



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA QUÍMICA



Controle Preditivo de Sistemas Híbridos

Anamaria de Oliveira Caetano
Uberlândia
2011



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA QUÍMICA



Controle Preditivo de Sistemas Híbridos

Anamaria de Oliveira Caetano

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Química, Área de Concentração em Desenvolvimento de Processos Químicos.

Uberlândia
2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG - Brasil

C128c Caetano, Anamaria de Oliveira, 1986-
Controle preditivo de sistemas híbridos / Anamaria de Oliveira
Caetano. - 2011.
158 f. : il.

Orientador: Luís Cláudio Oliveira Lopes.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química.
Inclui bibliografia.

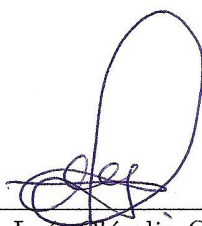
1. Engenharia química - Teses. 2. Processos químicos - Teses.
3. Controle preditivo - Teses. I. Lopes, Luís Cláudio Oliveira. II.
Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Química. III. Título.

CDU: 66.0

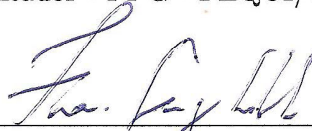
Controle Preditivo de Sistemas Híbridos

Dissertação de mestrado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de mestre em Engenharia Química em 16 de Março de 2011.

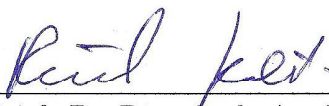
BANCA EXAMINADORA



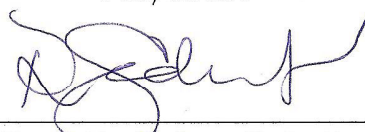
Prof. Dr. Luis Cláudio Oliveira Lopes
Orientador - PPG - FEQUI/UFU



Prof. Dr. Fran Sérgio Lobato
FEQUI/UFU



Prof. Dr. Ricardo de Araújo Kalid
PEI/UFBA



Prof. Dr. Rubens Gedraite
FEQUI/UFU

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por todas as bênçãos que tem me proporcionado ao longo da vida. Pela fé e perseverança que me concedeu para o desenvolvimento deste trabalho e pelas inúmeras oportunidades que me proporcionou para me tornar melhor mesmo que muitas vezes eu não tenha compreendido seus caminhos e tenha questionado seus meios.

Aos meus pais, Ivone Viana de Oliveira e Evânio Maximiano Caetano pela dedicação durante toda minha vida para que eu conquistasse meus objetivos através de atitudes nas quais seus ensinamentos de ética e valores são a base para qualquer decisão. Agradeço de maneira especial à minha mãe Ivone pelo incessante apoio e fé em mim quando nem eu mesma acreditava na minha capacidade de ir tão longe.

A minha irmã e amiga Mariana de Oliveira Caetano pela força, incentivo e orações ao meu favor. Pelos momentos ao telefone que sempre me retornam à nossa infância quando nossos únicos problemas se resumiam em um brinquedo quebrado ou uma dor de garganta. Por cada vibração, cada torcida e cada plano que fazemos juntas e que tenho certeza para a minha felicidade serão todos realizados.

Ao Professor Luís Cláudio Oliveira Lopes pela orientação deste trabalho e de tantos outros, pela compreensão nos momentos críticos e principalmente pela amizade. Pelas inúmeras oportunidades criadas para meu crescimento profissional mas principalmente por aquelas que me possibilitaram também um crescimento pessoal.

Ao meu namorado, companheiro e amigo, Renato Fleury Cardoso, por cada palavra de incentivo, por cada abraço de conforto e por cada minuto dedicado a mim mesmo quando o cansaço e o desgaste não me tornavam a melhor companhia. Por compartilhar minhas alegrias, minhas indignações e meus receios, por me ensinar a “sonhar juntos” sempre. Agradeço ainda aos seus pais Sr. Luiz e D. Rosana, que tornaram-se “minha família em Uberlândia”, por me acolherem e me ajudarem em tantos momentos nos quais a distância não permitiu que os meus pais estivessem presentes fisicamente.

Aos meus amigos e companheiros de curso, pela força e incentivo ao longo do meu trabalho, principalmente a minha amiga Nádia, pelos momentos de riso, desabafo e

apoio sempre que precisei.

Às minhas companheiras nos momentos de ternura gratuita, Susie, Mona, Fenix e Pandora. À eterna lembrança que me trazem de que é preciso endurecer sem perder a ternura.

Aos meus avós, tios e primos, pela vibração e torcida a cada sucesso e pela lembrança em cada momento especial.

Aos professores da Faculdade de Engenharia Química.

Aos membros da banca, Prof. Fran Sérgio Lobato, Prof. Ricardo de Araújo Kalid e Prof. Rubens Gedraite, pelo enriquecimento deste trabalho.

À FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais) pela concessão da bolsa de estudos.

*A minha mãe e minha irmã e ao meu namorado
Renato.*

LISTA DE FIGURAS

1.1	Definição de Sistemas Híbridos	2
2.1	Exemplo de um sistema híbrido constituído por cinco modos de operação .	6
2.2	Representação gráfica da equivalência entre as classes de sistemas híbridos dinâmicos	19
2.3	Mapa de Poincaré	28
2.4	União das teorias de controle e das ciências da computação para melhor entender as características e os benefícios dos sistemas híbridos	30
2.5	Esquema representativo do Controle Preditivo Baseado em Modelo	34
2.6	Limites da função custo e restrições dos problemas QP e LP	36
3.1	Sistemas expressos pelo formalismo MLD.	38
3.2	Sistemas com comportamento dinâmico regional	38
3.3	Autômato impulsionado pelas condições subjacentes em um sistema dinâmico	41
4.1	Sistema de três tanques interconectados	57
4.2	Algoritmo de simulação para sistemas híbridos	62
4.3	Posição das válvulas de conexão entre os tanques	63
4.4	Perfil do nível de líquido de cada um dos três tanques	64
4.5	Comportamento temporal da variável auxiliar δ_i	64

4.6	Perfis temporais do níveis de líquido no tanque 1 em cenários investigado baseados no modelo MLD, em modelo discretizado PWA e no modelo não linear contínuo	65
4.7	Perfis temporais do níveis de líquido no tanque 3 em cenários investigado baseados no modelo MLD, em modelo discretizado PWA e no modelo não linear contínuo	65
4.8	Comportamento temporal das vazões q_1 e q_2 durante a simulação do processo no qual todas as válvulas são mantidas abertas	66
4.9	Perfis temporais dos níveis de líquido do tanque 1 calculados através do modelo MLD, pelo modelo PWA discreto e pelo modelo contínuo de equações diferenciais para o Cenário 2	67
4.10	Perfis temporais dos níveis de líquido do tanque 2 calculados através do modelo MLD, pelo modelo PWA discreto e pelo modelo contínuo de equações diferenciais para o Cenário 2	68
4.11	Perfis temporais dos níveis de líquido do tanque 3 calculados através do modelo MLD, pelo modelo PWA discreto e pelo modelo contínuo de equações diferenciais para o Cenário 2	68
4.12	Comportamento dinâmico em malha fechada para os níveis de cada tanque sob a ação do controlador l_1 -MPC	70
4.13	Resultado da manipulação do controlador MPC sobre as variáveis q_1 e q_2 .	70
4.14	Posição de abertura das válvulas V_1, V_2, V_{13} e V_{23}	71
4.15	Posição de abertura das válvulas V_{L1}, V_{L2} e V_{N3}	71
4.16	Níveis de líquido dos tanques 1 e 3 estabelecido pela ação do controle l_1 -MPC e da associação dos controles PI e liga/desliga.	73
4.17	Resultado da manipulação da vazão q_1 pelo controlador l_1 -MPC e pelo controlador PI	73
4.18	Resultado da manipulação da posição de abertura da válvula V_1 pelo controlador l_1 -MPC e pelo controlador liga/desliga	74
4.19	Comportamento dinâmico dos níveis dos tanques 1 e 3 para a ação do controlador l_2 -MPC (esquerda) e l_1 -MPC (direita).	75
4.20	Posições de abertura das válvulas de saída de líquido dos três tanques resultantes da atuação dos controladores MPC	75
4.21	Posições de abertura das válvulas de ligação entre os três tanques resultantes da atuação dos controladores MPC	76
4.22	Ações resultantes da atuação controlador l_2 -MPC (esquerda) e l_1 -MPC (direita) nas vazões de entrada dos tanques	76

4.23	Reator CSTR com troca térmica	79
4.24	Resposta do comportamento do processo nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss1}$ para perturbação degrau de $\pm 0,50$, $\pm 0,75$ e ± 1 no instante $\tau = 5$	81
4.25	Resposta do comportamento do processo nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss2}$ para perturbação degrau de $\pm 0,50$, $\pm 0,75$ e ± 1 no instante $\tau = 5$	81
4.26	Resposta do comportamento do processo nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss3}$ para perturbação degrau de $\pm 0,50$, $\pm 0,75$ e ± 1 no instante $\tau = 5$	82
4.27	Curva de ganho estático para o CSTR com troca térmica.	82
4.28	Resposta do comportamento do modelo linear nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss1}$ para perturbação degrau de $\pm 0,50$, $\pm 0,75$ e ± 1 no instante $\tau = 5$	84
4.29	Resposta do comportamento do modelo linear nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss2}$ para perturbação degrau de $\pm 0,50$, $\pm 0,75$ e ± 1 no instante $\tau = 5$	84
4.30	Resposta do comportamento do modelo linear nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss3}$ para perturbação degrau de $\pm 0,50$, $\pm 0,75$ e ± 1 no instante $\tau = 5$	85
4.31	Comparação das respostas do comportamento do modelo linear (linha pontilhada) e processo (linha cheia) nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss1}$ para perturbação degrau de $u = +0,75$ no instante $\tau = 5$	86
4.32	Comparação das respostas do comportamento do modelo linear (linha pontilhada) e processo (linha cheia) nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss2}$ para perturbação degrau de $u = +0,75$ no instante $\tau = 5$	87
4.33	Comparação das respostas do comportamento linear (linha pontilhada) e processo (linha cheia) nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss3}$ para perturbação degrau de $u = +0,75$ no instante $\tau = 5$	88
4.34	Resposta do controle do CSTR sob a ação dos controladores NL-MPC, Local-MPC e Regional-MPC.	91
4.35	Modelos usados pelo controlador sob ação do l_1 -MPC com restrições. . . .	91
D.1	Estratégia para resolução de problemas de otimização com o método <i>Branch-and-Bound</i>	125

LISTA DE TABELAS

1	Notação matemática utilizada.	xvii
2.1	Classificação de Sistemas Híbridos	12
2.2	Modelo híbrido sugerido para cada tarefa da engenharia de controle	19
2.3	Ferramentas computacionais para análise e modelagem de sistemas híbridos	21
2.4	Operadores lógicos	25
2.5	Conversão de relações lógicas em desigualdades inteiras	26
2.6	Conversão de relações mistas lógicas contínuas em restrições mistas inteiras	27
4.1	Parâmetros do modelo para os sistema de três tanques.	58
4.2	Cenário de simulação.	72
4.3	Variáveis adimensionais para o modelo do reator CSTR	79

LISTA DE ABREVIATURAS

ACC - *American Control Conference*- Conferência Americana de Controle

ADHS - *IFAC Conference of Analysis and Design of Hybrid Systems*- Conferência de Análise e Projeto de Sistemas Híbridos

CDC - *Conference on Decision and Control*- Conferência sobre Decisão e Controle

Dymola - *Dynamical Modeling Laboratory*- Laboratório de Modelagem Dinâmica

ELC - *Extended Linear Complementary*- Complementaridade Linear Expandidos

HSCC - *Hybrid Systems: Computation and Control*- Sistemas Híbridos: Computação e Controle

LP - *Linear Programming*-Programação Linear.

LC - *Linear Complementary*-Complementaridade Linear

MESA - *International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications*- Conferência Internacional sobre Mecatrônica, Sistemas Embarcados e Aplicações

MILP - *Mixed Integer Linear Programming*-Programação Linear Inteira Mista.

MIQP - *Mixed Integer Quadratic Programming*-Programação Quadrática Inteira Mista.

MLD - *Mixed Logical Dynamical*- Sistemas Mistos Lógicos Dinâmicos

MMPS - *Max-min-plus-scaling*- Max-min-soma-multiplicação por escalar

MPC - *Model Predictive Control*- Controle Preditivo Baseado em Modelo

QP - *Quadratic Programming*-Programação Quadrática.

PWA - *Piecewise Affine Systems*-Sistemas Afins por Parte

Scicos - *Scilab Connected Object Simulator*.

NOTAÇÃO MATEMÁTICA

Neste trabalho, a representação de matrizes, vetores e escalares bem como outros tipos de variáveis nas formulações matemáticas está de acordo com a Tabela (1):

Tabela 1: Notação matemática utilizada.

Tipo	Exemplos
Matrizes	$\mathbf{A}$ ou $\mathbf{\Gamma}$
Matrizes ou Vetores de Números	$\mathbf{0}$ (matriz ou vetor de zeros)
Vetores ou Funções Vetoriais	$\mathbf{a}$ ou $\boldsymbol{\gamma}$
Escalares ou Funções	a ou γ
Conjuntos	$\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{Z}^+$
Variáveis	A ou Γ
Índices	i ou l

SIMBOLOGIA

A - Matriz com coeficientes correspondentes aos estados atuais nas equações de atualização dos estados do sistema MLD, Equação (2.18).

A_t - Área da seção transversal dos tanques, Equação (4.1).

a_z - Termo de correção do fluxo, Equação (4.4).

B₁ - Matriz coeficientes correspondentes às entradas nas equações de atualização dos estados do sistema MLD, Equação (2.18).

B₂ - Matriz coeficientes correspondentes às variáveis auxiliares binárias δ nas equações de atualização dos estados do sistema MLD, Equação (2.18).

B₃ - Matriz coeficientes correspondentes às variáveis auxiliares contínuas nas equações de atualização dos estados do sistema MLD, Equação (2.18).

C - Matriz coeficientes correspondentes aos estados nas equações do cálculo das saídas do sistema MLD, Equação (2.19).

D₁ - Matriz coeficientes correspondentes às entradas nas equações do cálculo das saídas do sistema MLD, Equação (2.19).

D₂ - Matriz coeficientes correspondentes às variáveis auxiliares binárias δ nas equações do cálculo das saídas do sistema MLD, Equação (2.19).

D₃ - Matriz coeficientes correspondentes às variáveis auxiliares contínuas nas equações do cálculo das saídas do sistema MLD, Equação (2.19).

E₁ - Matriz coeficientes correspondentes às entradas das inequações as quais o sistema MLD é submetido, Equação (2.20).

E₂ - Matriz coeficientes correspondentes às variáveis auxiliares binárias δ das inequações as quais o sistema MLD é submetido, Equação (2.20).

$\mathbf{E}_3$ - Matriz coeficientes correspondentes às variáveis auxiliares contínuas das inequações as quais o sistema MLD é submetido, Equação (2.20).

$\mathbf{E}_4$ - Matriz coeficientes correspondentes aos estados das inequações as quais o sistema MLD é submetido, Equação (2.20).

$\mathbf{E}_5$ - Matriz constata das inequações as quais o sistema MLD é submetido, Equação (2.20).

g - Constante gravitacional, Equação (4.4).

h_1 - Nível de líquido no interior do tanque 1, Equação (4.1).

h_2 - Nível de líquido no interior do tanque 2, Equação (4.2).

h_3 - Nível de líquido no interior do tanque 3, Equação (4.3).

h_{max} - Altura máxima para o nível de líquido no interior dos tanques, Equação (4.4).

h_v - Patamar que se encontram as válvulas V_i ($i=1,2$), Equação (4.4).

H_p - Horizonte de predição, Equação (2.37).

H_u - Horizonte de controle, Equação (2.37).

H_w - Horizonte para penalização das saídas, Equação (2.37).

q_1 - Vazão de entrada no tanque 1, Equação (4.1).

q_2 - Vazão de entrada do tanque 2, Equação (4.2).

q_{13V1} - Vazão do tanque 1 para o tanque 3 através da válvula V_1 , Equação (4.1).

q_{13V13} - Vazão do tanque 1 para o tanque 3 através da válvula V_{13} , Equação (4.1).

q_{23V2} - Vazão do tanque 2 para o tanque 3 através da válvula V_2 , Equação (4.2).

q_{23V23} - Vazão do tanque 2 para o tanque 3 através da válvula V_{23} , Equação (4.2).

q_{L1} - Vazão de saída no tanque 1, Equação (4.1).

q_{L2} - Vazão de saída do tanque 2, Equação (4.2).

q_{N3} - Vazão de saída do tanque 3, Equação (4.3).

q_{max} - Vazão máxima de entrada na bomba i ($i=1,2$), Equação (4.10).

$\mathbf{Q}_i$ para $i=1,2,3,4,5$ - Matrizes peso para as variáveis $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\delta}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, respectivamente, Equação (2.29).

S_h - Área da seção transversal da válvula V_h , Equação (4.4).

u - Temperatura adimensional da corrente de troca térmica, Equação (4.61).

T_s - Tempo de amostragem, Equação (4.24).

$\mathbf{u}$ - Vetor de entradas, Equação (2.1).

$\mathbf{U}_{ss}$ - Vetor de valores para o estado estacionário referente às entradas durante todo o horizonte de predição, Equação (3.28).

$\mathbf{u}_{ss}$ - Vetor de valores para o estado estacionário referente às entradas apenas no instante k , Equação (3.32).

V_1 - Status da válvula superior de ligação entre o tanque 1 e o tanque 3, Equação (4.4).

V_{13} - Status da válvula inferior de ligação entre o tanque 1 e o tanque 3, Equação (4.5).

V_2 - Status da válvula superior de ligação entre o tanque 2 e o tanque 3, Equação (4.4).

V_{23} - Status da válvula inferior de ligação entre o tanque 2 e o tanque 3, Equação (4.5).

V_{L1} - Status da válvula de saída no tanque 1, Equação (4.6).

V_{L2} - Status da válvula de saída do tanque 2, Equação (4.7).

V_{N3} - Status da válvula de saída do tanque 3, Equação (4.8).

$\mathbf{x}$ - Vetor de estados, Equação (2.1).

$\mathbf{x}_1$ - Variável adimensional referente a concentração, Equação (4.38).

$\mathbf{x}_2$ - Variável adimensional referente a temperatura, Equação (4.38).

$\mathbf{X}_{ss}$ - Vetor de valores para o estado estacionário referente aos estados durante todo o horizonte de predição, Equação (3.28).

$\mathbf{x}_{ss}$ - Vetor de valores para o estado estacionário referente aos estados apenas no instante k , Equação (3.32).

$\mathbf{y}$ - Vetor de saídas, Equação (2.1).

$\mathbf{Y}_{ss}$ - Vetor de valores para o estado estacionário referente às saídas durante todo o horizonte de predição, Equação (3.28).

$\mathbf{y}_{ss}$ - Vetor de valores para o estado estacionário referente às saídas apenas no instante k , Equação (3.32).

$\mathbf{z}$ - Vetor de variáveis auxiliares contínuas, Equação (2.1).

$\mathbf{Z}_{ss}$ - Vetor de valores para o estado estacionário referente às variáveis auxiliares contínuas durante todo o horizonte de predição, Equação (3.28).

$\mathbf{z}_{ss}$ - Vetor de valores para o estado estacionário referente às variáveis auxiliares contínuas apenas no instante k , Equação (3.32).

δ - Vetor de variáveis auxiliares binárias, Equação (2.1).

Δ_{ss} - Vetor de valores para o estado estacionário referente às variáveis auxiliares binárias durante todo o horizonte de predição, Equação (3.28).

δ_{ss} - Vetor de valores para o estado estacionário referente às variáveis auxiliares binárias apenas no instante k , Equação (3.32).

$\gamma_{u_{k+h}}$ - Vetor de variáveis auxiliares para cada um dos componentes do vetor $\mathbf{u}_{k+h}$, Equação (3.34). $\gamma_{x_{k+h}}$ - Vetor de variáveis auxiliares para cada um dos componentes do vetor $\mathbf{x}_{k+h}$, Equação (3.42).

$\gamma_{y_{k+h}}$ - Vetor de variáveis auxiliares para cada um dos componentes do vetor $\mathbf{y}_{k+h}$, Equação (3.42).

$\gamma_{z_{k+h}}$ - Vetor de variáveis auxiliares para cada um dos componentes do vetor $\mathbf{z}_{k+h}$, Equação (3.42).

$\gamma_{\delta_{k+h}}$ - Vetor de variáveis auxiliares para cada um dos componentes do vetor $\boldsymbol{\delta}_{k+h}$, Equação (3.42).

SUMÁRIO

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Abreviaturas	xv
Notação Matemática	xvii
Simbologia	xix
Resumo	xxvi
Abstract	xxix
1 Introdução	1
2 Revisão Bibliográfica	5
2.1 Introdução	5
2.2 Aspectos Gerais do Estudo de Sistemas Híbridos	8
2.3 Formalismos Híbridos	11
2.4 Formalismos Híbridos para sistemas dinâmicos	14
2.4.1 Sistemas Afins por Partes	14
2.4.2 Sistemas com Descrição por Complementaridade	15

2.4.3	Sistemas Max-min-adição-multiplicação	16
2.4.4	Sistemas Mistos Lógicos Dinâmicos	17
2.5	Equivalência de modelos dinâmicos híbridos	18
2.6	Simulação de Sistemas Híbridos	19
2.7	Sistemas Mistos Lógico Dinâmicos: aspectos de simulação	24
2.7.1	Proposições Lógicas para o sistema MLD	24
2.7.2	Estado estacionário de um sistema híbrido MLD	26
2.8	Controle de Sistemas Híbridos	29
2.8.1	Introdução ao Controle de Sistemas Híbridos	29
2.8.2	Controle Ótimo	31
2.8.3	Controle Preditivo Baseado em Modelo	32
3	Controle Preditivo Baseado em Modelo MLD	37
3.1	Sistemas expressos no formalismo MLD	37
3.2	Formulação de l_p -MPC para um sistema MLD	42
3.3	Controle Preditivo Linear	44
3.4	Controle Preditivo Quadrático	49
4	Resultados e Discussões	55
4.1	Estudo de caso 1: Sistema de Três Tanques	56
4.1.1	Descrição do Sistema	56
4.1.2	Abordagem MLD para o sistema de três tanques	58
4.1.3	Simulações do Modelo	62
4.1.4	Controle MPC para o sistema de três tanques	69
4.2	Reator contínuo (CSTR) com troca térmica	78
4.2.1	Descrição do sistema	78
4.2.2	Análise do comportamento do sistema em malha aberta	80
4.2.3	Abordagem MLD para o reator CSTR com troca térmica	85
4.2.4	Controle do reator CSTR com troca térmica	89

5 Conclusões e Sugestões	93
Referências Bibliográficas	97
A Restrições do Controle Preditivo para o formalismo MLD	103
A.1 Restrições de Igualdade	103
A.2 Inequações	110
B Restrições para o sistema de três tanques no formato MLD	113
B.1 Inequações para o sistema de três tanques	113
B.1.1 Inequações para $f(x) = h_i(k) - h_v$	114
B.1.2 Inequações para $z_{0i}(k) = \delta_i(k)f(x)$	114
B.1.3 Inequações para $z_{i3}(k) = V_{i3}(k)f(x)$	115
B.1.4 Inequações para $z_{L1}(k) = V_{L1}(k)h_1(k)$, $z_{L2}(k) = V_{L2}(k)h_2(k)$ e $z_{N3}(k) = V_{N3}(k)h_3(k)$	116
B.1.5 Inequações para $z_i(k) = V_i(k)f(x)$	116
C Restrições para o reator CSTR com troca térmica	119
C.1 Inequações para o reator CSTR com troca térmica	119
C.1.1 Inequações para os modelos regionais	120
C.1.2 Inequações para $z_i(k) = [\mathbf{A}_i\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_i]\delta_i(k)$	121
D Otimização com Modelos MLD	123
D.1 MILP e MIQP	123
D.2 Algoritmo <i>Branch-and-Bound</i>	124
D.3 <i>Lpsolve</i>	126

Resumo

A necessidade da indústria de aprimorar aspectos da produção como qualidade e eficiência fizeram com que técnicas e dispositivos de controle mais eficientes fossem adotados atendendo às diversidades que ocorrem nos sistemas. Porém, a maioria dos sistemas não caracteriza-se apenas pela dinâmica contínua geralmente aplicada a descrição de seu comportamento mas por uma associação desta dinâmica com elementos com características discretas (lógicas). A este tipo de sistemas relaciona-se a expressão *sistemas híbridos* que caracteriza processos cuja dinâmica associa o comportamento contínuo em tempo real de um sistema com eventos discretos. O controle de sistemas híbridos exige respostas condizentes com a presença de eventos discretos e contínuos interagindo entre si, o que faz com que estratégias de controle cada vez mais sofisticadas sejam desenvolvidas. Neste trabalho, adotou-se o formalismo híbrido MLD (*Mixed Logical Dynamical*) para a representação de sistemas híbridos dinâmicos utilizando proposições lógicas que expressam tal sistema sob a forma de restrições lineares de variáveis binárias interagindo com o comportamento contínuo de equações diferenciais. Neste contexto, o controlador preditivo baseado em um modelo desenvolvido a partir do formalismo selecionado é sugerido como uma opção para o controle de sistemas híbridos. Nesta dissertação, a modelagem qualitativa dos sistemas discretos utilizando o formalismo MLD é apresentada para a qual desenvolve-se a verificação para tais sistemas com o objetivo de avaliar a modelagem híbrida. Essas técnicas foram aplicadas em problemas da Engenharia Química como sistemas de três tanques conectados em série e um reator CSTR com aquecimento. Em cada um dos processos estudados foram feitas as simulações acopladas aos modelos qualitativos em diversos cenários e comparados ao modelo contínuo de equações diferenciais e sua versão discretizada. Estudou-se ainda a ação do controlador MPC para sistemas híbridos, desenvolvendo-o a partir do modelo MLD e apresentando diversos cenários de simulação para investigação dos efeitos do controle sobre o sistema. Tal controle é desenvolvido para as normas l_1 e l_2 , possibilitando uma comparação entre as duas opções de controle além da comparação entre estes com controladores clássicos como o PI. Os resultados para o modelo no formalismo MLD são satisfatórios e condizem com o comportamento real do sistema. Os problemas de controle desenvolvidos apresentam a intervenção do controlador MPC mais eficiente que o controlador clássico PI associado ao controle liga/desliga principalmente pela possibilidade de escolha das variáveis a ser manipulada. A comparação com entre os controladores l_1 -MPC e l_2 -MPC permite resultados que indicam ações de controle

semelhantes para cada um destes controladores em função da localização do ponto ótimo encontrado na resolução do modelo de otimização para o sistema de controlados

Palavras-chave: *Sistemas Híbridos, Controle Preditivo, MLD.*

Abstract

The industry's need to improve aspects of production such as quality and efficiency meant that techniques and devices for more efficient control were adopted in view of the differences that occur in systems. Most systems are not only characterized by the continuous dynamics usually applied to describe this behavior but an association with this dynamic elements with discrete characteristics (logical). For this systems relates to the expression *hybrid systems* whose dynamics processes characterize the behavior continuous real-time system associated with a discrete event. The control of hybrid systems requires answers in accordance with the presence of discrete event and continuous interacting that makes control strategies increasingly sophisticated are developed. In this work, was adopted the hybrid MLD formalism (*Mixed Logical Dynamical*) for the representation of hybrid systems using dynamic logical propositions that express such a system in the form of linear constraints of binary variables interacting with the continuous behavior of differential equations. In this context, the predictive controller based on an optimal model developed from the selected formalism is suggested as an option for the control of hybrid systems. In this work, the qualitative modeling of discrete systems using the MLD formalism is presented for which it is developed to check these systems to evaluate the hybrid modeling. These techniques were applied to simple problems in chemical engineering as systems of three tanks connected in series and a CSTR reactor with heating. In each of the systems were made simulations coupled to qualitative models in various scenarios and compared to the continuous model of differential equations and their discretized version. The action of the MPC controller for hybrid systems was studied also, developing it from the MLD model and presenting several simulation scenarios to investigate the effects of control over the system. Such control is developed to the l_1 and l_2 norms, enabling a comparison between the two control options and the comparison between these controllers with classics like PI. The results for the model in the MLD formalism are satisfactory and consistent with the real behavior of the system. The control problems developed show intervention MPC controller more efficient than the classical PI controller associated with the control on/off mainly by the choice of variables to be manipulated. The comparison between controllers l_1 -MPC and l_2 -MPC gives results that indicate similar control actions for each of these controllers depending on the location of the optimal point found in solving the optimization model for the controlled system.

Keywords: *Hybrid Systems, Model Predictive Control, MLD.*

CAPÍTULO 1

Introdução



Revolução Industrial trouxe à civilização moderna, na qual anteriormente era predominante o trabalho manual, um novo conceito de indústria e processos. Com este novo conceito surgem também novas tecnologias para aprimorar a produção. Isto resulta em uma chamada Revolução Digital, da qual se podem presenciar os efeitos na vida moderna. Dispositivos digitais são parte do cotidiano e nos proporcionam benefícios e comodidade porém geram a dependência e a vulnerabilidade de quem concentra suas atividades dependentes destes dispositivos (KRILAVICIUS, 2006).

A necessidade da indústria de aprimorar aspectos da produção como qualidade, eficiência, uso eficiente de energia e adequações às leis de segurança e meio ambiente, fizeram com que técnicas e dispositivos de controle mais eficientes fossem adotados atendendo às diversidades que ocorrem nos sistemas. Controladores capazes de lidar de uma melhor forma com os processos multivariáveis, com perturbações mensuráveis ou não e focalizados na otimização e na capacidade de trabalhar com diferentes tipos de modelos são cada vez mais necessários nas plantas industriais. O controle preditivo, controle baseado na predição do comportamento da planta a partir de um modelo, é uma das alternativas com maior impacto na indústria petroquímica (MALACALZA, 2004).

Dentro deste contexto, enfatiza-se o fato de que a maioria dos sistemas não possui um comportamento apenas com características contínuas e sim uma dinâmica contínua com alguns elementos com características discretas (lógica). Exemplos destes elementos são

válvulas liga/desliga, termostatos, chaves de nível ou ainda tomadas de decisão do tipo *if-then-else/se-então-senão*. Tais sistemas são conhecidos como sistemas híbridos (Figura 1.1).

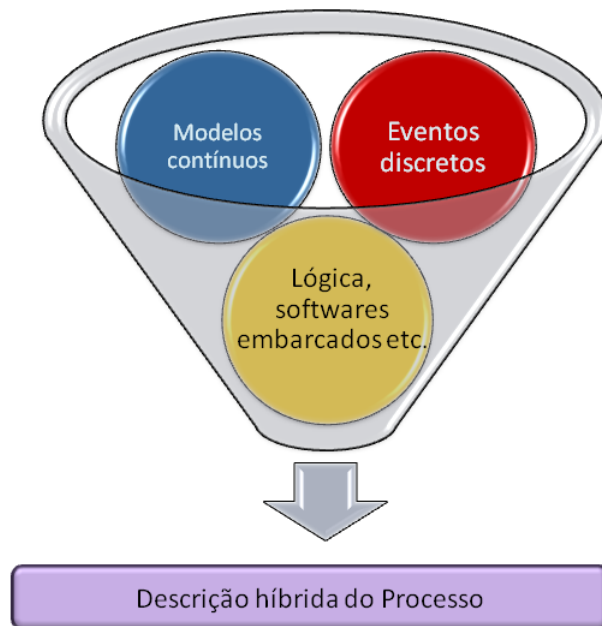


Figura 1.1: Definição de Sistemas Híbridos.

O comportamento híbrido está presente em diversos sistemas utilizados no cotidiano da sociedade atual: celulares, microondas, sistemas de controle de tráfego, processos de controles na indústria química, na produção e distribuição de energia e ainda em sistemas biológicos (KRILAVICIUS, 2006). No controle de processos, o sistema híbrido pode ser caracterizado também pelo sistema de controle digital (controlador em tempo discreto), descrito por equações de diferenças, que controla o processo contínuo descrito por equações diferenciais ou sistemas contínuos com módulos digitais embarcados.

A simulação de sistemas é uma ferramenta amplamente aceita para a análise comportamental de um processo quando o modelo que o representa possui descrição apropriada para o fenômeno de interesse. A simulação de sistemas híbridos também é conhecida como execução. Com a simulação de um processo pode-se realizar o processo de verificação ou alcançabilidade de um estado. A verificação permite avaliar se um estado final determinado será alcançado. Assim, permitindo uma análise de segurança de sistemas híbridos. A simulação e verificação de sistemas híbridos requer ferramentas que consigam unir os

dois comportamentos predominantes do sistema híbrido (discreto e contínuo). Isto não significa, porém, apenas a junção destes dois aspectos em uma simulação. É necessário que haja a interação entre os dois tipos de comportamento de forma simultânea.

Assim como a simulação, o controle de sistemas híbridos exige respostas condizentes com a presença de eventos discretos e contínuos interagindo entre si o que faz com que estratégias de controle cada vez mais sofisticadas sejam desenvolvidas. Dadas as características dos sistemas híbridos, o controlador preditivo baseado em um modelo híbrido é a opção de estratégia de controle a ser considerada. A aplicação das técnicas de controle preditivo em sistemas caracterizados por dinâmicas contínuas e eventos discretos (muitos deles representados por restrições) permite fazer previsões sobre a evolução dos mesmos ao longo de cada previsão, e assim, permite a tomada ótima de decisão em uma ambiente de comportamento complexo.

Os objetivos gerais desta dissertação são investigar descrições híbridas para processos de interesse na Engenharia Química, analisar o modelo híbrido através de técnicas de simulação, desenvolver estratégias de controle baseadas em modelo e avaliar cenários de controle para sistemas híbridos.

Os objetivos específicos desta dissertação são desenvolver controlador preditivo baseado em modelos com descrição MLD (*Mixed Logical Dynamical*) para métricas de desempenho l_1 (problema MILP - programação linear inteira mista) e l_2 (Problema MIQP - programação quadrática inteira mista) e estudar o controle de processos inerentemente híbridos comparando o seu desempenho com controladores clássicos.

A estrutura básica desta dissertação possui a seguinte forma: o Capítulo 2 aborda os aspectos fundamentais para o estudo de sistemas híbridos e para o desenvolvimento de um controle para este tipo de sistemas. O Capítulo 3 apresenta o desenvolvimento teórico matemático de controladores MPC (*Model Predictive Control*) utilizando a formulação de um problema de programação linear inteira mista (MILP) e um problema de programação quadrática inteira mista (MIQP). Resultados dessas explorações são mostrados no Capítulo 4 utilizando dois exemplos ilustrativos: um sistema de três tanques interligados por válvulas liga/desliga e um sistema híbrido com controle com modelo regional descrevendo um reator CSTR (*Continuous Stirred Tank Reactor*) com aquecimento no qual ocorre uma reação irreversível. São apresentadas as análises para o desempenho de ambos controladores previamente desenvolvidos e a comparação destes com o controlador clássico PI além da simulação e verificação dos respectivos sistemas. Conclusões e sugestões para novos trabalhos são apresentados no Capítulo 5. O Apêndice A apresenta a formulação das restrições para o controlador preditivo (MPC) utilizando o formalismo MLD. Os Apêndices B e C apresentam o desenvolvimento teórico matemático para os exemplos apresentados no Capítulo 4.

CAPÍTULO 2

Revisão Bibliográfica



Este capítulo apresenta os aspectos gerais para o estudo de sistemas híbridos. Define-se e situa-se o estudo de sistemas híbridos, apresentando os principais avanços existentes, com destaques para aqueles ocorridos na última década. Aspectos fundamentais do estudo de sistemas híbridos como modelagem, análise e teste de qualidade de modelos são descritos com ferramentas computacionais desenvolvidas especialmente para estes fins. A classificação dos formalismos híbridos utilizados são abordados de maneira geral, enfatizando-se os formalismo para sistemas dinâmicos, em especial sistemas MLD (*Mixed Logical Dynamical*), que serão focados no desenvolvimento da dissertação. As técnicas para tradução de proposições lógicas em inequações com presença de variáveis binárias enfatizadas no formalismo MLD são apresentadas e características a cerca do alcance do estado estacionário para este formalismo serão expostas. Descrição de técnicas de aplicação do controle ótimo e do controle preditivo para sistemas híbridos finalizam o capítulo.

2.1 Introdução

A terminologia *híbrida* é associada a sistemas como forma de classificar aqueles que combinam o comportamento contínuo em tempo real de um sistema com eventos discretos (KRILAVICIUS, 2006). A expressão *sistemas híbridos* foi utilizada primeiramente por Wit-

senhausen (1966) para descrever esta combinação entre ambas dinâmicas sugerindo um modelo linear com estados e entradas assumindo valores discretos e contínuos. Uma definição simplificada deste tipo de sistema é empregada para caracterizar sistemas que possuem diversos regimes/modos de operação. Cada modo de operação representa a dinâmica contínua do processo constituído por equações diferenciais ou de diferenças enquanto cada troca de modo de operação ocorre devido a ocorrência de eventos particulares, caracterizando a dinâmica discreta do sistema (LAZAR, 2006). A Figura (2.1) apresenta o esquema de um sistema que contém cinco modos de operação (LAZAR, 2006).

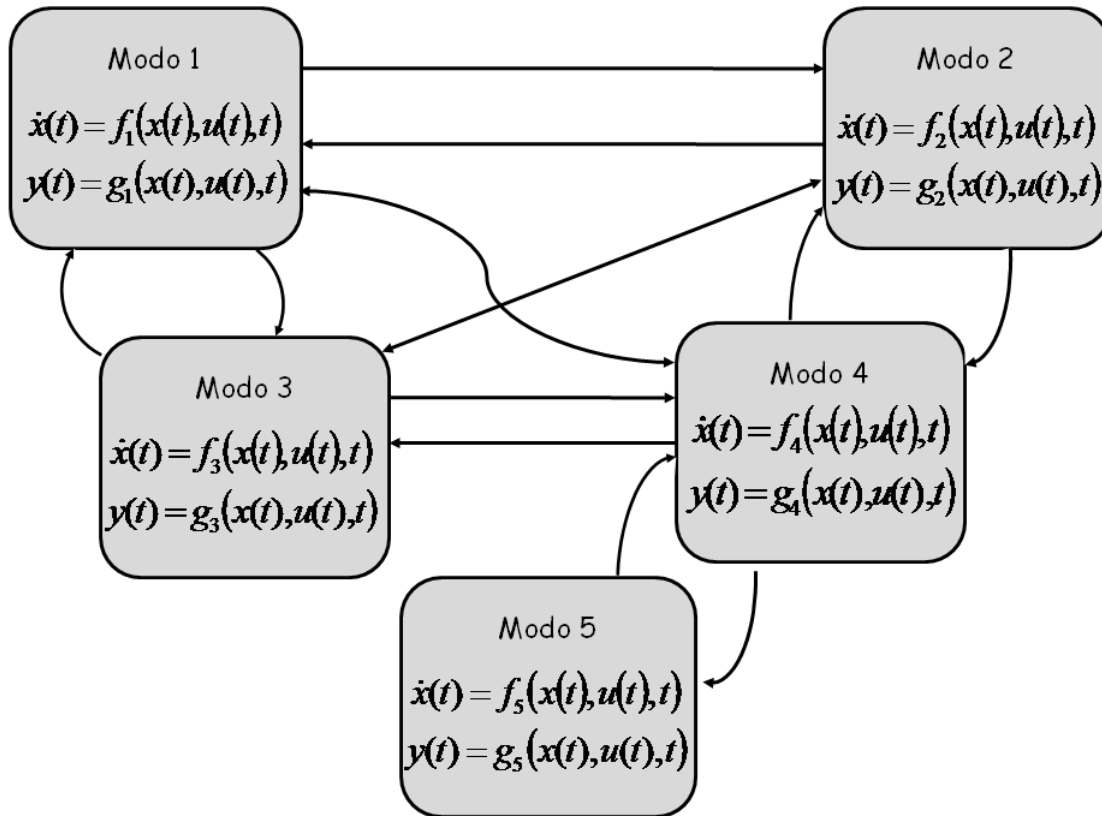


Figura 2.1: Exemplo de um sistema híbrido constituído por cinco modos de operação (adaptado de Lazar (2006)).

A teoria de sistemas híbridos visa unir as contribuições da teoria de sistemas contínuos com a teoria de eventos discretos, oferecendo desafios teóricos ao abordar esta união e resultando em um impacto positivo sobre as aplicações práticas desta teoria, principalmente aplicada à teoria de controle (MIGNONE, 2002). Sistemas comuns na engenharia: sistemas mecânicos com colisões, circuitos com diodos e interruptores, processos químicos controlados por válvulas e bombas e, sobretudo, sistemas embarcados de computação nos quais os dispositivos digitais interagem com um ambiente analógico são exemplos de aplicações nas quais o formalismo híbrido se compatibiliza satisfatoriamente às características peculiares relacionadas com a presença de dois tipos de comportamento (JOHANSSON et al., 2004).

