

CAPÍTULO VII

APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Levando em consideração resultados experimentais e analíticos disponíveis em diversos estudos reportados na literatura, diversas aplicações numéricas foram realizadas visando validar os procedimentos de modelagem implementados computacionalmente e avaliar as características e desempenho das formulações utilizadas. São estudadas vigas e placas em regime estático ou sob vibração livre, para uma grande variedade de configurações estruturais, no tocante à presença e disposição de materiais sensores e atuadores piezoelétricos e à estratificação dos laminados.

7.1 Placa em balanço

Nesta primeira aplicação considera-se uma placa composta sem elementos piezoelétricos, em balanço, de comprimento (a) igual a 0,15m e largura de 0,06m, formada por duas camadas de espessura 0,01m cada (espessura total $h = 0,02$ m). O modelo de elementos finitos desta estrutura é composto por uma malha de 5x2 elementos e duas camadas, como mostrado na Fig. 7.1. Os coeficientes de rigidez do material são dados na Tabela II-1 do **Anexo IV**, sob identificação **Fibcom#1**. A solução para este tipo de problema é obtida através da solução numérica da equação expressada em (6.77) do capítulo precedente. Uma carga transversal concentrada (F) de 1000N é aplicada como mostrado. A Figura 7.2 mostra a deflexão da placa ao longo do seu eixo médio, na direção x , comparada com os resultados fornecidos por Chee (2000) empregando a teoria *HSDT* e ainda com os resultados apresentados pelo mesmo autor usando o programa comercial de elementos finitos *Strand*, com base na teoria *CLT*.

Duas configurações distintas são analisadas, na primeira, ambas camadas não são rotacionadas (configuração $0^\circ/0^\circ$) e, na segunda, a camada superior é rotacionada em relação ao eixo z em 30° (configuração $0^\circ/30^\circ$).

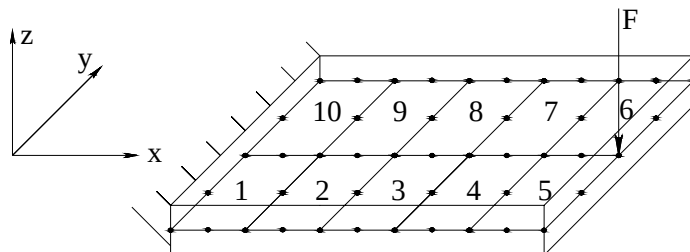


Figura 7.1 - Placa composta em balanço formada por duas camadas.

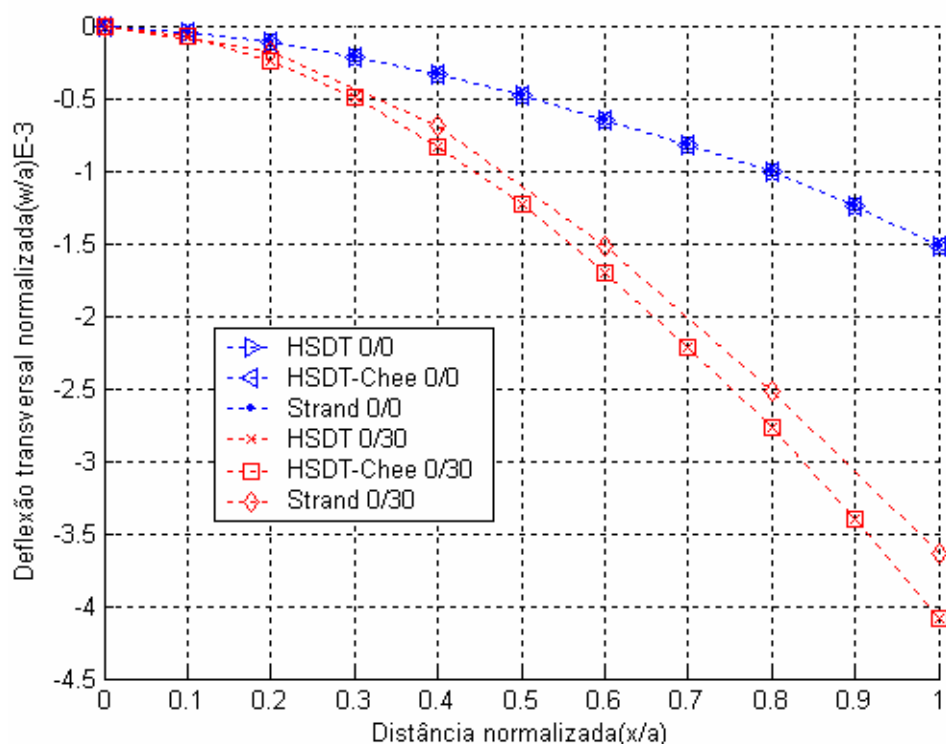


Figura 7.2 - Deflexões normalizadas ao longo do eixo médio de uma placa composta em balanço com duas camadas.

Em seguida, as deflexões foram calculadas para vários valores da relação h/a . A Tabela 7.1 permite comparar os valores da deflexão vertical no ponto de aplicação da força, para a configuração $0^\circ/0^\circ$, para os diferentes valores de h/a . São apresentados os valores obtidos pela da formulação *HSDT* implementada neste trabalho, pela *HSDT de Chee* (2000) e pelo programa *Strand*, também reportados por Chee (2000). É destacada a coluna de valores correspondentes à relação h/L considerada para obtenção dos resultados apresentados na Figura 7.2.

Tabela 7.1 - Magnitude do deslocamento normalizado $(w/a) \times 10^{-3}$ para várias relações h/a para a configuração $0^\circ/0^\circ$.

h/a	0,400	0,267	0,200	0,133	0,067	0,053	0,033	0,007
<i>CLT-Strand</i>	-0,1641	-0,3244	-0,5786	-1,494	-9,740	-18,50	-73,45	-90,00
<i>HSDT-presente</i>	-0,1824	-0,3451	-0,6020	-1,523	-9,759	-18,47	-72,86	-87,90
<i>HSDT-Chee</i>	-0,1824	-0,3451	-0,6020	-1,523	-9,759	-18,47	-72,87	-87,90

Os resultados obtidos e mostrados na Fig. 7.2 e Tab. 7.1 permitem observar que:

1º. a teoria *HSDT* implementada fornece exatamente os mesmos resultados que aqueles apresentados por Chee (2000), o que constitui uma indicação da correção, ao menos parcial, dos procedimentos numéricos implementados;

2º. é bastante significativa a influência da estratificação nos valores da deflexão transversal da placa composta. As deflexões para a configuração $0^\circ/30^\circ$ são bem maiores que as correspondentes para a configuração $0^\circ/0^\circ$. Segundo Chee (2000), com o aumento da deflexão da placa, a contribuição das rotações ψ_x e ψ_y na deflexão resultante aumenta significativamente, o que pode explicar a diferença existente entre as deflexões encontradas pelo programa Strand (*CLT*) e pela formulação *HSDT* para a configuração $0^\circ/30^\circ$.

7.2 Placa composta laminada, quadrada, sujeita a um carregamento senoidal

O teste a seguir, ilustra a aplicação da formulação *HSDT* na modelagem de placas laminadas finas e espessas sob carregamentos transversais distribuídos.

Considera-se nesta aplicação uma placa composta laminada quadrada simplesmente apoiada nas quatro bordas, com comprimento (a) e espessura total (h) como indicado na Fig. 7.3-a. A placa é formada por 3 camadas orientadas a 0° , 90° e 0° , sendo que a camada média possui a metade da espessura total da placa ($h/2$) e as duas outras camadas, do topo e da base, apresentam mesma espessura igual de $h/4$.

