

GIOVANNY SNAIDER BARRERA RAMOS

Conjunto de bifurcação de funções algébricas no plano



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2020

Conjunto de bifurcação de funções algébricas no plano

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Teoria das Singularidades.

Orientador: Prof. Dr. Luis Renato Gonçalves Dias.

UBERLÂNDIA - MG
2020

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

R175 Ramos, Giovanni Snaider Barrera, 1992-
2020 Conjunto de bifurcação de funções algébricas no plano [recurso eletrônico] / Giovanni Snaider Barrera Ramos. - 2020.

Orientador: Luis Renato Gonçalves Dias.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Pós-graduação em Matemática.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.473>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Dias, Luis Renato Gonçalves, 1982-, (Orient.).
II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em
Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Giovanny Snaider Barrera Ramos.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11822MAT001.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Teoria das Singularidades.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Conjunto de bifurcação de funções algébricas no plano.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Luis Renato Gonçalves Dias.

Esta dissertação foi **APROVADA** em web conferência pela plataforma Mconf-RNP, em 21 de Julho de 2020, às 14h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME

ASSINATURA

Prof. Dr. Luis Renato Gonçalves Dias
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Profa. Dra. Bruna Oréfice Okamoto
UFSCar - Universidade Federal de São Carlos

Prof. Dr. Aldicio José Miranda
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia-MG, 21 de Julho de 2020.

Dedicatória

*Aos meus queridos pais Ruben Barrera e Diana Ramos
À minha irmã Leidy.*

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer a Deus todo poderoso, por me permitir estudar nesta Universidade, já que sem sua graça e misericórdia nada disto tinha sido possível. Testifico que ter estudado aqui, é o cumprimento de uma, das tantas promessas incríveis que Deus fez para minha vida. Por outro lado quero agradecer aos meus queridos pais Ruben Barrera e Diana Ramos, pelo seu amor incondicional, pelo apoio econômico e emocional, pelos seus conselhos e por ter me acompanhado neste tempo apesar da distância, vocês são tudo para mim, e tudo o que sou é por vocês.

Também agradeço de maneira especial ao professor Luis Renato Gonçalves Dias pela imensa paciência, por todas as coisas que me ensinou, e por toda sua colaboração. Devo dizer que foi um privilégio ter trabalhado com ele, pois além de ser um excelente pesquisador, é uma pessoa maravilhosa, e desejo que Deus continue a abençoá-lo grandemente em todos os aspectos da sua vida.

A minha imensa gratidão aos meus queridos amigos Alonso Sepúlveda, Fábio Bertoloto, Geivison Ribeiro, Zully Galindo, Laura Fonseca e Mariana Rosas por ser um apoio espiritual e emocional nesta etapa da minha vida, todos vocês são pessoas incríveis. Além disso fico muito agradecido a todos os meus colegas do mestrado e amigos estrangeiros pela ajuda, apoio e as inolvidáveis vivências e experiências que compartilhamos.

Um agradecimento especial para o professor Thiago Catalan, a Gabriel Monsalve e a Iván Santamaria pela ajuda incondicional e recebimento quando cheguei ao Brasil.

Por último agradeço à Universidade Federal de Uberlândia, aos professores da PPMAT por minha formação acadêmica, e agradeço o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, que foi essencial para a conclusão do curso de mestrado.

Resumo

Neste trabalho apresentamos a caracterização do conjunto de bifurcação de funções algébricas definidas no plano real e complexo, obtidos por Tibăr e Zaharia em [16, Theorem 2.5] e por Parusiński em [12, Theorem 1.4], respectivamente. Exibimos também dois resultados obtidos por D’acunto e Grandjean em [2, Theorem 3.4] e por Parusiński em [12, Lemma 1.2], que nos permitem saber quando uma função semialgébrica ou polinomial complexa é uma fibração topológica local em um valor regular. O exemplo de King, Tibăr e Zaharia [16, Example 5.4] mostra que estes dois últimos resultados não fornecem uma caracterização completa do conjunto de bifurcação.