Os eventos discretos presentes nos sistemas híbridos são decorrentes de estímulos externos ou da evolução da dinâmica contínua, sendo que esta muda em resposta a ocorrência desses eventos (KRILAVICIUS, 2006). De acordo com Engell (1998), as principais fontes originárias de eventos discretos para sistemas híbridos são:

- Transições de fase no sistema (nível máximo em um reator, líquido completamente evaporado, aparecimento/desaparecimento de fases etc.);
- Operações de processos descontínuos (indústrias de química fina, farmacêutica, tintas, indústrias de alimentos etc).
- Instrumentos que retornam saídas discretas (principalmente para níveis e vazões);
- Atuadores com posições/características discretas (válvulas liga/desliga, motores com controle de velocidade, bombas);
- *Startup* e *shutdown* de plantas contínuas etc.

A dinâmica discreta geralmente caracteriza a transição de fases dos sistema nos quais a descrição mais natural é feita por diferentes conjuntos de equações diferenciais e algébricas e as condições de comutação que regulam a passagem de uma descrição para a próxima. Nos casos mais simples, é suficiente para descrever os limites em que a dinâmica muda em função das variáveis de estado de valor real do sistema contínuo (ENGELL, 1998).

O interesse na classe de sistemas híbridos se deve ao grande número de sistemas que pode ser descrito com este tipo de abordagem. Este interesse pode ser quantificado através do número de trabalhos e sessões dedicadas a este tema na *American Control Conference*(ACC) e *Conference on Decision and Control* (CDC), conferências internacionais dedicadas ao controle de sistemas que abordam o formalismo híbrido como uma alternativa de teoria a ser aliada a teoria de controle (MIGNONE, 2002). Conferências e *workshops* específicos sobre o tema tem ganhado espaço e reconhecimento internacional. Entre aqueles de maior destaque estão *Hybrid Systems: Computation and Control*(HSCC), realizada a cada dois anos; a anual *International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications* (MESA) e *IFAC Conference of Analysis and Design of Hybrid Systems* (ADHS), realizada a cada três anos.

Além dos eventos citados, há vários trabalhos publicados que são importantes para o estudo de sistemas híbridos. No trabalho apresentado em Barton (1994), uma descrição formal matemática do problema de simulação é introduzido para melhor entendimento das mudanças discretas presentes em sistemas híbridos e uma representação das discontinuidades no comportamento físico do sistema e de sequências completas de ações de controle são modeladas de maneira geral. Em Engell (1998), o autor faz uma descrição

detalhada de ambos comportamentos presentes em um sistema híbrido exemplificando cada um e abordando aspectos práticos, além de sintetizar uma visão geral de aspectos de simulação, verificação e otimização destes sistemas.

Aplicações práticas do uso de formalismos híbridos estão presentes na literatura. Bemporad e Morari (1999a) faz uma apresentação geral das conversões lógicas de um sistema híbrido representado pelo formalismo MLD e desenvolvendo para este um controlador MPC que posteriormente é aplicado a um exemplo prático de um sistemas de abastecimento de gás. Um dos exemplos ilustrativos das técnicas de controle mais utilizados para o estudo de sistemas híbridos é um sistemas de três tanques conectados entre si por válvulas *liga/desliga*. Diversas abordagens são feitas através do estudo deste sistema: aplicação de um controle preditivo ao sistemas(MIGNONE, 2002), estudo de detecção de falhas (MIGNONE, 1999), estratégias de reconfiguração (TSUDA et al., 2002), entre outros.

No trabalho de Heelmees et al. (2001) são apresentados os formalismos híbridos desenvolvidos para sistemas dinâmicos, utilizados frequentemente em trabalhos acadêmicos, e a equivalência entre cada um desses formalismo é apresentada de forma a possibilitar a transcrição de um modelo para o formalismo adequado aos objetivos esperados. Na tese de Krilavicius (2006), uma descrição completa de sistemas híbridos é feita, apresentando aspectos gerais, formalismos híbridos e análises comportamentais de tais sistemas através da exploração de técnicas de simulação e modelagem.

2.2 Aspectos Gerais do Estudo de Sistemas Híbridos

Sistemas híbridos apresentam diferentes tamanhos e complexidade de acordo com sua aplicação; têm-se desde sistemas simples com poucos estados discretos a sistemas complexos com comportamento não linear e um grande número de transições entre modos de operação. Os exemplos mais comuns de sistemas com comportamento contínuo/discreto de diversos graus de complexidade são: sistemas de controle de tráfego aéreo e automotivo, aparelhos eletrônicos como celulares e microondas, controle de processos de produção e robótica, produção e distribuição de energia, sistemas biológicos, protocolos de comunicação em tempo real, descrição de sistemas contínuos com falhas, sistemas contínuos com *softwares* embutidos, entre outros (KRILAVICIUS, 2006).

As características peculiares dos sistemas híbridos, embora sejam adequadas na representação de diversos processos, resultam geralmente em alguns obstáculos no estudo destes sistemas. Alguns aspectos são considerados importantes no desenvolvimento dos estudo destes sistemas: modelagem, análise, implantação de modelos de sistemas híbridos e teste da qualidade e precisão do modelo(KRILAVICIUS, 2006).

Um modelo é uma representação abstrata e simplificada da realidade que possui um grau de complexidade suficiente para permitir a descrição do comportamento de interesse (MIGNONE, 2002). Quando refere-se a um modelo matemático frequentemente é feita a associação deste conceito a um conjunto de equações que busca representar um sistema da maneira mais adequada e mais próxima da realidade. Porém, para representar um sistema com a dualidade de comportamento como o sistema híbrido, mais do que este conjunto de equações, é necessário que o modelo compatibilize-se com esta característica comportamental. O estudo de sistemas híbridos permite o desenvolvimento de uma visão simples e confiável na produção de um modelo híbrido para representação de um sistema. Para isto, a escolha da linguagem utilizada na modelagem requer atenção às características necessárias para se descrever um sistema híbrido com eficiência.

A modelagem deve ser *descritiva*, permitindo a captura dos dois tipos diferentes de dinâmica, que seja capaz de modelar de diferentes maneiras como a evolução discreta afeta e é afetada pela evolução contínua e que permita modelos não determinísticos capturar incertezas. É necessário que a linguagem permita a construção de grandes modelos através da combinação de pequenos modelos para componentes simples além da possibilidade de compor argumentos sobre o desempenho dos componentes individuais para avaliar o desempenho do sistema global e vice-versa, caracterizando a modelagem como *combinável* e *desagregável* (JOHANSSON et al., 2004).

Uma das questões principais envolvendo sistemas híbridos é a inexistência de soluções para um determinado estado inicial. Este comportamento é indesejável na modelagem de sistemas físicos, uma vez que sugere que o modelo matemático proporciona uma imagem incompleta da realidade física. A fim de detectar tal comportamento, a análise de sistemas híbridos é adotada como parte fundamental do estudo de sistemas híbridos (JOHANSSON et al., 2004) .

A análise de sistemas híbridos é caracterizada por duas partes: verificação e simulação. As etapas para o estudo podem ser ilustradas como: inicialmente um modelo formal do sistema, contendo um possível comportamento e as exigências deste, é construído, em seguida um conjunto de regras é construído para verificar se o modelo satisfaz os requisitos formais. A simulação permite determinar propriedades a serem utilizadas no modelo e analisar o comportamento deste ao longo do tempo (KRILAVICIUS, 2006).

A verificação de sistemas híbridos tem como objetivo provar ou refutar o ajuste do sistema com relação a uma propriedade ou especificação formal. Um modelo do sistema é construído e as exigências do sistemas são formuladas na linguagem formal. Em seguida um conjunto de regras é aplicado para determinar se o modelo satisfaz os requisitos a ele impostos. A verificação certifica-se de que a combinação do comportamento contínuo e discreto se comportará como desejado. Propriedades como controlabilidade, observa-

bilidade, acessibilidade e estabilidade são analisadas durante o processo de verificação (KRILAVICIUS, 2006).

Há diversas especificações a que os sistemas lógicos devem satisfazer. Estas podem ser classificadas como especificações de segurança e especificações de vivacidade. As primeiras referem-se a estados alcançáveis em uma sequência finita, porém às vezes ilimitada, de eventos. As especificações de vivacidade focam o comportamento do sistema ao longo de trajetórias infinitas por tempo indeterminado. A verificação formal consiste em resolver o seguinte problema: para um determinado conjunto de condições iniciais e perturbações, deve-se garantir que todas as trajetórias possíveis nunca alcancem estados inseguros (ENGELL, 1998).

A maneira mais simples de verificar se uma especificação de segurança está sendo satisfeita é simular todas as trajetórias possíveis para o estado do sistema. Ao contrário de modelos dinâmicos contínuos, um sistema lógico permite que todas as suas trajetórias sejam avaliadas com simulações de dimensão finita. Uma vez que o sistema retorna a um estado visitado anteriormente, a simulação pode ser finalizada e outra trajetória pode ser iniciada até que todas as transições possíveis de todos os estados foram executados. Porém, este tipo de teste se torna inviável para sistemas complexos (ENGELL, 1998). Uma típica aplicação do algoritmo de verificação é a avaliação das propriedades de segurança de um sistema embarcado, ou seja, um controlador digital que opera em um sistema contínuo (TORRISI, 2003).

Embora a verificação possa ser um problema complexo para sistemas híbridos, assim como propriedades com estabilidade, controlabilidade e observabilidade, diversas ferramentas foram desenvolvidas com o objetivo de facilitar esta análise (TORRISI, 2003). No trabalho apresentado por Bemporad e Morari (1999b) é desenvolvido um algoritmo para verificação de sistemas híbridos baseado na programação linear (LP) e programação linear inteira mista (MILP). Em Torrissi (2003), a programação linear também é utilizada e os conjuntos alcançáveis são aproximados usando ferramentas de geometria computacional. Algoritmos e ferramentas para a análise de acessibilidade de sistemas híbridos combinados com os conceitos de abstração de predicado, técnica popular e eficiente de extração de modelos de estados finitos de sistemas discretos com estados complexos e potencialmente infinitos, são apresentados com uma alternativa para a verificação de sistemas híbridos (ALUR et al., 2002).

A simulação é uma ferramenta utilizada na análise e geração de modelos para um sistema. Esta classificação é feita de acordo com o objetivo que se espera ao empregá-la (KRILAVICIUS, 2006):

- **Simulação no desenvolvimento do modelo:** Enquanto se desenvolve o modelo,

a simulação é utilizada para verificar se os componentes do modelo e o modelo em si comportam-se como esperado ou ainda analisar caminhos que levam a erros e a razões destes ocorrerem. A simulação também pode ser utilizada para comparar o comportamento de um sistema real e um modelo desenvolvido para este alimentando as mesmas condições a ambos;

- **Simulação na análise de sistemas:** Ferramenta para a escolha das propriedades a serem utilizadas e para a análise de desempenho do sistema fornecendo uma boa intuição sobre a eficiência do modelo.

A complexidade e variedade comportamental dos sistemas híbridos exigem uma discussão detalhada e aprofundada desta ferramenta. Esta discussão será apresentada em uma seção a parte, posteriormente.

Após estas etapas, com modelo híbrido correto, é possível utilizar este modelo para diferentes propostas como a geração de código e a geração de um controlador (ou síntese de controlador); na primeira, o sistema híbrido é composto de um controlador digital e um processo contínuo. Objetiva-se obter um *software* para o controlador digital a partir do modelo de forma natural. Na síntese de controlador a partir da especificação de uma planta e um conjunto de propriedades desejadas do sistema, um controlador é obtido automaticamente de acordo com o objetivo pretendido (KRILAVICIUS, 2006).

Finalmente, o teste de um modelo híbrido consiste em aplicar técnicas para avaliar a qualidade e regularidade dos sistemas. O sistema em teste é alimentado com informações de entrada e a saída de dados é monitorada para verificar a sua exatidão. Modelos de sistemas híbridos contêm descrições do comportamento do sistema e, portanto, pode ser usado para a geração de testes (KRILAVICIUS, 2006). Testes baseados em modelos ajudam a garantir uma base científica para testes de sistemas, permitindo uma boa cobertura de todos os comportamentos do sistema e permitindo que os testes sejam ligados diretamente às necessidades que devem ser supridas. Mais detalhes sobre testes baseados em modelos podem ser vistos em Broy et al. (2005).

2.3 Formalismos Híbridos

O amplo interesse no estudo de sistema híbrido e suas aplicações variadas implicaram o desenvolvimento de diversos formalismo na representação destes sistemas. A classificação dos diversos formalismos adota critérios de acordo com os aspectos considerados relevantes. Branicky e Mattsson (1997) utilizam critérios baseados nas condições de fluxo e chaveamentos, considerando dois tipos de estímulos para ocorrer as mudanças de modo

de operação. A classificação é apresentada na Tabela (2.1).

Tabela 2.1: Classificação de Sistemas Híbridos segundo Branicky e Mattsson (1997).

Categoria	Explicação
Chaveamento autônomo	Condições de mudança de fluxo na fronteira da região especificada
Salto autônomo(restabelecer)	Mudanças de estados contínuos na fronteira da região especificada
Chaveamento controlado	Condições de mudança de fluxo em resposta a um comando de controle
Salto controlado	Mudanças de estados contínuos em resposta a um comando de controle

Algumas características apresentadas em Labinaz et al. (1997) são consideradas importantes para classificar cada formalismo híbrido. São elas:

- **Amostragem:** refere-se ao mecanismo de aquisição de informações do processo. A amostragem pode ser considerada contínua, na qual conhece-se todos os estados durante todo tempo, e discreta, caracterizando a pré-determinação de um período de amostragem para atualização das informações sobre os estados do processo;
- **Dinâmica contínua:** a dinâmica contínua é determinada pelo modelo linear ou não linear;
- **Determinismo da Dinâmica Contínua:** a dinâmica do sistema é caracterizada de acordo com a evolução do sistema determinada pelos estados e entradas atuais; para uma mesma entrada o sistema pode ir do estado atual para diversos estados diferentes caracterizando o sistema como não determinístico;
- **Determinismo da dinâmica discreta:** de maneira semelhante a classificação da dinâmica contínua, uma ação discreta pode levar a um único estado ou a diversos estados diferentes;
- **Ações de controle:** refere-se ao tipo de sinais de controle podem ser usados na manipulação da planta. Estes sinais podem ser contínuos, discretos ou ambos;
- **Especificações:** são classificadas da mesma maneira que as ações de controle.

Assim, de acordo com estas categorias, pode-se classificar os diversos formalismos híbridos existentes em grupos (KRILAVICIUS, 2006).

Sistemas dinâmicos são sistemas clássicos com características básicas para lidar com o fenômeno híbrido. Resultados da teoria de controle em geral são bem aplicáveis a esses sistemas. Embora apresentem seus pontos fortes, os sistemas dinâmicos possuem as desvantagens de ter o comportamento discreto simplificado ou muitas vezes negligenciado sendo de certa forma traduzido para o comportamento contínuo, além da dificuldade em trabalhar com sistemas grandes e complexos (KRILAVICIUS, 2006). Cada uma das classes pertencentes a este sistemas serão discutidas posteriormente de maneira mais detalhada devido a relevância do contexto para o desenvolvimento desta dissertação.

Autômato, álgebra de processos e sistemas de transição são derivados das teorias da ciência da computação. Possuem como características marcantes a possibilidade de especificar e analisar o comportamento discreto através de técnicas de elaboração e sua aproximação modular. Contrariamente aos sistemas dinâmicos, aqui o comportamento contínuo é por vezes negligenciado ou simplificado e muitas vezes faltam ferramentas e algoritmos para estes formalismos.

Autômato híbrido é uma das formas mais populares para modelar e analisar sistemas híbridos. Como a computação embarcada torna-se quase “onipresente” nos dias de hoje, sistemas híbridos são cada vez mais empregados em aplicações de segurança crítica, tornando assim uma das principais preocupações de confiabilidade. Para isto, o autômato híbrido tem sido uma proposta como um modelo formal para sistemas híbridos. Neste tipo de formalismo, ações discretas são descritas por transições enquanto o comportamento contínuo é descrito em localizações. Um estudo mais completo sobre o autômato híbrido pode ser visto em Henzinger (1996).

Álgebra de processos, também referida como cálculo de processos, fornece um ponto de partida para uma metodologia sistemática e uma abordagem estruturada sendo útil para sistemas grandes e complexos. É uma estrutura matemática cuja finalidade é descrever processos e a interação entre eles. O comportamento dinâmico do processo é representado por um sistema de transições definidos como uma relação de mais de um subconjunto do produto cartesiano dos estados e rótulos nos quais estes referem-se a ações. Sua estrutura é constituída por estados e esta estrutura que define a alteração destes (KRILAVICIUS, 2006).

Linguagens de simulação são um grupo específico de formalismo utilizados para modelagem e simulação de sistemas físicos. Sua presença na área industrial é marcante porém pouco utilizada em pesquisas acadêmicas. Referências podem ser encontradas no trabalho desenvolvido por Krilavicius (2006).

Nesta dissertação, os formalismos empregados para o estudo do controle de sistemas híbridos serão formalismos para sistemas dinâmicos.

2.4 Formalismos Híbridos para sistemas dinâmicos

2.4.1 Sistemas Afins por Partes

Os Sistemas Afins por Partes (*Piecewise Affine*-PWA) são uma das estruturas mais utilizadas para descrever sistemas híbridos em tempo discreto. São sistemas expressivos utilizados para modelar um grande número de processos físicos, tais como sistemas com não linearidades estáticas e pode aproximar-se da dinâmica não linear com precisão arbitrária, através da linearização em diferentes pontos de operação.

Os sistemas PWA são definidos partilhando o espaço de estado e de entrada em regiões poliédricas Ω_i (GARCIA, 2009). Cada região é associada a equações de atualização de estados como descrito em Heelme et al. (2001), ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k) + \mathbf{f}_i, \quad \text{para} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} \in \Omega_i \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_i \mathbf{u}(k) + \mathbf{g}_i \end{aligned} \quad (2.1)$$

nas quais

- $\mathbf{x}$ são estados contínuos e binários:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c(k) \\ \mathbf{x}_l(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_c(k) \in \mathbb{R}^{n_c}, \quad \mathbf{x}_l(k) \in \{0, 1\}^{n_l}, \quad n \triangleq n_c + n_l \quad (2.2)$$

- $\mathbf{u}$ são entradas contínuas e binárias:

$$\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c(k) \\ \mathbf{u}_l(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_c(k) \in \mathbb{R}^{m_c}, \quad \mathbf{u}_l(k) \in \{0, 1\}^{m_l}, \quad m \triangleq m_c + m_l \quad (2.3)$$

- $\mathbf{y}$ são saídas contínuas e binárias:

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_c(k) \\ \mathbf{y}_l(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_c(k) \in \mathbb{R}^{p_c}, \quad \mathbf{y}_l(k) \in \{0, 1\}^{p_l}, \quad p \triangleq p_c + p_l \quad (2.4)$$

Os índices c e l denotam elementos contínuos e lógicos, respectivamente. As matrizes $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{f}_i$ e $\mathbf{g}_i$ são constantes e possuem as dimensões adequadas.

Uma vantagem da utilização deste formalismo é modelar sistemas não lineares, obtendo-se uma ideia mais clara do comportamento destes. Em contra-partida, para funções não escalares nem sempre há maneiras diretas para encontrar os parâmetros necessários no mapeamento feito nos sistemas PWA. Esta desvantagem, entretanto, na prática, não parece ser um empecilho na utilização desta abordagem (KVENAAR; LEENAERTS, 1992).

2.4.2 Sistemas com Descrição por Complementaridade

A descrição de sistemas por complementaridade podem ser representados de uma forma generalizada como:

$$f(\dot{x}, x, y, u) = 0, \quad (2.5)$$

$$0 \leq \mathbf{y} \perp \mathbf{u} \geq 0 \quad (2.6)$$

nas quais $\perp$ denota a complementaridade de $\mathbf{y}$ e $\mathbf{u}$, isto é, dois vetores de comprimento igual somente são complementares se todos os pares (y_i, u_i) formados pelos componentes destes vetores estão sujeitos a condição de complementaridade ($y_i = 0 \vee u_i = 0$). O estudo dos sistemas de complementaridade pode ser motivado por um conjunto de interessantes aplicações entre elas redes elétricas com diodos, sistemas mecânicos sujeitos a restrições unilaterais ou atrito de Coulomb, sistemas de controle por chaveamento, sistemas dinâmicos com saturação, processos hidráulicos com válvulas de sentido único, entre outros. Um estudo mais detalhado é encontrado em Heelmes (1999).

Sistemas com Complementaridade Linear

Os Sistemas com Complementaridade Linear (*Linear Complementary-LC*) são sistemas que apresentam a combinação de equações diferenciais com inequações que representam condições complementares (HEELMES, 1999). A formulação geral dos sistemas LC é descrita nas Equações (2.7)-(2.9) (HEELMES et al., 2001), submetido a restrição de comple-

mentaridade apresentada na Equação (2.10):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_2 \mathbf{w}(k), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}(k) + \mathbf{D}_2 \mathbf{w}(k), \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\nu}(k) = \mathbf{E}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{E}_2 \mathbf{u}(k) + \mathbf{E}_3 \mathbf{w}(k) + \mathbf{g}_4 \quad (2.9)$$

$$0 \leq \boldsymbol{\nu}(k) \perp \mathbf{w}(k) \geq 0 \quad (2.10)$$

com $\boldsymbol{\nu}(k), \mathbf{w}(k) \in \mathbb{R}^s$. As variáveis $\boldsymbol{\nu}(k)$ e $\mathbf{w}(k)$ são chamadas de variáveis complementaridade.

Sistemas com Complementaridade Linear Expandidos

Sistemas com Complementaridade Lineares Expandidos (ELC) são definidos pelas equações:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_2 \mathbf{d}(k), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}(k) + \mathbf{D}_2 \mathbf{d}(k), \quad (2.12)$$

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{E}_2 \mathbf{u}(k) + \mathbf{E}_3 \mathbf{d}(k) \leq \mathbf{g}_4, \quad (2.13)$$

$$\sum_{i=1}^p \prod_{j \in \Phi_i} (\mathbf{g}_4 - \mathbf{E}_1 \mathbf{x}(k) - \mathbf{E}_2 \mathbf{u}(k) - \mathbf{E}_3 \mathbf{d}(k))_j = 0 \quad (2.14)$$

nas quais $\mathbf{d}(k)$ é uma variável auxiliar (KRILAVICIUS, 2006).

A formulação geral de complementaridade é desenvolvida para a modelagem de certas classes de sistemas com dinâmica contínua/discreta que aplica-se inclusive ao controle por chaveamento (van der SCHAFT; SCHUMACHER, 1998).

2.4.3 Sistemas Max-min-adição-multiplicação

Há um conjunto de sistemas cujo formação se dá através de operações de maximização, minimização, adição e multiplicação por escalares. Este sistemas são conhecidos como MMPS (*Max-min-plus-scaling*) e são definidos genericamente como (De SCHUTTER; BOOM, 2002):

$$f := x_i |\alpha| \max(f_k, f_l) |\min(f_k, f_l)| f_k + f_l |\beta| f_k, \quad (2.15)$$

Na Equação (2.15), $i \in \{1, \dots, n\}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. O espaço de estados pode ser descrito

então:

$$\mathbf{x}(k) = f_x(\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k), \boldsymbol{\nu}(k)), \quad (2.16)$$

$$\mathbf{y}(k) = f_y(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \boldsymbol{\nu}(k)), \quad (2.17)$$

nas quais $\mathbf{x}(k)$ é o vetor de estados atuais, $\mathbf{y}(k)$ é o vetor de saídas, $\mathbf{u}(k)$ é o vetor de entradas controláveis e $\boldsymbol{\nu}(k)$ é o vetor de entradas não controláveis. O operador $|$ denota a proposição lógica “OU”. Exemplos típicos de sistemas MMPS em um contexto de sistemas de eventos discretos são circuitos digitais, redes de computadores, redes, telecomunicações e instalações fabris. O formalismo MMPS apresenta ainda bons resultados quando aliado a teoria de controladores preditivos (De SCHUTTER; BOOM, 2002).

2.4.4 Sistemas Mistos Lógicos Dinâmicos

Diversos sistemas incluem elementos lógicos em sua composição e estes geralmente não são descritos de maneira satisfatória por equações contínuas. Usualmente estes elementos são representados mais adequadamente por proposições lógicas que por equações diferenciais (MIGNONE, 2002). O formalismo MLD (*Mixed Logical Dynamical*-MLD) utiliza inequações lineares para representar estas proposições lógicas na modelagem de um sistema. A estrutura de um modelo MLD é apresentada nas Equações (2.18)-(2.20).

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}(k) + \mathbf{B}_3\mathbf{z}(k), \quad (2.18)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_1\mathbf{u}(k) + \mathbf{D}_2\boldsymbol{\delta}(k) + \mathbf{D}_3\mathbf{z}(k), \quad (2.19)$$

$$\mathbf{E}_2\boldsymbol{\delta}(k) + \mathbf{E}_3\mathbf{z}(k) \leq \mathbf{E}_4\mathbf{x}(k) + \mathbf{E}_1\mathbf{u}(k) + \mathbf{E}_5 \quad (2.20)$$

Define-se:

- $\mathbf{x}$ são estados contínuos e binários:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c(k) \\ \mathbf{x}_l(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_c(k) \in \mathbb{R}^{n_c}, \quad \mathbf{x}_l(k) \in \{0, 1\}^{n_l}, \quad n \triangleq n_c + n_l \quad (2.21)$$

- $\mathbf{u}$ são entradas contínuas e binárias:

$$\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c(k) \\ \mathbf{u}_l(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_c(k) \in \mathbb{R}^{m_c}, \quad \mathbf{u}_l(k) \in \{0, 1\}^{m_l}, \quad m \triangleq m_c + m_l \quad (2.22)$$

- $\mathbf{y}$ são saídas contínuas e binárias:

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_c(k) \\ \mathbf{y}_l(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_c(k) \in \mathbb{R}^{p_c}, \quad \mathbf{y}_l(k) \in \{0, 1\}^{p_l}, \quad p \triangleq p_c + p_l \quad (2.23)$$

- $\delta \in \{0, 1\}^{r_l}$ são variáveis auxiliares binárias;
- $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{r_c}$ são variáveis auxiliares reais.

O formalismo MLD é amplamente utilizado em trabalhos acadêmicos pela sua modelagem amigável, permitindo que diversos processos diferentes sejam representados pelo formalismo. Uma simulação do fluxo de pedestres é representado pelo formalismo MLD no trabalho de Koukai e Kojima (2009) enquanto no trabalho desenvolvido por Munoz-Hernandez et al. (2005) um modelo MLD é desenvolvido para uma hidrelétrica.

2.5 Equivalência de modelos dinâmicos híbridos

A escolha do formalismo adequado para representar um sistemas com característica lógicas e contínuas baseia-se nos objetivos que se deseja alcançar com a utilização do modelo e nas características do processo a ser representado. Porém, isto não impede que um modelo criado baseado em um formalismo específico possa ser transmutado a outro formalismo de acordo com as necessidades da modelagem ou aplicação. A equivalência entre os formalismos para sistemas dinâmicos é apresentada na Figura (2.2).

Para fazer com que a equivalência entre os sistemas híbridos seja válida é necessário, em alguns casos, inserir critérios que devem ser respeitados para garantir a qualidade do modelo e transferir propriedades teóricas, como estabilidade e controlabilidade, de uma classe para outra. Todas as classes possuem suas vantagens e algumas possuem características que favorecem determinadas tarefas típicas na engenharia de controle. Esta relação pode ser vista na Tabela (2.2).

Apesar de alguns formalismos serem mais adequados a uma tarefa específica, não implica que alguns problemas específicos não possam ser resolvidos de maneira adequada e eficiente em outro formalismo (GARCIA, 2009). Alguns trabalhos desenvolvem e exploram esta equivalência de acordo com os objetivos envolvidos no estudo. Em Mukai et al. (2003) um controlador preditivo é projetado baseado na equivalência entre os sistemas PWA e MLD. Um estudo completo sobre as transformações e os critérios utilizados para que elas mantenham a qualidade da representação que fazem do sistema pode ser contemplado em (HEELMES et al., 2001).

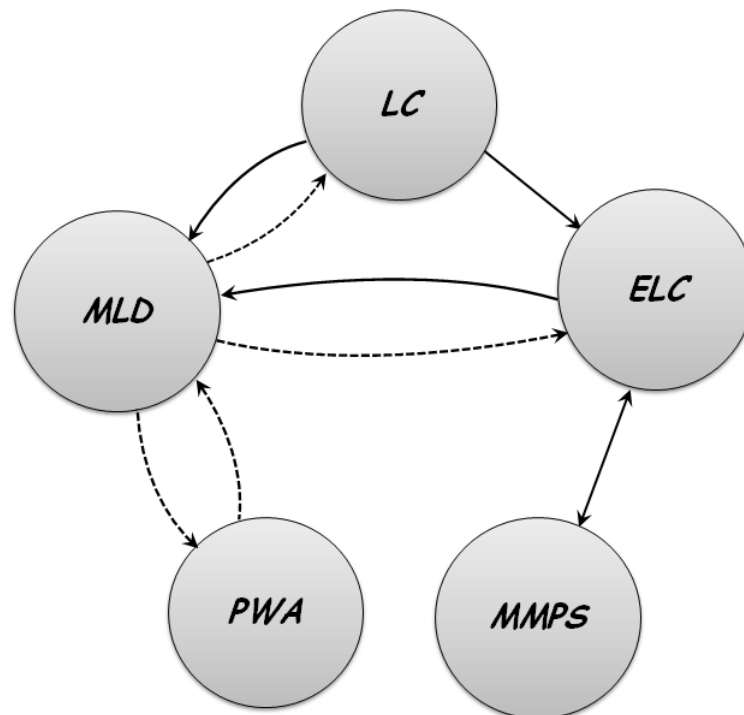


Figura 2.2: Representação gráfica da equivalência entre as classes de sistemas híbridos dinâmicos. As conexões representadas pelas linhas pontilhadas indicam a necessidade de estabelecer critérios para garantir a qualidade do modelo (adaptado de Heelme et al. (2001)).

Tabela 2.2: Modelo híbrido sugerido para cada tarefa da engenharia de controle (GARCIA, 2009).

Controle	Modelo
Controle	MLD, PWA, MMPS
Estabilidade	PWA
Verificação	PWA
Identificação	PWA
Deteção de Falhas	MLD
Estimação	MLD

2.6 Simulação de Sistemas Híbridos

A simulação é usada para analisar a resposta do sistema a entradas particulares de acordo com o cenário, auxiliando a identificar pontos fracos e erros do modelo do sistema. No caso

de sistemas híbridos, a simulação da parte contínua destes sistemas é bem estabelecida e possui ferramentas eficientes utilizadas tanto na indústria quanto em pesquisas acadêmicas (JOHANSSON et al., 2004). A simulação de sistemas discretos é uma ferramenta importante na teoria de controle e ciências da computação.

Porém, a simulação de sistemas híbridos não consiste apenas na simulação de dois tipos de comportamentos característicos destes sistemas e sim na união destes dois comportamentos de modo que permita identificar e considerar adequadamente a interação que ocorre entre eles. Para que a simulação esteja de acordo com as características requeridas aos sistemas híbridos diversas técnicas foram desenvolvidas (KRILAVICIUS, 2006):

- **Método de suavização:** o modelo híbrido é transformado em um modelo suavizado (*smooth model*) que aproxima aspectos selecionados do modelo híbrido. É um método eficaz quando se trabalha com o modelo híbrido mais facilmente.
- **Método de monitoramento de eventos:** o método consiste em uma sequência de ações que manipulam eventos iniciando um (novo) estado contínuo e determinando um (novo) modo de operação; na sequência uma simulação dinâmica em tempo contínuo é realizada dentro de um determinado modo até que um evento seja detectado. Neste momento os valores dos estados correspondentes são calculados e novos valores e modos de operação são determinados, repetindo-se o ciclo de simulação. Esta é a forma predominante na simulação de sistemas híbridos.
- **Método com discretização temporal:** um esquema de discretização é escolhido e, em seguida, o sistema híbrido é aproximado pelo método de discretização. A abordagem pode funcionar muito bem para as classes específicas de sistemas híbridos desde que o método de discretização seja cuidadosamente escolhido. Os eventos não são monitorados.

O interesse em sistemas híbridos cresceu nas últimas décadas aumentando também o desenvolvimento de ferramentas computacionais para trabalhar com este tipo de abordagem. É possível classificá-las em ferramentas de simulação e de verificação, em que neste caso simulação significa integração numérica da dinâmica do sistema híbrido e verificação objetiva demonstrar que o sistema híbrido cumpre restrições específicas de segurança. A especificidade da descrição da modelagem é de extrema importância em ambos os casos. Com as ferramentas disponíveis é possível simular a grande maioria dos sistemas híbridos porém a verificação ainda é bastante limitada (JOHANSSON et al., 2004). Algumas das principais ferramentas utilizadas são apresentadas na Tabela (2.3).

Dos *softwares* dedicados ao uso industrial, destacam-se Dymola e SCICOS. Dymola (*Dynamical Modeling Laboratory*) é um ambiente desenvolvido para utilização da lingua-

Tabela 2.3: Ferramentas computacionais para análise e modelagem de sistemas híbridos

Ferramenta	Semântica formal	Formalismo	Principal área de aplicação	Características
20-sim	Não	Gráficos de títulos	industrial	modelagem simulação
AnyLogic	Não	UML-RT e equações diferenciais algébricas	industrial	modelagem simulação
CHARON	Sim	CHARON	acadêmica	modelagem simulação
CHECKMATE	Sim	Eventos limites Sistemas híbridos dirigidos	acadêmica	modelagem verificação
EMSO	Não	equações diferenciais e algébricas	acadêmica	modelagem simulação
d/dt	Sim	Automato híbrido	protótipo	verificação
Hybrid χ	Sim	Cálculos do híbrido χ	acadêmica	modelagem simulação
HYSDEL	Parcial	PWA MLD	acadêmica	modelagem simulação controle geração
HYTECH	Sim	Automato híbrido	acadêmica	modelagem verificação
HYVISUAL	Sim	HyVisual	acadêmica	modelagem simulação
Dymola	Parcial	Modelica TM	industrial	modelagem simulação análise
SCICOS	Não	SCICOS	industrial	modelagem simulação análise
SHIFT	Sim	Redes dinâmicas de automato híbrido	acadêmico	modelagem simulação
STATEFLOW/ SIMULINK	Parcial	Máquina de estados finitos, diagramas de fluxo, gráficos de estados	acadêmico	modelagem simulação análise
XCOS	Não	XCOS	industrial	modelagem simulação análise
UPPAAL	Sim	Redes de autômatos cronometrados	acadêmico	modelagem verificação
BHAVE <i>tollset</i>	Sim	Processo de Cálculo Comportamental Híbrido	protótipo	modelagem simulação

gem de modelagem física hierárquica ModelicaTM, orientada a objetos para a modelagem de sistemas físicos para efeitos da simulação. Caracterizada como não causal e multi-

domínio, possui uma crescente coleção de bibliotecas com conectores, modelos, blocos e funções permitindo que o usuário especifique modelos casuais, definindo funções. Além do Dymola, o ModelicaTM também é compatível com a ferramenta MathModelica (CARLONI et al., 2004).

SCICOS (*Scilab Connected Object Simulator*) é um pacote para modelagem e simulação de sistemas dinâmicos do SCILAB que possui os subsistemas discretos e contínuos. Os modelos são construídos através da conexão de blocos representando funções pré-definidas pelo usuário ou pelo próprio programa em uma biblioteca própria. Mas, funções definidas pelo usuário limitam-se aos subsistemas de tempo discreto. SCICOS é usado para processamento de sinais, controle de sistemas, sistemas de enfileiramento e estudar sistemas físicos e biológicos. Novas extensões permitem geração de modelagem baseada em componentes de circuitos elétricos e hidráulicos utilizando a linguagem ModelicaTM (DJENIDI et al., 1999). Disponível em <http://www.scicos.org>. As características do SCICOS são similares aquelas do módulo XCOS, (*Hybrid dynamic systems modeler and simulator*), distribuído com o SCILAB.

Ainda especificando ferramentas de uso industrial, têm-se o 20-sim e o AnyLogic. 20-sim é um programa de modelagem e simulação que permite simular o comportamento de sistemas dinâmicos, como os sistemas elétricos, mecânicos e hidráulicos, ou qualquer combinação destes. Apoia a modelagem gráfica, permitindo projetar e analisar sistemas dinâmicos de uma forma intuitiva e amigável, utilizando como metodologia para a construção de modelos com componentes da biblioteca do próprio *software*, conectando os componentes sem necessidade de construir um modelo matemático. A ferramenta e informações sobre ela estão disponíveis em <http://www.20sim.com/>.

AnyLogic é um programa dedicado a modelagem e simulação de sistemas híbridos inclui editor de modelos gráficos e gerador de código que mapeia o modelo em código Java, UML-RT e equações algébrico-diferenciais. Um estudo sobre a aplicação desta ferramenta é apresentado em Borshev et al. (2002).

No campo de ferramentas voltadas à aplicações acadêmicas, destacam-se Hybrid χ , HYSDEL, HYTECH e STATEFLOW/SIMULINK. A linguagem χ é baseada em um conjunto de ferramentas que permite a simulação do modelo obtido para a análise do desempenho do sistema e manipulação de um comportamento excepcional. A semântica formal de χ permite uma análise funcional dos modelos. Além do Hybrid χ , outras ferramentas podem ser incorporadas a essa linguagem para analisar sistemas híbridos. Uma alternativa é apresentada em Braspenning et al. (2008) na qual a linguagem é incorporada ao UPPAAL para analisar um método desenvolvido que permite integrar modelos formais e executáveis dos componentes do sistema que são integrados para o desenvolvimento de alta tecnologia em sistemas multidisciplinares resultando na detecção precoce e prevenção de problemas

durante a integração real.

HYSDEL (*Hybrid System Description Language*) é uma linguagem de controle orientado para descrever sistemas híbridos. Os sistemas são modelados como autômatos híbridos discreto (DHA) ou sistemas MLD e transformados para os correspondentes sistemas PWA (KRILAVICIUS, 2006). A ferramenta limita-se a uma subclasse de sistemas híbridos. Além disso, HYSDEL apenas considera a dinâmica discreta. Uma visão detalhada sobre os aspectos do HYSDEL é apresentada em Torissi e Bemporad (2004). O Hysdel é parte, atualmente, do pacote para o MATLAB conhecido como Hybrid Toolbox (BEMPORAD, 2004), que permite investigar sistemas com descrição MLD e PWA.

O *software* EMSO (*Environment for Modelling, Simulation and Optimisation*) é um simulador de processos orientado por equações e compatível com CAPE-OPEN desenvolvido no Brasil pelo projeto ALSOC (Ambiente Livre para Simulação, Otimização e Controle de Processos) que é baseado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) (SOARES; SECCHI, 2003). Nesse sistema, embora não tenha sido desenvolvido com o objetivo de abordar sistemas híbridos, possui várias bibliotecas que podem ser usadas na simulação de processos em uma descrição PWA.

HYTECH é uma ferramenta automática para a análise de sistemas embarcados que calcula a condição sob a qual um sistema linear satisfaz a exigência de um híbrido temporal (KRILAVICIUS, 2006). Os sistemas híbridos são especificados como autômatos híbridos com componentes discretos e contínuos, e os requisitos temporais são verificados pela checagem simbólica do modelo e se acaso o erro ocorrer, HYTECH gera a trajetória deste erro que ilustra a sequência de eventos que levaram a ele. Um simples termostato, é usado como um exemplo de execução para demonstrar a modelagem, a aproximação, verificação de segurança, análise paramétrica e o uso da ferramenta HYTECH no trabalho desenvolvido em Hezinger et al. (1997).

Talvez as ferramentas mais conhecidas e utilizadas quando se trata de sistemas híbridos sejam STATEFLOW/SIMULINK. Podendo ser classificada como a versão comercial do anteriormente citado SCICOS. Os sistemas SIMULINK e STATEFLOW são duas ferramentas interativas que integram com o MATLAB[®], assim como o SCICOS interage com o Scilab. SIMULINK é uma ferramenta interativa para a modelagem e simulação de sistemas dinâmicos não lineares. STATEFLOW é um projeto interativo e ferramenta de desenvolvimento para controle complexos e problemas de lógica de supervisão. É baseado em uma combinação de mapas de estados, máquinas de estado finito e diagramas de fluxo. São compatíveis com sistemas lineares ou não lineares, em tempo contínuo e discreto, além de sistemas multivariáveis (CARLONI et al., 2004).

Uma visão geral sobre as ferramentas disponíveis pode ser encontrada em Carloni

et al. (2004) e Krilavicius (2006) além de trabalhos mais específicos para demonstrar a aplicação de cada ferramenta como Silva et al. (2000), Weustink et al. (1998) e Asarin et al. (2001).