A solução para este tipo de problema estático é obtida através da solução numérica da equação expressada em (6.77).

A placa é modelada com duas malhas diferentes: uma malha formada por 4×4 elementos e outra de 6×6 elementos para confrontação dos resultados com os aqueles obtidos através de modelos analíticos *HSDT* baseados nas soluções de Navier implementadas por Reddy (1997) e de modelos numéricos *HSDT* de Chee (2000). O modelo é gerado com 4 camadas iguais, de mesma espessura, assim como no modelo de Chee (a camada intermediária é subdividida em duas camadas de mesma espessura).

A placa é sujeita a um carregamento estático transversal com distribuição senoidal, expresso segundo:

$$q(x,y) = q_o \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \quad (7.1)$$

sendo: $q_o = 1 \text{ N/m}^2$.

As propriedades materiais de cada camada são assumidas iguais e estão listadas como **Fibcom#2** no **Anexo IV**.

A Tabela (7.2) compara os resultados obtidos pela formulação *HSDT* com os obtidos pela solução analítica exata da *Teoria da Elasticidade Tridimensional* obtidos por Pagano (fornecidas por REDDY, 1997), com a solução exata de alta ordem *HSDT* de Reddy (1997) e a solução numérica de alta ordem de Chee (2000). São consideradas diferentes valores da espessura relativa, expressa pela relação h/a .

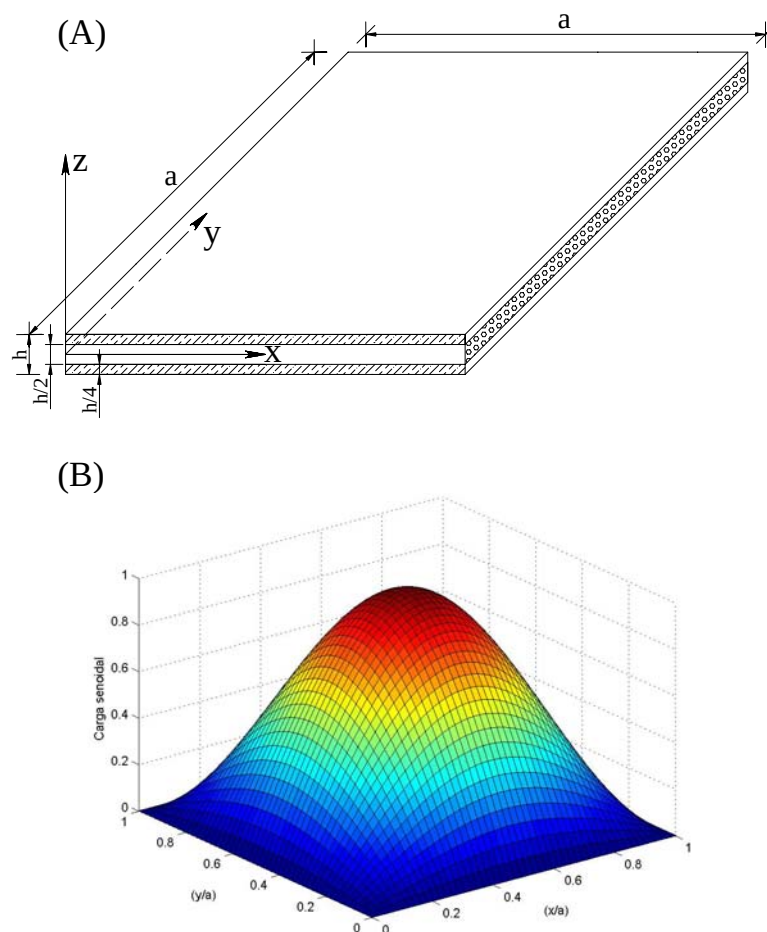


Figura 7.3 - (A) Esquema de modelagem da placa composta laminada simplesmente apoiada (B) carregamento transversal senoidal $q(x, y)$.

Todas as deflexões são calculadas da seguinte forma:

$$w_{norm} = w \left(\frac{6,985 \times 10^{11} h^3}{|q_0| \times a^4} \right) \quad (7.2)$$

Tabela 7.2 - Máxima deflexão normalizada para várias relações h/a .

h/a	TEORIA	Deflexão normalizada
0,25	Elasticidade 3D de Pagano	1,954
	Analítica HSDT de Reddy	1,894
	HSDT de Chee (6x6)	1,931
	HSDT presente (4x4)	1,894
	HSDT presente (6x6)	1,897
0,10	Elasticidade 3D de Pagano	0,743
	Analítica HSDT de Reddy	0,715
	HSDT de Chee (6x6)	0,724
	HSDT presente (4x4)	0,724
	HSDT presente (6x6)	0,727
0,05	Elasticidade 3D de Pagano	0,517
	Analítica HSDT de Reddy	0,506
	HSDT de Chee (6x6)	0,508
	HSDT presente (4x4)	0,510
	HSDT presente (6x6)	0,513

A Figura 7.4 ilustra graficamente a deflexão ao longo do eixo x sobre o plano médio da placa ($y = a/2, z = 0$) para a relação $h/a = 0,05$, calculada pela *HSDT* e estudo com malha 6x6.

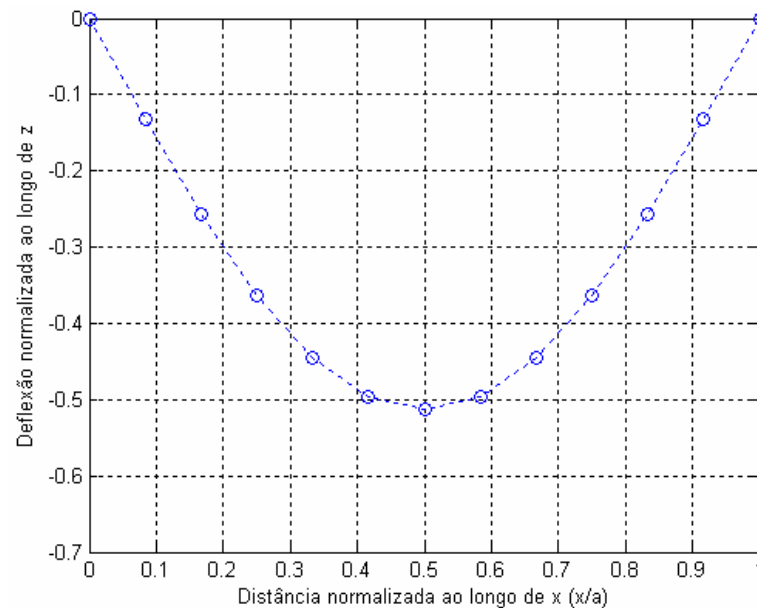


Figura 7.4 - Deflexão ao longo da linha central ($x, a/2, 0$).

A Tabela 7.2 mostra que a implementação computacional da teoria *HSDT* realizada proporciona resultados bem próximos daqueles apresentados pelos autores citados, para placas com diferentes relações h/a , ou seja, para placas consideradas espessas ($h/a = 0,25$) e finas ($h/a = 0,05$).

