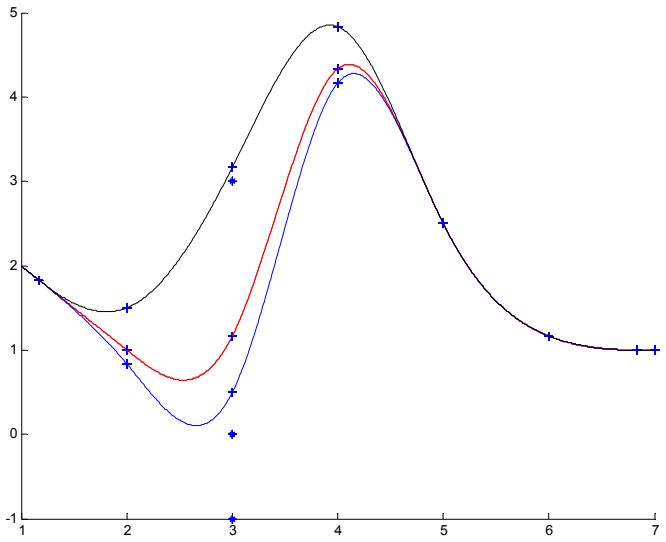


Figura 5.3-O ponto de controle (3,-1) é movido para (3,0) e depois para (3,3).

Definindo-se:

$$T_i = \left[(t-t_i)^3 \quad (t-t_i)^2 \quad (t-t_i) \quad 1\right] \tag{5.38}$$

a formulação da B-spline para o segmento de curva é:

$$Q_i(t) = T_i\, M_{BS}\, G_{BS_i} \qquad\qquad t_i \le t \le t_{i+1} \tag{5.39}$$

A curva completa é gerada aplicando a Eq. (5.39) para i=1,2,...,m. A matriz base da B-spline M_{BS} que relaciona as restrições geométricas G_{BS} com as funções de concordância e os coeficientes polinomiais pode ser obtida de forma semelhante à formulação das curvas de Hermite e Bézier, sendo escrita como :

$$M_{BS} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.40}$$

e as funções de concordância da B-spline são dadas por:

$$B_{BS} = T_i\, M_{BS}. \tag{5.41}$$

Note que as funções de concordância são exatamente as mesmas, porque para cada segmento i o valor de $t-t_i$ varia de zero em $t=t_i$ até um em $t=t_{i+1}$. Substituindo-se $t-t_i$ por t e o intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ por [0,1], tem-se:

$$\begin{aligned} &B_{BS} = T\, M_{BS} = \left[B_{BS-3} \quad B_{BS-2} \quad B_{BS-1} \quad B_{BS-0}\right] = \\ &\frac{1}{6}\left[-t^3+3t^2-3t+1 \quad 3t^3-6t^2+4 \quad -3t^3+3t^2+3t+1 \quad t^3\right] \qquad 0 \le t \le 1 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &Q_i(t-t_i) = T_i\, M_{BS}\, G_{BS_i} = T\, M_{BS}\, G_{BS_i} = \\ &B_{BS}\, G_{BS_i} = B_{BS-3}\, P_{i-3} + B_{BS-2}\, P_{i-2} + B_{BS-1}\, P_{i-1} + B_{BS-0}\, P_i = \qquad 0 \le t \le 1 \\ &\frac{(1-t)^3}{6} P_{i-3} + \frac{3t^3-6t^2+4}{6} P_{i-2} + \frac{-3t^3+3t^2+3t+1}{6} P_{i-1} + \frac{t^3}{6} P_i \end{aligned} \tag{5.43}$$

Pode-se mostrar que Q_i e Q_{i+1} são de classe $C^{0,}$ C^1 e C^2 nos pontos de nó. Para isto, quando se considera a componente de x dos segmentos adjacentes, os quais são $x(t-t_i)$ e $x_{i+1}(t-t_{i+1})$, (y e z, como sempre são análogos) é necessário somente mostrar que para o nó t_{i+1} onde eles se unem vale as relações:

$$\begin{cases} x_i(t_{i+1}) = x_{i+1}(t_{i+1}) \\ \dfrac{dx_i}{dt}(t_{i+1}) = \dfrac{dx_{i+1}}{dt}(t_{i+1}) \\ \dfrac{d^2x_i}{dt^2}(t_{i+1}) = \dfrac{d^2x_{i+1}}{dt^2}(t_{i+1}) \end{cases} \tag{5.44}$$

A continuidade adicional disponível para as B-splines é atraente, mas ao custo de um controle menor em relação aonde as curvas vão. A curva pode ser forçada a interpolar pontos específicos reproduzindo pontos de controle; isto é útil nos dois pontos extremos e em pontos intermediários da curva. Por exemplo, se $P_{i-2}=P_{i-1}$, a curva é puxada para este ponto porque o segmento Q_i é definido justamente por estes três pontos diferentes e o ponto $P_{i-2}=P_{i-1}$ é pesado duas vezes na Eq. (5.43): uma por B_{BS-2} e outra por B_{BS-1}. Se um ponto de controle é usado três vezes, isto é, $P_{i-2}=P_{i-1}=P_i$ então a Eq. (5.43) se reduz a:

$$Q_i(t) = B_{BS-3}P_{i-3} + (B_{BS-2} + B_{BS-1} + B_{BS-0})P_i \ , \tag{5.45}$$

$Q_i(t)$ é claramente uma linha reta. Além disso, o ponto P_{i-2} é interpolado pela reta em t =1, onde os três pesos aplicados a P_i somam um, mas P_{i-3} não é em geral interpolado em t=0. Outro modo de ver isto é imaginar o fecho convexo definido apenas por dois pontos, que necessariamente tem que ser uma reta.

5.2 Curvas B-splines.

Com o objetivo de generalizar o estudo das B-splines o tempo t foi substituído por um parâmetro u qualquer da reta real. O grau de uma polinomial B-spline pode ser fixado independentemente do número de pontos de controle (com certas limitações). A expressão geral para o cálculo de posições de coordenada ao longo de uma curva B-spline, utilizando funções de concordância, é escrita como:

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n} p_k B_{k,d}(u) \qquad u_{min} \le u \le u_{max} \quad 2 \le d \le n+1 \tag{5.46}$$

sendo que, p_k são os (n+1) pontos de controle. O intervalo de parâmetros u depende de como foram escolhidos os parâmetros da B-spline. As funções de concordância $B_{k,d}$ são polinômios de grau d-1 onde o parâmetro d pode ser escolhido como qualquer inteiro no intervalo de 2 até n+1. O controle local para B-splines é obtido definindo as funções de concordância em subintervalos do intervalo total :

$$u_{min} \le u \le u_{max} \tag{5.47}$$

As funções de concordância para as curvas B-splines são definidas por recorrência , através da fórmula de recorrência de Cox-deBoor (Foley et al, 1990):

$$B_{k,1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u_k \le u \le u_{k+1} \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

$$B_{k,d}(u) = \frac{u - u_k}{u_{k+d-1} - u_k} B_{k,d-1}(u) + \frac{u_{k+d} - u}{u_{k+d} - u_{k+1}} B_{k+1,d-1}(u) \tag{5.48}$$

onde, cada função de concordância é definida sobre d subintervalos do intervalo total. O conjunto dos pontos extremos dos subintervalos u_j, é chamado vetor-nó. Pode-se escolher qualquer valor para os pontos extremos do subintervalo satisfazendo a relação u_j menor ou igual à u_{j+1}. Os valores para u_{min} e u_{max} dependem então do número de pontos de controle que foram selecionados, do valor escolhido para o parâmetro d, e de como foi montado o subintervalo (vetor–nó). Já que é possível escolher o vetor-nó de modo que o denominador na Eq.(5.48) seja zero, nesta formulação define-se que qualquer termo avaliado por 0/0, será assumido com sendo zero.

Entre as principais características e propriedades das B-splines pode-se citar:

Controle local – Cada ponto de controle, exceto os três primeiros e os três últimos influenciam quatro segmentos de curvas. Movendo-se um ponto de controle numa dada direção movem-se apenas os quatro segmentos de curva na mesma direção.

O número de pontos de controle pode ser modificado para manipular a forma da curva. Semelhantemente, o número de pontos do vetor-nó pode ser alterado para melhorar a curva. Neste último caso, necessita-se também alterar os pontos de controle, já que o tamanho do

vetor -nó depende do parâmetro n. A curva polinomial tem grau d-1 e continuidade C^{d-2} sobre o intervalo total. Para (n+1) pontos de controle, a curva é descrita por (n+1) funções de concordância. Cada função de concordância $B_{k,d}$ está definida em d subintervalos do intervalo total, começando no nó u_k, como mostra a Fig. 5.4

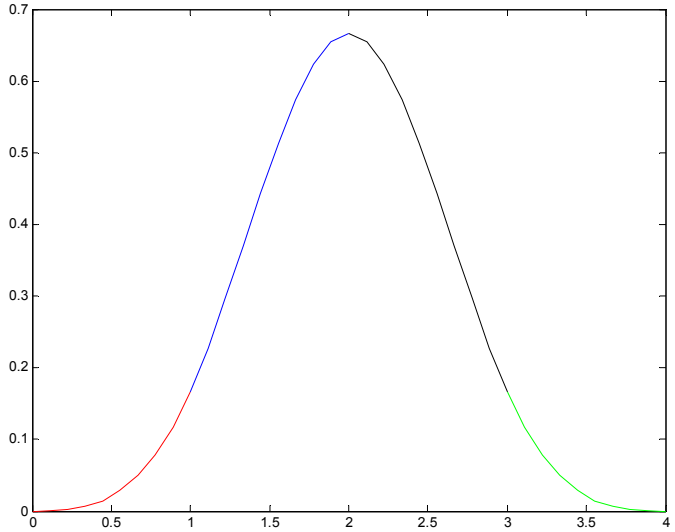


Figura 5.4 Função de concordância $B_{0,4}$, nos intervalos (0,1), (1,2), (2,3) e (3,4).

A função de concordância, $B_{1,4}$, é apenas a translação de $B_{0,4}$ para o intervalo (1,5) nos subintervalos (1,2), (2,3), (3,4) e (4,5) . Conforme mostrado na Fig 5.5.

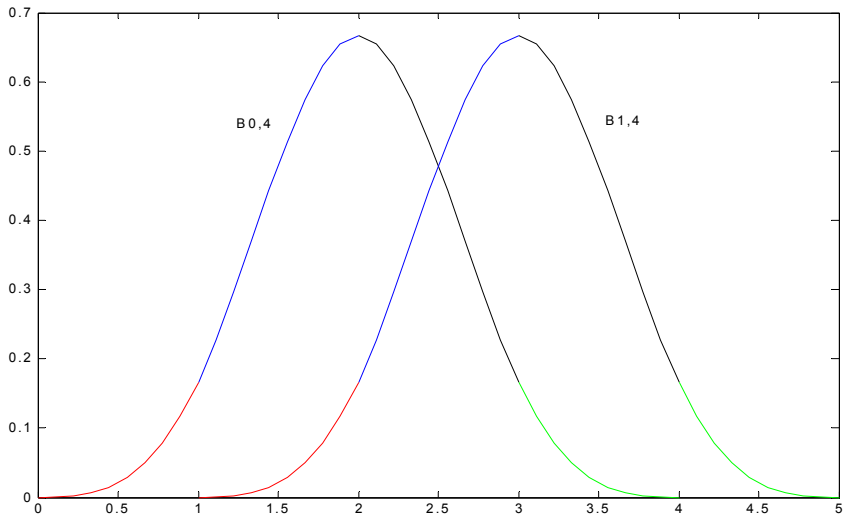


Figura 5.5 Funções de concordância $B_{0,4}$ e $B_{1,4}$.

O intervalo total, é dividido em n+d subintervalos para os n+d+1 valores especificados no vetor-nó. Com os valores de nó descritos por (u_0, u_1,..., u_{n+d}), a B-spline resultante está definida somente no intervalo de valores de nó [u_{d-1},u_{n+1}].

Cada segmento de curva B-spline, compreendido entre dois nós sucessivos é influenciado por d pontos de controle, no caso das B-splines cúbicas d=4. Qualquer ponto de controle pode afetar no máximo d segmentos de curva (polinômios). Além disso, uma B-spline permanece no fecho convexo de no máximo (d+1) pontos de controle,de modo que B-splines são limitadas pelas posições de entrada. Para qualquer valor de u no intervalo de valores de nó [u_{d-1},u_{n+1}], a soma de todas as funções bases é 1.

$$\sum_{k=0}^{n} B_{k,d}(u) = 1 \tag{5.49}$$

Dado as posições dos pontos de controle e o valor do parâmetro d, necessita-se especificar os valores de nó para obter as funções de concordância usando a fórmula de recorrência dada pela Eq. (5.49). Existem três classificações gerais para vetores de nó: uniforme, uniforme aberta e não uniforme. B-splines são comumente descritas de acordo com a classe de vetores de nó selecionada.

5.2.1 B-splines uniformes e periódicas.

Quando o espaçamento entre os valores de nó é constante, a curva resultante é chamada uma B-spline Uniforme. Por exemplo, pode-se montar um vetor - nó como:

$$\{-1{,}5 \quad , \quad -1.0 \quad , \quad -0.5 \quad , \quad 0.0 \quad , \quad 0.5 \quad , \quad 1.0 \quad , \quad 1.5 \quad , \quad 2.0 \quad 2.5\} \tag{5.50}$$

Freqüentemente os valores de nó são normalizados para assumirem valores entre zero e um, como em:

$$\{0.0 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.6 \quad 0.8 \quad 1\} \tag{5.51}$$

Em muitas aplicações é conveniente montar um vetor-nó uniforme de modo que a distância entre dois nós consecutivos, seja sempre igual a 1 e que o primeiro elemento seja zero:

$$\{\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 7\ \} \tag{5.52}$$

B-splines uniforme tem funções de concordância periódicas (continuidade C^0 de polinômios consecutivos). Isto significa que para n e d dados , todas as funções de concordância tem a mesma forma. Cada função de concordância sucessiva é apenas uma translação da função anterior.

$$B_{k,d}(u) = B_{k+1,d}(u + \Delta u) = B_{k+2,d}(u + 2\Delta u) \tag{5.53}$$

onde, Δu é o intervalo entre valores de nó adjacentes.

5.2.2 B-splines uniformes quadráticas.

Para ilustrar o cálculo das funções de concordância (coeficientes) para uma B-spline uniforme quadrática com vetor-nó de componentes inteiras, foram selecionados os parâmetros d=n=3. O vetor nó deve então conter n+d+1=7 valores:

$$\{0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\} \tag{5.54}$$

sendo a variação do parâmetro u de zero a seis, com n+d=6 subintervalos. Cada função de concordância atravessa d=3 subintervalos da variação total de u. Usando a fórmula de recorrência dada pela Eq. (5.48) obtém-se a primeira função de concordância:

$$B_{0,3}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2, & 0 \le u < 1 \\ \frac{1}{2}u(2-u) + \frac{1}{2}(u-1)(3-u), & 1 \le u < 2 \\ \frac{1}{2}(3-u)^2, & 2 \le u < 3 \end{cases} \tag{5.55}$$

A próxima função de concordância (periódica) é obtida usando a Eq. (5.53) e trocando u na Eq. (5.55), por u-1:

$$B_{1,3}(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(u-1)^2, & 1\le u<2\\ \frac{1}{2}(u-1)(3-u)+\frac{1}{2}(u-2)(4-u), & 2\le u<3\\ \frac{1}{2}(4-u)^2, & 3\le u<4\end{cases} \tag{5.56}$$

substituindo u por u-1 na Eq. (5.56) ou u por u-2 na Eq. (5.55) , obtém-se:

$$B_{2,3}(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(u-2)^2, & 2\le u<3\\ \frac{1}{2}(u-2)(4-u)+\frac{1}{2}(u-3)(5-u), & 3\le u<4\\ \frac{1}{2}(5-u)^2, & 4\le u<5\end{cases} \tag{5.57}$$

De modo análogo conclui-se que:

$$B_{3,3}(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(u-3)^2, & 3\le u<4\\ \frac{1}{2}(u-3)(5-u)+\frac{1}{2}(u-4)(6-u), & 4\le u<5\\ \frac{1}{2}(6-u)^2, & 5\le u<6\end{cases} \tag{5.58}$$

O primeiro ponto de controle é multiplicado pela função $B_{0,3}$ (u). Assim, mudando a posição do primeiro ponto de controle afeta-se somente a curva até u=3. Semelhantemente, o último ponto de controle influencia a forma da curva no intervalo onde $B_{3,\,3}(u)$ está definida. Desta forma, a soma das funções de concordância é 1 dentro deste intervalo. Fora deste intervalo, não é permitido somar todas as funções de concordância já que elas não estão todas definidas abaixo de 2 e acima de 4. Visto que a variação do polinômio é de 2 a 4 , pode-se determinar as posições inicial e final da curva avaliando as funções de concordância nestes pontos para obter,

$$P_{inicial}=\frac{1}{2}(P_0+P_1) \text{ e } P_{final}=\frac{1}{2}(P_2+P_3). \tag{5.59}$$

Assim a curva se inicia na posição média entre os dois primeiros pontos de controle e termina numa posição intermediária entre os dois últimos pontos. Pode-se também determinar

as derivadas paramétricas nos extremos da curva tomando as derivadas das funções de concordância e substituindo os pontos extremos para o parâmetro u, obtendo-se:

$$\dot{P}_{inicial} = P_1 - P_0 \quad \text{e} \quad \dot{P}_{final} = P_3 - P_2 \ , \tag{5.60}$$

Neste exemplo observa-se que curvas B-splines quadráticas começam entre os dois primeiros pontos de controle e terminam entre os dois últimos. Este resultado é válido para uma, B-spline quadrática uniforme dada por qualquer número de pontos de controle distintos . Em geral, para polinômios de ordem mais alta, as posições iniciais e finais são dadas pelas médias ponderadas de d-1 pontos de controle. Pode-se obter uma curva spline fechada por qualquer ponto de controle, repetindo aquela posição múltiplas vezes. Expressões gerais para condições limites para B-splines periódicas podem ser obtidas pela reparametrização das funções de concordância de modo que u seja dado pelo intervalo unitário de zero a um. Isto é, as condições limites são obtidas em u=0 e u=1. B-splines periódicas são particularmente úteis para a geração de certas curvas fechadas . Por exemplo, a curva fechada vista na Fig. 5.6; pode ser gerada em seções por especificações cíclicas de quatro de seus seis pontos de controle, em cada passo. Se quaisquer três pontos de controle consecutivos são idênticos a curva passa pelas coordenadas deste ponto.

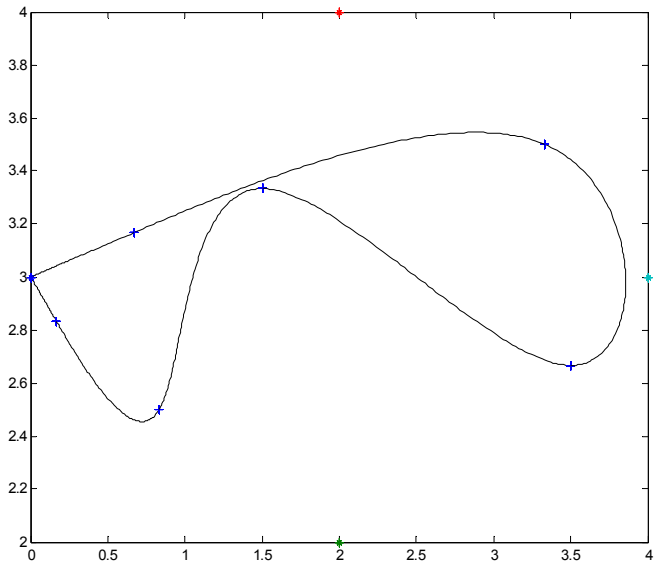


Figura 5.6- B-spline fechada.

5.2.3 B-splines cúbicas uniformes.

Para B-splines cúbicas, d=4, cada função de concordância ocupa quatro subintervalos da variação total u. Se a cúbica for ajustada para 4 pontos de controle, P_0, P_1, P_2 e P_3 então, pode-se usar o vetor-nó de componentes inteiras (-1, 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9) e a formula de recorrência dada pela Eq. (5.48), para obter as funções de concordância de forma análoga como foi desenvolvido para B-splines quadráticas. Seja uma formulação alternativa para B-splines cúbicas periódicas, onde inicia-se com as condições limites para obter as funções de concordância para o intervalo normalizado $0 \leq u \leq 1$. Usando esta formulação pode-se obter facilmente a matriz característica. As condições limites para B -Splines cúbicas periódicas com 4 pontos de controle consecutivos , descritos por P_0,P_1 , P_2 e P_3 são:

$$P(0) = \frac{1}{6}(P_0 + 4P_1 + P_2),\ P(1) = \frac{1}{6}(P_1 + 4P_2 + P_3),\ \dot{P}(0) = \frac{1}{2}(P_2 - P_0),\ \dot{P}(1) = \frac{1}{2}(P_3 - P_1) \tag{5.61}$$

A B-Spline cúbica começa numa posição perto de P_1 e termina numa posição próxima de P_2. A formulação matricial para B-splines cúbicas periódicas com 4 pontos controle consecutivos pode ser escrita como :

$$P(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} M_B \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \tag{5.62}$$

onde,

$$M_B = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.63}$$

Efetuando-se o produto matricial representado pela equação (5.62) tem-se:

$$P(u) = B_{0,3}(u)P_0 + B_{1,3}(u)P_1 + B_{2,3}(u)P_2 + B_{3,3}(u)P_3 \tag{5.64}$$

onde,

$$B_{0,3}(u) = \frac{1}{6}(1-u)^3, \tag{5.65}$$

$$B_{1,3}(u) = \frac{1}{6}\left(3u^3 - 6u^2 + 4\right), \tag{5.66}$$

$$B_{2,3}(u) = \frac{1}{6}\left(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1\right), \tag{5.67}$$

$$B_{3,3}(u) = \frac{1}{6}u^3 \tag{5.68}$$

As Eqs. de (5.65) a (5.68) são as funções de concordância, com $0 \le u \le 1$. Em alguns textos são também conhecidas como pesos ou funções base (Chen, 1991).