2.7 Sistemas Mistos Lógico Dinâmicos: aspectos de simulação

O formalismo MLD tem como característica principal a formulação de restrições lineares para expressar proposições lógicas incluindo variáveis binárias. Este formalismo permite descrever diversos sistemas como sistemas híbridos lineares, sistemas mistos com entradas e estados contínuos e discretos, a máquina de estados finita, sistemas lineares com restrições e não lineares cujas não linearidades possa ser representada por funções lineares, entre outros (GARCIA, 2009). A priorização das restrições incorporando regras heurísticas para a formulação do modelo caracteriza esta abordagem como uma das mais adequadas para a modelagem de sistemas híbridos (MIGNONE, 2002).

2.7.1 Proposições Lógicas para o sistema MLD

Para compreender adequadamente as restrições lineares fundamentais para os sistemas MLD, faz-se necessário introduzir os conceitos básicos para que estas possam traduzir adequadamente as proposições lógicas relevantes na representação do sistema. Seguindo a notação padrão da literatura (MIGNONE, 2002), as letras maiúsculas X_i , que geralmente se referem a uma variável literal ou Booleana, serão utilizadas para representar as preposições lógicas, ou seja, a relação “ $x \geq 0$ ” ou “A temperatura é quente” seria indicada por um X_i sendo verdadeiro (V) para este caso ou falso (F), caso contrário. Da Álgebra Booleana, têm-se os operadores lógicos fundamentais apresentados na Tabela (2.4):

As proposições lógicas compostas podem ser transformadas em composições compostas equivalentes com operadores lógicos diferentes, simplificando proposições complexas. Todo o conjunto de operadores lógicos pode ser definido nos termos de um subconjunto derivado deste. Tal propriedade pode ser verificada no exemplo a seguir (BEMPORAD; MORARI, 1999a).

Exemplo:

$$X_1 \rightarrow X_2 \text{ equivale a } \overline{X_1} \vee X_2 \quad (2.24)$$

Tabela 2.4: Operadores lógicos (MIGNONE, 2002).

Operador	Significado
$\wedge$	conjunção, operador “E”
$\vee$	disjunção, operador “OU”
$\neg$ $\sim$ $\neg$	negação, operador “NÃO”
$\rightarrow$	implicação
$\leftrightarrow$	bi-implicação, se e somente se
$\oplus$	“OU” exclusivo

$$X_1 \rightarrow X_2 \text{ equivale a } \overline{X_2} \rightarrow \overline{X_1} \quad (2.25)$$

$$X_1 \leftrightarrow X_2 \text{ equivale a } (X_1 \rightarrow X_2) \wedge (X_2 \rightarrow X_1) \quad (2.26)$$

Pode-se associar uma variável binária $\delta_i \in \{0, 1\}$ a uma proposição lógica de modo que se X_i for verdadeiro, δ_i assume o valor igual a 1. Caso contrário, $\delta_i = 0$. Com essa associação, converte-se tais proposições lógicas em desigualdades inteiras envolvendo essas variáveis binárias. Esta conversão é apresentada na Tabela (2.5):

Considera-se um sistema híbrido como um problema composto de uma parte dinâmica e uma parte lógica descrita por um conjunto de proposições lógicas $X_1, X_2 \dots X_n$, que podem ser resolvidas apropriadamente por meio de programação linear inteira mista (MILP) convertendo as proposições originais em desigualdades lineares que envolvem variáveis binárias δ_i e variáveis contínuas $x \in \mathbb{R}^n$. Como o foco está em sistemas que têm sua lógica e dinâmica, deseja-se estabelecer uma ligação entre os dois mundos. Em particular, precisa-se estabelecer como construir demonstrações a partir de eventos operacionais em relação a dinâmica física (BEMPORAD; MORARI, 1999a). As proposições lógicas inteiras mistas utilizadas na construção do modelo híbrido MLD são apresentadas na Tabela (2.6). Considera-se $X \triangleq [f(x) \leq 0]$, na qual $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é linear.

Define-se

$$\begin{aligned} M &\triangleq \max_{x \in \chi} f(x) \\ m &\triangleq \min_{x \in \chi} f(x) \end{aligned} \quad (2.27)$$

O parâmetro $\epsilon > 0$ é introduzido como uma pequena tolerância cuja principal finalidade é expressar as restrições como não rígidas (*soft*), garantindo que se o problema linear for limitado exista uma solução viável maximizando/minimizando uma função objetivo.

Tabela 2.5: Conversão de relações lógicas em desigualdades inteiras (MIGNONE, 2002).

Relação	Proposição lógica	(des)igualdade mista inteira
$X_1 \wedge X_2$	$[\delta_1 = 1] \wedge [\delta_2 = 1]$	$\delta_1 = 1$ $\delta_2 = 1$
$X_3 \leftrightarrow (X_1 \wedge X_2)$	$[\delta_3 = 1] \leftrightarrow [\delta_1 = 1] \wedge [\delta_2 = 1]$	$-\delta_1 + \delta_3 \leq 0$ $-\delta_2 + \delta_3 \leq 0$ $\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 \leq 1$
$X_1 \vee X_2$	$[\delta_1 = 1] \vee [\delta_2 = 1]$	$\delta_1 + \delta_2 \geq 1$
$X_3 \leftrightarrow (X_1 \vee X_2)$	$[\delta_3 = 1] \leftrightarrow [\delta_1 = 1] \vee [\delta_2 = 1]$	$\delta_1 - \delta_3 \leq 0$ $\delta_2 - \delta_3 \leq 0$ $-\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 \leq 1$
$\overline{X_1}$	$\overline{[\delta_1 = 1]}$	$\delta_1 = 0$
$X_1 \oplus X_2$	$[\delta_1 = 1] \oplus [\delta_2 = 1]$	$\delta_1 + \delta_2 = 1$
$X_3 \leftrightarrow (X_1 \oplus X_2)$	$[\delta_3 = 1] \leftrightarrow [\delta_1 = 1] \oplus [\delta_2 = 1]$	$-\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 \leq 0$ $-\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 \leq 0$ $\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 \leq 0$ $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 2$
$X_1 \rightarrow X_2$	$[\delta_1 = 1] \rightarrow [\delta_2 = 1]$	$\delta_1 - \delta_2 \leq 1$
$X_1 \leftrightarrow X_2$	$[\delta_1 = 1] \leftrightarrow [\delta_2 = 1]$	$\delta_1 - \delta_2 = 0$

Isso permite a sua inclusão como restrição em problemas de otimização (MIGNONE, 2002). Geralmente, o valor adotado para ϵ é a precisão da máquina utilizada para a resolução do problema (BEMPORAD; MORARI, 1999a).

2.7.2 Estado estacionário de um sistema híbrido MLD

Sistemas MLD possuem propriedades características de sistemas não lineares pela presença de eventos discretos. Uma das mais marcantes está ligada ao estado estacionário do sistema MLD. Encontrar o ponto de equilíbrio para um sistema MLD pode ser uma tarefa complexa quando comparado a sistemas não lineares. Isto se deve a composição do sistema que além de apresentar as equações de evolução dos estados, é ainda composto por restrições contendo as variáveis auxiliares do processo, ambas formadas por variáveis reais e binárias (MIGNONE, 2002).

Tabela 2.6: Conversão de relações mistas lógicas contínuas em restrições mistas inteiras (MIGNONE, 2002)

Relação	Proposição lógica	Restrições mistas inteiras
$[f(x) \leq 0] \rightarrow X$	$[f(x) \leq 0] \rightarrow [\delta = 1]$	$f(x) \geq \epsilon + (m - \epsilon)\delta$
$X \rightarrow [f(x) \leq 0]$	$[\delta = 1] \rightarrow [f(x) \leq 0]$	$f(x) \leq M(1 - \delta)$
$[f(x) \leq 0] \leftrightarrow X$	$[f(x) \leq 0] \leftrightarrow [\delta = 1]$	$f(x) \leq M(1 - \delta)$ $f(x) \geq \epsilon + (m - \epsilon)\delta$
Se X Então $z = f(x)$ Senão $z = 0$	$z = \delta f(x)$	$z \leq M\delta$ $-z \leq -m\delta$ $z \leq f(x) - m(1 - \delta)$ $-z \leq -f(x) + M(1 - \delta)$

O estado estacionário de um sistemas MLD pode ser encontrado através da resolução de um problema de otimização, caracterizado como um problema de programação inteira mista. O problema a ser resolvido é apresentado na Equação (2.28).

$$\min_{\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \delta_e, \mathbf{z}_e} (\|\mathbf{y}_e - \mathbf{r}\|_{\mathbf{Q}_5} + \|\mathbf{x}_e\|_{\mathbf{Q}_4} + \|\mathbf{u}_e\|_{\mathbf{Q}_1} + \|\mathbf{z}_e\|_{\mathbf{Q}_3} + \|\delta_e\|_{\mathbf{Q}_2}) \quad (2.28)$$

sujeito a

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{A}\mathbf{x}_e + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_e + \mathbf{B}_2\delta_e + \mathbf{B}_3\mathbf{z}_e, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{y}_e = \mathbf{C}\mathbf{x}_e + \mathbf{D}_1\mathbf{u}_e + \mathbf{D}_2\delta_e + \mathbf{D}_3\mathbf{z}_e, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{E}_2\delta_e + \mathbf{E}_3\mathbf{z}_e \leq \mathbf{E}_4\mathbf{x}_e + \mathbf{E}_1\mathbf{u}_e + \mathbf{E}_5 \quad (2.31)$$

definindo-se $\mathbf{r}$ como o vetor constante dos valores de referência, $\mathbf{Q}_i$ como matrizes ponderação positivas definidas com as dimensões adequadas.

Há três dificuldades principais para o comportamento do sistema MLD em relação ao estado estacionário (MIGNONE, 2002):

Estado Estacionário Inatingível: O estado constante (x_e) obtido pode ser inatingível, ou seja, existe um estado inicial x_0 , para o qual nenhuma entrada factível de tamanho N , $[u(0), u(1), \dots, u(N)]$, existe tal que $x(N) = x_e$.

Multiplicidade de Estados Estacionários: Ainda que se utilize ponderações diferentes de zero para as variáveis do modelo MLD, as variáveis binárias podem levar a estados estacionários não únicos. Existem sistemas que encontrarão o mesmo valor para

o estado estacionário calculado com a Equação (2.28) para todos os estados estacionários dos subsistemas.

Ciclos limites: Ao procurar calcular o estado que forneça uma saída y pode existir uma solução única e alcançável, porém este ponto de equilíbrio não se aproxima da referência r observando-se que os valores de y seguem um ciclo de estados. Este ciclo é decorrente do chaveamento periódico dos componentes discretos do sistema. O sistema permanece num ciclo de estados próximo a referência nunca convergindo para um valor constante. Nestes casos, busca-se geralmente uma sequência de estados no lugar de um único estado estacionário.

Eventos discretos, como os limites de saturação, podem agir de modo a manter o estado do sistema em evolução dentro de uma região restrita. Portanto, mesmo que a dinâmica contínua seja instável, os eventos discretos pode induzir um conjunto estável. Ciclos limites são muitas vezes criados desta forma (HISKENS, 2001a).

Uma das ferramentas mais utilizadas para determinar a estabilidade de ciclos limites é o mapa de Poincaré (*Poincaré map*) que pode ser visto na Figura (2.3).

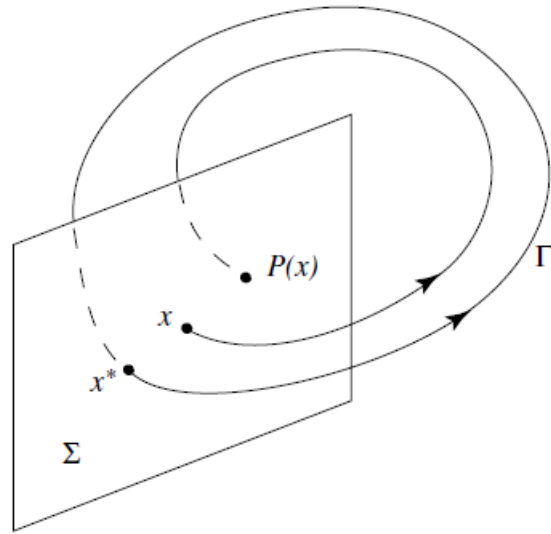


Figura 2.3: Mapa de Poincaré (HISKENS, 2001a).

O mapa de Poincaré consiste na intersecção de uma órbita periódica no espaço de estado de um sistema contínuo dinâmico com um subespaço menor com dimensões determinadas, transversal ao fluxo do sistema. O ciclo limite (Γ) possui um plano transversal a este no ponto x^* , na Figura (2.3) representado por Σ . A trajetória descrita por Γ a partir de x^* atingirá novamente Σ após T instantes. As trajetórias iniciadas em Σ nas vizinhanças de x^* retornará às vizinhanças de x^* em T segundos. Se o ciclo limite é estável, oscilações aproximam o ciclo limite ao longo do tempo. Os resultados fornecidos

correspondem a um ponto fixo no mapa de Poincaré. Um ciclo limite não estável fornece oscilações divergentes (HISKENS, 2001b).

2.8 Controle de Sistemas Híbridos

2.8.1 Introdução ao Controle de Sistemas Híbridos

As principais teorias de controle consolidadas estão relacionadas ao controle de sistemas tradicionais, representados por equações diferenciais ou equações de diferenças relacionadas a leis físicas. Porém, este mesmo sistema a ser controlado é constituído por elementos descritos pela lógica como válvulas, engrenagens ou *softwares* embarcados. Em grande parte dos estudos, o controle se baseia apenas na dinâmica contínua negligenciando a presença destes elementos e sua influência no comportamento do sistema (BEMPORAD; MORARI, 1999a).

O controle de sistemas híbridos exige respostas pertinentes com a complexidade da alternância de comportamento discreto e contínuo do sistema. Embora haja diversos estudos teóricos sobre sistemas híbridos como as múltiplas funções de Lyapunov e o Princípio de Invariância de La Salle, a aplicação da teoria na engenharia de controle de processos é limitada pela complexidade do sistema exigindo leis de controle adaptáveis de forma sistemática a alternância apresentada no comportamento do sistema (OLARU et al., 2008), diferentemente do que ocorria no passado quando as técnicas disponíveis para análise, síntese e modelagem de controladores não eram capazes de tratar conjuntamente esta dinâmica.

Natureza híbrida não é necessariamente causada por intervenção humana nos sistemas. Embora muitos exemplos provenientes de adicionar controladores digitais de processos físicos, a alternância entre regimes dinâmicos está presente naturalmente em uma variedade de sistemas. Por exemplo, modelos que descrevem a evolução de corpos rígidos em que as equações que regem o comportamento dependem se há ou não contato. A complexidade e abrangência destes sistemas leva estudiosos da teoria de controle e das ciências da computação a unificarem seus estudos para abordar os desafios que o controle de sistemas híbridos sugerem (LAZAR, 2006). Esta interação é apresentada na Figura (2.4).

Projetar um controlador para um sistema híbrido pode ser uma tarefa dispendiosa e complexa devido a esta interação entre os dois comportamentos apresentados pelo sistema (ENGELL, 1998). O projeto de um controlador consiste em três partes: (1) Síntese do controlador; (2) Verificação formal e (3) Simulação. O controlador é projetado a partir

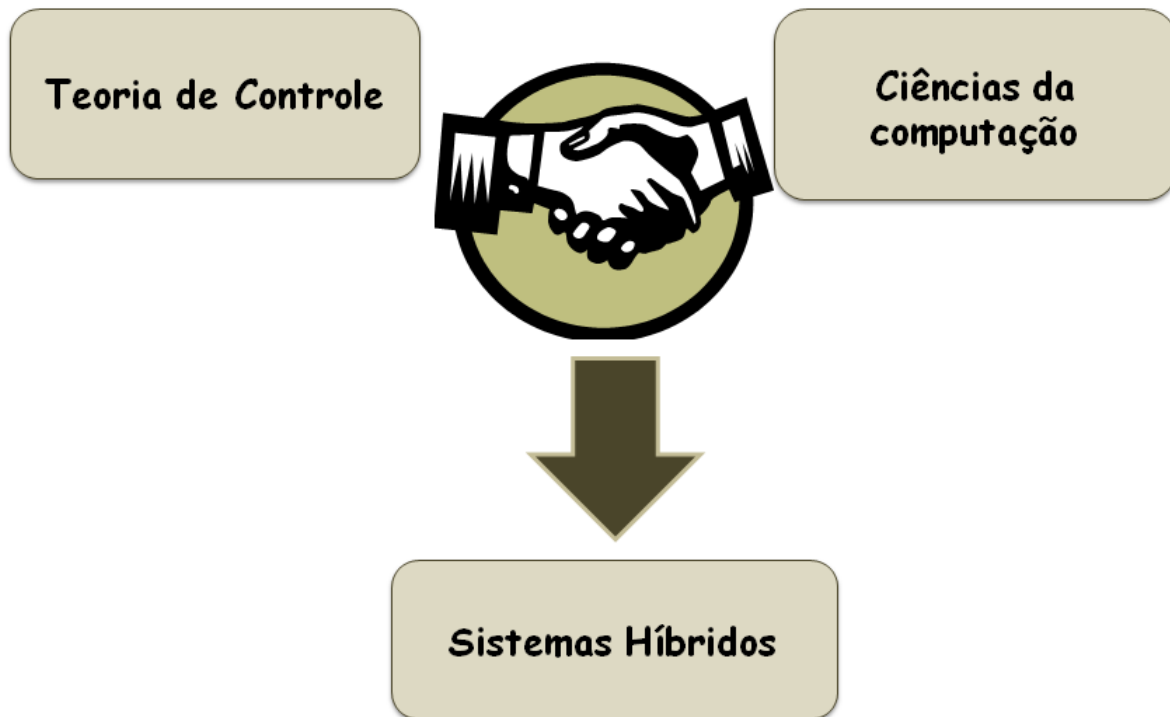


Figura 2.4: União das teorias de controle e das ciências da computação para melhor entender as características e os benefícios dos sistemas híbridos (adaptado de Lazar (2006)).

de um modelo híbrido e do comportamento deste para que, em malha fechada, o sistema apresente apenas o comportamento desejado. Na verificação formal, são construídas abstrações híbridas do sistema em malha fechada, representando-as com o formalismo adequado, utilizando mecanismos de inferência para verificar se o sistema é satisfatório; se algum comportamento indesejado é apresentado. Esta verificação aliada a simulação são os requisitos mínimos para a síntese de controladores (HEZINGER; SASTRY, 1998).

O interesse no controle de sistemas híbridos foi motivado em parte pela evolução dos resultados da investigação no controle de sistemas de eventos discretos que ocorreu na década de 80 e de controle adaptativo nas décadas de 70 e 80. Além disso, o interesse em novas formulações para o controle ótimo e o controle digital impulsionaram os estudos do controle de sistemas híbridos (ANTSAKLIS; KOUTSOUKOS, 2001) na última década (Souza Junior; OLIVEIRA-LOPES, 2009). Para estes sistemas, o desenvolvimento de controladores levou a metodologias hierárquicas que utilizam controladores contínuos nos níveis inferiores de controle de cada subsistema dinâmico e adotam esquemas supervisórios para

resolver os conflitos lógicos e gerar as referências futuras. Porém, esta distinção entre as partes contínuas e lógicas do modelo ocasiona queda no desempenho do controlador quando se trata de sistemas híbridos (MOREIRA et al., 2004).

2.8.2 Controle Ótimo

Controle ótimo é o método padrão para resolver problemas de otimização dinâmica, quando esses problemas são expressos em tempo contínuo. A essência da metodologia empregada no desenvolvimento do controle ótimo consiste na escolha de um caminho adequado (ótimo) de modo a alcançar os objetivos do problema de controle através da otimização.

As técnicas de cálculo e controle em geral relacionam-se com a maneira como escolher um valor ideal para uma variável e não o melhor caminho para os objetivos do problema. A estratégia para resolver este tipo de problema é transformá-lo e exige que só encontremos um número único (ou alguns números). Isso é algo que se sabe como fazer com os cálculos comuns. Existem várias maneiras de fazer essa transformação. A teoria de controle ótimo é a abordagem mais simples e mais geral.

Este cálculo é feito através da minimização de uma função custo que determina o caminho a ser seguido e assim a ação do controle para que o sistema alcance este caminho. Dado um sistema representado por

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k)\end{aligned}\tag{2.32}$$

sujeito a

$$\mathbf{E}\mathbf{x}(k) + \mathbf{L}\mathbf{u}(k) \leq \mathbf{M}\tag{2.33}$$

nas quais $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{u}(k)$ e $\mathbf{y}(k)$ são estados, entradas e saídas no instante k , respectivamente. A função custo para este problema pode ser definida como:

$$J(U_N, \mathbf{x}(0)) \triangleq \|\mathbf{P}\mathbf{x}_N\|_p + \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{Q}\mathbf{x}_k\|_p + \|\mathbf{R}\mathbf{u}_k\|_p\tag{2.34}$$

$\mathbf{x}_k$ é o vetor de estados predito no instante k obtido a partir de um dado instante inicial ($\mathbf{x}(0)$). Este será aplicado ao sistema juntamente com uma sequência de entradas $\mathbf{u}_0 \dots \mathbf{u}_{k-1}$. O problema é resolvido através da minimização desta função custo sujeita às

restrições representadas pelas Equações (2.32) e (2.33). Portanto, o problema de Controle Ótimo consiste em encontrar a entrada adequada para o que sistema que percorra a trajetória ótima de forma que a função custo seja minimizada (LEWIS; SYRMOS, 1995).

A associação deste tipo de controle a sistemas híbridos é favorecida principalmente pela metodologia de predição que o controle aborda. Como o comportamento híbrido difere de sistemas unicamente contínuos, basear-se em um possível comportamento do sistema para concluir a melhor ação de controle levando a um caminho ótimo para este é uma das vantagens deste tipo de controle e posiciona-o como um dos mais estudados para o controle de sistemas híbridos (BORELLI, 2003).

Alguns trabalhos ilustram a aplicação do Controle Ótimo para sistemas híbridos. Em Hedlund e Rantzer (1999), o Controle Ótimo é desenvolvido através de ideias oriundas da programação dinâmica e otimização convexa utilizando restrições de Bellman que resultam em um limite inferior para a função custo ótima. O problema formulado é aplicado a alguns exemplos e uma aproximação de um controle *feedback* ótimo é apresentada.

2.8.3 Controle Preditivo Baseado em Modelo

Como observados nas seções anteriores, uma grande quantidade de processos pode ser modelado através do conceito de sistemas híbridos. Portanto, é de grande interesse tanto do ponto de vista teórico quanto prático manter o sistema estabilizado em um estado de equilíbrio ou poder rastrear uma trajetória de referência desejada. Embora esta não seja uma tarefa fácil quando se trata de controlar um sistema tão complexo, o Controle Preditivo segue esta metodologia buscando, através do modelo da planta, prever a evolução futura do sistema e baseado nesta predição o controlador pode agir selecionando a sequência de comandos de entrada que melhor se adequa ao sistema (BEMPORAD; MORARI, 1999a).

O Controle Preditivo Baseado em Modelo (*Model Predictive Control*-MPC) possui características peculiares que o caracteriza como um dos controladores mais promissores para lidar com sistemas híbridos. São elas (MALACALZA, 2004):

- Adaptação satisfatória para sistemas multivariáveis, trabalhando com acoplamento ou interação significativa de variáveis ;
- Desempenho adequado ao trabalhar com sistemas que apresentam perturbações mensuráveis ou não;
- Controle de sistemas lineares e não lineares;
- Controle de sistemas que apresentam características complexas como instabilidade

da malha aberta e fase não mínima;

- Utilização de diferentes tipos de modelos;
- Habilidade ao lidar com diferentes tipos de restrições;
- Otimização do desempenho, utilizando uma função objetivo que pondera o erro das variáveis sob controle e o esforço de controle, possibilitando o desenvolvimento de estratégia de controle para sistemas com multiobjetivos.

Uma das razões para as grandes realizações envolvendo o controlador MPC consiste na forma intuitiva de se abordar o problema de controle. Este utiliza um modelo para estimar o comportamento futuro do sistema diferente de controladores convencionais que utilizam estados pré-computados ou saídas para determinar suas ações de controle (LAZAR, 2006). O comportamento deste tipo de controlador pode ser complexo devido ao fato da ação do controlador estar diretamente ligada à resolução do problema de otimização. Porém, a teoria de controle é uma ferramenta bastante útil neste caso e pode contornar tal situação. Entre as vantagens do MPC, pode-se citar o melhor desempenho de controle quando comparado com os demais, menos tempo requerido, menor exigências de manutenção, flexibilidade e agilidade (NIKOLAU, 2001). A dinâmica do procedimento de implementação do controle preditivo é apresentada na Figura (2.5).

Em cada k instante, as variáveis medidas e o modelo do processo (linear, não linear ou híbridos) são utilizados para (prever) o cálculo do comportamento futuro da planta controlada ao longo de um horizonte de tempo especificado, que é geralmente chamada de horizonte de predição. Isto é conseguido considerando um cenário futuro desejado, tal como o controle da sequência de entrada aplicada para o modelo de processo, que deve ser calculado de tal forma que certas restrições desejadas e objetivos sejam cumpridos. Para isso, uma função de custo sujeita a restrições é minimizada, gerando uma sequência ótima de controle sobre um horizonte de tempo especificado, que é normalmente chamado horizonte de controle. Segundo a estratégia de horizonte de controle móvel, apenas o primeiro elemento da sequência ótima de controle computadorizada é então aplicada a planta e esta sequência de passos é repetida no próximo instante de tempo discreto com a informação da planta atualizada (NIKOLAU, 2001).

O problema de otimização a ser resolvido pelo Controlador Preditivo é definido como (Di CAIRANO, 2008)

$$\min_{\mathbf{u}_0^{H_p-1}} J(x, u, t) \quad (2.35)$$

sujeito as restrições definidas pelo problema.

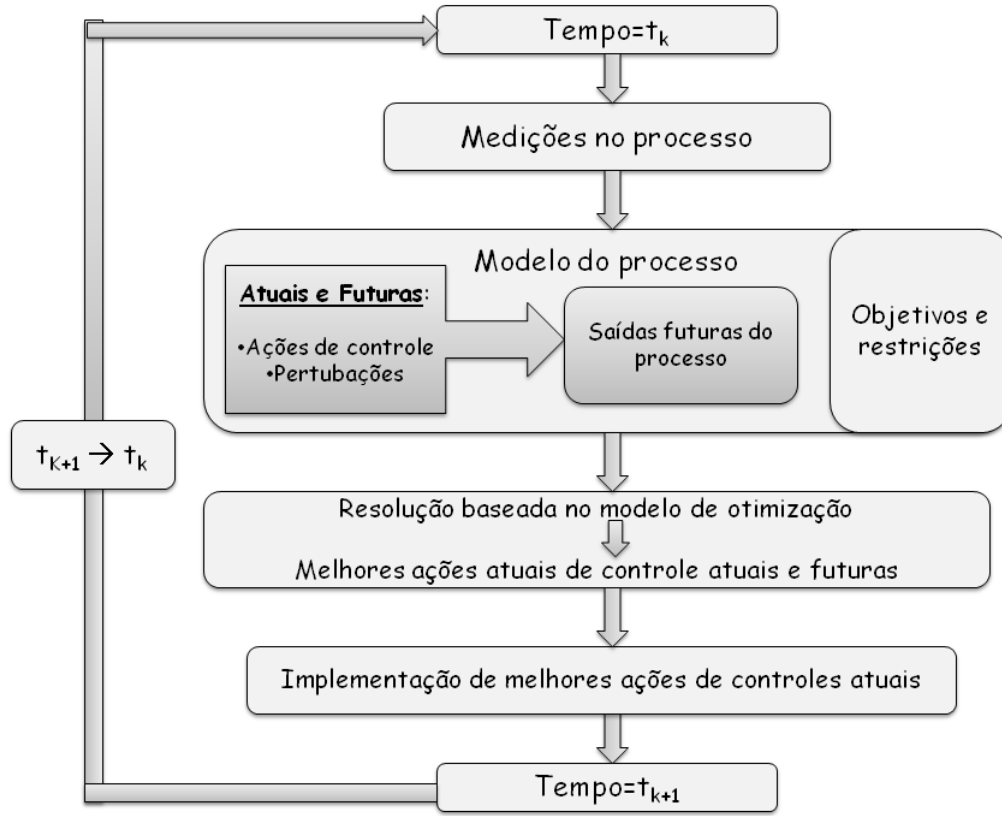


Figura 2.5: Esquema representativo do Controle Preditivo Baseado em Modelo (NIKOLAU, 2001).

A função custo J de um sistema penaliza os desvios das saídas controladas previstas no instante k definidas como $y(k+h|k)$ em relação a uma referência $r(k+h|k)$ que podem tanto ser um *setpoint* fixo, uma trajetória pré-definida ou ainda uma referência que dependa de valores medidos no instante k . Para um modelo de espaços de estados dado na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_y\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (2.36)$$

nas quais $x(k)$ são os estados, $y(k)$ as variáveis de saída medidas e $u(k)$ as entradas, todos definidos em cada instante k . A função custo J pode ser definida como (MACIEJOWSKI, 2000)

$$J(k) = \sum_{h=H_w}^{H_p} \|\hat{y}(k+h|k) - r(k+h|k)\|_{\mathbf{Q}_i}^p + \sum_{h=0}^{H_u-1} \|\Delta\hat{u}(k+h|k)\|_{\mathbf{R}_i}^p \quad (2.37)$$

sujeito a

$$\mathbf{x}(k+h|k) = f(\mathbf{x}(h|k), \mathbf{u}(h|k)) \quad h = 1 \dots H_p - 1 \quad (2.38)$$

$$\mathbf{y}(h|k) = h(\mathbf{x}(h|k), \mathbf{u}(h|k)) \quad h = 1 \dots H_p - 1 \quad (2.39)$$

$$g(\mathbf{x}(h|k), \mathbf{u}(h|k), \mathbf{y}(h|k)) \leq 0 \quad h = 1 \dots H_p - 1 \quad (2.40)$$

$$g_{H_p}(\mathbf{x}(H_p|k)) \leq 0 \quad (2.41)$$

Nestas equações, H_p representa o horizonte de predição, H_u é definido como horizonte de controle e H_w define a partir de qual instante as saídas serão penalizadas.

A formulação do MPC dependerá da norma escolhida para desenvolver o controle. Utilizando a norma l_1 , desenvolve-se um problema de Programação Linear (*Linear Programming*-LP). Problemas LP caracterizam-se por um menor esforço computacional para a sua resolução e a solução deste problema é encontrada sempre na interseção das restrições a que ele é submetido. Isto indica que esta formulação é mais robusta em relação a função custo e possui comportamento mais sensível quando comparada com outras formulações (CAETANO; OLIVEIRA-LOPES, 2010). Entretanto, essa formulação possui maiores dificuldades de provas matemáticas devido a características da função custo.

Um problema de Programação Quadrática (*Quadratic Programming*-QP) é um problema de controle cuja função custo é definida pela norma l_2 . Esta formulação é caracterizada por obter soluções ótimas fora das restrições (Figura 2.6), comporta-se de maneira linear quando as restrições são inativas e tende a manter o processo dentro de uma região viável próxima a solução ótima encontrada. Esta maior flexibilidade quando comparada ao LP resulta em vantagens que possibilita em mais aplicações desta formulação, principalmente pra sistemas com interesse industrial (MACIEJOWSKI, 2000).

O desenvolvimento do Controle Preditivo para sistemas híbridos utilizando as normas l_1 e l_2 necessárias ao desenvolvimento desta dissertação será proposto nesse trabalho e apresentado no Capítulo 3.

Alguns trabalhos exploram a união do formalismo híbrido com a teoria do Controle Preditivo, ilustrando adequadamente seu desempenho. Uma cadeia de suprimentos (*supply chain*), cujo objetivo é transformar ideias e matérias-primas em produtos entregues e serviços, é apresentada no trabalho de Bemporad et al. (2005) como um sistema de dinâmica heterogênea contínua (níveis de estoques, os fluxos de materiais etc) e dinâmica discreta (gráficos de conexão, precedências, prioridades etc). Um controlador MPC é projetado a fim de maximizar um determinado benefício ou minimizar alguns custos; o trabalho apresenta uma visão geral de autômato híbrido discreto, o desenvolvimento do Controle Preditivo baseado em modelo e técnicas de computação padrão.

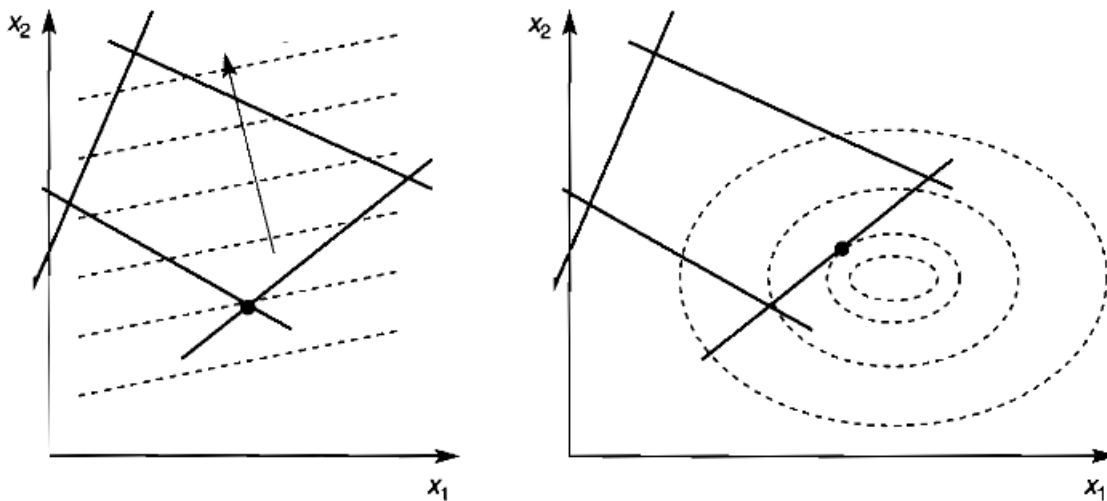


Figura 2.6: Limites da função custo e restrições dos problemas QP(direita) e LP(esquerda). A solução ótima de cada problemas é marcada pelo ponto (MACIEJOWSKI, 2000).

Uma desvantagem apresentada pelo Controlador Preditivo pode ser a dinâmica de cálculo lenta principalmente para sistemas mais complexos. No trabalho desenvolvido por Wang e Boyd (2008) são descritos métodos para melhorar a velocidade do MPC, usando a otimização *online* que explora a estrutura particular do problema de MPC, possibilitando calcular a ação de controle da ordem de 100 vezes mais rápido do que um método que usa um otimizador genérico.

Uma aplicação para o Controlador Preditivo Baseado em Modelo pode também ser desenvolvida a partir da norma l_1 , apresentando as características do controlador e o impacto que este tipo de controlador terá no controle de sistemas híbridos (Souza Junior; OLIVEIRA-LOPES, 2009).

Um estudo propõe e discute uma abordagem de Controle Preditivo Baseado em Modelo para sistemas híbridos, apenas com entradas digitais. O modelo utilizado no algoritmo baseado em uma análise de acessibilidade de seu desempenho está formulado na estrutura MLD. O comportamento do sistema híbrido é resumido pelo algoritmo através de uma árvore de evolução na qual os nós, com uma função custo associada a cada um deles, representam estados alcançáveis e os ramos que os conectam, as transições correspondentes entre eles. A exploração desta árvore é conduzida através do valor de cada função custo. Os resultados deste estudo podem ser vistos em (POTOCNIK et al., 2005).

Estudo completo sobre características e projetos de Controladores Preditivos são encontrados em (MACIEJOWSKI, 2000).

CAPÍTULO 3

Controle Preditivo Baseado em Modelo MLD



Neste capítulo desenvolve-se o Controle Preditivo baseado em Modelo para sistema segundo a formulação MLD. A função custo para uma norma genérica l_p é apresentada e a partir desta desenvolve-se os problemas de controle. Tais problemas são classificados como problema de Programação Linear Inteira Mista (*Mixed Integer Linear Programming-MILP*) (para $p = 1$ ou $p = \infty$) e Programação Quadrática Inteira Mista (*Mixed Integer Quadratic Programming-MIQP*) (para $p = 2$). Nesse trabalho, as normas $p = 1$ e $p = 2$ serão usadas para formular os controladores l_1 -MPC e l_2 -MPC, respectivamente.

3.1 Sistemas expressos no formalismo MLD

O formalismo MLD caracteriza-se pelo amplo campo de aplicações que este aborda. Alguns sistemas possuem características que favorecem a expressão destes como a não linearidade que possa ser expressa por uma combinação lógica, sistemas com sequências lógicas (máquina de estados finitos) ou ainda outros formalismos híbridos lineares.

Os sistemas com dinâmica linear por partes podem apresentar sua descrição através de modos de operação de acordo com a região em que este sistema situa-se. Estes sistemas são caracterizados como sistemas de comportamento regional. Como definido em SCHÖLLIG (2007), o domínio de espaço de estados χ é dividido em um número finito de sub regiões,



Figura 3.1: Sistemas expressos pelo formalismo MLD.

tal que $D_i \subseteq \chi$ sendo $i \in \mathbb{N}$, como representado na Figura (3.2).

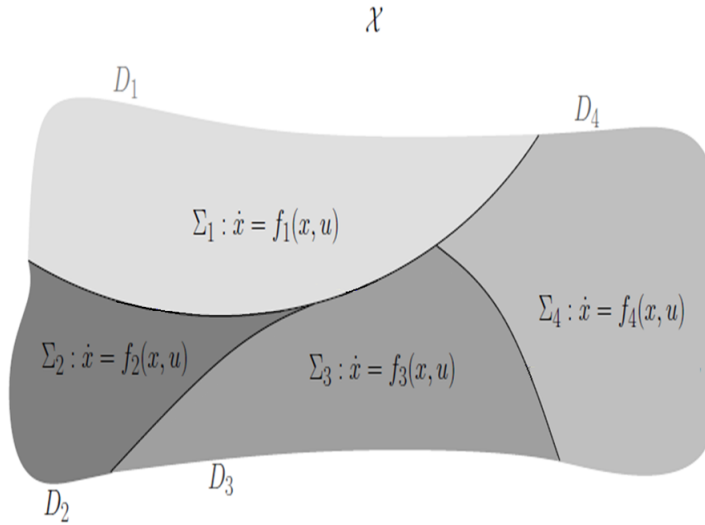


Figura 3.2: Sistemas com comportamento dinâmico regional (adaptado de SCHÖLLIG (2007)).

