

Capítulo IV

Sistemas Mecânicos Submetidos à Força de Atrito

A análise de sinais aplicada a sistemas submetidos as forças de origem eletromagnética, de atrito entre superfícies, provenientes de folgas mecânicas, caracterizando excitações não lineares, deve ser capaz de identificar tais excitações não lineares a partir da medição da resposta global do sistema.

Nas aplicações relacionadas à determinação da força de atrito entre duas superfícies nos ensaios de desgaste, a instrumentação e a própria máquina de ensaio se comportam como um sistema submetido a forças não lineares.

Aqui é discutida a aplicação da metodologia desenvolvida no capítulo anterior, na análise de sinais de sistemas não lineares submetidos à força de atrito. O uso desta metodologia permite obter, a partir da resposta total do sistema, as parcelas linear e não linear da força total de reação medida entre o sistema vibratório e um referencial inercial.

Para verificar a viabilidade da metodologia proposta são realizados ensaios computacionais e experimentais com um sistema mecânico vibratório simples, submetido à uma força de atrito.

A primeira formulação para o atrito seco entre duas superfícies foi proposta por Leonardo da Vinci, que indicou haver independência da força de atrito com a área de contato e uma dependência direta com a força normal entre as superfícies. Posteriormente, em 1781, Coulomb propôs uma formulação na qual é definido um limite máximo para o valor da força de atrito estático entre duas superfícies, que ocorre na iminência de movimento relativo, e um valor constante quando há movimento relativo, com valor inferior ao limite estático, independente da velocidade entre as superfícies.

Recentemente diversos modelos têm sido propostos para representar a força de interação entre duas superfícies. Nestes modelos têm-se incluído a representação de efeitos físicos não previstos na teoria de Coulomb como: a histerese da força de atrito; a transição entre o atrito estático e o atrito cinemático; forças proporcionais à velocidade como forças de amortecimento viscoso, dos movimentos de adere e desliza conhecidos como “stick-slip”, entre outros efeitos que podem aparecer no contato entre duas superfícies. Tais modelos apresentam sempre características não lineares que são formuladas por modelos matemáticos

com múltiplas funções, cada uma válida em diferentes faixas do domínio, ou com derivadas descontínuas, ou ainda, funções exponenciais e funções módulo. (McMillan, 1997)

Dois modelos são apresentados neste capítulo, o primeiro possui capacidade de representar a força de atrito estático, a força de atrito cinemático e os efeitos de histerese da força de atrito. O segundo modelo adiciona ao primeiro a capacidade de representar o efeito de amortecimento viscoso inserido por lubrificantes e ainda uma representação para a transição contínua entre a força de atrito estático e as forças de atrito cinemático.

4.1 Formulação de um sistema vibratório linear submetido a uma força não linear

Um sistema linear de parâmetros constantes, com um grau de liberdade, apresentado na Figura 4.1, é excitado por uma força genérica.

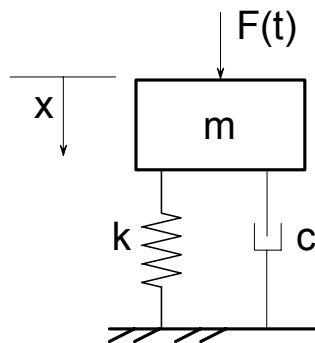


Figura 4.1- Sistema linear com um grau de liberdade

Para este sistema temos que a equação do movimento é dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (4.1)$$

com as variáveis $x(t)$ e $F(t)$ representando a saída de deslocamento e a entrada de força do sistema linear. A representação da equação (4.1) no domínio da frequência é dada por:

$$\begin{aligned} [H^{-1}(f)]X(f) &= F(f) \\ H(f) &= [k - m(2\pi f)^2 + ic(2\pi f)]^{-1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

O diagrama de bloco representativo da equação (4.2) e portanto do sistema linear da Figura 4.1 é dado por:

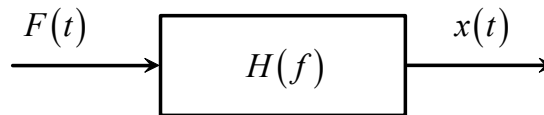


Figura 4.2 - Diagrama de bloco direto de um sistema linear com 1 GDL.

O sistema apresentado na Figura 4.2 e representado na equação (4.2) é denominado de sistema direto, pois tem como entrada força e saída deslocamento. O sistema equivalente e reverso é obtido quando se impõe um deslocamento como entrada e obtêm-se força como saída. Tal sistema é representado no domínio da frequência por:

$$\begin{aligned} [H(f)]F(f) &= X(f) \\ H(f) &= [k - m(2\pi f)^2 + ic(2\pi f)]^{-1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

sendo sua representação gráfica feita pelo diagrama de blocos:

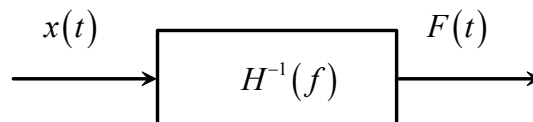


Figura 4.3 - Diagrama de bloco reverso de um sistema com 1 GDL.

O mesmo raciocínio desenvolvido para o sistema linear mostrado anteriormente pode ser desenvolvido para sistemas não lineares. Isto é, pode-se representar um sistema não linear como o da Figura 4.4 através de um sistema MISO equivalente que segue o mesmo princípio utilizado para os sistemas lineares.

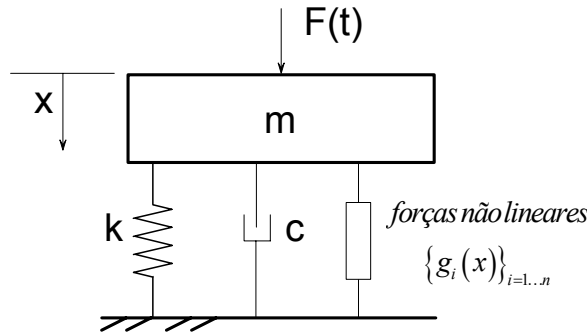


Figura 4.4- Sistema não linear genérico de 1 GDL.

Considerando-se o sistema da Figura 4.4, sua equação do movimento é dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \sum_{i=1}^n a_i g_i(x) = F(t) \quad (4.4)$$

onde os efeitos não lineares são representados pelo somatório na equação (4.4). A representação no domínio da frequência deste sistema não linear é obtida quando se toma a transformada de Fourier de ambos os lados na equação (4.4) resultando em:

$$\begin{aligned} [H^{-1}(f)]X(f) + \sum_{i=1}^n A_i(f)X_i(f) &= F(f) \\ H(f) &= [k - m(2\pi f)^2 + ic(2\pi f)]^{-1} \\ X_i(f) &= \mathcal{F}(g_i(x)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Novamente pode-se encontrar um sistema reverso onde para um dado deslocamento imposto obtém-se uma força como saída. Tal sistema reverso é representado por:

$$[H(f)] \left[F(f) - \sum_{i=1}^n A_i(f)X_i(f) \right] = X(f) \quad (4.6)$$

A representação do sistema não linear através do diagrama de bloco de um sistema MISO é dada por:

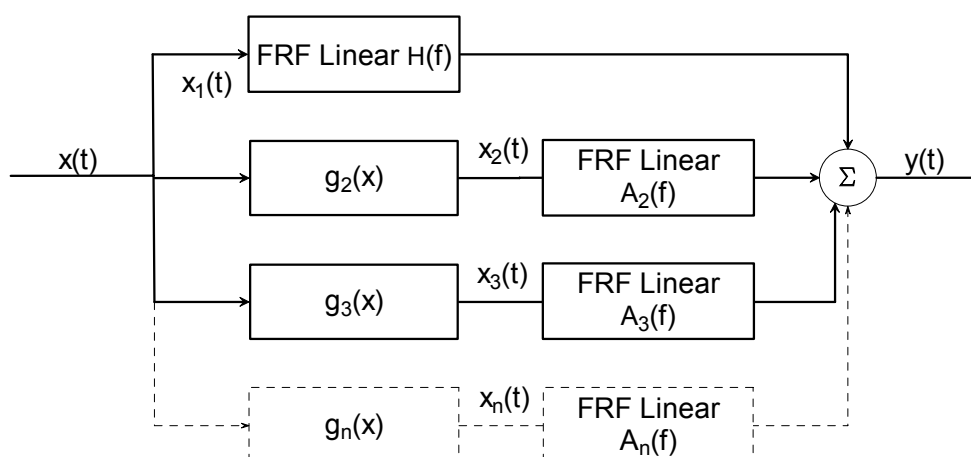


Figura 4.5- Representação de um sistema não linear genérico através de um sistema MISO equivalente.

Pode-se portanto através da teoria de análise de sistemas não lineares, utilizando a representação da Figura 4.5, obter os parâmetros físicos do sistema. (Bendat, 1997)

Pode-se utilizar um sistema como o da Figura 4.6 é submetido a uma única força não linear para demonstrar a aplicabilidade desta metodologia na identificação de forças não lineares em sistemas lineares.

