

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Leandro Barcelos Ferreira

**Modelo de escoamento dos rejeitos de
mineração decorrentes do rompimento de
barragens baseado na hidrodinâmica de
partículas suavizadas**

Uberlândia, Brasil

2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Leandro Barcelos Ferreira

**Modelo de escoamento dos rejeitos de mineração
decorrentes do rompimento de barragens baseado na
hidrodinâmica de partículas suavizadas**

Trabalho de conclusão de curso apresentado
à Faculdade de Computação da Universidade
Federal de Uberlândia, como parte dos requi-
sitos exigidos para a obtenção título de Ba-
charel em Ciência da Computação.

Orientador: Luiz Gustavo Almeida Martins

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Faculdade de Computação

Bacharelado em Ciência da Computação

Uberlândia, Brasil

2025

Leandro Barcelos Ferreira

Modelo de escoamento dos rejeitos de mineração decorrentes do rompimento de barragens baseado na hidrodinâmica de partículas suavizadas

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Computação da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção título de Bacharel em Ciência da Computação.

Trabalho aprovado. Uberlândia, Brasil, 14 de maio de 2025:

**Prof. Dr. Luiz Gustavo Almeida
Martins**
Orientador

**Prof. Dra. Maria Adriana Vidigal de
Lima**

**Prof. Dr. Paulo Rodolfo da Silva Leite
Coelho**

Uberlândia, Brasil
2025

Resumo

Os rompimentos de barragens de rejeitos de mineração são cada vez mais uma fonte de preocupação, provocando sérios danos tanto ambientais quanto sociais. Para mitigar suas consequências, é crucial compreender a dinâmica de propagação dos rejeitos e criar ferramentas de avaliação de risco. Este estudo explora o desenvolvimento de um modelo computacional que utiliza a metodologia da Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas (SPH) para simular o fluxo de rejeitos após falhas em barragens, com o objetivo de replicar os padrões observados nos desastres de Mariana e Brumadinho. O trabalho baseia-se na implementação do método SPH com tratamento de fronteiras para topografias complexas, utilizando o modelo digital de elevação (MDE) fornecido pela Missão Topográfica de Radar Embarcado (SRTM), e na representação do comportamento não-newtoniano dos rejeitos. Resultados experimentais validam a eficiência do modelo desenvolvido, resultando em simulações que, mesmo sem alcançar sempre os valores ideais, refletem adequadamente os padrões de fluxo e a distribuição espacial dos rejeitos. A análise do desempenho do algoritmo demonstrou que o método pode ser aplicado em várias situações reais, auxiliando na formulação de planos de contingência mais eficazes.

Palavras-chave: Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas, Modelo do Fluxo de Rejeitos de Mineração, Fluidos Não-Newtonianos, Simulação do Rompimento de Barragens, Simulação Computacional.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Comparação entre as abordagens Eulerianas e Lagrangianas	20
Figura 2 – Funções de suavização usadas na simulação para $h = 1$	24
Figura 3 – Representação bidimensional do modelo de vizinhança de células ligadas. Fonte: Do autor.	26
Figura 4 – Tratamento de fronteiras pelo método de partículas fictícias. Fonte: Do autor.	27
Figura 5 – Tratamento de fronteiras pelo método de partículas fantasma. Fonte: Do autor.	28
Figura 6 – Tratamento de fronteiras pelo método da penetração/momento. Fonte: Do autor.	29
Figura 7 – Diagrama de fluxo de um passo de tempo. Elipses azuis representam as operações (<i>shaders</i>) e retângulos laranjas os dados (texturas). Fonte: Adaptado de (HARADA; KOSHIZUKA; KAWAGUCHI, 2007)	38
Figura 8 – Imagem de satélite da área de Mariana: antes (a) e depois (b) do rompimento da Barragem do Fundão. Fonte: (GOOGLE, 2015)	44
Figura 9 – Imagem de satélite da área de Brumadinho: antes (a) e depois (b) do rompimento da barragem I. Fonte: (GOOGLE, 2018)	44
Figura 10 – Texturas de elevação para as regiões das barragens analisadas: (a) barragem do Fundão; e (b) barragem I. Fonte: (NASA JPL, 2013)	45
Figura 11 – Visualização da propagação do fluxo de rejeitos no cenário de Mariana em diferentes instantes de tempo: (a) $t = 0$ s, (b) $t = 300$ s, (c) $t = 900$ s, (d) $t = 1800$ s. Fonte: Do autor.	47
Figura 12 – Visualização da propagação do fluxo de rejeitos no cenário de Brumadinho em diferentes instantes de tempo: (a) $t = 0$ s, (b) $t = 300$ s, (c) $t = 1200$ s, (d) $t = 2400$ s. Fonte: Do autor.	47
Figura 13 – Comparação entre a área afetada real e a área simulada para: (a) Cenário de Mariana, (b) Cenário de Brumadinho. Fonte: Do autor.	48
Figura 14 – Evolução da velocidade média do fluxo de rejeitos ao longo do tempo para o cenário de Mariana. Fonte: Do autor.	49
Figura 15 – Evolução da velocidade média do fluxo de rejeitos ao longo do tempo para o cenário de Brumadinho. Fonte: Do autor.	49

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Parâmetro utilizados nas simulação de rompimento de barragem.	. . .	46
Tabela 2	–	Comparação entre dados reais e simulados para o cenário de Mariana	.	48
Tabela 3	–	Comparação entre dados reais e simulados para o cenário de Brumadinho		48

Lista de Algoritmos

1	Geração do Balde	39
2	Cálculo da Densidade	40
3	Atualização da Velocidade e Posição	41

Lista de abreviaturas e siglas

SPH	<i>Smoothed-particle hydrodynamics</i> (Hidrodinâmica de partículas suavizadas)
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i> (Fluidodinâmica Computacional)
CRI	Categoria de Risco
DPA	Dano Potencial Associado
MDF	Método das diferenças finitas
FVM	<i>Finite volume method</i> (Método dos volumes finitos)
FEM	<i>Finite element method</i> (Método dos elementos finitos)
VOF	<i>Volume of Fluid</i> (Método do Volume de Fluido)
PIC	<i>Particle-in-cell</i> (Partícula na Célula)
LBM	<i>Lattice Boltzmann methods</i> (Métodos de Lattice Boltzmann)
MDS	Modelo Digital de Superfície
MDE	Modelo Digital de Elevação
SRTM	<i>Shuttle Radar Topography Mission</i> (Missão Topográfica de Radar Embarcado)
GPU	<i>Graphics Processing Unit</i> (Unidade de Processamento Gráfico)
CPU	<i>Central Processing Unit</i> (Unidade Central de Processamento)

Lista de símbolos

a	Aceleração da partícula
g	Aceleração gravitacional
B	<i>Buffer</i> contendo o balde
ζ	Coefficiente de amortecimento
ξ	Coefficiente de atrito
k	Constante gasosa
ρ	Densidade do fluido
ρ_0	Densidade de repouso do fluido
b	Dimensões do balde em cada eixo
d_{fluid}	Distância perpendicular da partícula de fluido à superfície de contorno
d_p	Espaçamento inicial das partículas
d_{dummy}	Espessura da região de contorno
Δt	Intervalo de tempo
r_{min}	Limite mínimo do domínio de simulação em cada eixo
r_{max}	Limite máximo do domínio de simulação em cada eixo
m	Massa da partícula
N	Número total de partículas
K	Parâmetro de comportamento do fluido
p	Pressão
h	Raio de influência de uma partícula
τ	Taxa de cisalhamento
$\dot{\gamma}$	Taxa de deformação
D	Tensor da taxa de deformação

t	Tempo
τ_Y	Tensão de escoamento
r	Vetor posição
v	Vetor velocidade
n	Vetor normal à superfície de contorno
η	Viscosidade aparente
μ	Viscosidade dinâmica
μ_p	Viscosidade plástica
A	Valor físico de uma partícula
V_{total}	Volume total do fluido

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Motivação	14
1.2	Objetivos	15
1.3	Justificativa	15
1.4	Estrutura do Documento	16
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	Fluidodinâmica Computacional	17
2.1.1	Equações de Navier-Stokes	18
2.1.2	Métodos Baseados em Malha (Abordagem Euleriana)	18
2.1.3	Métodos Baseados em Partículas (Abordagem Lagrangiana)	19
2.2	Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas	21
2.2.1	Formulação Matemática	22
2.2.2	Função de Suavização	23
2.2.3	Vizinhança de Partículas	24
2.2.4	Tratamento de Fronteiras	26
2.2.4.1	Partículas fictícias (<i>dummy particles</i>)	27
2.2.4.2	Partículas fantasma (<i>ghost particles</i>)	27
2.2.4.3	Método da penetração	28
2.2.4.4	Método do momento	28
2.2.5	Modelagem de Fluidos Não-newtonianos	30
2.2.5.1	Fundamentos da reologia de fluidos	30
2.2.5.2	Fluidos não-newtonianos e sua aplicação aos rejeitos de mineração	31
2.2.5.3	Implementação em SPH	32
2.2.5.3.1	Modelo <i>power-law</i> (Ostwald-de Waele)	32
2.2.5.3.2	Modelo de Herschel-Bulkley	33
3	TRABALHOS CORRELATOS	34
4	DESENVOLVIMENTO	36
4.1	Inicialização do Modelo	36
4.2	Modelagem da Topografia e Tratamento de Fronteiras	36
4.3	Processamento Paralelo na GPU	37
4.3.1	<i>Shader</i> de Geração do Balde	38
4.3.2	<i>Shader</i> de Cálculo da Densidade	40
4.3.3	<i>Shader</i> de Atualização da Velocidade e Posição	41

5	EXPERIMENTOS E RESULTADOS	43
5.1	Cenários de Estudo	43
5.1.1	Rompimento da Barragem do Fundão (Mariana)	43
5.1.2	Rompimento da Barragem I da Mina Córrego do Feijão (Brumadinho)	43
5.2	Configuração dos Experimentos	45
5.3	Análise Qualitativa	46
5.4	Análise Quantitativa	48
6	CONCLUSÃO	51
	REFERÊNCIAS	52

1 Introdução

Os rompimentos de barragens podem causar danos ao meio ambiente e à propriedade, resultando em uma gama de impactos, tanto diretos quanto indiretos, que podem perdurar por um extenso período (SILVA; SILVA, 2021). Nos últimos anos, o Brasil enfrentou dois dos maiores desastres ambientais de sua história: o rompimento da barragem do Fundão, em Mariana (2015), e o da barragem da Mina Córrego do Feijão, em Brumadinho (2019). Esses eventos evidenciaram a urgente necessidade de aprimorar técnicas de modelagem e simulação para prever e mitigar os efeitos de possíveis falhas em estruturas de contenção.

O armazenamento de rejeitos da indústria extrativa mineral pode ser tratado de várias formas, incluindo descarte fluvial, descarte submarino, retenção em áreas úmidas, preenchimento de cavidades, empilhamento a seco e armazenamento em barragens de contenção (KOSSOFF et al., 2014). Dessas, o mais utilizado atualmente é o que emprega estruturas de contenção chamadas de barragens de rejeitos. Essas estruturas variam de acordo com o método construtivo, sendo classificadas em: montante, jusante ou linha de centro, cada uma com diferentes implicações para sua estabilidade e segurança (KOSSOFF et al., 2014). Por exemplo, as barragens do Fundão, em Mariana, e B1, em Brumadinho, foram construídas pelo método de montante, considerado mais econômico, porém mais vulnerável a falhas quando comparado aos demais (ARMADA, 2020).

As barragens são estruturas suscetíveis a falhas, tornando a sua manutenção uma das atividades mais complexas no contexto da gestão de rejeitos provenientes da mineração. De acordo com o estudo realizado por Dams (2001), que abrangeu 18.000 minas, a taxa média de falha dessas estruturas, ao longo do último século, é de 1,2%, enquanto para barragens convencionais utilizadas para a retenção de água, essa taxa é significativamente menor, situando-se em torno de 0,01%. Os principais fatores que contribuem para essa vulnerabilidade incluem, por exemplo, a utilização dos próprios rejeitos na construção dos diques, a elevação sucessiva da barragem associada ao aumento dos efluentes, a ausência de regulamentações referentes aos critérios de projeto e o elevado custo de manutenção após o encerramento das atividades da mina.

Quando ocorre o rompimento de uma barragem de rejeitos, os impactos são multidimensionais e de longa duração. No caso de Mariana, a lama percorreu mais de 660 km até o oceano Atlântico, ocasionando sérios danos à fauna e flora do Rio Doce, além de afetar cerca de 40 municípios, devastar completamente o distrito de Bento Rodrigues e resultar na morte de 19 pessoas (ARMADA, 2020). Em Brumadinho, a velocidade destrutiva da lama causou um número muito maior de vítimas fatais (270 pessoas), além

de devastar extensas áreas de Mata Atlântica e contaminar o Rio Paraopeba, importante afluente do Rio São Francisco (THOMPSON et al., 2020).

Para prevenir a ocorrência de desastres semelhantes, uma lei foi criada em Minas Gerais, visando a proibição da construção, instalação, expansão e elevação de barragens em locais onde existem comunidades situadas e não haja tempo suficiente para uma intervenção em casos de emergências (Assembléia Legislativa de Minas Gerais, 2019). Nesse contexto, para determinar os locais que poderão ser afetados pelos rejeitos em caso de um eventual rompimento e fornecer subsídios para o planejamento de medidas preventivas e mitigadoras, é fundamental compreender a dinâmica de dispersão desses fluidos na região.

Entre os métodos numéricos para simulação de fluidos, o método de hidrodinâmica de partículas suavizadas (SPH) se sobressai devido à sua capacidade de modelar escoamentos com superfícies livres e interfaces em movimento. Originalmente desenvolvido para aplicações astrofísicas (LUCY, 1977; GINGOLD; MONAGHAN, 1977), o SPH evoluiu significativamente nas últimas décadas, expandindo seu campo de aplicação para problemas de engenharia hidráulica, incluindo fluxos de detritos e lama (MONAGHAN, 2012). Sua abordagem Lagrangiana sem malha oferece vantagens substanciais na simulação de fenômenos caracterizados por grandes deformações e transientes rápidos, como os observados em rupturas de barragens (XU et al., 2013).

Um dos principais desafios na modelagem de fluxos de rejeitos de mineração consiste na representação adequada de suas propriedades reológicas¹. Diferentemente da água, que é um fluido newtoniano, o material formado pela mistura de rejeitos de mineração e água é naturalmente não-newtoniano, possuindo características reológicas complexas (YU; TANG; CHEN, 2020). Simulações realizadas por Medina, Hürlimann e Bateman (2007) demonstraram que a escolha do modelo reológico influencia significativamente tanto na velocidade de propagação quanto a extensão final da área afetada pelo fluxo dos rejeitos. O SPH permite a incorporação de diversos modelos constitutivos, como *power-law*, *Bingham-plastic* e *Herschel-Bulkley*, possibilitando uma representação mais fidedigna do comportamento desses materiais em diferentes regimes de escoamento (HOSSEINI; MANZARI; HANNANI, 2007).

Nesse contexto, este trabalho busca implementar o método SPH para a simulação do fluxo de rejeitos resultante do rompimento de barragens, utilizando os casos de Mariana e Brumadinho como estudos de referência. Nossa abordagem implementa um modelo SPH tridimensional, incluindo algoritmos para tratamento de fronteiras, representação precisa da topografia e modelos reológicos apropriados para fluidos não-newtonianos.