Palavras-chave: conjunto de bifurcação, função polinomial complexa, função semialgébrica, fibração topológica local, valor regular.

Abstract

We present the characterization of the bifurcation set of algebraic functions defined in the real and complex plane, obtained by Tibăr e Zaharia in [16, Theorem 2.5] and by Parusiński in [12, Theorem 1.4], respectively. We present two results obtained by D’acunto e Grandjean in [2, Theorem 3.4] and by Parusiński in [12, Lemma 1.2], that which allow us to know when a semialgebraic or polynomial complex function a local topological fibration on a regular value. The example of King, Tibăr e Zaharia [16, Example 5.4] show that these last two results do not provide a complete characterization of the bifurcation set.

Keywords: bifurcation set, complex polynomial function, semi-algebraic function, local topological fibration, regular value.

Conteúdo

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
1 Valores de bifurcação	4
1.1 Conceitos básicos	4
1.2 Trivialização via campo de vetores	6
1.2.1 Trivialização de Tibăr e Zaharia	6
1.2.2 Trivialização de Parusiński	7
1.2.3 Trivialização de D’Acunto e Grandjean	11
2 Valores de bifurcação no plano real	15
2.1 Limite de componentes conexas	15
2.1.1 Desaparecimento no infinito de uma família de componentes conexas	18
2.1.2 Divisão de uma família de componentes conexas	19
2.2 Caracterização valores de bifurcação	20
2.3 Exemplos	24
2.3.1 Exemplo 1	27
2.3.2 Exemplo 2	31
2.3.3 Exemplo 3	33
3 Valores de bifurcação no plano complexo	37
3.1 Caracterização dos valores de bifurcação	37
3.1.1 Exemplos	39

Introdução

A presente dissertação está inserida dentro da linha de pesquisa Teoria das Singularidades e Teoria das Catástrofes. A Teoria das Singularidades teve seu início nas décadas de 40 e 50 do século passado, com os trabalhos pioneiros de Hassler Whitney e René Thom. Desde então, a Teoria das Singularidades tem sido aplicada a várias áreas da Ciência e tem interagido com diversas áreas da Matemática, entre as quais destacamos Geometria Algébrica, Geometria Semialgébrica, Geometria Diferencial, Álgebra Comutativa, Topologia Algébrica e Topologia Diferencial.

O tema central deste trabalho é o uso da Teoria das Singularidades no estudo do conjunto de bifurcação de funções polinomiais reais e complexas. Com esse objetivo apresentamos a seguinte definição:

Definição 1. *Seja $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p, n \geq p$, uma aplicação polinomial para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma fibração topológica local em $t_0 \in \mathbb{K}^p$ se existe uma vizinhança aberta U de t_0 em $\mathbb{K}^p$ tal que a restrição $f|_U: f^{-1}(U) \rightarrow U$ é uma fibração topológica (ou seja, existe um homeomorfismo $h: f^{-1}(t_0) \times U \rightarrow f^{-1}(U)$ tal que $f \circ h = pr_2$, onde $pr_2: f^{-1}(t_0) \times U \rightarrow U$ é a projeção canônica de $(f^{-1}(t_0) \times U)$ sobre U). Se f não é uma fibração topológica local em $t_0 \in \mathbb{K}^p$, dizemos que t_0 é um valor de bifurcação de f . Denotamos por Λ_f , o conjunto dos valores de bifurcação de f .*

O estudo de uma fibração topológica produzida por uma função polinomial complexa do ponto de vista desta dissertação foi introduzido por M. Suzuki [18], S. A. Broughton [1] e F. Pham [13] nas décadas de 70 e 80. Desde então, uma ampla teoria global das singularidades tem sido desenvolvida do ponto de vista deste trabalho, com contribuições de Hà Hui Vui, Lê Dung Tráng, M. Suzuki, M. Tibăr, A. Zaharia, L. Păunescu, A. Némethi, A. Parusiński, P. Rabier, K. Kurdyka, P. Orro, S. Simon, T. Gaffney, Z. Jelonek, V. Grandjean, entre outros.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar dois teoremas que caracterizam o conjunto de bifurcação de funções algébricas definidas no plano real e complexo.