7.3 Placa composta laminada, quadrada, sujeita a um carregamento senoidal e modelada pela formulação *FSDT*

Considerando a placa composta laminada, quadrada, simplesmente apoiada considerada no caso estudado em 7.2, o procedimento de modelagem é realizado com base na formulação do tipo *FSDT*. Esta formulação é obtida a partir da formulação *HSDT* através da redução do campo de deslocamento da formulação *HSDT*, eliminando-se os graus de liberdade mecânicos excedentes e introduzindo a correção do fator de cisalhamento adotado por Reddy (2002), cujo valor é $5/6$. A solução para este tipo de problema, como nos casos anteriores, é obtida através da solução numérica da equação expressada em (6.77).

Na sequência, a Tabela 7.3 permite comparar os resultados obtidos pela formulação numérica *FSDT* com os resultados da solução analítica exata da Teoria da Elasticidade obtidos por Pagano (fornecidas por REDDY, 1997) e com os resultados fornecidos de Reddy (1997) para seu modelo analítico *FSDT*.

Tabela 7.3 - Comparação das máximas deflexões normalizadas para várias relações h/a .

h/a	TEORIA	Deflexão normalizada
0,25	Elasticidade 3D de Pagano	1,954
	FSDT Reddy	1,710
	FSDT presente(4x4)	1,717
0,10	Elasticidade 3D de Pagano	0,743
	FSDT Reddy	0,663
	FSDT presente(4x4)	0,662
0,05	Elasticidade 3D de Pagano	0,517
	FSDT Reddy	0,491
	FSDT presente(4x4)	0,488

Claramente, através das Tabelas 7.2, do caso anterior, e 7.3, as formulações utilizando a formulação *HSDT* mostram-se mais acuradas quando comparadas com os resultados da *Teoria da Elasticidade 3-D*. Observa-se também que os resultados numéricos obtidos pela *FSDT* em estudo são bem próximos dos correspondentes apresentados por Reddy.

7.4 Placa composta em balanço contendo atuadores piezoelétricos

Uma placa grafite/epóxi AS4/3501, em balanço, com 292mm de comprimento (C), 152mm de largura (L), formada por 6 camadas de 0,83mm de espessura, estudada por Crawley e Lazarus (1991), é mostrada na Fig. 7.5. Quinze pastilhas de cerâmica piezoelétrica do tipo G1195, de 0,25mm de espessura cada, são fixadas nas faces superior e inferior da placa e numeradas conforme mostrado na Fig. 7.5. A primeira e a terceira linhas de pastilhas piezoelétricas apresentam dimensões de 51mmx51mm, enquanto as da linha intermediária apresentam dimensões de 25mmx51mm, sendo que o elemento piezoelétrico número 10 apresenta dimensões de 25mmx25mm. Conforme mostrado na Fig. 7.6, a placa foi discretizada com uma malha de 12x7 elementos e um total de 8 camadas, incluindo as camadas contendo pastilhas cerâmicas piezoelétricas. As propriedades materiais são listadas no **Anexo IV** como **AS4/3501** e **Piezo G1195**.

O propósito desta investigação é a obtenção das deflexões resultantes da aplicação de voltagens elétricas nas pastilhas piezoelétricas superiores e inferiores para duas diferentes configurações de placa. O primeiro teste é realizado em uma placa com seqüência de estratificação [0/+45/-45] s e submetida a uma voltagem de 100V aplicada através da espessura de cada uma das cerâmicas piezoelétricas. O segundo teste é realizado em uma placa com seqüência de empilhamento [30/30/0] s e voltagem de 120V aplicada através da espessura de cada cerâmica piezoelétrica. A solução para este tipo de problema em situação estática é obtida através da solução numérica da equação expressada em (6.75). Os resultados obtidos são comparados graficamente com os correspondentes obtidos de outras fontes, como as de Crawley e Lazarus (1991), Koconis et. al. (1994), Lima Jr. (1999) e Chee (2000), nas Fig. 7.7 e 7.9, onde são mostrados os valores de deflexão para os nós posicionados ao longo do eixo central ($x, 0, 0$) indicados pelas letras $a, b, c, \dots, n$ na Fig. 7.6.

As figuras 7.8 e 7.10 ilustram graficamente os campos de deslocamentos transversais da placa, calculadas usando a teoria *HSDT*, podendo-se observar que ocorre uma distorção da placa.

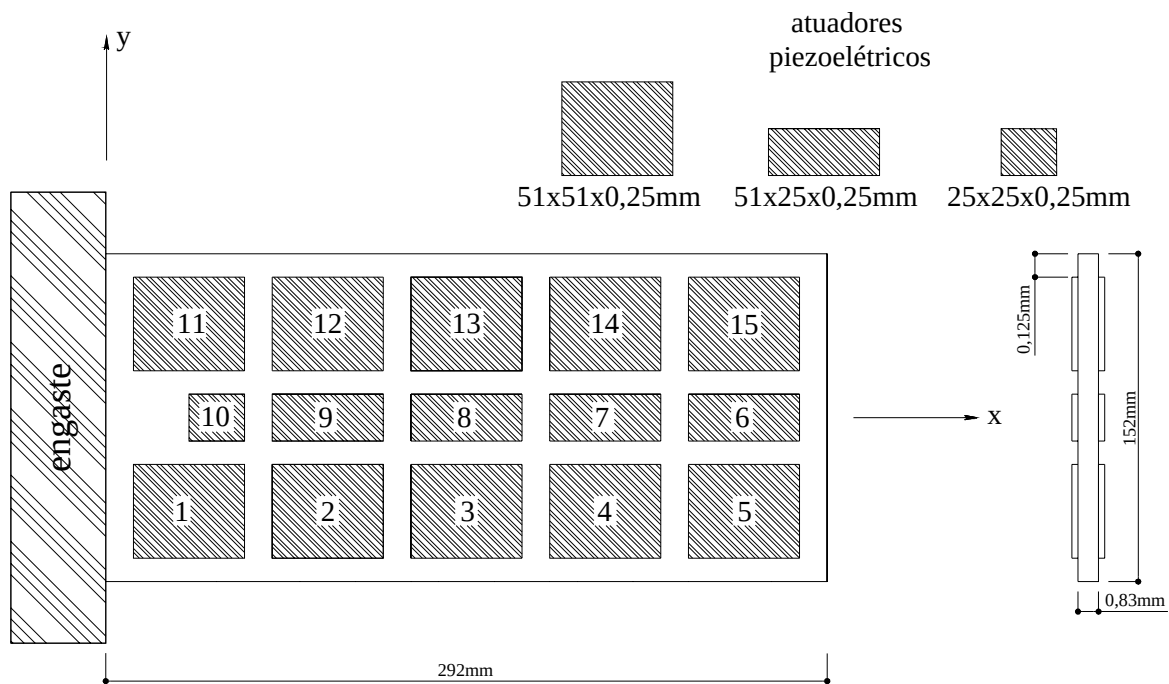


Figura 7.5 - Placa em balanço composta com atuadores piezoelétricos colados à superfície.