¹ Propriedades reológicas são características do material (ex: viscosidade, tixotropia, elasticidade e plasticidade) que definem sua capacidade de deformação sob a ação de forças e tensões externas, resistência ao fluxo e retorno à forma original.

Para otimizar o desempenho computacional, o código será desenvolvido com capacidade de processamento paralelo utilizando arquitetura GPU, possibilitando simulações de alta resolução em tempo viável. Espera-se que o modelo numérico desenvolvido seja capaz de reproduzir com precisão o comportamento observado nos dados históricos desses eventos, considerando diferentes reologias de rejeitos e condições topográficas. Essa abordagem pode desempenhar um papel importante na melhoria da avaliação de riscos e na formulação de estratégias mais eficazes para a mitigação e a resposta a desastres relacionados a barragens de rejeitos de mineração.

1.1 Motivação

A crescente preocupação com a segurança de barragens de rejeitos no Brasil e no mundo, intensificada após os desastres de Mariana e Brumadinho, evidencia a necessidade urgente de ferramentas de modelagem mais precisas para avaliação de riscos. O Brasil conta com mais de 300 barragens para disposição de rejeitos de mineração que são categorizadas com categoria de risco (CRI) alto e com dano potencial associado (DPA) alto ou médio, de acordo com informações fornecidas pelo Sistema Nacional de Informações sobre Segurança de Barragens ([Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico, 2024](#)). Em um contexto global, [Bowker e Chambers \(2017\)](#) registraram um aumento preocupante na frequência e gravidade de falhas catastróficas em barragens de rejeitos nas últimas décadas.

A intrincada natureza do comportamento reológico dos rejeitos, juntamente a diferentes condições topográficas, requer a criação de modelos numéricos avançados que sejam aptos a prever com maior exatidão o deslocamento desses materiais em cenários de escoamento livre. Nesse cenário, o método SPH surge como uma ferramenta especialmente apropriada para simular a propagação de rejeitos provenientes do colapso de barragens, devido à sua aptidão inerente para modelar superfícies livres e deformações significativas, superando as dificuldades de distorção de malha comumente associadas a métodos eulerianos tradicionais ([LIU; LIU, 2010](#)).

Adicionalmente, as recentes mudanças na legislação brasileira, que exigem análises dos rompimentos cada vez mais rigorosas para elaboração de Planos de Ação de Emergência, reafirmam a relevância prática dos modelos de fluxo dos rejeitos de mineração. O desenvolvimento de um modelo validado com base em eventos reais pode contribuir significativamente para o dimensionamento mais preciso de zonas de autossalvamento e para o planejamento de medidas preventivas mais eficazes.

1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver e validar um modelo computacional, baseado no método SPH, para simular a dinâmica do fluxo de rejeitos de mineração durante eventos de rompimento de barragens.

Para alcançar essa meta, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Estudar sobre método SPH e sua aplicação em simulações de escoamentos de fluidos complexos, bem como as propriedades físicas e reológicas dos rejeitos de mineração, a fim de compreender e modelar o fluxo de rejeitos decorrentes do rompimento de barragens.
- Implementar o método SPH com capacidade para representar as propriedades reológicas complexas dos rejeitos de mineração.
- Validar o modelo desenvolvido através da comparação da extensão da área afetada e distância percorrida pelos rejeitos com dados reais dos desastres de Mariana e Brumadinho.

1.3 Justificativa

A modelagem computacional de rompimentos de barragens de rejeitos apresenta-se como uma ferramenta essencial para a análise de riscos e o planejamento de medidas mitigadoras. O uso de modelos numéricos avançados permite estimar com maior precisão as áreas potencialmente afetadas, os tempos de chegada da onda de rejeitos e a profundidade do fluxo em diferentes locais, informações cruciais para a elaboração de planos de contingência eficazes ([PASTOR et al., 2014](#)).

A escolha do método SPH para este trabalho justifica-se por suas vantagens inerentes na modelagem de escoamentos caracterizados por superfícies livres, grandes deformações e interfaces móveis. Diferentemente dos métodos baseados em malhas Eulerianas, o SPH não sofre com problemas de distorção de malha e consegue representar naturalmente a evolução da superfície livre do escoamento ([MONAGHAN, 2012](#)). Essas características são particularmente relevantes para a simulação de fluxos de rejeitos, que frequentemente apresentam comportamento altamente transitório e não uniforme.

Adicionalmente, a validação do modelo com base nos dados dos desastres de Mariana e Brumadinho possibilita calibrar os parâmetros do modelo e avaliar sua capacidade preditiva em situações reais. Embora esses eventos tenham sido catastróficos, os dados coletados durante e após os rompimentos constituem um valioso conjunto de referência para o aprimoramento de modelos de simulação ([THOMPSON et al., 2020](#)).

1.4 Estrutura do Documento

O restante deste documento está organizado da seguinte maneira: o Capítulo 2 discute a base teórica da Fluidodinâmica Computacional (CFD) e do método de Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas (SPH), incorporando a modelagem de fluidos não newtonianos. No Capítulo 3 são apresentados alguns trabalhos correlatos que serviram de inspiração para o desenvolvimento do nosso modelo de simulação. O Capítulo 4 aborda o desenvolvimento do modelo computacional baseado no SPH, incluindo detalhes de sua implementação e estratégias de otimização. No Capítulo 5, são apresentados os experimentos realizados com o modelo desenvolvido para os casos de estudo de Mariana e Brumadinho, juntamente com a análise qualitativa e quantitativa dos resultados. Por fim, no Capítulo 6, são discutidas as conclusões do estudo e potenciais caminhos para pesquisas futuras.

2 Fundamentação Teórica

Neste capítulo, são introduzidos os princípios fundamentais da Fluidodinâmica Computacional (CFD) e da Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas (SPH), além dos métodos de modelagem de fluidos não-newtonianos dentro desse contexto, os quais serviram como base para o desenvolvimento deste estudo e contribuem para o cumprimento dos objetivos propostos.

A Fluidodinâmica Computacional (CFD) representa um conjunto de técnicas numéricas para simulação de fenômenos que envolvem fluxos de fluidos. Em sua seção, serão discutidas as abordagens Euleriana e Lagrangiana, os métodos numéricos em CFD e as particularidades da simulação de fluxos com superfície livre.

Por fim, a Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas (SPH) constitui o método central utilizado neste trabalho, sendo um método Lagrangiano sem malha, especialmente adequado para simular fluxos com grandes deformações. Em sua seção, serão abordados os conceitos de função *kernel*, a formulação matemática das equações governantes, as técnicas de tratamento de fronteiras e as adaptações necessárias para a modelagem de fluidos não-newtonianos.

2.1 Fluidodinâmica Computacional

A Fluidodinâmica Computacional (CFD, do inglês *Computational Fluid Dynamics*) consiste em um conjunto de técnicas numéricas utilizadas para resolver as equações que governam o movimento dos fluidos, permitindo a simulação computacional de fenômenos complexos envolvendo escoamentos. Essa abordagem possibilita a análise detalhada de problemas para os quais soluções analíticas são inviáveis, como é o caso da maioria dos escoamentos de interesse prático e industrial ([ANDERSON, 1995](#)).

As simulações em CFD são baseadas nas leis fundamentais de conservação da massa, quantidade de movimento e energia, expressas matematicamente através de equações diferenciais parciais. Estas equações descrevem de forma completa o comportamento dos fluidos, considerando fenômenos como advecção, difusão, forças de pressão e tensões viscosas. A solução numérica dessas equações permite obter campos detalhados de velocidade, pressão, temperatura e outras propriedades relevantes em qualquer ponto do domínio de interesse ([FERZIGER; PERIC, 2012](#)).

2.1.1 Equações de Navier-Stokes

O conjunto de equações que descreve o movimento de fluidos viscosos é conhecido como equações de Navier-Stokes. Para um fluido newtoniano, incompressível e isotérmico, essas equações podem ser expressas como (ANDERSON, 1995):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g \quad (2.2)$$

onde v é o vetor velocidade, ρ é a densidade do fluido, p é a pressão, μ é a viscosidade dinâmica e g é a aceleração gravitacional.

A Equação 2.1 representa a conservação da massa (ou equação da continuidade), enquanto a Equação 2.2 expressa a conservação da quantidade de movimento. A não linearidade e o acoplamento entre as variáveis tornam a solução analítica dessas equações possível apenas para casos simplificados, justificando o desenvolvimento de métodos numéricos para sua resolução (FERZIGER; PERIC, 2012).

Para fluidos não-newtonianos, como os rejeitos de mineração, as equações de Navier-Stokes são modificadas para incorporar modelos reológicos apropriados, substituindo a viscosidade constante μ por uma função que depende da taxa de deformação.

2.1.2 Métodos Baseados em Malha (Abordagem Euleriana)

Na abordagem Euleriana, o domínio espacial é discretizado em uma malha fixa, e as propriedades do fluido são calculadas em pontos específicos dessa malha ao longo do tempo. As equações governantes são formuladas em termos de derivadas parciais, descrevendo como as propriedades variam em localizações fixas do espaço, enquanto o fluido escoar através delas (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Os principais métodos baseados em malha incluem (KOLDITZ, 2002):

- **Método das diferenças finitas (MDF):** aproxima as derivadas parciais por diferenças finitas, utilizando expansões em séries de Taylor. É historicamente o primeiro método numérico aplicado à CFD e destaca-se pela simplicidade de implementação, especialmente para geometrias regulares com malhas estruturadas. No entanto, apresenta limitações para geometrias complexas e para a aplicação de condições de contorno em fronteiras irregulares.
- **Método dos volumes finitos (FVM):** baseia-se na forma integral das equações de conservação, dividindo o domínio em volumes de controle contíguos sobre os

quais as equações são integradas. Essa abordagem garante a conservação local e global das propriedades físicas, como massa, momento e energia, sendo amplamente adotada em códigos comerciais e acadêmicos de CFD. O método aplica-se tanto a malhas estruturadas quanto não-estruturadas, adaptando-se bem a domínios com geometrias complexas.

- **Método dos elementos finitos (FEM):** divide o domínio em elementos menores de formas variadas e utiliza funções de base para aproximar as variáveis do escoamento dentro de cada elemento. Esse método é particularmente adequado para problemas com geometrias complexas e adapta-se facilmente a refinamentos locais da malha. Sua formulação sistemática facilita a análise matemática, mas pode ser computacionalmente mais intensivo que outros métodos.

A principal vantagem da abordagem Euleriana reside em sua eficiência computacional para escoamentos confinados e na facilidade de implementação de esquemas de discretização de alta ordem. No entanto, ela apresenta limitações significativas para problemas com fronteiras móveis ou superfícies livres complexas, devido às dificuldades em capturar interfaces e deformações severas do domínio fluido (LIU; LIU, 2010).

Para tratar escoamentos com superfícies livres na abordagem Euleriana, são necessárias técnicas especiais como o método do volume de fluido (VOF, do inglês *Volume of Fluid*) ou o método *Level-Set*, que permitem rastrear a evolução da interação entre diferentes fases ou meios (HIRT; NICHOLS, 1981).

2.1.3 Métodos Baseados em Partículas (Abordagem Lagrangiana)

Ao contrário dos métodos Eulerianos, a abordagem Lagrangiana foca nas partículas individuais do fluido, rastreando seu movimento através do domínio. Como pode ser observado na Figura 1, a abordagem Euleriana calcula as propriedades do fluido em pontos fixos de uma malha à medida que o fluido flui através deles, enquanto na abordagem Lagrangiana, as partículas carregam suas propriedades físicas e são rastreadas individualmente à medida que se movem pelo domínio. As equações governantes são formuladas em termos de derivadas materiais (ou substanciais), descrevendo como as propriedades de partículas específicas de fluido mudam ao longo do tempo enquanto elas se deslocam (MONAGHAN, 2012). Entre os métodos baseados em partículas, destacam-se:

- **Método de hidrodinâmica de partículas suavizadas (SPH):** representa o fluido como um conjunto discreto de partículas que carregam propriedades físicas (massa, momento, energia) e interagem entre si através de funções de suavização (*kernels*). O SPH é um método sem malha que calcula as propriedades do fluido

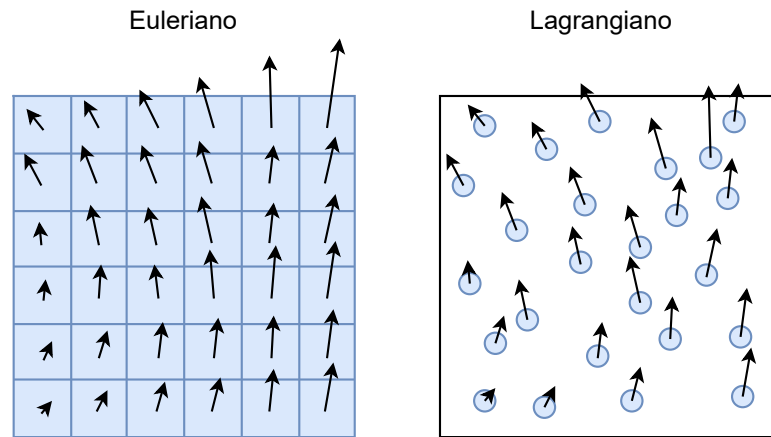


Figura 1 – Comparação entre as abordagens Eulerianas e Lagrangianas

em qualquer ponto como uma média ponderada das propriedades das partículas vizinhas (LIU; LIU, 2010).

- **Método de partícula na célula (PIC):** combina aspectos das abordagens Lagrangiana e Euleriana, utilizando partículas para representar o fluido, mas resolvendo as equações em uma malha fixa. As propriedades são transferidas das partículas para os nós da malha, onde as equações são resolvidas, e depois os resultados são interpolados de volta para as partículas (HARLOW; WELCH, 1965).
- **Métodos de Lattice Boltzmann (LBM):** embora tecnicamente não seja um método de partículas puro, o LBM simula o comportamento macroscópico do fluido a partir da dinâmica de partículas fictícias em nível mesoscópico, seguindo a equação de Boltzmann discretizada em um reticulado regular (CHEN; DOOLEN, 1998).

A abordagem Lagrangiana oferece vantagens significativas para a simulação de escoamentos com superfícies livres, grandes deformações e interfaces móveis, uma vez que as partículas se adaptam naturalmente ao movimento do fluido sem necessidade de técnicas especiais para rastrear interfaces. Além disso, a advecção¹ de propriedades é tratada implicitamente, eliminando erros numéricos associados aos termos advectivos presentes na formulação euleriana (LIU; LIU, 2010).

O método SPH, em particular, tem ganhado popularidade significativa para simulação de fenômenos envolvendo superfícies livres, fragmentação e coalescência² de fluidos,

¹ No contexto de fluidos, advecção se refere ao transporte de alguma propriedade (como velocidade, densidade ou pressão) por um fluido em movimento.

² Coalescência é o processo ou qualidade de união de duas ou mais gotículas de um líquido formando uma única unidade maior (crescimento da matéria a partir da união de partes menores).

e interações fluido-estrutura. Esse método será abordado com maior profundidade na próxima seção, incluindo seus princípios fundamentais, formulação matemática e adaptações para a modelagem de fluidos com comportamento reológico complexo.