Este tipo de sistema é representado pela seguinte formulação:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(k), & \text{se } \delta_1(k) = 1, \\ \vdots \\ \mathbf{A}_s \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_s \mathbf{u}(k), & \text{se } \delta_s(k) = 1, \end{cases} \quad (3.1)$$

na qual $i = 1, \dots, s$ e $\delta_i(k) \in 0, 1$ são variáveis binárias que definem a sub região em

que o conjunto de estados e entradas atuais, $\mathbf{x}(k)$ e $\mathbf{u}(k)$, se localizam e obrigatoriamente satisfazem a seguinte condição lógica:

$$\bigoplus_{i=1}^s [\delta_i(t) = 1]. \quad (3.2)$$

O sistema apresentado na Equação (3.1) é considerado completamente bem posto se o domínio χ for particionado em s partes D_i tal que

$$D_i \cap D_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j \quad (3.3)$$

$$\bigcup_{i=1}^s D_i = \chi \quad (3.4)$$

Inserindo as variáveis auxiliares δ no modelo, uma maneira generalizada de apresentar o modelo da Equação (3.1) é:

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=1}^s [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k)] \delta_i(k) \quad (3.5)$$

Porém, o modelo apresentado desta maneira é um modelo não linear caracterizado pelo produto entre variáveis lógicas e contínuas. Assim, para definir o modelo no formalismo MLD é necessário a introdução de variáveis contínuas $z_i(k)$ tal que $z_i(k) \equiv [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k)] \delta_i(k)$. Com esta definição para a variável z_i , a Equação (3.5) é torna-se então:

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=1}^s z_i(k) \quad (3.6)$$

Alguns casos permitem que processos sejam modelados como sistemas lineares em cascata com saídas definidas por funções não lineares da forma $y = h(x)$. Para a aproximação através do formalismo MLD, são introduzidas variáveis auxiliares $\delta_i(k)$ mantendo a saída em uma faixa de valores definida pela função de saturação (Equação 3.7). Dado o seguinte sistema:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(k), \quad (3.7)$$

$$\mathbf{y}(k) = \text{sat}(\mathbf{C}\mathbf{x}(k)) \quad (3.8)$$

em que

$$\text{sat}(y) = \begin{cases} -1 & \text{se } y \leq -1 \\ y & \text{se } -1 \geq y \geq 1 \\ 1 & \text{se } y \geq 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

Neste caso, introduz-se variáveis lógicas δ_i tal que:

$$[\mathbf{C}\mathbf{x} > 1] \rightarrow [\delta_2 = 1] \quad (3.10)$$

$$[\mathbf{C}\mathbf{x} < -1] \rightarrow [\delta_1 = 1] \quad (3.11)$$

$$[\mathbf{C}\mathbf{x} < 1] \rightarrow [\delta_2 = 0] \quad (3.12)$$

$$[\mathbf{C}\mathbf{x} > -1] \rightarrow [\delta_1 = 0] \quad (3.13)$$

Sistemas com saídas qualitativas caracterizam-se por associar termos qualitativos a variável inteira y . Sistemas que, por exemplo, relacionam-se com temperaturas podem retornar classificações como *muito quente*, *quente*, *normal*, *frio* e *muito frio* de acordo com a faixa de temperatura do sistema. Assim, em um sistema definido como:

$$x(k+1) = ax(k) + bu(k) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{Y}(k) = \begin{cases} \text{MUITO FRIO} & \text{se } x(k) \leq 5^\circ\text{C} \\ \text{FRIO} & \text{se } 5^\circ\text{C} \leq x(k) \leq 15^\circ\text{C} \\ \text{NORMAL} & \text{se } 15^\circ\text{C} \leq x(k) \leq 35^\circ\text{C} \\ \text{QUENTE} & \text{se } 35^\circ\text{C} \leq x(k) \leq 60^\circ\text{C} \\ \text{MUITO QUENTE} & \text{se } 60^\circ\text{C} \leq x(k) \end{cases} \quad (3.15)$$

Inserindo as variáveis auxiliares $\delta_i(k)$ para cada região:

$$[\delta_1 = 1] \leftrightarrow [x(k) \leq 5^\circ\text{C}] \quad (3.16)$$

$$[\delta_2 = 1] \leftrightarrow [x(k) \leq 15^\circ\text{C}] \quad (3.17)$$

$$[\delta_3 = 1] \leftrightarrow [x(k) \leq 35^\circ\text{C}] \quad (3.18)$$

$$[\delta_4 = 1] \leftrightarrow [x(k) \leq 60^\circ\text{C}] \quad (3.19)$$

Sistemas representados por máquinas de estados finitos ou automato finito é uma modelagem de um comportamento, composto por estados, transições e ações. Um exemplo típico e importante de sistemas que podem ser modelado neste quadro são sistemas de tempo real que possuem controladores digitais embarcados. Considerando o sistema apresentado pela Figura (3.3) e descrito pelas seguintes relações (BEMPORAD; MORARI, 1999a):

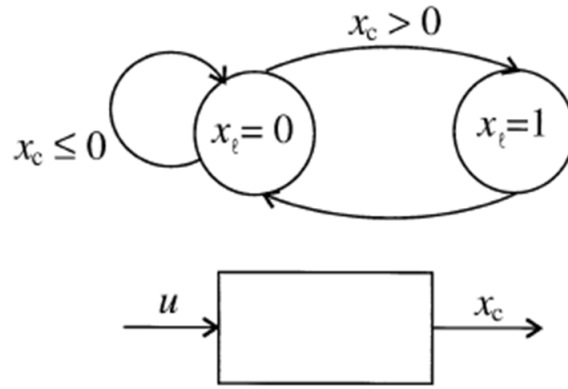


Figura 3.3: Autômato impulsionado pelas condições subjacentes em um sistema dinâmico (BEMPORAD; MORARI, 1999a).

$$[x_l(k) = 0] \wedge [x_c \leq 0] \rightarrow [x_l(k+1) = 0], \quad (3.20)$$

$$[x_l(k) = 0] \wedge [x_c > 0] \rightarrow [x_l(k+1) = 1], \quad (3.21)$$

$$[x_l(k) = 1] \rightarrow [x_l(k+1) = 0] \quad (3.22)$$

Com a introdução das variáveis binárias, têm-se:

$$[\delta_1(k) = 1] \leftrightarrow [x_c(k) \leq 0], \quad (3.23)$$

$$[\delta_2(k) = 1] \leftrightarrow [x_l(k) \leq 0] \wedge [\delta_1(k) = 0], \quad (3.24)$$

As restrições a que o problema deve ser submetido de acordo com as ações para a transcrição para o formalismo MLD são apresentadas na Tabela (2.6).

3.2 Formulação de l_p -MPC para um sistema MLD

Neste trabalho, o modelo discreto híbrido é estudado de acordo com o formalismo MLD que pode ser escrito de forma conveniente para representar o comportamento em qualquer instante de amostragem quando estabelecidos os horizontes de controle e de predição:

$$\mathbf{x}_{k+1+h|_k} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+h|_k} + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_{k+h|_k} + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}_{k+h|_k} + \mathbf{B}_3\mathbf{z}_{k+h|_k} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{y}_{k+h|_k} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{k+h|_k} + \mathbf{D}_1\mathbf{u}_{k+h|_k} + \mathbf{D}_2\boldsymbol{\delta}_{k+h|_k} + \mathbf{D}_3\mathbf{z}_{k+h|_k} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{E}_2\boldsymbol{\delta}_{k+h|_k} + \mathbf{E}_3\mathbf{z}_{k+h|_k} \leq \mathbf{E}_4\mathbf{x}_{k+h|_k} + \mathbf{E}_1\mathbf{u}_{k+h|_k} + \mathbf{E}_5 \quad (3.27)$$

em que $\mathbf{x}_{k+1+h|_k}$ representa o estado calculado em um instante de amostragem qualquer a partir das predições feitas em um incremento de tempo h . Nos desenvolvimentos desse capítulo para a formulação do l_p -MPC baseado em uma descrição MLD, adota-se por simplicidade a dimensão de horizonte de predição idêntica àquela do horizonte de controle ($H_p = H_c$) e igual a N . Com isso são realizadas predições do comportamento do processo em cada instante de amostragem k dentro do horizonte de predição. De igual forma, adota-se por simplificação (sem perda de generalidade) que a função custo penaliza desvios desde o instante inicial da trajetória ($H_w = 1$).

O l_p -MPC baseado em descrição MLD para o sistema possui função custo definida por:

$$\min \sum_{h=0}^{N-1} \|\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_{ss}\|_{\mathbf{Q}_1}^p + \|\mathbf{\Delta}_k - \mathbf{\Delta}_{ss}\|_{\mathbf{Q}_2}^p + \|\mathbf{Z}_k - \mathbf{Z}_{ss}\|_{\mathbf{Q}_3}^p + \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{ss}\|_{\mathbf{Q}_4}^p + \|\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{ss}\|_{\mathbf{Q}_5}^p \quad (3.28)$$

em que $\mathbf{Q}_i$ para $i = 1, \dots, 5$ são matrizes de ponderação simétricas positivas definidas para as variáveis $\mathbf{u}$, $\mathbf{\delta}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, respectivamente. Os valores de referência para cada variável, neste caso, são os valores do estado estacionário representado pelo índice ss . O vetor $\mathbf{U}_k^N$ contém as N ações de controle futuras em malha aberta para um dado instante k . $\mathbf{u}_{k+h}|_k$ é o vetor de entrada no tempo k e no horizonte h na função objetivo em malha aberta.

$$\mathbf{U}_k^N = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k|_k \\ \mathbf{u}_{k+1}|_k \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+N-1}|_k \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Para as demais variáveis o raciocínio é análogo, porém deve-se enfatizar que os valores dos estados calculados são previsões, portanto definidos com o deslocamento de 1 intervalo de tempo em relação a $\mathbf{u}$ (sistema estritamente próprio). Assim, $\mathbf{X}_k^N$ contém as N previsões para os estados do sistema nos próximos instantes pois o valor no instante atual é conhecido e utilizado no cálculo de $\mathbf{u}_{k+h}|_k$. Define-se, então

$$\mathbf{X}_k^N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1}|_k \\ \mathbf{x}_{k+2}|_k \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{k+N}|_k \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Desenvolve-se cada termo do somatório apresentado na Equação (3.28) para se chegar à formulação desejada para o controlador. Para efeito de simplificação, o termo $|_k$ é omitido das expressões desenvolvidas.

3.3 Controle Preditivo Linear

O desenvolvimento do problema de controle com o Controle Preditivo baseado na norma l_1 , substituindo $p = 1$ na Equação (3.28), resulta em um problema de programação linear com variáveis inteiras binárias e variáveis contínuas (MILP). Utilizando-se da definição da norma l_1 têm-se:

$$\sum_{h=0}^{N-1} \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{ss}\|_{\mathbf{Q}_1} = \sum_{h=0}^{N-1} \mathbf{Q}_1 |\mathbf{u}_{k+h} - \mathbf{u}_{ss}| \quad (3.31)$$

Neste caso, $\mathbf{Q}_1$ é uma matriz quadrada de dimensão equivalente àquela do vetor $\mathbf{u}_{k+h}$. Para propósitos de ilustração, definem-se as formulações com um horizonte de predição $N = 3$ e pode-se desenvolver o somatório apresentado na Equação (3.31). Têm-se então,

$$\sum_{h=0}^2 \mathbf{Q}_1 |\mathbf{u}_{k+h} - \mathbf{u}_{ss}| = \mathbf{Q}_1 (|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{ss}| + |\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_{ss}| + |\mathbf{u}_{k+2} - \mathbf{u}_{ss}|) \quad (3.32)$$

Como $\mathbf{Q}_1$ é uma matriz simétrica positiva definida, pode-se aplicar a propriedade distributiva da multiplicação sem alterar o valor absoluto da função. Define-se assim, $\mathbf{Q}_1 |\mathbf{u}_{k+h} - \mathbf{u}_{ss}| = |\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{k+h} - \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss}|$. A definição do valor absoluto de uma função real é dada por

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

Aplicando esta definição a $|\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_k - \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss}|$ para cada valor de h , e utilizando-se do fato de que o problema na forma $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}\|_1 = \min_{\mathbf{x}} \sum_j |\mathbf{c}_j^T \mathbf{x} + \mathbf{d}_j|$, ($\mathbf{c}_j^T$ é a j -ésima linha de $\mathbf{C}$), sujeito a $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ pode ser escrito na forma de um problema LP equivalente dado por $\min_{\boldsymbol{\mu}_j, \mathbf{x}} \sum_j \boldsymbol{\mu}_j$, sujeito a $\boldsymbol{\mu}_j \geq \mathbf{c}_j^T \mathbf{x} + \mathbf{d}_j \wedge \boldsymbol{\mu}_j \geq -\mathbf{c}_j^T \mathbf{x} - \mathbf{d}_j \wedge \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$. Assim, para o caso em desenvolvimento, têm-se:

$$|\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_k - \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss}| = \begin{cases} -\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_k + \gamma_{u_k} \geq -\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \\ \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_k + \gamma_{u_k} \geq \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \end{cases} \quad (3.34)$$

$$|\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss}| = \begin{cases} -\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{k+1} + \gamma_{u_{k+1}} \geq -\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \\ \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{k+1} + \gamma_{u_{k+1}} \geq \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \end{cases} \quad (3.35)$$

$$|\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{k+2} - \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss}| = \begin{cases} -\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{k+2} + \gamma_{u_{k+2}} \geq -\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \\ \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{k+2} + \gamma_{u_{k+2}} \geq \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \end{cases} \quad (3.36)$$

Define-se $\gamma_{u_{k+h}}$ como um vetor de variáveis auxiliares para cada um dos componentes do vetor $\mathbf{u}_{k+h}$. Estas variáveis auxiliares são utilizadas para garantir que a solução encontrada esteja adequada às restrições feitas ao problema. Desenvolvendo o controlador para $N = 3$, chega-se a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{I}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{u_k} \\ \gamma_{u_{k+1}} \\ \gamma_{u_{k+2}} \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{u}_{k+2} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \\ -\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \\ -\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \\ \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \\ \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \\ \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Define-se, na Equação (3.37), $\mathbf{I}_u$ como uma matriz identidade e $\mathbf{0}$ como uma matriz nula com dimensões consistentes com $\mathbf{Q}_1$.

Generalizando o problema para um valor N qualquer:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_u & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_u & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{Q}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{I}_u & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_u & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{u_k} \\ \gamma_{u_{k+1}} \\ \vdots \\ \gamma_{u_{k+N-1}} \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+N-1} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \\ -\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \\ \vdots \\ -\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \\ \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \\ \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Organizando da mesma maneira as matrizes para as demais variáveis define-se as restrições a que o problema é submetido. Assim, o problema de controle tem como

objetivo minimizar a função custo sintetizada como:

$$J(u_0^{N-1}, x_0) = \sum_{h=0}^{N-1} \left(\sum_i \gamma_{u_{k+h}}^i + \sum_i \gamma_{\delta_{k+h}}^i + \sum_i \gamma_{z_{k+h}}^i + \sum_i \gamma_{x_{k+h}}^i + \sum_i \gamma_{y_{k+h}}^i \right) \quad (3.39)$$

na qual o índice i indica a i -ésima entrada do respectivo vetor.

Este problema está sujeito às seguintes restrições:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{C}_1 \\ \mathbf{I} & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -\mathbf{d} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

A matriz $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade com dimensões consistentes com a matriz $\mathbf{C}_1$. As demais matrizes presentes na Equação (3.40) são definidas por:

$$\boldsymbol{\theta} = \left[\{\mathbf{U}_k^N\}^T \quad \{\Delta_k^N\}^T \quad \{\mathbf{Z}_k^N\}^T \quad \{\mathbf{X}_k^N\}^T \quad \{\mathbf{Y}_k^N\}^T \right]^T \quad (3.41)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \left[\boldsymbol{\Gamma}_u^T \quad \boldsymbol{\Gamma}_\delta^T \quad \boldsymbol{\Gamma}_z^T \quad \boldsymbol{\Gamma}_x^T \quad \boldsymbol{\Gamma}_y^T \right]^T \quad (3.42)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_u = \begin{bmatrix} \gamma_{u_k} & \cdots & \gamma_{u_{k+N-1}} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_\delta = \begin{bmatrix} \gamma_{\delta_k} & \cdots & \gamma_{\delta_{k+N-1}} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_z = \begin{bmatrix} \gamma_{z_k} & \cdots & \gamma_{z_{k+N-1}} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_x = \begin{bmatrix} \gamma_{x_{k+1}} & \cdots & \gamma_{x_{k+N}} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_y = \begin{bmatrix} \gamma_{y_k} & \cdots & \gamma_{y_{k+N-1}} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{d} = \left[\{\mathbf{Q}_1 \mathbf{U}_{ss}\}^T \quad \{\mathbf{Q}_2 \mathbf{\Delta}_{ss}\}^T \quad \{\mathbf{Q}_3 \mathbf{Z}_{ss}\}^T \quad \{\mathbf{Q}_4 \mathbf{X}_{ss}\}^T \quad \{\mathbf{Q}_5 \mathbf{Y}_{ss}\}^T \right]^T \quad (3.48)$$

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{U}_{ss} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} & \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} & \dots & \mathbf{Q}_1 \mathbf{u}_{ss} \end{bmatrix}}_{\text{N vezes}} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{Q}_2 \mathbf{\Delta}_{ss} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2 \boldsymbol{\delta}_{ss} & \mathbf{Q}_2 \boldsymbol{\delta}_{ss} & \dots & \mathbf{Q}_2 \boldsymbol{\delta}_{ss} \end{bmatrix}}_{\text{N vezes}} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{Q}_3 \mathbf{Z}_{ss} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_3 \mathbf{z}_{ss} & \mathbf{Q}_3 \mathbf{z}_{ss} & \dots & \mathbf{Q}_3 \mathbf{z}_{ss} \end{bmatrix}}_{\text{N vezes}} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{Q}_4 \mathbf{X}_{ss} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_4 \mathbf{x}_{ss} & \mathbf{Q}_4 \mathbf{x}_{ss} & \dots & \mathbf{Q}_4 \mathbf{x}_{ss} \end{bmatrix}}_{\text{N vezes}} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{Q}_5 \mathbf{Y}_{ss} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_5 \mathbf{y}_{ss} & \mathbf{Q}_5 \mathbf{y}_{ss} & \dots & \mathbf{Q}_5 \mathbf{y}_{ss} \end{bmatrix}}_{\text{N vezes}} \quad (3.53)$$

nas quais $\mathbf{X}_k^N$ é definido pela Equação (3.30), $\mathbf{U}_k^N$ pela Equação (3.29) e as variáveis $\mathbf{\Delta}_k^N$, $\mathbf{Z}_k^N$ e $\mathbf{Y}_k^N$ de maneira análoga a $\mathbf{U}_k^N$.

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix}
\mathbf{Q}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \mathbf{Q}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{Q}_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{Q}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{Q}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Q}_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_5 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{Q}_5 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{Q}_5 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_5
\end{bmatrix}
\tag{3.54}$$

Além das restrições aqui definidas, o problema de controle é ainda submetido às restrições de igualdade e inequações que compõem o formalismo MLD apresentadas nas Equações (3.25)-(3.27) para cada um dos valores encontrados pela solução do problema. O desenvolvimento desta restrições pode ser visto no Apêndice A.

Um estudo detalhado das propriedades de estabilidade e robustez dos controladores propostos está fora do escopo desse trabalho. Além disso, existem muitos aspectos importantes na implementação do controle preditivo baseado em programação linear que já foram suficientemente abordados na literatura (BORELLI, 2003), dois aspectos importantes são: *idle control* e a existência de múltiplas soluções ótimas para o controlador. O primeiro corresponde ao caso em que um movimento de controle é persistentemente nulo, o segundo ao caso de degeneração do problema de programação linear associado.

A formulação do l_1 -MPC baseado em modelos MLD possui características “herdadas” do l_1 -MPC clássico. Esses aspectos não serão investigados nesse trabalho, e estudo dessas características podem ser encontradas em Borelli (2003) e nos trabalhos relacionados por aquele autor.

3.4 Controle Preditivo Quadrático

O problema de controle, definido como um problema de Programação Quadrática Inteira Mista (MIQP), adota a função custo substituindo $p = 2$ na equação da função custo generalizada:

$$\min \sum_{h=0}^{N-1} \|\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_{ss}\|_{\mathbf{Q}_1}^2 + \|\Delta_k - \Delta_{ss}\|_{\mathbf{Q}_2}^2 + \|\mathbf{Z}_k - \mathbf{Z}_{ss}\|_{\mathbf{Q}_3}^2 + \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{ss}\|_{\mathbf{Q}_4}^2 + \|\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{ss}\|_{\mathbf{Q}_5}^2 \quad (3.55)$$

Para o desenvolvimento do Controle Preditivo, retoma-se as definições já apresentadas para o sistema MLD e os vetores que o compõem. A partir da definição da norma quadrática de um vetor, têm-se:

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{N-1} \|\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_{ss}\|_{\mathbf{Q}_1}^2 &= \sum_{h=0}^{N-1} (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_{ss})^T \mathbf{Q}_1 (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_{ss}) \\ &= \sum_{h=0}^{N-1} (\mathbf{U}_k^T - \mathbf{U}_{ss}^T) \mathbf{Q}_1 (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_{ss}) \\ &= \sum_{h=0}^{N-1} \{ \mathbf{U}_k^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{U}_k - \mathbf{U}_k^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{U}_{ss} - \mathbf{U}_{ss}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{U}_k + \mathbf{U}_{ss}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{U}_{ss} \} \end{aligned} \quad (3.56)$$

O fato de cada parcela da Equação (3.56) ser um termo escalar permite a aplicação da propriedade de matrizes $(\mathbf{ABC})^T = (\mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T) = (\mathbf{ABC})$. Então,

$$\mathbf{U}_{ss}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{U}_k = \mathbf{U}_k^T \mathbf{Q}_1^T \mathbf{U}_{ss} \quad (3.57)$$

A matriz para ponderação das entradas é definida como uma matriz simétrica quadrada de dimensões consistentes com o comprimento do vetor de variáveis a que ela corresponde, neste caso $\mathbf{u}_k$, permitindo a afirmativa $\mathbf{Q}_1^T = \mathbf{Q}_1$. Fazendo tais considerações,

a Equação (3.56) torna-se:

$$\sum_{h=0}^{N-1} \|\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_{ss}\|_{\mathbf{Q}_1}^2 = \sum_{h=0}^{N-1} \{\mathbf{U}_k^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{U}_k - 2\mathbf{U}_{ss}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{U}_k + \mathbf{U}_{ss}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{U}_{ss}\} \quad (3.58)$$

O último termo da Equação (3.58) é um termo constante para qualquer instante k . Sendo assim, este pode ser negligenciado na resolução do problema do Controle Preditivo pois não interfere na solução para encontrar o ponto ótimo do sistema; sua influência consiste apenas no fato de ser considerado no cálculo do valor da função objetivo.

Fazendo $N = 3$ desenvolve-se a Equação (3.58):

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^2 \|\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_{ss}\|_{\mathbf{Q}_1}^2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^T & \mathbf{u}_{k+1}^T & \mathbf{u}_{k+2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{u}_{k+2} \end{bmatrix} + \\ &- 2 \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{ss}^T & \mathbf{u}_{ss}^T & \mathbf{u}_{ss}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{u}_{k+2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Analogamente ao procedimento realizado para o Controle Preditivo na norma l_1 , faz-se a generalização do controle para N qualquer:

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{N-1} \|\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_{ss}\|_{\mathbf{Q}_1}^2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^T & \mathbf{u}_{k+1}^T & \dots & \mathbf{u}_{k+N-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+N-1} \end{bmatrix} + \\ &- 2 \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{ss}^T & \mathbf{u}_{ss}^T & \dots & \mathbf{u}_{ss}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+N-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.60)$$

O procedimento é semelhante para as demais variáveis. Define-se então $X = \theta$, na qual θ é apresentada na Equação (3.41). Assim, têm-se o seguinte problema de controle:

$$\min J(u_0^{N-1}, x_0) = \sum_{h=0}^{N-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} + f \mathbf{X} \quad (3.61)$$

sujeito a restrições do tipo

$$\mathbf{A} \mathbf{X} \leq \mathbf{b} \quad (3.62)$$

Pelo desenvolvimento da Equação (3.58) para um valor de N qualquer, através da comparação com o resultado a função custo encontrada na Equação (3.61), obtêm-se $f = -2\mathbf{X}_{ss}^T \mathbf{Q}$; a matriz ponderação $\mathbf{Q}$ e o vetor de valores de referência para o estado estacionário são definidos como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}
\mathbf{Q}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \mathbf{Q}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{Q}_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{Q}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{Q}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Q}_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_5 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{Q}_5 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{Q}_5 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_5
\end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{X}_{ss} = \left[\underbrace{\mathbf{u}_{ss}^T \dots \mathbf{u}_{ss}^T}_{N \text{ vezes}} \underbrace{\boldsymbol{\delta}_{ss}^T \dots \boldsymbol{\delta}_{ss}^T}_{N \text{ vezes}} \underbrace{\mathbf{z}_{ss}^T \dots \mathbf{z}_{ss}^T}_{N \text{ vezes}} \underbrace{\mathbf{x}_{ss}^T \dots \mathbf{x}_{ss}^T}_{N \text{ vezes}} \underbrace{\mathbf{y}_{ss}^T \dots \mathbf{y}_{ss}^T}_{N \text{ vezes}} \right]^T \quad (3.64)$$

De maneira similar ao problema MILP, as restrições a que o problema de controle desenvolvido baseado na norma l_2 , MIQP, estão representadas de maneira generalizada no conjunto de Equações (3.62) provenientes da própria formulação do sistema na forma MLD e o desenvolvimento destas pode ser encontrado no Apêndice A.

Ambas formulações desenvolvidas neste capítulo de maneira genérica são aplicadas no controle dos sistemas estudados no Capítulo 4 com o objetivo de analisar o desempe-

nho deste tipo de controle para sistemas híbridos além de estabelecer um paralelo entre o desempenho dos Controles Preditivos Linear e Quadrático para processos com essas características.

CAPÍTULO 4

Resultados e Discussões



Este capítulo utiliza as estruturas teóricas apresentadas nos Capítulos 2 e 3 para a simulação e controle de sistemas híbridos. A verificação formal e alcançabilidade para os sistemas híbridos não serão investigadas. Análise de alcançabilidade (*reachability analysis* ou análise de segurança) tem como objetivo avaliar e detectar se o modelo híbrido levará eventualmente para alguma condição inicial viável a uma condição de insegurança. As descrições híbridas mais usuais para esse estudo são autômatas temporais e híbridos. Novamente, esse nível de detalhamento não é objetivo da estrutura de estudos implementada nesse trabalho. Para a ilustração das técnicas investigadas e dos controladores preditivos propostos, estudam-se dois sistemas. O primeiro exemplo utiliza um sistema de três tanques interligados cuja função do controle é manter o nível dos tanques no valor desejado. O sistema possui válvulas com manipulação contínua e outras liga/desliga. Na análise realizada implementa-se o estudo de simulação do sistema em malha aberta e em malha fechada.

A investigação do comportamento dos controladores preditivos é realizada para vários cenários, para ambos controladores, o l_1 -MPC e o l_2 -MPC. No estudo do primeiro sistema, duas situações foram abordadas, a primeira apresenta um problema com maior número de graus de liberdade que o estritamente necessário (*fat control problem description*), na segunda, um problema de controle na formulação quadrática é investigado. Assim, no primeiro caso utilizam-se todas as entradas manipuláveis como variáveis do problema de controle e no segundo caso, a escolha de apenas duas variáveis manipuladas. Um

controlador PI (**P**roportional-**I**ntegral) acoplado a um sistema de controle liga/desliga é simulado para o sistema com o objetivo de se obter um parâmetro para comparação entre o desempenho deste com o Controle Preditivo para sistemas híbridos que se aproxime do razoável. No segundo exemplo, utiliza-se a abordagem híbrida para o controle regional de um sistema não linear, nesse caso trata-se de um reator contínuo do tipo CSTR que é alimentado com um reagente A , no interior do qual ocorre uma reação exotérmica que resulta na produção da substância B . Os perfis de temperatura dentro do reator bem como a concentração de A são descritos por um modelo não linear que posteriormente é utilizado no desenvolvimento de um modelo híbrido (descrições PWA e MLD). O desenvolvimento dos cenários de controle utilizando o controlador MPC é semelhante ao procedimento apresentado para o primeiro exemplo tendo como objetivo controlar a concentração do reagente no reator.

4.1 Estudo de caso 1: Sistema de Três Tanques

Este exemplo apresenta três tanques em série ligados através de válvulas. A cada instante, estas válvulas podem estar abertas ou fechadas possibilitando a passagem de fluido de um tanque para o outro. Duas vazões de alimentação nos tanques laterais são inseridas e os níveis de cada tanque são calculados através de um modelo não linear de conservação de massa. Desenvolve-se o modelo MLD para o sistema, efetua-se a simulação do processo (que pode ser utilizado na avaliação não formal de segurança) e posteriormente utiliza-se o modelo MLD desenvolvido no controle MPC implementado em ambiente de simulação com diversos cenários.

4.1.1 Descrição do Sistema

Um sistema de três tanques é um sistema de bancada alimentado por duas bombas idênticas e independentes através dos tanques 1 e 2. As vazões das bombas são q_1 e q_2 que podem ser manipuladas atingindo vazões até um valor máximo, denominado q_{max} . Os tanques são interconectados através de válvulas V_1 , V_2 , V_{13} e V_{23} do tipo abre/fecha que podem estar totalmente abertas ou totalmente fechadas assim como as válvulas de saída de cada tanque V_{L1} , V_{L2} e V_{N3} . O sistema está representado na Figura (4.1).

O comportamento do sistema é descrito através da lei da conservação de massa para os três tanques. Não há reação química e troca de energia no processo. O modelo proposto é representado pelas seguintes equações diferenciais:

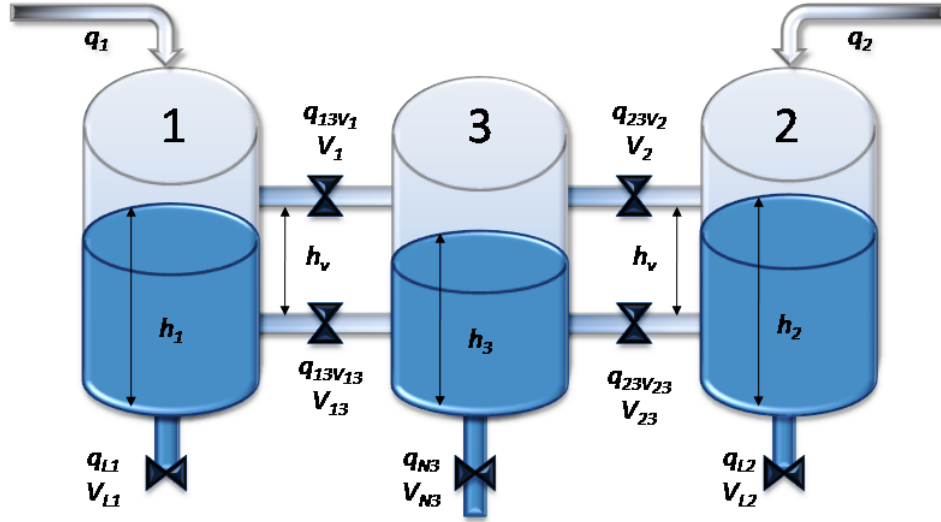


Figura 4.1: Sistema de três tanques interconectados (adaptado de Mignone (2002)).

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_t}(q_1 - q_{13V1} - q_{13V13} - q_{L1}) \quad (4.1)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_t}(q_2 - q_{23V2} - q_{23V23} - q_{L2}) \quad (4.2)$$

$$\frac{dh_3}{dt} = \frac{1}{A_t}(q_{13V1} + q_{13V13} + q_{23V2} + q_{23V23} - q_{N3}) \quad (4.3)$$

Aplicando-se a equação de Torricelli para descrever o comportamento das vazões:

$$q_{i3Vi} = V_i a_z S_i \text{sign}(\max\{h_v, h_1\} - \max\{h_v, h_3\}) \sqrt{|2g(\max\{h_v, h_1\} - \max\{h_v, h_3\})|}, \quad (i=1,2) \quad (4.4)$$

$$q_{i3Vi3} = V_{i3} a_z S_{i3} \text{sign}(h_i - h_3) \sqrt{|2g(h_i - h_3)|}, \quad (i=1,2) \quad (4.5)$$

$$q_{L1} = V_{L1} a_z S_{L1} \sqrt{|2gh_1|} \quad (4.6)$$

$$q_{L2} = V_{L2} a_z S_{L2} \sqrt{|2gh_2|} \quad (4.7)$$

$$q_{N3} = V_{N3} a_z S_{N3} \sqrt{|2gh_3|} \quad (4.8)$$

nas quais A_t a área da seção transversal de cada tanque e cada vazão é definida como: q_{i3Vi} , para $i = (1, 2)$, representam as respectivas vazões entre os tanques i e 3 através da válvula Vi ; q_{i3Vi3} , para $i = (1, 2)$, representam as respectivas vazões entre os tanques i e 3 através da válvula $Vi3$; q_{L1} , q_{L2} e q_{N3} são as vazões de saída para os tanques 1, 2 e 3, respectivamente. Os parâmetros do modelo são apresentados na Tabela (4.1).

O sistema possui limitações físicas dadas por restrições conforme,

$$0 \leq h_i \leq h_{max}, \quad (i=1,2,3) \quad (4.9)$$

$$0 \leq q_i \leq q_{max}, \quad (i=1,2) \quad (4.10)$$

Tabela 4.1: Parâmetros do modelo para os sistema de três tanques.

Símbolo	Descrição	Valor
A_t	Área da seção transversal dos tanques	$0,0154 \text{ m}^2$
a_z	Termo de correção da vazão	1 m
S_h	Área da seção transversal da válvula V_h	$2 \times 10^{-5} \text{ m}^2$
g	Aceleração da gravidade	$9,81 \text{ m/s}^2$
h_v	Altura entre as válvulas V_1 e V_2	$0,3 \text{ m}$
h_{max}	Altura máxima do nível em cada tanque	$0,62 \text{ m}$
q_{max}	Vazão máxima de entrada na bomba i ($i=1,2$)	100 mL/s
T_s	tempo de amostragem	10 s

4.1.2 Abordagem MLD para o sistema de três tanques

O desenvolvimento do modelo MLD (*Mixed Logical Dynamical*) para os sistema de três tanques (Figura (4.1)) expressa restrições lineares do processo nas quais elementos lógicos binários estão presentes. Para desenvolver esse modelo, foram feitas as seguintes considerações (MIGNONE, 2002):

- Linearização das restrições não lineares.
- Introdução de variáveis binárias indicadoras de nível, denotando quando o nível alcança um patamar maior que a altura entre as válvulas.
- Denotação da posição das válvulas como entradas binárias (V_i).

- Eliminação do produto entre variáveis binárias e contínuas.
- Formulação do sistema na forma discreta.

Para expressar o modelo na formulação MLD pelas Equações (2.18)-(2.20), aproximam-se as não linearidades por funções lineares considerando os termos $V_i, V_{i3}, V_{L1}, V_{L2}$ e V_{N3} representam a posição (aberta/fechada) de cada uma das válvulas do sistema. Tais aproximações são apresentadas nas equações que se seguem:

$$q_{i3V_i} \approx k_i V_i (\max(h_v, h_i) - \max(h_v, h_3)), \quad (i=1,2) \quad (4.11)$$

$$k_i \equiv a_z S_i \sqrt{\frac{2g}{h_{max} - h_v}}, \quad (i=1,2) \quad (4.12)$$

$$q_{i3V_{i3}} \approx k_{i3} V_{i3} (h_i - h_3), \quad (i=1,2) \quad (4.13)$$

$$k_{i3} \equiv a_z S_{i3} \sqrt{\frac{2g}{h_{max}}}, \quad (i=1,2) \quad (4.14)$$

$$q_{L1} \approx k_{L1} V_{L1} h_1 \quad (4.15)$$

$$k_{L1} \equiv a_z S_{L1} \sqrt{\frac{2g}{h_{max}}} \quad (4.16)$$

$$q_{L2} \approx k_{L2} V_{L2} h_2 \quad (4.17)$$

$$k_{L2} \equiv a_z S_{L2} \sqrt{\frac{2g}{h_{max}}} \quad (4.18)$$

$$q_{N3} \approx k_{N3} V_{L2} h_3 \quad (4.19)$$

$$k_{N3} \equiv a_z S_{N3} \sqrt{\frac{2g}{h_{max}}} \quad (4.20)$$

Define-se $z_{i3} \approx V_{i3}(h_i - h_3)$, ($i = 1, 2$) como variáveis auxiliares contínuas com o objetivo de eliminar o produto entre variáveis contínuas e discretas do modelo. Além disso, variáveis auxiliares binárias que relacionam os níveis de líquido no interior dos tanques com a altura das válvulas V_1 e V_2 são também utilizadas com o objetivo de determinar a existência de vazão nas tubulações superiores. Esta definição é apresentada na Equação (4.21).

$$[\delta_i(t) = 1] \leftrightarrow [h_i(t) \leq h_v] \quad i=1,2,3. \quad (4.21)$$

Outras variáveis auxiliares são necessárias para relacionar os níveis de líquido dos tanques com o patamar que se encontram as válvulas superiores V_i e eliminar o produto entre variáveis discretas e contínuas, simultaneamente. Isto pode ser verificado na

definição apresentada na equação que se segue.

$$z_{0i} \equiv \max\{h_v, h_i\} - h_v = \delta_i(h_i - h_v), \quad i=1,2,3.. \quad (4.22)$$

$$z_i \equiv V_i(z_{0i} - z_{03}) \quad (4.23)$$

Discretizando-se o modelo contínuo apresentado nas Equações (4.1)-(4.3) através da substituição de $\frac{dh_i(t)}{dt}$ pela diferença $\frac{h_i(t+1)-h_i(t)}{T_s}$, em que T_s é o tempo de amostragem, e substituindo-se as variáveis auxiliares nas Equações (4.11)-(4.20), chega-se a

$$h_1(k+1) = h_1(k) + \frac{T_s}{A_t}(q_1(k) - k_1 z_1(k) - k_{13} z_{13}(k) - k_{L1} z_{L1}(k)), \quad (4.24)$$

$$h_2(k+1) = h_2(k) + \frac{T_s}{A_t}(q_2(k) - k_2 z_2(k) - k_{23} z_{23}(k) - k_{L2} z_{L2}(k)), \quad (4.25)$$

$$h_3(k+1) = h_3(k) + \frac{T_s}{A_t}(k_1 z_1(k) + k_2 z_2(k) + k_{13} z_{13}(k) + k_{23} z_{23}(k) - k_{N3} z_{N3}(k)), \quad (4.26)$$

Se,

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} h_1(k) & h_2(k) & h_3(k) \end{bmatrix}^T$$

e,

$$\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} q_1(k) & q_2(k) & V_{13}(k) & V_{23}(k) & V_1(k) & V_2(k) & V_{L1}(k) & V_{L2}(k) & V_{N3}(k), \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} h_1(k) & h_3(k) \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{\delta}(k) = \begin{bmatrix} \delta_1(k) & \delta_2(k) & \delta_3(k) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} z_{13}(k) & z_{23}(k) & z_{01}(k) & z_{02}(k) & z_{03}(k) & z_1(k) & z_2(k) & z_{L1}(k) & z_{L2}(k) & z_{N3}(k) \end{bmatrix}^T$$

Então, pode-se escrever o modelo MLD, ou seja,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}(k) + \mathbf{B}_3\mathbf{z}(k), \quad (4.27)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_1\mathbf{u}(k) + \mathbf{D}_2\boldsymbol{\delta}(k) + \mathbf{D}_3\mathbf{z}(k), \quad (4.28)$$

$$\mathbf{E}_2\boldsymbol{\delta}(k) + \mathbf{E}_3\mathbf{z}(k) \leq \mathbf{E}_4\mathbf{x}(k) + \mathbf{E}_1\mathbf{u}(k) + \mathbf{E}_5 \quad (4.29)$$

Em que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{T_S}{A_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_S}{A_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} \frac{-k_{13}T_S}{A_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-k_1T_S}{A_t} & 0 & \frac{-k_{L1}T_S}{A_t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-k_{23}T_S}{A_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-k_2T_S}{A_t} & 0 & \frac{-k_{L2}T_S}{A_t} & 0 \\ \frac{k_{13}T_S}{A_t} & \frac{k_{23}T_S}{A_t} & 0 & 0 & 0 & \frac{k_1T_S}{A_t} & \frac{k_2T_S}{A_t} & 0 & 0 & \frac{-k_{N3}T_S}{A_t} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Para concisão dessa descrição, as matrizes $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_4$ e $\mathbf{E}_5$ da formulação das inequações para as variáveis auxiliares não são apresentadas. O Apêndice B mostra como as mesmas são construídas.

4.1.3 Simulações do Modelo

Para iniciar o estudo do modelo proposto e posteriormente desenvolver um controle apropriado para tal, desenvolveu-se primeiramente um algoritmo de simulação para avaliar o comportamento do modelo. O algoritmo para a simulação do modelo MLD é apresentado na Figura (4.2).

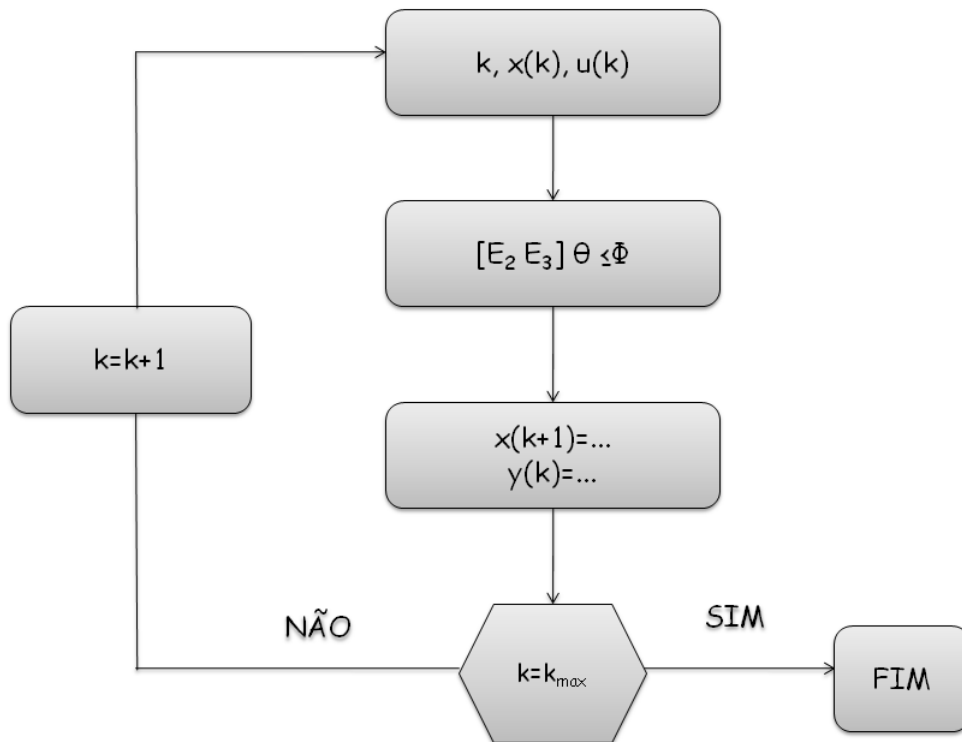


Figura 4.2: Algoritmo de simulação para sistemas híbridos.