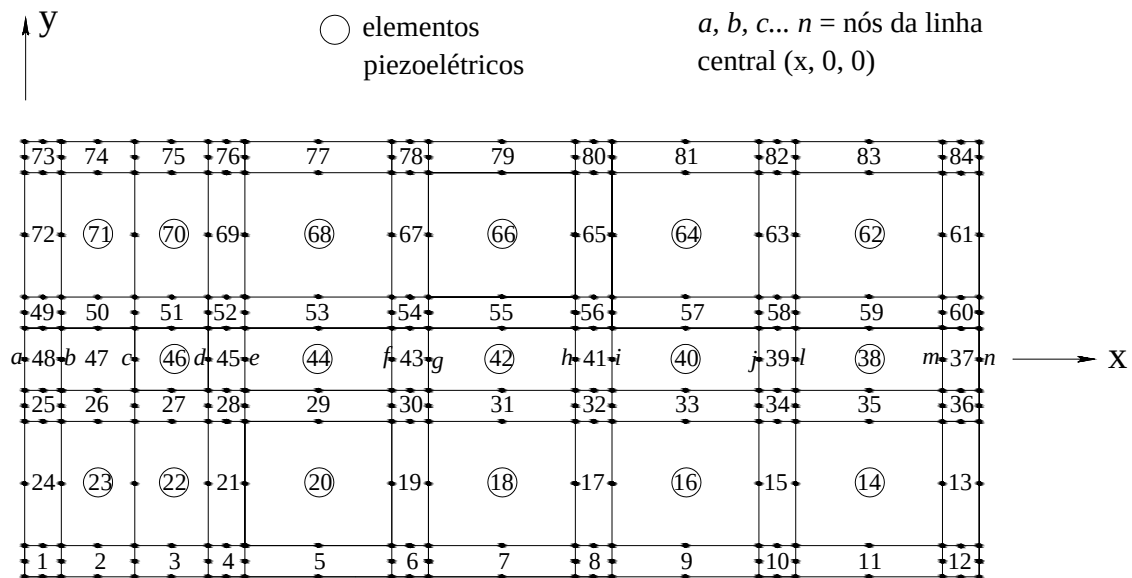


Figura 7.6 - Malha do modelo de EF da placa com atuadores piezoelétricos.

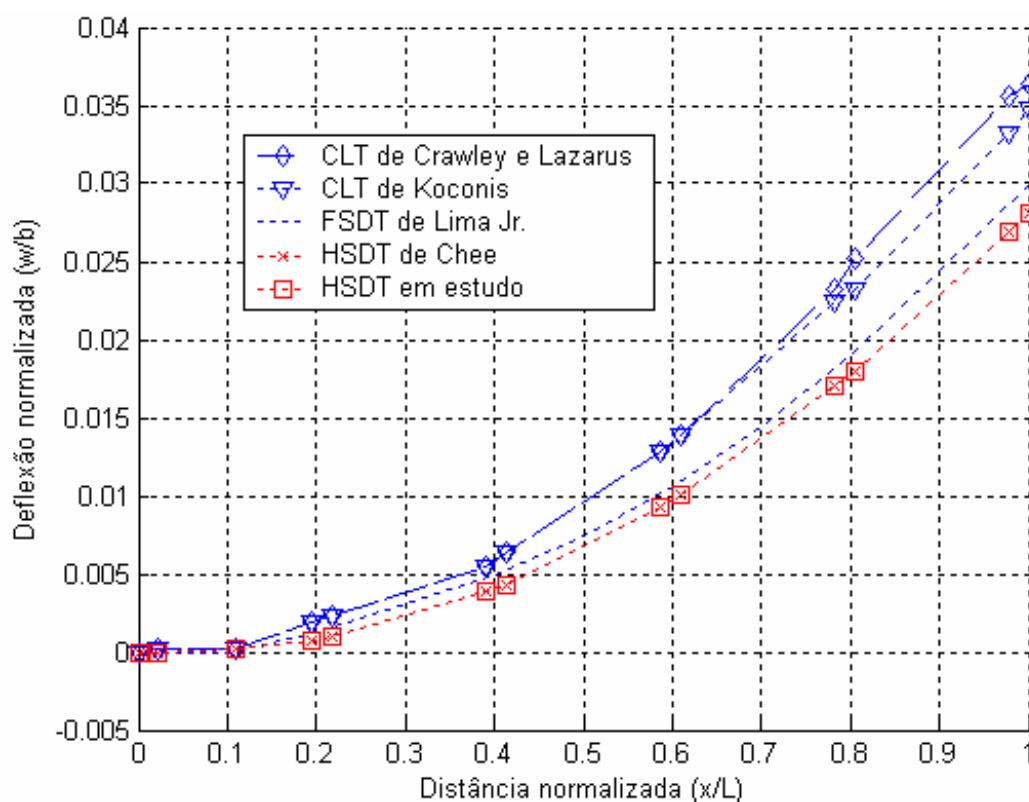


Figura 7.7 - Deflexão da placa composta em balanço AS4/3501 $[0^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_s$ com pastilhas piezoelétricas G-1195 submetidas a 100V.

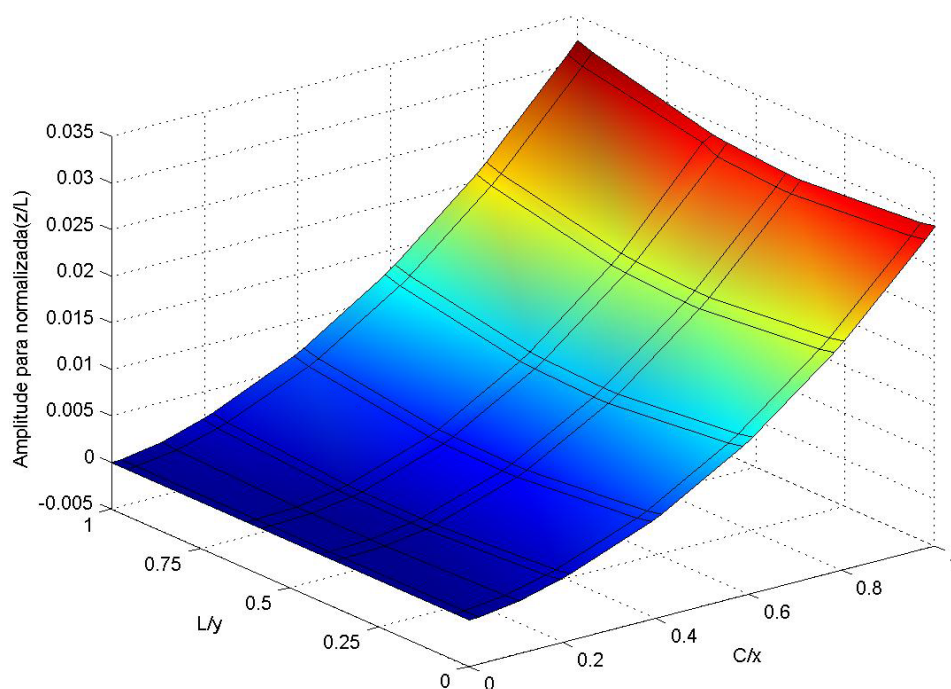


Figura 7.8 - Vista tridimensional da deflexão transversal da placa em balanço AS4/3501 $[0^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_s$ gerada pela aplicação de 100V nos elementos piezoelétricos.