2.2 Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas

A Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas (SPH, do inglês *Smoothed Particle Hydrodynamics*) é um método numérico Lagrangiano sem malha, inicialmente desenvolvido por Lucy (1977) e Gingold e Monaghan (1977) para aplicações astrofísicas. O método foi posteriormente estendido para tratar problemas de dinâmica de fluidos e sólidos, em especial aqueles que envolvem superfícies livres, grandes deformações e interfaces móveis (MONAGHAN, 2012).

O princípio fundamental do SPH baseia-se na representação de um meio contínuo por um conjunto discreto de partículas que carregam propriedades físicas (massa, quantidade de movimento, energia) e se movem de acordo com as equações governantes. Em vez de resolver equações diferenciais parciais em nós fixos de uma malha, o SPH utiliza uma técnica de interpolação baseada em funções de suavização (*kernels*) para aproximar o valor de qualquer função contínua a partir dos valores associados às partículas vizinhas (LIU; LIU, 2010).

Essa abordagem confere ao SPH características únicas e vantajosas para diversos problemas de engenharia, especialmente aqueles onde métodos baseados em malha enfrentam dificuldades significativas. A capacidade do SPH de adaptar-se naturalmente a interfaces em movimento e tratar escoamentos fragmentados ou com geometrias complexas tem impulsionado sua aplicação em campos como hidráulica, geomecânica, processos industriais e simulação de materiais granulares (VIOLEAU, 2012).

No método SPH, um valor físico A em um ponto r do domínio é calculado por meio de uma soma ponderada das contribuições das partículas vizinhas j :

$$A_s(r) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W_{ij}, \quad (2.3)$$

onde m_j indica a massa da partícula j , ρ_j define sua densidade, A_j representa seu valor físico e $W_{ij} = W(r - r_j, h)$ se refere à função de suavização, com r_j como a posição de j e h o raio de influência de uma partícula (HARADA; KOSHIZUKA; KAWAGUCHI, 2007).

A Equação 2.3 incorpora a massa e a densidade das partículas para expressar o volume $V_i = m_i/\rho_i$, mantendo a massa constante enquanto a densidade é ajustada em cada intervalo de tempo. Ao substituir, obtém-se a fórmula para determinar a densidade em um ponto r :

$$\rho_s(r) = \sum_j m_j \frac{\rho_j}{\rho_j} W_{ij} = \sum_j m_j W_{ij} \quad (2.4)$$

Em casos em que é necessário determinar as derivadas de determinados valores físicos, apenas a função de suavização é impactada pela derivada. O gradiente de A é expresso como (MÜLLER; CHARYPAR; GROSS, 2003):

$$\nabla A_s(r) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla W_{ij}, \quad (2.5)$$

enquanto a Laplaciana é dada por:

$$\nabla^2 A_s(r) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla^2 W_{ij}. \quad (2.6)$$

2.2.1 Formulação Matemática

No contexto da dinâmica de fluidos, a aplicação do método SPH envolve a reformulação das equações de Navier-Stokes em uma abordagem Lagrangiana baseada em partículas. Diferentemente da formulação Euleriana (baseada em malha), onde os fluidos isotérmicos são descritos por campos de velocidade, densidade e pressão que evoluem em pontos fixos do espaço, a formulação SPH rastreia diretamente as partículas de fluido em movimento (MÜLLER; CHARYPAR; GROSS, 2003).

Uma vantagem significativa da abordagem Lagrangiana é a simplificação das equações governantes. Como o número de partículas é constante e cada partícula mantém massa invariável, a conservação da massa é garantida intrinsecamente, eliminando por completo a necessidade da Equação 2.1.

Para a equação de conservação da quantidade de movimento, a formulação Euleriana da equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis é dada pela Equação 2.2. Na abordagem Lagrangiana, a expressão $\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v$ é automaticamente incorporada ao mover as partículas com o fluido, sendo substituída pela derivada substancial $\frac{Dv}{Dt}$ (MÜLLER; CHARYPAR; GROSS, 2003). Consequentemente, a forma definitiva da equação de conservação de quantidade de movimento, para o método SPH, é expressa como:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g, \quad (2.7)$$

enquanto a aceleração de uma partícula i é expressa por:

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{f_i}{\rho_i}, \quad (2.8)$$

onde $f_i = -\nabla p_i + \mu \nabla^2 v_i + \rho_i g$, representando a densidade total de forças que agem sobre a partícula i , que é composta por três componentes principais: força de pressão, forças externas (como a gravidade) e força viscosa.

Utilizando a aproximação SPH, o gradiente de pressão na partícula i pode ser calculado como:

$$-\nabla p(r_i) = -\sum_j m_j \frac{p_i + p_j}{2\rho_j} \nabla W(r_i - r_j, h). \quad (2.9)$$

Dado que a força de pressão não é simétrica e se manifesta apenas durante a interação entre duas partículas, é necessário empregar a média aritmética das pressões em vez de considerar apenas a pressão de j para assegurar a simetria (MÜLLER; CHARYPAR; GROSS, 2003).

A pressão de uma partícula é dada pela equação de estado de um gás ideal:

$$p = k(\rho - \rho_0), \quad (2.10)$$

onde k é uma constante gasosa dependente da temperatura e ρ_0 a densidade de repouso do fluido.

Assim como para a pressão, o método SPH aplicado ao termo de viscosidade $\mu \nabla^2 \mathbf{v}$ resulta em uma força assimétrica. No entanto, ao contrário da abordagem anterior, a simetria desta força é alcançada utilizando a diferença de velocidades (MÜLLER; CHARYPAR; GROSS, 2003). Assim, a expressão para calcular a viscosidade de uma partícula i é expressa por:

$$\mu \nabla^2 v(r_i) = \mu \sum_j m_j \frac{v_i - v_j}{\rho_j} \nabla^2 W(r_i - r_j, h). \quad (2.11)$$

2.2.2 Função de Suavização

A função de suavização (em inglês, *smoothing kernel*), denotada por $W(r, h)$, é fundamental no método SPH, pois influencia sua estabilidade, precisão e eficiência computacional. Ela determina como as propriedades físicas são distribuídas entre as partículas próximas, ponderando suas contribuições conforme a distância entre elas (MÜLLER; CHARYPAR; GROSS, 2003).

Para garantir a consistência física do método, o kernel deve satisfazer certas propriedades matemáticas. Ele deve ser simétrico, $W(r, h) = W(-r, h)$, assegurando influência recíproca entre partículas; e ser normalizado, satisfazendo a condição:

$$\int W(r) dr = 1. \quad (2.12)$$

Diversas funções de *kernel* têm sido empregadas na literatura, cada uma apresentando vantagens específicas para diferentes aplicações. Neste trabalho, serão utilizadas as mesmas funções usadas por Müller, Charypar e Gross (2003):

$$W_{poly6}(r, h) = \frac{315}{64\pi h^9} \begin{cases} (h^2 - r^2)^3, & \text{se } 0 \leq r \leq h \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.13)$$

$$W_{spiky}(r, h) = \frac{15}{\pi h^6} \begin{cases} (h - r)^3, & \text{se } 0 \leq r \leq h \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.14)$$

$$W_{viscosity}(r, h) = \frac{15}{2\pi h^3} \begin{cases} -\frac{r^3}{2h^3} + \frac{r^2}{h^2} + \frac{h}{2r} - 1, & \text{se } 0 \leq r \leq h \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Nessas equações, o parâmetro $r = |r_i - r_j|$ representa a distância entre i e j .

Dentre as equações mencionadas anteriormente, a equação 2.14 será utilizada para calcular a pressão, a equação 2.15 será aplicada para a viscosidade, e a equação 2.13 será usada para os demais casos. Seus comportamentos podem ser observados na Figura 2.

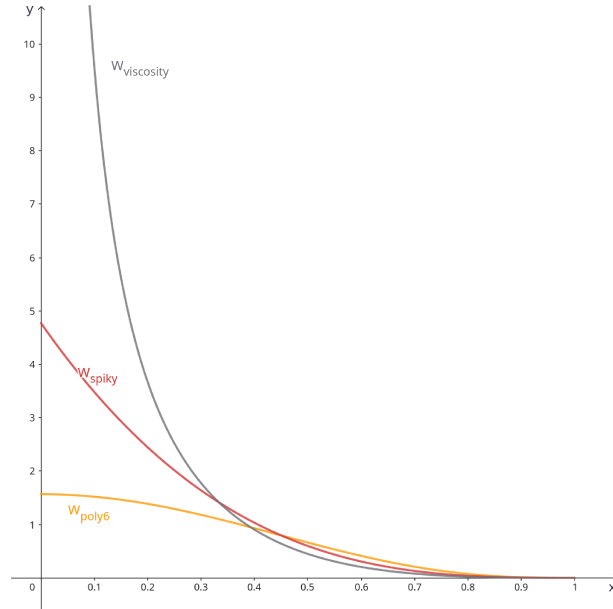


Figura 2 – Funções de suavização usadas na simulação para $h = 1$

2.2.3 Vizinhança de Partículas

No método SPH, o conceito de vizinhança de partículas é fundamental para a discretização espacial do domínio e para o cálculo das interações entre as partículas.

A vizinhança de uma partícula é definida como o conjunto de outras partículas que se encontram dentro de seu raio de influência (determinado pelo parâmetro de suavização h), e que, portanto, contribuem para o cálculo de suas propriedades físicas através das funções de suavização (*kernels*) discutidas anteriormente (LIU; LIU, 2010).

A determinação eficiente das vizinhanças constitui um dos principais desafios computacionais no método SPH, uma vez que o número de interações entre partículas cresce quadraticamente com o número total de partículas, quando implementado de forma ingênua. Em simulações realistas, que frequentemente envolvem milhares ou até milhões de partículas, a busca por vizinhos pode consumir mais de 80% do tempo total de processamento (DEHNEN; ALY, 2012).

Para mitigar este problema, diversas estratégias de busca de vizinhos têm sido propostas na literatura, cada uma com suas vantagens e limitações em termos de desempenho computacional e requisitos de memória:

- **Busca por força bruta:** nessa abordagem simples, cada partícula é comparada com todas as outras para verificar se estão dentro do raio de influência. Embora conceitualmente direta, sua complexidade computacional $O(N^2)$ a torna inviável para simulações de grande escala (MÜLLER; CHARYPAR; GROSS, 2003).
- **Método de células ligadas (em inglês, *linked-cell*):** o domínio é dividido em células cúbicas de tamanho igual ou superior ao raio de influência das partículas. Cada partícula é atribuída à célula que contém sua posição, e a busca por vizinhos é restrita às células adjacentes. A Figura 3 trás uma representação bidimensional desse método, onde as partículas em roxo são as que estão nas células adjacentes à da partícula i (em vermelho), e portanto, serão as únicas verificadas. Essa abordagem reduz significativamente o número de comparações necessárias, resultando em uma complexidade computacional $O(N)$ (HARADA; KOSHIZUKA; KAWAGUCHI, 2007).
- **Árvores de busca espacial:** estruturas como árvores k-D e *octrees* são utilizadas para particionar o espaço de forma hierárquica, permitindo buscas eficientes de vizinhos próximos. Essa abordagem é particularmente eficaz para distribuições não uniformes de partículas e pode ser adaptada para diferentes escalas de suavização (DESBRUN; CANI, 1996).
- **Algoritmos baseados em ordenação espacial:** técnicas como a curva de Hilbert ou *Z-order* utilizam funções de ordenação espacial para mapear posições tridimensionais em índices unidimensionais, preservando a localidade espacial. Partículas próximas no espaço tendem a ter índices próximos, facilitando a identificação de vizinhanças (DEHNEN; ALY, 2012).

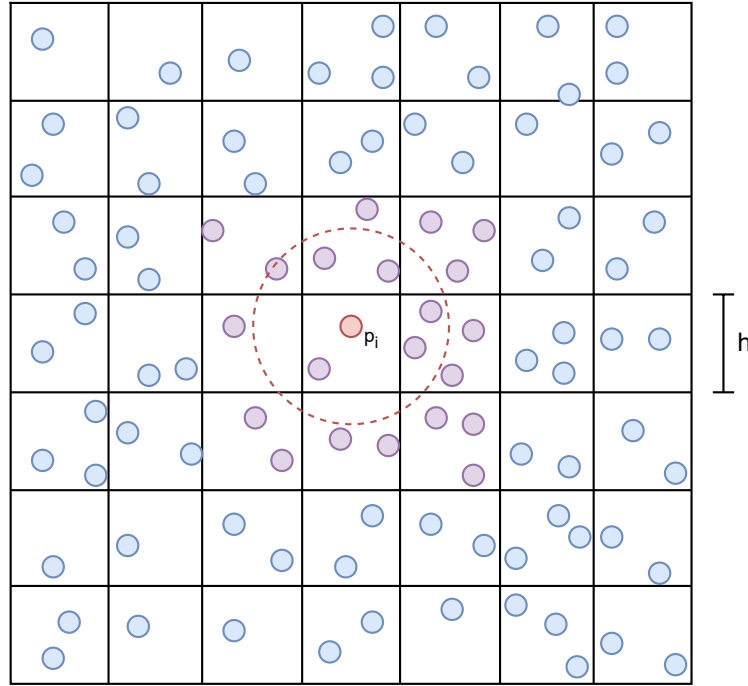


Figura 3 – Representação bidimensional do modelo de vizinhança de células ligadas.
Fonte: Do autor.

A escolha do algoritmo de busca de vizinhos depende de diversos fatores, incluindo a arquitetura computacional disponível (CPU ou GPU), a distribuição espacial das partículas e as características específicas do problema. Em implementações modernas em GPU, o método de células ligadas é frequentemente preferido devido à sua simplicidade e eficiência em arquiteturas paralelas (HARADA; KOSHIZUKA; KAWAGUCHI, 2007).

A implementação eficiente de algoritmos de busca de vizinhança é uma área de pesquisa no campo do SPH, com desenvolvimentos focados na otimização para arquiteturas heterogêneas e na redução dos requisitos de memória, especialmente para simulações de alta resolução (VIOLEAU, 2012).

2.2.4 Tratamento de Fronteiras

O tratamento adequado das condições de contorno representa um dos principais desafios na implementação do método SPH. Diferentemente dos métodos baseados em malha, onde as fronteiras são definidas explicitamente pela geometria da malha, no SPH as interações entre partículas de fluido e fronteiras precisam ser formuladas de maneira especial (LIU; LIU, 2010).

A escolha de um método adequado depende das características específicas do problema, como a complexidade geométrica da fronteira, a natureza das condições de con-

torno desejadas e os requisitos de precisão e eficiência computacional. Alguns métodos comumente utilizados no tratamento de fronteiras são descritos a seguir.

2.2.4.1 Partículas fictícias (*dummy particles*)

Neste método, diversas camadas de partículas fictícias são posicionadas ao longo da fronteira para representar contornos sólidos, como pode ser visto na Figura 4. Essas partículas (representadas em vermelho na figura) participam do processo de interpolação e contribuem para as somas SPH, mas suas posições e propriedades são prescritas para garantir as condições de contorno desejadas, como não-escorregamento ou escorregamento livre (MONAGHAN, 2012). Esse método é relativamente simples de implementar, especialmente para geometrias regulares, mas pode exigir um grande número de partículas para representar contornos complexos.