A simulação do modelo MLD foi realizada em ambiente *Scilab* (*software* disponível em <http://www.scilab.org>). O problema de viabilidade foi escrito como um problema de

programação MILP e implementado com otimizador de código aberto (`lp_solve()`), disponível em <http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/index.htm>). O código `lp_solve()` implementa o algoritmo *Branch-and-Bound* para o problema de otimização MILP. Detalhes do algoritmo podem ser encontrados no Apêndice D.

Para a simulação, dois cenários são selecionados. No primeiro, determina-se o estado inicial $x(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ que terá sua evolução baseada nas mudanças do sistema. Para caracterizar o comportamento híbrido, as válvulas que ligam os três tanques são abertas e fechadas em momentos determinados no decorrer da simulação. As válvulas de saída dos tanques 1 e 2 (V_{L1} e V_{L2}) são mantidas fechadas durante toda a simulação enquanto a válvula de saída do tanque 3, V_{N3} , é mantida aberta. As vazões são constantes durante toda a simulação sendo mantidas em $q_1 = 10 \text{ mL/s}$ e $q_2 = 0 \text{ mL/s}$. As posições de abertura das válvulas que ligam um tanque ao outro encontram-se na Figura (4.3).

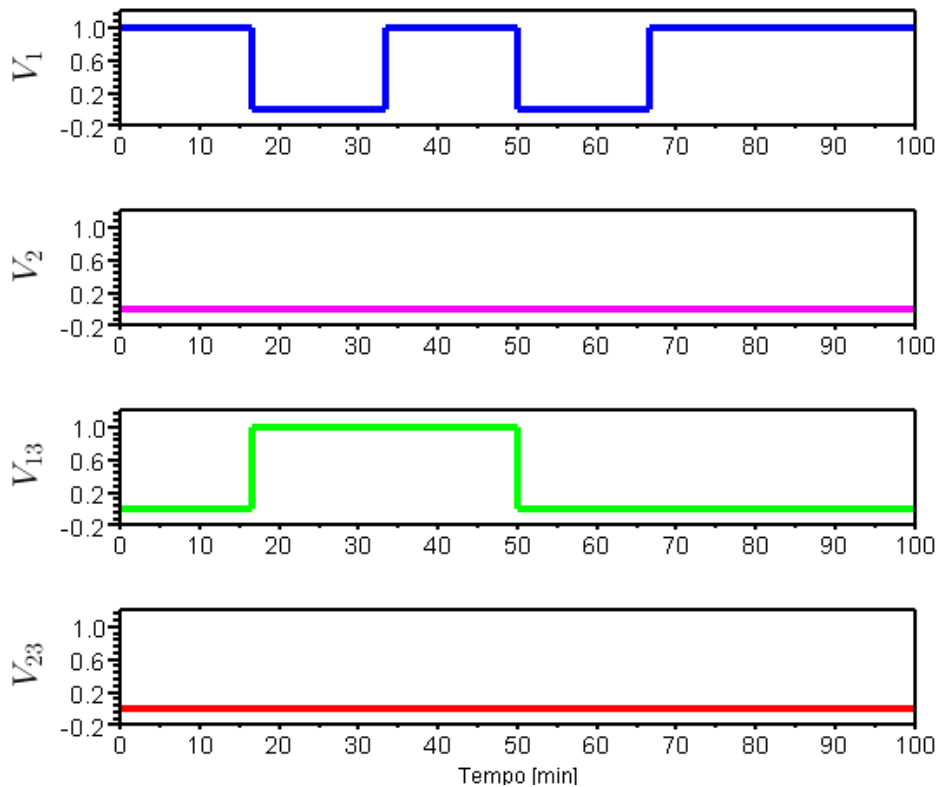


Figura 4.3: Posição das válvulas de conexão entre os tanques.

Inicialmente simula-se a situação em que o tanque 2 é isolado do sistema (V_2 e V_{23} fechadas) e com alimentação nula. O comportamento do sistema encontra-se apresentado na Figura (4.4) e o comportamento das variáveis auxiliares que relacionam o nível de líquido dos tanques com a altura em que se encontram as válvulas, $\delta(i)$, é representado na Figura (4.5).

Estabeleceu-se o mesmo cenário de simulação para o processo real (descrito por modelo

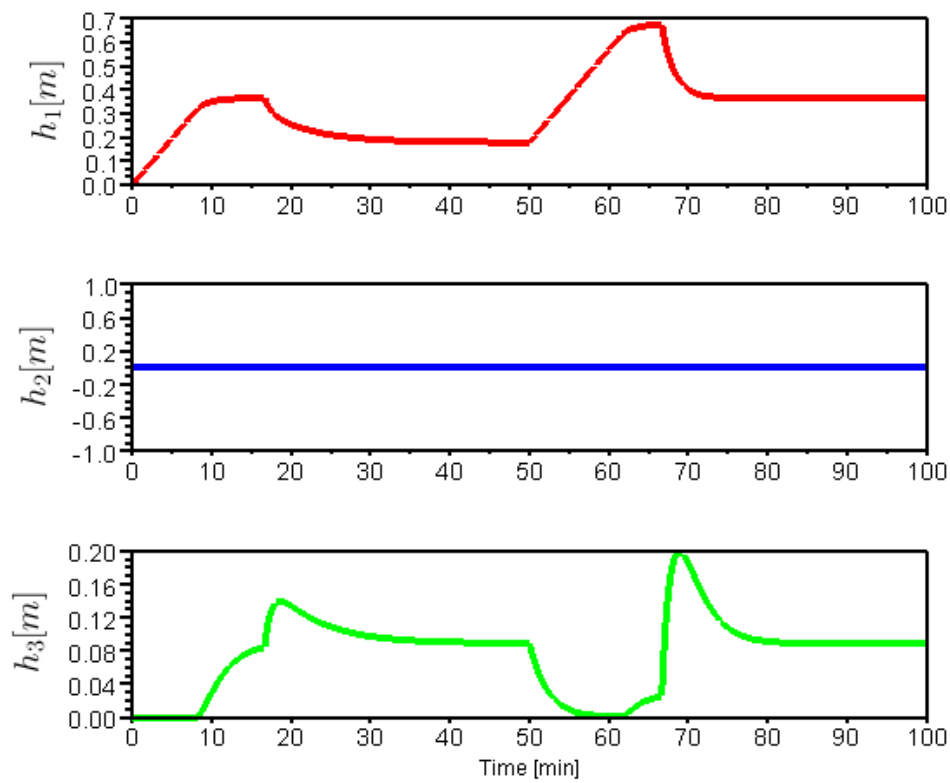


Figura 4.4: Perfil do nível de líquido de cada um dos três tanques.

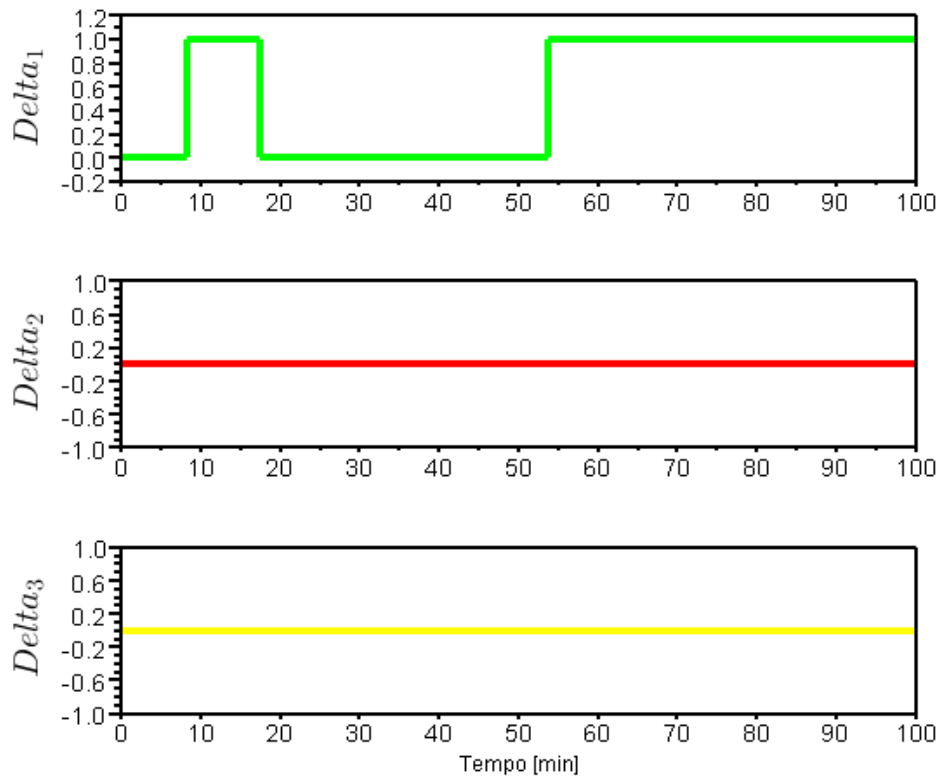


Figura 4.5: Comportamento temporal da variável auxiliar δ_i .

não linear de equações diferenciais - formulação contínua) e para a representação discreta deste modelo. A comparação entre a avaliação do modelo MLD, a simulação do modelo PWA (*Piecewise affine*) e comportamento do sistema contínuo para os tanques 1 e 3 podem ser encontradas na Figuras (4.6)e Figuras (4.7). O nível do tanque 2 é igual a zero, uma vez que este tanque é mantido isolado, durante todo tempo.

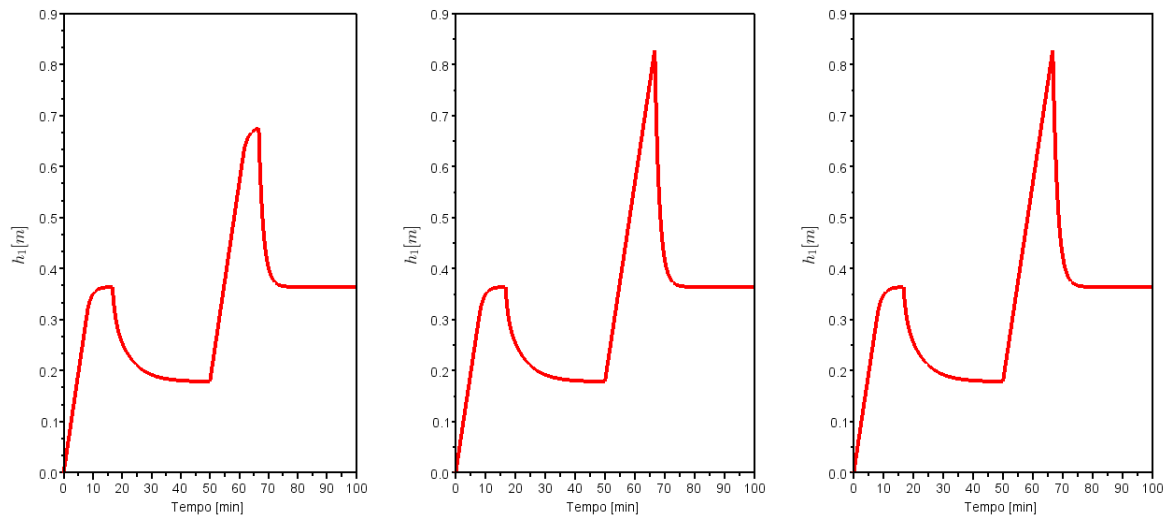


Figura 4.6: Perfis temporais do níveis de líquido no tanque 1 em cenários investigados baseados no modelo MLD (esquerda), em modelo discretizado (PWA) (centro) e no modelo não linear contínuo (direita).

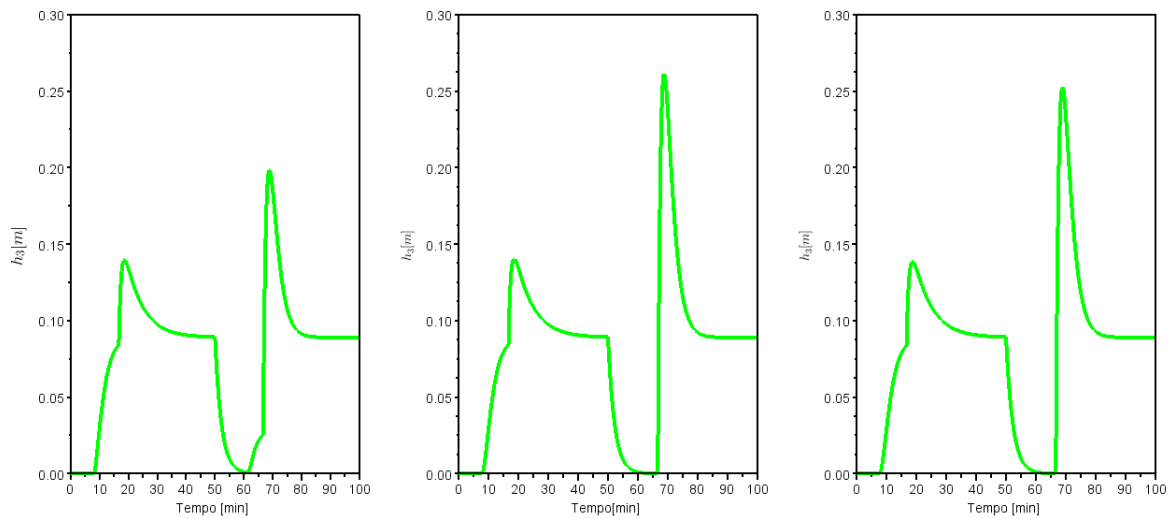


Figura 4.7: Perfis temporais do níveis de líquido no tanque 3 em cenários investigados baseados no modelo MLD (esquerda), em modelo discretizado (PWA) (centro) e no modelo não linear contínuo (direita).

Nota-se que o comportamento resultante dos três modelos é similar. Nos instantes em que ocorrem a mudança da posição das válvulas ($t=16,67 \text{ min}$; $t=33,34 \text{ min}$; $t=50 \text{ min}$), caracterizadas como eventos discretos, o comportamento resultante de cada um dos modelos é igual o que indica que a modelagem escolhida e a região viável do modelo MLD foram adequados para representar o processo no cenário investigado.

Porém, na presença de um evento discreto no instante $t=66,67 \text{ min}$, é possível observar ainda que o comportamento da trajetória viável na descrição MLD difere das demais. Como esta simulação é resultado da resolução de um problema de otimização que determina um caminho ótimo que minimize sua função objetivo, esta diferença decorre da opção de seleção de trajetória na região viável no problema de otimização.

Analizou-se ainda um outro cenário (Cenário 2) no qual todas as válvulas foram mantidas abertas durante o período de simulação. Os níveis de líquido do interior dos tanques no instante inicial é mantido o mesmo do cenário anterior, ou seja, $x(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$, e as vazões q_1 e q_2 são alteradas ao longo do tempo como apresentado na Figura (4.8).

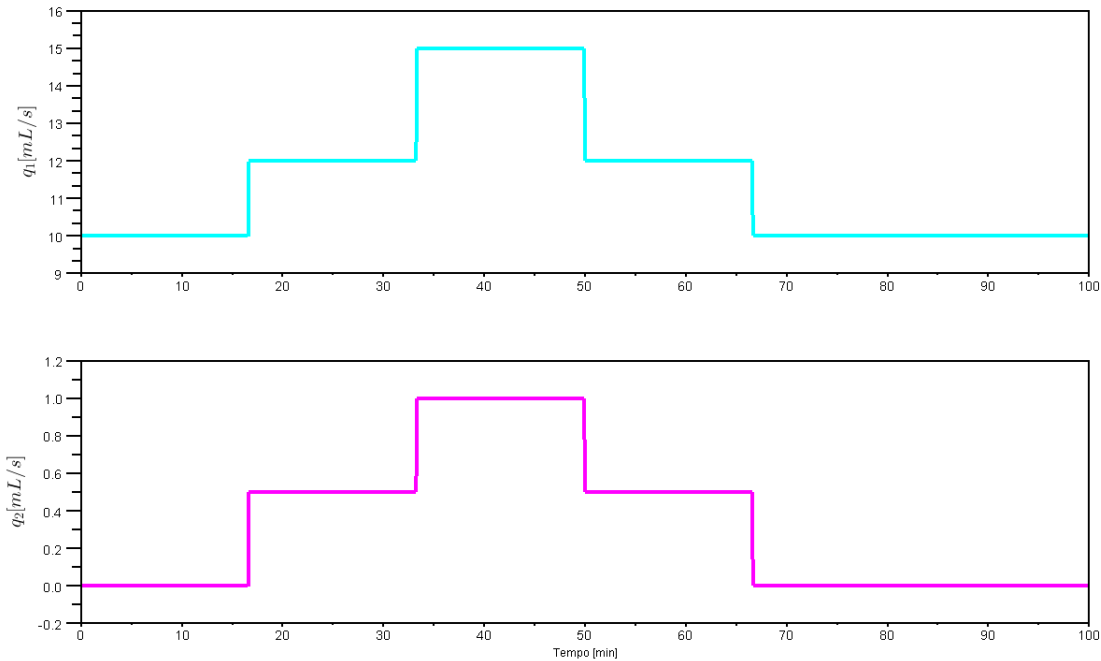


Figura 4.8: Comportamento temporal das vazões q_1 e q_2 durante a simulação do processo no qual todas as válvulas são mantidas abertas.

É importante ressaltar que as alterações realizadas nos valores das vazões ao longo do tempo são mudanças significativas (para a escala do problema sob análise) com o intuito de enfatizar o efeito da vazão no nível dos tanques. As alterações realizadas em q_1 são incrementos de 20% e 50% em relação ao seu valor inicial, respectivamente. Posteriormente, estes mesmo índices são utilizados, desta vez aplicados na ordem inversa, para a redução da vazão até que esta retorne ao seu valor inicial.

Para a vazão q_2 , inicialmente igual a zero, é aplicada uma perturbação degrau igual a $0,5 \text{ mL/s}$. Após $33,33 \text{ s}$, aplica-se novamente uma perturbação degrau com o mesmo valor da anterior, levando a vazão q_2 a $1,0 \text{ mL/s}$. Analogamente ao procedimento realizado com q_1 , as mesmas perturbações que resultaram em um aumento da vazão são utilizadas posteriormente para a redução da vazão até seu valor inicial.

Os comportamentos dinâmico dos níveis de líquido para cada tanque é calculado a partir do modelo MLD e comparados com os perfis obtidos pelos modelos discreto e contínuo para o mesmo cenário de simulação. Os resultados podem ser vistos nas Figuras (4.9), (4.10) e (4.11).

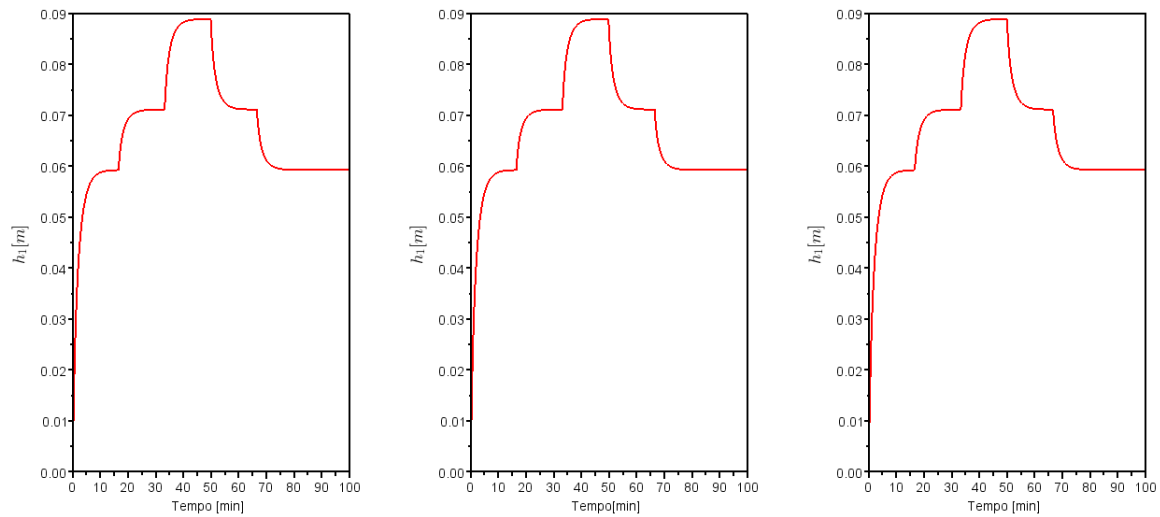


Figura 4.9: Perfis temporais dos níveis de líquido do tanque 1 calculados através do modelo MLD (esquerda), pelo modelo PWA discreto (centro) e pelo modelo contínuo de equações diferenciais (direita) para o Cenário 2.

Como fisicamente esperado, os níveis dos tanques sofrem um aumento ou um decréscimo a medida que as vazões aumentam ou diminuem, respectivamente. Este resultado é condizente com a situação real na qual há uma relação direta entre as perturbações nas vazões e o nível de cada tanque já que todas as válvulas são mantidas abertas durante o processo. As respostas dos três modelos às perturbações que o sistema sofre ao longo do tempo são semelhantes durante todo o período de simulação. Como previsto, a variável auxiliar que relaciona os níveis de líquido dos tanques com o patamar h_v que se encontram as válvulas superiores V_i , $\delta_i(k) = 0$, para valores de $h_i(k)$ inferiores a $h_v = 0,3 \text{ m}$, não sofre alteração ao longo da simulação.

Diferentemente do exemplo anterior, os resultados da modelagem utilizando o formalismo MLD são muito semelhantes aos resultados encontrados pelo modelo contínuo e pelo

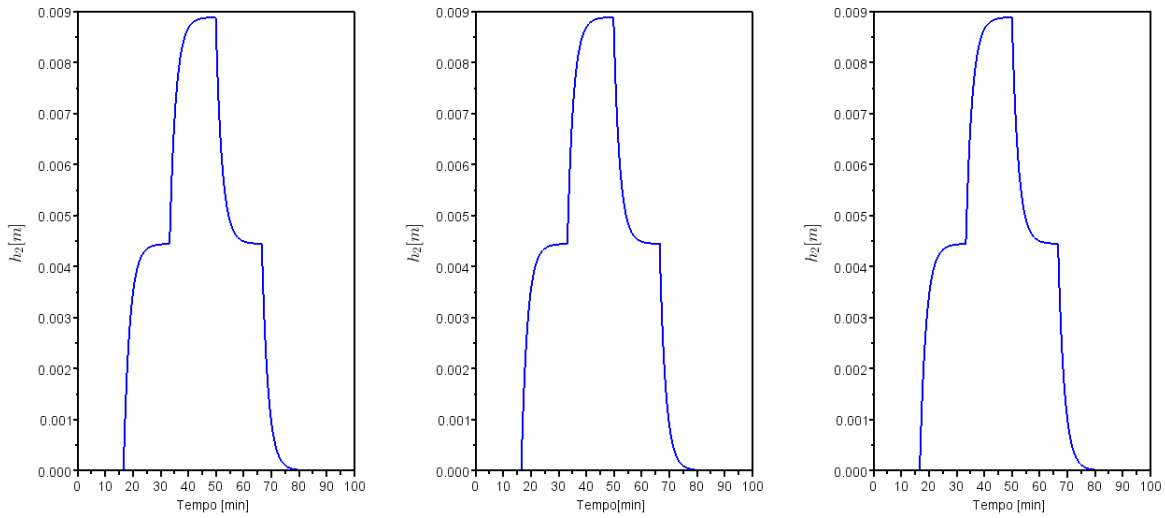


Figura 4.10: Perfis temporais dos níveis de líquido do tanque 2 calculados através do modelo MLD (esquerda), pelo modelo PWA discreto (centro) e pelo modelo contínuo de equações diferenciais (direita) para o Cenário 2.

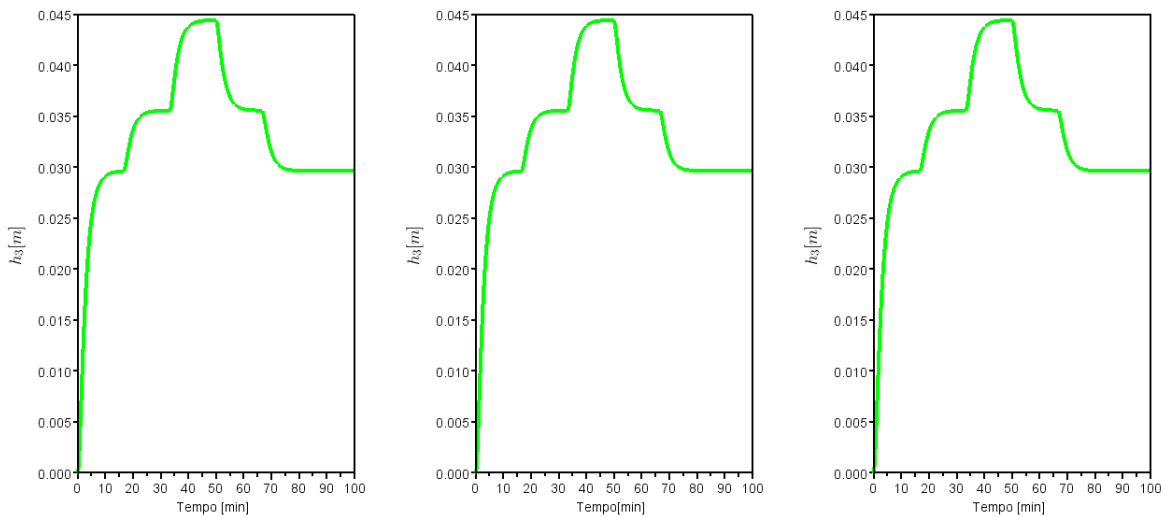


Figura 4.11: Perfis temporais dos níveis de líquido do tanque 3 calculados através do modelo MLD (esquerda), pelo modelo PWA discreto (centro) e pelo modelo contínuo de equações diferenciais (direita) para o Cenário 2.

PWA discreto. Neste caso, o caminho ótimo escolhido pela resolução do problema de otimização coincide com o caminho que o sistema percorre.

4.1.4 Controle MPC para o sistema de três tanques

O controlador MPC foi desenvolvido para o sistema de acordo com o procedimento teórico apresentado no Capítulo 3 para a norma l_1 e para a norma l_2 resultando em um problema de programação linear inteira mista (MILP) e outro de programação quadrática inteira mista (MIQP), respectivamente. Quando não indicado de forma contrária, o horizonte de predição será igual ao de controle e para ilustração fixado em ($N = 3$), determinado empiricamente, para compromisso entre desempenho e custo computacional. A seguir, apresentam-se os resultados para comportamento do sistema para cada um dos cenários simulados com a ação dos controladores e além de estabelecer-se ainda uma comparação com a atuação do controlador PI.

Controle MPC para a norma l_1

Cenário de simulação:

Partindo-se de um nível inicial igual a zero para todos os tanques e com todas as válvulas de ligação entre eles e de saída de cada tanque fechadas inicia-se o processo com uma vazão de entrada $q_1 = 100 \text{ mL/s}$ no tanque 1. A vazão de entrada do tanque 2, q_2 , é colocada, inicialmente, igual a zero. O controlador deve manter o sistema no estado estacionário 1 para as variáveis controladas h_1 e h_3 definido como $\mathcal{O}_{ss_1} = [0, 36; 0, 09]$. Entre os instantes 360 s e 720 s , o estado estacionário estipulado ao processo é alterado para $\mathcal{O}_{ss_2} = [0, 5; 0, 36]$. As vazões devem ser alteradas com uma restrição de $\Delta \mathbf{u}_{max} = [40; 30] \text{ mL/s}$.

Resultados da aplicação do controle:

O comportamento dinâmico dos níveis de cada tanque são apresentados na Figura (4.12):

O objetivo da ação do controle no sistema é manter este no estado estacionário estipulado. Para isto, todas as variáveis de entrada estavam disponíveis como opções de escolha para a ação de controle com o objetivo de levar o sistema ao seu valor de referência. O comportamento das variáveis de entrada q_1 e q_2 pode ser observado na Figura (4.13). Observa-se que o controlador obedece os limites estabelecidos para a manipulação das vazões a cada instante.

As válvulas que interligam entre os tanques e as válvulas de saída para cada um deles também são manipuladas pelo controlador de modo a abrirem ($V_i = 1$) ou fecharem ($V_i = 0$) de acordo com a ação deste para atingir o objetivo de controle. A posição de abertura das válvulas pode ser visto nas Figuras (4.14) e (4.15).

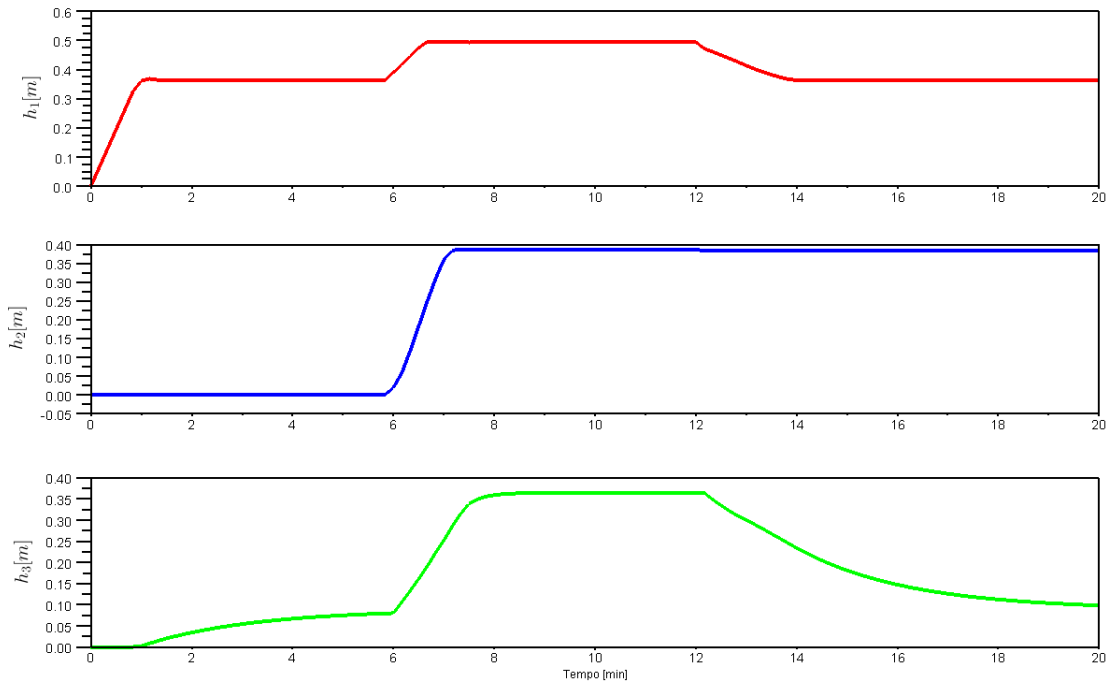


Figura 4.12: Comportamento dinâmico em malha fechada para os níveis de cada tanque sob a ação do controlador l_1 -MPC.

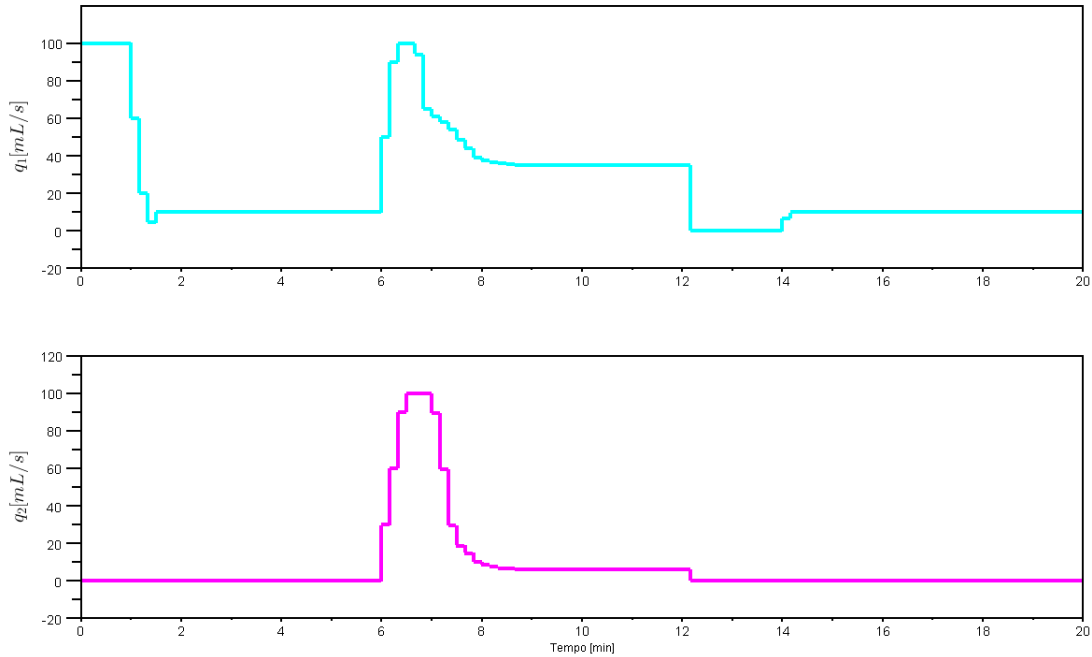


Figura 4.13: Resultado da manipulação do controlador MPC sobre as variáveis q_1 e q_2 .

É possível perceber que o controle opta por uma combinação de ações de controle agindo em todas as variáveis manipuladas em cada instante para alcançar o estado estacionário desejado. A variedade de possibilidades de ações para um mesmo torna o controle preditivo adequado atendendo ao objetivo do controle estipulado, mantendo o sistema no

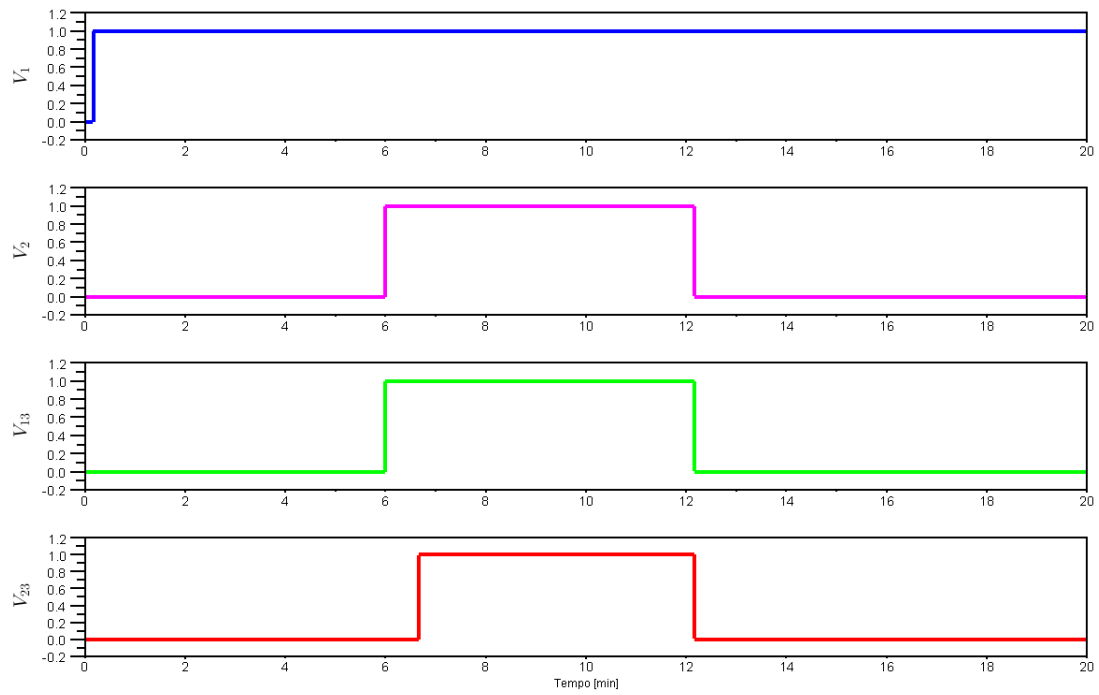


Figura 4.14: Posição de abertura das válvulas V_1, V_2, V_{13} e V_{23} .

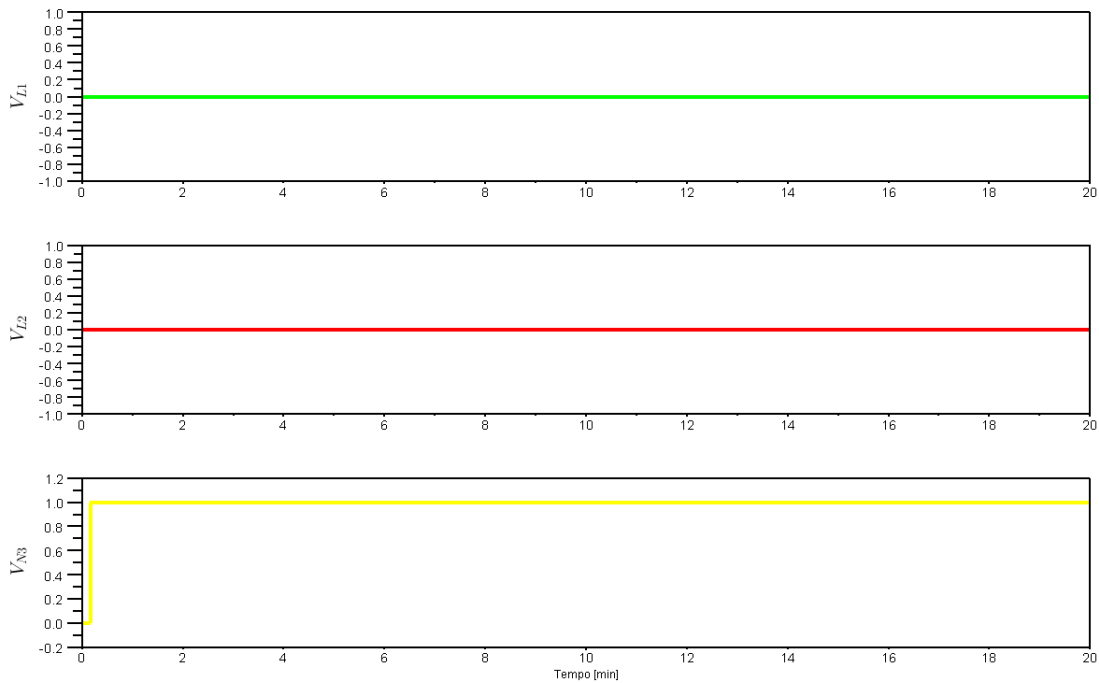


Figura 4.15: Posição de abertura das válvulas V_{L1}, V_{L2} e V_{N3} .

valor do estado estacionário para cada instante e respeitando os limites inferiores e superiores para cada uma das variáveis.

Controle MPC para a norma l_1 comparado ao comportamento de um sistema de controle composto de controlador PI+controle liga/desliga

Cenário de simulação:

O controle l_1 -MPC também foi investigado com a configuração de mesmo número de graus de liberdade (variáveis controladas para manipular apenas as variáveis q_1 e V_1). Esse estudo permite uma comparação mais próxima com um controle clássico PI (Proporcional-Integral) associado a um controlador liga/desliga. Para esse estudo, o controlador PI foi projetado para ser responsável pela manipulação da vazão de entrada do tanque 1 e o controlador liga/desliga para manipular a válvula V_1 (abre/fecha). As demais variáveis permaneceram constantes com os valores apresentados na Tabela (4.2). O estado estacionário escolhido como referência foi $\mathcal{O}_{ss1} = [0, 36; 0, 09]$ e os níveis controlados são os dos tanques 1 e 3.

Tabela 4.2: Cenário de simulação.

Variável	Descrição	Valor
q_2	Vazão de entrada do tanque 2	0 mL/s
V_2	Válvula superior de ligação do tanque 2 e 3	0
V_{13}	Válvula inferior de ligação do tanque 1 e 3	0
V_{23}	Válvula inferior de ligação do tanque 2 e 3	0
V_{L1}	Válvula de saída do tanque 1	0
V_{L2}	Válvula de saída do tanque 2	0
V_{N3}	Válvula de saída do tanque 3	1

Resultados da aplicação do controle:

Os perfis dos níveis de cada tanque podem ser vistos na Figura 4.16:

Observa-se, como esperado, que o controlador liga/desliga não mantém a altura h_3 exatamente no valor de seu estado estacionário e sim em uma faixa próxima a ele. Isto está relacionado ao modo como o controle estabelece sua ação, agindo após o cálculo do nível em cada instante. O comportamento das variáveis manipuladas é apresentado nas Figuras (4.17) e (4.18). Nenhum esforço de sintonia foi realizado para os sistema de controle implementados nesse estudo.