5.2.4 B-splines uniformes de quarta ordem.

De modo análogo ao caso cúbico, as equações dos segmentos de curvas para B-splines de quarta ordem, são deduzidas utilizando-se as formulas de recorrência dadas pelas Eqs. (5.48) sendo dada por:

$$P(u) = B_{0,4}(u)P_0 + B_{1,4}(u)P_1 + B_{2,4}(u)P_2 + B_{3,4}(u)P_3 + B_{4,4}(u)P_4 \quad \text{Onde,} \tag{5.69}$$

$$B_{0,4}(u) = \frac{1}{24}\left(u^4 - 4u^3 + 6u^2 - 4u + 1\right) \tag{5.70}$$

$$B_{1,4}(u) = \frac{1}{24}\left(-4u^4 + 12u^3 - 6u^2 - 12u + 11\right) \tag{5.71}$$

$$B_{2,4}(u) = \frac{1}{24}\left(6u^4 - 12u^3 - 6u^2 + 12u + 11\right) \tag{5.72}$$

$$B_{3,4}(u) = \frac{1}{24}\left(-4u^4 + 4u^3 + 6u^2 + 4u + 1\right) \tag{5.73}$$

$$B_{4,4}(u) = \frac{1}{24}u^4 \tag{5.74}$$

As Eqs. de (5.70) a (5.74) são as funções de concordância para B-splines de quarta ordem, com $0 \leq u \leq 1$. As propriedades válidas para B-splines cúbicas também são válidas para B-splines de quarta ordem. Se repetirmos um ponto de controle quatro vezes, a spline de quarta ordem interpola este ponto.

Capítulo VI

Formulação do Problema Ótimo.

O procedimento para planejar uma trajetória de um manipulador com n graus de liberdade; dados os pontos iniciais e finais, pode ser realizado usando m nós da trajetória de cada i-ésima junta do manipulador. O movimento do manipulador é obtido pelos movimentos simultâneos das n juntas, formando a trajetória prescrita pelos pontos iniciais e finais, P_0 e P_m . Dentre os vários objetivos a serem atingidos durante a otimização da operação do manipulador, é usual assumir a energia como o critério mais significante, visto que a formulação da energia considera simultaneamente as características dinâmicas e cinemáticas do movimento realizado. Além disso, deve-se considerar a minimização do tempo total do percurso, evitando que velocidades muito baixas sejam calculadas. Por outro lado, se o tempo é minimizado, altas acelerações podem ser obtidas e também variações bruscas das acelerações. Assim, a variação da aceleração (jerk) também deve ser controlada. Quando um problema de otimização envolve mais de uma função objetivo, a busca de uma ou mais soluções ótimas é conhecida como otimização multi-objetivo, (Deb, 2001), também chamada de multi-critério, (Eschenauer et al, 1990), multi-performance ou otimização de um vetor de funções.

Muitos dos problemas práticos de otimização envolvem objetivos múltiplos. A solução que é ótima (no melhor sentido) com relação a um objetivo necessita de uma negociação com os outros objetivos. Isto proíbe a escolha de uma solução que é ótima com relação à somente um objetivo. Em problemas com mais de um objetivo conflitando entre si, não existe solução ótima simples. Existe sim, um número de soluções nas quais todas são ótimas, conhecidas como “soluções ótimas de Pareto”. Assim é definido, primeiramente, o ótimo de Pareto. Este ótimo dá um conjunto de soluções não inferiores, isto é, soluções para as quais não existem maneiras de melhorar algum critério sem piorar pelo menos um outro critério. É claro que a solução será escolhida dentro deste conjunto. Sem alguma informação a mais, nenhuma solução pertencente ao conjunto de soluções ótimas pode ser melhor que qualquer outra solução. Daí, todas estas soluções são ótimas e em um problema de otimização multi-objetivo muitas soluções ótimas são importantes. Esta é a diferença fundamental entre otimização de um único objetivo e multi-objetivo (Sawaragi et al, 1985). Em otimização multi-objetivo, o número de soluções ótimas aumenta por causa da negociação entre os objetivos conflitantes que são importantes.

Existem vários critérios que podem ser considerados para resolver este complexo

problema de otimização (Osyszka, 1984). Segundo Déb, (2001),alguns métodos clássicos são baseados em escalonar as funções, sendo que o vetor função objetivo é transformado em uma função escalar (ex.: objetivos ponderados, critério global, etc). Alguns métodos minimizam uma das funções objetivo considerando as outras como restrições (hierárquico, negociação, método da meta final, etc). Outros métodos são desenvolvidos com base na abordagem min-max (ex.: métodos exploratórios, método da ponderação min-max).

Neste trabalho é utilizado o método da ponderação dos objetivos, (Saramago e Oliveira,2004) nos quais os problemas de otimização multi-critérios são substituídos por um problema de otimização escalar através da criação de uma função com coeficientes de ponderação (ou pesos), que representam a importância relativa de cada critério. Os resultados podem variar significativamente com a mudança dos coeficientes de ponderação, e sabe-se pouco sobre como escolher estes coeficientes, tornando necessário obter diferentes aproximações para resolver o mesmo problema usando valores diferentes destes coeficientes. Assim, comparando estas soluções o pesquisador escolhe a melhor entre elas, baseando-se em suas necessidades.

Seja o problema de otimização da trajetória de uma estrutura paralela, considerando três critérios conflitantes entre si, escrito como:

$$Minimizar\ f = K_1 \frac{E}{E_0} + K_2 \frac{Tt}{T_0} + K_3 \frac{J}{J_0} \tag{6.1}$$

sujeito a

$$\alpha_i^l \leq [\alpha_i(t)] \leq \alpha_i^u \qquad (i=1,2,3) \tag{6.2}$$

$$Tt^l \leq Tt \leq Tt^u \tag{6.3}$$

$$\tau_i^l \leq \tau_i \leq \tau_i^u \tag{6.4}$$

sendo a energia total do manipulador dada por:

$$E = \int_0^{Tt} \sum_{i=1}^{3} [\tau_i(t)\dot{\alpha}_i(t)]dt\ , \tag{6.5}$$

Na Eq. (6.1) K_1, K_2 e K_3 são os parâmetros de ponderação da função multi-objetivo, E é

a energia total do manipulador, E_0 é a energia inicial (da primeira trajetória gerada), J e J_0 são a variação de aceleração (jerk) atual e inicial respectivamente, Tt é o tempo total de percurso e T_0 é o tempo total para a trajetória inicial.

As restrições laterais estão formuladas nas Eqs. (6.2) a (6.4), sendo representadas pelos limites inferiores e superiores dos ângulos de cada manivela de entrada (α_i^l , α_i^u), pelos limites do tempo total de percurso (Tt^l e Tt^u) e também pelos limites de torque (τ_i^l , τ_i^u). Para i=1,2,3; τ_i é o torque na i-ésima manivela de entrada ; α_i é a i-ésima variável de junta.

A energia total é calculada na Eq. (6.5), onde t é o tempo, variável no intervalo [0 , Tt] para uma trajetória entre P_0 e P_m; $\dot{\alpha}_i$ é a primeira derivada temporal. A formulação proposta exige o cálculo do modelo cinemático e dinâmico do CaPaMan. Para determinar as trajetórias pode-se usar os pontos iniciais e finais, P_0 e P_m, no sistema Cartesiano de coordenadas. Estes pontos devem ser transformados em coordenadas de junta resolvendo-se a cinemática inversa. Polinômios cúbicos geralmente são escolhidos para descrever as trajetórias, visto que controle Derivativo Proporcional é geralmente usado nos atuadores dos manipuladores na robótica industrial. Assim, cada trajetória $\alpha_i(t)$ é modelada por uma B-spline cúbica , utilizando as equações (5.46) a (5.48), sendo dada por :

$$\alpha_i(t) = \sum_{k=0}^{m} p_k^i \; B_{k,d}^i(t) \qquad m \geq 3 \text{ , i =1,2,3.} \tag{6.6}$$

onde p_k^i são m+1 pontos de controle correspondente de cada trajetória α_i (t), e $B_{k,d}$ são funções definidas palas fórmulas de recorrência de Cox de Boor, (Foley et all ,1990), com d=4 para a Spline cúbica.

Visto que $\alpha_i(t)$ é cúbica, a sua j-ésima derivada em relação a t pode ser obtida diretamente como:

$$\frac{d^j \alpha_i(t)}{dt^j} = \sum_{k=0}^{m} p_k^i \frac{d^j B_{k,d}^i}{dt^j} \tag{6.7}$$

As varáveis de projeto a serem consideradas durante o processo de otimização são os pontos de controle p_k^i de cada trajetória e o tempo total de percurso. Os pontos de controle iniciais são obtidos pelo programa de otimização de forma randômica entre os pontos iniciais e finais pré-definidos. Desta forma, para n=3 mecanismos, o número total de varáveis de projeto é (nm)+1. Neste trabalho apresenta-se também a modelagem das trajetórias por B-splines de quarta

ordem. Esta modelagem é feita usando-se as Eqs. (6.6) e (6.7) com d=5 e m$\geq$4. As funções de concordância para B-splines de quarta ordem são dadas pelas Eqs. (5.70) a (5.74).

Algumas análises podem ser feitas considerando trajetórias com um mesmo tempo de percurso, mas que minimizam a energia gasta pelos atuadores. Neste caso, o tempo é constante, não sendo considerado como variável de projeto, e não é necessário controlar o jerk. Assim, no problema de otimização definido em (6.1), assume-se K_1=1, K_2=K_3=0.

6.1 Revisão: Algoritmos genéticos.

Neste trabalho Algoritmos Genéticos (Braga, 1998) são utilizados na solução do problema ótimo. A fundamentação dos Algoritmos Genéticos é baseada na genética natural. Desta forma, é comum o uso dos termos: indivíduos de uma população, cromossomos, genes e alelos. Nos Algoritmos Genéticos, a população de indivíduos é um conjunto de pontos do domínio da função a ser maximizada ou minimizada. A quantidade de pontos depende do número de variáveis de projeto do problema em questão. Algoritmos genéticos são algoritmos iterativos, em que a cada iteração a população é modificada, usando as melhores características dos elementos da geração anterior e submetendo-as aos três tipos básicos de operadores, para produzir melhores resultados. Para atingir estes objetivos são usados os seguintes processos:

<u>Reprodução</u>: é um processo no qual cada cadeia é copiada levando em conta os valores da função de adaptação *F.* A probabilidade ou aptidão de cada indivíduo é um valor que representa o grau de adaptabilidade deste, ou seja, o quão próximo o indivíduo está da solução do problema em relação aos indivíduos da população. Esta probabilidade é medida com auxílio da função objetivo e pode ser dada pela seguinte expressão , $p_i = \dfrac{F_c(x)}{\sum F_c(x)}$, sendo $\sum p_i$ =1.

Este processo é denominado seleção por roleta. Existem outras formas, tais como torneio e elitista. Para se calcular o valor da função de adaptação F_c, deve-se primeiro converter a seqüência binária (base 2) para a base 10, ou seja, deve-se decodificar um cromossomo, conforme a expressão $\overline{x}_i = \sum_{j=0}^{m_i-1} b_j^i \, 2^j$. Em seguida, calcula-se o valor real da variável x_i, dentro da região viável, através da relação $x_i = x_i^l + \overline{x}_i \dfrac{x_i^u - x_i^l}{2^{m_i} - 1}$.

Cruzamento: é um processo no qual a combinação em partes de cada um de dois cromossomos gera um novo descendente.
Mutação: é a modificação aleatória ocasional (de baixa probabilidade) do valor de um alelo da cadeia.

De modo geral, suponha que se deseja otimizar uma função *F* qualquer de *n* variáveis,

$$F(\mathbf{X}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{6.8}$$

sujeito a

$$x_i^l < x_i < x_i^u \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.9}$$

Então cada seqüência de n variáveis é denominada de cromossomo ou indivíduo (Michalewicz, 1998) e cada uma das n variáveis é um gene. Cada gene é representado no sistema binário; os bits 0 e 1 são denominados alelos. O comprimento de cada gene depende da precisão requerida para o problema e da amplitude do intervalo onde ele está definido. O domínio de definição do gene x_i é o intervalo (x_i^l, x_i^u). Admitindo que a precisão do problema é de *p* casas decimais, então o intervalo (x_i^l, x_i^u) deve ser dividido em $(x_i^u - x_i^l)10^p$ subintervalos iguais. Portanto, o gene x_i deverá ter pelo menos m_i bits, pois

$$2^{m_i - 1} < (x_i^u - x_i^l)10^p < 2^{m_i} \tag{6.10}$$

Em outras palavras, o comprimento do gene x_i é a menor potência de 2 dentre aquelas em que 2^M supera $(x_i^u - x_i^l)10^p$. Assim, cada cromossomo tem um total de $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ bits (alelos) e é representado por

$$C_k = \left[b_{m_1-1}^1 \, b_{m_1-2}^1 \ldots b_1^1 \, b_0^1 \, b_{m_2-1}^2 \, b_{m_2-2}^2 \ldots b_1^2 \, b_0^2 \; \ldots \; b_{m_n-1}^n \, b_{m_n-2}^n \ldots b_1^n \, b_0^n \right] \tag{6.11}$$

onde b_j^i (que tem valor 0 ou 1) é o (m_i – j)-ésimo alelo correspondente ao *i*-ésimo gene.

Segundo Bergamaschi (2004), a esquematização de um cromossomo pode ser representada pela Fig. 6.1.

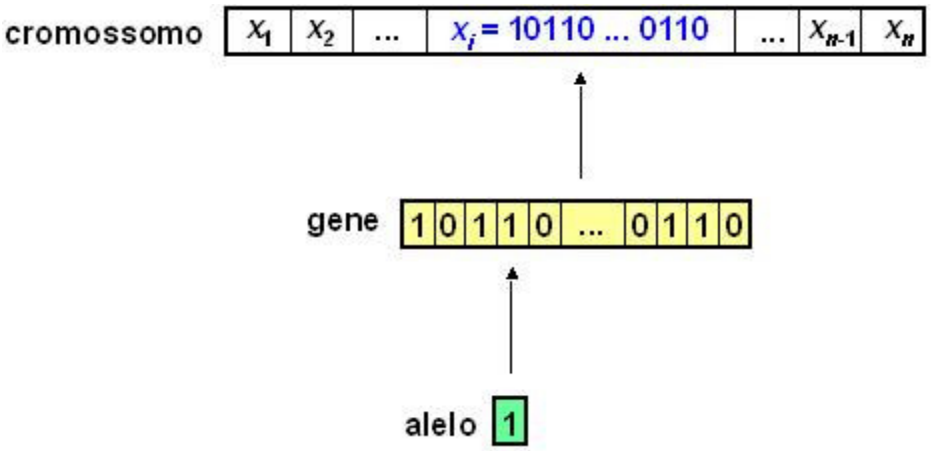


Figura 6.1. Esquematização de um cromossomo.

O procedimento consiste em criar, aleatoriamente, uma população inicial de indivíduos $\{C_1, C_2,..., C_n\}$. Em seguida, todos os indivíduos dessa população são modificados, submetendo-os aos operadores genéticos; reprodução, cruzamento e mutação. Considerando estas definições, segundo Saramago (2003), o processo de otimização utilizando algoritmos genéticos é representado pelo fluxograma da Fig. 6.2.

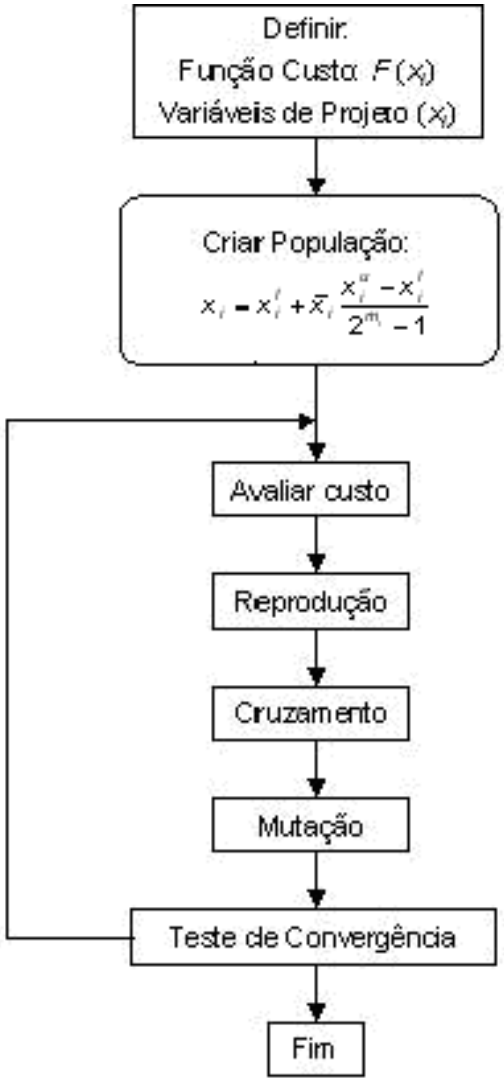


Figura 6.2. Fluxograma do algoritmo genético contínuo.

Capítulo VII

Simulações numéricas.

Para validar a metodologia proposta apresenta-se neste capítulo simulações numéricas para o problema de otimização multi-objetivo definido pelas Eqs. (6.1) a (6.5). No processo de otimização, um código geral de análise, desenvolvido em Matlab, foi acoplado ao programa de otimização, conforme mostrado no fluxograma da Fig. 7.1. Este código de análise permite calcular a trajetória do manipulador modelada por splines conforme a Eq. (6.6), o modelo cinemático segundo as Eqs. (3.4) a (3.19), o modelo dinâmico dado pelas Eqs. (4.1) a (4.38) e a energia usando a Eq. (6.5). No processo de otimização foi aplicado Algoritmos Genéticos através do programa GAOT (Genetic Algorithms Optimization on Toolbox) desenvolvido por Houck et al (1995).

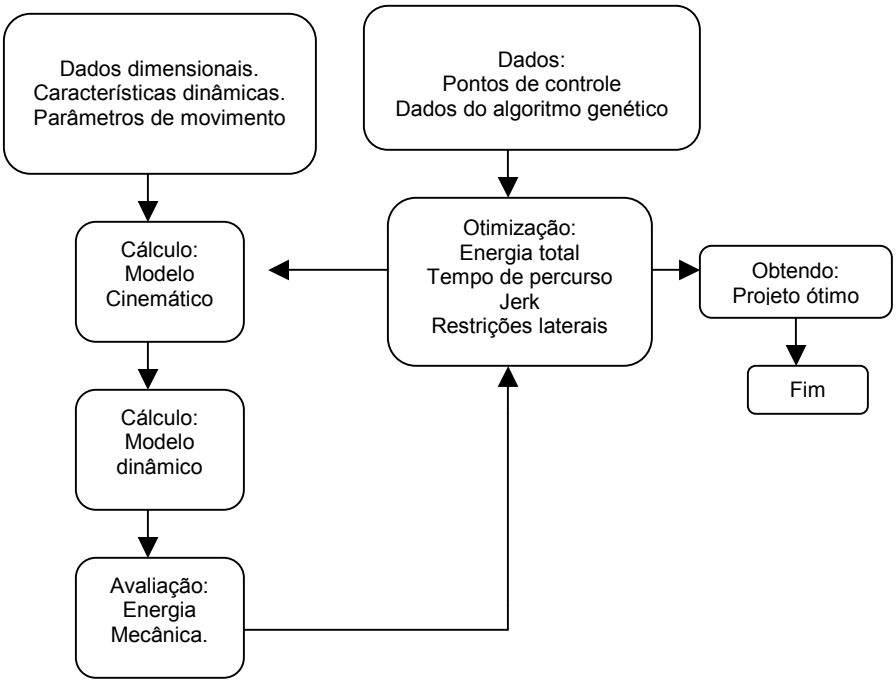


Figura 7.1 Fluxograma do procedimento numérico para otimização.

7.1. Trajetórias ótimas considerando a minimização da energia e do tempo de percurso.

Neste primeiro estudo, o problema de otimização não considera a minimização da variação de aceleração (jerk). Assim na Eq. 6.1 adota-se K_3=0 e a função multi-objetivo é escrita como:

$$Minimizar\ f = K_1 \frac{E}{E_0} + K_2 \frac{Tt}{T_0} \tag{7.1}$$

Sujeito a

$60 \leq \alpha_1(t) \leq 90$ [graus]

$50 \leq \alpha_2(t) \leq 120$ [graus]

$80 \leq \alpha_3(t) \leq 100$ [graus] (7.2)

$0{,}8 \leq Tt \leq 3{,}0$ [s]

$-10 \leq \tau_i \leq 10$ [Nm].