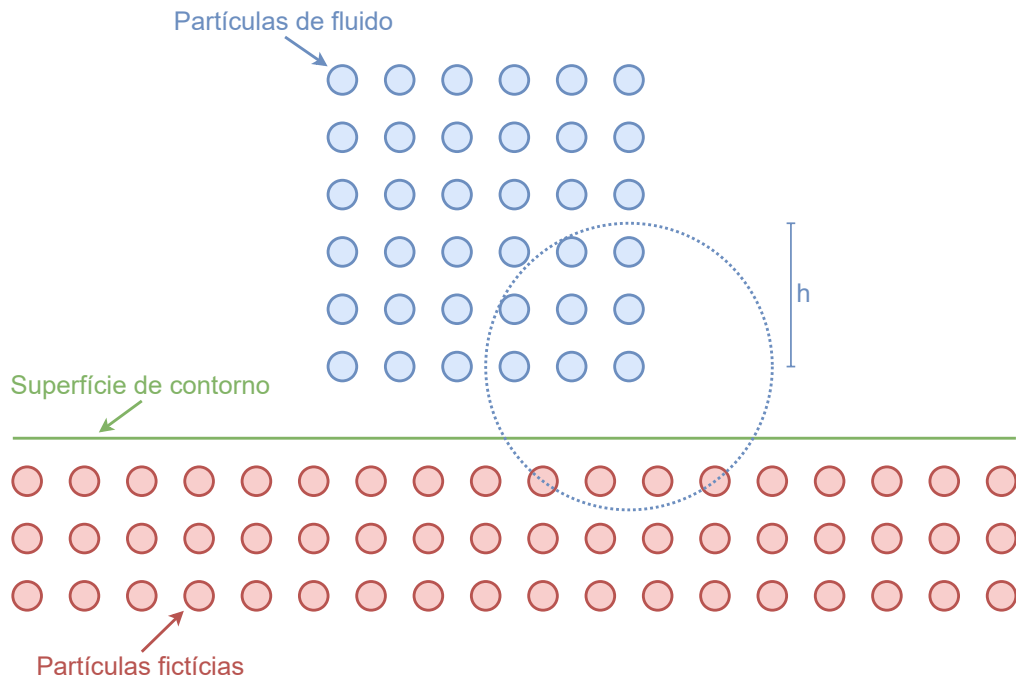


Figura 4 – Tratamento de fronteiras pelo método de partículas fictícias. Fonte: Do autor.

2.2.4.2 Partículas fantasma (*ghost particles*)

Este método opera criando "imagens espelhadas" das partículas de fluido do outro lado da fronteira. Quando uma partícula de fluido se aproxima de uma fronteira, uma partícula fantasma é criada em posição simétrica em relação ao contorno, com propriedades determinadas para impor a condição de contorno desejada. Para condições de não-escorregamento, por exemplo, a partícula fantasma recebe velocidade oposta à partí-

cula real (TAKEDA; MIYAMA; SEKIYA, 1994). A Figura 5 ilustra o método, mostrando que somente partículas a uma distância mínima h da superfície são espelhadas. Essa abordagem é particularmente eficaz para fronteiras planas e curvas simples.

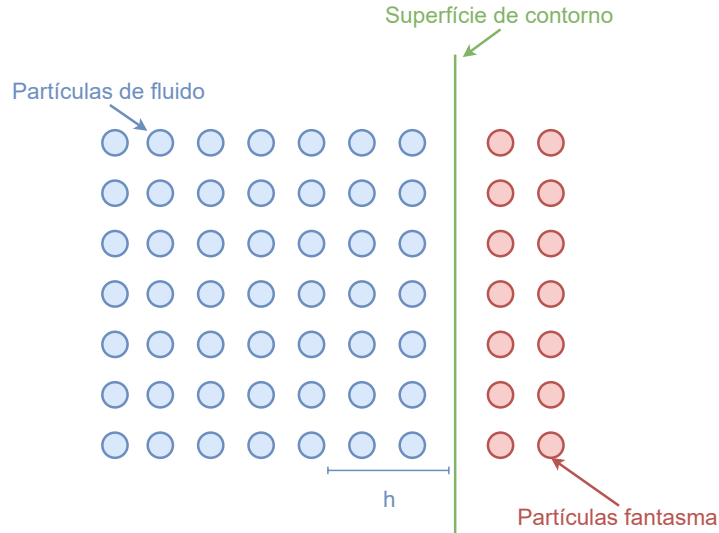


Figura 5 – Tratamento de fronteiras pelo método de partículas fantasma. Fonte: Do autor.

2.2.4.3 Método da penetração

Proposto por Sheikh, Qiu e Ahmadipur (2021), esse método baseia-se na condição de penetração parcial das partículas de fluido na fronteira. Ao contrário do método de partículas fictícias, aqui há a necessidade de adicionar somente uma fileira de partículas fictícias na superfície de contorno, sendo que essas partículas não participam do processo de interpolação do SPH.

Uma zona de borda com altura d_{dummy} é estabelecida perto da superfície de contorno, como ilustrado na Figura 6. Ao detectar que uma partícula adentrou essa área, o método calcula as forças normais e tangenciais associadas à interação da partícula com a fronteira. A força de contato normal à superfície de contorno depende da magnitude da penetração, enquanto a força tangencial é calculada com base no deslocamento relativo da partícula em relação à fronteira e limitada por uma condição de atrito. Esse método é eficaz para modelar interações complexas entre fluidos e estruturas, especialmente quando o comportamento friccional é importante.

2.2.4.4 Método do momento

O algoritmo, apresentando também por Sheikh, Qiu e Ahmadipur (2021), baseia-se na transferência de momento entre as partículas do fluido e a superfície de contorno,

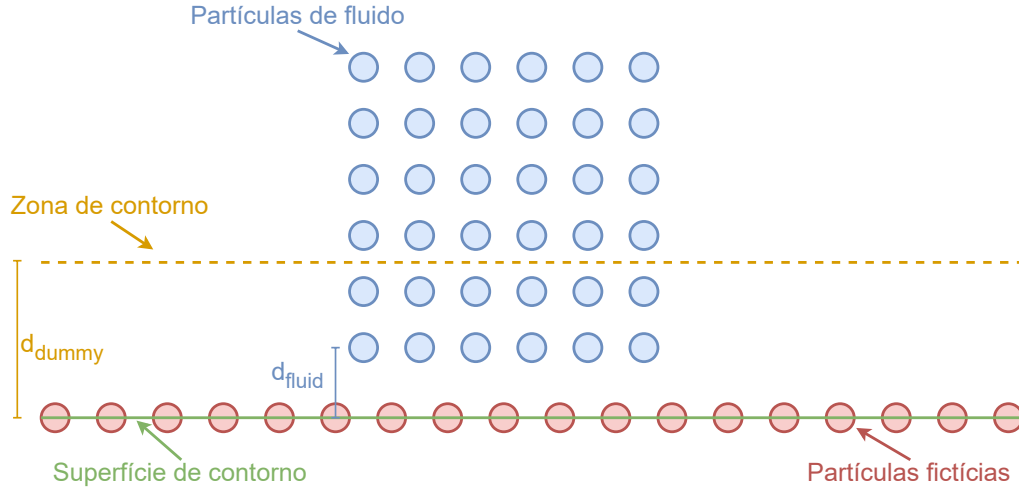


Figura 6 – Tratamento de fronteiras pelo método da penetração/momento. Fonte: Do autor.

possuindo uma configuração de partículas fictícias semelhante ao método da penetração. A força normal é determinada da seguinte forma:

$$F_i^n = \frac{2m_i\beta'(1-\zeta)\Delta v_i^n}{\Delta t} \quad (2.16)$$

onde m_i representa a massa da partícula, $\beta' = \frac{d_{dummy}}{d_{fluid}}$, sendo d_{fluid} a distância perpendicular da partícula de fluido à superfície de contorno, enquanto $d_{dummy} = h$ corresponde à espessura da região de contorno; ζ é o coeficiente de amortecimento que regula a dissipação de energia durante o contato; $\Delta v_i^n = (\Delta v_i \cdot n)n$ indica o componente normal da velocidade relativa, com n sendo o vetor normal à superfície e $\Delta v_i = v_w - v_i$ a velocidade relativa da partícula em relação à borda, e Δt representa o intervalo de tempo.

A força tangencial é determinada por:

$$F_i^t = \frac{2m_i\Delta v_i^{t'}}{\Delta t} \quad (2.17)$$

onde $\Delta v_i^{t'}$ é a componente tangencial modificada da velocidade relativa, ajustada para considerar o atrito. Esse componente é definido por:

$$\Delta v_i^t = \Delta v_i - \Delta v_i^n \quad (2.18)$$

$$\Delta v_i^{t'} = \begin{cases} \xi \frac{|F_i^n|}{|F_i^t|} \Delta v_i^t, & |F_i^t| > \xi |F_i^n| \\ \Delta v_i^t, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.19)$$

onde ξ é o coeficiente de atrito entre a partícula e a superfície.

Dessa forma, a equação final para o cálculo das forças da superfície sobre a partícula é definida por:

$$F_i = \begin{cases} \begin{cases} F_i^n + F_i^t & \Delta d_p^n > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} & v_i \cdot n < 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.20)$$

onde $\Delta d_p^n = d_{dummy} - d_{fluid}$.

Essa formulação permite controlar com precisão tanto a elasticidade do contato quanto o comportamento friccional, sendo particularmente adequada para simulações que envolvem materiais granulares e fluxos de rejeitos sobre superfícies com diferentes características de rugosidade. O método tem-se mostrado robusto na representação de fenômenos como avalanches, colapsos de colunas granulares e escoamentos sobre topografias complexas, principalmente por capturar adequadamente a influência do atrito basal na dinâmica geral do fluxo (SHEIKH; QIU; AHMADIPUR, 2021).

2.2.5 Modelagem de Fluidos Não-newtonianos

A capacidade de modelar comportamentos reológicos complexos é uma das vantagens significativas do método SPH em relação a outras técnicas numéricas. Para incorporar comportamentos não-newtonianos no framework SPH, o termo viscoso na equação de conservação da quantidade de movimento é modificado para refletir a relação constitutiva específica do fluido (HOSSEINI; MANZARI; HANNANI, 2007).

2.2.5.1 Fundamentos da reologia de fluidos

Reologia é a área da física que analisa a deformação e a fluidez de materiais, examinando a conexão entre a tensão imposta, a consequente deformação e o tempo (BARNES; HUTTON; WALTERS, 1989). Esta ciência é fundamental para compreender o comportamento dos mais diversos materiais, desde fluidos simples como a água até substâncias complexas como os rejeitos de mineração, polímeros fundidos e suspensões coloidais.

No contexto da simulação de fluxos de rejeitos de mineração, é fundamental caracterizar reologicamente esses materiais com precisão para prever corretamente seu comportamento quando liberados após o rompimento de uma barragem (BOGER, 2013). A complexidade no comportamento desses rejeitos resulta de sua natureza multifásica, composta por partículas sólidas de tamanhos e formas variados suspensas em água, muitas

vezes contendo minerais argilosos que conferem propriedades viscoelásticas ao material (KOSSOFF et al., 2014).

Para fluidos newtonianos, o tensor de tensão de cisalhamento pode ser expresso como:

$$\tau = 2\mu D \quad (2.21)$$

onde D é o tensor taxa de deformação e μ é a viscosidade dinâmica constante. Um fluido é classificado como newtoniano se houver uma relação linear entre a tensão de cisalhamento (τ) e a taxa de deformação ($\dot{\gamma}$), com a viscosidade (μ) atuando como a constante que proporcionaliza essas quantidades (WHITE; MAJDALANI, 2006).

2.2.5.2 Fluidos não-newtonianos e sua aplicação aos rejeitos de mineração

Diferentemente dos fluidos newtonianos, os fluidos não-newtonianos apresentam relações não lineares entre tensão de cisalhamento e taxa de deformação, podendo ainda exibir dependência temporal. A viscosidade aparente (η) desses fluidos depende da taxa de cisalhamento e, em certas situações, varia também com o histórico de deformação (CHHABRA; RICHARDSON, 2008).

Os rejeitos de mineração são tipicamente caracterizados como fluidos não-newtonianos, cujo comportamento é fortemente influenciado por sua concentração volumétrica. À medida que a concentração de sólidos aumenta, a taxa de cisalhamento diminui, resultando em um aumento da viscosidade aparente do material (CHÁCARA; FILHO, 2021). Essa relação entre concentração e propriedades reológicas é fundamental para a modelagem adequada do fluxo de rejeitos em diferentes condições.

Dentre os diversos modelos reológicos disponíveis para caracterizar fluidos não-newtonianos, o modelo de Bingham tem-se mostrado particularmente adequado para representar o comportamento dos rejeitos de mineração (YU; TANG; CHEN, 2020). Este modelo representa materiais que exibem uma tensão de escoamento definida (τ_Y), abaixo da qual se comportam como sólidos rígidos:

$$\tau = \begin{cases} 2\alpha\mu, & \text{se } |D| \leq \frac{\tau_Y}{2\alpha\mu} \\ \left(\frac{\tau_Y}{|D|} + 2\mu\right) D, & \text{se } |D| > \frac{\tau_Y}{2\alpha\mu} \end{cases} \quad (2.22)$$

onde α é um fator de regularização (tipicamente $\alpha = 100$) que aproxima o comportamento sólido por um fluido altamente viscoso quando a tensão está abaixo do limite de escoamento.

2.2.5.3 Implementação em SPH

No contexto do SPH, o tensor taxa de deformação para a partícula i pode ser calculado como:

$$\nabla v = \begin{bmatrix} v_{ij} \cdot \frac{r_{ij,x}}{|r_{ij}|} \\ v_{ij} \cdot \frac{r_{ij,y}}{|r_{ij}|} \\ v_{ij} \cdot \frac{r_{ij,z}}{|r_{ij}|} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$D = \frac{\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T}{2} = \begin{bmatrix} \nabla v_{0,0} & \frac{\nabla v_{0,1} + \nabla v_{1,0}}{2} & \frac{\nabla v_{0,2} + \nabla v_{2,0}}{2} \\ \frac{\nabla v_{0,1} + \nabla v_{1,0}}{2} & \nabla v_{1,1} & \frac{\nabla v_{1,2} + \nabla v_{2,1}}{2} \\ \frac{\nabla v_{0,2} + \nabla v_{2,0}}{2} & \frac{\nabla v_{1,2} + \nabla v_{2,1}}{2} & \nabla v_{2,2} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

onde $v_{ij} = v_i - v_j$ e $r_{ij} = r_i - r_j$.

O segundo invariante do tensor taxa de deformação, essencial para muitos modelos não-newtonianos, é obtido por:

$$|D_i| = \sqrt{\sum_{i,j} D_{ij} D_{ij}} \quad (2.25)$$

Por fim, o cálculo da força de viscosidade é dado por:

$$F_{visc} = \sum_j m_j \frac{\tau \cdot \frac{r_i - r_j}{|r_i - r_j|}}{\rho_j} \cdot \nabla^2 W_{viscosity}(|r_i - r_j|, h) \quad (2.26)$$

Além do modelo de Bingham, outros modelos reológicos que podem ser implementados no SPH incluem:

2.2.5.3.1 Modelo *power-law* (Ostwald-de Waele)

Nesse modelo, a tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau = 2\mu |D|^{K-1} D \quad (2.27)$$

onde K é o parâmetro de comportamento do fluido. Caso $K < 1$, o fluido é pseudoplástico (*shear-thinning*), o que significa que sua viscosidade diminui conforme a taxa de cisalhamento aumenta (quanto mais o fluido é "pressionado", mais facilmente ele se desloca). Quando $K > 1$, o fluido se comporta como dilatante (*shear-thickening*), ou seja, é um tipo de fluido onde a viscosidade aumenta com a taxa de cisalhamento aplicada. Já para $K = 1$, o fluido se caracteriza como newtoniano.