O primeiro teorema (veja Teorema 2.10) provado por Tibăr e Zaharia [16, Theorem 2.5] é a caracterização do conjunto de bifurcação de funções polinomiais definidas no plano real. Essencialmente, os autores demonstraram o seguinte resultado, veja Capítulo 2 para detalhes:

Teorema 1 (Tibăr e Zaharia). *Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial e t_0 um valor regular de f . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) *O valor t_0 não é um valor de bifurcação de f , isto é, $t_0 \notin \Lambda_f$.*
- ii) *Os Números de Betti da fibra $f^{-1}(t)$ são constantes para todo t em um aberto de t_0 , e não existe uma componente conexa de $f^{-1}(t)$ que desaparece no infinito quando $t \rightarrow t_0$, com $t > t_0$ ou $t < t_0$.*
- iii) *A Característica de Euler da fibra $f^{-1}(t)$ é constante para todo t em um aberto de t_0 , e não existe uma componente conexa de $f^{-1}(t)$ que desaparece no infinito quando $t \rightarrow t_0$, com $t > t_0$ ou $t < t_0$.*

- iv) *Os Números de Betti da fibra $f^{-1}(t)$ são constantes para todo t em um aberto de t_0 e não existe uma componente conexa de $f^{-1}(t)$ que se divide quando $t \rightarrow t_0$, com $t > t_0$ ou $t < t_0$.*

Além de outras técnicas, a prova deste teorema utiliza dois resultados clássicos de Geometria e Topologia Diferencial, o primeiro é o Lema de Ehresmann (veja Lema 1.9) provado em [4, Theorem 3.1], que essencialmente diz que: *Toda submersão própria é uma fibração topológica local* (veja Definição 1.2). O outro resultado é a Proposição 1.11 provada em [16, Proposition 2.7], que essencialmente estabelece o seguinte resultado: *Toda submersão definida em uma variedade $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $m + 1$ e com contradomínio $\mathbb{R}^m$ tal que todas as fibras são fechadas e difeomorfas a $\mathbb{R}$ é uma fibração topológica.*

O segundo teorema (Teorema 3.4) demonstrado por Parusiński em [12, Theorem 1.4] é a caracterização do conjunto de bifurcação de funções polinomiais com singularidades isoladas no infinito, veja Definição 3.3 e Capítulo 3 para detalhes. Este resultado diz:

Teorema 2 (Parusiński). *Seja $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial com singularidades isoladas $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ no infinito. Seja t_0 um valor regular de f . Então as seguintes condições são equivalentes:*

- i) $t_0 \notin \Lambda_f$.
- ii) *A condição de Parusiński é satisfeita em t_0 (Definição 1.13).*
- iii) *A família de singularidades isoladas $(\overline{X}_t, a_i \times t)$ são μ -constante para todo t em um aberto de t_0 .*
- iv) *A característica de Euler $\chi(X_t)$ das fibras de f é constante para todo t em um aberto de t_0 .*

Observamos que a condição de singularidade isolada no infinito é sempre satisfeita para $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, conforme Definição 3.3.

Diferente do Teorema 1, no Capítulo 3 não apresentamos a prova do Teorema 2. O objetivo é ilustrar a diferença entre o caso real e complexo no estudo do conjunto de bifurcação. Em particular, a prova deste resultado utiliza noções como estratificação de Whitney, condição a_f de Thom, Número de Milnor e curva polar relativa.