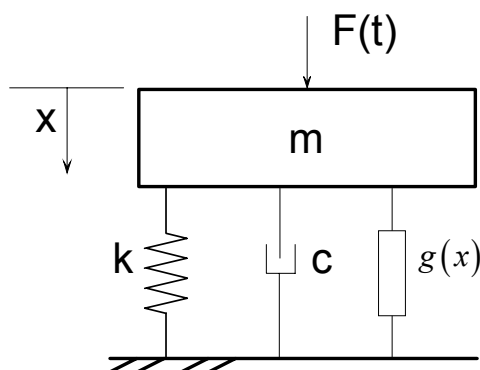


Figura 4.6 – Sistema de um grau de liberdade (GDL) com excitação linear e uma força não linear ligada a um referencial inercial.

Para este sistema temos que sua equação do movimento assim como aquela escrita para o sistema genérico linear, equação (4.1), é dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + ag(x) = F(t) \quad (4.7)$$

Fazendo a transformada de Fourier de ambos os lados da equação (4.7) resulta:

$$F(f) = [H]X(f) + A(f)\mathcal{F}(g(x)) \quad (4.8)$$

Por consequência a representação através do diagrama de blocos de um sistema MISO é dada por:

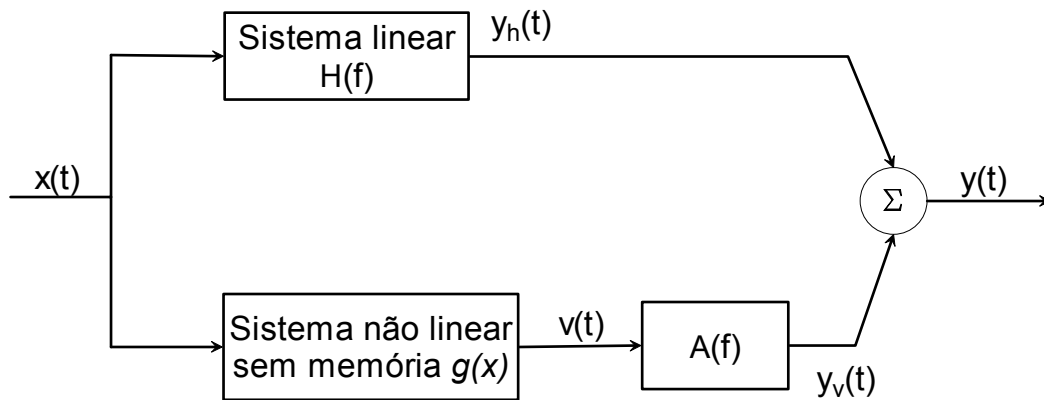


Figura 4.7 – Representação por diagrama de blocos de um sistema MISO para o sistema não linear da Figura 4.6.

A análise da Figura 4.7, em conjunto com a análise da equação (4.7) e (4.8), permite verificar a validade metodologia desenvolvida no capítulo anterior, para sistemas vibratórios de 1 GDL submetidos a forças não lineares desde que:

$$\begin{aligned} F(f) &= F_{linear}(f) + F_{nlinear}(f) \\ F_{linear}(f) &= [H]X(f) \\ F_{nlinear}(f) &= A(f)\mathcal{F}(g(x)) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Deve-se notar no entanto que para o sistema da Figura 4.6 deve-se ter acesso à força de excitação para se obter as parcelas lineares e não linear das forças atuantes sobre o grau de liberdade do sistema. Um problema interessante e de grande valor científico é a identificação de uma força não linear que excita um sistema vibratório qualquer.

Pode-se exemplificar a solução deste problema utilizando-se o sistema da Figura 4.8, onde excita-se o sistema através de uma força não linear posicionada no k-ésimo GDL.

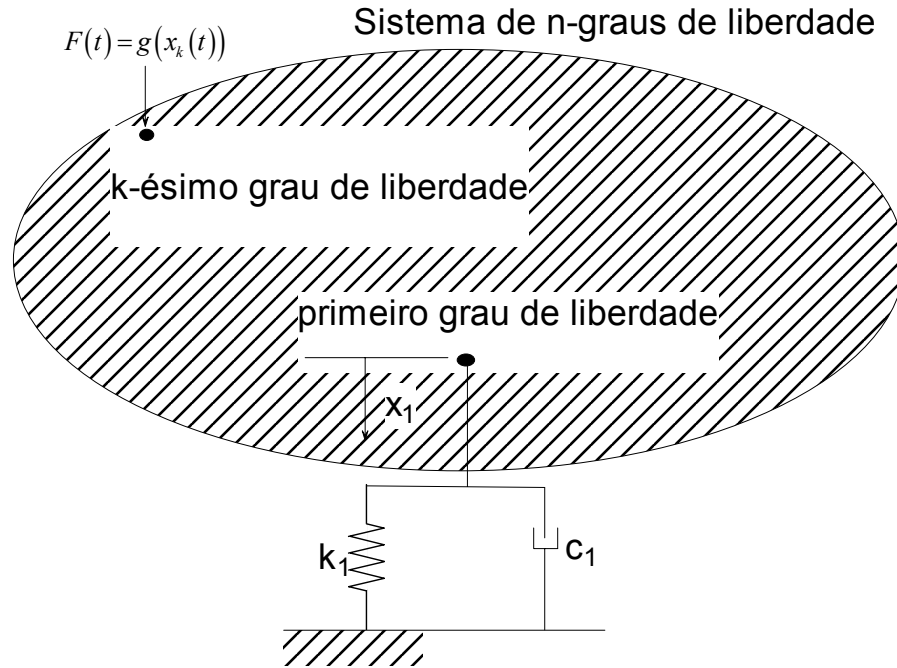


Figura 4.8 – Sistema vibratório de n GDL com excitação não linear.

Para este sistema a equação do movimento é dada por:

$$[m]_{n \times n} \{\ddot{x}\}_{n \times 1} + [c]_{n \times n} \{\dot{x}\}_{n \times 1} + [k]_{n \times n} \{x\}_{n \times 1} = \{F\}_{n \times 1} + \{F_{linear}\}_{n \times 1} \quad (4.10)$$

sendo o vetor $\{F\}$ o vetor de forças não lineares e $\{F_{linear}\}$ o vetor das forças lineares.

Utilizando a mesma formulação escrita até aqui para forças não lineares tem-se:

$$\{F\}_{n \times 1} = -[A]_{n \times n} \{g(x)\}_{n \times 1} \quad (4.11)$$

onde a matriz $[A]$ é uma matriz diagonal com elementos não nulos somente nas posições correspondentes aos graus de liberdade excitados por forças não lineares. Para o sistema da Figura 4.8, somente a posição (k,k) terá valor diferente de zero. O mesmo raciocínio se aplica ao vetor $\{g(x)\}$ que deverá ter somente valores não nulos nas posições correspondentes aos GDL excitados por forças não lineares. Deve-se salientar que não há restrição na formulação escrita na equação (4.11) para sistemas com diversos tipos de funções não lineares.

Pode-se ainda, para o sistema da Figura 4.8, considerar que as forças entre o primeiro grau de liberdade e o referencial inercial são variáveis instrumentadas que podem ser medidas

simultaneamente com os demais graus de liberdade do sistema. Para tal reescreve-se a equação (4.11) como se segue:

$$\begin{aligned} [m]_{n \times n} \{\ddot{x}\}_{n \times 1} + [c']_{n \times n} \{\dot{x}\}_{n \times 1} + [k']_{n \times n} \{x\}_{n \times 1} &= -[A]_{n \times n} \{g(x)\}_{n \times 1} + \{F_{linear}\} \\ \{F_{linear}\} &= -[c'']_{n \times n} \{\dot{x}\}_{n \times 1} - [k'']_{n \times n} \{x\}_{n \times 1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

com:

$$\begin{aligned} [c']_{n \times n} &= [c]_{n \times n} - [c'']_{n \times n} \\ [k']_{n \times n} &= [k]_{n \times n} - [k'']_{n \times n} \\ [c'']_{n \times n} &= \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \\ [k'']_{n \times n} &= \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Isolando-se do lado esquerdo da equação (4.12) apenas a força linear $\{F_{linear}\}$ tem-se:

$$[m]_{n \times n} \{\ddot{x}\}_{n \times 1} + [c']_{n \times n} \{\dot{x}\}_{n \times 1} + [k']_{n \times n} \{x\}_{n \times 1} + [A]_{n \times n} \{g(x)\}_{n \times 1} = \{F_{linear}\} \quad (4.14)$$

Aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados da equação (4.14) obtêm-se:

$$\{F(f)\}_{n \times 1} = [H'(f)]_{n \times n} \{X(f)\}_{n \times 1} + [A(f)]_{n \times n} \{\mathcal{F}(g(x_k))\}_{n \times 1} \quad (4.15)$$

Pode-se analisar em conjunto as equações (4.8) e (4.15), e verificar que o sistema da equação (4.15) pode ser representado através de um diagrama de blocos de um modelo MISO como se segue:

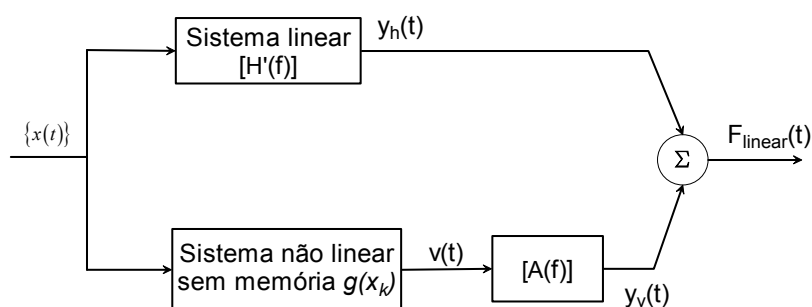


Figura 4.9 - Representação por diagrama de blocos de um sistema MISO para o sistema linear de n GDL da Figura 4.8.