2.2.5.3.2 Modelo de Herschel-Bulkley

Esse modelo é uma generalização que combina comportamento plástico com dependência não linear da taxa de deformação:

$$|D| \leq \frac{\tau_Y}{2\alpha\mu} \rightarrow \tau = 2\alpha\mu D \quad (2.28)$$

$$|D| > \frac{\tau_Y}{2\alpha\mu} \rightarrow \tau = \left(\frac{\tau_Y}{|D|} + 2\mu|D|^{K-1} \right) D \quad (2.29)$$

O modelo de Herschel-Bulkley abrange tanto o modelo de Bingham (quando $K = 1$) quanto o modelo Power-Law (quando $\tau_Y = 0$), sendo também aplicável à modelagem de rejeitos de mineração em determinadas condições ([HOSSEINI; MANZARI; HANNANI, 2007](#)).

A implementação desses modelos no SPH requer cálculos adicionais em cada passo de tempo para determinar o valor da viscosidade aparente para cada partícula, com base em seu estado de deformação local e sua concentração volumétrica. Essa viscosidade aparente é, então, usada para calcular as forças viscosas entre partículas, permitindo a representação adequada do comportamento complexo dos rejeitos durante eventos de rompimento de barragens.

3 Trabalhos Correlatos

Neste capítulo, são apresentados alguns trabalhos relacionados à simulação de fluxo de rejeitos de mineração e ao rompimento de barragens. Cada trabalho contribui com aspectos específicos relevantes para a presente pesquisa, seja na representação da topografia, na modelagem das propriedades reológicas dos rejeitos ou na validação dos resultados com dados históricos.

Yu, Tang e Chen (2020) desenvolveram um modelo tridimensional baseado no método dos volumes finitos (FVM) para simular o fluxo de rejeitos após rompimentos de barragens. Os autores integraram o modelo reológico de Bingham-plástico às equações de Navier-Stokes, implementando o método VOF (*Volume of Fluid*) para tratar a interação entre rejeitos e ar. Para representar a topografia, utilizaram dados de elevação digital (MDE) de alta resolução provenientes de sensoriamento remoto, processados através de sistemas de informação geográfica (SIG) para gerar a malha computacional com elevações precisas. Ao aplicar o modelo aos rompimentos das barragens do Feijão (Brumadinho) e A'xi (China), demonstraram que a calibração adequada dos parâmetros reológicos é essencial para reproduzir precisamente tanto a velocidade do fluxo quanto a área atingida, validando seus resultados contra dados observacionais pós-ruptura.

Wang et al. (2018) propuseram uma metodologia baseada em uma abordagem lagrangiana, que combina o Modelo Digital de Superfície (MDS) com o método SPH para simular o fluxo de rejeitos. Os autores utilizaram dados topográficos obtidos por sensoriamento remoto via satélite, especificamente imagens MDS com resolução espacial de 30 m, convertendo-os em uma representação compatível com SPH através de um algoritmo que transforma a superfície contínua em um conjunto discreto de partículas de fronteira. Essa conversão permite a simulação de interações entre o fluido e a topografia complexa dentro do *framework* SPH. Aplicando esta metodologia ao desastre da barragem do Fundão em Mariana, os autores conseguiram reproduzir com notável precisão a extensão da área atingida, embora tenham simplificado a reologia dos rejeitos, tratando-os como fluido de densidade uniforme.

Machado (2017) realizou um estudo pioneiro de retroanálise do rompimento da barragem do Fundão, comparando modelos unidimensionais (1D) e bidimensionais (2D) implementados nos softwares HEC-RAS e FLO-2D. Para a representação topográfica, a autora utilizou dados de elevação provenientes de múltiplas fontes, incluindo levantamentos aerofotogramétricos e modelos digitais de terreno pré-existentes, com resolução espacial adaptada às características do vale a jusante da barragem. O trabalho avaliou diferentes hipóteses de formação da brecha e volumes de rejeitos liberados, demonstrando

que modelos bidimensionais foram significativamente mais precisos na representação da extensão da área afetada, especialmente em regiões topograficamente complexas. Uma contribuição metodológica importante foi a adaptação dos parâmetros de rugosidade e turbulência para representar adequadamente o comportamento não-newtoniano dos rejeitos, mesmo em softwares originalmente desenvolvidos para fluxos convencionais.

O presente trabalho se posiciona na interseção destas abordagens, propondo a utilização do método SPH com suas vantagens inerentes na representação de superfícies livres e grandes deformações, integrado a modelos reológicos não-newtonianos, calibrados para representar o padrão de escoamento dos rejeitos observados em dados reais dos acidentes de Mariana e Brumadinho. Diferentemente de [Yu, Tang e Chen \(2020\)](#), que utilizaram o método FVM, esta pesquisa explora as capacidades da abordagem lagrangiana do SPH, potencialmente mais adequada para lidar com as grandes deformações características de fluxos de rejeitos. Em comparação com [Wang et al. \(2018\)](#), o presente trabalho busca incorporar modelos reológicos mais sofisticados, indo além da representação simplificada dos rejeitos como fluido de densidade uniforme. Seguindo a linha de validação de [Machado \(2017\)](#), busca-se comparar os resultados com dados históricos dos acidentes de Mariana e Brumadinho, permitindo avaliar a precisão e aplicabilidade do método proposto para condições reais.

A integração entre um método numérico robusto para superfícies livres (SPH), modelos reológicos validados e dados topográficos precisos, com validação contra casos reais documentados, representa uma contribuição para o campo da modelagem de fluxos de rejeitos de mineração, com potenciais aplicações práticas na avaliação de riscos e planejamento de emergências.

4 Desenvolvimento

Este capítulo apresenta o desenvolvimento de um modelo computacional para simular o fluxo de rejeitos de mineração decorrentes do rompimento de barragens, baseado no método da Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas (SPH). O modelo proposto busca representar com precisão as características dos rejeitos de mineração, que apresentam comportamento não-newtoniano, e sua interação com diferentes topografias. As principais características desse modelo são descritas a seguir.

4.1 Inicialização do Modelo

O processo de inicialização do modelo de simulação é fundamental para garantir a estabilidade e precisão dos resultados. Este processo envolve a definição de diversos parâmetros físicos e geométricos que caracterizam tanto o fluido quanto o domínio computacional onde a simulação será executada.

A primeira etapa consiste na definição de uma região no espaço de simulação que representará a área inicial de concentração do fluido. Em seguida, estabelece-se o espaçamento inicial das partículas (d_p), parâmetro crucial que determina a resolução espacial da simulação e influencia diretamente tanto o número total de partículas, quanto o custo computacional associado. A partir deste espaçamento, estabelece-se o raio de influência das partículas ($h = 1.2d_p$), de acordo com [Sheikh, Qiu e Ahmadipur \(2021\)](#). Uma vez estabelecidos esses parâmetros, procede-se à distribuição das partículas no domínio computacional, seguindo um padrão uniforme na região previamente designada.

Paralelamente à definição geométrica, são estabelecidos os parâmetros físicos do fluido, como o volume total e a densidade de repouso (ρ_0). Esses valores são utilizados para calcular a massa de cada partícula (m), de acordo com a equação:

$$m = \frac{\rho_0 \cdot V_{total}}{N}, \quad (4.1)$$

onde V_{total} representa o volume total do fluido e N é o número total de partículas.

4.2 Modelagem da Topografia e Tratamento de Fronteiras

Para obter representações detalhadas do terreno nas regiões de interesse, foram utilizados dados topográficos reais. Para isso, foi empregado o modelo digital de elevação (MDE) global, da Missão Topográfica de Radar Embarcado (SRTM), realizada pela NASA em 2000, com precisão aproximada de 30 metros. Uma limitação desse modelo é que o

radar registra o nível da água no instante da coleta, mas não a forma da calha abaixo, além de não distinguir entre as áreas circundantes do curso d'água e o próprio nível da água, em função da resolução (FARR et al., 2007). Por isso, é imprescindível fazer ajustes manuais para identificar a calha submersa nos locais onde há rejeitos e gerir as áreas adjacentes a corpos d'água.

O processo de modelagem da topografia consiste, então, na criação de uma malha tridimensional da região para fins de visualização e da inicialização de partículas fictícias para o tratamento de fronteiras.

Para este trabalho, optou-se pelo uso do método do momento. Esse método apresenta duas vantagens significativas em relação aos demais, que fundamentaram sua escolha. A primeira refere-se ao menor custo computacional em comparação ao método de partículas fictícias, decorrente da necessidade reduzida de partículas, as quais não participam do processo de interpolação. Ademais, considerando que as fronteiras abordadas neste estudo são sólidas e indeformáveis, este método mostra-se mais simplificado em relação ao método de penetração, eliminando a necessidade de tratamento da elasticidade do material na superfície.

Dessa forma, conforme o método escolhido, as partículas fictícias são distribuídas ao longo da superfície do contorno, respeitando a topografia e o espaçamento inicial definido anteriormente.

4.3 Processamento Paralelo na GPU

O modelo foi implementado mediante o uso de *shaders* computacionais, que exploram eficientemente a arquitetura altamente paralela das GPUs – dispositivos tradicionalmente dedicados a tarefas gráficas – para executar processamentos diversos de dados com desempenho superior.

Para a representação dos dados da simulação, foram utilizadas texturas bidimensionais para cada quantidade física, com cada pixel correspondendo a uma partícula. O paralelismo da GPU possibilita que os cálculos de forças, densidades e velocidades para milhares de partículas sejam realizados simultaneamente, reduzindo drasticamente o tempo de processamento.

O processamento foi dividido em diversos módulos computacionais, com cada um sendo implementado em um *shader* especializado, responsável por uma fase distinta da simulação, como a identificação de vizinhanças (geração do balde), cálculo de densidade e avaliação de forças e advecção. A representação desses módulos, junto com o fluxo de dados entre eles, é ilustrada no diagrama da Figura 7.

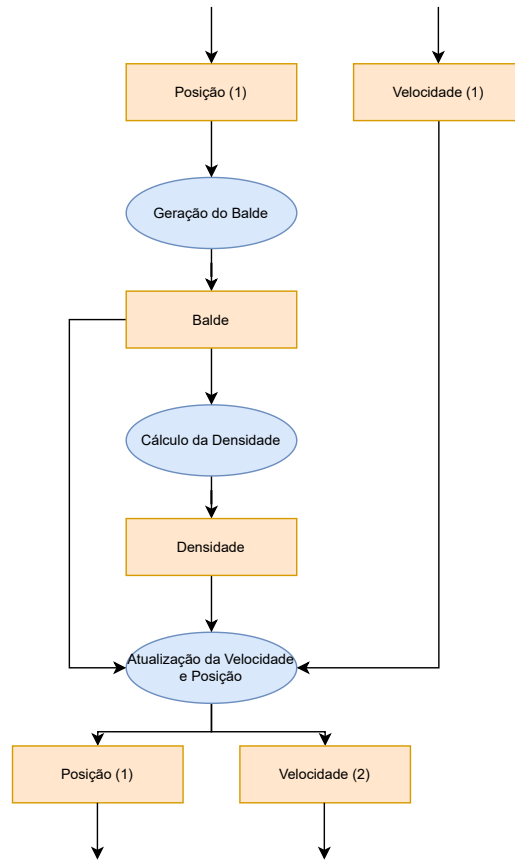


Figura 7 – Diagrama de fluxo de um passo de tempo. Elipses azuis representam as operações (*shaders*) e retângulos laranjas os dados (texturas). Fonte: Adaptado de (HARADA; KOSHIZUKA; KAWAGUCHI, 2007)

4.3.1 Shader de Geração do Balde

Para gerenciar as vizinhanças na simulação, adota-se uma versão adaptada do modelo proposto por Harada, Koshizuka e Kawaguchi (2007), otimizada para execução em GPU. O modelo é fundamentado no método de células ligadas descrito na Seção 2.2.3. Cada célula armazena referências às partículas contidas nela, permitindo consultas de vizinhança eficientes durante as etapas subsequentes. O tamanho das células é definido com base no raio de influência das partículas, garantindo que apenas as células adjacentes precisem ser verificadas ao calcular interações entre partículas. Esse método reduz a complexidade computacional da busca de vizinhos de $O(N^2)$ para $O(N)$, tornando possíveis simulações com grande quantidade de partículas em tempo real.

A estrutura de dados selecionada para representar esta grade consiste em um sistema de baldes (*bucket*), no qual cada valor representa uma célula que armazena uma

lista de índices de partículas. Na versão original do modelo, uma textura era empregada para guardar essa estrutura, restringindo o número de partículas por célula a quatro, uma para cada componente (vermelho, verde, azul e transparência). Neste trabalho, é empregado um *buffer* achatado em uma dimensão, que possibilita ajustar o número máximo de partículas por célula (*maxParticulaCelula*), limitado apenas pela memória disponível na GPU.

O pseudocódigo de geração de um balde é apresentado no Algoritmo 1.

Algoritmo 1: Geração do Balde

Entrada: conjunto de partículas, N , r_{min} , r_{max} , b

Saída: balde (B)

```

1 início
2    $B \leftarrow \text{inicializaBalde}(N)$ 
3   para cada partícula  $i$  faça
4      $c_i \leftarrow \text{interpolacao}(p_i, r_{min}, r_{max}, b)$ 
5     para cada  $k < \text{maxParticulaCelula}$  faça
6       se  $B[c_i][k] == N$  então
7         // Inserção bem-sucedida
8          $B[c_i][k] \leftarrow i$ 
9       parar
10    fim
11  fim
12 fim

```

O processo de criação do balde começa com a inicialização do balde com N em todas as posições (linha 2 do pseudocódigo). Em seguida, é realizado o processamento de cada partícula do conjunto, que consiste em interpolar a posição da partícula na grade (linha 4) e, em seguida, encontrar um local disponível para armazenar seu índice (linhas 5 a 9). A interpolação da posição de uma partícula na grade é definida pela seguinte expressão:

$$c_i = \begin{bmatrix} \frac{r_{ix} - r_{min,x}}{r_{max,x} - r_{min,x}} \cdot b_x \\ \frac{r_{iy} - r_{min,y}}{r_{max,y} - r_{min,y}} \cdot b_y \\ \frac{r_{iz} - r_{min,z}}{r_{max,z} - r_{min,z}} \cdot b_z \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde c_i representa a coordenada da célula na grade que contém a partícula i , r_{min} e r_{max} são os limites mínimos e máximos, respectivamente, do domínio de simulação em cada eixo e b são as dimensões do balde.

O tamanho do *buffer* depende principalmente de dois parâmetros: o espaçamento

inicial, que define as dimensões da grade, e o limite máximo de partículas por célula. Esses valores são ajustados para cada situação particular. Se o espaçamento for excessivamente reduzido e o número máximo de partículas por célula não for suficientemente grande, algumas partículas podem não caber no balde, resultando em falhas na simulação. Se forem excessivamente grandes, pode ocorrer falta de memória na placa de vídeo.

4.3.2 Shader de Cálculo da Densidade

Para determinar a densidade de cada partícula, é necessário resolver a Equação 2.4. O pseudocódigo desse processo é apresentado no Algoritmo 2.