Sendo a energia dada por:

$$E = \int_0^{Tt} \sum_{i=1}^{3} \left[\tau_i(t)\dot{\alpha}_i(t) \right] dt \quad \alpha_1(\tau) \tag{7.3}$$

As configurações de trajetórias $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ e $\alpha_3(t)$ relacionadas nas inequações (7.2) são as mesmas em todos os casos simulados neste trabalho, a razão para isto é que esta configuração representa o caso mais geral para a variação das manivelas de entrada dos paralelogramos articulados. Configurações particulares de trajetórias são apresentadas por Oliveira et al (2005). Vale ressaltar que a metodologia é genérica podendo ser aplicada para diversas configurações. A manutenção dos mesmos valores para os ângulos de entrada visa facilitar a comparação dos diversos casos em estudo

A plataforma móvel tem massa M=2.912 Kg, os segmentos h, b e c tem massas respectivamente iguais a m_h=0.100 Kg, m_b=0.103 Kg e m_c=0.547 Kg. Os dados

dimensionais do CaPaMan estão relacionados na Tab. 7.1. O robô está inicialmente em repouso e fica completamente parado ao final da trajetória, ou seja, $\dot{\alpha}_i(0) = \dot{\alpha}_i(T_t) = 0$, i=1,2,3.

Tabela 7.1. Parâmetros dimensionais do protótipo CaPaMan.

$a_i = c_i$ [mm]	$m_i = d_i$ [mm]	H_i [mm]	$r_P = r_B$ [mm]	s_i [mm]
200	80	116	109.5	-50; 50.

As trajetórias iniciais são obtidas aleatoriamente, impondo a condição de que sejam executadas no tempo inicial T_0 e obedecidas as restrições laterais dadas em (7.2).

7.1.1. Prioridade para a minimização da energia: K_1=0, 8, K_2=0,2.

Nesta aplicação é considerado que a energia tem peso maior no processo de otimização. Para este caso adota-se então que a minimização da energia tem peso 0,8 (K_1=0,8) enquanto a minimização do tempo tem peso 0,2 (K_2=0,2).

Na Fig. 7.2 é apresentado o gráfico 3D das trajetórias iniciais e ótimas do centro da plataforma móvel do CaPaMan. Pode-se observar que a trajetória ótima é suave e obedece aos pontos iniciais e finais pré-definidos.

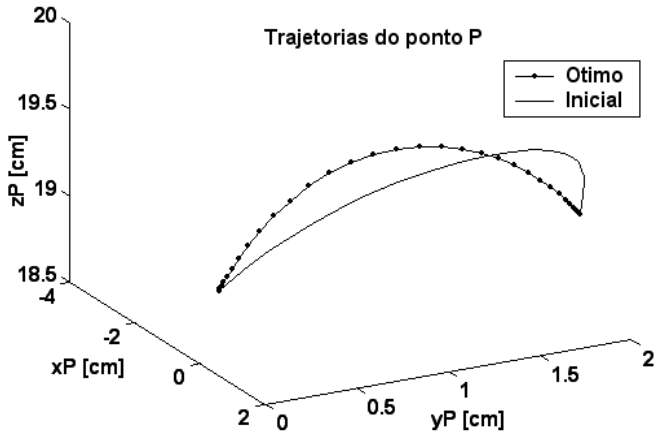


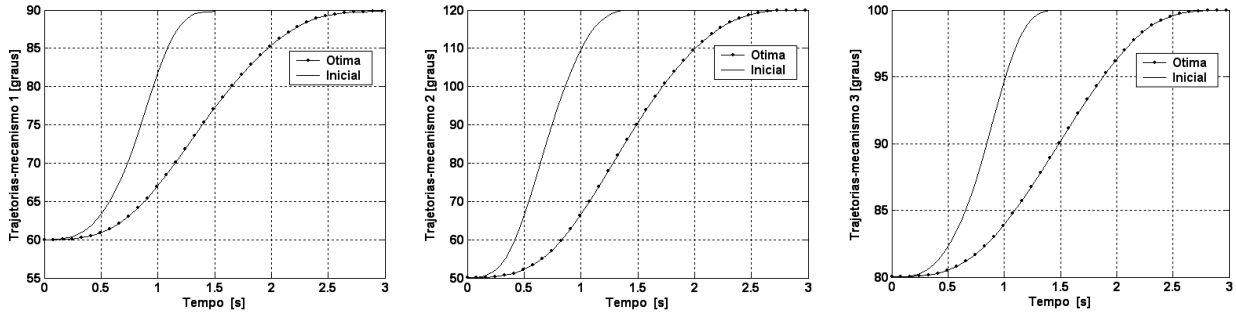
Figura 7.2. Trajetória ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan em função do tempo.

Os valores iniciais e finais estão relacionados na Tab. 7.2. Nesta tabela apresentam-se os valores iniciais e finais médios, obtidos considerando os resultados após 30 simulações. Os resultados de média e desvio-padrão amostrais obtidos comprovam a otimização em todos os casos, mesmo sendo a trajetória inicial obtida aleatoriamente. Pode-se verificar que é significante a redução da energia gasta pelos atuadores, o que representa uma melhora da performance dinâmica quando o manipulador descreve as trajetórias ótimas $\alpha_i(t)$ representadas na Fig. 7.3. Apesar das trajetórias iniciais serem aleatórias, observa-se na Tab. 7.2 que o programa de otimização converge para a mesma solução ótima, com desvio padrão pequeno. Assim, para os próximos casos serão apresentadas apenas as soluções ótimas encontradas.

Tabela 7.2. Resultados da otimização da função multi-objetivo.

	Função multi-objetivo	Energia [Nm/s^2]	Tempo total [s]	Jerk [rad/s^3]
Valor inicial médio (30 simulações)	1,00 ± 0,0	39,74 ± 0,70	1,50 ± 0,0%	7,5 ± 0,8
Valor ótimo médio (30 simulações)	0,78 ± 0,01	19,31 ± 0,21	2,95 ± 0,03	0,9 ± 0,1
Performance média (30 simulações)	22% ± 1%	51,0% ± 1,0%	-	88,0% ± 1,0%
Valor inicial (melhor solução)	1,00	39,08	1,50	6,9
Valor ótimo (melhor solução)	0,79	19,15	2,90	0,9
Performance (melhor solução)	21,0 %	51,0%	-	87,0%

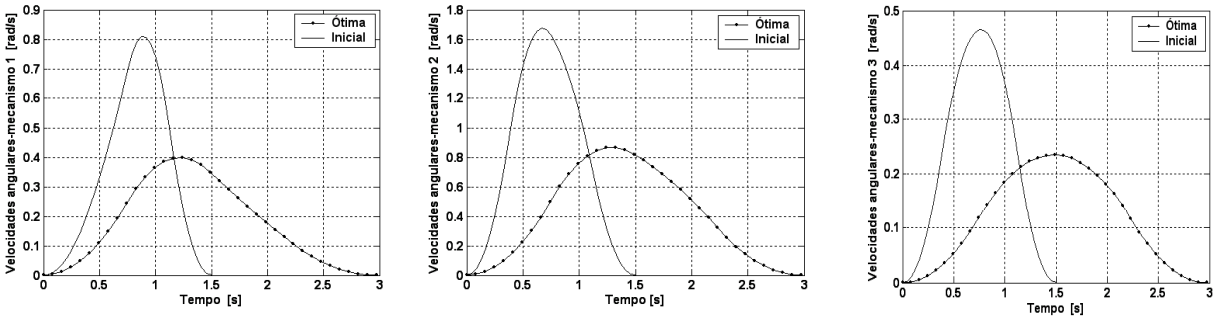
Na Fig. 7.3 estão representadas as curvas iniciais e ótimas para os ângulos de entrada dos mecanismos. Note que, com o aumento do tempo, as curvas tornam-se mais suaves, como era de se esperar.



(a) (b) (c)

Figura 7.3. Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função no tempo: (a)mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3.

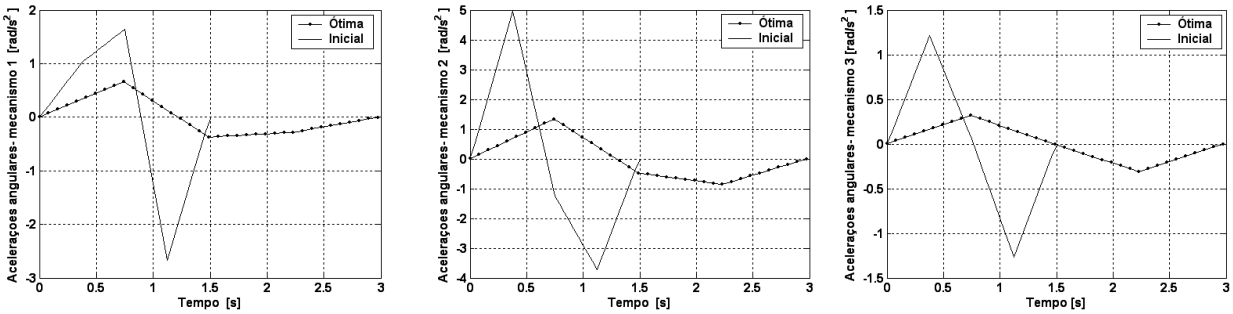
As derivadas temporais dos ângulos de entrada são mostradas nas Fig. 7.4. Naturalmente, as velocidades decresceram significativamente, uma vez que o tempo total de percurso aumentou. Como conseqüência, a energia total foi bastante minimizada.



(a) (b) (c)

Figura 7.4 Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo.

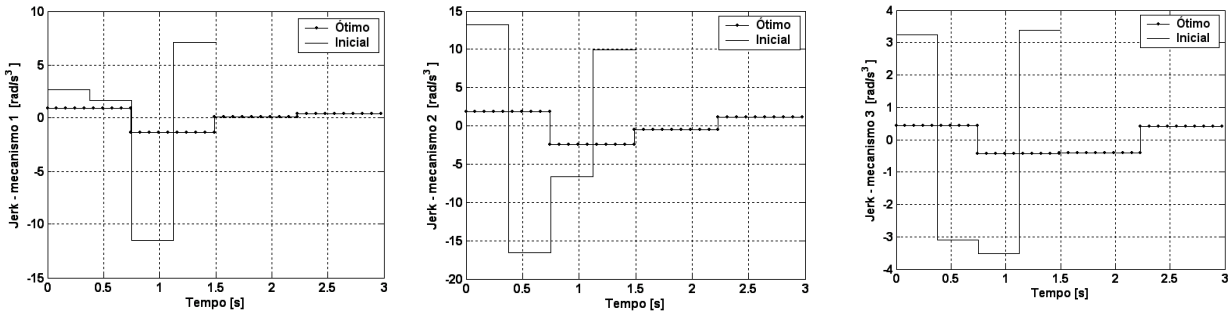
O resultado ótimo representa uma solução de compromisso entre as funções que compõem a função multi-objetivo do problema. Um comportamento similar ocorreu nas curvas das acelerações, Fig. 7.5.



(a) (b) (c)

Figura 7.5 Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.

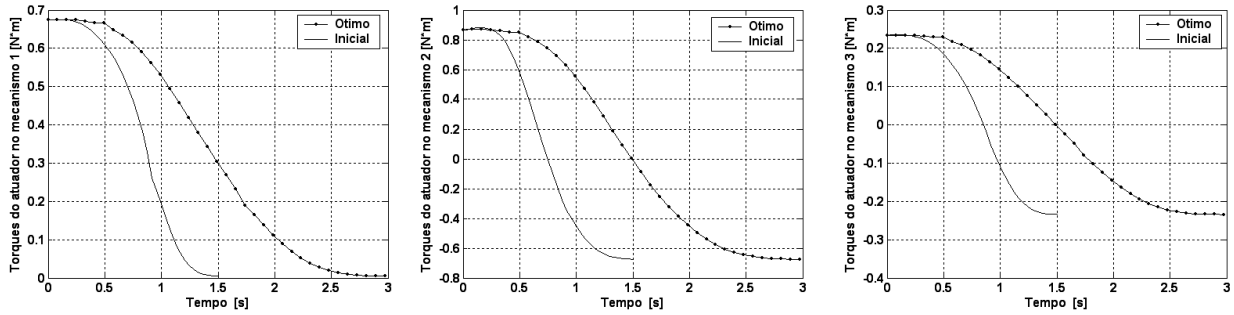
Os resultados obtidos para a variação de aceleração (jerk) são mostrados na Fig. 7.6. Pode-se verificar que as trajetórias ótimas foram obtidas com significante redução dos valores máximos de jerk, o que é altamente desejado sob o ponto de vista da operação uma vez que representa menores desgastes para os atuadores.



(a) (b) (c)

Figura 7.6 Curvas iniciais e ótimas do jerk nos atuadores em função do tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3.

Os gráficos das curvas de torque que os atuadores aplicam sobre os eixos de entrada são apresentados na Fig. 7.7. Comparando os valores iniciais e ótimos verifica-se uma distribuição mais suave no tempo. O que está coerente com os resultados obtidos de velocidade e aceleração.



(a) (b) (c)

Figura 7.7 Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores em função do tempo:
(a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.

7.1.2. Prioridade igual para a minimização da energia e do tempo: K_1=K_2=0.5.

Neste exemplo considera-se que o tempo e a energia são critérios igualmente importantes. Desta forma, ambos possuem pesos iguais: K_1=K_2=0.5. Na Tab. 7.3 estão apresentados os valores obtidos para estas condições. Pode-se observar que o tempo

apresentou um pequeno acréscimo (2%) enquanto a energia reduziu de 2,9%. As trajetórias inicial e final estão representadas na Fig. 7.8

Tabela 7.3. Resultados da otimização da função multi-objetivo para K_1= K_2=0,5.

	Função multi-objetivo	Energia [Nm/s^2]	Tempo total [s]	Jerk [rad/s^3]
Valor inicial	1,00	39,08	1,50	7,0
Valor ótimo	0,99	37,94	1,53	6,4
Performance	1,0 %	2,9%	-	8,5 %

O comportamento temporal da variação dos ângulos de entrada α_1, α_2 e α_3 dos mecanismos é representado na Fig.7.9. Pode-se observar que o mecanismo 2 apresentou uma variação angular ótima quase que idêntica à variação inicial. Entretanto a variação angular para os mecanismos 1 e 3 é mais acentuada.

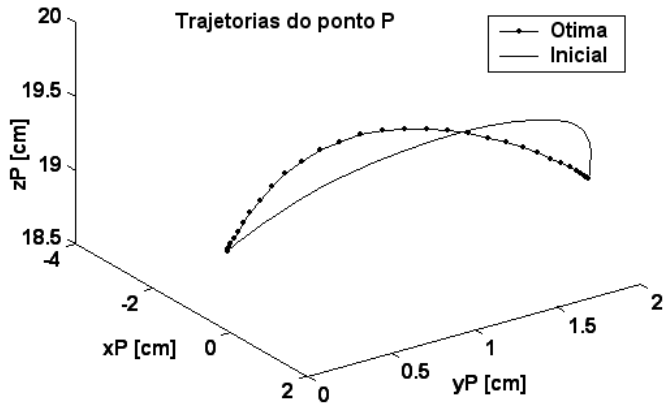
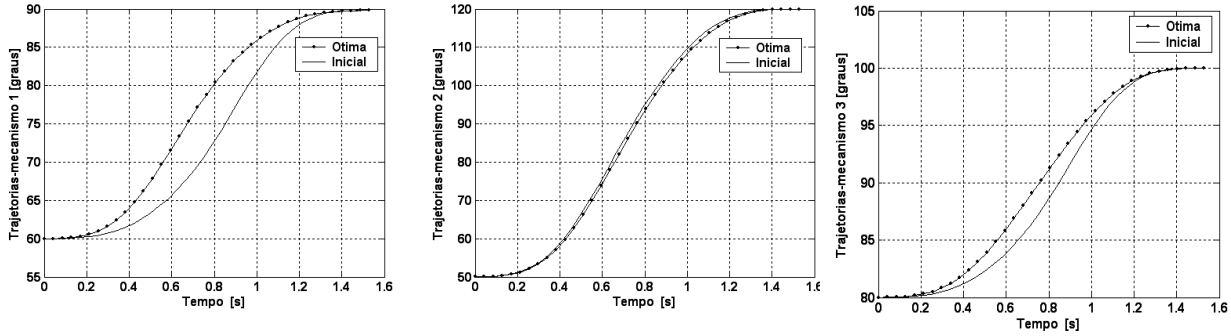


Figura 7.8 Trajetória ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan em função do tempo.

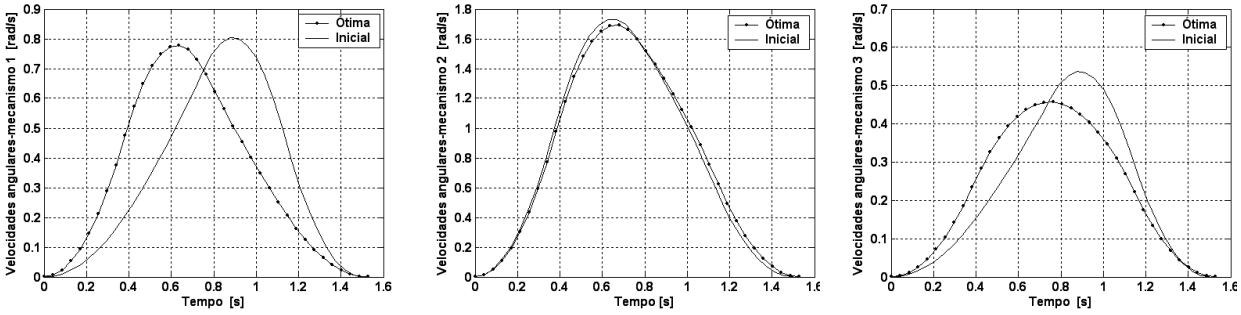
As derivadas temporais dos ângulos de entrada são mostradas nas Fig. 7.10. Observe que os valores máximos das velocidades decresceram levemente. Na Fig. 7.11 é

apresentado o comportamento das acelerações. Pode-se notar que para o mecanismo 2 quase não houve alteração. O comportamento do jerk pode ser observado na Fig. 7.12, onde se vê que nos mecanismos 1 e 3 na primeira metade do intervalo de tempo no processo de otimização os níveis de jerk iniciais são maiores, já no restante do tempo nestes dois mecanismos o jerk é reduzido. Observa-se também no mecanismo 2 que embora seja muito pequena a redução do jerk se dá durante todo o intervalo de tempo. Embora em certas regiões o jerk foi maior que o inicial, ele sempre se manteve abaixo do máximo atingido durante a trajetória inicial.



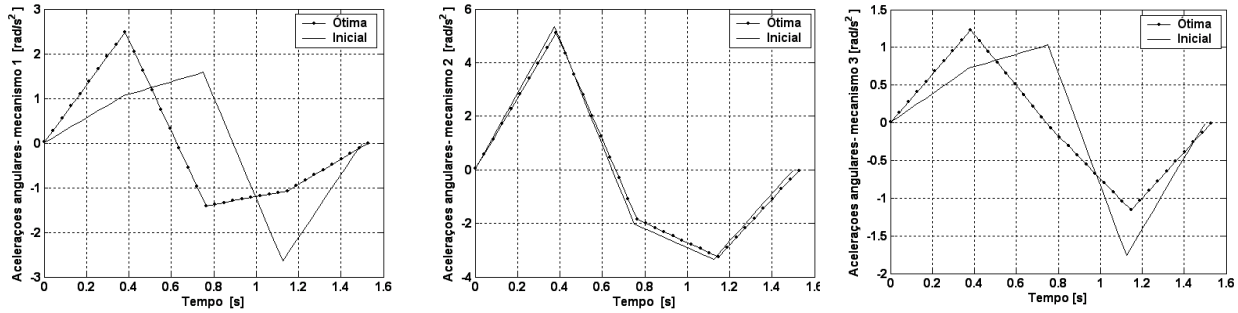
(a) (b) (c)

Figura 7.9 Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3.



(a) (b) (c)

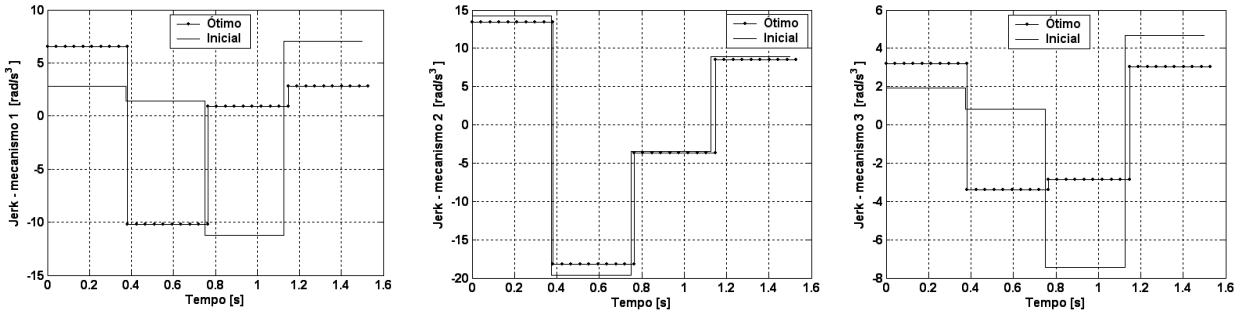
Figura 7.10 Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3.