Neste modelo o termo H foi substituído por H' para diferenciar a função resposta em frequência do sistema linear da nova resposta em frequência representada na equação (4.15) e na Figura 4.9, que não inclui os termos de rigidez e amortecimento viscoso k_1 e c_1 , respectivamente.

Através da formulação para um sistema linear excitado por uma força não linear são obtidas as seguintes conclusões:

- A força obtida pela célula de carga colocada entre o sistema e o referencial inercial, força atuante em k_1 e c_1 na Figura 4.8, é a soma da resposta do sistema linear às excitações passadas adicionadas à resposta da força não linear;
- O uso da metodologia permite identificar na resposta do sistema, obtida por meio de instrumentação adequada, a força não linear real;
- Não é possível, sem o conhecimento prévio do modelo da força não linear, obter a função resposta em frequência de um sistema linear H excitado por uma força não linear.

As formulações mostradas são casos particulares da análise de sistemas lineares submetidos a forças não lineares, porém deve-se salientar que tais formulações não são específicas para estes casos somente e podem ser generalizadas para qualquer sistema.

Estas formulações são extremamente úteis na obtenção da força de atrito entre dois corpos como será mostrado a seguir. Isto é, a partir de modelos de funções que representem as forças de interação entre dois corpos pode-se obter a força de atrito por meio da análise não linear de sinais aplicada a sistemas como o da Figura 4.8, desde que não se pode instrumentar diretamente a força de interação entre os dois corpos.

4.2 Modelo adere e desliza ou “stick-slip” para a força de atrito

Este modelo representa os movimentos de aderência, força de atrito estático, o movimento de deslizamento, força de atrito cinemático, e a histerese da força de atrito conforme a Figura 4.10 onde é mostrado um corpo em movimento alternativo sobre uma superfície fixa.

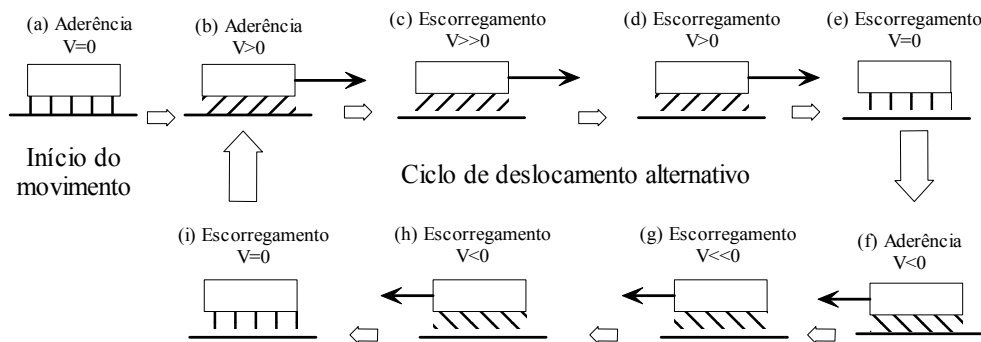


Figura 4.10- Representação da força de atrito sobre um corpo em movimento alternativo.

Pode-se definir a função matemática que representa a força de atrito neste tipo de movimento como (Laursen & Simo, 1993):

O corpo inicia o movimento e não há deslizamento

$$F_{\text{atrito}} = \text{sgn}(v_{\text{rel}}) u_{\text{rel}} K_{\text{atrito}}$$

O corpo está em movimento e há deslizamento

$$F_{\text{atrito}} = \text{sgn}(v_{\text{rel}}) F_{\text{cinemático}} \quad (4.16)$$

$$u_s = u_{\text{rel}}$$

O corpo está em movimento e não há escorregamento após haver escorregamento

$$F_{\text{atrito}} = \text{sgn}(v_{\text{rel}}) (u_{\text{rel}} - u_s) K_{\text{atrito}}$$

A variável u_s é definida como o escorregamento entre o corpo e a superfície fixa, tal variável não é alterada se o corpo está aderido a superfície fixa. A variável K_{atrito} é definida como a rigidez de contato tangencial entre as superfícies, as variáveis v_{rel} e u_{rel} são respectivamente a velocidade e o deslocamento relativo entre os corpos e a variável $F_{\text{cinemático}}$ como a força de atrito cinemática.

Na Figura 4.11 é representado o comportamento do modelo da força de atrito em função da velocidade e do deslocamento relativo do contato. Comparando-se a Figura 4.10

com a Figura 4.11 pode-se explicar o efeito de histerese do atrito através da energia armazenada pela mola. Nos instantes de tempo “b”, “f”, “g” e “i”, o corpo que estava deslizando, novamente adere na superfície.

Na passagem do estado “f” para o estado “g” e do estado “i” para o estado “b” ocorre uma transição da condição de deslizamento para a condição de aderência, sendo a energia armazenada na mola liberada, antes de acumular novamente energia com a inversão do sentido da força de atrito pela inversão do movimento. Deve-se notar que quando o corpo parte do repouso não existe tal energia armazenada na mola, sendo esta diferença a histerese da força de atrito.

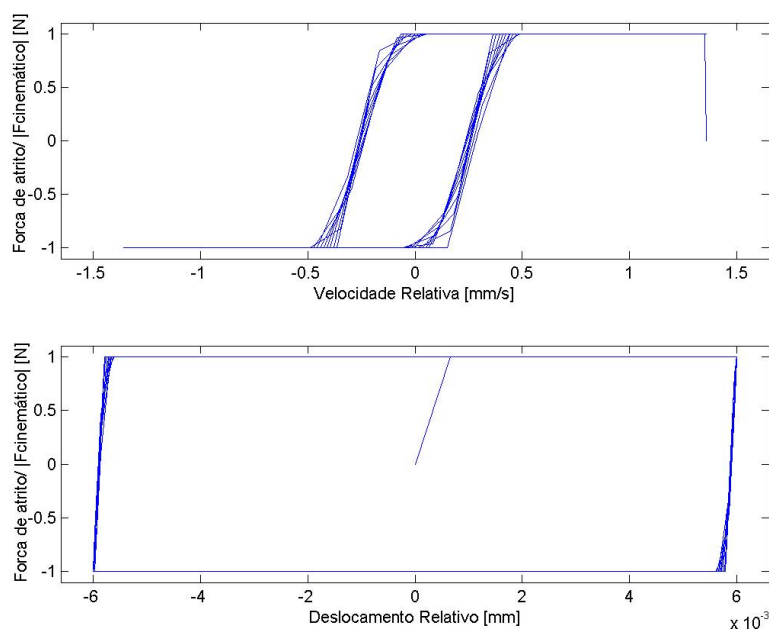


Figura 4.11- Modelo para força de atrito em função da velocidade e do deslocamento relativos.

Na Figura 4.12 é mostrado o gráfico para a força de atrito em função da velocidade e do deslocamento quando o corpo possui um movimento harmônico, ou seja $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$. Nota-se que um aumento da amplitude da velocidade no movimento harmônico representa um aumento da região em que se prevê aderência. Isto é, a velocidade assumirá valores maiores antes de toda energia retida na mola ser liberada e armazenada novamente devido ao atrito estático. Conseqüentemente, o tempo para a energia retida na mola ser dissipada e absorvida novamente, diminui com o aumento da velocidade relativa entre os corpos.

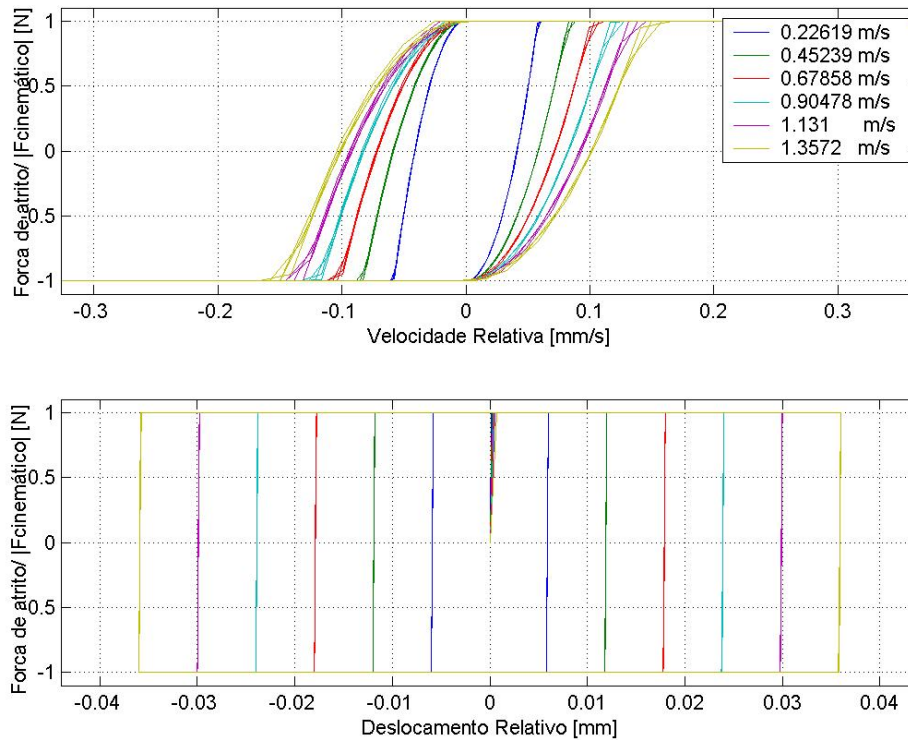


Figura 4.12- Gráfico da força de atrito em função do deslocamento e da velocidade.