A ação do controlador MPC apresenta-se mais suave e próxima do que se espera de um controle agindo em um sistema real. A alternância de comportamento que a ação do controlador liga/desliga e do controlador PI causam nas variáveis seria indesejável. Para

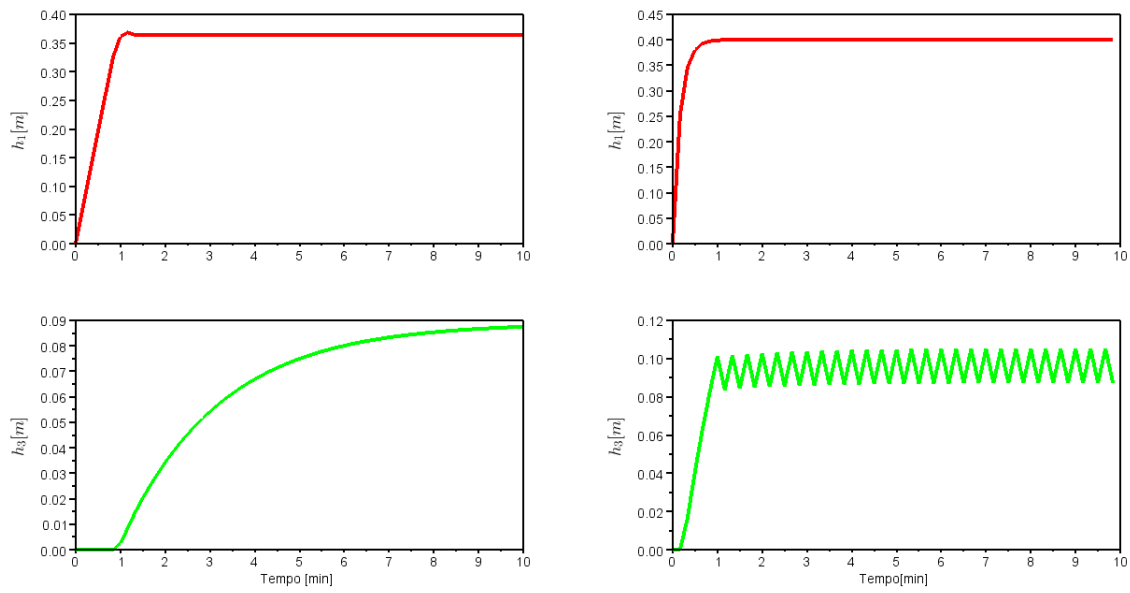


Figura 4.16: Níveis de líquido dos tanques 1 e 3 estabelecido pela ação do controle l_1 -MPC (esquerda) e da associação dos controles PI e liga/desliga (direita).

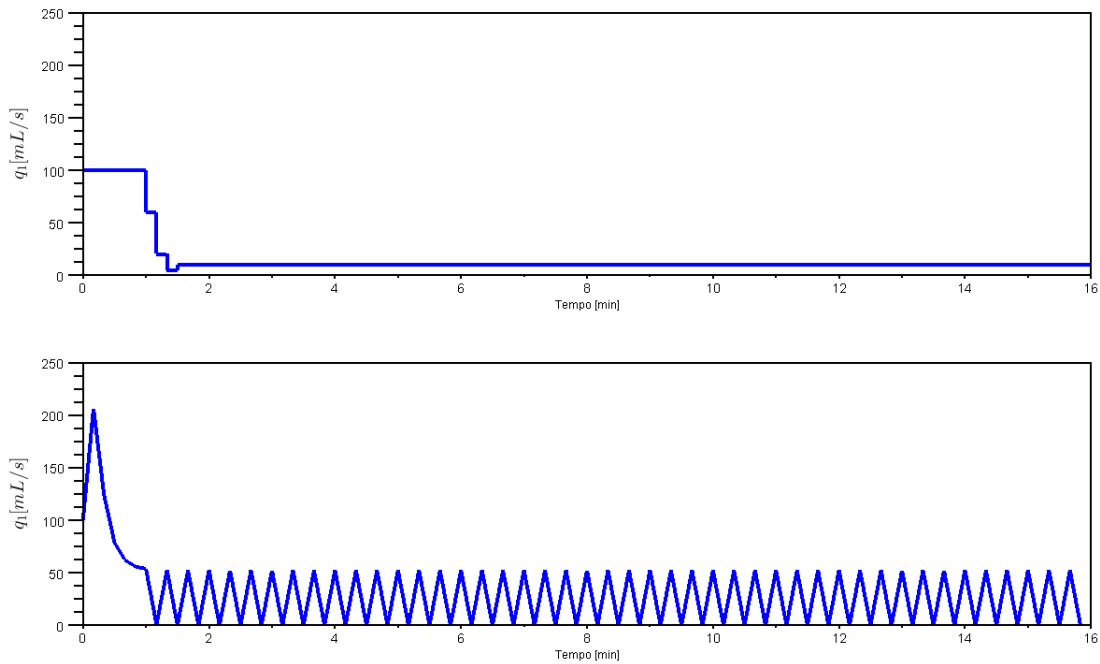


Figura 4.17: Resultado da manipulação da vazão q_1 pelo controlador l_1 -MPC(superior) e pelo controlador PI (inferior).

isso, o sistema de controle preditivo, preferiu manter a válvula V_1 aberta e manipulou a vazão q_1 de forma a compensar as exigências requerida pelo sistema de controle. Para que este comportamento bang/bang não afetasse o sistema seria necessário diminuir o tempo de amostragem do processo e avaliar suavizadores de faixa na ação do controle liga/desliga.

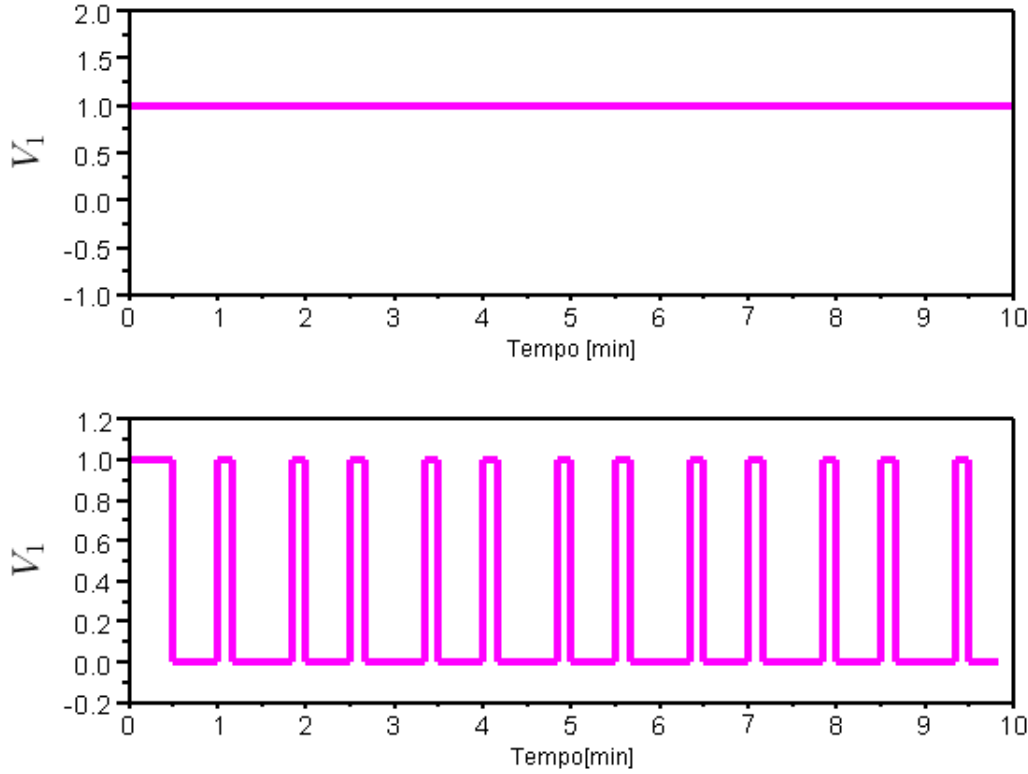


Figura 4.18: Resultado da manipulação da posição de abertura da válvula V_1 pelo controlador l_1 -MPC(superior) e pelo controlador liga/desliga (inferior).

O Controle l_1 -MPC e l_2 -MPC.

Cenário de simulação:

Nessa seção investiga-se o efeito da norma de desempenho no controlador MPC. Para isso o sistema foi desenvolvido utilizando uma função custo linear (MILP) e uma função custo quadrática (MIQP). Partindo-se de tanques vazios, simulam-se cenários de controle com variação do valor do estado estacionário para as variáveis controladas, h_1 e h_3 . O tempo total de simulação é $t = 6000$ s e os valores determinados como estado estacionário são:

- Para $t > 5100$ s ou $t < 1200$ s: $\mathcal{O}_{ss1} = [0, 24; 0, 19]$
- Para 1200 s $\leq t \leq 2400$ s ou 3600 s $\leq t \leq 5100$ s: $\mathcal{O}_{ss2} = [0, 36; 0, 09]$
- Para 2400 s $< t \leq 6000$ s: $\mathcal{O}_{ss3} = [0, 49; 0, 36]$

O objetivo do controlador é manter o sistema no valor especificado para o estado estacionário durante o período de tempo correspondente manipulando todas as variáveis de entrada, binárias ou contínuas. O perfil dos níveis para os tanques 1 e 3 resultante da ação dos controladores pode ser visto na Figura (4.19):

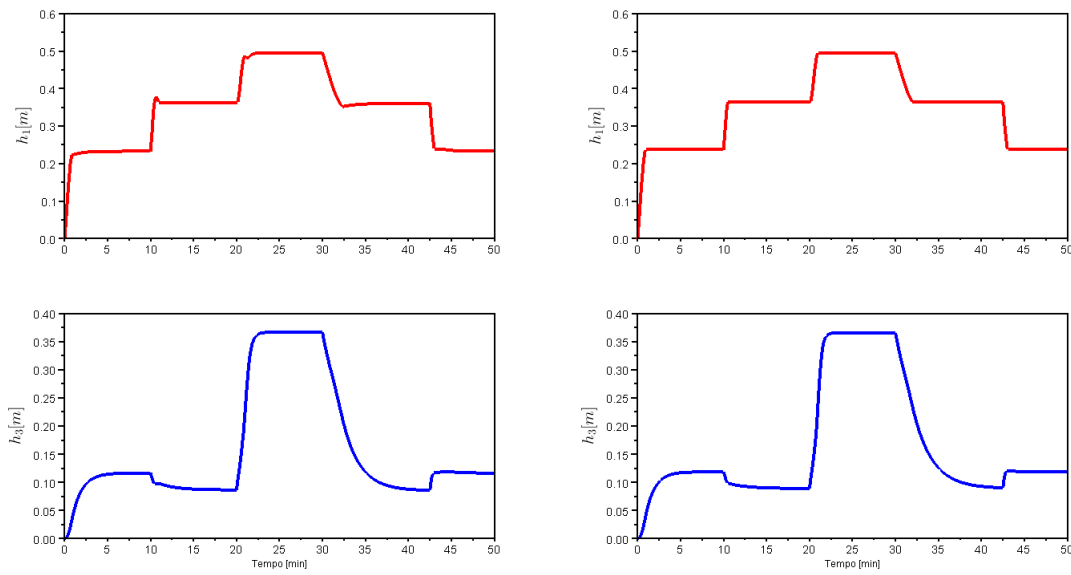


Figura 4.19: Comportamento dinâmico dos níveis dos tanques 1 e 3 para a ação do controlador l_2 -MPC (esquerda) e l_1 -MPC (direita).

A ação dos dois controladores são semelhantes e ambos alcançam o objetivo de controle. Os esforços de controle para as variáveis binárias são coincidentes para ambos controladores (l_1 -MPC e l_2 -MPC). O resultado da manipulação das válvulas pode ser visto nas Figuras (4.17) e (4.18).

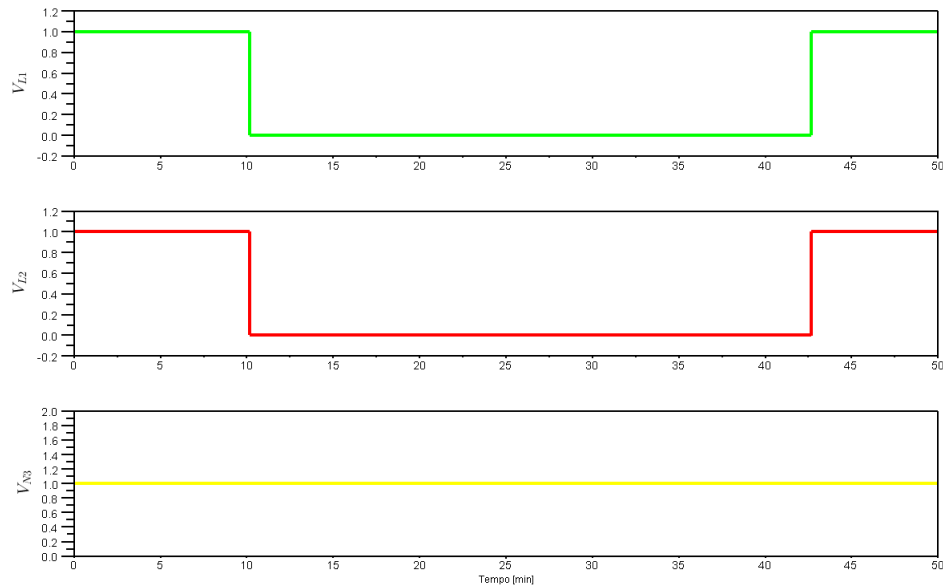


Figura 4.20: Posições de abertura das válvulas de saída de líquido dos três tanques resultantes da atuação dos controladores MPC.

Ao contrário das ações resultantes da atuação dos controladores para variáveis binárias, as decisões de controle para as variáveis contínuas, embora não muito diferentes, foram influenciadas pelas normas utilizadas. O resultado da ação de controle para o cenário

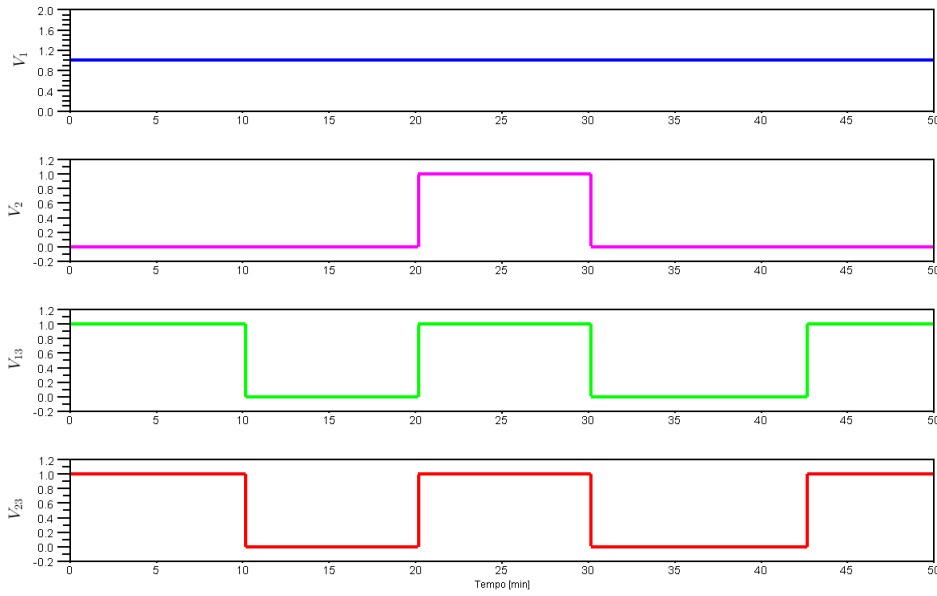


Figura 4.21: Posições de abertura das válvulas de ligação entre os três tanques resultantes da atuação dos controladores MPC.

investigado é apresentado na Figura (4.19).

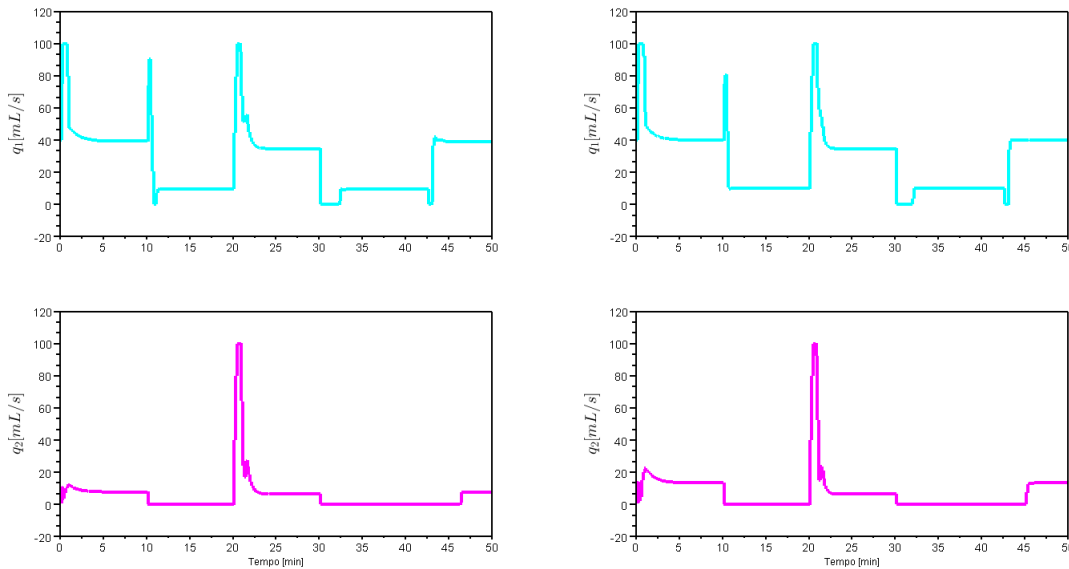


Figura 4.22: Ações resultantes da atuação controlador l_2 -MPC (esquerda) e l_1 -MPC (direita) nas vazões de entrada dos tanques.

Nota-se que, embora as ações de controle sejam semelhantes em quase todo o tempo de simulação, há algumas diferenças sutis na manipulação feitas por cada um dos controladores. Estas diferenças podem ser notadas nos instantes iniciais para q_2 assim como nos instantes próximos a $t = 22,5min$. Para q_1 , há algumas diferenças no comportamento da vazão para os dois controladores entre os instantes $20min < t < 25min$, $30min < t < 35min$ e $42,5min < t < 45min$. A resposta muito similar para o problema

de controle, é provavelmente devida a características do problema investigado no cenário selecionado para estudo. Entretanto, as características decorrentes das propriedades dos controladores serão herdadas das normas devidas em cada caso. Um aspecto que merece destaque nesse cenário, é aquele de que o nível do tanque 2 não foi controlado. E devido a isso, pode-se obter comportamentos distintos a depender da estratégia de controle implementada. Isso pode levar inclusive perfis de manipulação das variáveis ligeiramente distintos.

Para o caso de implementação industrial desse sistema de controle, sugere-se usar o primeiro problema de controle resolvido no método de *Branch-and-Bound* como controlador sub-ótimo de reserva. Assim, formular-se-ia o problema de controle preditivo de forma que a solução “relaxada” e aproximada para as variáveis inteiras possa ser implementada caso o controlador com restrição de inteiro falhe por algum motivo. O conhecimento das soluções sub-ótimas na árvore de sub-problemas resolvido no algoritmo *Branch-and-Bound*, permite ainda que se implemente na planta a melhor solução viável disponível no instante em que a ação de controle se fizer necessária pelo sistema de controle automático.

4.2 Reator contínuo (CSTR) com troca térmica

Neste exemplo, investiga-se um reator CSTR (*Continuous Stirred Tank Reactor*) com troca térmica. Esse sistema, de relativa simplicidade permite que aspectos bem relevantes para o estudo de controle sejam explorados. Dentre os quais destacam-se a multiplicidade de soluções estacionárias e a sua elevada não linearidade. Somado a isso, pode-se explorar o problema de estabilidade, uma vez que o sistema possui complexidade estrutural apresentando bifurcação local com estados estacionários estáveis e instáveis e multiplicidade de entradas numa região operacional de interesse.

4.2.1 Descrição do sistema

Um reator contínuo CSTR (SISTU; BEQUETTE, 1991) é alimentado com reagente A no qual ocorre a reação exotérmica irreversível $A \rightarrow B$. Como estados do sistemas têm-se a concentração do reagente A , C_A , e a temperatura do reator T . A vazão do fluido refrigerante é definida como q_c e T_{cf} é a sua temperatura. O processo pode ser visto na Figura (4.23).

O comportamento das variáveis de estado C_A e T do sistema pode ser representado pelo modelo não linear adimensional apresentado nas Equações (4.38)-(4.40). Pelas características desse processo, pretende-se definir modelos regionais e assim gerar um conjunto de regiões descritas por modelos com descrição PWA. Para propósito de simplificação da descrição da natureza da numérica do problema, adota-se uma descrição do modelo em variáveis adimensionais, e indica-se a manipulação direta da temperatura do fluido de resfriamento, T_{cf} , que na sua forma adimensional é dado por u sem perda de generalidade (mas é óbvio que tal manipulação ocorreria em vazões de água de resfriamento do sistema térmico acoplado ao reator).

$$\frac{dx_1}{d\tau} = -\phi x_1 \kappa(x_2) + q(x_{1f} - x_1) \quad (4.38)$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = \beta \phi x_1 \kappa(x_2) - (q + \delta)x_2 + \delta u + qx_{2f} \quad (4.39)$$

$$y = x_2 \quad (4.40)$$

Em que as variáveis são definidas de acordo com a Tabela 4.3:

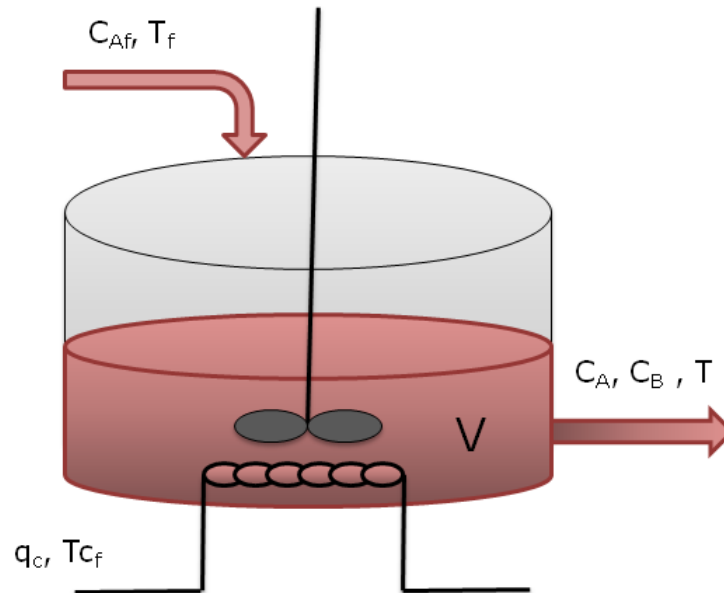


Figura 4.23: Reator CSTR com troca térmica.

Tabela 4.3: Variáveis adimensionais para o modelo do reator CSTR (SISTU; BEQUETTE, 1991)

Variáveis adimensionais	
$\gamma = \frac{E}{RT_{f0}}$	$\phi = \frac{V}{Q_0} k_0 \exp(-\gamma)$
$\tau = \frac{Q_0}{V} t$	$x_2 = \frac{T - T_{f0}}{T_{f0}} \gamma$
$x_{1f} = \frac{C_A}{C_{A0}}$	$\beta = \frac{(-\Delta H) C_A}{\rho C_p T_{f0}} \gamma$
$\delta = \frac{UA}{\rho C_p Q_0}$	$q = \frac{Q}{Q_0}$
$\kappa(x_2) = \exp\left(\frac{x_2}{1 + \frac{x_2}{\lambda}}\right)$	$x_1 = \frac{C_A}{C_{A0}}$
$x_{2f} = \frac{T_f - T_{f0}}{T_{f0}} \gamma$	$u = \frac{T_c - T_{cf0}}{T_{cf0}} \gamma$

Os valores nominais de projeto para o reator são dados por:

- $x_{1f} = 1;$
- $x_{2f} = 0$
- $\phi = 0,072;$
- $\lambda = 20,0;$
- $q = 1;$
- $\beta = 8,0;$
- $\delta = 0,3;$

O sistema possui condições nominais dadas por $u = 0$, condição em que existem três valores de estado estacionário. Cada um é localizado em uma região do domínio do sistema na qual desenvolve-se uma representação de modelo linear (linearização do modelo) e posteriormente a sua discretização. A linearização foi obtida através do método de expansão em série de Taylor e o sistema discretizado foi calculado exatamente com um mantenedor (*hold*) de ordem zero. Os estados estacionários para este sistema são:

$$\mathcal{P}_{ss1} : (x_1, x_2) \approx (0,856; 0,886) \quad (4.41)$$

$$\mathcal{P}_{ss2} : (x_1, x_2) \approx (0,553; 2,752) \quad (4.42)$$

$$\mathcal{P}_{ss3} : (x_1, x_2) \approx (0,235; 4,705) \quad (4.43)$$

O estado estacionário $\mathcal{P}_{ss2}$ é um estado estacionário instável enquanto os demais são estáveis. Isto pode ser confirmado pela avaliação dos autovalores (valores característicos) para a matriz de estados do modelo discretizado. Observando-se os autovalores obtidos, verifica-se que o segundo estado estacionário é instável (polo fora do círculo unitário). Os polos obtidos foram:

- $\lambda_{ss1,1} \approx 0,914, \lambda_{ss1,2} \approx 0,950;$
- $\lambda_{ss2,1} \approx 0,920, \lambda_{ss2,2} \approx 1,050;$
- $\lambda_{ss3,1\&2} \approx 0,922 \pm 0,089i;$

4.2.2 Análise do comportamento do sistema em malha aberta

Com objetivo de se avaliar as propriedades do sistema a ser investigado, avalia-se o comportamento do sistema em estado estacionário frente à perturbações de graus de $\pm 0,50$, $\pm 0,75$ e ± 1 . O comportamento da resposta do processo pode ser visto nas Figuras (4.24-4.26).

A curva de ganho estático do processo está representada na Figura (4.27). Os círculos representam os estados estacionários para a condição nominal de processo com $u = 0$. Observe que o processo apresenta uma multiplicidade de entrada. O que exige que o problema de controle seja capaz de responder a essa característica.

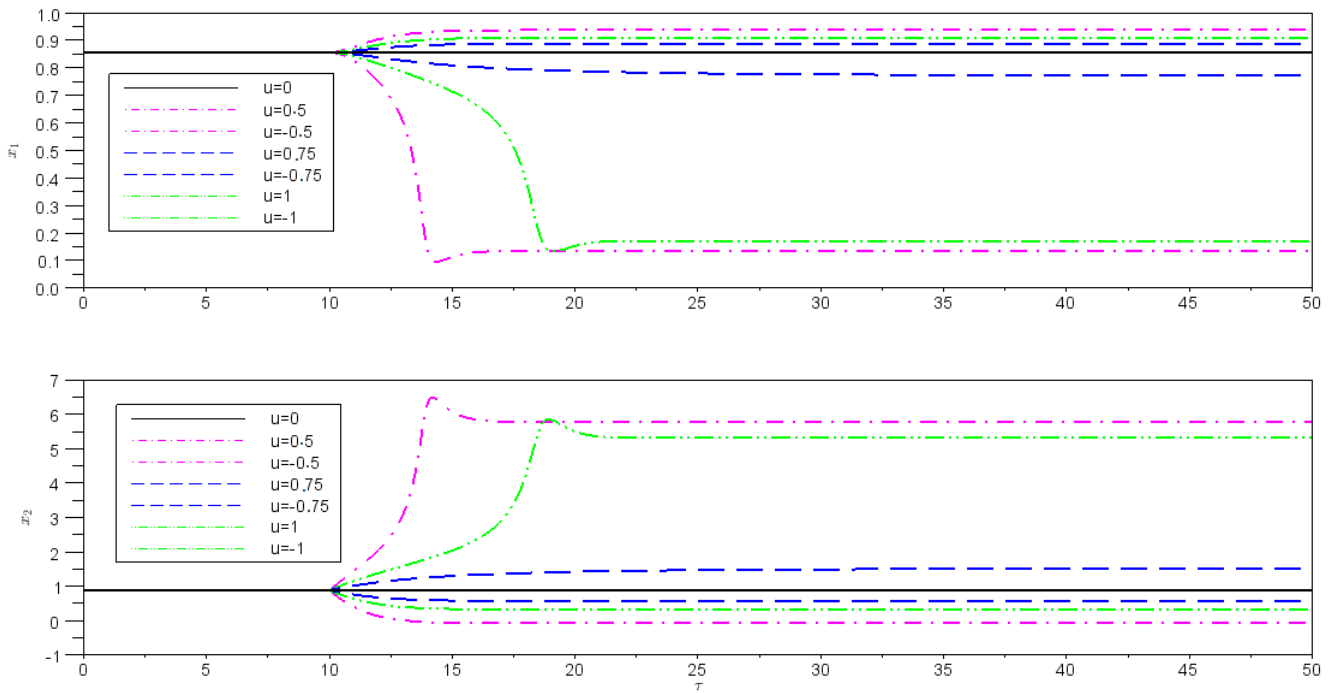


Figura 4.24: Resposta do comportamento do processo nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss1}$ para perturbação degrau de $\pm 0,50$, $\pm 0,75$ e ± 1 no instante $\tau = 5$.

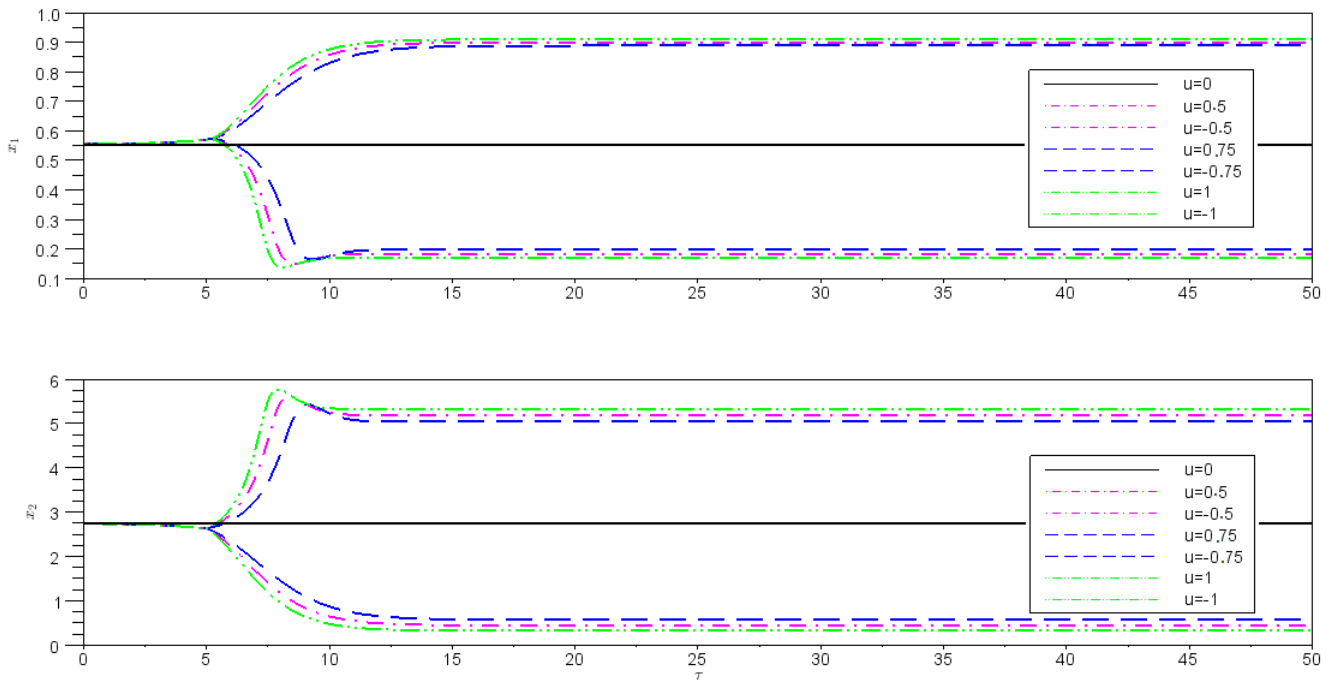


Figura 4.25: Resposta do comportamento do processo nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss2}$ para perturbação degrau de $\pm 0,50$, $\pm 0,75$ e ± 1 no instante $\tau = 5$.

Pode-se ver da assimetria existente nas Figuras (4.24-4.26) que o sistema possui não linearidade acentuada nas vizinhanças de cada região do espaço de estados onde se loca-

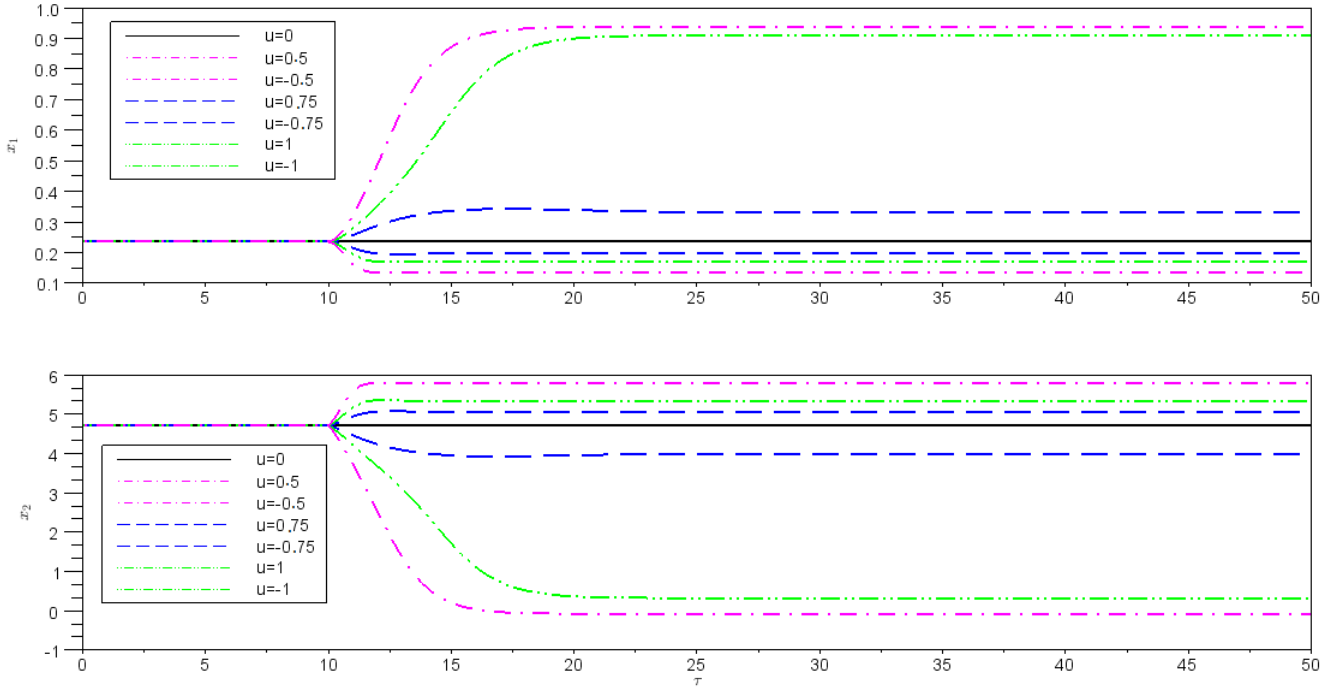


Figura 4.26: Resposta do comportamento do processo nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss3}$ para perturbação degrau de $\pm 0,50$, $\pm 0,75$ e ± 1 no instante $\tau = 5$.

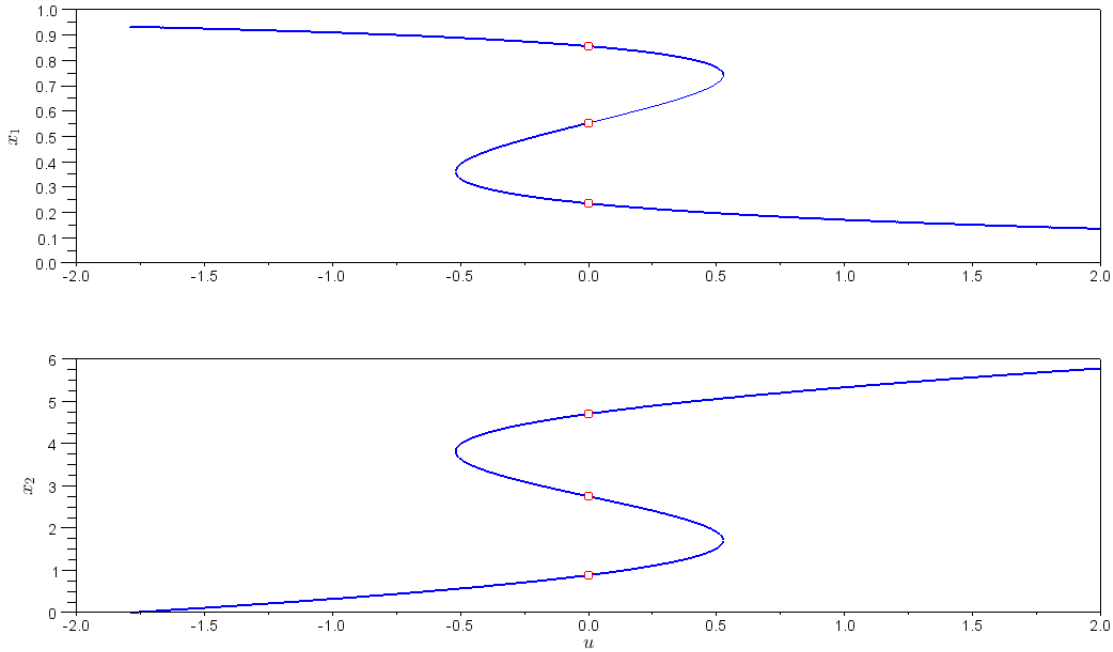


Figura 4.27: Curva de ganho estático para o CSTR com troca térmica.

lizam os pontos de operação de interesse nesse trabalho. Além disso, pode-se constatar que a multiplicidade de entrada de estados estacionários é evidente na Figura (4.27), que apresenta três saídas possíveis para o processo com mesma condição de entrada.

Com o objetivo de investigar o controlador preditivo para modelos regionais, divide-se o espaço de estados de operação do sistema de modo que cada valor do estado estacionário esteja contido em uma das divisões e seja único nesta região. O conjunto de modelos lineares e discretizados para o reator CSTR com troca térmica é dado por:

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_1, & \mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_2, & \mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{A}_3 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_3 \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_3, & \mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}_3 \end{cases} \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) = [0 \ 1] \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (4.44)$$

Em que:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0,8889314 & -0,0123021 \\ 0,1253856 & 0,9750652 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0,0001889 \\ 0,0296286 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0,1060000 \\ -0,0852000 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0,8241198 & -0,0339843 \\ 0,6364556 & 1,1460423 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} -0,0005125 \\ 0,0321922 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0,1907 \\ -0,7537 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0,6001702 & -0,0462931 \\ 2,401561 & 1,2429773 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} -0,0007131 \\ 0,0337809 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0,3118998 \\ -1,7083 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

As respectivas regiões são definidas como $\mathbf{R}_1 =]0,78; 1] \times [0; 7]$, $\mathbf{R}_2 =]0,35; 0,78] \times [0; 7]$ e $\mathbf{R}_3 = [0; 0,35] \times [0; 7]$ cada uma com seu ponto correspondente ao estado estacionário. As Figuras (4.28)-(4.30) apresentam o comportamento do sistema linear nas proximidades a cada estado estacionário.

Pode-se ter uma melhor compreensão do erro de predição do modelo linear observando as Figuras (4.31)-(4.33), que apresenta a comparação para as perturbações degraus de $u = +0,75$ para as proximidades dos três estados estacionários do problema.