Algoritmo 2: Cálculo da Densidade

Entrada: conjunto de partículas, N , r_{min} , r_{max} , b , B

Saída: densidade de cada partícula

```

1 início
2   para cada partícula  $i$  faça
3      $\rho_i \leftarrow 0$ 
4      $c_i \leftarrow \text{interpolacao}(p_i, r_{min}, r_{max}, b)$ 
5     para cada  $-1 \leq x', y', z' \leq 1$  faça
6       para cada  $k < \text{maxParticulaCelula}$  faça
7          $j \leftarrow B[c_i + (x', y', z')][k]$ 
8         se  $j == N$  então
9           // Chegou ao fim da lista
10          parar
11        fim
12      se  $j$  é uma partícula de fluido então
13         $\rho_i \leftarrow \rho_i + m_i \cdot W_{poly6}(r_i - r_j)$ 
14      fim
15    fim
16  fim
17 fim
```

Inicialmente, as partículas vizinhas de uma partícula i são identificadas através do *buffer* de balde gerado. Esse processo consiste em interpolar novamente a posição da partícula na grade (linha 4 do pseudocódigo) para determinar as células vizinhas (laço da linha 5) e as partículas j presentes nessas células (laço da linha 6). Caso a partícula j seja uma partícula de fluido, sua influência na densidade da partícula i é então obtida pela soma ponderada da sua massa (linhas 11 a 13).

4.3.3 Shader de Atualização da Velocidade e Posição

O processo de atualização da velocidade e posição das partículas envolve o cálculo das forças atuantes e a integração temporal das equações de movimento, conforme apresentado no Algoritmo 3.

Algoritmo 3: Atualização da Velocidade e Posição

Entrada: conjunto de partículas, N , r_{min} , r_{max} , b , B

Saída: posição e velocidade atualizada para cada partícula

```

1  início
2      para cada partícula  $i$  faça
3           $p_i \leftarrow k \cdot (\rho_i - \rho_0)$ 
4           $F_i^p, F_i^v, F_i^f \leftarrow 0$ 
5           $c_i \leftarrow \text{interpolacao}(p_i, r_{min}, r_{max}, b)$ 
6          para cada  $-1 \leq x', y', z' \leq 1$  faça
7              para cada  $k < \text{maxParticulaCelula}$  faça
8                   $j \leftarrow B[c_i + (x', y', z')][k]$ 
9                  se  $j == N$  então
10                     // Chegou ao fim da lista
11                     parar
12                  fim
13                  se  $j$  é uma partícula fictícia então
14                      $d_{fluid} \leftarrow r_i - r_j$ 
15                      $\Delta d_p^n \leftarrow d_{dummy} - d_{fluid}$ 
16                     se  $\Delta d_p^n > 0$  e  $v_i \cdot n < 0$  então
17                          $F_i^f \leftarrow F_i^f + \text{calcularForcaFronteira}(v_i, d_{fluid})$ 
18                     fim
19                  fim
20                  senão
21                      $p_j \leftarrow k \cdot (\rho_j - \rho_0)$ 
22                      $F_i^p \leftarrow F_i^p + \text{calcularForcaPressao}(|r_i - r_j|, p_i, p_j)$ 
23                      $F_i^v \leftarrow F_i^v + \text{calcularForcaViscosidade}(|r_i - r_j|, |v_i - v_j|, \rho_j)$ 
24                  fim
25              fim
26           $a_i \leftarrow g + \frac{m_i \cdot (F_i^p + F_i^v)}{\rho_i} + F_i^f$ 
27           $v'_i \leftarrow v_i + a_i \cdot \Delta t$ 
28           $r'_i \leftarrow r_i + v_i \cdot \Delta t$ 
29      fim
30 fim
  
```

Esse processo começa com o cálculo da pressão de cada partícula (linha 3), com base na equação de estado (2.10), e a inicialização dos seus vetores de força (linha 4). A busca por partículas vizinhas utiliza o mesmo método empregado no cálculo da densidade, percorrendo o buffer de balde para identificar as partículas dentro do raio de influência (linhas 5 a 11).

Para o cálculo da força de interação com a fronteira, é calculada a distância da partícula de fluido i à partícula fictícia j e verificado se houve a penetração na área de contorno (linhas 13 a 15). A função *calcularForcaFronteira* implementa as Equações 2.16 e 2.17, usando a posição e a velocidade da partícula i juntamente com a posição da partícula fictícia j , e calcula as forças normais e tangenciais que resultam da interação de i com j (linha 16).

A função *calcularForcaPressao* aplica a Equação 2.9, aceitando como entradas a distância entre as partículas de fluido i e j juntamente com suas respectivas pressões, com o objetivo de determinar a força de pressão que j exerce sobre i (linhas 20 e 21).

A função *calcularForcaViscosidade* implementa as Equações 2.24, 2.25 e 2.22 para determinar a taxa de cisalhamento e utiliza a Equação 2.26 para calcular a força de viscosidade que a partícula de fluido j exerce sobre i (linha 22). Os parâmetros de entrada são a distância entre i e j , a velocidade relativa de i em relação a j , e a densidade de j .

Após o cálculo das forças, a aceleração calculada a partir da Equação 2.8 (linha 26), e em seguida, a velocidade é atualizada e armazenada em uma textura de velocidade (linha 27). Por fim, a posição é obtida por meio de uma integração explícita de Euler, resultando em uma nova posição r'_i , que é registrada em uma textura de posição (linha 28). Embora existam métodos de ordem superior, eles não foram adotados, pois não se observou nenhum problema de estabilidade.

O modelo foi desenvolvido usando a *engine* de jogos *Unity*, que disponibiliza uma API para implementar *shaders* computacionais de forma mais conveniente e possui ferramentas que facilitaram a renderização das partículas de fluido e da topografia. O código-fonte completo do modelo computacional desenvolvido neste trabalho está disponível em um repositório público no GitHub, acessível pelo endereço: <<https://github.com/leandro-barcelos/SPH-TailingsDamFailure>>.

5 Experimentos e Resultados

O objetivo dos experimentos realizados nesta pesquisa é validar a qualidade do modelo implementado em representar adequadamente o fluxo de rejeitos de mineração decorrentes do rompimento de barragens. Inicialmente, são apresentados os dados topográficos utilizados, assim como os parâmetros definidos. Em seguida, é realizada uma análise comparativa, onde o modelo é ajustado e executado para simular o escoamento de rejeitos em dois casos de estudos: rompimento das barragens de Mariana e Brumadinho. Os resultados provenientes das simulações são comparados com os dados reais coletados desses desastres, a fim de avaliar a precisão do modelo na reprodução dos padrões presentes nos dados. Essa análise dos resultados não apenas permite avaliar a qualidade do método, mas também evidencia possíveis áreas para melhorar o modelo.

5.1 Cenários de Estudo

5.1.1 Rompimento da Barragem do Fundão (Mariana)

O complexo de mineração em Germano, localizado em Mariana, Minas Gerais, Brasil, era administrado pela Samarco, uma *joint venture* entre Vale e BHP Billiton (Figura 8a). Em 5 de novembro de 2015, a barragem do Fundão, que tinha a função de armazenar resíduos da extração de ferro, sofreu um colapso estrutural devastador, liberando cerca de 43,7 milhões de metros cúbicos de rejeitos, culminando no maior desastre envolvendo barragens de rejeitos em termos de volume liberado (ARMADA, 2020).

A corrente de rejeitos inicialmente arrasou o subdistrito de Bento Rodrigues (ver Figura 8b), resultando em 19 mortos, e prosseguiu ao longo de 600 km até alcançar o Oceano Atlântico, em 21 de novembro de 2015. O desastre afetou diretamente 39 municípios ao longo da bacia do Rio Doce, com graves danos ambientais, como destruição de habitats terrestres e aquáticos, além da contaminação de água e solo. No que se refere à distância percorrida pelos rejeitos, o desastre de Mariana estabeleceu um novo recorde mundial, superando em mais de duas vezes o segundo maior incidente desse tipo, ocorrido na Bolívia em 1996.

5.1.2 Rompimento da Barragem I da Mina Córrego do Feijão (Brumadinho)

O complexo de mineração Córrego do Feijão (Figura 9a) está situado em Brumadinho, no estado de Minas Gerais, Brasil, no alto do vale do rio Paraopeba, e era constituído por duas barragens de rejeitos, um terminal de carga, um escritório administrativo e uma pequena linha ferroviária para o transporte de minério de ferro. A barragem de rejeitos I,

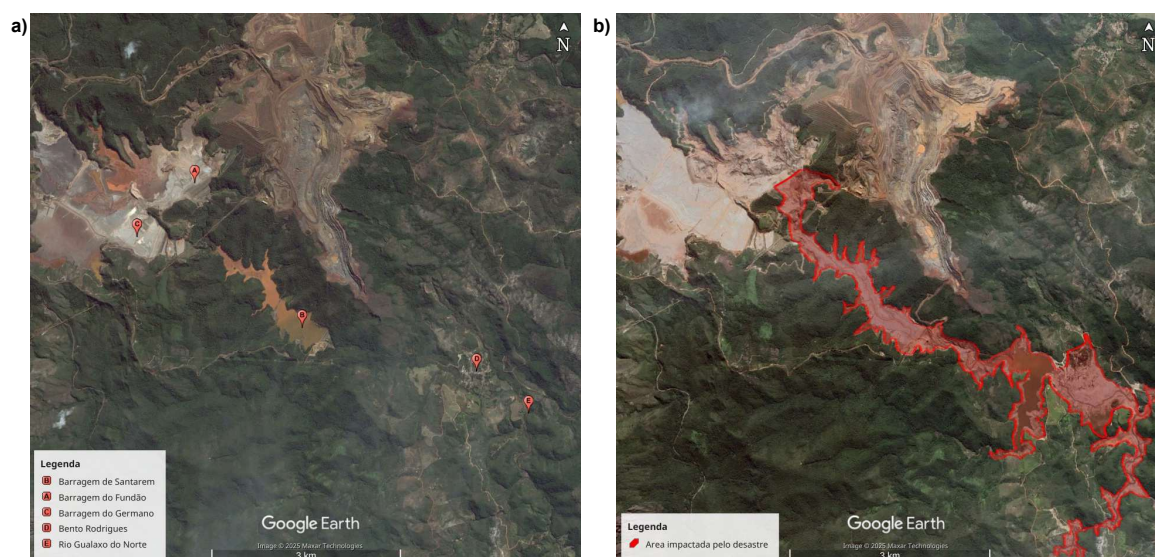


Figura 8 – Imagem de satélite da área de Mariana: antes (a) e depois (b) do rompimento da Barragem do Fundão. Fonte: (GOOGLE, 2015)

com uma altura de 86 metros e uma extensão de 720 metros, foi projetada para armazenar cerca de 12,7 milhões de metros cúbicos de rejeitos provenientes da extração de ferro. Em 25 de janeiro de 2019, essa barragem sofreu uma falha estrutural que resultou em um colapso catastrófico, provocando pelo menos 232 mortes (ARMADA, 2020).

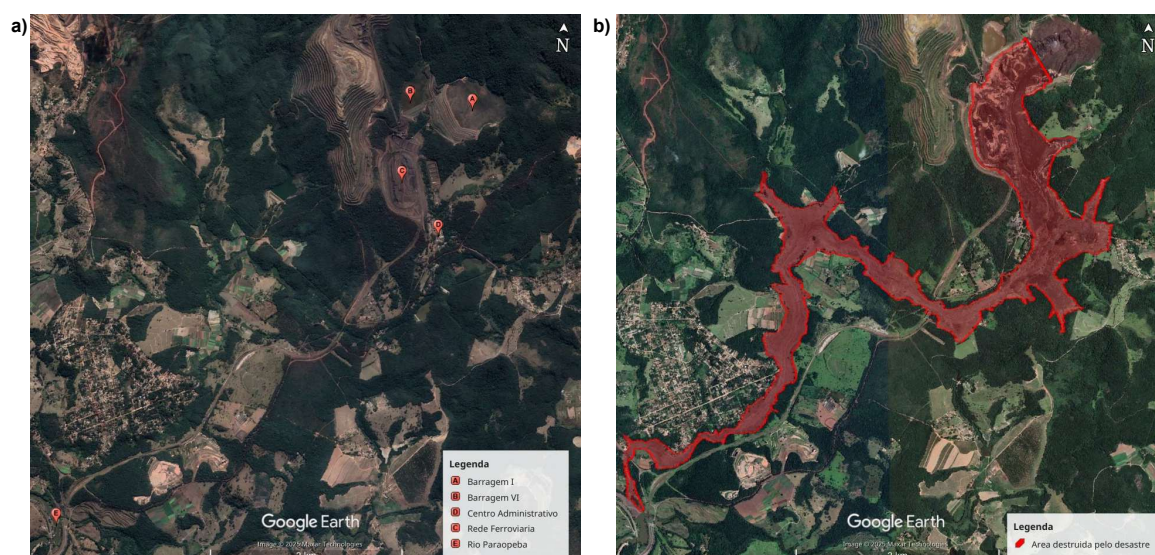


Figura 9 – Imagem de satélite da área de Brumadinho: antes (a) e depois (b) do rompimento da barragem I. Fonte: (GOOGLE, 2018)

De acordo com a pesquisa de campo conduzida por Porsani, Jesus e Stangari (2019) após o colapso, cerca de 11,7 milhões de m^3 de rejeitos foram liberados da barragem, resultando na destruição de prédios administrativos, uma ponte ferroviária e uma pequena comunidade. Sob a influência da gravidade, os rejeitos se deslocaram por 9 km

e eventualmente chegaram ao Rio Paraopeba, o principal rio da região. A área a jusante afetada pelos rejeitos cobriu mais de 2,61 milhões de metros quadrados, conforme medido por imagens de sensoriamento remoto da área afetada (Figura 9b).

5.2 Configuração dos Experimentos

O espaçamento inicial das partículas e o número máximo de partículas por célula foram estabelecidos empiricamente para cada caso, garantindo que o tamanho do balde permanecesse dentro dos limites e evitando falhas na simulação por escassez de espaço nas células.

Subsequentemente, para a representação topográfica das regiões, foram retirados os segmentos da base de dados SRTM, relativos às áreas mostradas nas Figuras 8 e 9, e aplicados alguns ajustes nos dados de elevação. No caso da barragem do Fundão, devido à coleta de dados anterior à construção, não se fez necessário considerar o impacto do nível dos rejeitos, uma vez que eles não estão presentes. Entretanto, o contorno da barragem de Santarém foi modificado para resolver problemas causados pela resolução. Para a barragem I, em Brumadinho, foram exigidos ajustes para eliminar os efeitos do nível dos rejeitos acumulados e restaurar o perfil original do terreno. As texturas de elevação para ambos os casos são apresentadas na Figura 10.