Pode-se fazer uma análise da função não linear que define o atrito entre dois corpos utilizando-se os teorema descrito no item **3.3.1**. Não será feita a análise através do teorema **3.3.2** pois como pode ser verificado na equação (4.16) a função que define a força de atrito entre os dois corpos não é bijetora o que impede a aplicação deste teorema.

Na Figura 4.13 são apresentadas as funções densidade probabilidade para o deslocamento relativo entre dois corpos e para força de atrito atuante na superfície destes corpos. Nota-se que para uma entrada de deslocamento do tipo ruído branco com função densidade probabilidade gaussiana é obtida uma saída claramente não gaussiana, caracterizando o comportamento não linear da força de atrito.

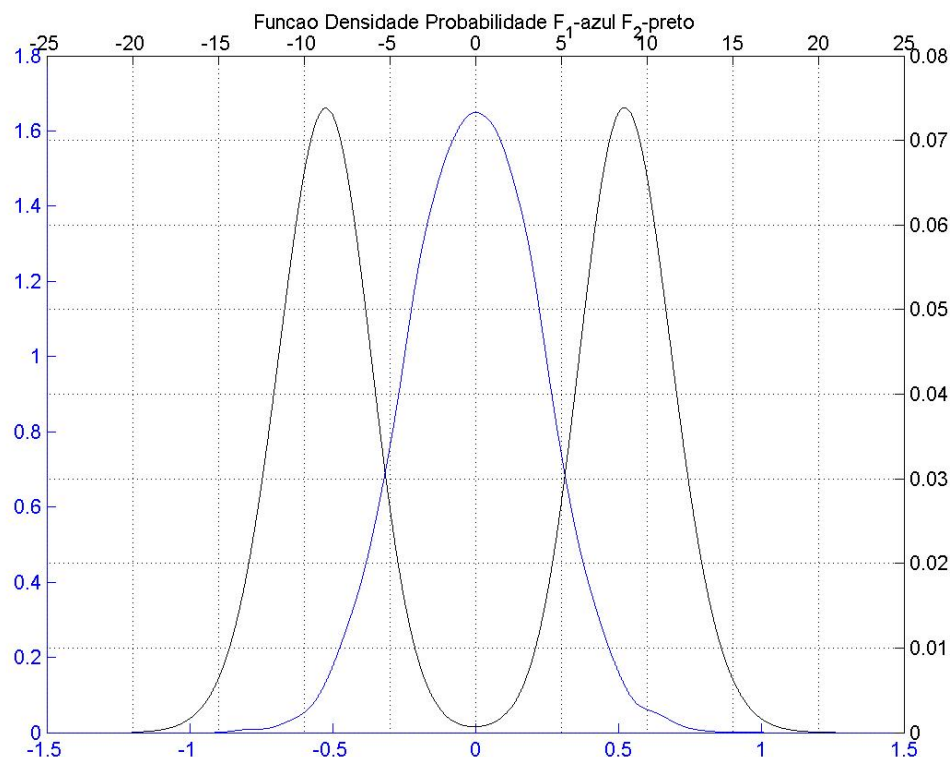


Figura 4.13 – Função densidade probabilidade do deslocamento (F_1 - azul) e da força de atrito (F_2 - preto)

Pode-se ainda utilizar a função densidade probabilidade para avaliar o comportamento da força de atrito, identificando a intensidade da ocorrência de movimentos de adesão e deslizamento entre as superfícies. Na Figura 4.15 é mostrada uma série de funções densidade probabilidade para um sistema de um grau de liberdade, como o da Figura 4.14, com valores do coeficiente de atrito cinemático variando entre 0.1 e 0.8. Neste sistema a entrada possui uma função densidade probabilidade gaussiana e se caracteriza por ser um ruído branco com amplitude máxima $x_{2\max} = 5\text{ mm}$ e média nula.

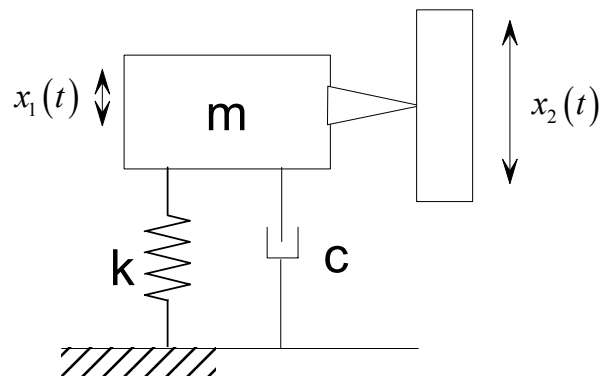


Figura 4.14 – Sistema vibratório de um grau de liberdade com atrito excitado por deslocamento $x_2(t)$.

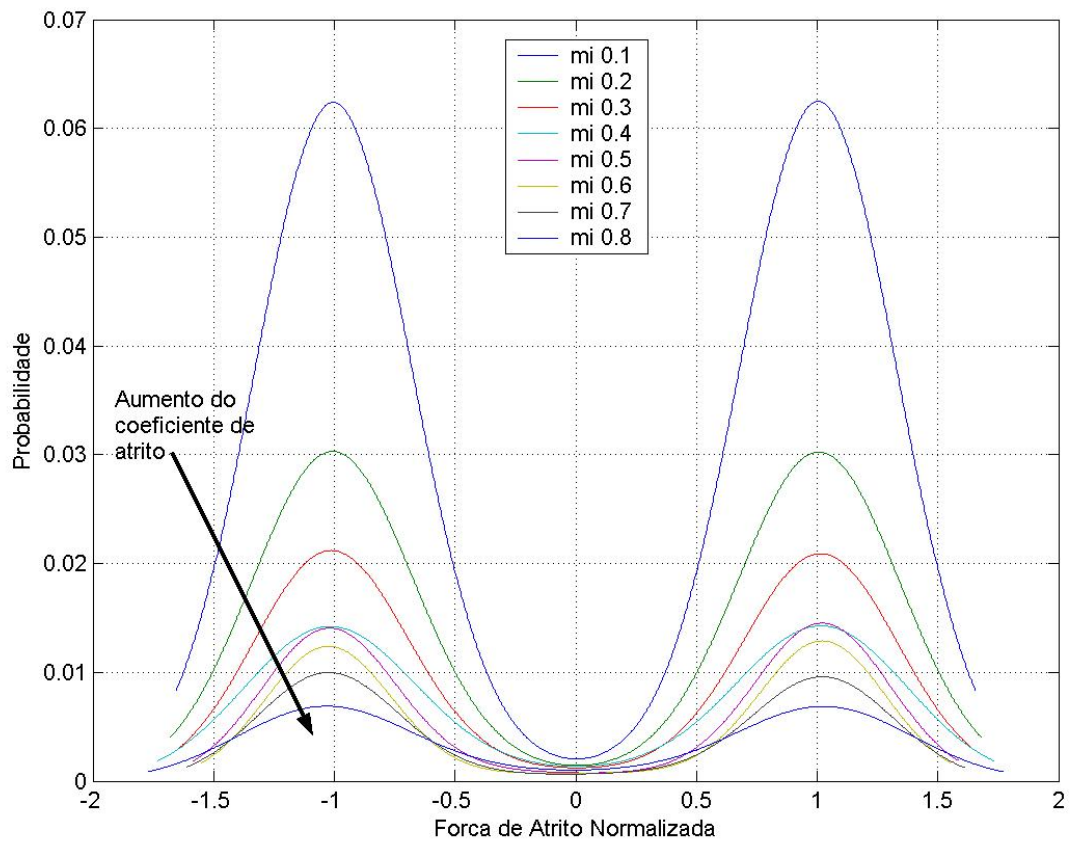


Figura 4.15 – Função densidade probabilidade para a força de atrito entre dois corpos, com coeficientes de atrito cinemático variando entre 0.1 e 0.8.

Nota-se na Figura 4.15 que o aumento do coeficiente de atrito provoca uma diminuição da probabilidade de amostrarmos um ponto da curva da força de atrito com o mesmo valor da

força de atrito cinemático. Tal fato pode ser associado aos momentos estatísticos como a média, o desvio padrão, a “assimetria” e a “curtose”, como mostrado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Variação dos momentos estatísticos com o coeficiente de atrito cinemático.