(a) (b) (c)

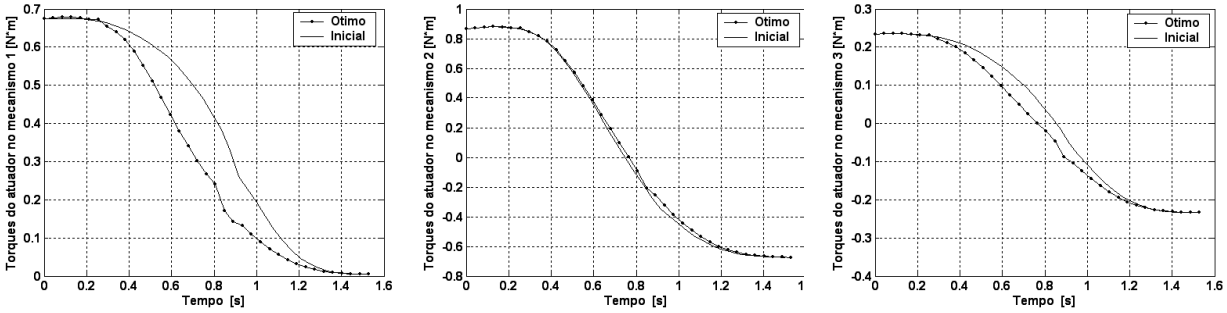
Figura 7.11 Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.

Os gráficos das curvas de torque que os atuadores aplicam sobre os eixos de entrada são apresentados na Fig. 7.13. Comparando os valores iniciais e ótimos verifica-se que os valores do torque foram levemente modificados nos mecanismos 1 e 3 e permaneceu praticamente o mesmo no mecanismo 2.



(a) (b) (c)

Figura 7.12 Curvas iniciais e ótimas do jerk nos atuadores em função do tempo:
(a) mecanismo1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3.



(a) (b) (c)

Figura 7.13 Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores em função do tempo:
(a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3

7.1.3. Prioridade para a minimização do tempo de percurso: K_1=0, 2, K_2=0,8.

Neste exemplo, o tempo está sendo priorizado em relação à energia. Para isto, K_1=0,2 e K_2=0,8. Os valores iniciais e finais estão relacionados na Tab. 7.4, mostrando que neste caso a melhora da performance da função multi-objetivo se dá devido à grande redução do tempo. Observe que se paga um preço pela redução do tempo total de percurso já que neste caso a energia e torque não são minimizados. A Fig. 7.14 mostra um gráfico 3D das trajetórias iniciais e ótimas do centro da plataforma móvel do CaPaMan no caso em que se prioriza o tempo. Pode-se observar que a trajetória ótima é suave e também obedece aos pontos iniciais e finais pré-definidos. Na Fig. 7.15 estão representadas as curvas iniciais e ótimas para os ângulos de entrada dos mecanismos. As derivadas temporais dos ângulos de entrada são mostradas nas Fig. 7.16.

Tabela 7.4. Resultados da otimização da função multi-objetivo.

	Função multi-objetivo	Energia [Nm/s^2]	Tempo total [s]	Jerk [rad/s^3]
Valor inicial.	1,00	39,08	1,50	6,7
Valor ótimo.	0,81	76,05	0,81	40,6
Performance	19,0 %	-	46,0 %	-

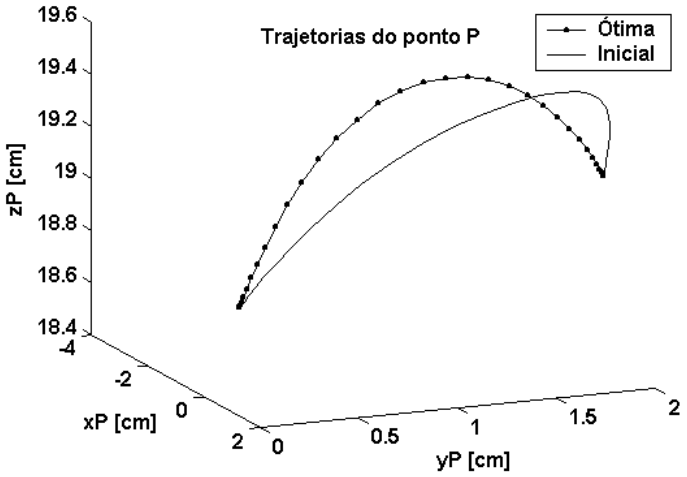
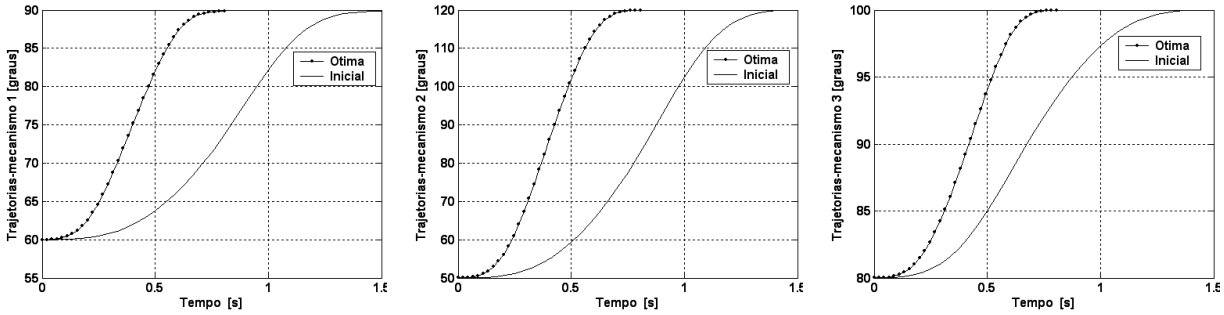


Figura 7.14. Trajetória ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan em função do tempo.



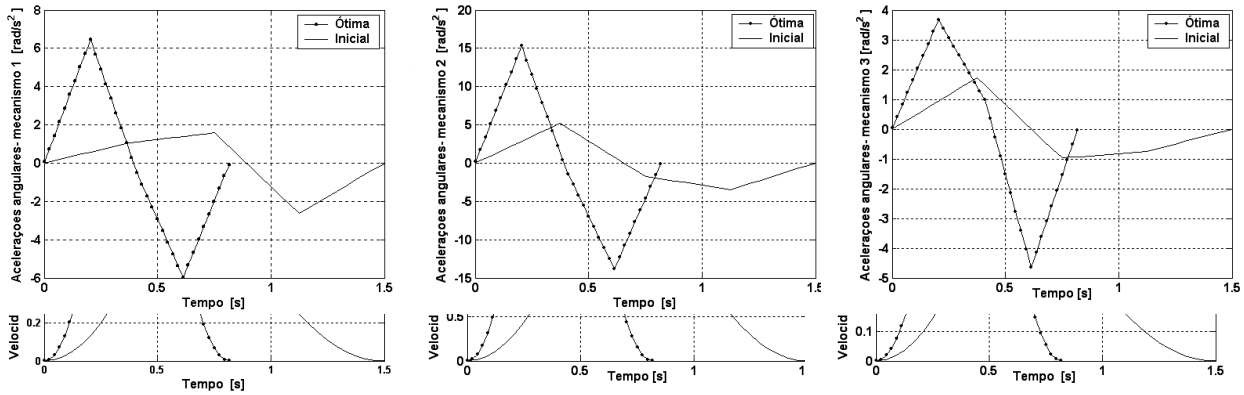
(a) (b) (c)

Figura 7.15 Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função no tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3

Observe que as velocidades cresceram bastante, uma vez que o tempo total de percurso foi muito reduzido, contribuindo para o aumento da energia. Um comportamento similar ocorreu nas curvas das acelerações (Fig. 7.17) e do jerk (Fig.7.18). Os gráficos das curvas de torque que os atuadores aplicam sobre os eixos de entrada são apresentados na Fig. 7.19. Comparando os valores iniciais e ótimos verifica-se que os valores de torque também foram modificados significativamente.

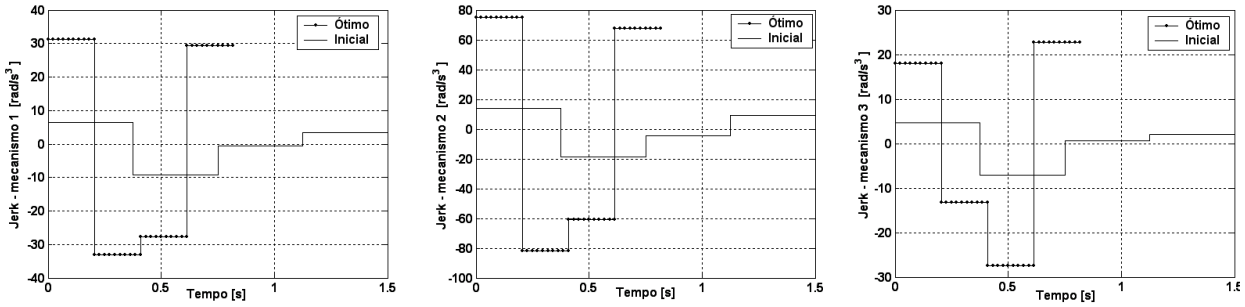
(a) (b) (c)

Figura 7.16 Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada em
função do tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3.



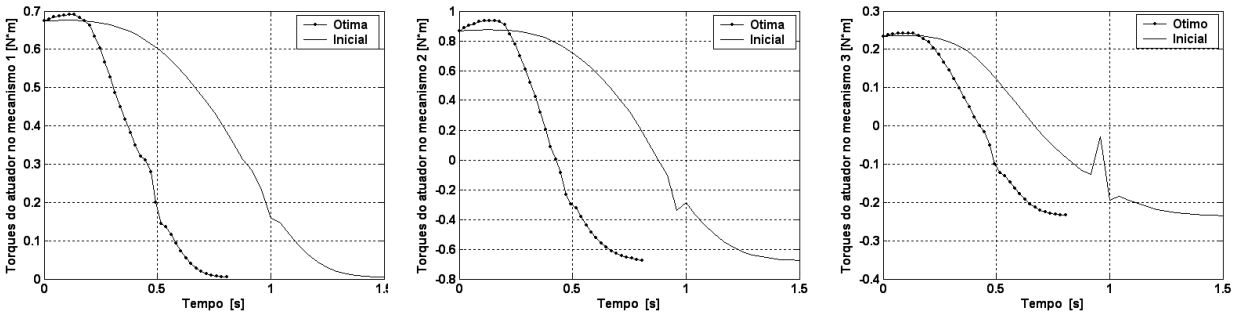
(a) (b) (c)

Figura 7.17 Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.



(a) (b) (c)

Figura 7.18 Curvas iniciais e ótimas do jerk nos atuadores em função do tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3.



(a) (b) (c)

Figura 7.19 Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.

7.1.4. Comparação dos resultados.

Os resultados obtidos podem ser comparados a partir da Tab. 7.5, considerando somente a minimização da energia e do tempo. Por tratar-se de um problema de otimização multi-objetivo é possível obter um conjunto de soluções ótimas de Pareto, sendo analisados apenas três casos de interesse prático. Como as funções multi-objetivo consideradas, energia e tempo, são conflitantes entre si, uma solução de compromisso é encontrada, pois não é possível obter uma resposta que seja ótima simultaneamente sob o ponto de vista de cada uma das funções. Cabe ao usuário escolher uma “boa solução“, que atenda suas demandas de operação.

Tabela 7.5 Tabela comparativa dos resultados considerando a minimização da energia e do tempo.

Parâmetros da otimização	K1=0,8 e K2=0,2	K1=0,5 e K2=0,5	K1=0,2 e K2=0,8
Valor inicial	1,00	1,00	1,00
Valor ótimo	0,79	0,99	0,81
Performance.	21,0%	1,0%	19,0%
Energia inicial [Nm/s^2]	39,08	39,08	39,08
Energia ótima [Nm/s^2]	19,15	37,94	76,05
Performance.	51,0%	2,9 %	-
Tempo inicial [s]	1,50	1,50	1,50
Tempo ótimo [s]	2,90	1,53	0,81
Performance	-	-	46,0%
Jerk inicial [rad/s^3]	6,9	7,0	6,7
Jerk ótimo [rad/s^3]	0,9	6,4	40,6
Performance	87,0%	8,5%	-

Deve-se observar que apesar dos valores iniciais da energia serem iguais (Tab. 7.5), as trajetórias iniciais, obtidas aleatoriamente, podem ser ligeiramente diferentes. Este fato explica as diferenças encontradas nas curvas iniciais de velocidade e aceleração.

7.2 Trajetórias ótimas considerando apenas a minimização da energia (tempo total de percurso constante).

Nesta seção, o objetivo é verificar se a metodologia desenvolvida é capaz de minimizar a energia, apenas alterando a forma da trajetória. Isto é feito atuando sobre os pontos de controle da spline cúbica, sem minimizar o tempo total de percurso. Assim, considerando esta aplicação, na Eq. (6.1) que descreve a função objetivo, adota-se K_1=1, K_2=K_3=0 e escreve-se como:

$$Minimizar\ f = \frac{E}{E_0} \tag{7.4}$$

Sujeito a

$$60 \le \alpha_1(t) \le 90 \text{ [graus]}$$

$$50 \le \alpha_2(t) \le 120 \text{ [graus]}$$

$$80 \le \alpha_3(t) \le 100 \text{ [graus]}$$

$$-10 \le \tau_i \le 10 \text{ [Nm]} \tag{7.5}$$

Neste caso, deseja-se obter trajetórias em que o tempo total de percurso é constante, isto é, o tempo não é mais variável de projeto. Para T_t=1.5s, constante, a energia é calculada como:

$$E = \int_0^{Tt=1,5} \sum_{i=1}^{3} \left[\tau_i(t)\dot{\alpha}_i(t) \right] dt, \tag{7.6}$$

As dimensões são as mesmas relacionadas na Tab. 7.1. O robô esta inicialmente em repouso e fica completamente parado ao final da trajetória. A Tab. 7.6 mostra os resultados, usando as trajetórias ótimas apresentadas na Fig. 7.21. A Fig. 7.20 mostra um gráfico 3D das trajetórias ótimas e iniciais, comprovando que é possível modificar a trajetória final, de forma a minimizar a energia, apenas com a escolha adequada dos pontos de controle. A redução de 3% da energia pode parecer pequena, mas, considerando que o manipulador irá executar esta operação várias vezes durante uma jornada de trabalho, este ganho pode-se tornar significante para a indústria.

Tabela 7.6. Resultados da otimização da função objetivo, considerando o tempo total de percurso constante.

	Função objetivo	Energia [Nm/s^2]	Tempo total [s]	Jerk [rad/s^3]
Valor inicial	1,00	39,08	1,50	7,8
Valor ótimo	0,97	37,91	1,50	6,7
Performance .	3,0 %	3,0%	-	14 %

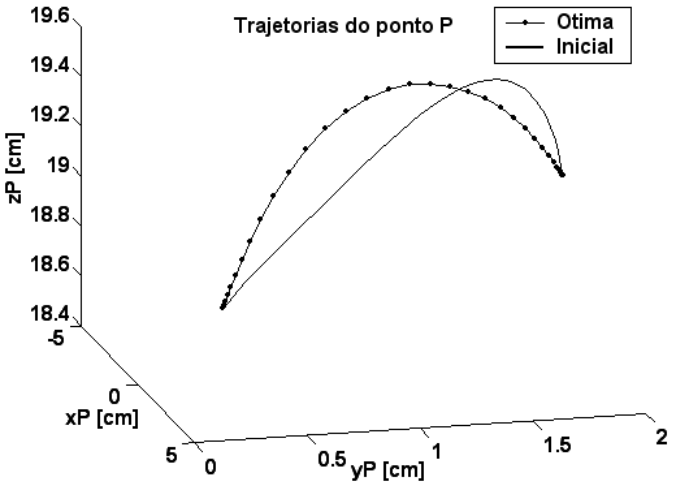
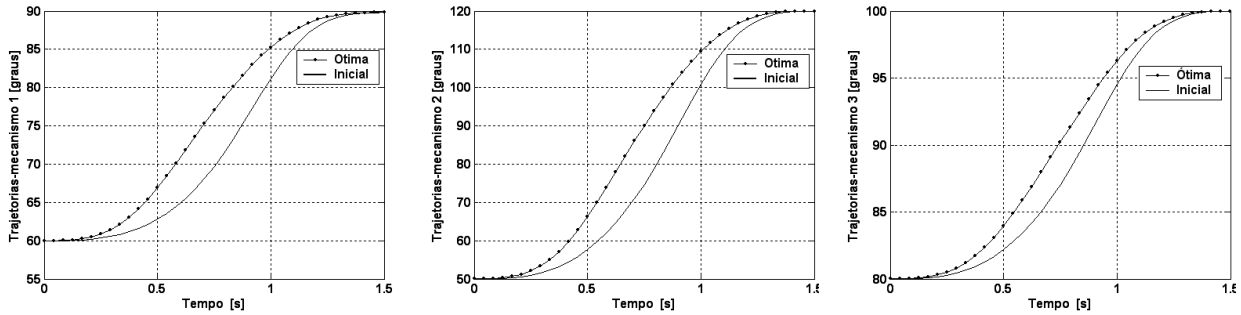


Figura 7.20 Trajetória inicial e ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan, considerando o tempo de percurso constante .

Observa-se na Fig. 7.21 que as trajetórias ótimas foram modificadas em relação às iniciais, tendo em vista que o tempo total de percurso não foi alterado.

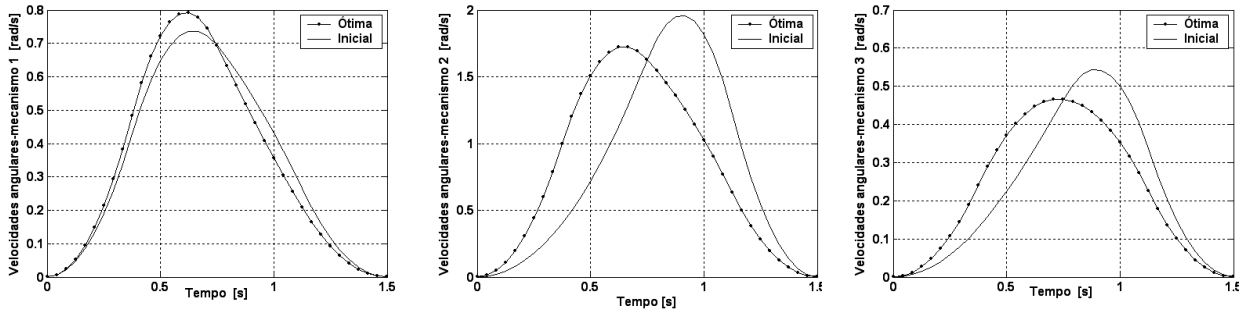


(a) (b) (c)

Figura 7.21. Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada, considerando o tempo total constante: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3.

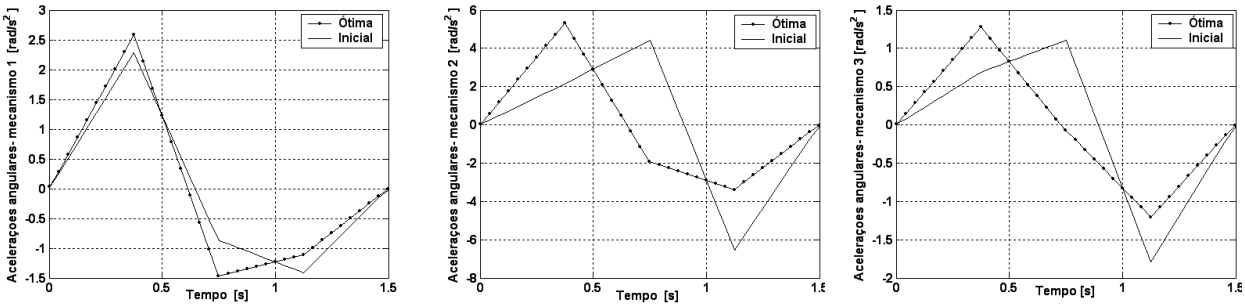
As Figs. 7.22 e 7.23 apresentam o comportamento das velocidades angulares e as acelerações angulares, respectivamente, das manivelas de entrada. Pode-se notar a

alteração do perfil de modo a atender o consumo ótimo de energia, permanecendo o tempo constante.



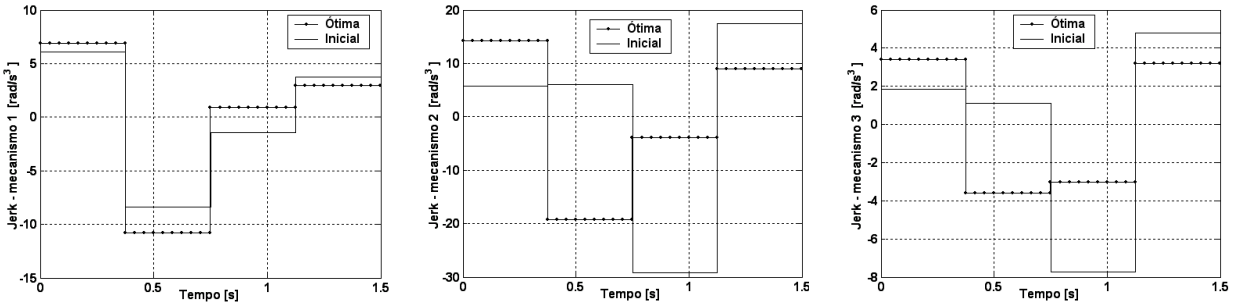
(a) (b) (c)

Figura 7.22 Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada, considerando o tempo total constante: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3.