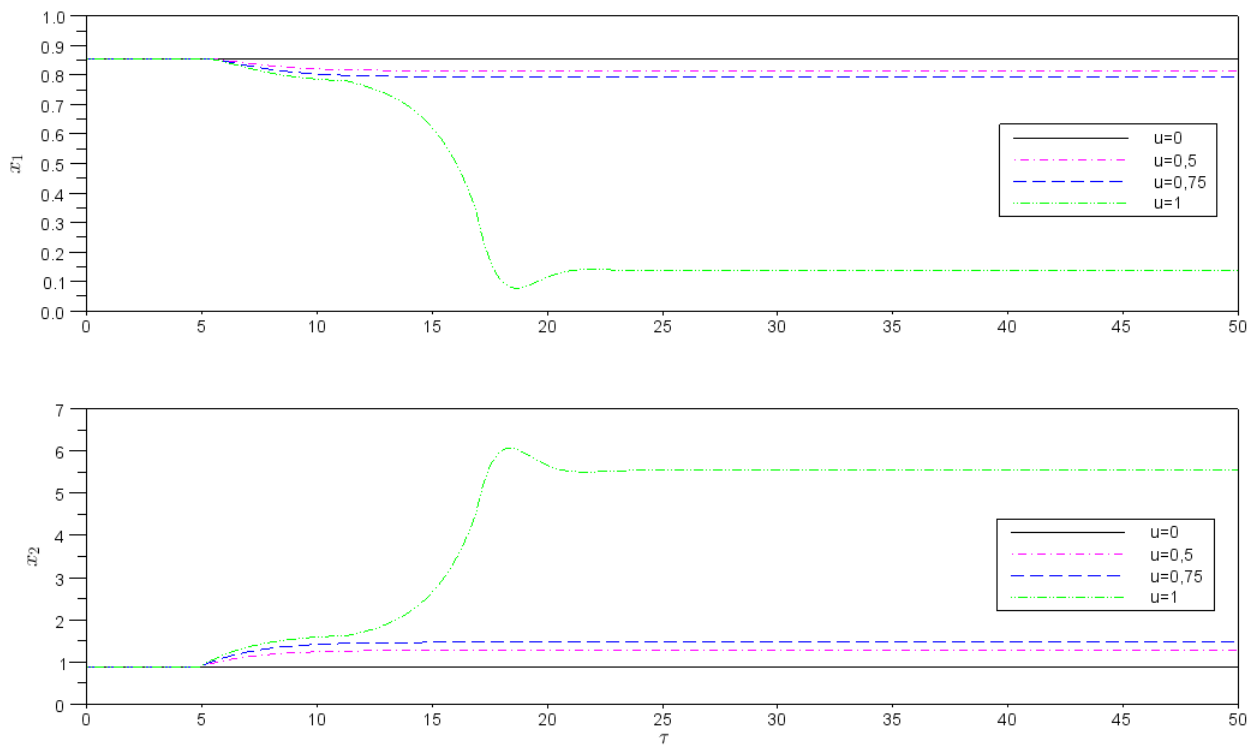


Figura 4.28: Resposta do comportamento do modelo linear nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss1}$ para perturbação degrau de $\pm 0,50$, $\pm 0,75$ e ± 1 no instante $\tau = 5$.

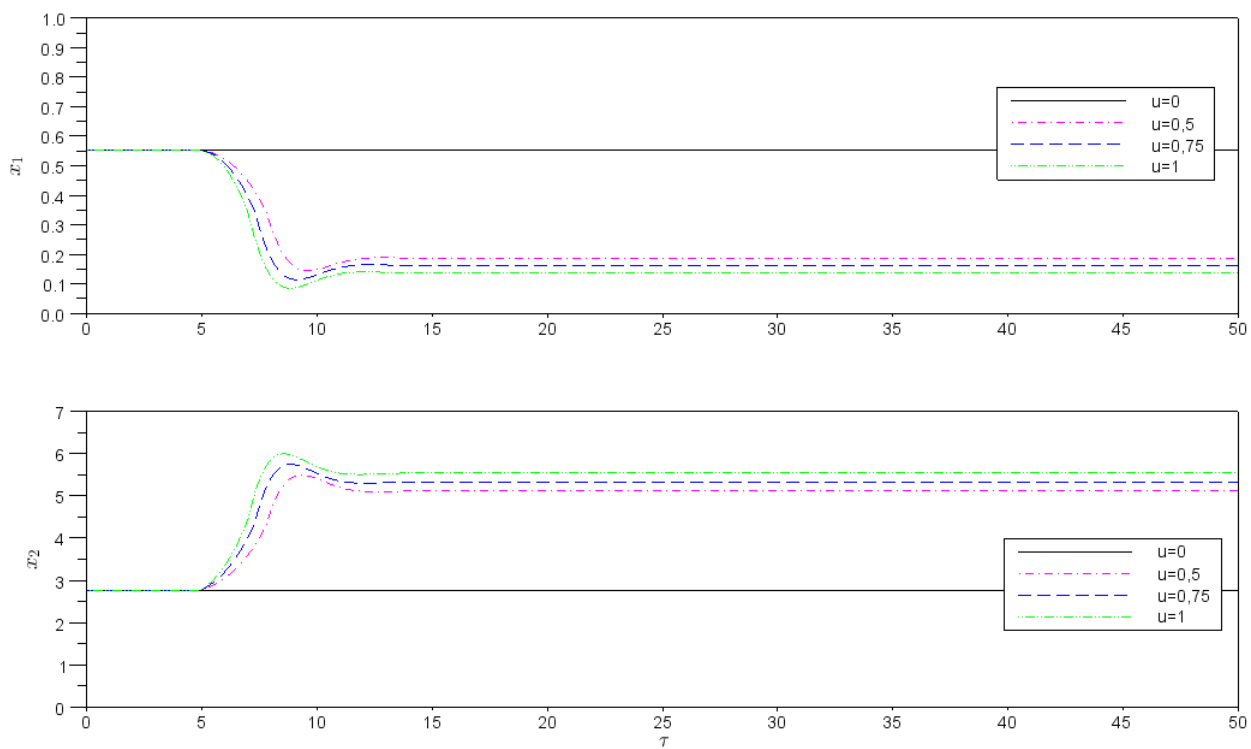


Figura 4.29: Resposta do comportamento do modelo linear nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss2}$ para perturbação degrau de $\pm 0,50$, $\pm 0,75$ e ± 1 no instante $\tau = 5$.

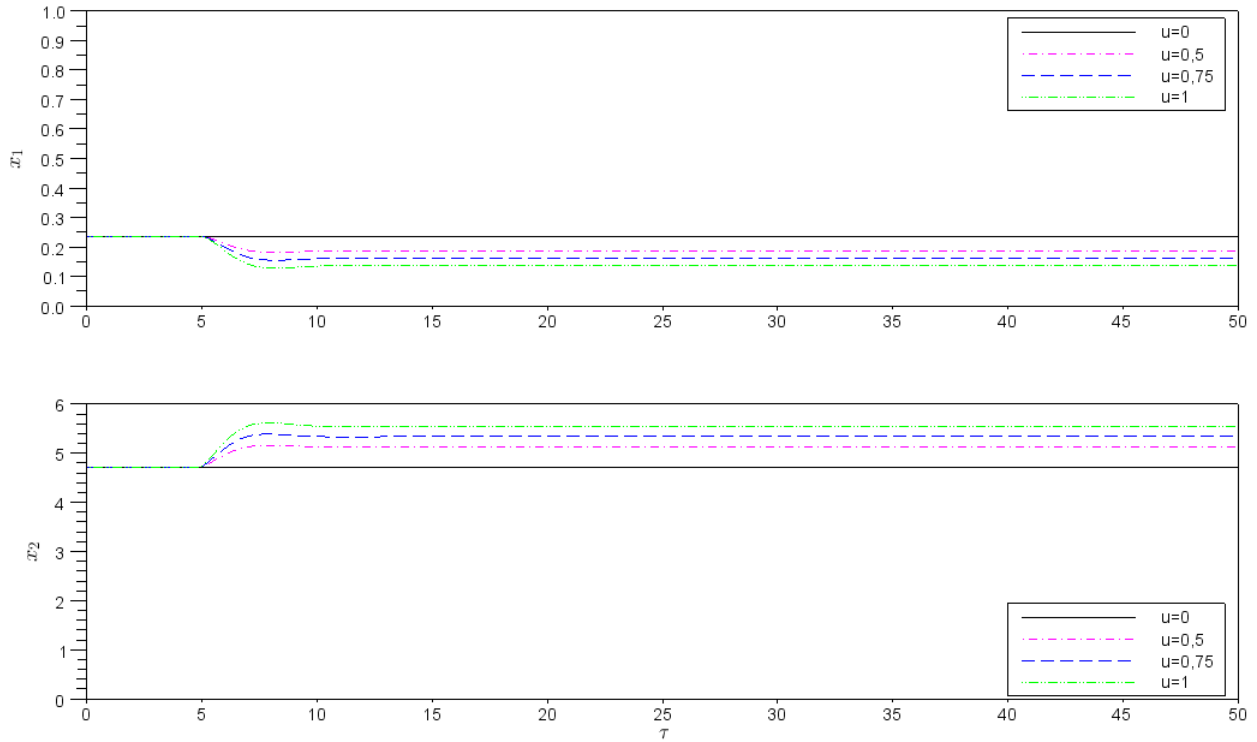


Figura 4.30: Resposta do comportamento do modelo linear nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss3}$ para perturbação degrau de $\pm 0,50$, $\pm 0,75$ e ± 1 no instante $\tau = 5$.

4.2.3 Abordagem MLD para o reator CSTR com troca térmica

A partir do modelo apresentado no conjunto de Equações (4.44) desenvolve-se o modelo no formalismo MLD. Primeiramente, as variáveis auxiliares binárias $\delta_i(k)$ são inseridas no modelo de modo a que seja definida as regiões de validade dos modelos com as seguintes restrições (mutuamente excludentes):

$$\begin{cases} \delta_1 = 1 \leftrightarrow 0,78 \leq x_1(k) \leq 1 \\ \delta_2 = 1 \leftrightarrow 0,35 \leq x_1(k) \leq 0,78 \\ \delta_3 = 1 \leftrightarrow 0,0 \leq x_1(k) \leq 0,35 \end{cases} \quad (4.48)$$

Assim, define-se:

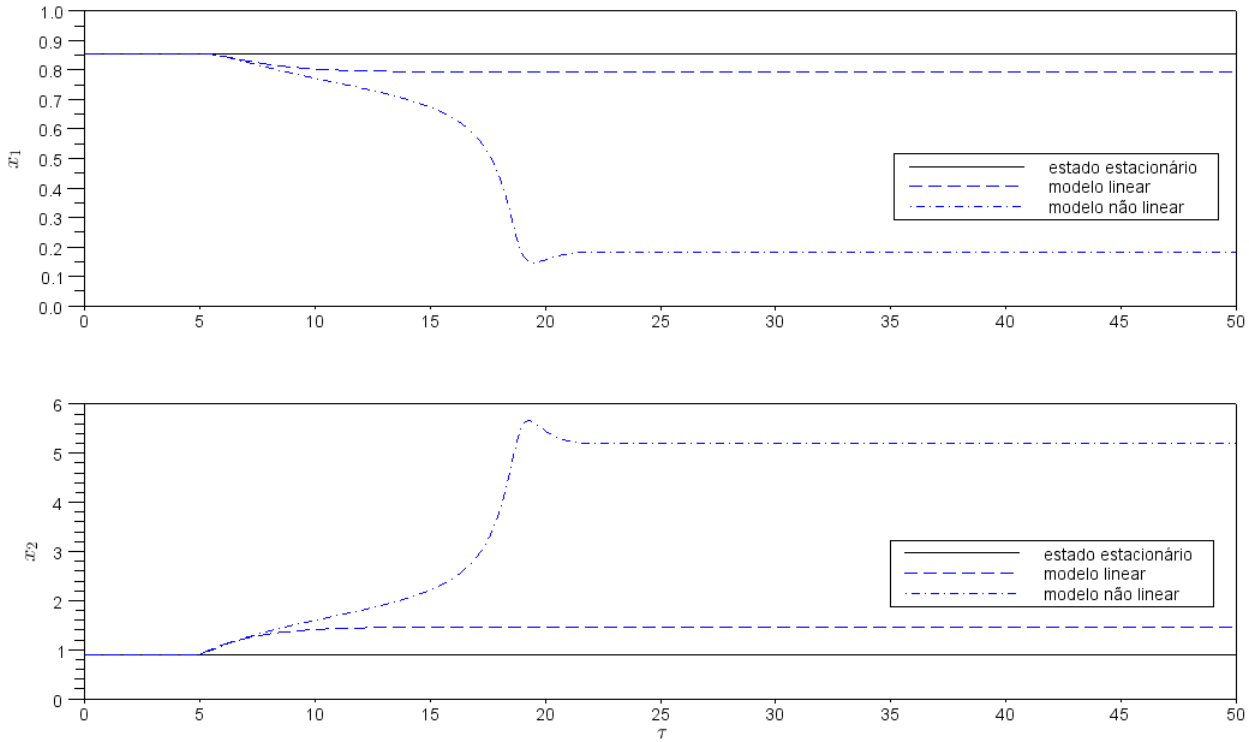


Figura 4.31: Comparação das respostas do comportamento do modelo linear (linha pontilhada) e processo (linha cheia) nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss1}$ para perturbação degrau de $u = +0,75$ no instante $\tau = 5$.

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_1, & \text{se } \delta_1(k) = 1 \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_2, & \text{se } \delta_2(k) = 1 \\ \mathbf{A}_3 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_3 \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_3, & \text{se } \delta_3(k) = 1 \end{cases} \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) = [0 \ 1] \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (4.49)$$

Em que $\delta_i(k)$ é uma variável binária, $\delta_i(k) \in \{0, 1\} \ \forall i = 1, \dots, 3$ e como não existe interseção entre as regiões que definem os modelos PWA, e a união das mesmas é idêntica ao domínio do problema, ou seja,

$$\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = \emptyset, \ \forall i \neq j, \quad (4.50)$$

e,

$$\bigcup_{i=1}^3 \mathcal{R}_i = \mathcal{R}. \quad (4.51)$$

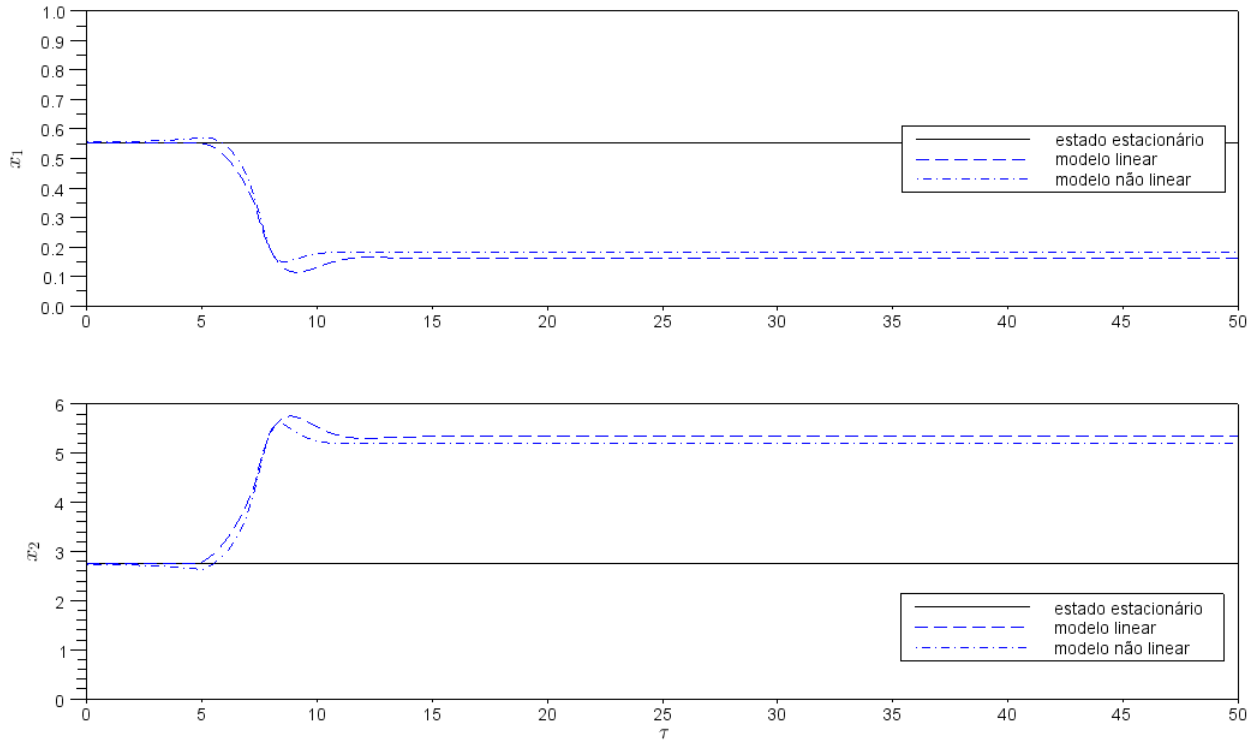


Figura 4.32: Comparação das respostas do comportamento do modelo linear (linha pontilhada) e processo (linha cheia) nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss2}$ para perturbação degrau de $u = +0,75$ no instante $\tau = 5$.

Assim, devem satisfazer a condição:

$$\delta_1(k) + \delta_2(k) + \delta_3(k) = 1 \quad (4.52)$$

As regiões de validade dos modelos podem ser definidas como:

$$\mathcal{R}_i \triangleq \{\mathbf{x}(k) \mid \mathbf{S}_i \mathbf{x}(k) \leq \mathbf{T}_i \quad i = 1, \dots, 3.\} \quad (4.53)$$

Em que:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,78 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0,78 \\ -0,35 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

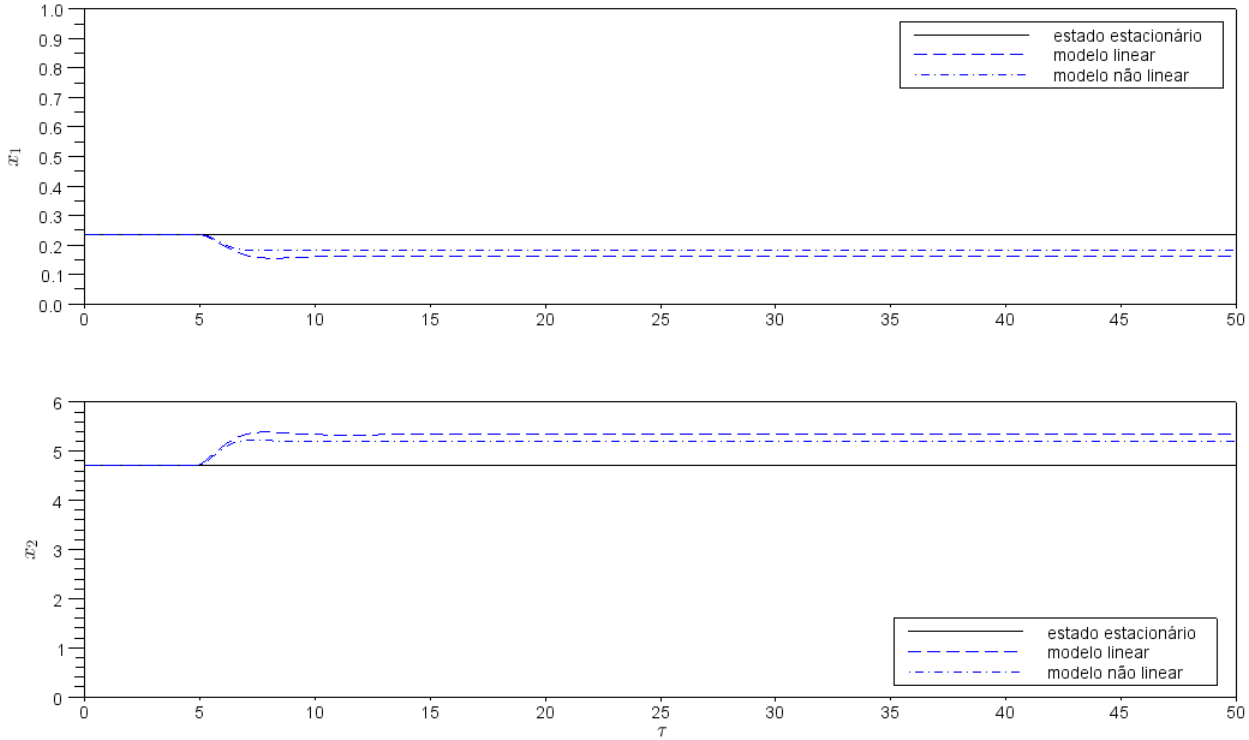


Figura 4.33: Comparação das respostas do comportamento linear (linha pontilhada) e processo (linha cheia) nas vizinhanças do $\mathcal{P}_{ss3}$ para perturbação degrau de $u = +0,75$ no instante $\tau = 5$.

$$\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,0 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

As restrições que definem as regiões no espaço de estados podem ser adicionadas ao modelo MLD como conjunto de inequações:

$$\mathbf{S}_i \mathbf{x}(k) - \mathbf{T}_i \leq \mathbf{M}_i^* (1 - \delta_i(k)), i = 1, \dots, 3. \quad (4.57)$$

Em que,

$$\mathbf{M}_i^* = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}} \mathbf{S}_i \mathbf{x}(k) - \mathbf{T}_i \quad (4.58)$$

Submetido ainda as restrições de operação

$$0 \leq x_1(k) \leq 1 \quad (4.59)$$

$$0 \leq x_2(k) \leq 7 \quad (4.60)$$

$$-2,5 \leq u(k) \leq 2,5 \quad (4.61)$$

Dessa formam o modelo do processo pode ser re-escrito na forma,

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=1}^3 [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_i] \delta_i(k). \quad (4.62)$$

Como a Equação (4.62) é não linear (pois envolve o produto das variáveis lógicas e os estados e as entradas), então transforma-se em uma forma equivalente dadas por desigualdades mistas inteiras. Assim,

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{z}_i(k) \quad (4.63)$$

Em que,

$$\mathbf{z}_i(k) \triangleq [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_i] \delta_i(k) \quad (4.64)$$

e definem-se os vetores $\mathbf{M} = [M_1 \ M_2]^T$, e $\mathbf{m} = [m_1 \ m_2]^T$.

Assim,

$$\mathbf{z}_i(k) \leq \mathbf{M} \delta_i(k), \quad (4.65)$$

$$\mathbf{z}_i(k) \geq \mathbf{m} \delta_i(k), \quad (4.66)$$

$$\mathbf{z}_i(k) \leq \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_i - \mathbf{m}(1 - \delta_i(k)), \quad (4.67)$$

$$\mathbf{z}_i(k) \geq \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_i - \mathbf{M}(1 - \delta_i(k)). \quad (4.68)$$

4.2.4 Controle do reator CSTR com troca térmica

Para ilustrar os resultados da representação regional do sistema, desenvolveu-se três controladores preditivos baseados em diferentes modelos. O primeiro (NL-MPC) têm como base o modelo não-linear apresentado anteriormente, fazendo com que o modelo utilizado seja igual a planta em todo instante.

Posteriormente, utilizou-se como base para o controlador o modelo localmente linearizado no qual o modelo não-linear é, a cada instante k , linearizado atualizando o modelo

para o instante atual através dos valores para os estados do instante anterior (Local-MPC).

Finalmente, o modelo regional foi utilizado para formular a terceira opção de controle (Regional-MPC). Neste modelo, o controlador analisa a região em que o estado do sistema encontra-se e, caso a região do estado anterior seja diferente da região do estado atual, o modelo é atualizado através da linearização do modelo não-linear. Diferente do controle baseado no modelo localmente linearizado, este não faz atualizações do modelo caso não haja mudança de região.

O cenário de simulação escolhido para aplicação do controle transita entre as três regiões definidas pelo controle regional de modo a cada uma delas conter um estado estacionário encontrado para as condições nominais. A transição, para um tempo de simulação igual a t_f é:

- para $t > 0.85t_f$ or $t < 0.2t_f$: $\mathcal{P}_{ss1} : x_2 \approx 0,8866$
- para $0.2t_f < t < 0.4t_f$ and $0.6t_f < t < 0.85t_f$: $\mathcal{P}_{ss2} : x_2 \approx 2,7361$
- para $0.4t_f < t < 0.6t_f$: $\mathcal{P}_{ss3} : x_2 \approx 4,6797$

A principal vantagem de um controlador baseado em um modelo regional é a descrição de sistemas em que não se conhece o modelo não-linear que o representa. Para o desenvolvimento dos controladores NL-MPC e Local-MPC, é necessário que o modelo não-linear seja conhecido; o desconhecimento deste modelo impossibilita o desenvolvimento do sistema de controle. O Regional-MPC permite a utilização de um modelo regional identificado formulado a partir de pequenas perturbações no sistema.

Para ilustrar a eficiência do Regional-MPC, o sistema foi submetido a ação dos três controladores desenvolvidos nesta dissertação. Os limites superior e inferior definidos para a variável de entrada u neste caso foram -2.5 e 2 , respectivamente. O resultado da ação de controle dos três MPC pode ser visto na Figuras (4.34).

A sintonia dos três controladores foi escolhida empiricamente de modo a representar da maneira mais adequada a ação de cada controle. Ressalta-se que a sintonia do controlador MPC não é o foco desta dissertação, sendo assim, escolhida particularmente para cada controlador considerando suas características sem interferir na comparação dos resultados que deseja-se alcançar. A Figura (4.35) apresenta o comportamento da variável lógica representando o seletor de região do modelo utilizado.

Os resultados obtidos pela ação dos controladores permite verificar que o modelo regional apresenta um resultado satisfatório e semelhante ao controlador não-linear. Embora esse seja mais sensível em relação a variável de entrada u e suas variações a cada instante,

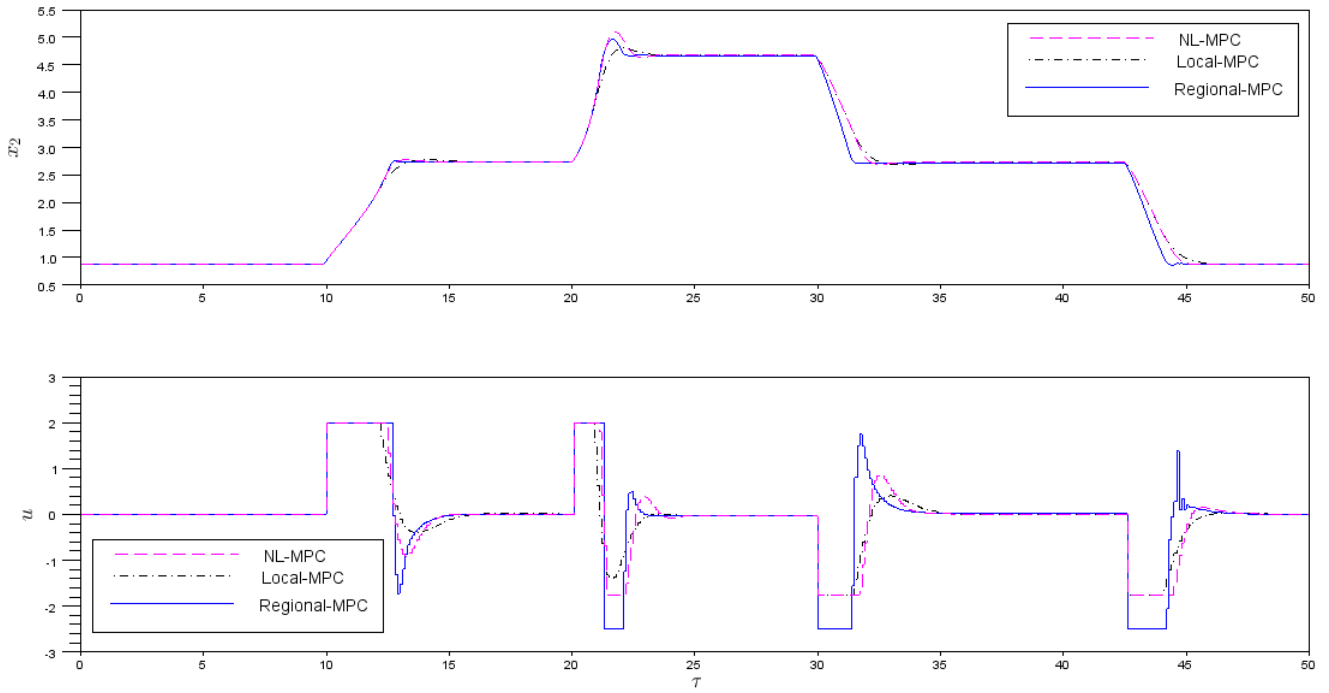


Figura 4.34: Resposta do controle do CSTR sob a ação dos controladores NL-MPC, Local-MPC e Regional-MPC.

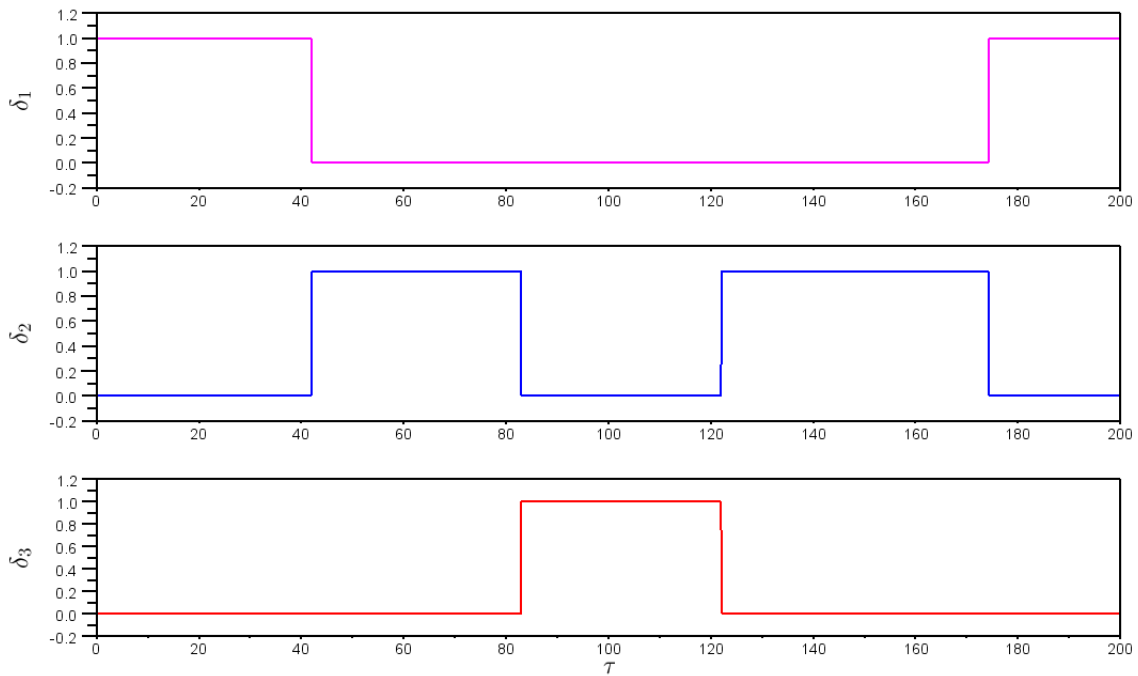


Figura 4.35: Modelos usados pelo controlador sob ação do l_1 -MPC com restrições.

o objetivo de controle foi alcançado em todas as etapas da simulação, inclusive quando o estado estacionário requerido não é estável.

Pode-se ver que o sistema do controle consegue, com um modelo regional, controlar

satisfatoriamente as transições solicitadas no cenário investigado. Vê-se que o cenário de ativação dos modelos obedece a exigência de “ou excludente” para as regiões dos modelos PWA. Assim, o cenário investigado, mesmo tendo sido controlado com certa facilidade pelos controladores clássicos (com cuidados extras na implementação do controlador clássico para permitir uma alteração no *setpoint* no ponto de multiplicidade na entrada) é perfeitamente controlado por uma representação regional para o modelo do sistema de controle.

CAPÍTULO 5

Conclusões e Sugestões

A formulação MLD permite a inclusão de variáveis lógicas e restrições de uma forma eficiente e satisfatória representando a interação entre os aspectos lógicos e contínuos de um processo. Um dos principais pontos fortes dos sistemas de MLD é a possibilidade de lidar com várias questões práticas de plantas reais em que não é adequado tratar de maneira isolada as dinâmicas contínua e discreta ou negligenciar suas interações.

O estudo desenvolvido para a representação de sistemas com características contínuas e discretas permite definir a formulação híbrida como adequada para a representação matemática desta peculiaridades. O sistema de três tanques ilustra de maneira marcante como sistemas com eventos discretos influentes na dinâmica contínua e vice-versa são capazes de ter seu comportamento representado adequadamente ao adotar-se a descrição MLD para descrevê-los matematicamente.

Ambas formulações para o controlador preditivo, l_1 -MPC e l_2 -MPC, têm seus méritos. Sabe-se que l_1 -MPC leva a um problema de otimização inteira mista mais fácil do que o obtido por l_2 -MPC. Isto é especialmente verdadeiro no caso da MPC híbrido. Este ponto já perdeu a sua importância no caso do MPC regular, dado o fato de que existem otimizadores muito bons para problemas QP (Programação Quadrática).

Uma razão adicional e relevante para a utilização de l_1 -MPC, em vez de l_2 -MPC, reside no fato de que a solução da LP (Programação Linear), os problemas são sempre nas intersecções das restrições. No caso de formulação de QP, a solução pode estar fora das restrições. Este fato faz com que a formulação do LP apresente uma característica

inerentemente robusta em relação à função custo e um comportamento sensível no que diz respeito às restrições.

Sabe-se que a maioria dos sistemas de interesse tem uma operação mais lucrativa quando operando em restrições. Se o modelo for preciso e as restrições são conhecidas, a formulação LP parece adequada, mesmo se a função custo não é bem conhecida. Devido às restrições de operação, nem sempre é uma abordagem segura, geralmente a engenharia de controle pode projetar restrições práticas que a planta vai operar fora da série de restrições reais (e ótimas). Portanto, l_1 -MPC tentaria manter o processo operacional robusto para aqueles projetados conjunto de restrições, que não é o verdadeiro ponto ideal para manter o funcionamento do processo.

Por outro lado, no caso de formulação de l_2 -MPC, o MPC vai tentar manter o processo dentro da região viável, perto da solução ótima. Outra vantagem de l_2 -MPC é o fato de ele se comporta de forma linear, se as restrições são inativas.

Quando se avalia uma formulação mista lógica do MPC, especialmente quanto às restrições, é possível notar que as restrições representam uma grande influência no desempenho do controlador. A formulação MLD é responsável por aumentar drasticamente o número de restrições para o problema do MPC. A transformação de fatos lógicos que envolvam variáveis contínuas é geralmente implementada em desigualdades lineares. Existe, portanto, um grande conjunto de desigualdades inteira-mista na lógica linear, sistemas com múltiplos modelos de operação, controle qualitativo dos processos e assim por diante descritos como problemas MLD.

Esse trabalho introduziu um controlador preditivo e ilustrou a sua aplicação para um reator químico de forma que o comportamento do processo possa ser representado por um conjunto de modelos PWA baseado em múltiplas linearizações em torno de vários pontos de operação. É fato de que a qualidade da aproximação e a complexidade do modelo são fatores que influenciam diretamente a complexidade do problema de otimização a ser resolvido.

O modelo regional desenvolvido para a formulação do MPC consegue satisfatoriamente atingir os objetivos de controle com um esforço computacional menor que o utilizado pelo controle não-linear. O controle baseado neste tipo de modelo possibilita o desenvolvimento de um sistema de controle para sistemas com características fortemente não-lineares, como a multiplicidade de estados estacionários, não sendo necessário para isto que conheça-se o modelo não-linear que representaria o comportamento do sistema. O emprego de modelos identificados regionais bastaria para um controle satisfatório.

A sensibilidade desse controlador pode ser contornada através do ajuste da sintonia do controle e os resultados seriam ainda mais significativos e satisfatórios. Como sugestões

para futuros trabalhos, explorar a sintonia do Regional-MPC pode direcionar pesquisas para um controle de sistemas com múltiplos estados estacionários com resultados excepcionais.

Nesse trabalho os algoritmos usados para a resolução dos problemas MILP e MIQP foram o *lpsolve()* e uma implementação do algoritmo *branch-and-bound* que utiliza as rotinas para resolução dos problemas LP e QP já disponíveis no Scilab. Esta classe de otimizadores já foi bastante estudada, tanto nos aspectos teóricos quanto práticos, e otimizadores bastante eficientes estão disponíveis comercialmente.

Apesar do grande potencial da formulação MLD-MPC, a aplicação nos dias de hoje consiste na formulação MIQP disponíveis na caixa de ferramentas MATLAB híbrido (BEM-PORAD, 2004). No entanto, o estudo do MPC com formulação inteira mista no contexto do sistema de MLD mostrou características interessantes que devem ser exploradas nas suas características de estabilidade e robustez.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALUR, R.; DANG, T.; IVANCIC, F. Reachability analysis of hybrid systems via predicate abstraction. *Lectures Notes Computer Science*, v. 2289, p. 35–48, 2002.
- ANTSAKLIS, P.; KOUTSOUKOS, X. Hybrid system control. *Encyclopedia of Physical Science and Technology*, v. 7, p. 445–458, 2001.
- ASARIN, E.; DANG, T.; MALER, O. d/dt: A verification tool for hybrid systems. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 2893–2898, 2001.
- BARTON, P. I. Modeling of combined discrete/continuous processes. *AIChE Journal*, v. 40, n. 6, p. 966–979, 1994.
- BEMPORAD, A. *Hybrid Toolbox - User's Guide*. 2004. Disponível em: <<http://www.ing.unitn.it/~bemporad/hybrid/toolbox>>.
- BEMPORAD, A.; CAIRANO, S. D.; GIORGETTI, N. Model predictive control of hybrid systems with applications to supply chain management. *Proceedings 49th ANIPLA congress*, 2005.
- BEMPORAD, A.; MORARI, M. Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints. *Automatica*, v. 35, p. 407–427, 1999.
- BEMPORAD, A.; MORARI, M. Verification of hybrid systems via mathematical programming. *Computer Science*, v. 1569, p. 31–45, 1999.
- BORELLI, F. *Constrained Optimal Control of Linear and Hybrid Systems*. Berlin: Springer, 2003.

- BORSCHIEV, A.; KARPOV, Y.; KHARITONOV, V. Distributed simulation of hybrid systems with anylogic and HLA. *Future Generation Computer Systems*, v. 18, p. 829–839, 2002.
- BRANICKY, M. S.; MATTSSON, S. E. Simulation of hybrid systems. *Hybrid Systems IV*, v. 1273, p. 31–56, 1997. Lecture Notes in Computer Science.
- BRASPENNING, N. C. W. M.; BORTNIK, E. M.; MORTEL-FRONCZAK, J. M. van de; ROODA, J. E. Model-based system analysis using chi and uppaal: An industrial case study. *Computers in Industry*, v. 59, p. 41–54, 2008.
- BROY, M.; JONSSON, B.; KATOEN, J. P.; LEUCKER, M.; PRETSCHENER, A. *Model-based Testing of Reactive Systems*. Berlin: Springer, 2005.
- CAETANO, A. O.; OLIVEIRA-LOPES, L. C. On mixed logical dynamical model predictive control. *Proceedings of VI Congreso Argentino de Ingeniería Química - CAIQ2010*, 2010.
- CARLONI, L.; BENETTO, M. D. D.; PASSERONE, R.; PINTO, A.; SANGIOVANNI-VICENTELLI, A. *Modeling Techniques, Programming Languages and Design Toolsets for Hybrid Systems*. Project COLUMBUS - Design of Embedded Controllers for Safety Critical Systems - European Commission, 2004.
- De SCHUTTER, B.; BOOM, T. J. J. v. Model predictive control for max-min-plus-scaling systems - efficient implementation. *Proceedings of the 6th International Workshop on Discrete Event Systems*, p. 343–348, 2002.
- Di CAIRANO, S. *Model Predictive Control of Hybrid Dynamical Systems: Stabilization, Event-driven, and Stochastic Control*. Tese (Doutorado) — Università Siena, 2008.
- DJENIDI, R.; LAVARENNE, C.; NIKOUKHAH, R.; SOREL, Y.; STEER, S. From hybrid system simulation to real-time implementation. *11th European Simulation Symposium and Exhibition*, 1999.
- EDGAR, T. F.; HIMMELBLAU, D. M.; LASDON, L. S. *Optimization of Chemical Processes*. New York: McGraw-Hill, 2001.
- ENGELL, S. Combined continuous and discrete dynamics. *Cape.net*, 1998.
- GARCIA, M. J. P. *Uma Contribuição ao Controle de Sistemas Comutados*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2009.
- HEDLUND, S.; RANTZER, A. Optimal control of hybrid systems. *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, v. 4, p. 3972–3977, 1999.

-
- HEELMES, W. P. M. H. *Linear Complementarity Systems: A Study in Hybrid Dynamics*. Tese (Doutorado) — Technische Universiteit Eindhoven, 1999.
- HEELMES, W. P. M. H.; SCHUTER, B. de; BEMPORAD, A. Equivalence of hybrid dynamical models. *Automatica*, v. 37, p. 1085–1091, 2001.
- HENZINGER, T. The theory of hybrid automata. *Proceedings of the 11th Annual Symposium on Logic in Computer Science*, 1996. In IEEE Computer Society Press.
- HEZINGER, T.; SASTRY, S. Hybrid systems: Computation and control. *Lectures Notes Computer Science*, v. 1386, 1998.
- HEZINGER, T. A.; HO, P. H.; WONG-TOI, H. Hytech: a model checker for hybrid systems. *International Journal of Softwares Tools for Technology Transfer*, v. 1, p. 110–122, 1997.
- HISKENS, I. A. Stability of hybrid systems limit cycles: Application to the compass gait biped robot. *Proceedings 40th International Conference on Decision and Control*, 2001.
- HISKENS, I. A. Stability of limit cycles in hybrid systems. *Proceedings of the 34th Hawaii International Conference on System Sciences*, 2001.
- JOHANSSON, K. H.; LYGEROUS, J.; SASTRAY, S. Modelling hybrid systems. *Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS)*, 2004.
- KOUKAI, T.; KOJIMA, A. A modeling of pedestrian flow based on mld system approach. *ICROS-SICE International Joint Conference*, p. 2150–2153, 2009.
- KRILAVICIUS, T. *Hybrid Techniques for Hybrid Systems*. Tese (Doutorado) — Centre for Telematics and Information Technology (CTIT), 2006.
- KVENAAR, T. A. M.; LEENAERTS, D. M. W. A comparison of piecewise-linear model descriptions. *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, v. 39, n. 12, p. 996–1004, 1992.
- LABINAZ, G.; BAYOUMI, M. M.; RUDIE, K. A survey of modeling and control of hybrid systems. *Annual Reviews of Control*, v. 21, p. 79–92, 1997.
- LAZAR, M. *Model Predictive Control of Hybrid Systems: Stability and Roboustness*. Tese (Doutorado) — Technische Universiteit Eindhoven, 2006.
- LEWIS, F. L.; SYRMOS, V. L. *Optimal Control*. 2nd. ed. USA: Jonh Wiley & Sons, INC., 1995.