Coeficiente de Atrito	Força de Atrito Cinemático [Newtons]	Média $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx$	Desvio Padrão $\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx}$	Assimetria $S = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma} \right)^3 p(x) dx$	Curtose $K = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma} \right)^4 p(x) dx$
0.1	9.8	0.0062	9.7321	-0.0011	1.0112
0.2	19.6	-0.0263	19.3847	0.0029	1.0177
0.3	29.4	-0.1985	28.803	0.0145	1.0323
0.4	39.2	0.0795	38.0460	-0.0042	1.0456
0.5	49	0.7093	47.6459	-0.0273	1.0436
0.6	58.8	1.1970	57.1118	-0.0440	1.0481
0.7	68.6	-1.1847	66.4271	0.0328	1.0509
0.8	78.4	-0.1808	74.6434	$-8 \cdot 10^{-5}$	1.0770

Para este sistema de um grau de liberdade, onde a força de atrito foi modelada pela equação (4.17), o desvio padrão é proporcional ao valor da força de atrito cinemático. A média não sofre variação significativa desde que a função não linear definida na equação (4.16) não adiciona um nível DC à entrada do sistema, portanto, para uma entrada com média nula teremos uma saída também com média nula. A “assimetria”, que verifica a simetria da função densidade probabilidade, e a “curtose” que representa a agudeza dos picos da função densidade probabilidade, não apresentaram variações significativas nas simulações.

$$F_{\text{atrito}} = m^* g^* \mu_{\text{cinemático}} \quad (4.17)$$

Pode-se analisar as funções densidade probabilidade mostradas na Figura 4.15 e os dados da Tabela 4.1 calculando analiticamente a função densidade probabilidade de uma função “CLIPPED”, desde que o atrito se comporta como esta função, quando comparado ao deslocamento relativo entre as superfícies. Tal função “CLIPPED” possui a seguinte formulação matemática:

$$y = g(x) = \begin{cases} k * x, & |x| \leq A \\ A, & x \geq \frac{A}{k} \\ -A, & x \leq -\frac{A}{k} \end{cases} \quad (4.18)$$

A derivada de $g(x)$ em relação à x é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} k, & |x| \leq \frac{A}{k} \\ 0, & |x| > \frac{A}{k} \end{cases} \quad (4.19)$$

Pode-se verificar que a função descrita na equação (4.18) não é bijetora uma vez que:

$$\begin{aligned} x &= y/k, |y| \leq A \\ x &\text{ não é definido para } |y| > A \end{aligned} \quad (4.20)$$

Tal característica impede o uso do teorema descrito no item **3.3.2**.

A função densidade probabilidade de $g(x)$ para uma entrada x com distribuição gaussiana pode ser obtida da relação:

$$p(y) = p(g(x)) = \frac{p(x)}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{p(x)}{g'(x)} \quad (4.21)$$

onde:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \quad (4.22)$$

de onde se obtêm:

$$\begin{aligned}
p_2(y) &= p(y) = \frac{p(x)}{k} & |y| < A \\
p_2(y) &= \alpha * \delta(y - A) & y = A \\
p_2(y) &= \alpha * \delta(y + A) & y = -A
\end{aligned} \tag{4.23}$$

com:

$$\alpha = \int_{A/k}^{\infty} p(x) dx \quad 1 - 2 * \alpha = \int_{-A/k}^{A/k} p(x) dx \tag{4.24}$$

Nota-se nas equações (4.23) e (4.24) que não existe probabilidade de $y > A$ ocorrer. Isto é, $p(y) = 0$ para $y > A$.

Uma vez definida a função densidade probabilidade da função $g(x)$, mostrada na Figura 4.16, pode-se calcular os momentos estatísticos conforme mostrado nos itens seguintes.

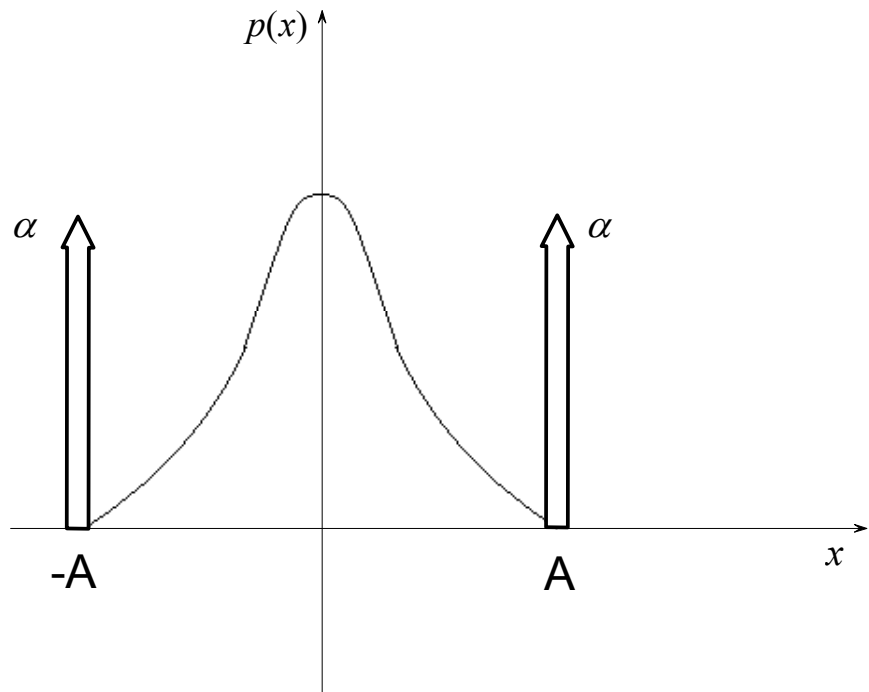


Figura 4.16- Função densidade probabilidade de uma função “CLIPPED”.

4.2.2 Cálculo da média para função não linear do atrito

A média é definida como: (Bendat & Piersol, 1986)

$$\mu_y = E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} y * p(y) dy \quad (4.25)$$

para a função não linear $g(x)$ tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y * p(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) * \frac{p(x)}{g'(x)} g'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) * p(x) dx \quad (4.26)$$

que conduz a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) * p(x) dx = -A * \int_{-\infty}^{-A/k} p(x) dx + k * \int_{-A/k}^{A/k} x * p(x) dx + A * \int_{A/k}^{\infty} p(x) dx \quad (4.27)$$

Deve-se notar que, como a função $p(x)$, definida na equação (4.22), é uma função par, a primeira integral e a terceira integral possuem módulos iguais e sinais opostos, se anulando na soma. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para a segunda integral uma vez que sendo x uma variável aleatória de média nula e $p(x)$ uma função par resulta:

$$\mu_y = 0 \quad (4.28)$$

Isto está de acordo com os valores da Tabela 4.1, salvo pequenos erros provenientes do gerador de números aleatórios utilizado nas simulações numéricas.

4.2.3 Cálculo do desvio padrão da função não linear do atrito

O desvio padrão é definido em função da variância de uma variável aleatória como se segue: (Bendat & Piersol, 1986)

$$s^2 = E\left[(y - \mu_y)^2\right] \quad (4.29)$$

$$\sigma = \sqrt{s^2}$$

com s^2 e σ sendo a variância e o desvio padrão da variável y respectivamente. Reorganizando a equação (4.29) e desde que $\mu_y = 0$ como se verifica na equação (4.27), tem-se:

$$E\left[(y - \mu_y)^2\right] = E\left[y^2\right] - E\left[y * \mu_y\right] + E\left[\mu_y^2\right] = E\left[y^2\right] \quad (4.30)$$

Portanto pode-se escrever a expressão para a variância de y como:

$$s_y^2 = E\left[y^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (g(x))^2 * p(x) dx \quad (4.31)$$

ou:

$$s_y^2 = A^2 * \int_{-\infty}^{-A/k} p(x) dx + k^2 * \int_{-A/k}^{A/k} x^2 * p(x) dx + A^2 * \int_{A/k}^{\infty} p(x) dx \quad (4.32)$$

A equação (4.32) pode ser analisada com o auxílio da Figura 4.17 onde é apresentada a função densidade probabilidade de uma variável aleatória com distribuição gaussiana com os limites de integração também representados.

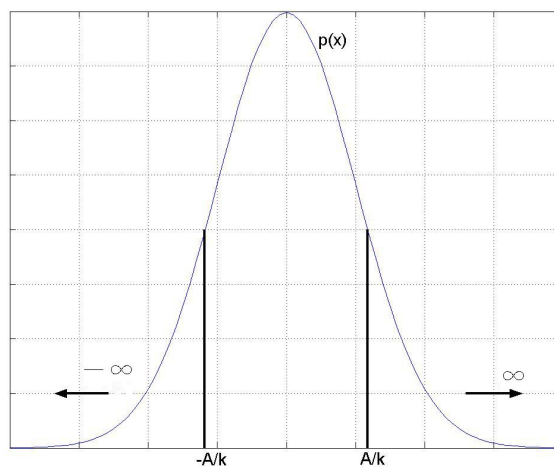


Figura 4.17 - Função densidade probabilidade de uma variável aleatória com distribuição gaussiana.

Pode-se notar na Figura 4.17 que a primeira e terceira integral somadas têm seu valor muito próximo à unidade quando a relação $\frac{A}{k}$ se aproxima de zero. Isto é, para valores do módulo da força de atrito muito menores que o módulo da rigidez de contato, a variância da saída do sistema não linear se aproxima do quadrado do valor da força de atrito, pois a área sob a curva representada pelas integrais, primeira e terceira, se aproxima de um. Deve-se notar também que quanto maior for a relação $\frac{A}{k}$ mais subestimada estará a variância da saída em relação a força de atrito cinemático. A segunda integral, ao contrário da primeira e da terceira integral, se aproxima de zero quando $\frac{A}{k}$ se aproxima de zero e se aproxima do valor da variância da entrada quando $\frac{A}{k}$ tende ao infinito.