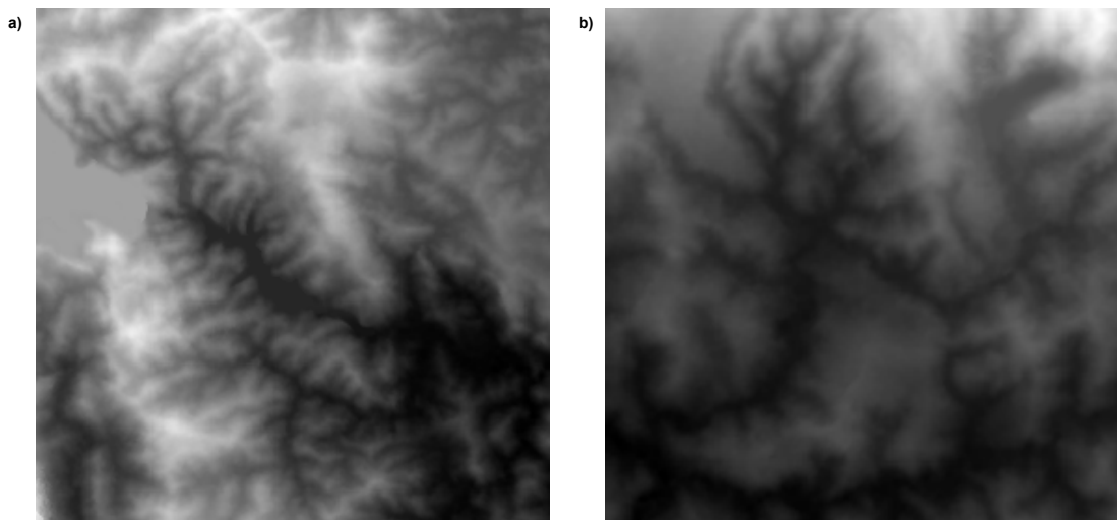


Figura 10 – Texturas de elevação para as regiões das barragens analisadas: (a) barragem do Fundão; e (b) barragem I. Fonte: (NASA JPL, 2013)

Os parâmetros dos rejeitos foram ajustados com base em dados reais. O volume dos rejeitos foi estipulado de acordo com a capacidade total relatada para cada barragem. Os parâmetros reológicos foram fundamentados em estudos publicados na literatura. Para a barragem do Fundão, adotou-se os valores determinados a partir dos resultados experimentais obtidos por Águido et al. (2022), que realizaram testes de abatimento com

amostras dos rejeitos. Para a barragem I, em Brumadinho, foram aplicados os mesmos valores utilizados por [Yu, Tang e Chen \(2020\)](#).

Os demais parâmetros foram ajustados experimentalmente para maximizar a precisão da área de dispersão dos rejeitos na simulação, buscando aproximar o máximo possível da área real. A Tabela 1 apresenta os valores dos parâmetros usados no modelo para cada caso de estudo.

Tabela 1 – Parâmetro utilizados nas simulação de rompimento de barragem.

Parâmetro	Barragem do Fundão	Barragem I
Distância inicial (d_p)	9,5 m	10 m
Limite de partículas por célula	16	24
Volume total (V_{total})	$6,2 \cdot 10^7 \text{ m}^3$	$1,27 \cdot 10^7 \text{ m}^3$
Viscosidade plástica (μ_p)	$0,36 \text{ Pa} \cdot \text{s}$	$0,741 \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Densidade de descanso (ρ_0)	2280 kg/m^3	1830 kg/m^3
Tensão de escoamento (τ_Y)	$56,34 \text{ Pa}$	59.82 Pa
Constante gasosa (k)	$230 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3/\text{kg}$	$230 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3/\text{kg}$
Coeficiente de amortecimento (ζ)	0.65	1

As simulações foram executadas em uma GPU RTX 3060 Ti, com 4864 núcleos CUDA e 8 GB de memória virtual. Para o cenário de Mariana, foram utilizadas 32.163 partículas para representar o fluido e 753.424 partículas fictícias para o tratamento de fronteiras. Já no cenário de Brumadinho, foram empregadas 13.957 partículas de fluido e 349.281 partículas fictícias. A quantidade significativa de partículas fictícias em relação às partículas de fluido reflete a complexidade topográfica das regiões estudadas, sendo necessárias para assegurar o tratamento adequado das interações fluido-fronteira.

5.3 Análise Qualitativa

As Figuras 11 e 12 apresentam a visualização da propagação do fluxo de rejeitos nos cenários de Mariana e Brumadinho, respectivamente, em diferentes instantes de tempo. Observa-se que o modelo capturou adequadamente as principais características do fluxo, incluindo:

- A formação inicial da onda de rejeitos após o rompimento da barragem
- A canalização do fluxo ao longo dos vales existentes
- O espalhamento do material em regiões de topografia mais plana
- A deposição gradual dos rejeitos à medida que perdem energia cinética

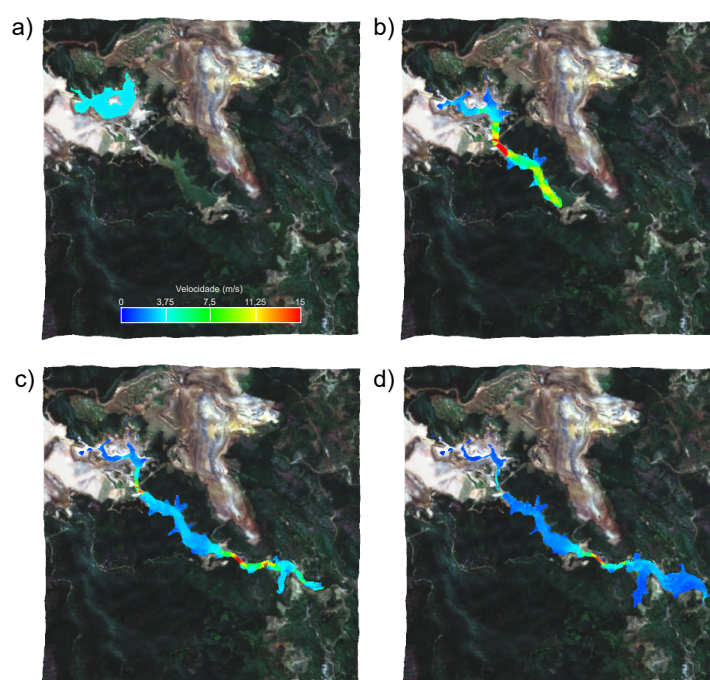


Figura 11 – Visualização da propagação do fluxo de rejeitos no cenário de Mariana em diferentes instantes de tempo: (a) $t = 0$ s, (b) $t = 300$ s, (c) $t = 900$ s, (d) $t = 1800$ s. Fonte: Do autor.

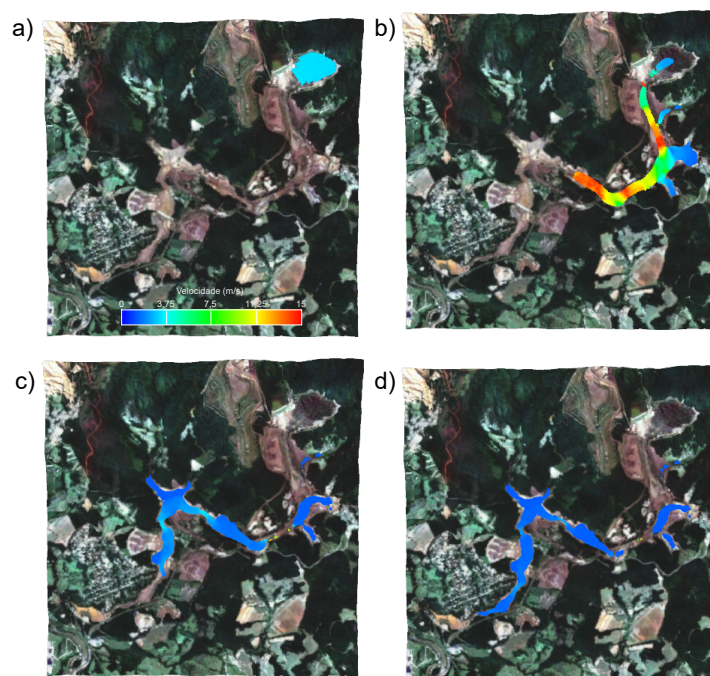


Figura 12 – Visualização da propagação do fluxo de rejeitos no cenário de Brumadinho em diferentes instantes de tempo: (a) $t = 0$ s, (b) $t = 300$ s, (c) $t = 1200$ s, (d) $t = 2400$ s. Fonte: Do autor.

Ao comparar visualmente com a área medida a partir das imagens de satélite pós-desastre (Figura 13), percebe-se que o modelo conseguiu reproduzir de forma satisfatória a extensão da área afetada, bem como os principais canais de escoamento observados nos eventos reais. No entanto, é notado que, em ambos os cenários, os rejeitos não atingiram a extensão máxima observada nos dados reais. Os dois principais fatores que podem explicar esse problema são a resolução da textura de elevação e a quantidade de partículas.

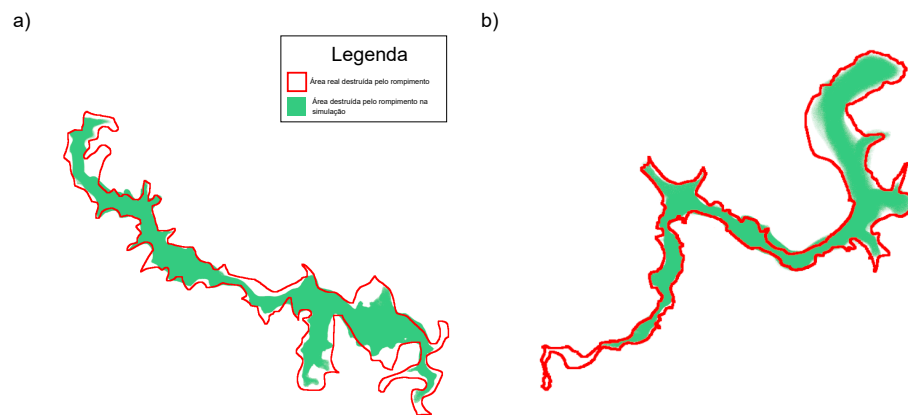


Figura 13 – Comparação entre a área afetada real e a área simulada para: (a) Cenário de Mariana, (b) Cenário de Brumadinho. Fonte: Do autor.

5.4 Análise Quantitativa

As Tabelas 2 e 3 apresentam uma comparação quantitativa entre os dados reais observados e os resultados obtidos nas simulações para os cenários de Mariana e Brumadinho, respectivamente. Os dados reais foram obtidos através de medições realizadas sobre as imagens de satélite pós-rompimento, e só consideraram as áreas usadas na simulação.

Tabela 2 – Comparação entre dados reais e simulados para o cenário de Mariana

Parâmetro	Dados reais	Simulação	Erro (%)
Extensão máxima (km)	10341,74	8860,09	-14,3269
Área afetada (km ²)	3,56	3,166	-11,0674

Tabela 3 – Comparação entre dados reais e simulados para o cenário de Brumadinho

Parâmetro	Dados reais	Simulação	Erro (%)
Extensão máxima (km)	8577,5	7103,09	-17,1893
Área afetada (km ²)	2,536	2,457	-3,1151

Além da área afetada e da extensão máxima, a velocidade média do fluxo de rejeitos também foi coletada, conforme ilustrado nas Figuras 14 e 15. Embora não existam dados sistemáticos sobre a velocidade dos rejeitos durante os eventos reais para uma

comparação quantitativa direta, os valores obtidos nas simulações são qualitativamente consistentes com estimativas pontuais disponíveis na literatura. Para o caso de Brumadinho, por exemplo, [Porsani, Jesus e Stangari \(2019\)](#) relata, com base em imagens de câmeras de segurança, que a velocidade inicial dos rejeitos excedia 10 m/s, o que está dentro da ordem de grandeza observada na simulação.

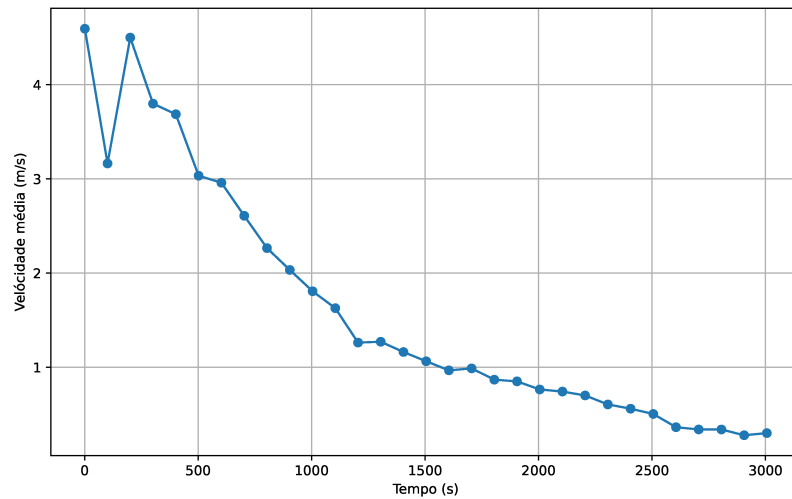


Figura 14 – Evolução da velocidade média do fluxo de rejeitos ao longo do tempo para o cenário de Mariana. Fonte: Do autor.

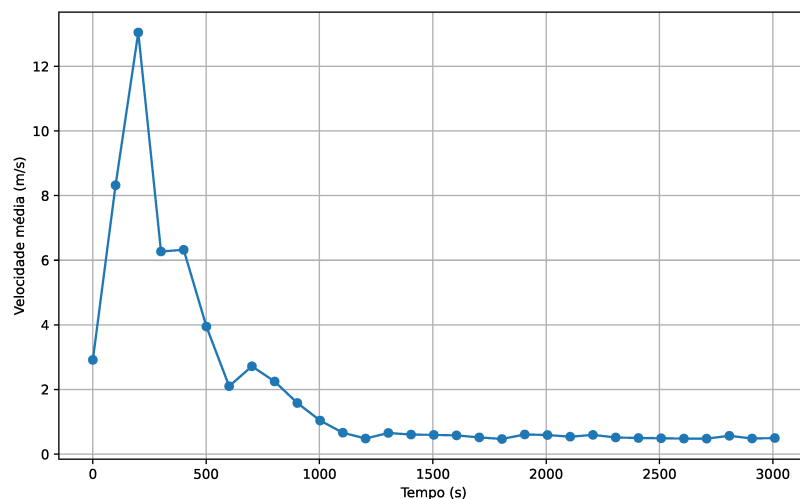


Figura 15 – Evolução da velocidade média do fluxo de rejeitos ao longo do tempo para o cenário de Brumadinho. Fonte: Do autor.

A análise da área total afetada, parâmetro crucial para avaliação do impacto ambiental dos eventos, apresentou um erro de -11,0674% para o cenário de Mariana e -3,1151%

para Brumadinho, demonstrando a capacidade do modelo em representar a extensão espacial do desastre. A extensão máxima do fluxo, outro parâmetro relevante para delimitação das áreas de risco, foi simulada com erros de -14,3269% e -17,1893% para Mariana e Brumadinho, respectivamente.

Os resultados obtidos indicam que o modelo numérico desenvolvido apresenta boa concordância com os dados reais, especialmente no que se refere à área total afetada, parâmetro fundamental para a elaboração de planos de contingência e delimitação de zonas de autossalvamento em áreas de risco.

6 Conclusão

Este trabalho apresentou um modelo computacional utilizando o Método de Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas (SPH) para simular como os rejeitos de mineração agem durante desastres de rompimento de barragens. O principal objetivo foi elaborar um modelo que reproduzisse, com precisão adequada, a extensão da área afetada por tais eventos, a fim de facilitar a criação de planos de contingência e a definição de zonas de autossalvamento em áreas de risco.