(a) (b) (c)

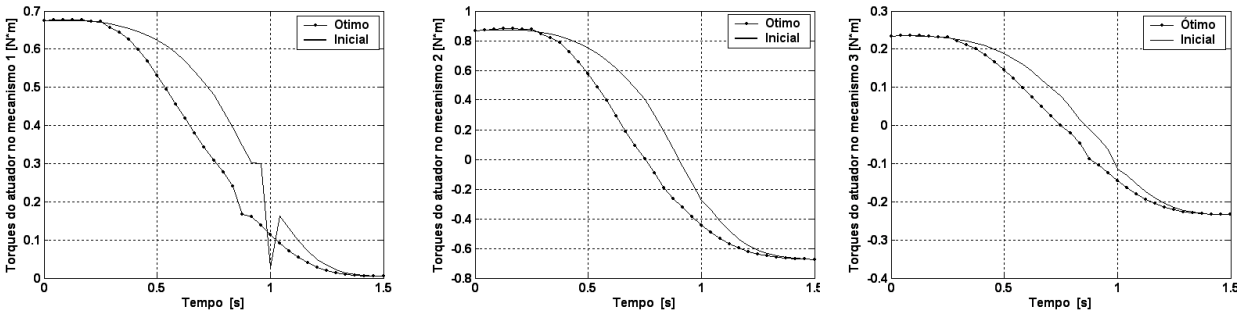
Figura 7.23 Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada para tempo constante: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3.



(a) (b) (c)

Figura 7.24. Gráfico do jerk inicial e ótimo das manivelas de entrada, considerando o tempo total constante: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3.

A Fig. 7.24 apresenta a variação do jerk para cada mecanismo de entrada e a Fig. 7.25 a variação do torque. Pode-se observar que no início do movimento, a curva de torque é mais acentuada, estando coerente com os maiores picos de aceleração. Já no final a curva é mais suave, apresentando menores níveis de aceleração.



(a) (b) (c)

Figura 7.25 Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores para tempo constante: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.

7.3 Simulação a altas velocidades.

A maioria das aplicações de robôs paralelos opera com velocidades elevadas, sendo esta uma das principais características deste tipo de manipulador. Para otimizar tais operações, o problema de otimização definido pelas Eqs. 7.1 e 7.3, será novamente simulado, considerando as condições definidas pelas Eqs. 7.2 adotando-se o tempo de percurso T_0=0.3 s como tempo inicial, e a variação do tempo total de percurso descrita pela restrição:

$$0{,}1 \leq Tt \leq 0{,}5 \quad \text{[s]} \tag{7.7}$$

As características dimensionais do CaPaMan são as mesmas consideradas nos casos anteriores e apresentadas na Tab.7.1.

7.3.1. Simulação a altas velocidades, priorizando a minimização da energia: K_1=0,8, K_2=0,2.

De forma semelhante ao item 7.1.1, para priorizar a minimização da energia, é considerado K_1=0,8 e K_2=0,2. A Tab. 7.7 apresenta os resultados obtidos para estas condições. Pode-se observar que, apesar do tempo ter um peso de 20% o processo foi otimizado em seu limite superior, ou seja: T_t=0,5 s. Com a ampliação do tempo para se descrever a trajetória fica nítida a suavização do movimento. Assim, na Fig. 7.26 está apresentada a trajetória do centro da plataforma móvel do CaPaMan, e a variação angular do movimento de entrada dos mecanismos representados na Fig. 7.27. Devido ao aumento do tempo total para descrever a trajetória de (de 0,3 s para 0,5 s) pode-se notar a suavização do movimento demonstrado pelas curvas de velocidade, Fig. 7.28, pelas acelerações, Fig. 7.29, e pelo jerk, Fig. 7.30. Conseqüentemente, ocorre também a suavização das curvas de torques, reduzindo consideravelmente as variações bruscas de torque conforme pode ser visto na Fig. 7.31. Isto demonstra que, mesmo para altas velocidades de operação, a metodologia de otimização adotada é satisfatória.

Tabela 7.7. Resultados da otimização da função multi-objetivo para altas velocidades, considerando K_1=0,8 e K_2=0,2.

	Função multi-objetivo	Energia [Nm/s^2]	Tempo total [s]	Jerk [rad/s^3]
Valor inicial	1,00	377,75	0,30	825,6
Valor ótimo	0,62	136,29	0,50	183,5
Performance	38,0 %	63,9%	-	77,8%

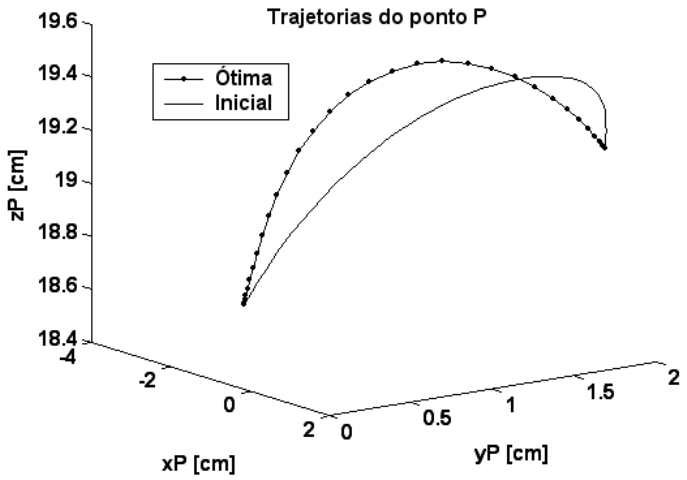
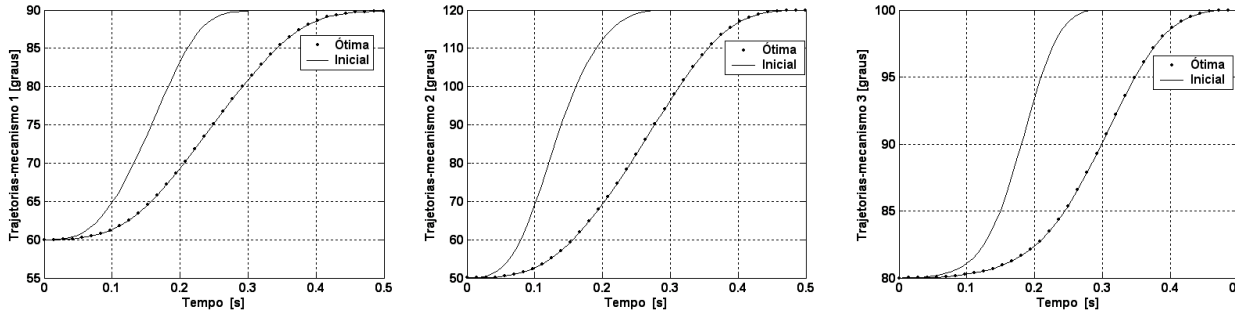
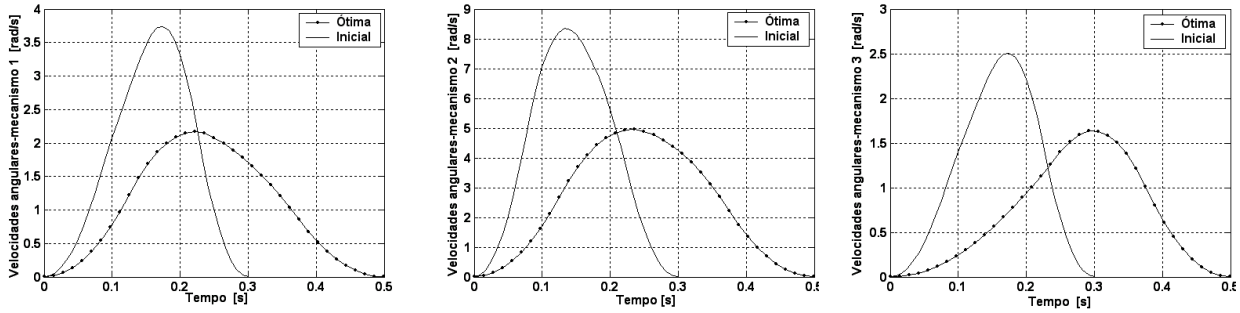


Figura 7.26. Trajetória inicial e ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan, considerando altas velocidades, para o caso K_1=0,8 e K_2=0,2.



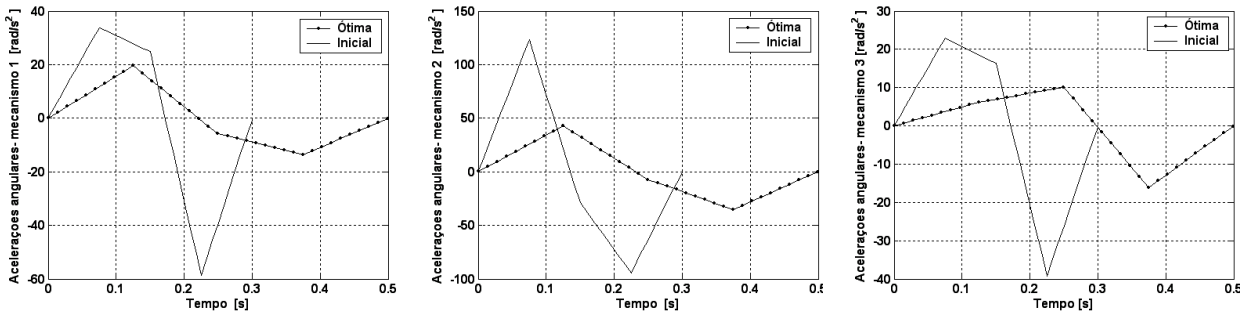
(a) (b) (c)

Figura 7.27. Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função no tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3.



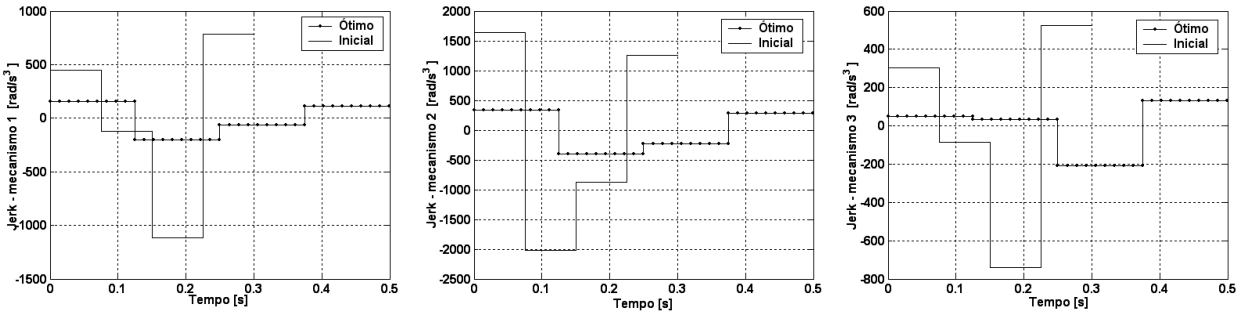
(a) (b) (c)

Figura 7.28 Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3.



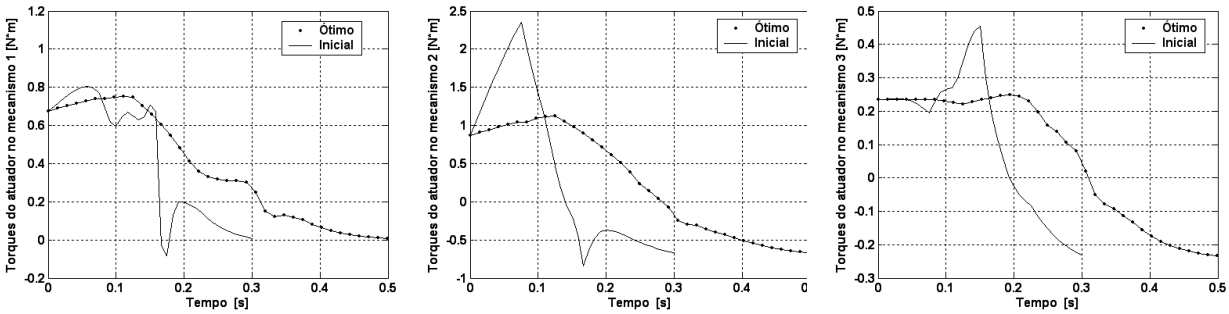
(a) (b) (c)

Figura 7.29 Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.



(a) (b) (c)

Figura 7.30 Curva inicial e ótima do jerk das manivelas de entrada, para altas velocidades: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3 (K_1=0,8 e K_2=0,2).



(a) (b) (c)

Figura 7.31. Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.

7.3.2 Simulação a altas velocidades, mesma prioridade para a energia e o tempo: K_1= K_2=0,5.

Neste exemplo é considerado que o tempo e a energia tem a mesma prioridade. Assim, tem-se K_1=0,5 e K_2=0,5. Os resultados obtidos são apresentados na Tab. 7.8 e as trajetórias inicial e ótima da estão apresentadas na Fig. 7.32. As trajetórias iniciais e ótimas de cada mecanismo são apresentadas na Fig.7.33.

Tabela 7.8. Resultados da otimização da função multi-objetivo para altas velocidades.

	Função multi-objetivo	Energia [Nm/s^2]	Tempo total [s]	Jerk [rad/s^3]
Valor inicial	1,00	318,09	0,30	936,0
Valor ótimo	0,95	230,17	0,35	590,3
Performance	5,0 %	27,6%	-	36,9 %

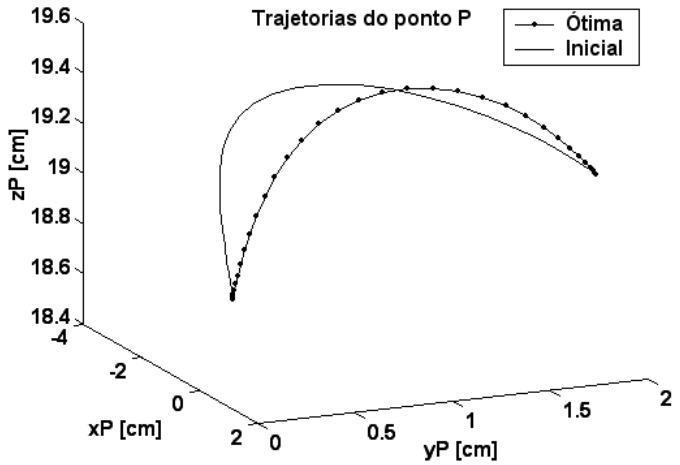
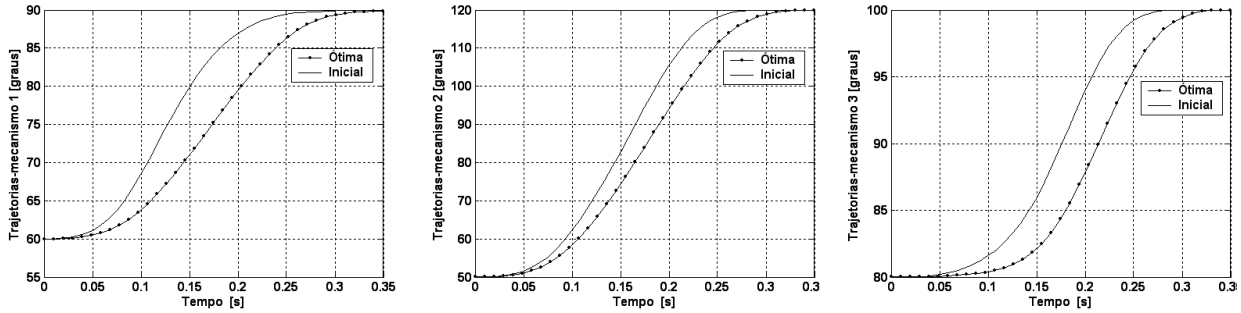


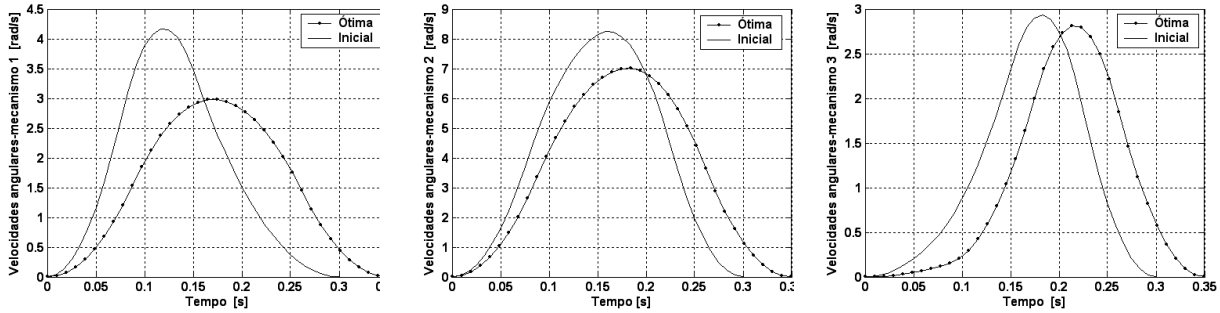
Figura 7.32 Trajetória inicial e ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan, considerando altas velocidades, para o caso K_1= K_2=0,5.

Deve-se observar que, neste caso, o tempo ótimo aumentou cinco centésimos em relação ao tempo inicial (acréscimo de 16,7%), como pode ser visto na Fig. 7.34. Mesmo assim, as velocidades ótimas foram significativamente reduzidas nos mecanismos 1 e 2, e um pouco menos no mecanismo 3. Resultado semelhante ocorreu na aceleração, como pode ser visto na Fig. 7.35. A redução do jerk é razoável, mas se mantêm em níveis altos como pode ser visto na Fig. 7.36. Pode-se notar, no entanto, que o jerk resultante está sempre abaixo do máximo jerk inicial.



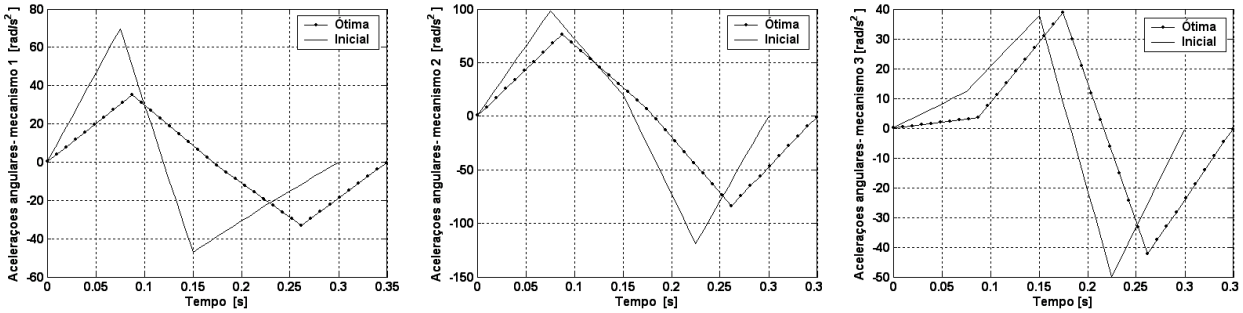
(a) (b) (c)

Figura 7.33. Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função no tempo, para altas velocidades: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3 (K_1= K_2=0,5).



(a) (b) (c)

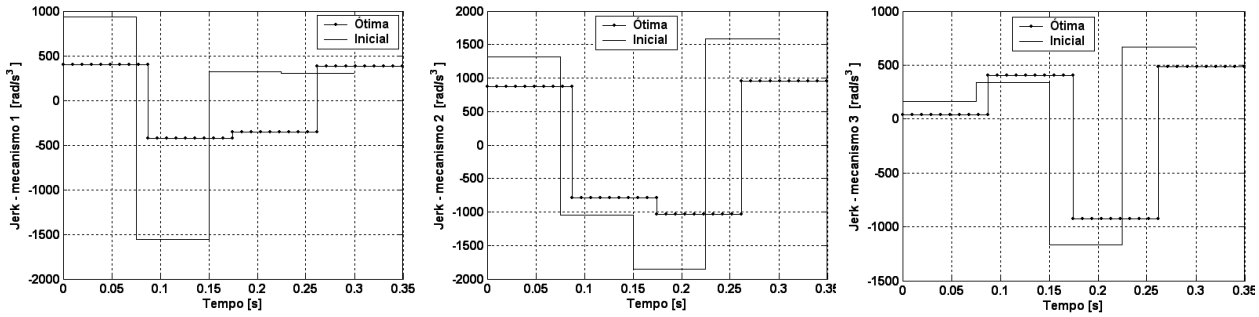
Figura 7.34. Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada, para altas velocidades: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3 (K_1= K_2=0,5).



(a) (b) (c)

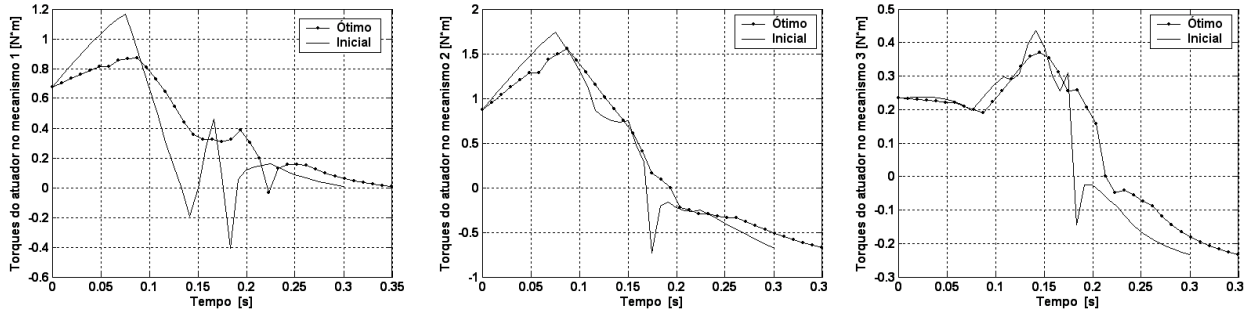
Figura 7.35. Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada, para altas velocidades: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3 (K_1= K_2=0,5).