Além disso, para $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ uma função polinomial complexa para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou semialgébrica para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, estudamos dois resultados que fornecem condições para que f seja uma fibração topológica local em um valor regular. O primeiro resultado é o Teorema 1.15, dado em [12, Lemma 1.2], onde Parusiński provou que todo valor regular da função f que satisfaz a condição de Parusiński (veja Definição 1.13), não é um valor de bifurcação. A prova deste teorema consiste em trivializar a função através do fluxo de um campo de vetores construído a partir da projeção do vetor gradiente de f sobre o espaço tangente às esferas. Em particular, na demonstração deste teorema utilizamos o Lema de Seleção da Curva no Infinito (veja Lema 1.7) e o Teorema do Fluxo Local.

O segundo resultado é o Teorema 1.19, obtido em [2, Proposition 3.4], onde D’Acunto e Grandjean demonstraram para o caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, que todo valor regular da função f que satisfaz a condição de Malgrange (veja Definição 1.14) não é um valor de bifurcação e que todo valor regular de f cujo expoente de Kurdyka-Lojasiewicz é menor que 1 não é um valor de bifurcação. Essencialmente a prova deste teorema consiste em trivializar a função através do fluxo do campo vetores dado pelo gradiente de f .

Desta maneira, temos que o Teorema 1.19 é uma generalização do Teorema 1.15 no caso real. Porém, o Exemplo 1.20 mostra que estes resultados não fornecem uma caracterização completa do conjunto de bifurcação.

Este trabalho foi organizado da seguinte forma: no Capítulo 1, apresentamos as definições de conjunto semialgébrico e aplicações semialgébricas que serão utilizadas no decorrer do trabalho. Também exibimos as definições de fibração topológica, fibração topológica local e conjunto de bifurcação. Apresentamos as condições de Parusiński e Malgrange (Definição 1.13) e (Definição 1.14) respectivamente, o Lema de Seleção da Curva no Infinito (Lema 1.7), o Lema de Ehresmann (Lema 1.9) e os Teoremas 1.15 e 1.19 mencionados acima.

No Capítulo 2, apresentamos o teorema da caracterização do conjunto de bifurcação no plano real (Teorema 2.10). Apresentamos também as definições 2.5 e 2.8 que fornecem as noções de uma componente conexa da fibra $f^{-1}(t)$ desaparecer no infinito com $t \rightarrow t_0$ e de uma componente conexa da fibra $f^{-1}(t)$ se dividir com $t \rightarrow t_0$ respectivamente. Estas noções são condições/caracterizações do Teorema 2.10. Finalmente, exibimos os Exemplos 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3 dados em [16, §3] que mostram que as condições em cada item do Teorema 2.10 são necessárias.

No Capítulo 3, apresentamos o teorema da caracterização do conjunto de bifurcação no plano complexo (Teorema 3.4) e a Definição 3.3 que apresenta a noção de singularidades isoladas no infinito. Posteriormente exibimos um resultado que relaciona a curva polar relativa com a condição μ -constante com o objetivo de facilitar a compreensão do Teorema 3.4.

Giovanny Snaider Barrera Ramos
Uberlândia-MG, 21 de Julho de 2020.

Capítulo 1

Valores de bifurcação

1.1 Conceitos básicos

Nesta seção apresentamos alguns resultados topológicos relacionados à noção de fibração. Começamos com o seguinte conceito:

Definição 1.1 (Fibração topológica). *Sejam M, N variedades suaves e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua. Dizemos que a aplicação f é uma fibração topológica, se existem uma variedade F e um homeomorfismo $h : F \times N \rightarrow M$ tais que $f \circ h(q, p) = p$ para todo $(q, p) \in F \times N$.*

Em particular, se $f : M \rightarrow N$ é uma fibração topológica, então f é uma aplicação sobrejetora e a variedade F é homeomorfa a qualquer fibra $f^{-1}(p)$, com $p \in N$. Relacionado a definição acima temos:

Definição 1.2 (Fibração topológica local). *Considere M, N variedades suaves e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua. Dizemos que a aplicação f é uma fibração topológica local em $q \in N$ se existe um aberto $U_q \subset N$ tal que a restrição $f|_{f^{-1}(U_q)} : f^{-1}(U_q) \rightarrow U_q$ é uma fibração topológica conforme Definição 1.1. Dizemos apenas que f é uma fibração topológica local quando f é uma fibração topológica local em todos os pontos de N .*

Pelas definições acima temos que se f é uma fibração topológica então ela é uma fibração topológica local.

O próximo resultado relaciona as duas definições anteriores e mostra uma condição necessária para que a recíproca seja verdadeira. Antes, lembramos que uma variedade M é contrátil, se a aplicação identidade em M é homotópica à uma aplicação constante. Temos que $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, são exemplos de variedades contráteis. De fato, basta considerar a homotopia $H : [0, 1] \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, definida por $H(t, x) = tx + (1 - t)c$, com $c \in \mathbb{K}^n$. Logo, temos (veja por exemplo [15, Corollary 11.6]):

Teorema 1.3. *Sejam M, N variedades suaves e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua. Suponha N contrátil e f uma fibração topológica local. Então $f : M \rightarrow N$ é uma fibração topológica.*

Logo, pelo Teorema 1.3 e como $\mathbb{K}^m$ é contrátil ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), segue que se $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ é uma fibração topológica local, então f é uma fibração topológica. Em particular, quando $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ é uma fibração topológica local, segue que $\mathbb{K}^n$ é homeomorfo ao espaço $f^{-1}(t) \times \mathbb{K}^m$, para todo $t \in \mathbb{K}^m$.

As seguintes noções podem ser encontradas em [6, páginas 24, 25 e 28]:

Definição 1.4 (Conjunto algébrico e semialgébrico). *Dizemos que $V \subset \mathbb{K}^n$ é um conjunto algébrico, se V é o conjunto de zeros de algum ideal I do anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.*

Um conjunto $W \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de conjunto semialgébrico, se W é a interseção de um conjunto algébrico $V \subset \mathbb{R}^n$, e um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ definido por finitas desigualdades de polinômios, isto é, $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) > 0, \dots, g_k(x) > 0\}$, onde cada $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um polinômio.

Pela definição acima, temos que todo conjunto algébrico $V \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto semi-algébrico. A recíproca não é verdadeira, por exemplo $\{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ é semialgébrico mas não é algébrico.

A próxima definição é a noção de aplicação semialgébrica entre dois conjuntos semialgébricos. Esta definição será utilizada ao longo do texto.

Definição 1.5 (Aplicações semialgébricas). *Dados $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos semialgébricos, dizemos que uma aplicação $f : A \rightarrow B$ é semialgébrica se seu gráfico é um conjunto semi-algébrico em $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.*

Exemplo 1.6. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos semialgébricos. Considere $f : A \rightarrow B$ uma restrição de uma aplicação polinomial em A . Então f é uma aplicação semialgébrica. De fato, o gráfico de f é dado por: $\text{graf}(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$, que é um conjunto semialgébrico em $\mathbb{R}^{m+n}$. Em particular, se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação polinomial então ela é uma aplicação semialgébrica.*

A seguir apresentamos o Lema de Seleção da Curva no infinito, cuja demonstração pode ser encontrada por exemplo em [11, Lemma 2] (veja também [10, Lemma 3.1], uma prova para a versão clássica deste lema). Este resultado será utilizado ao longo da dissertação, veja por exemplo a prova do Teorema 1.15. Em particular, sob certas condições, este resultado diz que podemos trocar uma sequência de pontos em um conjunto semialgébrico por uma curva analítica.