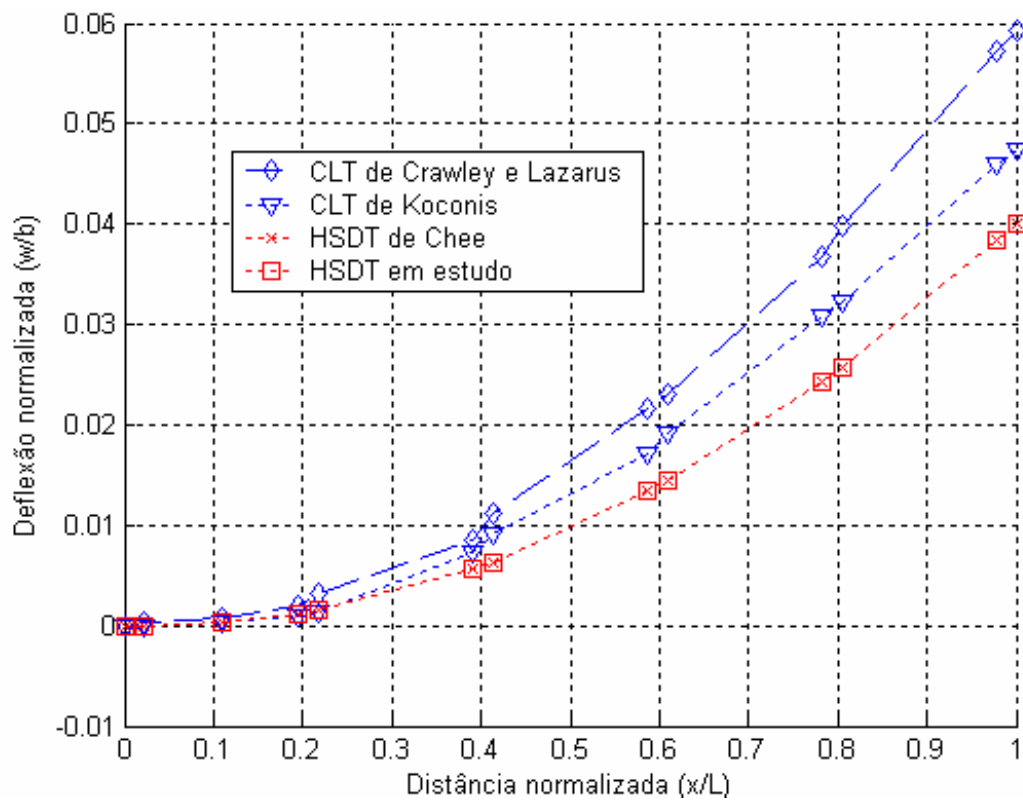


Figura 7.9 - Deflexão de uma placa em balanço AS4/3501 [30°/30°/0°]s, com pastilhas piezoelétricas G-1195 submetidas a 120V aplicados.

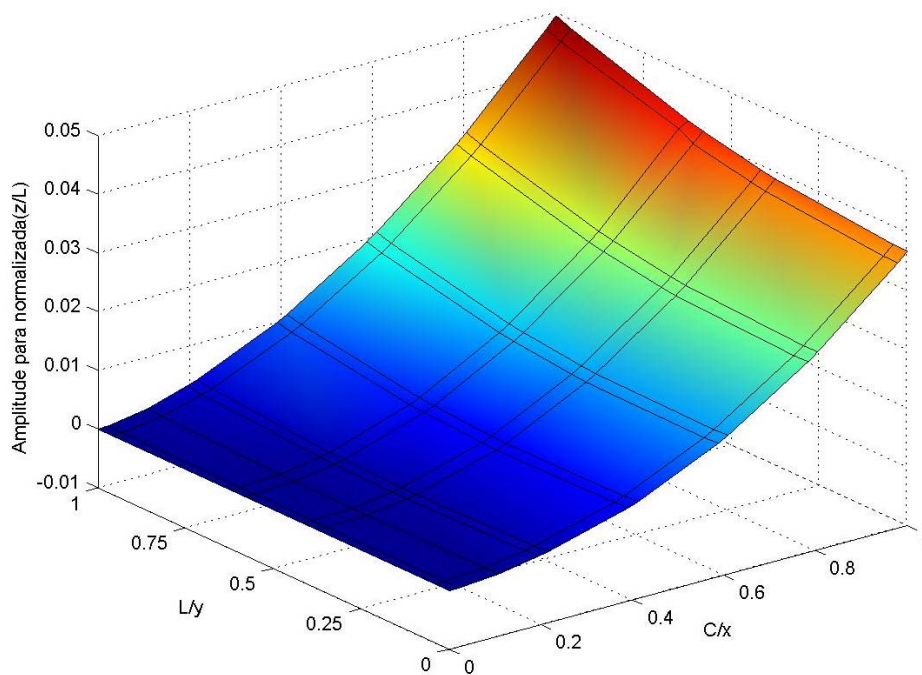


Figura 7.10 - Vista tridimensional da deflexão longitudinal da placa em balanço AS4/3501 [30°/30°/0°]s gerada pela aplicação de 120V nos elementos piezoelétricos.

Os valores da deflexão transversal obtidos por Crawley e Lazarus (1991) e Koconis et al. (1994), mostrados nas figuras 7.7 e 7.9, concordam satisfatoriamente entre si para a seqüência de empilhamento $[0^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_s$ e menos satisfatoriamente para a seqüência $[30^\circ/30^\circ/0^\circ]_s$. Esta diferença, segundo Chee (2000), é decorrente da diferença entre suas formulações teóricas. O primeiro trabalho é um dos pioneiros no campo de materiais compostos inteligentes e adota a formulação *CLT* e o conceito de deformação induzida. Já o modelo de Koconis et. al. (1994), baseado na teoria linear das cascas, exclui os efeitos do cisalhamento transversal e como a formulação de Crawley e Lazarus, usa o conceito de deformação induzida e a teoria *CLT*. As formulações *HSDT* e a formulação *FSDT* de Lima Jr. consideram, porém, que as pastilhas piezoelétricas são parte integrante da estrutura. Assim, estes modelos de primeira e alta ordem, comparados com os modelos clássicos precedentes, apresentam uma rigidez adicional introduzida pelos materiais piezoelétricos, o que conduz a menores valores de deflexão, como mostrado na Figura 7.7 e 7.9. Os resultados do modelo implementado neste estudo e os dos modelos de Chee e Lima Jr. são muito semelhantes. Porém Lima Jr. não realiza em sua modelagem a correção da deformação de cisalhamento transversal e este autor só apresenta resultados para o primeiro teste (estratificação $[0^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_s$), razão de sua não inclusão na Fig. 7.9.

7.5 Análise modal de uma placa quadrada, simplesmente apoiada, com atuadores contínuos colados em sua superfície superior e inferior

A análise modal numérica de uma placa composta quadrada, simplesmente apoiada, formada por cinco camadas $[p/0^\circ/90^\circ/0^\circ/p]$ e que incorpora duas camadas piezoelétricas é efetuada, com o objetivo de caracterizar as frequências e os modos naturais de vibração. Para ilustrar a abrangência da formulação, dois tipos de placas são considerados: uma placa fina, em que a relação entre sua espessura h e largura a é $h/a = 0,02$ e outra espessa com relação $h/a = 0,25$. O laminado é formado por duas camadas contínuas de *PZT-4* de $0,1h$ de espessura cada colados em cada uma das faces superior e inferior do núcleo de grafite/epóxi $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$. Cada uma das lâminas do núcleo possui espessura igual a $0,267h$.

Para a predição das frequências naturais a placa foi discretizada por uma malha uniforme de 8×8 elementos no seu plano e 5 camadas através da espessura. Os resultados obtidos com a formulação *HSDT* presente são comparados com a solução exata da *Teoria da Elasticidade* e a solução numérica por elementos finitos, ambas reportadas por Correia et al. (2000) que também utiliza a formulação *HSDT* em camada simples para aproximação do campo de deslocamentos mecânicos e elementos retangulares de Lagrange com 9 nós.

As propriedades elásticas, piezoelétricas e dielétricas dos materiais adotados são fornecidas no **Anexo IV**, identificadas como **PZT-4** e **fibcomp#3**. A densidade ρ de cada lâmina é assumida igual a 1kg/m^3 e as condições de contorno para os lados paralelos ao eixo x são expressas por $u_0 = w_0 = \zeta_y = \zeta_z = \psi_z = 0$ e para os lados paralelos ao eixo y , $v_0 = w_0 = \zeta_y = \zeta_z = \psi_z = 0$.