- LINDEROTH, J. T.; RALPHS, T. K. Noncommercial software for mixed-integer linear programming. *Integer Programming Theory and Practice*, p. 253–303, 2005.
- MACIEJOWSKI, J. M. *Predictive Control with Constraints*. England: Prentice Hall, 2000.
- MALACALZA, D. E. *Controle Preditivo de Sistemas Misto Lógicos-Dinâmicos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2004.
- MIGNONE, D. *Moving Horizon Estimation and Fault Detection of Mixed Logic Dynamical Systems*. Tese (Doutorado) — Swiss Federal Institute of Technology(ETH), 1999.
- MIGNONE, D. *Control and Estimation of Hybrid Systems with Mathematical Optimization*. Dissertação (Mestrado) — Swiss Federal Institute of Technology(ETH), 2002.
- MOREIRA, V. D.; FERREIRA, P. A. V.; AMARAL, W. C. Controle preditivo robusto de sistemas híbridos incertos. *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, SBA - Sociedade Brasileira de Automática, 2004. Acesso em 23/10/2009. Disponível em: <http://www.lti.pcs.usp.br/robotics/grva/publicacoes/outras/cba2004-cd-rom/cba2004/pdf/876.pdf>.
- MUKAI, M.; AZUMA, T.; KOJIMA, A.; FUJITA, M. A min-max model predictive control for a class of hybrid dynamical systems. *Proceedings of 2003 IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*, p. 694–699, 2003.
- MUNOZ-HERNANDEZ, G. A.; JONES, D. I.; FUENTES-GOIZ, S. I. Modelling and simulation of a hydroelectric power station using mld. *Proceedings 15th International Conference on Electronics, Communications and Computers.*, p. 83–88, 2005.
- NIKOLAU, M. Model predictive controllers: A critical synthesis of theory and industrial needs. *Advances in Chemical Engineering*, v. 26, p. 131–204, 2001.
- OLARU, S.; DUMUR, D.; THOMAS J. ZAINEA, M. Predictive control for hybrid systems. implications of polyhedral pre-computations. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, v. 2, p. 510–531, 2008.
- POTOCNIK, B.; MUSIC, G.; ZUPANCIC, B. Model predictive control of discrete-time hybrid systems with discrete inputs. *ISA Transactions*, v. 44, p. 199–211, 2005.
- SCHÖLLIG, A. *Optimal Control of Hybrid Systems with Regional Dynamics*. Dissertação (Mestrado) — School of Civil and Environmental Engineering, Georgia Institute of Technology, 2007.

-
- SILVA, B. I.; RICHESON, K.; KROGH, B.; CHUTINAN, A. Modeling and verifying hybrid dynamic systems using checkmate. *40th IEEE Conference on Automatic of Mixed Processes: Hybrid dynamic Systems*, p. 323–328, 2000.
- SISTU, P. B.; BEQUETTE, B. W. Nonlinear predictive control of uncertain processes: Application to a cstr. *AIChE Journal*, v. 37, n. 11, p. 1711–1723, November 1991.
- SOARES, R. d. P.; SECCHI, A. R. EMSO: A new environment for modelling, simulation and optimisation. *Computer Aided Chemical Engineering*, v. 14, p. 947–952, 2003.
- Souza Junior, D. L.; OLIVEIRA-LOPES, L. C. On l1-predictive control of mixed-logical dynamical systems. *Computer Aided Chemical Engineering 10th International Symposium on Process Systems Engineering - PSE2009*, v. 27, p. 1401–1406, 2009.
- TORISSI, F. D.; BEMPORAD, A. HYSDEL- a tool for generating computational hybrid models for analysis and synthesis problems. *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, v. 12, n. 2, p. 235–249, 2004.
- TORRISI, F. D. *Modeling and Reach-Set Computational for Analysis and Optimal Control of Discrete Hybrid Automata*. Tese (Doutorado) — Swiss Federal Institute Of Technology Zurich, 2003.
- TSUDA, K.; MIGNONE, D.; FERRARI-TRECATE, G.; MORARI, M. Reconfiguration strategies for hybrid systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, v. 2, p. 868–873, 2002.
- van der SCHAFT, A. J.; SCHUMACHER, J. M. Complementarity modeling of hybrid systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, v. 43, p. 483–490, 1998.
- VILLA, J. L.; DUQUE, M.; GAUTHIER, A.; RAKOTO-RAVALONTSALAMA, N. MLD control of hybrid systems: Application to the three-tank benchmarkproblem. *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics.*, v. 1, p. 666–671, 2003.
- WANG, Y.; BOYD, S. Fast model predictive control using online optimization. *Proceedings IFAC World Congress*, p. 6974–6997, 2008.
- WEUSTINK, P. B. T.; VRIES, T. J. A. de; BREEDVELD, P. C. Object-orientend modeling and simulation of mechatronic systems with 20-sim 3.0. *Mechatronics*, v. 873-878, 1998.
- WITSENHAUSEN, H. S. A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, v. 11, n. 2, p. 161–167, April 1966.

APÊNDICE A

Restrições do Controle Preditivo para o formalismo MLD

A.1 Restrições de Igualdade

O formalismo MLD apresenta duas restrições de igualdade para o problema de controle. São elas:

$$\mathbf{x}_{k+1+h} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+h} + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_{k+h} + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}_{k+h} + \mathbf{B}_3\mathbf{z}_{k+h} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{y}_{k+h} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{k+h} + \mathbf{D}_1\mathbf{u}_{k+h} + \mathbf{D}_2\boldsymbol{\delta}_{k+h} + \mathbf{D}_3\mathbf{z}_{k+h} \quad (\text{A.2})$$

Para cada instante k , têm-se N predições do comportamento do sistema representadas, cada uma dela, pelo incremento de tempo h que, como definido no desenvolvimento do Controle Preditivo apresentado no Capítulo 3, varia de 0 a $N - 1$. Estas predições devem estar adequadas a cada uma das restrições apresentadas acima. Ressalta-se que o índice $|_k$ foi omitido neste Apêndice apenas a título de simplificação porém todas as variáveis são calculadas no instante k .

Desenvolvendo a Equação (A.1) para um horizonte de predição $N = 3$:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_k + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}_k + \mathbf{B}_3\mathbf{z}_k \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}_{k+1} + \mathbf{B}_3\mathbf{z}_{k+1} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{x}_{k+3} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+2} + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_{k+2} + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}_{k+2} + \mathbf{B}_3\mathbf{z}_{k+2} \quad (\text{A.5})$$

Para efeito de simplificação das restrições, todas serão formuladas de modo que sejam funções do estado atual $\mathbf{x}_k$ já que este pode ser conhecido ou estimado e também será função das demais variáveis a serem previstas pelo controlador. Assim, substituindo a Equação (A.3) na Equação (A.4) têm-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+2} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}_{k+1} + \mathbf{B}_3\mathbf{z}_{k+1} \\ &= \mathbf{A}[\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_k + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}_k + \mathbf{B}_3\mathbf{z}_k] + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_{k+1} + \\ &\quad + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}_{k+1} + \mathbf{B}_3\mathbf{z}_{k+1} \\ &= \mathbf{A}^2\mathbf{x}_k + \mathbf{AB}_1\mathbf{u}_k + \mathbf{AB}_2\boldsymbol{\delta}_k + \mathbf{AB}_3\mathbf{z}_k + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_{k+1} + \\ &\quad + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}_{k+1} + \mathbf{B}_3\mathbf{z}_{k+1} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Realizando um procedimento semelhante, substitui-se a Equação (A.6) na Equação (A.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+3} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+2} + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_{k+2} + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}_{k+2} + \mathbf{B}_3\mathbf{z}_{k+2} \\ &= \mathbf{A}[\mathbf{A}^2\mathbf{x}_k + \mathbf{AB}_1\mathbf{u}_k + \mathbf{AB}_2\boldsymbol{\delta}_k + \mathbf{AB}_3\mathbf{z}_k + \\ &\quad + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}_{k+1} + \mathbf{B}_3\mathbf{z}_{k+1}] + \\ &\quad + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_{k+2} + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}_{k+2} + \mathbf{B}_3\mathbf{z}_{k+2} \\ &= \mathbf{A}^3\mathbf{x}_k + \mathbf{A}^2\mathbf{B}_1\mathbf{u}_k + \mathbf{A}^2\mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}_k + \mathbf{A}^2\mathbf{B}_3\mathbf{z}_k + \\ &\quad + \mathbf{AB}_1\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{AB}_2\boldsymbol{\delta}_{k+1} + \mathbf{AB}_3\mathbf{z}_{k+1} + \\ &\quad + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_{k+2} + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}_{k+2} + \mathbf{B}_3\mathbf{z}_{k+2} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Organizando as Equações (A.3), (A.6) e (A.7):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_{k+2} \\ \mathbf{x}_{k+3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{A}^3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}_1 & \mathbf{AB}_1 & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{u}_{k+2} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}_2 & \mathbf{AB}_2 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k \\ \boldsymbol{\delta}_{k+1} \\ \boldsymbol{\delta}_{k+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB}_3 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}_3 & \mathbf{AB}_3 & \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} \\ \mathbf{z}_{k+2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Generalizando para um horizonte N arbitrário:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{k+N} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^N \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}_1 & \mathbf{AB}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}^{N-3}\mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+N-1} \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}_2 & \mathbf{AB}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}^{N-3}\mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k \\ \boldsymbol{\delta}_{k+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+N-1} \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB}_3 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}_3 & \mathbf{AB}_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}_3 & \mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B}_3 & \mathbf{A}^{N-3}\mathbf{B}_3 & \dots & \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+N-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})
 \end{aligned}$$

Considerando a formulação dos problemas de controle desenvolvidos no Capítulo 3, define-se $\mathbf{X}$. Rearranjando a Equação (A.9) na forma $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{X} = \boldsymbol{\beta}$ tem-se:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \{\mathbf{U}_k^N\}^T & \{\boldsymbol{\Delta}_k^N\}^T & \{\mathbf{Z}_k^N\}^T & \{\mathbf{X}_k^N\}^T & \{\mathbf{Y}_k^N\}^T \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.10})$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{A}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{N-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k; \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

nas quais $\mathbf{X}_k^N$ é definido pela Equação (3.30), $\mathbf{U}_k^N$ pela Equação (3.29) e as variáveis Δ_k^N , $\mathbf{Z}_k^N$ e $\mathbf{Y}_k^N$ de maneira análoga a $\mathbf{U}_k^N$. Define-se ainda:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{AB}_1 & -\mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}^2\mathbf{B}_1 & -\mathbf{AB}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}_1 & -\mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B}_1 & -\mathbf{A}^{N-3}\mathbf{B}_1 & \dots & -\mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{AB}_2 & -\mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}^2\mathbf{B}_2 & -\mathbf{AB}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}_2 & -\mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B}_2 & -\mathbf{A}^{N-3}\mathbf{B}_2 & \dots & -\mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{AB}_3 & -\mathbf{B}_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}^2\mathbf{B}_3 & -\mathbf{AB}_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}_3 & -\mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B}_3 & -\mathbf{A}^{N-3}\mathbf{B}_3 & \dots & -\mathbf{B}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$\alpha_4 = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{N \text{ vezes}}; \quad \alpha_5 = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{N \text{ vezes}} \quad (\text{A.15})$$

Desenvolvendo a Equação (B.2) também para $N = 3$ e posteriormente rearranjando-as na forma matricial:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}_1\mathbf{u}_k + \mathbf{D}_2\boldsymbol{\delta}_k + \mathbf{D}_3\mathbf{z}_k \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{D}_1\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{D}_2\boldsymbol{\delta}_{k+1} + \mathbf{D}_3\mathbf{z}_{k+1} \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{y}_{k+2} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{k+2} + \mathbf{D}_1\mathbf{u}_{k+2} + \mathbf{D}_2\boldsymbol{\delta}_{k+2} + \mathbf{D}_3\mathbf{z}_{k+2} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k \\ \mathbf{y}_{k+1} \\ \mathbf{y}_{k+2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_{k+2} \\ \mathbf{x}_{k+3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{u}_{k+2} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{D}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k \\ \boldsymbol{\delta}_{k+1} \\ \boldsymbol{\delta}_{k+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} \\ \mathbf{z}_{k+2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

Generalizando para N qualquer:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k \\ \mathbf{y}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k+N-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{k+N} \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k \\ \boldsymbol{\delta}_{k+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+N-1} \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_3 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+N-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})
 \end{aligned}$$

Analogamente às equações desenvolvidas anteriormente, o rearranjo das equações para que estas estejam na forma adequada para o controle é $\boldsymbol{\phi}\mathbf{X} = \boldsymbol{\psi}$ em que

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 & \phi_5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \quad (\text{A.21})$$

$$\phi_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{D}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mathbf{D}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{D}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{D}_1 \end{bmatrix}}_{N \text{ vezes}} \quad (\text{A.22})$$

$$\phi_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{D}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mathbf{D}_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{D}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{D}_2 \end{bmatrix}}_{N \text{ vezes}} \quad (\text{A.23})$$

$$\phi_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{D}_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mathbf{D}_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{D}_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{D}_3 \end{bmatrix}}_{N \text{ vezes}} \quad (\text{A.24})$$

$$\phi_4 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{C} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}}_{N \text{ vezes}} \quad \phi_5 = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{N \text{ vezes}} \quad (\text{A.25})$$

A definição do vetor $\mathbf{X}$ permanece a mesma apresentada na Equação (A.10). O valor dos estados no instante k , $\mathbf{x}_k$ é sempre conhecido.

A.2 Inequações

As inequações a que o problema MLD é submetido são da forma:

$$\mathbf{E}_2 \boldsymbol{\delta}_{k+h} + \mathbf{E}_3 \mathbf{z}_{k+h} \leq \mathbf{E}_4 \mathbf{x}_{k+h} + \mathbf{E}_1 \mathbf{u}_{k+h} + \mathbf{E}_5 \quad (\text{A.26})$$

Supondo um horizonte de predição $N = 3$, com h variando de 0 a $N - 1$, ter-se-ia as seguintes restrições para o problema:

$$\mathbf{E}_2 \boldsymbol{\delta}_k + \mathbf{E}_3 \mathbf{z}_k \leq \mathbf{E}_4 \mathbf{x}_k + \mathbf{E}_1 \mathbf{u}_k + \mathbf{E}_5 \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{E}_2 \boldsymbol{\delta}_{k+2} + \mathbf{E}_3 \mathbf{z}_{k+2} \leq \mathbf{E}_4 \mathbf{x}_{k+2} + \mathbf{E}_1 \mathbf{u}_{k+2} + \mathbf{E}_5 \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{E}_2 \boldsymbol{\delta}_{k+1} + \mathbf{E}_3 \mathbf{z}_{k+1} \leq \mathbf{E}_4 \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{E}_1 \mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{E}_5 \quad (\text{A.29})$$

Para o problema de controle, as inequações são organizadas na forma $\boldsymbol{\varphi} \mathbf{X} \leq \boldsymbol{\lambda}$. Agrupando as Equações (A.27)-(A.29) na forma matricial. Para N arbitrário:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{E}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k \\ \boldsymbol{\delta}_{k+1} \\ \boldsymbol{\delta}_{k+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} \\ \mathbf{z}_{k+2} \end{bmatrix} - \\ & - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_4 & \mathbf{E}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_{k+2} \\ \mathbf{x}_{k+3} \end{bmatrix} - \\ & - \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{u}_{k+2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{E}_5 + \mathbf{E}_4 \mathbf{x}_k \\ \mathbf{E}_5 \\ \mathbf{E}_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.30}) \end{aligned}$$

Generalizando para N arbitrário:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{E}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k \\ \boldsymbol{\delta}_{k+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_3 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+N-1} \end{bmatrix} - \\
 & - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_4 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_4 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{E}_4 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{k+N} \end{bmatrix} - \\
 & - \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{E}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+N-1} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{E}_5 + \mathbf{E}_4 \mathbf{x}_k \\ \mathbf{E}_5 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})
 \end{aligned}$$

Isolando o vetor $\mathbf{X}$ do lado esquerdo da Equação (A.31) têm-se na forma $\boldsymbol{\varphi} \mathbf{X} \leq \boldsymbol{\lambda}$:

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{E}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{E}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{E}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{E}_1 \end{bmatrix}}_{N \text{ vezes}} \quad (\text{A.32})$$

$$\varphi_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix}}_{N \text{ vezes}} \quad (\text{A.33})$$

$$\varphi_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_3 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}}_{N \text{ vezes}} \quad (\text{A.34})$$

$$\varphi_4 = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{E}_4 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{E}_4 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{E}_4 & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{N \text{ vezes}} ; \quad \varphi_5 = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{N \text{ vezes}} \quad (\text{A.35})$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & \varphi_5 \end{bmatrix} \quad \lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_5 + \mathbf{E}_4 \mathbf{x}_k \\ \mathbf{E}_5 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

APÊNDICE B

Restrições para o sistema de três tanques no formato MLD



Este apêndice tem o objetivo indicar como se constrói as inequações que compõem o modelo MLD do problema de três tanques. As equações são desenvolvidas para as variáveis auxiliares $\delta(k)$ e $\mathbf{z}(k)$ e a partir delas pode-se montar as matrizes $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_4$ e $\mathbf{E}_5$.

B.1 Inequações para o sistema de três tanques

As inequações apresentadas no formalismo MLD têm o objetivo de adequar a inserção das variáveis auxiliares de modo que o comportamento do sistema continue representando o sistema físico real.

As relações utilizadas para definir as inequações do formalismo MLD são apresentadas na Tabela (2.6) de acordo com a definição estabelecida para a função $f(x)$.

B.1.1 Inequações para $f(x) = h_i(k) - h_v$

Definindo-se $h_i(k) - h_v \geq 0$, aplica-se as seguintes restrições:

$$[\delta_i(k) = 1] \leftrightarrow [h_i(k) - h_v \geq 0] \text{ equivale a } \begin{cases} h_i(k) - h_v \leq -\epsilon + (M + \epsilon)\delta_i(k) \\ h_i(k) - h_v \geq -m(\delta_i(k) - 1) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Para $i = 1, 2, 3$, define-se $m = -h_v$ e $M = h_{max} - h_v$. Assim:

$$h_1(k) - h_v \leq -\epsilon + (M + \epsilon)\delta_1(k) \quad (\text{B.2})$$

$$h_1(k) - h_v \geq -m(\delta_1(k) - 1) \quad (\text{B.3})$$

$$h_2(k) - h_v \leq -\epsilon + (M + \epsilon)\delta_2(k) \quad (\text{B.4})$$

$$h_2(k) - h_v \geq -m(\delta_2(k) - 1) \quad (\text{B.5})$$

$$h_3(k) - h_v \leq -\epsilon + (M + \epsilon)\delta_3(k) \quad (\text{B.6})$$

$$h_3(k) - h_v \geq -m(\delta_3(k) - 1) \quad (\text{B.7})$$

B.1.2 Inequações para $z_{0i}(k) = \delta_i(k)f(x)$

As variáveis auxiliares $z_{0i}(k)$ são inseridas para o produto entre as variáveis inteiras $\delta_i(k)$ e $h_i(k)$. Fazendo $z_{0i}(k) = \delta_i(k)f(x) = \delta(h_i(k) - h_v)$:

$$z_{0i}(k) = \delta(h_i(k) - h_v) \begin{cases} z_{0i}(k) - M\delta_i(k) \leq 0 \\ -z_{0i}(k) + m\delta_i(k) \leq 0 \\ z_{0i}(k) \leq h_i(k) - h_v - m(1 - \delta_i(k)) \\ -z_{0i}(k) \leq -h_i(k) + h_v + M(1 - \delta_i(k)) \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Os limites m e M permanecem os mesmo definidos na seção anterior. Então, para $i = 1, 2, 3$:

$$z_{01}(k) - M\delta_1(k) \leq 0 \quad (\text{B.9})$$

$$-z_{01}(k) + m\delta_1(k) \leq 0 \quad (\text{B.10})$$

$$z_{01}(k) \leq h_1(k) - h_v - m(1 - \delta_1(k)) \quad (\text{B.11})$$

$$-z_{01}(k) \leq -h_1(k) + h_v + M(1 - \delta_1(k)) \quad (\text{B.12})$$

$$z_{02}(k) - M\delta_2(k) \leq 0 \quad (\text{B.13})$$

$$-z_{02}(k) + m\delta_2(k) \leq 0 \quad (\text{B.14})$$

$$z_{02}(k) \leq h_2(k) - h_v - m(1 - \delta_2(k)) \quad (\text{B.15})$$

$$-z_{02}(k) \leq -h_2(k) + h_v + M(1 - \delta_2(k)) \quad (\text{B.16})$$

$$z_{03}(k) - M\delta_3(k) \leq 0 \quad (\text{B.17})$$

$$-z_{03}(k) + m\delta_3(k) \leq 0 \quad (\text{B.18})$$

$$z_{03}(k) \leq h_3(k) - h_v - m(1 - \delta_3(k)) \quad (\text{B.19})$$

$$-z_{03}(k) \leq -h_3(k) + h_v + M(1 - \delta_3(k)) \quad (\text{B.20})$$

B.1.3 Inequações para $z_{i3}(k) = V_{i3}(k)f(x)$

As variáveis $z_{i3}(k)$ são determinadas com a definição da função $f(x) = (h_i(k) - h_3(k))$; $i = 1, 2$ pelas inequações:

$$z_{13}(k) - \overline{M}V_{13}(k) \leq 0 \quad (\text{B.21})$$

$$-z_{13}(k) + \overline{m}V_{13}(k) \leq 0 \quad (\text{B.22})$$

$$z_{13}(k) \leq h_1(k) - h_3(k) - \overline{m}(1 - V_{13}(k)) \quad (\text{B.23})$$

$$-z_{13}(k) \leq -h_1(k) + h_3(k) + \overline{M}(1 - V_{13}(k)) \quad (\text{B.24})$$

$$z_{23}(k) - \overline{M}V_{23}(k) \leq 0 \quad (\text{B.25})$$

$$-z_{23}(k) + \overline{m}V_{23}(k) \leq 0 \quad (\text{B.26})$$

$$z_{23}(k) \leq h_2(k) - h_3(k) - \overline{m}(1 - V_{23}(k)) \quad (\text{B.27})$$

$$-z_{23}(k) \leq -h_2(k) + h_3(k) + \overline{M}(1 - V_{23}(k)) \quad (\text{B.28})$$

Aqui os limites superior e inferior para a função $f(x)$ são definidos como $\overline{M} = h_{max}$ e $\overline{m} = -h_{max}$.

B.1.4 Inequações para $z_{L1}(k) = V_{L1}(k)h_1(k)$, $z_{L2}(k) = V_{L2}(k)h_2(k)$ e $z_{N3}(k) = V_{N3}(k)h_3(k)$

Para eliminar o produto entre as alturas e as válvulas de saída de cada tanque são inseridas as seguintes inequações:

$$z_{L1}(k) - \overline{M}V_{L1}(k) \leq 0 \quad (\text{B.29})$$

$$-z_{L1}(k) \leq 0 \quad (\text{B.30})$$

$$z_{L1}(k) \leq h_1(k) \quad (\text{B.31})$$

$$-z_{L1}(k) \leq -h_1(k)\overline{M}(1 - V_{L1}(k)) \quad (\text{B.32})$$

$$z_{L2}(k) - \overline{M}V_{L2}(k) \leq 0 \quad (\text{B.33})$$

$$-z_{L2}(k) \leq 0 \quad (\text{B.34})$$

$$z_{L2}(k) \leq h_2(k) \quad (\text{B.35})$$

$$-z_{L2}(k) \leq -h_2(k)\overline{M}(1 - V_{L2}(k)) \quad (\text{B.36})$$

$$z_{N3}(k) - \overline{M}V_{N3}(k) \leq 0 \quad (\text{B.37})$$

$$-z_{N3}(k) \leq 0 \quad (\text{B.38})$$

$$z_{N3}(k) \leq h_3(k) \quad (\text{B.39})$$

$$-z_{N3}(k) \leq -h_3(k)\overline{M}(1 - V_{N3}(k)) \quad (\text{B.40})$$

B.1.5 Inequações para $z_i(k) = V_i(k)f(x)$

Finalmente, são inseridas variáveis auxiliares para eliminar o produto entre as variáveis binária $V_i(k)$ e as variáveis auxiliares contínuas $z_{0i}(k)$. Assim, baseadas nas inequações apresentadas na Tabela (2.6), substituindo nestas a identidade $f(x) = z_{0i}(k) - z_{03}(k)$, têm-se:

$$z_1(k) - \overline{M}V_1(k) \leq 0 \quad (\text{B.41})$$

$$-z_1(k) + \overline{m}V_1(k) \leq 0 \quad (\text{B.42})$$

$$z_1(k) \leq z_{01}(k) - z_{03}(k) - \overline{m}(1 - V_1(k)) \quad (\text{B.43})$$

$$-z_1(k) \leq -z_{01}(k) + z_{03}(k) + \overline{M}(1 - V_1(k)) \quad (\text{B.44})$$

$$z_2(k) - \overline{M}V_2(k) \leq 0 \quad (\text{B.45})$$

$$-z_2(k) + \overline{m}V_2(k) \leq 0 \quad (\text{B.46})$$

$$z_2(k) \leq z_{02}(k) - z_{03}(k) - \overline{m}(1 - V_2(k)) \quad (\text{B.47})$$

$$-z_2(k) \leq -z_{02}(k) + z_{03}(k) + \overline{M}(1 - V_2(k)) \quad (\text{B.48})$$

Novamente, tanto aqui quanto na seção anterior, $\overline{M} = h_{max}$ e $\overline{m} = -h_{max}$.

Por último, para a construção do modelo MLD, incorpora-se as restrições físicas ou operacionais do processo, nesse caso dadas por:

$$0 \leq h_i \leq h_{max}, \quad (i=1,2,3) \quad (\text{B.49})$$

$$0 \leq q_i \leq q_{max}, \quad (i=1,2) \quad (\text{B.50})$$

APÊNDICE C

Restrições para o reator CSTR com troca térmica



Este apêndice tem o objetivo de apresentar as inequações a que o sistema representado pelo reator CSTR com troca térmica é submetido. As equações são desenvolvidas para as variáveis auxiliares $\delta(k)$ e $\mathbf{z}(k)$ de acordo com o formalismo MLD. A partir delas as matrizes $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_4$ e $\mathbf{E}_5$ que compõem o formalismo são definidas.

C.1 Inequações para o reator CSTR com troca térmica

As inequações apresentadas no formalismo MLD têm o objetivo de adequar a inserção das variáveis auxiliares de modo que o comportamento do sistema continue representando o sistema físico real.

As relações utilizadas para definir as inequações do formalismo MLD são apresentadas na Tabela 2.6 de acordo com a definição estabelecida para a função $f(x)$.

C.1.1 Inequações para os modelos regionais

Como definido no Capítulo 4, divide-se o espaço de estados de operação do sistema de modo que cada valor do estado estacionário esteja contido em uma das divisões e seja único nesta região. O conjunto de modelos lineares e discretizados para o reator CSTR com troca térmica é dado por:

$$x(k+1) = \begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_1, & \text{se } \delta_1(k) = 1 \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_2, & \text{se } \delta_2(k) = 1 \\ \mathbf{A}_3 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_3 \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_3, & \text{se } \delta_3(k) = 1 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Em que:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0,8889314 & -0,0123021 \\ 0,1253856 & 0,9750652 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0,0001889 \\ 0,0296286 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0,1060000 \\ -0,0852000 \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0,8241198 & -0,0339843 \\ 0,6364556 & 1,1460423 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} -0,0005125 \\ 0,0321922 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0,1907 \\ -0,7537 \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0,6001702 & -0,0462931 \\ 2,401561 & 1,2429773 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} -0,0007131 \\ 0,0337809 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0,3118998 \\ -1,7083 \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

As respectivas regiões são definidas como $\mathbf{R}_1 =]0,78; 1] \times [0; 7]$, $\mathbf{R}_2 =]0,35; 0,78] \times [0; 7]$ e $\mathbf{R}_3 = [0; 0,35] \times [0; 7]$. As variáveis auxiliares binárias δ_i são definidas de acordo com o desempenho do sistema, situando-o em apenas uma das três regiões. Para garantir que apenas um dos modelos regionais seja utilizado em cada ponto, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\delta_1(k) + \delta_2(k) + \delta_3(k) = 1 \quad (\text{C.5})$$

As restrições que definem as regiões no espaço de estados podem ser adicionadas ao modelo MLD como conjunto de inequações:

$$\mathbf{S}_i \mathbf{x}(k) - \mathbf{T}_i \leq \mathbf{M}_i^* (1 - \delta_i(k)), i = 1, \dots, 3. \quad (\text{C.6})$$

em que

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,78 \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0,78 \\ -0,35 \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

Define-se ainda:

$$\mathbf{M}_i^* = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}} \mathbf{S}_i \mathbf{x}(k) - \mathbf{T}_i \quad (\text{C.10})$$

C.1.2 Inequações para $z_i(k) = [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_i] \delta_i(k)$

As variáveis auxiliares z_i (para $i = 1, 2, 3$) são inseridas para que o produto entre as variáveis inteiras $\delta_i(k)$ e as variáveis contínuas $\mathbf{x}(k)$. Através da Tabela 2.6 determina-se:

$$z_{2i-1,j}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \delta_i(k) \text{ equivale a} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{cases} z_i(k) - \overline{M}_i \delta_i(k) \leq 0 \\ -z_i(k) + \overline{m}_i \delta_i(k) \leq 0 \\ z_i(k) \leq [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_i] - \overline{m}_i (1 - \delta_i(k)) \\ -z_i(k) \leq -[\mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_i] + \overline{M}_i (1 - \delta_i(k)) \end{cases}$$

sendo $\overline{M}_i$ e $\overline{m}_i$ são vetores de dimensões semelhantes a $\mathbf{x}(k)$ com os valores máximos e mínimos para a função f definida. Ressalta-se que z_i também possui as mesmas dimensões de $\mathbf{x}(k)$. Assim,

$$z_1(k) - \overline{M}_1 \delta_1(k) \leq 0 \quad (\text{C.12})$$

$$-z_1(k) + \overline{m}_1 \delta_1(k) \leq 0 \quad (\text{C.13})$$

$$z_1(k) \leq [\mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_1] - \overline{m}_1(1 - \delta_1(k)) \quad (\text{C.14})$$

$$-z_1(k) \leq -[\mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_1] + \overline{M}_1(1 - \delta_1(k)) \quad (\text{C.15})$$

$$z_2(k) - \overline{M}_2 \delta_1(k) \leq 0 \quad (\text{C.16})$$

$$-z_2(k) + \overline{m}_2 \delta_2(k) \leq 0 \quad (\text{C.17})$$

$$z_2(k) \leq [\mathbf{A}_2 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_2] - \overline{m}_2(1 - \delta_2(k)) \quad (\text{C.18})$$

$$-z_2(k) \leq -[\mathbf{A}_2 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_2] + \overline{M}_2(1 - \delta_2(k)) \quad (\text{C.19})$$

$$z_3(k) - \overline{M}_3 \delta_3(k) \leq 0 \quad (\text{C.20})$$

$$-z_3(k) + \overline{m}_3 \delta_3(k) \leq 0 \quad (\text{C.21})$$

$$z_3(k) \leq [\mathbf{A}_3 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_3 \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_3] - \overline{m}_3(1 - \delta_3(k)) \quad (\text{C.22})$$

$$-z_3(k) \leq -[\mathbf{A}_3 \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_3 \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_3] + \overline{M}_3(1 - \delta_3(k)) \quad (\text{C.23})$$

Assim, define-se o problema para o modelo MLD do reator CSTR com troca térmica. O problema apresenta um total de 30 inequações excluindo as inequações referentes aos limites inferiores e superiores de cada variável.

APÊNDICE D

Otimização com Modelos MLD



Neste apêndice apresenta-se uma visão geral sobre os tipos de problemas de otimização com restrição de inteiros, MILP (*Mixed Integer Linear Programming*) e MIQP (*Mixed Integer Quadratic Programming*), abordados no desenvolvimento desse trabalho. Assim, apresenta-se uma visão geral do otimizador *Lpsolve* e do algoritmo *Branch-and-Bound* bem como sua aplicação na resolução destes tipos de problemas.

D.1 MILP e MIQP

O problema de otimização linear inteira mista (MILP) é um problema de otimização matemática com restrições e função custo lineares em que um subconjunto especificado de variáveis são obrigados a assumir valores inteiros. Para o poliedro definido pela Equação (D.2), o problema de formulação linear pode ser definido de maneira generalizada como (LINDEROTH; RALPHS, 2005):

$$z_{IP} = \min_{x \in \mathcal{P}^I} \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (\text{D.1})$$

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, x \geq 0\} \quad (\text{D.2})$$

Nestas equações, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Para o problema MILP, supõem-se que as variáveis do vetor $\mathbf{x}$ de 1 a p , sendo $p \leq n$, são variáveis inteiras determinando como região viável para o problema $\mathcal{P}^I = \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. As demais variáveis são definidas como variáveis contínuas e $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor que define a função objetivo.

Outra opção para o problema de otimização é o desenvolvimento da função objetivo como um função da forma quadrática. Este tipo de formulação é conhecida como MIQP quando envolve variáveis inteiras e contínuas na formulação do problema. De maneira generalizada, o problema MIQP pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{f} \mathbf{x}, \quad (\text{D.3})$$

sujeito a

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (\text{D.4})$$

$$\mathbf{A}_{eq} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq} \quad (\text{D.5})$$

$$v_{lb} \leq \mathbf{x} \leq v_{ub} \quad (\text{D.6})$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_c} \times \{0, 1\}^{n_d} \quad (\text{D.7})$$

$$\mathbf{x}(i_{vartype}) \in \{0, 1\}^{n_d} \quad (\text{D.8})$$

As matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ são matrizes que definem as inequações a que o problema está submetido assim como $\mathbf{A}_{eq}$ e $\mathbf{b}_{eq}$ definem as restrições de igualdade do problema. $\mathbf{Q}$ é definida como uma matriz positiva definida e os limites inferior e superior do vetor de variáveis $\mathbf{x}$ são definidos como $\mathbf{v}_{lb}$ e $\mathbf{v}_{ub}$. Nota-se que, se $\mathbf{Q} = 0$, o problema de otimização torna-se um problema MILP.

A principal diferença entre um problema de otimização linear e quadrática está na definição da posição em que o ponto ótimo é localizado em cada uma das abordagens. No problema de formulação linear, a localização do ponto ótimo que é solução para o sistema está sempre na interseção das restrições enquanto para o problema de formulação quadrática este ponto situa-se dentro de uma região delimitada pela restrições porém não necessariamente em um ponto de interseção de restrições (MACIEJOWSKI, 2000).

D.2 Algoritmo *Branch-and-Bound*

Branch-and-Bound é um algoritmo dedicado a resolução de problemas de otimização linear e não linear inteira mista. É considerado o algoritmo mais utilizado em *softwares* comer-

ciais para a resolução de problemas de MIQP (EDGAR et al., 2001). Uma das estratégias para a aplicação do Algoritmo *Branch-and-Bound* é apresentada na Figura (D.1):

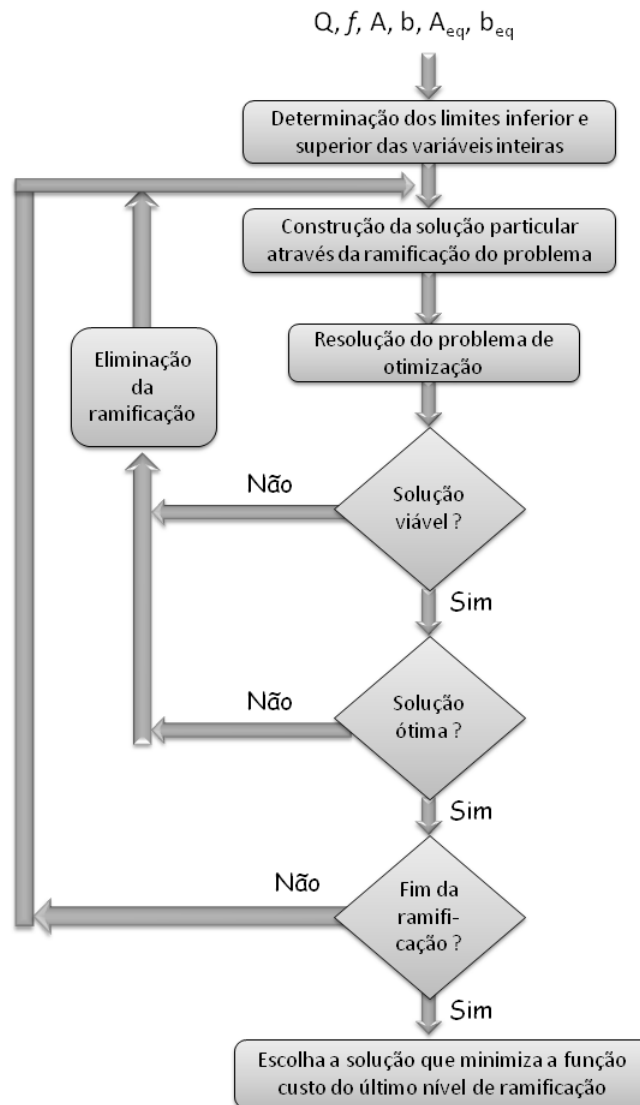


Figura D.1: Estratégia para resolução de problemas de otimização com o método *Branch-and-Bound* (adaptado de Villa et al. (2003)).

A resolução do problema inicia-se com a determinação dos limites inferior e superior para as variáveis inteiras através da resolução “relaxada” do problema, ou seja, permitindo que as variáveis inteiras assumam valores fracionários.

Se o valor encontrado da solução para as variáveis inteiras for um inteiro então esta solução é considerada viável e analisada para verificar se é a solução ótima. Se constatada que a solução ótima foi encontrada o processo termina.

Caso isto não ocorra e um valor fracionário é encontrado, são feitas ramificações em que se analisa os valores inteiros mais próximos deste valor. Verifica-se se estes valores

são viáveis para o problema. Se o limite inferior ou superior de uma ramificação excede a melhor solução viável conhecida, nenhuma solução ótima global pode existir no subespaço da região factível. Portanto, a ramificação pode ser removida da consideração.

A busca da solução é feita até que todos as ramificações tenham sido resolvidos ou podadas, ou até algum limite especificado for encontrado entre a melhor solução encontrada e os limites inferiores em todos os subproblemas não resolvidos.

D.3 *Lpsolve*

O *Lpsolve* é um código de otimização aplicado a problemas de programação linear que apresentam variáveis inteiras. Baseia-se no método *Branch-and-Bound* para a resolução de problemas sendo a restrição do otimizador apenas ligada a linearidade da função custo e as restrições do problema. Os modelos podem ser construídos na memória sem o uso de arquivo e o *Lpsolve* não possui limitação de tamanho para estes modelos.

Este otimizador pode ser utilizado através do *Scilab* por de uma interface externa e as matrizes para a formulação do modelo podem ser transferidas diretamente de um para o outro em ambas as direções. No *Lpsolve* o problema de otimização pode ser formulado da seguinte maneira:

```
[lp_handle] = lp_maker(f,a,b,e,vlb,vub,xint,scalemode,setminim)
f:  vetor n x 1 de coeficientes para a função objetivo linear.
a:  matriz m x n das restrições lineares.
b:  vetor m x 1 de coeficientes do lado direito das restrições
    lineares.
e:  vetor m x 1 que determina o sentido das restrições:
    e(i) < 0 ==> menor que
    e(i) = 0 ==> igual
    e(i) > 0 ==> maior que
vlb: vetor n x 1 de limites inferiores não negativos. Se vazio ou
    omitido os limites inferiores serão considerados zero.
vub: vetor n x 1 de limites superiores. Pode ser omitido ou vazio.
xint: vetor que determina quais variáveis são inteiras.
scalemode: determina a relação entre a escala das variáveis do problema.
setminim: definir lp máximo quando esta a escala determinada é
    igual a 0 ou omitida.
```