Observando os torques mostrados na Fig. 7.37 vê-se que os gráficos representativos dos torques iniciais e ótimos são bem próximos. Entretanto a curva de torque ótimo é muito mais uniforme do que a inicial.



(a) (b) (c)

Figura 7.36. Curvas inicial e ótima do jerk das manivelas de entrada, para altas velocidades: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3 (K_1= K_2=0,5).



(a) (b) (c)

Figura 7.37. Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores, para altas velocidades: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3 (K_1= K_2= 0.5).

7.3.3. Simulação a altas velocidades, priorizando a minimização do tempo: K_1=0,2, K_2=0,8.

Neste exemplo é simulada a condição em que o tempo é priorizado. No caso K_1=0,2, e K_2=0,8. A Tab. 7.9 mostra os resultados obtidos quando se considera a trajetória ótima da Fig.7.38, as trajetórias de cada mecanismo são apresentadas na Fig. 7.39. Observa-se que a minimização da função multi-objetivo se dá apenas pela minimização do tempo, já que a energia aumentou.

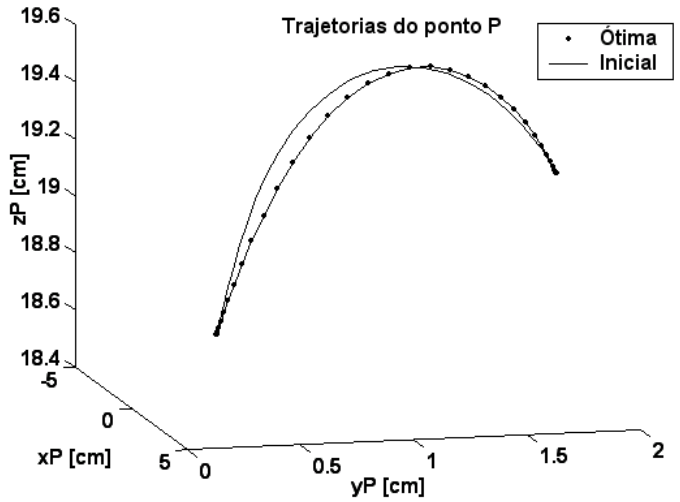
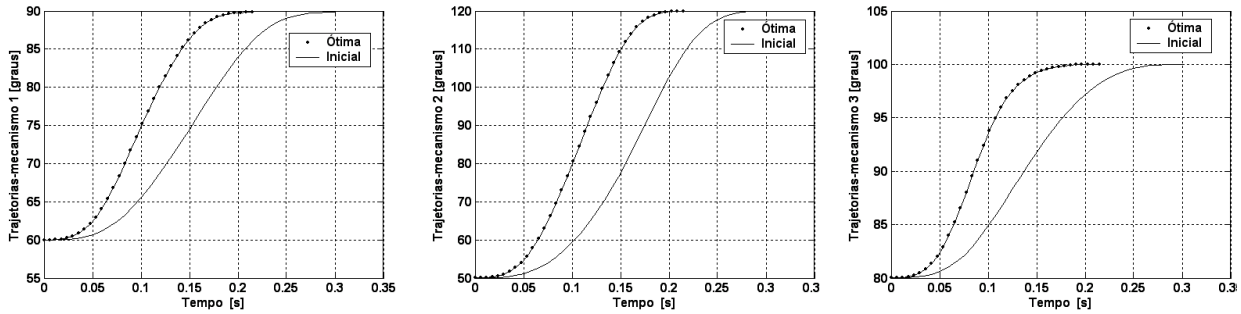


Figura 7.38. Trajetória ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan (K_1=0,2, K_2=0,8).

Tabela 7.9. Resultados da otimização da função multi-objetivo para altas velocidades.

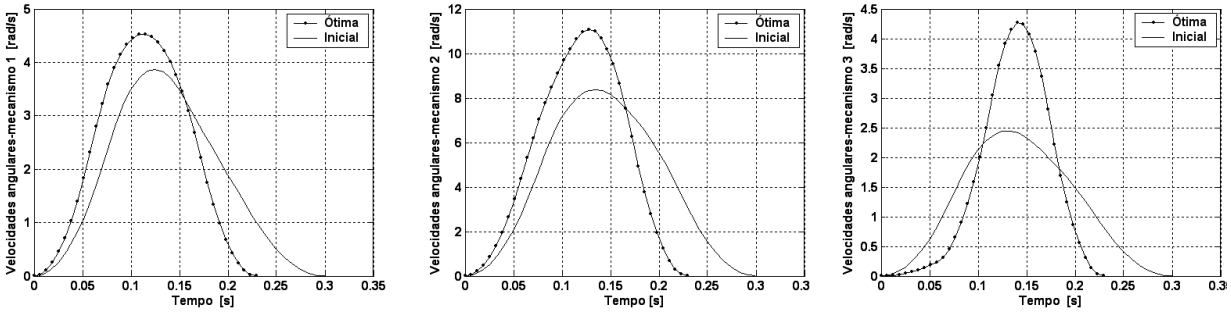
	Função multi-objetivo	Energia [Nm/s^2]	Tempo total [s]	Jerk [rad/s^3]
Valor inicial	1,00	326.74	0,30	829,1
Valor ótimo	0,91	489.05	0,23	2076,4
Performance	9,0 %	-	23,3%	-

Nas Figs. 7.40 e 7.41, vê-se que tanto as velocidades como as acelerações são aumentadas no processo de otimização, pois neste caso prioriza-se o tempo. Pode-se observar na Fig. 7.42 que o jerk apresenta variações importantes significando uma necessidade de se controlar o valor do jerk.



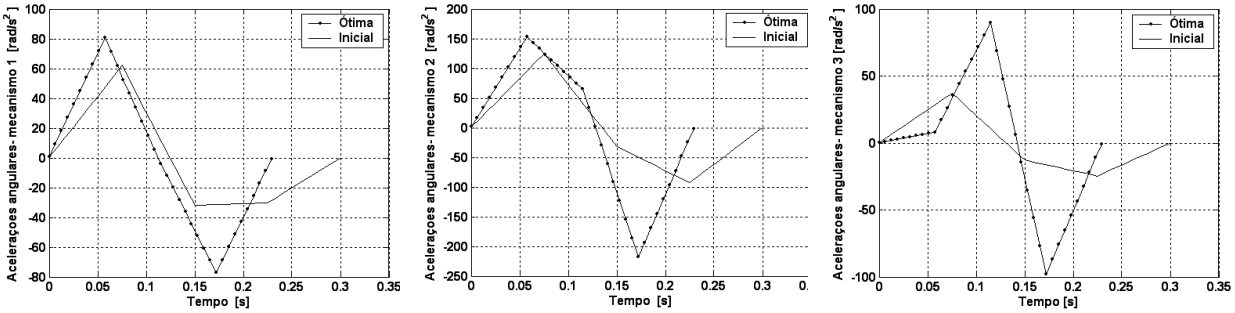
(a) (b) (c)

Figura 7.39. Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função no tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3.



(a) (b) (c)

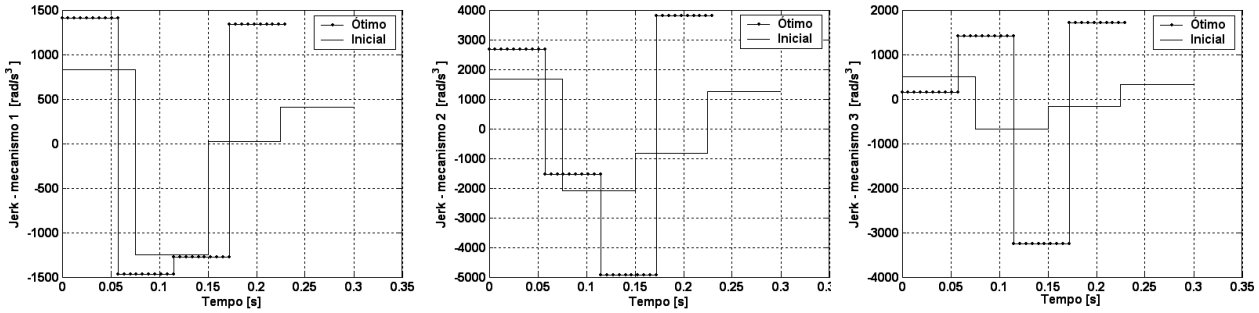
Figura 7.40 Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3.



(a) (b) (c)

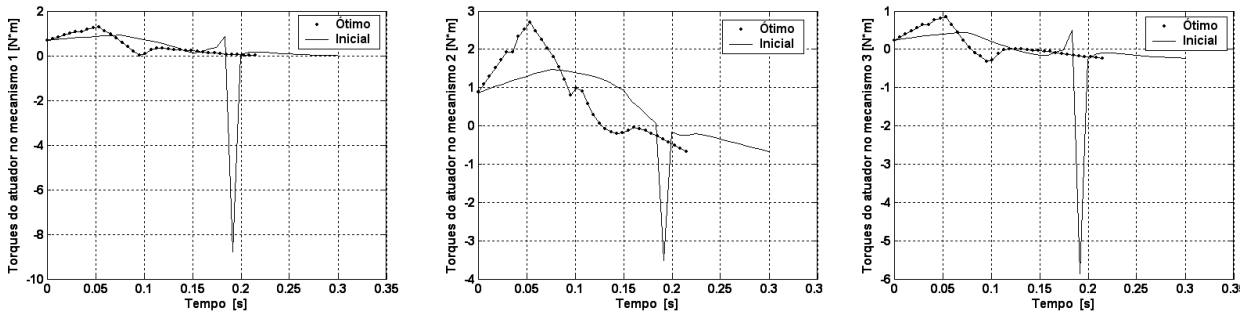
Figura 7.41. Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.

A Fig. 7.43 mostra que, neste caso, os torques não são tão bem comportados como nos casos anteriores, mas o processo de otimização elimina as variações bruscas de torque, principalmente nos mecanismos 1 e 3.



(a) (b) (c)

Figura 7.42. Curva inicial e ótima do jerk das manivelas de entrada, para altas velocidades: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3 (K_1=0,2 e K_2=0,8).



(a) (b) (c)

Figura 7.43. Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.

A Tab. 7.10 apresenta a comparação dos resultados obtidos para o manipulador paralelo CaPaMan operando a altas velocidades, considerando apenas a minimização da energia e do tempo. Novamente, por serem as funções multi-objetivo conflitantes entre si, obtém-se soluções de compromisso, cabendo ao usuário escolher a “melhor solução“ sob o ponto de vista prático. O código computacional desenvolvido permite que; a partir de novas escolhas para os fatores de ponderação (K_1 e K_2) outras soluções sejam calculadas.

A simples verificação dos valores ótimos obtidos, mostra que para altas velocidades, que envolvem energia elevada, a otimização torna-se muito importante. Note também, que neste caso, os valores do jerk são bastante elevados, mostrando que esta grandeza deve ser considerada como um critério de otimização.

Tabela 7.10. Tabela comparativa dos resultados considerando a minimização da energia e do tempo, para altas velocidades.

Parâmetros da otimização	K1=0,8 e K2=0,2	K1=0,5 e K2=0,5	K1=0,2 e K2=0,8
Valor inicial	1,00	1,00	1,00
Valor ótimo	0,62	0,95	0,91
Performance.	38,0%	5,0%	9,0%
Energia inicial [Nm/s^2]	377,75	318,09	326,74
Energia ótima [Nm/s^2]	136,29	230,17	489,05
Performance.	63,9%	27,6%	-
Tempo inicial [s]	0,30	0,30	0,30
Tempo ótimo [s]	0,50	0,35	0,23
Performance.	-	-	23,3%
Jerk inicial [rad/s^3]	825,6	936,0	829,1
Jerk ótimo [rad/s^3]	183,5	590,3	2076,4
Performance	77,8%	36,9%	-

7.4 Simulação a altas velocidades com controle do jerk.

Como pode ser visto nas Figs. (7.30), (7.36) e (7.42), as simulações a altas velocidades produzem grandes variações das acelerações. Isto sugere o procedimento de controle do jerk. Desta forma será utilizada a função multi-objetivo definida na Eq. 6.1, ou seja:

$$Minimizar\ \ f = K_1 \frac{E}{E_0} + K_2 \frac{Tt}{T_0} + K_3 \frac{J}{J_0} \tag{7.8}$$

Os parâmetros do CaPaMan neste caso são os mesmos usados na seção 7.3

7.4.1 Simulação a altas velocidades com controle do jerk (K_1=K_2=0,2 e K_3=0,6).

Neste exemplo, é realizada a simulação do movimento dando prioridade ao jerk (K_3=0,6), considerando a energia e o tempo de baixa prioridade (K1=K_2=0,2). A Tab. 7.11 mostra os resultados obtidos quando se considera a trajetória ótima da Fig.7.44, que equivalem ao movimento ótimo de entrada apresentado na Fig. 7.45.

Tabela 7.11. Resultado da otimização da função objetivo para altas velocidades com controle do jerk, considerando K_1=K_2=0,2 e K_3=0,6.

	Função multi-objetivo	Energia [Nm/s^2]	Tempo total [s]	Jerk [rad/s^3]
Valor inicial	1,00	358,40	0,30	1010,9
Valor ótimo	0,49	136,28	0,50	178,3
Performance	51,0 %	62.0 %	-	82,3 %

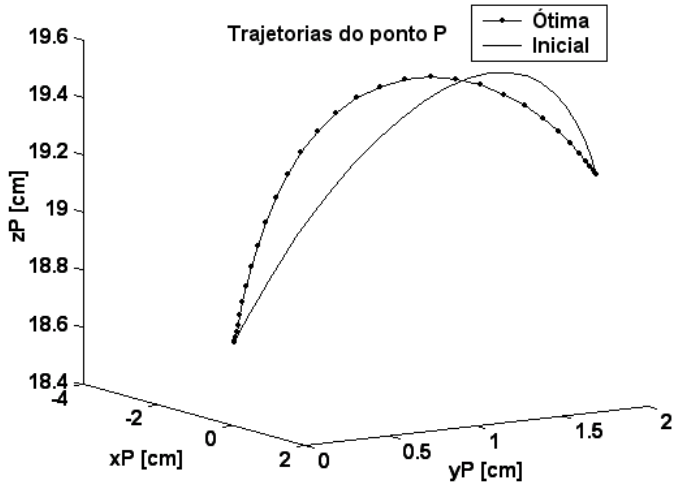
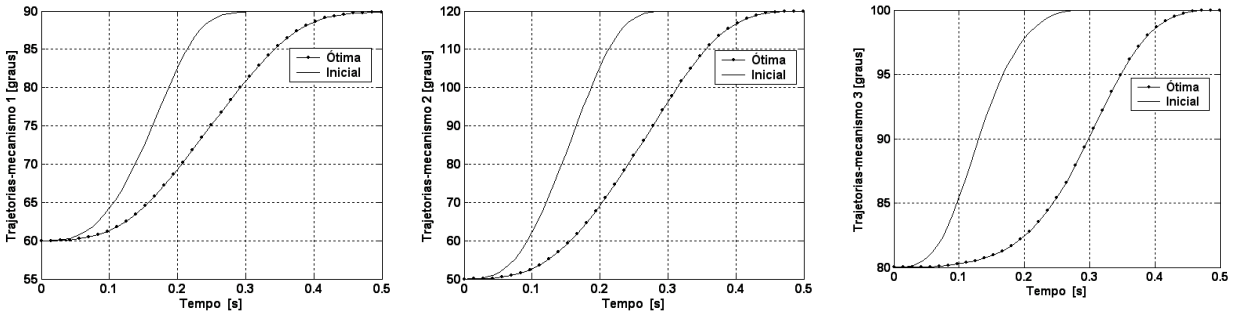


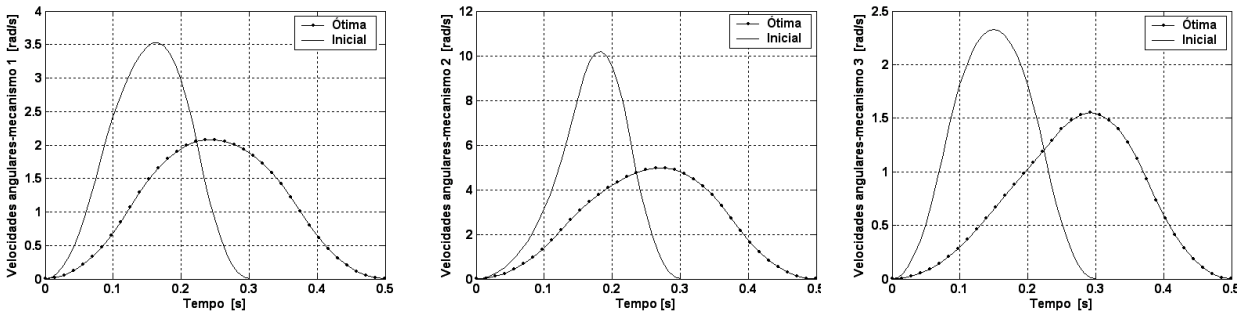
Figura 7.44 Gráfico 3D da trajetória ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan, problema de otimização minimizando o jerk .

Observa-se neste caso que, tendo em vista a priorização do jerk, tem-se uma redução bastante significativa de energia. O jerk ,como era de se esperar, foi bastante reduzido e o tempo teve um aumento de 66.67 % conduzindo-o para o extremo superior de tempo permitido. A combinação energia-tempo-jerk resulta na minimização da função multi-objetivo. A Fig. 7.46 mostra que a redução de velocidade é muito grande comparada com a velocidade inicial o que juntamente com a performance de aceleração mostrada Fig. 7.47 justificam a redução do jerk em 82.3 %.



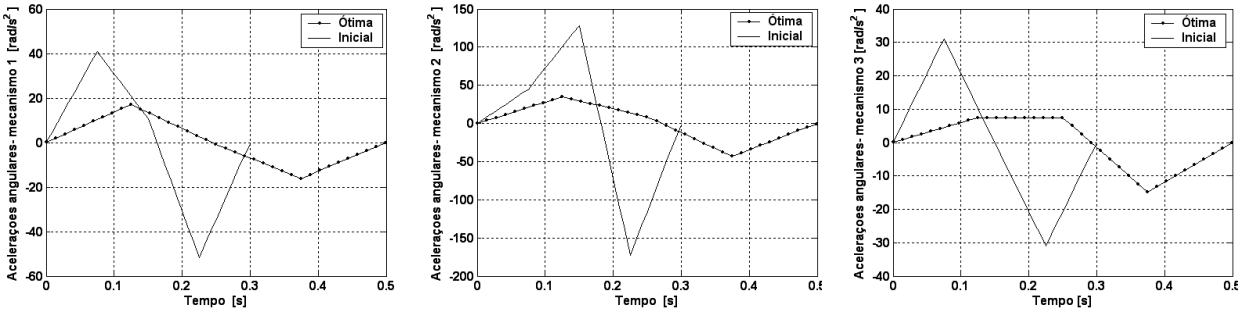
(a) (b) (c)

Figura 7.45.Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função no tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3.



(a) (b) (c)

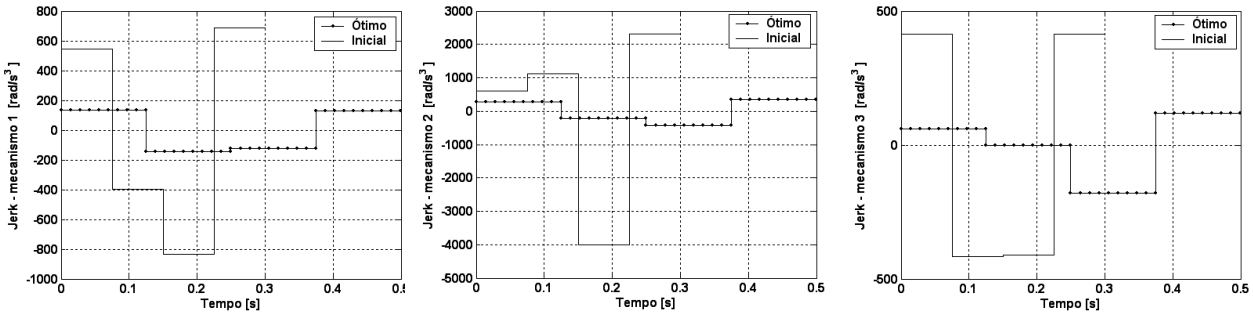
Figura 7.46 Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3.