A Tabela 7.4 apresenta os valores das cinco primeiras frequências naturais, normalizadas através da equação:

$$(f_i)_{norm} = f_i \frac{a^2}{h\sqrt{\rho}} 10^3 \quad (7.2)$$

com: $i = 1, 2, \dots 5$.

Os campos de deslocamento correspondentes aos cinco primeiros modos naturais de vibração são ilustrados graficamente nas Figuras 7.11 a 7.20. Para possibilitar a visualização, são apresentados separadamente as distribuições dos três deslocamentos nodais u , v e w .

Dois tipos de condições de contorno elétricas são considerados: circuito fechado e circuito aberto. Na primeira condição, o potencial elétrico é forçado permanecer nulo (pastilhas piezoelétricas aterradas) e na segunda condição o potencial elétrico permanece livre (deslocamentos elétricos nulos).

A solução para este tipo de problema em situação estática é obtida através da solução numérica da equação expressada em (6.74-a) para a condição de circuito aberto, e através da Eq.(6.76) em circuito fechado.

Tabela 7.4 - Predição das cinco primeiras frequências naturais normalizadas na condição de circuito aberto e circuito fechado.

TEORIA	Modo de vibração	Circuito Aberto		Circuito Fechado	
		$h/a=0,02$	$h/a=0,25$	$h/a=0,02$	$h/a=0,25$
Solução Exata	1	245,942	145,377	245,941	145,339
HSDT de Correia (malha 8x8)	1	250,497	142,817	230,461	139,683
	2	583,185	183,491	520,384	183,212
	3	695,697	199,299	662,915	198,998
	4	980,361	267,975	908,459	263,631
	5	1145,406	270,125	1022,091	266,305
HSDT presente (malha 8x8)	1	244,993	144,506	231,875	139,635
	2	562,074	205,842	526,567	205,839
	3	695,116	205,867	668,023	205,867
	4	967,920	269,008	917,891	263,141
	5	1117,287	272,280	1048,210	267,474

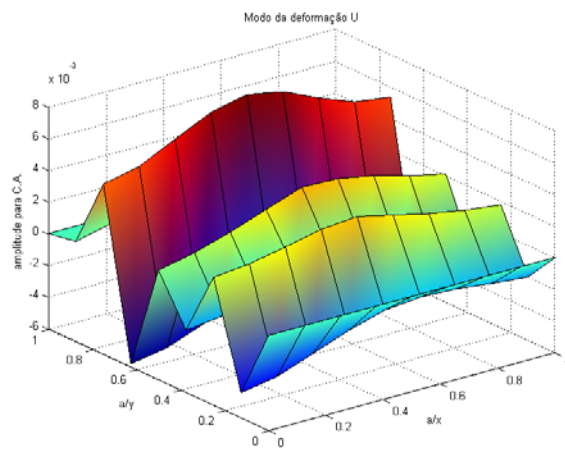
Com base nos resultados listados na Tab. 7.4, constata-se a influência do efeito piezoelétrico sobre os valores das frequências naturais, evidenciada pela diferença entre os valores sob a condição de circuito aberto e sob circuito fechado. A formulação *HSDT* presente e a formulação *HSDT* de Correia et al. apresentam resultados próximos aos obtidos pela solução exata da *Teoria da Elasticidade* para o primeiro modo de vibração para placas espessas e finas. As diferenças observadas são maiores para a condição de circuito aberto. As diferenças entre os resultados obtidos para ambas formulações *HSDT* podem ser atribuídas à utilização de elementos distintos. Correia et al. (2000) utiliza um elemento Lagrangeano de 9 nós, diferentemente da presente teoria que usa um elemento Serendipity de 8 nós.

A seguir, as Figuras de 7.11 a 7.20 ilustram os cinco primeiros modos de vibração da placa composta com relação $h/a=0,25$, para a condição de circuito aberto e fechado. Os modos de vibração para as deformações u , v e w , para efeito de comparação, foram todos normalizados através da matriz de massa modal.

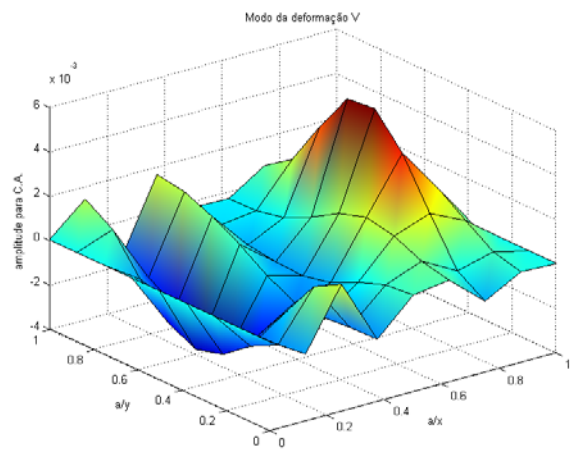
As diferentes normas das frações dos modos naturais correspondendo aos deslocamentos em cada direção coordenada (u , v , w) permitem identificar a direção mais significativa do movimento em cada forma natural de vibração. Assim, por exemplo, para o primeiro, quarto e quinto modo de vibração, a componente w apresenta valores muito superiores ao das outras duas componentes u e v , indicando um movimento predominante de flexão, com deslocamentos na direção transversal da placa. Já para o segundo e terceiro modos, a componente v apresenta valores muito superiores aos das outras duas

componentes, indicando um movimento predominante de cisalhamento, conforme ilustrado através das figuras ilustradas a seguir.

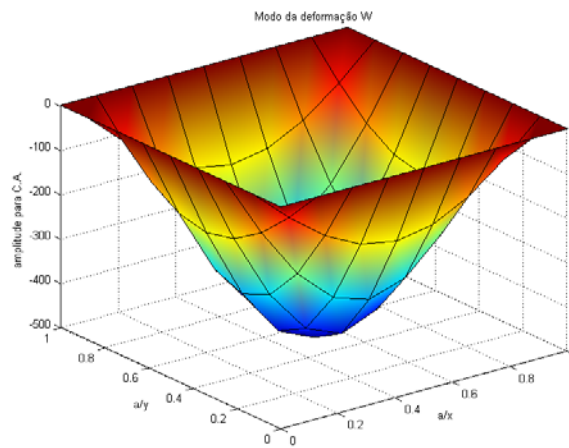
Circuito aberto (C.A.).