Fisicamente estas relações representam dois extremos para a função não linear da força de atrito como se segue:

- O valor de $\frac{A}{k}$ tende à zero: Os corpos em contato apresentam na maioria do tempo um movimento de escorregamento, com pouca ou nenhuma aderência entre as superfícies;
- O valor de $\frac{A}{k}$ tende ao infinito: Os corpos se apresentam na maioria do tempo aderidos, para este caso o desvio padrão da saída é diretamente proporcional ao da entrada com uma constante de proporcionalidade igual à rigidez de contato.

Tais constatações são úteis para detectar, em ensaios tribológicos, as condições de escorregamento ou adesão entre os corpos, principalmente ao se comparar as funções densidade probabilidade da entrada e da saída. A predominância de escorregamento faz com que a função densidade probabilidade da saída seja muito próxima daquela representada na Figura 4.16, para o caso da aderência predominar tem-se uma função densidade probabilidade da saída muito próxima àquela da entrada. Num caso de perfeita aderência tem-se um comportamento linear representado por $k \cdot x$. Portanto, o modelo adotado para o comportamento não linear do contato é suficientemente genérico para, inclusive, representar a uma situação linear.

4.2.4 Cálculo da “Assimetria” e da “Curtose”

A “assimetria” e a “curtose” são momentos estatísticos de ordem superior centrados em torno da média, representando a simetria e o achatamento da função densidade probabilidade,

respectivamente. Normalmente a “assimetria” recebe a denominação de a_3 e a curtose a denominação de a_4 , sendo ambas definidas na equação seguinte:

$$\begin{aligned} a_3(y) &= E \left[\left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right)^3 \right] \\ a_4(y) &= E \left[\left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right)^4 \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

As duas equações podem ser reorganizadas, como feito nas equações (4.30) à (4.32), resultando:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{\left(-A^3 * \int_{-\infty}^{-A/k} p(x) dx + k^3 * \int_{-A/k}^{A/k} x^3 * p(x) dx + A^3 * \int_{A/k}^{\infty} p(x) dx \right)}{\sigma_y^3} \\ a_4 &= \frac{\left(A^4 * \int_{-\infty}^{-A/k} p(x) dx + k^4 * \int_{-A/k}^{A/k} x^4 * p(x) dx + A^4 * \int_{A/k}^{\infty} p(x) dx \right)}{\sigma_y^4} \end{aligned} \quad (4.34)$$

A mesma análise das integrais, feitas no item 4.2.3 utilizando a Figura 4.17, pode ser aplicada para estes dois momentos estatísticos descritos na equação (4.34). A análise da “assimetria” considerando-se os efeitos físicos da função não linear permite verificar que:

- A função densidade probabilidade da saída será simétrica e a “assimetria” assumirá valores próximos a zero se a entrada x do sistema não linear possui uma função densidade probabilidade simétrica e se o valor da força de atrito cinemático for o mesmo para valores positivos e negativos da entrada x .
- Para valores de A/k tendendo a infinito a “assimetria” da saída será igual à da entrada, pois como verificado no item 4.2.3 o sistema terá um comportamento linear.
- Uma assimetria da função densidade probabilidade da saída y , quando a entrada possui uma função densidade probabilidade simétrica, somente pode ser atribuída a valores diferentes da força de atrito cinemático para valores positivos e negativos de x .

A análise da “curtose” pode indicar se existe ou não uma maior ocorrência de movimentos de escorregamento entre os corpos. Isto é, para a condição de escorregamento puro, sem aderência nenhuma, a relação $\frac{A}{k}$ se aproxima de zero, fazendo com que o momento estatístico a_4 assumira um valor unitário. Tal fato é notado quando se compara as definições dos momentos estatísticos a_4 e S^2 , para ambas as definições temos que as integrais entre os limites $(-\infty, -\frac{A}{k})$ e $(\frac{A}{k}, \infty)$ quando somadas são iguais a um quando $\frac{A}{k}$ tende a zero. Portanto, pode-se dizer que para uma entrada aleatória, com função densidade probabilidade gaussiana normal e média nula, no sistema não linear que define o atrito entre dois corpos na condição de deslizamento puro, terá como saída uma onda quadrada caracterizada pela “curtose” igual à 1.

No outro extremo, para a condição de aderência perfeita, a “curtose” da saída será proporcional a curtose da entrada. Isto é, com $\frac{A}{k}$ tendendo ao infinito resulta $\sigma_y^4 = (a_4)_x k^4$.

4.3 Modelo para força de interação entre duas superfícies com efeito de amortecimento viscoso

Algumas formulações para a interação entre duas superfícies consideram não apenas os efeitos de aderência e deslizamento destas superfícies. Tais formulações dividem a força de interação em uma parcela regenerativa e outra dissipativa. Isto é, o atrito estático é considerado como uma força de mola que atua entre as superfícies equilibrando todas as demais forças externas e que restaura aos corpos em contato a posição inicial após a remoção das forças externas. A parcela dissipativa, que só ocorre para velocidades relativas não nulas entre os corpos, por sua vez inclui todo o trabalho realizado por forças não conservativas na interface entre os corpos, considerando como forças não conservativas aquelas devidas ao contato seco e ao contato lubrificado. (Pontes Junior, 2003)

Para representar tais fenômenos pode-se escrever a equação que modela esta classe de força de interação entre as superfícies como:

$$F_{\text{atrito}}(v_{\text{relativa}}, F_R) = F_{\text{nãoconservativa}}(v_{\text{relativa}}) [\lambda(v_{\text{relativa}})] + F_{\text{regenerativa}}(F_R) [1 - \lambda(v_{\text{relativa}})]$$

$$\lambda(v_{\text{relativa}}) = \begin{cases} 1 & |v_{\text{relativa}}| > \alpha \\ 0 & |v_{\text{relativa}}| \leq \alpha \end{cases} \quad (4.35)$$

onde F_R é a resultante de todas as forças externas aplicada aos corpos, v_{relativa} é a velocidade relativa entre os corpos e α é um zero artificial correspondendo a uma constante

positiva e pequena, que determina a faixa de velocidade em torno da velocidade relativa nula para a qual se assume que os corpos ainda estão aderidos.

Deve-se notar na equação (4.35) que para valores de velocidade relativa maiores que α atuam na interface apenas forças não conservativas. Existe também um efeito de histerese que pode ser notado quando se analisam dois corpos que entram em movimento relativo e retornam ao repouso relativo. Para este caso o sistema irá armazenar energia na interface, e posteriormente, quando o sistema tem velocidade relativa alta, somente existe trabalho das forças não conservativas, finalmente quando o sistema tende ao repouso relativo novamente a energia armazenada na interface será restaurada porém a partir de uma condição diferente da que foi armazenada, isto caracteriza a histerese desta força de interação.

4.3.1 Modelo para a força regenerativa

A força regenerativa como dito anteriormente é aquela que equilibra a resultante das forças externas aplicadas aos corpos em contato quando estes possuem velocidade relativa nula. Esta força tem a mesma amplitude da resultante de forças externas aplicadas aos corpos e possui um valor máximo, obedecendo a lei de Coulomb para o atrito. (Pontes Junior, 2003)

Esta força é modelada da seguinte maneira:

$$F_{regenerativa} = \begin{cases} F_s^+ & 0 < F_s^+ \leq F_R \\ F_R & F_s^- \leq F_R \leq F_s^+ \\ F_s^- & F_R \leq F_s^- < 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

Pode-se notar na equação (4.36) que os corpos manterão o estado de repouso até que a resultante das forças externas não atinja os limites superior e inferior da força de interação entre as superfícies F_s^+ e F_s^- respectivamente. Tais limites são interpretados fisicamente como os limites de força para o atrito estático definido por Coulomb, e indicam que as superfícies estão aderidas.

Nota-se também, quando se compara as equações (4.35) e (4.36), que a energia armazenada pela força regenerativa não se anula para valores de força resultante maiores que os limites de atrito estático, tal força porém não é percebida quando os corpos iniciam movimento relativo entre si. Isto é, quando existe escorregamento entre os corpos em contato a energia que é acumulada pelo efeito de mola da força regenerativa não se anula e será restaurada ao sistema quando os corpos tiverem novamente velocidades relativas nulas. Tal comportamento fica mais claro ao se definir o valor das forças não conservativas a seguir.