(a) (b) (c)

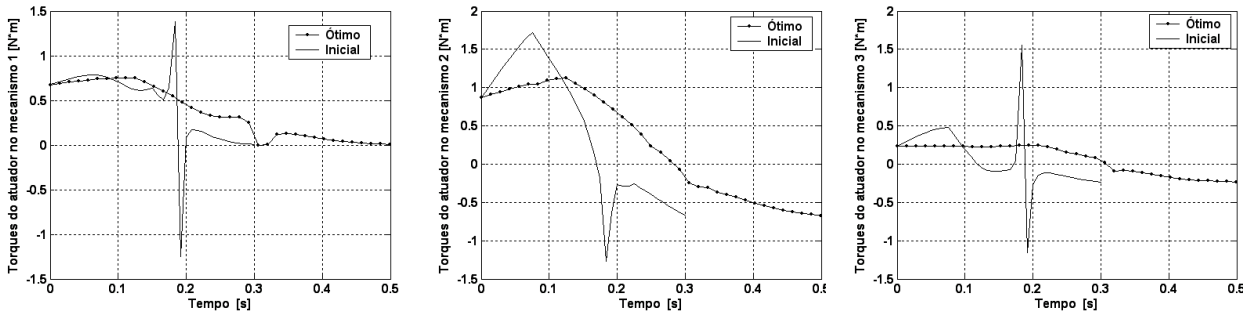
Figura 7.47 Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.

Da Fig. 7.48 conclui-se que o jerk foi bastante reduzido, mas continua em níveis altos, pois se trata de operar o robô a altas velocidades. Pode-se observar pela Fig. 7.49 que as curvas de torque foram suavizadas em todos os três mecanismos. Pode-se observar também que estas curvas de torque são bastante semelhantes às da Fig. 7.31, correspondente ao caso altas velocidades com K_1=0,8 e K_2=0,2; os resultados são muito semelhantes. Dos resultados apresentados nas Tab. 7.10 e 7.11, pode-se verificar que, embora a energia ótima seja a mesma, o nível de jerk é menor quando se usa controle de jerk.



(a) (b) (c)

Figura 7.48. Curva inicial e ótima do jerk das manivelas de entrada, para altas velocidades: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3 (K_1= K_2=0,2 e K_3=0.6).



(a) (b) (c)

Figura 7.49 Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.

7.4.2 Simulação a altas velocidades com controle do jerk (K_1= K_2=0.3 e K_3=0.4).

Neste exemplo o controle do jerk ainda é prioritário, mas com peso próximo ao de controle de energia e tempo, considerados iguais, ou seja: K_1= K_2=0.3 e K_3=0.4. A Tab. 7.12 mostra os resultados obtidos quando se consideram as trajetórias ótimas da Fig.7.51. A combinação energia-tempo-jerk resulta na minimização da função multi-objetivo. A Fig. 7.50 mostra que a trajetória ótima do ponto central da plataforma móvel obedece aos pontos iniciais P_0 e P_m.

Tabela 7.12. Resultados da otimização da função multi-objetivo para altas velocidades.

	Função multi-objetivo	Energia [Nm/s^2]	Tempo total [s]	Jerk [rad/s^3]
Valor inicial	1,00	312.83	0,30	832,5
Valor ótimo	0,71	146.24	0,46	201,4
Performance	29,0 %	53,2%	-	75,8 %

Os resultados do comportamento das velocidades, acelerações e do jerk podem ser vistos das Figs. 7.52, 7.53 e 7.54 respectivamente. Com o aumento do tempo a tendência é de redução dos valores máximos. A Fig. 7.55 mostra que os torques foram reduzidos e suavizados, mas não tanto como no caso em que se usa a configuração de parâmetros (K_1=0.2, K_2=0.2 e K_3=0.6).

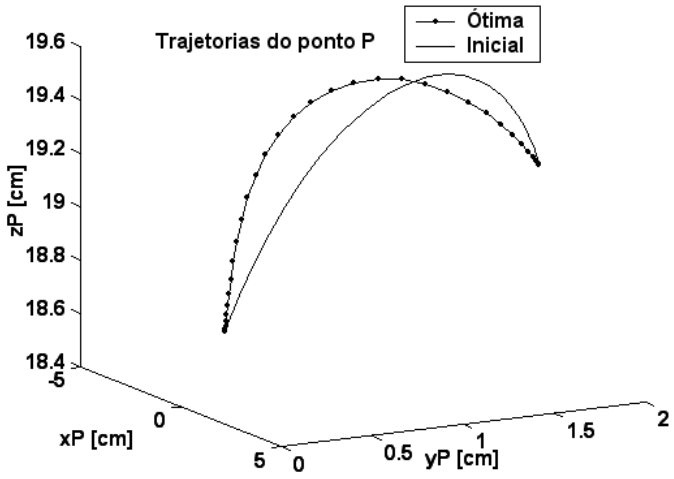
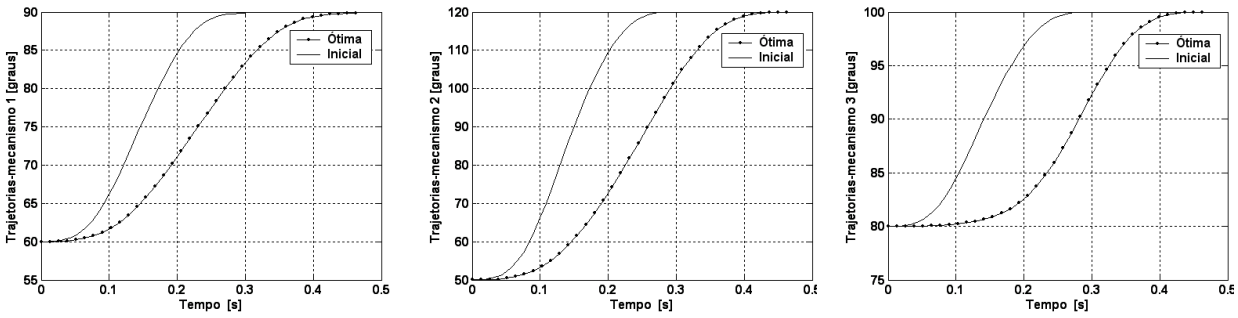
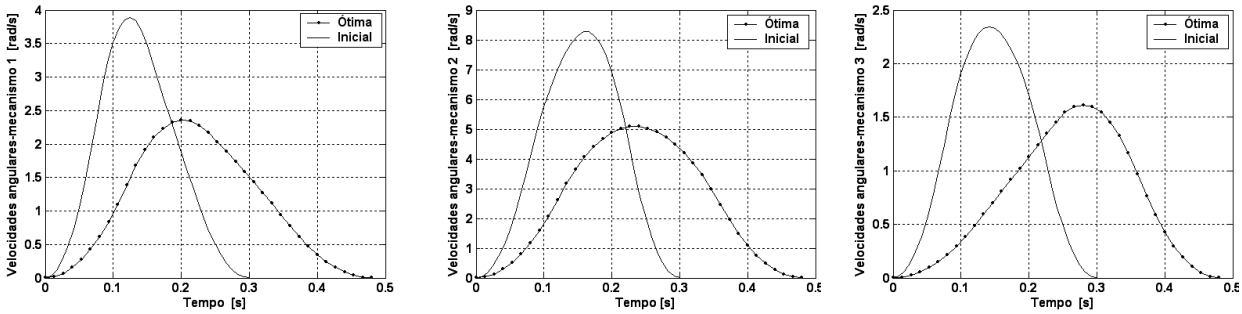


Figura 7.50 Gráfico 3D da trajetória ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan.



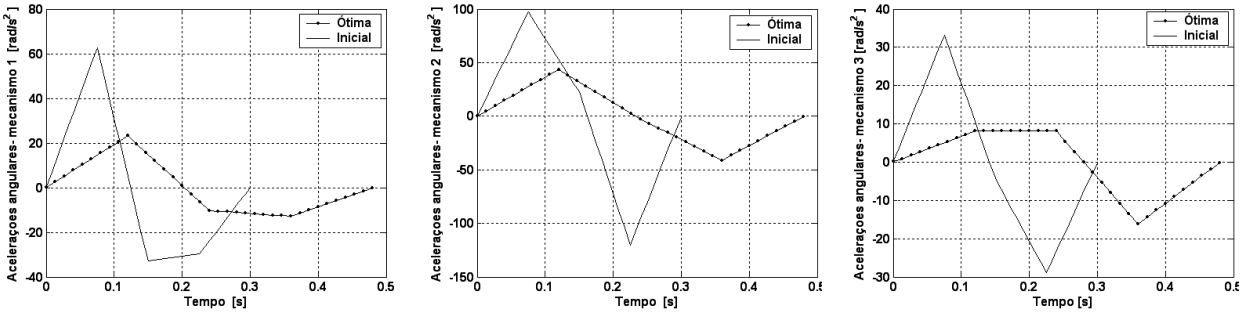
(a) (b) (c)

Figura 7.51.Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função no tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3.



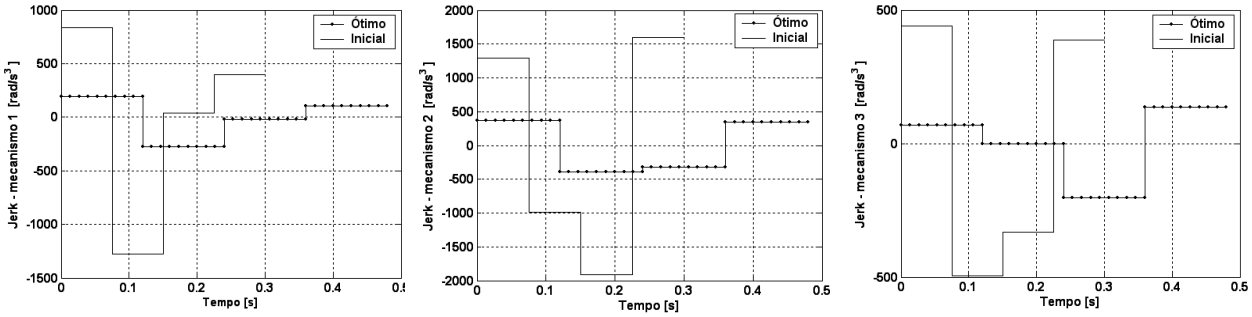
(a) (b) (c)

Figura 7.52 Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada do CaPaMan, (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3.



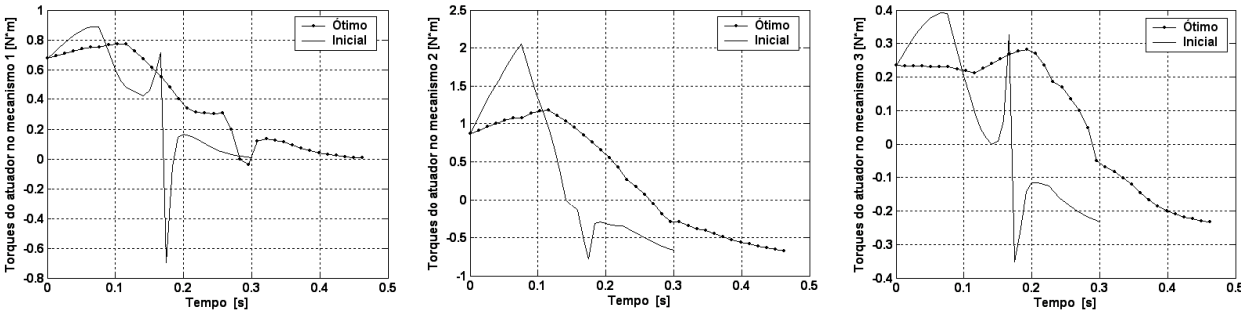
(a) (b) (c)

Figura 7.53 Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada do CaPaMan em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.



(a) (b) (c)

Figura 7.54. Curva inicial e ótima do jerk das manivelas de entrada, para altas velocidades: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3 (K_1= K_2=0,3 e K_3=0.4).



(a) (b) (c)

Figura 7.55 Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.

Na tabela 7.13 apresenta-se o resumo comparativo dos dois casos, mostrando que se obtém otimização da função multi-objetivo em todos estes casos e que o usuário deve variar os parâmetros K_1, K_2 e K_3 de acordo com suas necessidades em termos dos componentes da função multi-objetivo.

Tabela 7.13. Tabela comparativa dos resultados da otimização para altas velocidades com minimização do jerk.

Parâmetros da otimização	K_1= K_2=0,2 K_3=0,6	K_1= K_2=0,3 K_3=0,4
Valor inicial	1,00	1,00
Valor ótimo	0,49	0,71
Performance.	51,0%	29,0%
Energia inicial [Nm/s^2]	358,40	312,85
Energia ótima [Nm/s^2]	136,28	146,24
Performance.	62,0%	53,2%
Tempo inicial [s]	0,30	0,30
Tempo ótimo [s]	0,50	0,46
Performance	-	-
Jerk inicial [rad/s^3]	1010,9	832,5
Jerk ótimo [rad/s^3]	178,3	201,4
Performance	82,3%	75,8%

7.5 Simulação para um CaPaMan robusto considerando K_1=0.8, K_2=0,2 e K_3=0.

Os parâmetros dimensionais do CaPaMan apresentados na Tab. 7.1 correspondem ao protótipo construído no Laboratório de Robótica e Mecatrônica da Universidade de Cassino. Com o objetivo de verificar a validade do procedimento de otimização e do modelo dinâmico desenvolvido nesta tese, a seguir são apresentados resultados de simulação realizados considerando um CaPaMan maior e mais robusto, com inércias elevadas. Para a análise deste exemplo é considerado que a energia tem prioridade maior em relação ao tempo e o jerk não será considerado na otimização. Assim adota-se a função multi-objetivo representada pela Eq. 7.9 (K_1=0.8, K_2=0,2 e K_3=0). O projeto de otimização é descrito de forma similar às Eqs. 7.1 e 7.2, alterando as restrições de torque, ou seja:

$$Minimizar\ f = K_1 \frac{E}{E_0} + K_2 \frac{Tt}{T_0} \tag{7.9}$$

Sujeito a

$60 \leq \alpha_1(t) \leq 90$ [graus]

$50 \leq \alpha_2(t) \leq 120$ [graus]

$80 \leq \alpha_3(t) \leq 100$ [graus] (7.10)

$0{,}8 \leq Tt \leq 3{,}0$ [s]

$-100 \leq \tau_i \leq 100$ [Nm]

Para simular um CaPaMan robusto foi adotado que a plataforma tem massa M=10 Kg, os segmentos h, b e c tem massas respectivamente iguais a m_h=1.0 Kg, m_b=0.60 Kg e m_c=1.0 Kg. Os novos dados dimensionais do CaPaMan estão relacionados na Tab. 7.14. O robô está inicialmente em repouso e fica completamente parado ao final da trajetória. Assim, $\dot{\alpha}_i(0) = \dot{\alpha}_i(T_t) = 0$, i=1,2,3. O tempo inicial de percurso de cada trajetória foi adotado como sendo de 1.5 segundos e o tempo total de percurso foi restrito ao intervalo de 0.8 a 3.0 segundos. Nesta simulação consideram-se dois modelos: Modelo completo e Modelo simplificado. No modelo completo simula-se as operações do CaPaMan considerando-se a dinâmica das pernas e da plataforma móvel. No modelo simplificado considera-se apenas a dinâmica da plataforma móvel.

Tabela 7.14. Parâmetros dimensionais do CaPaMan robusto.

$a_i = c_i$ [mm]	$b_i = d_i$ [mm]	H_i [mm]	$r_P = r_f$ [mm]	s_i [mm]
800	400	600	500	-50 ; 50

As Tab. 7.15 e 7.16 relacionam os resultados obtidos utilizando os modelos completo e simplificado respectivamente. Observe que, para um robô robusto, a utilização do modelo completo é muito mais importante, pois permite o cálculo da energia com maior precisão. Se a dinâmica das pernas for desprezada, no caso do modelo simplificado, isto pode levar a uma redução de aproximadamente 40% do valor real da energia dissipada nos atuadores. As

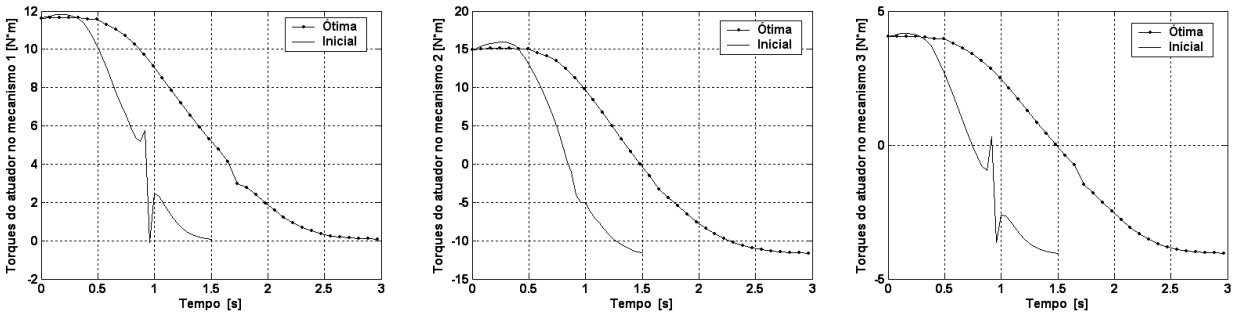
comparações dos torques iniciais e ótimos nos três mecanismos são representadas nas Figs. 7.56 e 7.57. De forma semelhante, caso a inércia das pernas seja desprezada, os torques calculados para um robô robusto terão um erro considerável, pois os valores máximos também serão reduzidos em 40%.

Tabela 7.15. Resultados da otimização da função objetivo, considerando o modelo dinâmico completo .

	Função multi-objetivo	Energia [Nm/s^2]	Tempo total [s]	Jerk [rad/s^3]
Valor inicial	1,00	704,24	1,5	6,7
Valor ótimo	0,77	338,76	2,9	1,0
Performance	23,0 %	35,1%	-	84,7 %

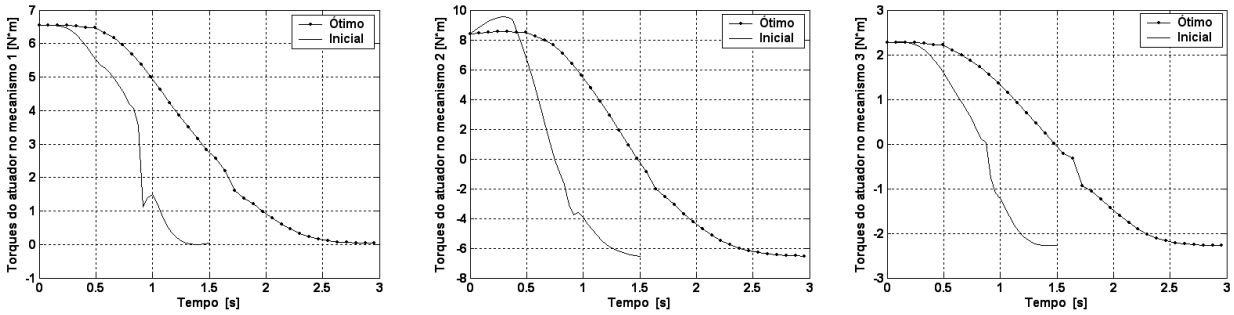
Tabela 7.16. Resultados da otimização da função objetivo, considerando o modelo dinâmico simplificado .

	Função multi-objetivo	Energia [Nm/s^2]	Tempo total [s]	Jerk [rad/s^3]
Valor inicial	1,00	400.89	1,5	6,6
Valor ótimo	0,77	189.62	2,9	0,9
Performance.	23,0 %	52,7%	-	87,0 %



(a) (b) (c)

Figura 7.56 Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores do CaPaMan robusto, modelo dinâmico completo, (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.



(a) (b) (c)

Figura 7.57 Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores do CaPaMan robusto, modelo dinâmico simplificado, (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.

Pode-se observar que, de forma semelhante às simulações anteriores, o tempo ótimo tende para o limite máximo permitindo, no caso 3 s. Desta forma, como também ocorreram nas outras simulações, os valores ótimos de energia e do jerk foram minimizados em relação aos valores iniciais. Além disso, a curva de torque otimizada é mais suave que a inicial. Estes resultados demonstram que o procedimento pode ser aplicado para outras condições e dimensões da estrutura em análise.

7.6 Simulação usando B-splines de quarta ordem.

Ao longo dos anos, na maioria dos trabalhos publicados como em Chen (1991), Saramago (1999b), Oliveira (2005) as trajetórias dos robôs são modeladas utilizando B-splines cúbicas. Uma das principais justificativas são os controladores na operação de tais manipuladores. Obviamente, isto leva a representar as acelerações por funções lineares (e o jerk por funções descontínuas do tipo degrau). O Objetivo desta seção é verificar se o procedimento desenvolvido pode ser utilizado modelando as trajetórias com B-splines de quarta ordem. A seguir, são representados os resultados desta simulação, considerando o problema definido nas Eqs. 7.1 a 7.3; as dimensões do CaPaMan são as mesmas definidas na seção 7.1 e na Tab. 7.1. Considera-se apenas o caso em que a energia é priorizada, ou seja, K_1=0.8, K_2=0.2 e K_3=0. Deseja-se comparar os resultados deste caso com o obtido na seção 7.1. Comparando as curvas de velocidade(Figs. 7.4 e 7.60) e de aceleração(Figs. 7.5 e 7.61)

pode ser observada uma pequena diferença nos valores extremos das mesmas, isto indica que, apesar das trajetórias serem diferentes, produzem níveis de energia semelhantes, mostrando a coerência da metodologia. A Tab. 7.17 mostra os resultados obtidos quando se usam as trajetórias da Fig. 7.59, comparando-a com a Tab.7.2 pode-se verificar que os resultados estão na mesma faixa de variação.