(a)

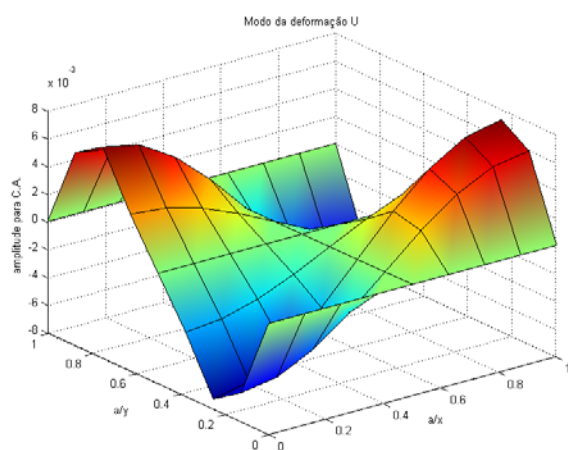


(b)

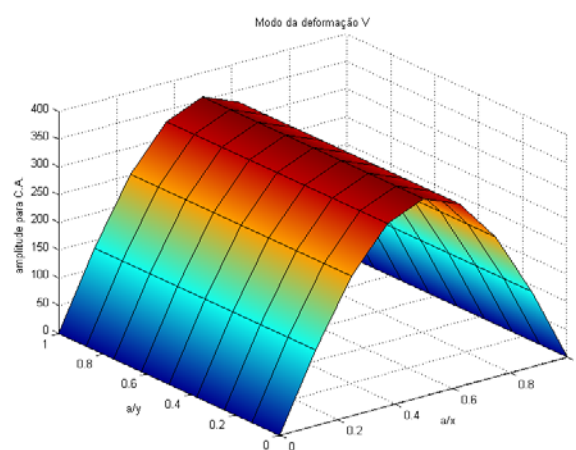


(c)

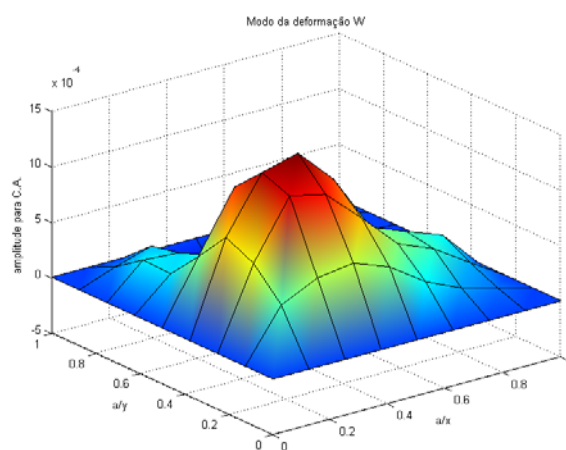
Figura 7.11 - Ilustração do 1º modo de vibração $(f_{norm})_1 = 144,506$ em C.A. (a) deslocamentos u ; (b) deslocamentos v ; (c) deslocamentos w .



(a)



(b)



(c)

Figura 7.12 - Ilustração do 2º modo de vibração $(f_{norm})_2 = 205,842$ em C.A. (a) deslocamentos u ; (b) deslocamentos v ; (c) deslocamentos w .

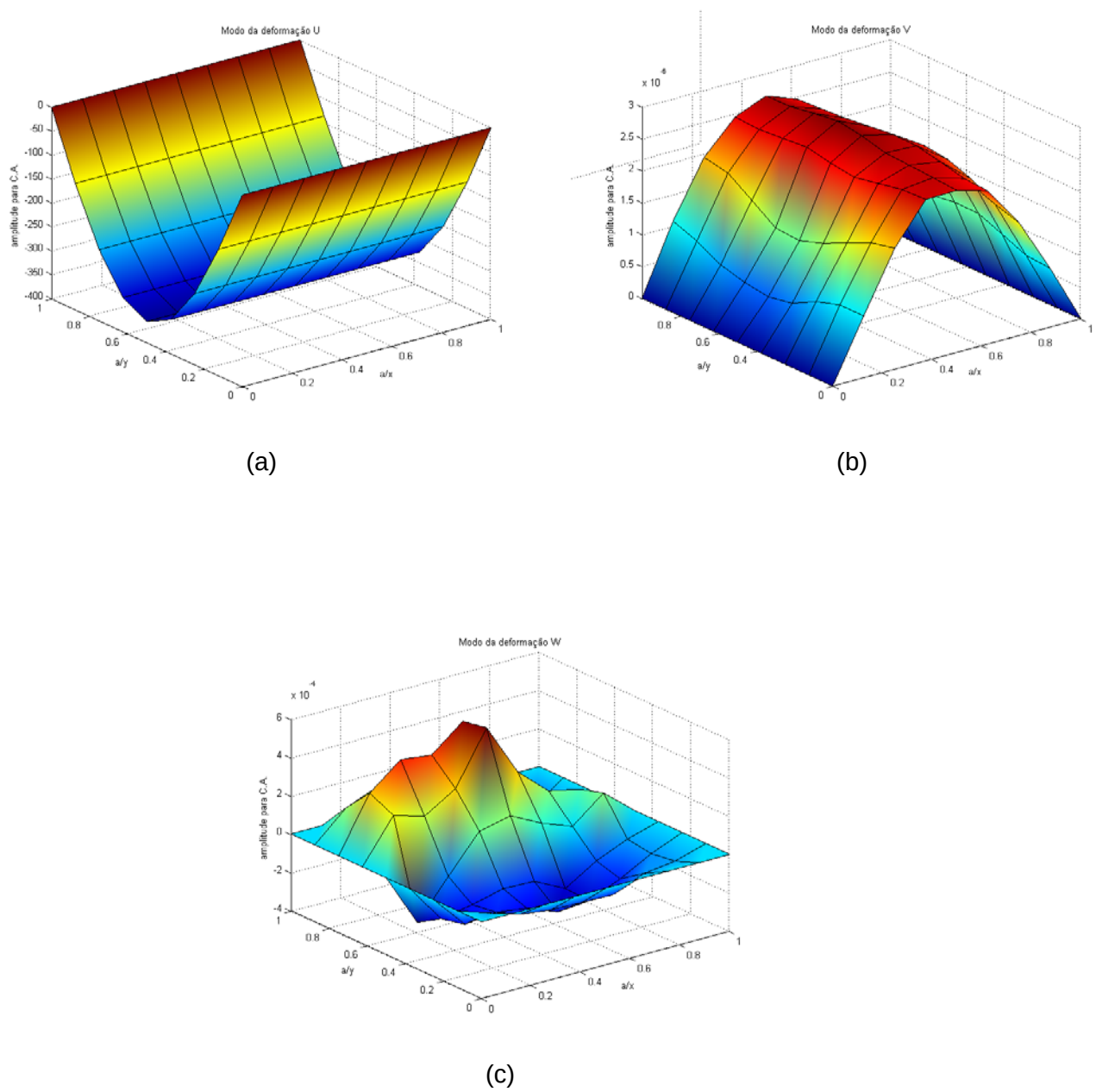
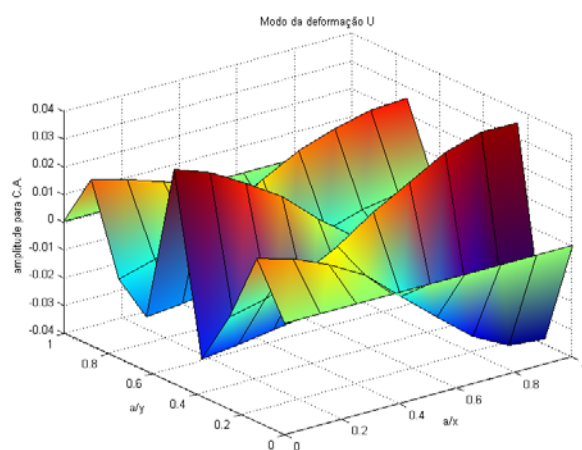
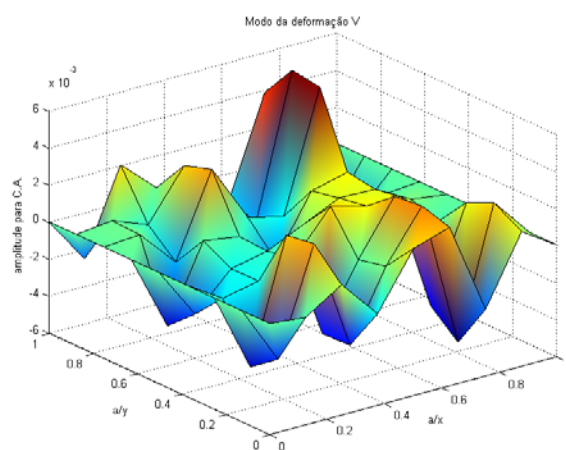