4.3.2 Modelo para as forças não conservativas

As forças não conservativas são chamadas também de forças de deslizamento desde que somente quando ocorre deslizamento entre os corpos é que tais forças realizam trabalho retirando energia do sistema. (Pontes Junior, 2003)

Na formulação das forças não conservativas pode-se representar a transição do valor de atrito estático, representado na equação (4.36) pelos termos F_s^+ e F_s^- , para o menor valor das forças não conservativas de forma suave ou de forma abrupta. Isto é, numericamente pode-se ter uma transição instantânea de força com a variação da velocidade ou uma forma mais bem condicionada numericamente. Pontes Junior (2003) propõe a seguinte formulação:

$$F_{\text{nãoconservativa}}(v_{\text{relativa}}) = F_d^+(v_{\text{rel}} - \alpha)\mu(v_{\text{rel}}) + F_d^-(v_{\text{rel}} + \alpha)\mu(-v_{\text{rel}}) \quad (4.37)$$

onde a função $\mu(\cdot)$ é responsável apenas pelo sinal da força de interação entre as superfícies sendo dada por:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

Pontes Junior (2003) sugere que o valor de F_d^+ e F_d^- , quando a velocidade relativa entre as superfícies se aproxima de zero, tanto pelo lado positivo quando pelo lado negativo, tem o mesmo valor da força de atrito estático entre os corpos. Desta forma o autor escreve a equação para as forças não conservativas entre duas superfícies como:

$$\begin{aligned} F_d^+(v_{\text{relativa}}) &= F_s^+ - \Delta F^+ \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{v_{\text{rel}}}{v_0^+} \right) \right] \right\} + b^+ v_{\text{rel}} \\ F_d^-(v_{\text{relativa}}) &= F_s^- + \Delta F^- \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{v_{\text{rel}}}{v_0^-} \right) \right] \right\} + b^- v_{\text{rel}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

O termo b na equação (4.39) se refere ao coeficiente de amortecimento viscoso para possíveis lubrificantes na interface com seu índice sobrescrito corrigindo o sinal da força desde que esta deve ser sempre positiva nesta equação. O termo v_0 determina a velocidade para a qual a força de amortecimento viscoso predomina sobre a força de atrito cinemático, novamente, o índice sobrescrito tem como função adequar o sinal da constante. O termo ΔF

determina a rapidez com que ocorre a transição da força de atrito estático F_s para a força de amortecimento viscoso, o índice sobrescrito tem a mesma função já descrita para os índices anteriores.

4.3.3 Análise física e estatística da força de interação entre superfícies

A formulação proposta para a força de interação entre duas superfícies, equação (4.35), pode ser caracterizada como sendo compatível com aquela mostrada na equação (4.16) com a adição do termo relativo ao amortecimento viscoso. Deve-se, no entanto, dizer que tal adição traz problemas com a identificação das variáveis v_0 , α , b e ΔF desde que tais constantes somente podem se obtidas por meio de ensaios experimentais e somente terão validade para condições semelhantes às realizadas no ensaio. Isto é, devido à variação no comportamento do filme lubrificante, das superfícies em contato e da interação entre as superfícies com o filme de lubrificante, ou quando ocorrem variações das condições tribológicas do ensaio, extrapolações dos valores destas constantes não são aconselhadas.

Pode-se no entanto verificar o comportamento global desta formulação. Nos ensaios numéricos apresentados como exemplo a seguir foram utilizados os valores, das constantes mostrados na Tabela 4.2, obtidos em Pontes Jr (2004), nas equações (4.35) à (4.39).

Tabela 4.2 – Valores das constantes utilizadas na análise da força de interação entre superfícies.

α	1e-3 m/s
F_s	10 N
ΔF	3 N
v_0	5e-3 m/s
b	10 Ns/m

Para tais valores temos o seguinte comportamento da força em função da velocidade:

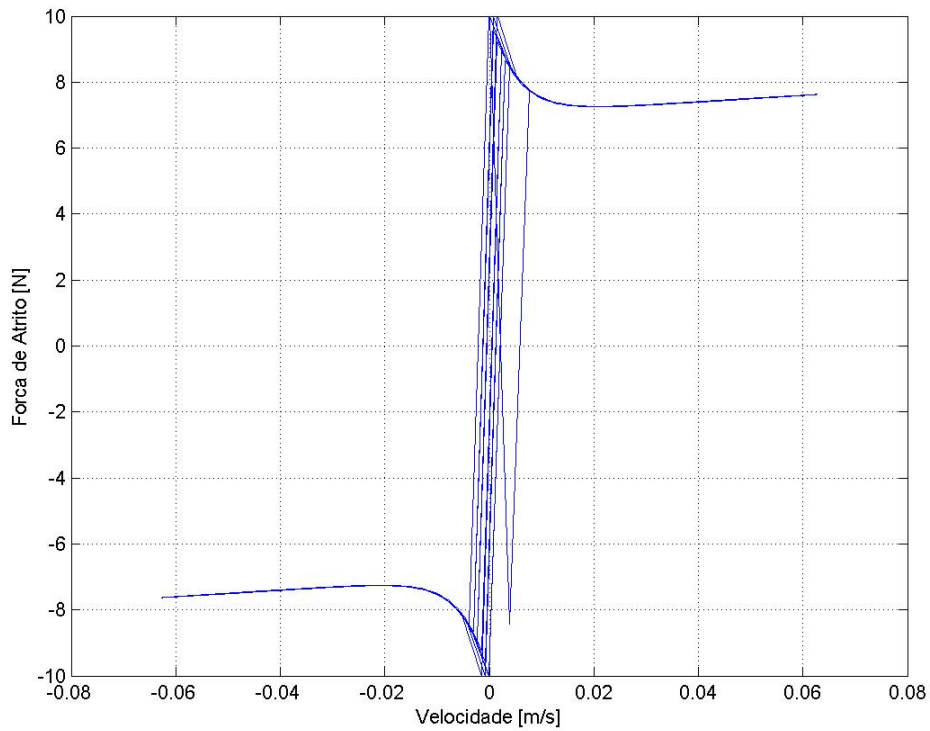


Figura 4.18 – Gráfico da força por velocidade para a força de interação entre duas superfícies que considera efeitos de amortecimento viscoso.

Considerando que tal força é a representação de um sistema não linear sem memória, $g(x)$, como descrito anteriormente, e que a entrada deste sistema é uma variável aleatória gaussiana normal com função densidade probabilidade dada na equação (4.22), para o sistema da Figura 1.19, resulta o gráfico da função densidade probabilidade da saída mostrada na Figura 1.20:

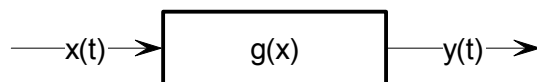


Figura 4.19 – Sistema não linear sem memória.

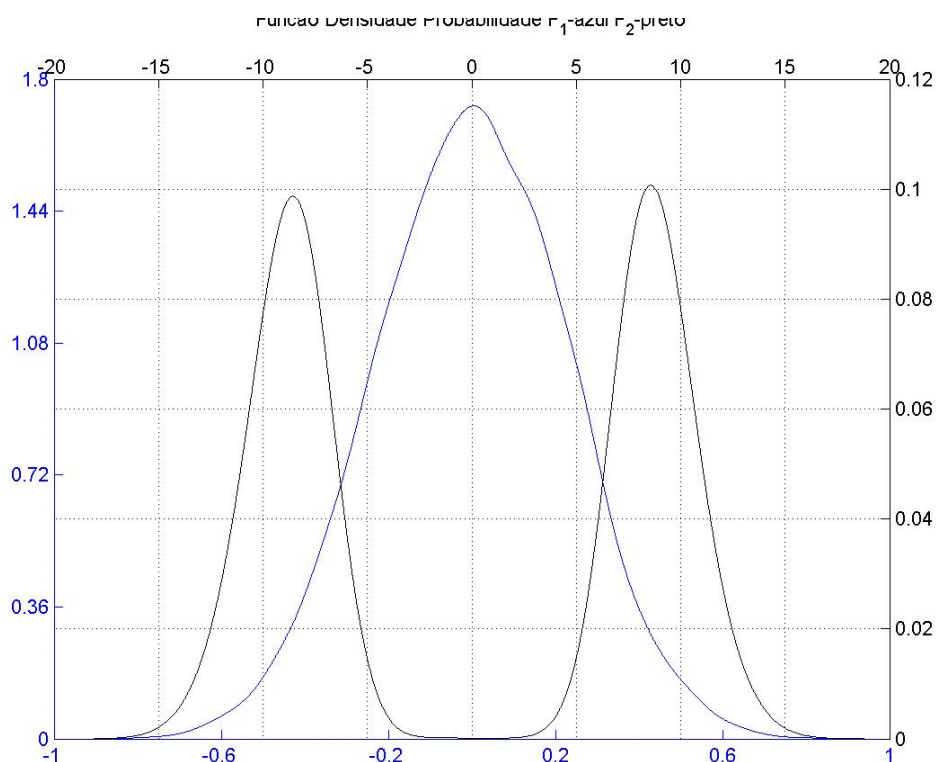


Figura 4.20 – Função densidade probabilidade da saída $y(t)$ e da entrada $x(t)$ do sistema apresentado na Figura 4.19.

Na Figura 4.20 nota-se que a função densidade probabilidade da saída $y(t)$ não é uma curva normal o que caracteriza a não linearidade da função representada na equação (4.35). Como esta função não é bijetora, o uso do teorema de identificação de sistemas não lineares sem memória não pode ser utilizado.

Os parâmetros estatísticos da saída $y(t)$ da Figura 4.19, para uma entrada $x(t)$ com distribuição normal, apresentam o seguinte comportamento:

- A média será nula desde que $x(t)$ tenha média nula e a função $g(x)$ tenha os mesmos valores em módulo para valores positivos e negativos de velocidade relativa.
- O desvio padrão se aproximará do valor de F_s quando a força de interação entre as superfícies for predominantemente de origem relacionada ao atrito seco. Isto é, quando esta força não sofrer influência significativa da parcela de amortecimento viscoso.
- A “assimetria” será nula para os casos em que a média for nula. Isto é, se $x(t)$ possui uma distribuição normal e $y(t)$ possui média nula a função $g(x)$ será simétrica e portanto a FDP de $y(t)$ também.

- A “curtose” deverá variar em valores próximos a um desde que como visto na Figura 4.18 a saída $y(t)$ se aproxima do comportamento de um onda quadrada que possui “curtose” igual a um.