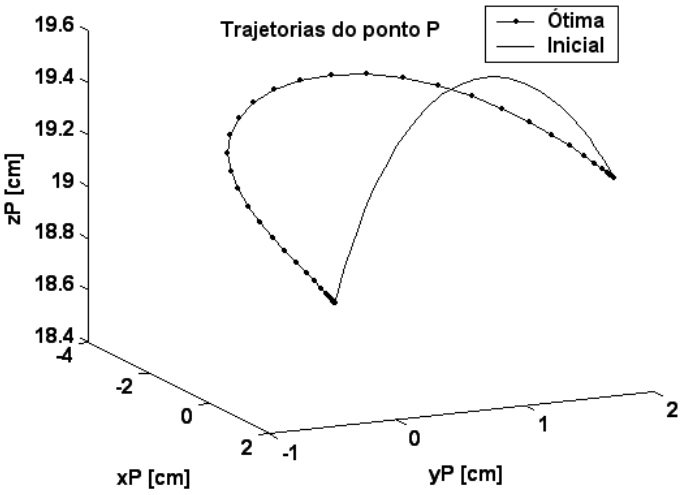
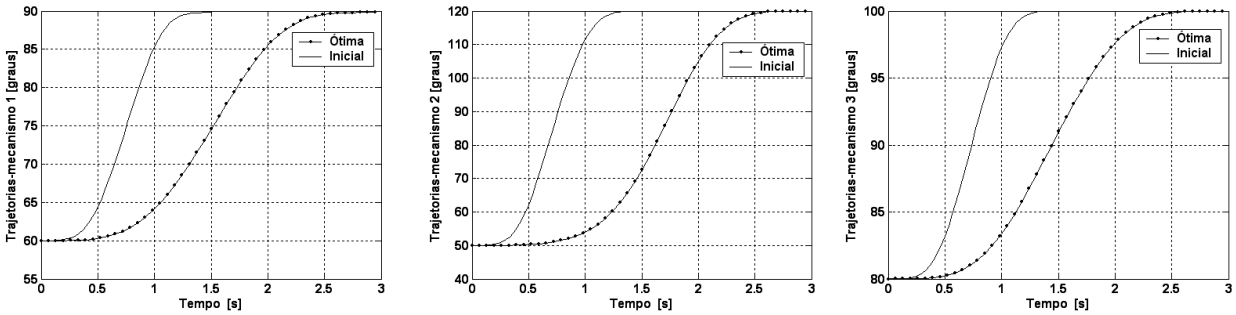


Figura 7.58 Gráfico 3D da trajetória ótima do centro da plataforma móvel do CaPaMan usando B-splines de quarta ordem.

Tabela 7.17. Resultados da otimização da função multi-objetivo, considerando spline de 4ª. ordem e os pesos K_1=0,8, K_2=0,2 e K_3=0.

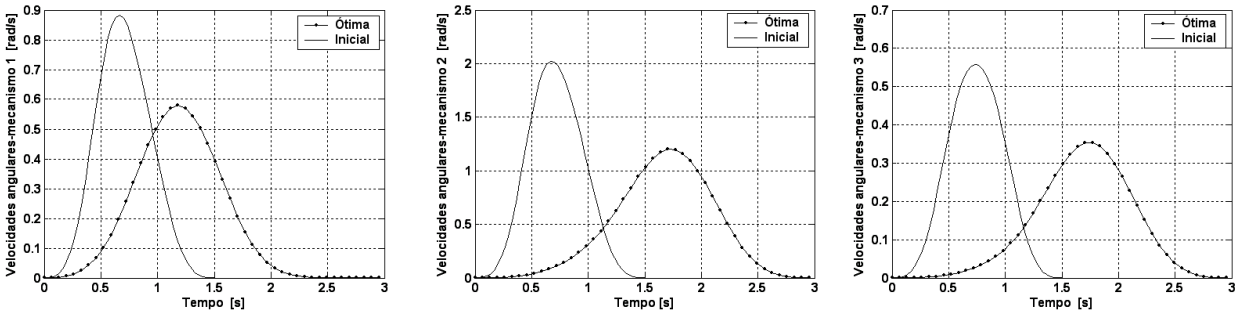
	Função multi-objetivo	Energia [Nm/s^2]	Tempo total [s]	Jerk [rad/s^3]
Valor inicial	1,00	49,94	1,5	8,2
Valor ótimo	0,78	24,05	2,9	1,6
Performance	19,0 %	51,8%	-	80,5%



(a) (b) (c)

Figura 7.59.Gráfico das trajetórias iniciais e ótimas para o ângulo de entrada em função no tempo: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo 3 (K_1=0,8, K_2=0,2 e K_3=0).

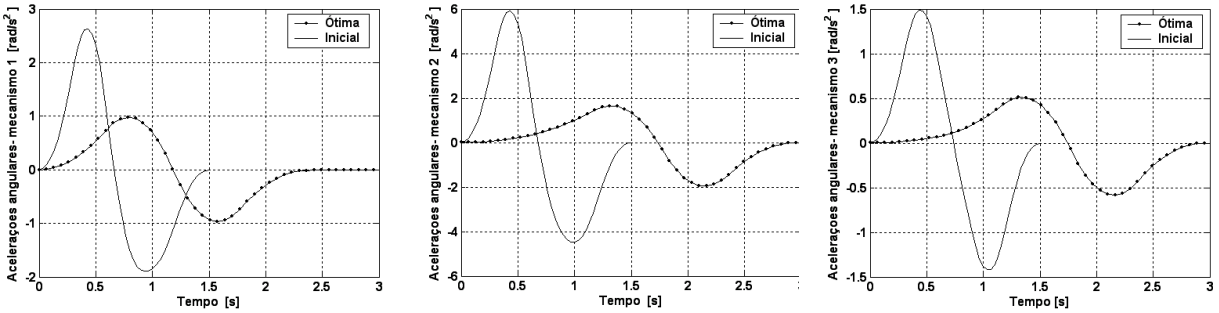
Comparando as curvas de velocidade Figs. 7.4 e 7.60, pode-se notar que para a B-spline de terceira ordem a curva é mais suave, com valor máximo mais reduzido que para o caso da B-spline de quarta ordem. No segundo caso, Fig. 7.60, as variações de velocidade são mais acentuadas. Entretanto, no seu início (partida) e no fim (parada) ela ocorre com maior suavidade. Esta característica pode ser muito importante em aplicações onde é necessário ter uma partida/ parada suáveis da movimentação do sistema.



(a) (b) (c)

Figura 7.60 Curvas iniciais e ótimas das velocidades angulares das manivelas de entrada: (a) mecanismo 1; (b) mecanismo 2 ; (c) mecanismo 3.

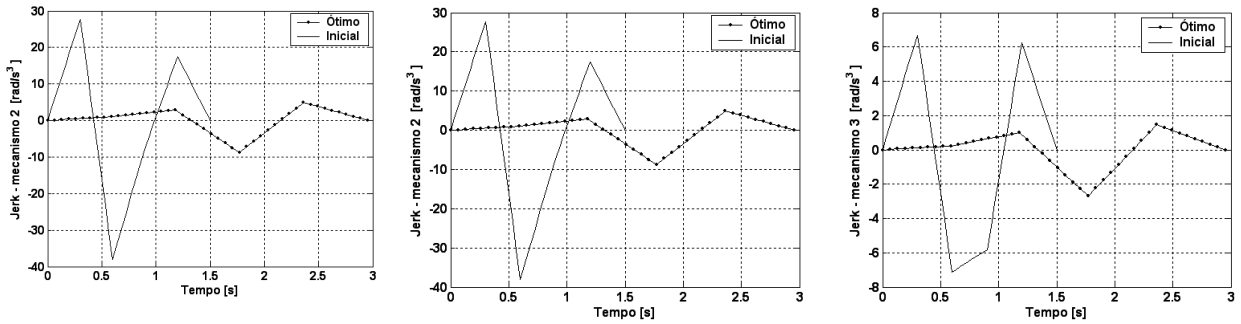
Em função do uso de B-splines de quarta ordem, a aceleração não apresenta variações bruscas como para o caso da B-spline de terceira ordem, Fig. 7.5. Na Fig. 7.61, pode-se verificar a continuidade suavidade da variação da aceleração.



(a) (b) (c)

Figura 7.61 Gráfico das acelerações iniciais e ótimas das manivelas de entrada em função do tempo: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.

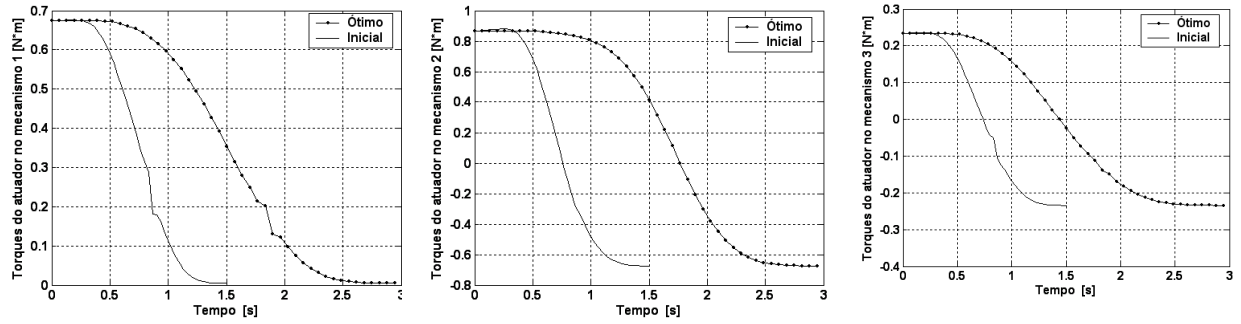
Neste caso, o jerk apresenta mudança brusca de direção, conforme apresentado na Fig. 7.62, embora ainda seja representado por uma função contínua. No caso de utilizar B-spline cúbica, o jerk apresenta descontinuidade (saltos) conforme apresentado na Fig. 7.6.



(a) (b) (c)

Figura 7.62 Curvas iniciais e ótimas do jerk nos atuadores: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.

As curvas de torque são praticamente idênticas, Figs. 7.7 e 7.63. Entretanto pode-se verificar que, no uso das splines de quarta ordem a variação inicial e final são mais suáveis. Isto significa que a aplicação do torque para o início e o final do movimento é realizada de forma gradativa e muito suavizada, e este aspecto é muito importante para as operações de controle de robôs.



(a) (b) (c)

Figura 7.63 Curvas iniciais e ótimas do torque nos atuadores: (a) mecanismo 1 ; (b) mecanismo 2; (c) mecanismo3.

Este estudo de caso mostrou que a metodologia desenvolvida permite que o usuário escolha o grau da B-spline que deseja usar para modelar as trajetórias. No modelo apresentado, as curvas de aceleração obtidas com B-spline de quarta ordem foram, obviamente, mais suáveis, mas os valores absolutos são similares aos obtidos com Splines de terceira ordem. Outra característica que pode ser interessante para operação é o fato do jerk ser linear, apesar de que seus valores absolutos foram ligeiramente superiores aos encontrados com splines cúbicas. Uma contribuição deste trabalho é permitir que o usuário escolha a ordem da spline que seja mais conveniente para o seu problema.

Capítulo VIII

Conclusões e trabalhos futuros.

Neste trabalho foi apresentada uma formulação genérica para a otimização de trajetórias de estruturas paralelas. Para a obtenção da trajetória ótima é definido um problema de otimização multi-objetivo que considera a minimização da energia mecânica consumida pelos atuadores, a minimização do tempo total do percurso e da variação da aceleração (jerk). A função multi-objetivo é transformada em uma função escalar aplicando o Método da Ponderação dos Objetivos, este é um método bastante usado e simples, permitindo que o usuário priorize algum dos critérios que compõe a função multi-objetivo através da escolha adequada dos fatores de ponderação. A trajetória é modelada por B-splines uniformes cúbicas, sendo também desenvolvido o modelo para B-splines uniformes de quarta ordem, possibilitando a escolha do grau da curva que seja mais conveniente em cada aplicação.

O cálculo da energia mecânica necessita da obtenção dos torques de entrada e das velocidades em cada mecanismo. Para a obtenção destas grandezas, foram desenvolvidos os modelos: geométrico, cinemático e dinâmico. O modelo geométrico determina as coordenadas do ponto central da plataforma móvel em função dos ângulos de entrada dos atuadores. Utilizando as propriedades de simetria do CaPaMan foi obtida a posição deste ponto, bem como a orientação da plataforma móvel, escrita em termos dos ângulos de Euler, em relação ao sistema inercial da plataforma fixa. As componentes de velocidade e aceleração do ponto central da plataforma móvel foram obtidas através da primeira e segunda derivadas da equação de posição em relação ao tempo. De modo análogo, as velocidades e acelerações angulares são deduzidas a partir das derivadas temporais dos ângulos de Euler.

O modelo analítico desenvolvido para a dinâmica inversa do CaPaMan, utiliza as equações de Newton-Euler. A cadeia cinemática peculiar e as propriedades de simetria da arquitetura do CaPaMan foram úteis nesta formulação, que permite calcular os torques de entrada, responsáveis pela obtenção da energia. Deve-se ressaltar, que foi desenvolvido o modelo dinâmico completo, considerando a dinâmica da plataforma e também das pernas dos mecanismos. Durante as simulações comprovou-se que para manipuladores robustos, a

dinâmica das pernas dos mecanismos não pode ser desprezada, pois contribuem de forma significativa para o acréscimo dos torques calculados e conseqüentemente da energia.

A busca da solução ótima se deu através da aplicação de algoritmos genéticos, que mostraram-se eficientes nas simulações numéricas executadas. A presença de mínimos locais e a descontinuidade da função torque justificaram a escolha de técnicas aleatórias.

A minimização da energia poderia ser alcançada apenas com o acréscimo do tempo total de percurso. Mas, a minimização do tempo também é um dos critérios estabelecidos. Como estes objetivos são conflitantes entre si, as soluções obtidas representam uma solução de compromisso entre os critérios que compõe o vetor de funções objetivo. Os resultados das simulações comprovam, ainda, que mesmo fixando o tempo total de percurso é possível obter uma trajetória ótima, que minimiza a energia, apenas alterando a forma da trajetória, através da escolha adequada dos pontos de controle da B-spline. Obviamente, neste caso, a redução obtida é pequena, mas considerando que robôs com estrutura paralela são concebidos para realizar movimentos repetitivos a altas velocidades, a economia de energia será considerável após uma jornada de trabalho. Outro aspecto de interesse é o fato das curvas de torque serem suavizadas, principalmente no início e no final da trajetória ótima, facilitando as operações de controle do robô.

Como trabalhos futuros propõe-se:

- usar diferentes metodologias para escrever a função multi-objetivo, por exemplo, através do Método Global;
- testar novas técnicas de otimização, como a Evolução Diferencial (ED) que tem se mostrado bastante atrativo em problemas complexos e altamente não lineares (Coelho, 1999);
- uma proposta interessante é considerar a otimização da trajetória do CaPaMan na presença de obstáculos (Saramago e Steffen, 1999a);
- considerar o volume do espaço de trabalho no projeto ótimo de manipuladores paralelos.

Referências Bibliográficas.

Braga, C. G., 1998, “O Uso de Algoritmos Genéticos para Aplicação em Problemas de Otimização de Sistemas Mecânicos”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

Bergamaschi, P.R., 2004, “Projeto Ótimo de Robôs Manipuladores 3R, Considerando as Características de seu Espaço de Trabalho “, Tese de doutorado –Universidade Federal de Uberlândia, maio 2004.

Carvalho, J.C.M., Ceccarelli, M., 2001, “A Closed Form Formulation for the Inverse Dynamics of Cassino Parallel Manipulator, J. Multibody System Dynamics”, Vol.5, n°2, March 2001

Carvalho, J.C.M, Ceccarelli, M. 1999a, “A Dynamic Analysis for Cassino Parallel Manipulator, 10th World Congress on the Theory of Mechanisms”, Oulu, Finland, June 20-24, pp.1202-1207.

Ceccarelli, M., Figliolini, G., 1997, “Mechanical Characteristics of CaPaMan (Cassino Parallel Manipulator)”, in Proceedings of 3rd Asian Conference on Robotics and its Application, Tokyo, pp.301-308.

Chen, Y.C., 1991 “Solving Robot Trajectory Planning Problems with uniform Cubic B-Splines”, *Optimal Control Applications & Methods*, 12, 247-262.

Cheng, S.L. and Hwang, C., 2001 “ Optimal Approximation of Linear Systems by a Differential Evolution Algorithm”, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics – Part a: Systems and Humans, vol. 31, n° 6, November 2001.

Coelho, L. S. e Coelho, A. A. R., 1999, “Algoritmos Evolutivos em Identificação e Controle de Processos: Uma Visão Integrada e Perspectivas”, SBA Controle & Automação, Vol. 10, N. 01, pp. 13-30.

Deb, K., 2001, “Multi-objetive optimization using Evolutionary Algorithms”, John Wiley&Sons ,pp.77-80 e 129-135

Eschenauer, H. , Koski,J., Osyczka, A., 1990, " Multicriteria Design Optimization". Berlin, Springer-Verlag.

Erdman, A. G. and Sandor. G. N. , 1991, "Mechanism Design : analysis and Synthesis", Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Foley et al, 1990. " Computer Graphics: Principles and Practice" , Second 2nd ed, Addison-Wesley Publishing Company, ISBN 0-201-12110-7, T385.C587 1990, 006-dc20.

Goldstein, H., 1980, "Classical Mechanics", Addison-Wesley, Reading, M.A.

Haupt, R. L., and Haupt, S. E., 1998, "Practical Genetic Algorithm", John Wiley G. Sons Inc; New York, pp. 25-48.

Hearn, D. and Baker, M. P. 1994, "Computer Graphics" Published by Prentice Hall, Inc. New Jerssey, 07632.

Houck, C. R., Joines, J. A., and Kay, M. G., 1995, "A Genetic Algorithm for Function Optimization: a Matlab Implementation", NCSU-IE Technical Report, University of North Caroline, USA.

Martins-Filho, L.S., Prajoux, R., 1999 "Controle de um robô quadrúpede utilizando linearização exata entrada-saída", SBA Controle & Automação. Vol 10, No. 3, pp. 157-166.

Michalewicz, Z., 1998, "Evolutionary Computation for NonLinear Programming Problems", ftp:// ftp.uncc.eduftp.uncc.edu, directory coe/evol.

Oliveira, P.J., González, F.R., Saramago, S.F.P., Carvalho, J.C.M., 2004. "Otimização de Uma Estrutura Paralela Utilizando Algoritmos Genéticos". III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica. Belém-PA-Brasil. V.1, p. 1-10.

Oliveira, P.J., Saramago, S.F.P., Carvalho, J.C.M., Ceccarelli, M., 2005, "Optimum Path Plnning of CaPaMan (Cassino Parallel Manipulator) by Using Inverse Dynamics" 2nd International Symposium on Multibody Systems and Mechatronics" Uberlândia-Brazil.

Oliveira, P.J., Saramago, S.F.P., Rosa, R.G., 2005, ”Trajetória ótima de uma estrutura paralela para diferentes combinações de ângulos de entrada.” XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (XXVIII CNMAC 12-15 setembro de 2005).

Osysca, A., 1984, “Multicriterion Optimization in Engineering with Fortran Programs” Ellis Horwood Ltd, England.

Pizziolo, T.A., 2002 “Técnicas de Andadura para Robô Quadrúpede.” Tese de doutorado n° 23 UFMG.

Romano, V. F., Dutra, M. S., 2002, “Robótica Industrial- Aplicação na Indústria de Manufatura e de Processos” Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo- SP-Brasil.

Rosário, J. M., 2005, “Robótica: Realidade ou Ficção-Uma Opção para a Medicina do Século XXI”, http:/www.universia.com.Br/materia.jps?materie=4692
Acesso em 26-05-2005.

Saramago, S. F. P., Oliveira, L .S., 2004. “ A Comparative Study About Some Methods of the Multi-Objective Optimization”. In: XXV Iberian Latin American Congress On Computacional Methods In Engeenering, , Recife. XXV Cilamce. UFPE, 2004. v. 1, p. 1-17

Saramago, S.F.P., Steffen Jr, V., 1999a, Dynamic Optimization for the Trajectory Planning of Robot Manipulators in the Presence of Obstacles, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, Brazil, v. XXI, n. 3, p. 371-383.

Saramago, S.F.P., Steffen Jr, V., 1999b, Using B-Splines for optimal trajectory planning, Ciência & Engenharia, Brazil, v. 8, n. 1, p. 106-114.

Saramago, S. F. P., 2003, “Métodos de Otimização Randômica: Algoritmos Genéticos e Simulated Annealing”, Notas em Matemática Aplicada, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional – SBMAC, Vol. 6, pp. 10-26.

Sawaragi, Y., Nakayama, H. and Tanino, T., (1985). “*Theory* of Multiobjective Optimization “ Academic Press, Inc., Orlando, Florida, U.S.A

Science Education, “ A Short History of Robots” WWW.prime.jsc.nasa.gov/ROV/history
Acesso em 20-06-2005.

Siqueira, M. L. ; Piratelli Filho, Antônio ; Motta, J. M. S. T., (2001) . “Avaliação da Exatidão na Posição de Robôs Industriais Utilizados para Soldagens em Trajetórias Retilíneas Através de Programaçao Off-line.” In: I Congresso Brasileiro de Engenharia de Fabricação, 2001, Curitiba - PR. Anais do I Congresso Brasileiro de Engenharia de Fabricação, 2001.

Mechanisms and Machine Theory, (2005) www.sciencedirect.com/science/journal/0094114X.

Tsai, L.W., 1999, “Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators”, John Wiley & Sons, New York.