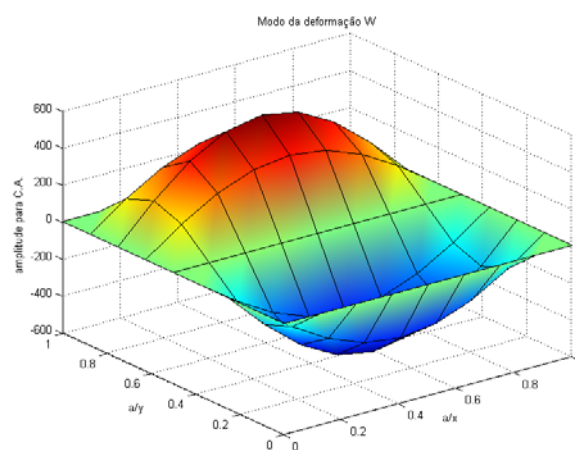
Figura 7.13 - Ilustração do 3º modo de vibração $(f_{norm})_3 = 205,867$ em C.A. (a) deslocamentos u ; (b) deslocamentos v ; (c) deslocamentos w .



(a)

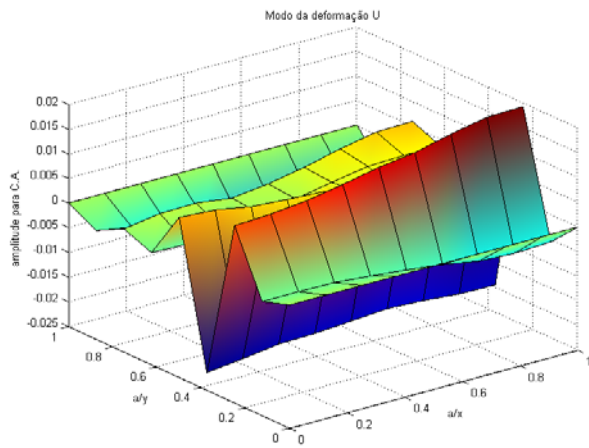


(b)

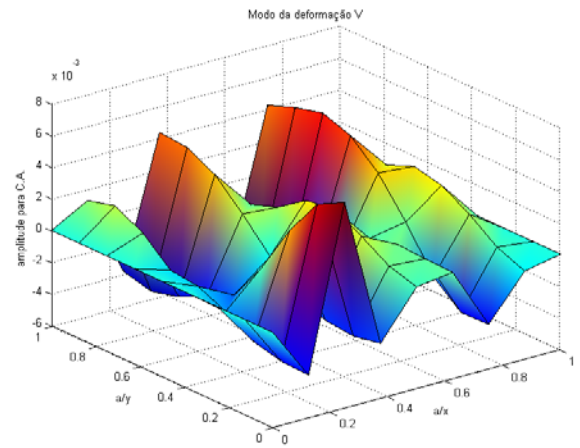


(c)

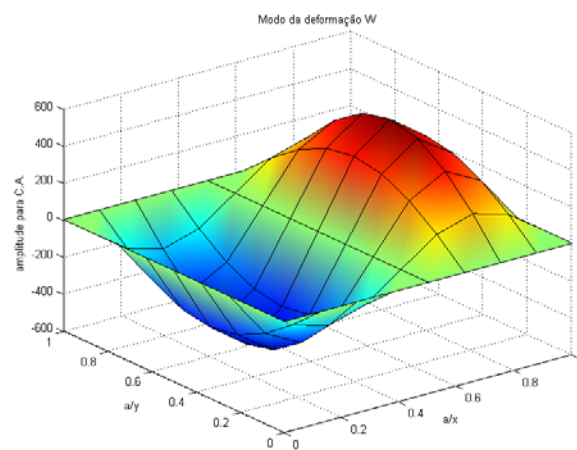
Figura 7.14 - Ilustração do 4º modo de vibração $(f_{norm})_4 = 269,008$ em C.A. (a) deslocamentos u ; (b) deslocamentos v ; (c) deslocamentos w .



(a)



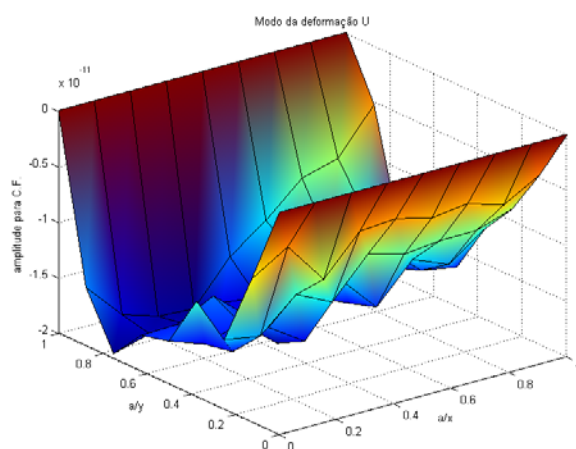
(b)



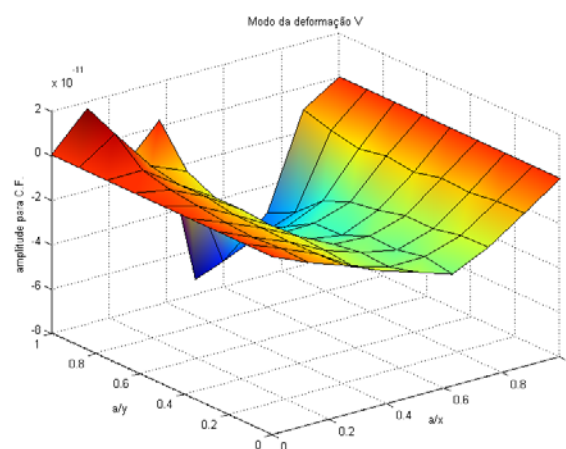
(c)

Figura 7.15 - Ilustração do 5º modo de vibração $(f_{norm})_5 = 272,280$ em C.A. (a) deslocamentos u ; (b) deslocamentos v ; (c) deslocamentos w .

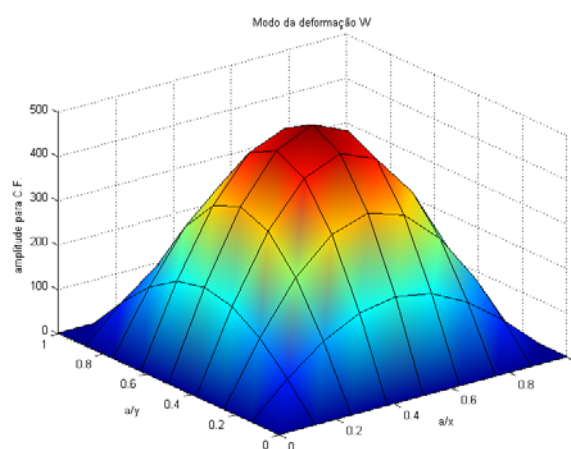
Circuito Fechado(C.F.).



(a)



(b)



(c)

Figura 7.16 - Ilustração do 1º modo de vibração $(f_{norm})_1 = 139,635$ em C.F. (a) deslocamentos u ; (b) deslocamentos v ; (c) deslocamentos w .