4.4 Sistema linear submetido a força de atrito não linear

Em laboratório foi avaliada a validade da metodologia de análise não linear aplicada a sistemas submetidos à força de atrito com a intenção em se determinar qual o valor real da força de atrito, mesmo quando superposta a forças lineares. Para isto foi montado um experimento mostrado na Figura 4.21, na Figura 4.22 e na Figura 4.23, onde o sistema vibratório de um grau de liberdade, com frequência natural de 18 Hz, é excitado por uma força tipo ruído de banda estreita na faixa de 0 à 100 Hz. Um amortecedor de atrito tipo Coulomb é instalado entre a massa principal e uma coluna fixa no referencial inercial. A instrumentação é constituída de duas células de carga, dois acelerômetros, um excitador eletro-magnético e um gerador de sinais.

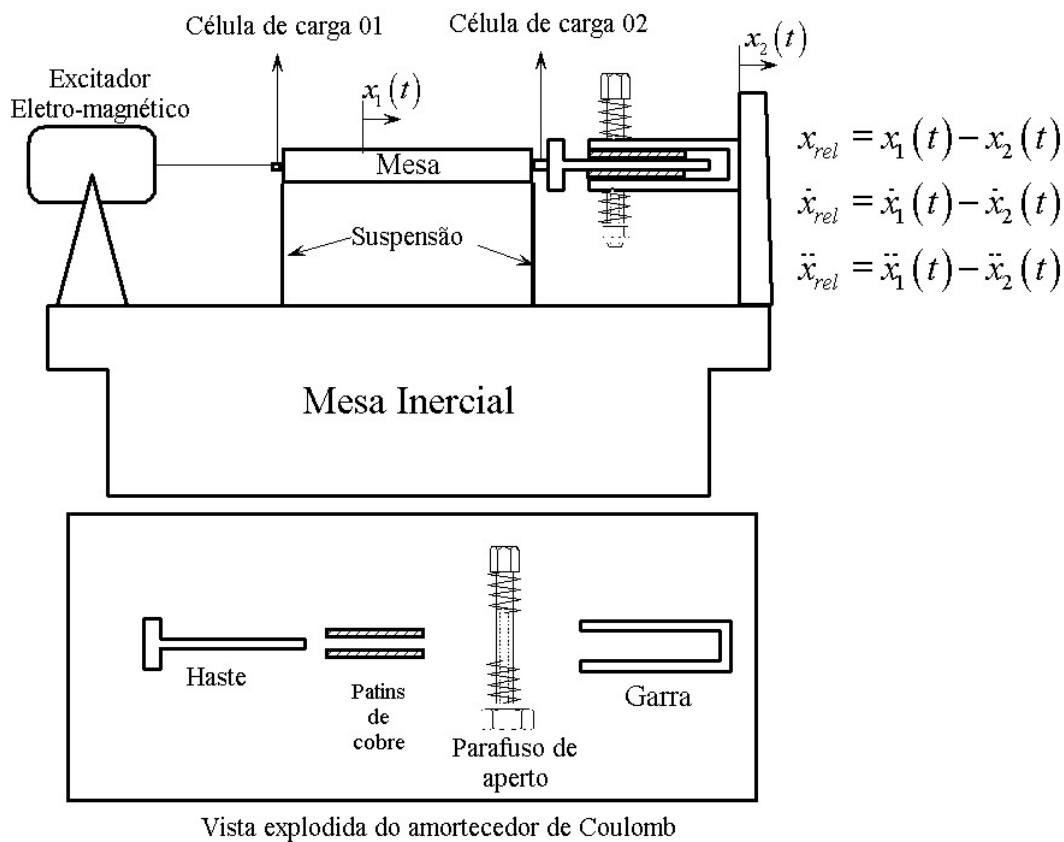


Figura 4.21 – Diagrama esquemático do experimento de um sistema vibratório de 1 GDL submetido a força de atrito.

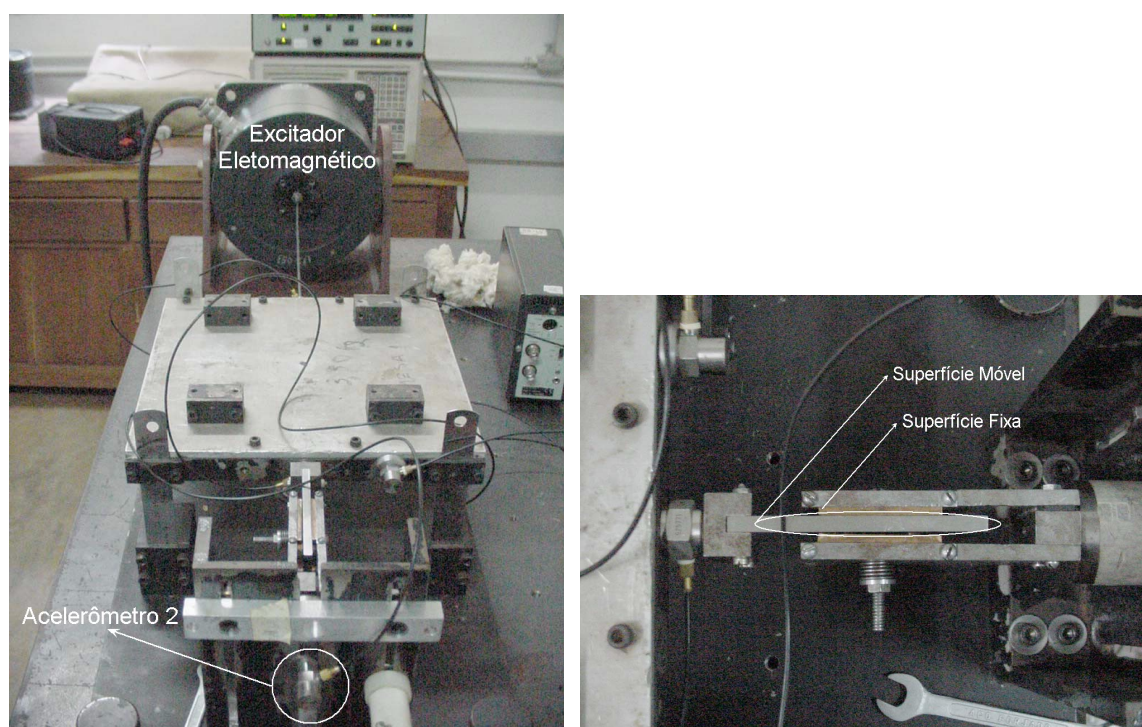


Figura 4.22 – Montagem experimental: Sistema vibratório de 1GDL e dispositivo de atrito Coulomb.

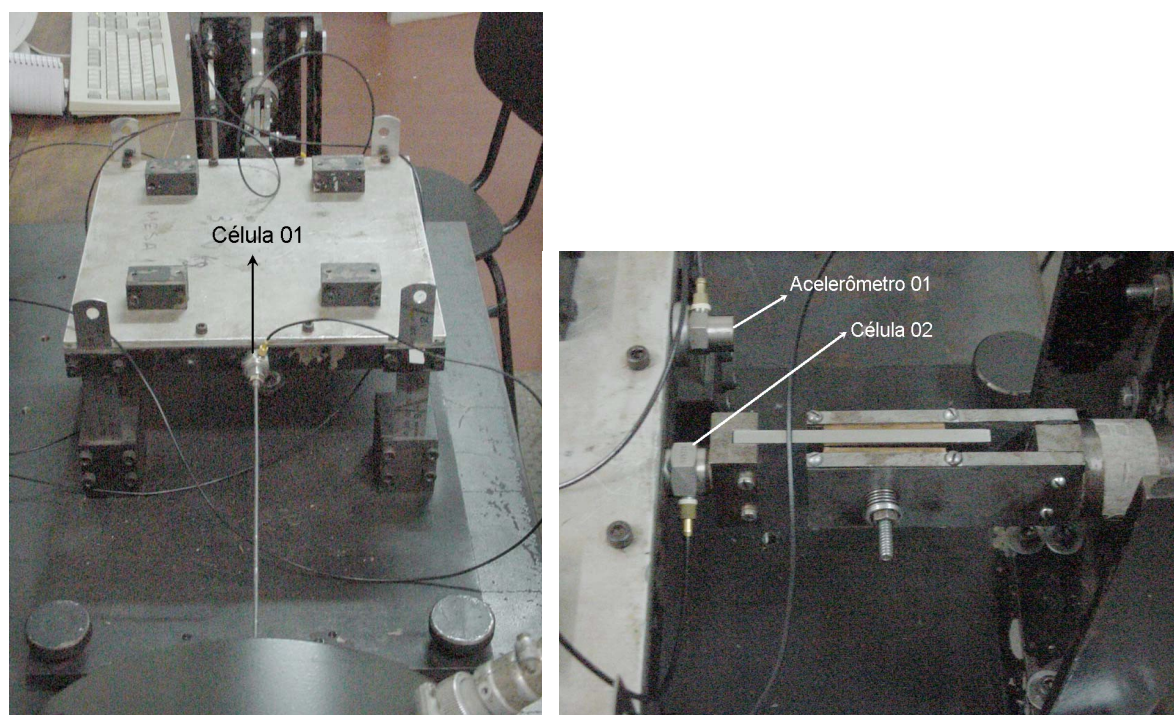


Figura 4.23 – Instrumentação do sistema vibratório.