Por meio dos experimentos conduzidos, foi avaliado o desempenho do modelo para simular esses desastres. Ainda que os valores precisos não tenham sido totalmente alcançados, as áreas simuladas proporcionaram uma representação precisa da dispersão dos rejeitos em comparação com os dados reais, principalmente quanto aos padrões de escoamento e à distribuição espacial dos rejeitos. Isso destaca a eficácia do método desenvolvido, que conseguiu representar consistentemente o comportamento do fluxo de rejeitos em diversos cenários, alterando a topografia e suas características reológicas.

No entanto, certas limitações ainda persistem, principalmente referentes à extensão máxima do fluxo, que, nas simulações, permaneceu abaixo dos valores observados em eventos reais. Esses pontos sugerem que o modelo pode ser melhorado para conseguir uma precisão maior em cenários complexos.

Em síntese, os achados indicam que o modelo proposto é promissor para a simulação do fluxo de rejeitos de mineração decorrentes do rompimento de barragens, permitindo a criação de cenários mais realistas e apoiando na elaboração de planos de contingência para tais eventos.

Com base nos resultados alcançados, uma importante área para investigações futuras reside na melhoria da representação das vizinhanças de partículas. A solução atual demanda alto consumo de memória, o que compromete a precisão da simulação. A implementação de um algoritmo de compressão na geração de vizinhanças poderia reduzir essa demanda, permitindo um menor espaçamento inicial entre partículas e, assim, aumentar a resolução da simulação.

Finalmente, a incorporação de modelos topográficos de maior resolução pode aumentar a precisão do modelo no tratamento de fronteiras em topografias mais complexas. Esses elementos podem permitir uma representação mais detalhada e precisa do comportamento dos rejeitos em diversas circunstâncias.

Referências

Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico. **Relatório de Segurança de Barragens 2023**. Brasília, DF, 2024. Disponível em: <<https://www.snisb.gov.br/portal-snisb/documentos-e-capacitacoes/rsb>>. Citado na página 14.

ANDERSON, J. **Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications**. McGraw-Hill, 1995. (McGraw-Hill International Editions: Mechanical Engineering). ISBN 978-0-07-113210-7. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=phG_QgAACAAJ>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

ARMADA, C. A. S. Os desastres ambientais de Mariana e Brumadinho em face ao estado socioambiental brasileiro. **Territorium**, n. 28(I), p. 13–22, dez. 2020. ISSN 1647-7723, 0872-8941. Disponível em: <https://doi.org/10.14195/1647-7723_28-1_1>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 43 e 44.

Assembléia Legislativa de Minas Gerais. Lei nº 23.291, de 25/02/2019. Política estadual de segurança de barragens. **Portal da Assembleia Legislativa de Minas Gerais**, fev. 2019. Disponível em: <<https://www.almg.gov.br/legislacao-mineira/texto/LEI/23291/2019/>>. Citado na página 13.

BARNES, H.; HUTTON, J.; WALTERS, K. **An Introduction to Rheology**. Elsevier Science & Technology, 1989. (Rheology series). ISBN 978-0-08-093369-6. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=VKj8BAAAQBAJ>>. Citado na página 30.

BOGER, D. V. Rheology of Slurries and Environmental Impacts in the Mining Industry. **Annual Review of Chemical and Biomolecular Engineering**, v. 4, n. 1, p. 239–257, jun. 2013. ISSN 1947-5438, 1947-5446. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev-chembioeng-061312-103347>>. Citado na página 30.

BOWKER, L. N.; CHAMBERS, D. M. In the Dark Shadow of the Supercycle Tailings Failure Risk & Public Liability Reach All Time Highs. **Environments**, v. 4, n. 4, 2017. ISSN 2076-3298. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/environments4040075>>. Citado na página 14.

CAMPOS, J. P. de. Barragem da Vale se rompe em Brumadinho (MG). **Revista Veja**, jan. 2019. Disponível em: <<https://veja.abril.com.br/brasil/barragem-da-vale-se-rompe-em-brumadinho-mg/>>. Citado na página 12.

CHEN, S.; DOOLEN, G. D. LATTICE BOLTZMANN METHOD FOR FLUID FLOWS. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 30, n. Volume 30, 1998, p. 329–364, 1998. ISSN 1545-4479. Publisher: Annual Reviews Type: Journal Article. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.30.1.329>>. Citado na página 20.

CHHABRA, R. P.; RICHARDSON, J. F. **Non-Newtonian Flow and Applied Rheology: Engineering Applications**. Second edition. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2008. ISBN 978-0-7506-8532-0. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-8532-0.00001-9>>. Citado na página 31.

CHÁCARA, D. M.; FILHO, W. L. O. Rheology of mine tailings deposits for dam break analyses. **REM - International Engineering Journal**, v. 74, n. 2, p. 235–243, jun. 2021. ISSN 2448-167X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-8532-0.00001-9>>. Citado na página 31.

CLAUDIA, M. Barragem de mineradora se rompe e inunda distrito no interior de Minas. **Agência Brasil**, Brasília, DF, maio 2015. Disponível em: <<https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2015-11/barragem-de-rejeitos-de-mineradora-se-rompe-e-inunda-distrito-em-minas-gerais>>. Citado na página 12.

DAMS, I. C. o. L. **Tailings Dams: Risk of Dangerous Occurrences : Lessons Learnt from Practical Experiences**. Commission Internationale des Grand Barrages, 2001. (Bulletin (International Commission on Large Dams)). ISBN 978-92-807-2053-2. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=h5WTswEACAAJ>>. Citado na página 12.

DEHNEN, W.; ALY, H. Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability: SPH without pairing instability. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 425, n. 2, p. 1068–1082, set. 2012. ISSN 00358711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21439.x>>. Citado na página 25.

DESBRUN, M.; CANI, M.-P. Smoothed Particles: A new paradigm for animating highly deformable bodies. In: BOULIC, R.; HEGRON, G. (Ed.). **Eurographics Workshop on Computer Animation and Simulation (EGCAS)**. Poitiers, France: Springer-Verlag, 1996. p. 61–76. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-7486-9_5>. Citado na página 25.

FARR, T. G.; ROSEN, P. A.; CARO, E.; CRIPPEN, R.; DUREN, R.; HENSLEY, S.; KOBRICK, M.; PALLER, M.; RODRIGUEZ, E.; ROTH, L.; SEAL, D.; SHAFFER, S.; SHIMADA, J.; UMLAND, J.; WERNER, M.; OSKIN, M.; BURBANK, D.; ALSDORF, D. The Shuttle Radar Topography Mission. **Reviews of Geophysics**, v. 45, n. 2, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1029/2005RG000183>>. Citado na página 37.

FERZIGER, J.; PERIC, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN 978-3-642-56026-2. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=BZnvCAAQBAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 181, n. 3, p. 375–389, dez. 1977. ISSN 0035-8711, 1365-2966. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375>>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 21.

GOOGLE. Google Earth Pro, 2015. Disponível em: <<https://earth.google.com/web/@-20.22239357,-43.44541965,821.61650496a,10252.79983516d,35y,0h,0t,0r>>. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 44.

_____. Google Earth Pro, 2018. Disponível em: <<https://earth.google.com/web/@-20.13481252,-44.13216109,850.66090211a,10378.02117309d,30y,0h,0t,0r>>. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 44.

HARADA, T.; KOSHIZUKA, S.; KAWAGUCHI, Y. Smoothed Particle Hydrodynamics on GPUs. **Computer Graphics International**, v. 40, p. 63–70, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 4, 21, 25, 26 e 38.

HARLOW, F. H.; WELCH, J. E. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. **The Physics of Fluids**, v. 8, n. 12, p. 2182–2189, dez. 1965. ISSN 0031-9171. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1761178>>. Citado na página 20.

HIRT, C. W.; NICHOLS, B. D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. **Journal of Computational Physics**, v. 39, n. 1, p. 201–225, 1981. ISSN 0021-9991. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90145-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90145-5)>. Citado na página 19.

HOSSEINI, M.; MANZARI, M.; HANNANI, S. A fully explicit three-step SPH algorithm for simulation of non-Newtonian fluid flow. **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**, v. 17, set. 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1108/09615530710777976>>. Citado 3 vezes nas páginas 13, 30 e 33.

KOLDITZ, O. Finite Volume Method. In: **Computational Methods in Environmental Fluid Mechanics**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002. p. 173–190. ISBN 978-3-662-04761-3. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04761-3_8>. Citado na página 18.

KOSSOFF, D.; DUBBIN, W. E.; ALFREDSSON, M.; EDWARDS, S. J.; MACKLIN, M. G.; HUDSON-EDWARDS, K. A. Mine tailings dams: Characteristics, failure, environmental impacts, and remediation. **Applied Geochemistry**, v. 51, p. 229–245, 2014. ISSN 0883-2927. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.apgeochem.2014.09.010>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 31.

LIU, M. B.; LIU, G. R. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 17, n. 1, p. 25–76, mar. 2010. ISSN 1134-3060, 1886-1784. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11831-010-9040-7>>. Citado 6 vezes nas páginas 14, 19, 20, 21, 25 e 26.

LUCY, L. B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. **The Astronomical Journal**, v. 82, p. 1013–1024, dez. 1977. ISSN 0004-6256. Publisher: IOP ADS Bibcode: 1977AJ.....82.1013L. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/112164>>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 21.

MACHADO, N. C. **Retroanálise da propagação decorrente da ruptura da barragem do fundão com diferentes modelos numéricos e hipóteses de simulação**. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, jul. 2017. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1843/BUOS-AV3MTA>>. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

MEDINA, V.; HÜRLIMANN, M.; BATEMAN, A. Application of FLATModel, a 2D finite volume code, to debris flows in the northeastern part of the Iberian Peninsula. **Landslides**, v. 5, p. 127–142, fev. 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10346-007-0102-3>>. Citado na página 13.

MONAGHAN, J. Smoothed Particle Hydrodynamics and Its Diverse Applications. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 44, n. 1, p. 323–346, jan. 2012. ISSN 0066-4189, 1545-4479. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-120710-101220>>. Citado 5 vezes nas páginas 13, 15, 19, 21 e 27.

MÜLLER, M.; CHARYPAR, D.; GROSS, M. Particle-Based Fluid Simulation for Interactive Applications. In: **Fluid Dynamics**. [s.n.], 2003. v. 2003, p. 154–159. ISBN 1-58113-659-5. Disponível em: <<https://dl.acm.org/doi/10.5555/846276.846298>>. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 24 e 25.

NASA JPL. **NASA Shuttle Radar Topography Mission Global 1 arc second NetCDF**. NASA Land Processes Distributed Active Archive Center, 2013. Disponível em: <<https://lpdaac.usgs.gov/products/srtmgl1v003/>>. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 45.

PASTOR, M.; BLANC, T.; HADDAD, B.; PETRONE, S.; MORLES, M. S.; DREMPETIC, V.; ISSLER, D.; CROSTA, G. B.; CASCINI, L.; SORBINO, G.; CUOMO, S. Application of a SPH depth-integrated model to landslide run-out analysis. **Landslides**, v. 11, n. 5, p. 793–812, out. 2014. ISSN 1612-510X, 1612-5118. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10346-014-0484-y>>. Citado na página 15.

PORSANI, J. L.; JESUS, F. A. N. D.; STANGARI, M. C. GPR Survey on an Iron Mining Area after the Collapse of the Tailings Dam I at the Córrego do Feijão Mine in Brumadinho-MG, Brazil. **Remote Sensing**, v. 11, n. 7, p. 860, abr. 2019. ISSN 2072-4292. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/rs11070860>>. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 49.

SHEIKH, B.; QIU, T.; AHMADIPUR, A. Comparison of SPH boundary approaches in simulating frictional soil–structure interaction. **Acta Geotechnica**, v. 16, n. 8, p. 2389–2408, ago. 2021. ISSN 1861-1125, 1861-1133. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11440-020-01063-y>>. Citado 3 vezes nas páginas 28, 30 e 36.

SILVA, E. L.; SILVA, M. A. da. Segurança de barragens e os riscos potenciais à saúde pública. **Saúde em Debate**, v. 44, p. 242–261, jul. 2021. ISSN 0103-1104, 2358-2898. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/sdeb/a/GxCcNJjsWLzNqmN9HbsFgqG/>>. Citado na página 12.

TAKEDA, H.; MIYAMA, S. M.; SEKIYA, M. Numerical Simulation of Viscous Flow by Smoothed Particle Hydrodynamics. **Progress of Theoretical Physics**, v. 92, n. 5, p. 939–960, nov. 1994. ISSN 0033-068X. _eprint: <https://academic.oup.com/ptp/article-pdf/92/5/939/5285283/92-5-939.pdf>. Disponível em: <<https://doi.org/10.1143/ptp/92.5.939>>. Citado na página 28.

THOMPSON, F.; OLIVEIRA, B. C. d.; CORDEIRO, M. C.; MASI, B. P.; RANGEL, T. P.; PAZ, P.; FREITAS, T.; LOPES, G.; SILVA, B. S.; CABRAL, A. S.; SOARES, M.; LACERDA, D.; VERGILIO, C. d. S.; LOPES-FERREIRA, M.; LIMA, C.; THOMPSON, C.; REZENDE, C. E. d. Severe impacts of the Brumadinho dam failure (Minas Gerais, Brazil) on the water quality of the Paraopeba River. **Science of The Total Environment**, v. 705, p. 135914, 2020. ISSN 0048-9697. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2019.135914>>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 15.

VERSTEEG, H.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. Pearson Education Limited, 2007. ISBN 978-0-13-127498-3. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=RvBZ-UMpGzIC>>. Citado na página 18.

VIOLEAU, D. **Fluid Mechanics and the SPH Method: Theory and Applications**. Oxford University Press, 2012. ISBN 978-0-19-965552-6. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199655526.001.0001>>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 26.

WANG, K.; YANG, P.; HUDSON-EDWARDS, K.; LYU, W.; YANG, C.; JING, X. Integration of DSM and SPH to Model Tailings Dam Failure Run-Out Slurry Routing Across 3D Real Terrain. **Water**, v. 10, n. 8, p. 1087, ago. 2018. ISSN 2073-4441. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/w10081087>>. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

WHITE, F. M.; MAJDALANI, J. **Viscous fluid flow**. 3. ed. McGraw-Hill New York, 2006. ISBN 978-0-07-240231-5. Disponível em: <http://servidor.demec.ufpr.br/CFD/bibliografia/viscous_fluid_flow_frank_m_white_second_edition.pdf>. Citado na página 31.

XU, X.; OUYANG, J.; YANG, B.; LIU, Z. SPH simulations of three-dimensional non-Newtonian free surface flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 256, p. 101–116, 2013. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.12.017>>. Citado na página 13.

YU, D.; TANG, L.; CHEN, C. Three-dimensional numerical simulation of mud flow from a tailing dam failure across complex terrain. **Natural Hazards and Earth System Sciences**, v. 20, n. 3, p. 727–741, mar. 2020. ISSN 1684-9981. Disponível em: <<https://doi.org/10.5194/nhess-20-727-2020>>. Citado 5 vezes nas páginas 13, 31, 34, 35 e 46.

ÁGUIDO, A. C.; TARQUI, J. L. Z.; SALIBA, A. P. M.; MARQUES, L. F. B. DETERMINAÇÃO DA TENSÃO DE ESCOAMENTO DE REJEITOS DE MINERAÇÃO POR MEIO DA ANÁLISE DE TESTES DE SLUMP. **Simpósio Nacional de Mecânica dos Fluidos e Hidráulica**, ago. 2022. Disponível em: <<https://anais.abrhidro.org.br/job.php?Job=13868>>. Citado na página 45.