Lema 1.7 (Lema de Seleção da Curva no Infinito). *Seja W um conjunto semialgébrico de $\mathbb{R}^n$ e sejam $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções polinomiais para $i \in \{1, \dots, r\}$. Suponha que existe uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset W$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$ e, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} h_i(x_k) = 0$. Então existe uma curva real analítica $p :]0, \epsilon[\rightarrow W$, com $\lim_{t \rightarrow 0} \|p(t)\| = \infty$, $\lim_{t \rightarrow 0} h_i(p(t)) = 0$, para $1 \leq i \leq r$. Temos ainda que p é da forma $p(t) = a_0 t^\alpha + a_1 t^{\alpha+1} + a_2 t^{\alpha+2} + \dots$, com $a_0 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ e $\alpha < 0$.*

Com as definições anteriores apresentamos o principal conceito relacionado ao nosso trabalho (veja definições 1.1 e 1.2):

Definição 1.8 (Valores de bifurcação). *Seja $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$, $n \geq p$ uma aplicação semialgébrica de classe C^∞ para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e uma aplicação polinomial para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Definimos o conjunto de bifurcação de f como sendo o conjunto de pontos $t \in \mathbb{K}^p$ tais que f não é uma fibração topológica local em t . Denotamos por Λ_f ao conjunto de bifurcação de f .*

A Definição 1.8 é o principal conceito relacionado a esta dissertação. O principal objetivo da dissertação é apresentar o Teorema de Tibăr e Zaharia [16] com sua prova, veja Teorema 2.10. Este resultado fornece uma caracterização completa do conjunto de bifurcação Λ_f para $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ polinomial. Além deste resultado, apresentamos o Teorema de Parusiński [12] (veja Teorema 3.4) que fornece uma caracterização completa dos valores de bifurcação para aplicações polinomiais com singularidades isoladas no infinito, veja Definição 3.3. Além destes resultados, estudamos condições e resultados que implicam $t_0 \notin \Lambda_f$.

O próximo resultado é clássico em Topologia Diferencial, conhecido como o Lema de Ehresmann. Este resultado diz basicamente que se $f : M \rightarrow N$ é submersão própria, então f é uma fibração topológica local. Em particular, este resultado fornece condições para que $\Lambda_f = \emptyset$. Utilizamos o Lema de Ehresmann na prova do Teorema 2.10.

Lema 1.9 (Lema de Ehresmann). *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave com M, N variedades suaves. Suponha que f satisfaz as seguintes duas condições:*

- i-) f é uma submersão sobrejetora;
- ii-) f é uma aplicação própria. Ou seja, a imagem inversa por f de qualquer conjunto compacto $Y \subset N$ é um conjunto compacto de M .

Então f é uma fibração topológica local.

A prova do resultado acima foi apresentada pela primeira vez em 1950 pelo matemático francês Charles Ehresmann. Uma demonstração deste resultado pode ser vista por exemplo em [4, página 154].

O próximo teorema é um resultado clássico e sua prova pode ser visto por exemplo em [17, Corollary 1.2.14], [8, Theorem 3.1]. Em particular, para funções semialgébricas reais e polinomiais complexas, o conjunto de bifurcação é isolado.

Teorema 1.10. *Seja $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, uma função semialgébrica para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e uma função polinomial complexa para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Então (Λ_f) é um conjunto finito de pontos ou o conjunto vazio.*

Na próxima seção apresentamos e provamos três teoremas que nos permitem saber quando uma aplicação é uma fibração topológica local. Cada um destes resultados fornece uma forma para identificar quando um valor regular da aplicação f não é um valor de bifurcação.

1.2 Trivialização via campo de vetores

Seja $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ uma função polinomial complexa para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou semialgébrica para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Suponha que $t_0 \in \mathbb{K}$ é um valor regular de f . Esta seção está dividida em três subseções. Na primeira seção apresentamos o Teorema 1.11 provado em [16, Proposition 2.7], que será utilizado na prova do Teorema 2.10. Na segunda e terceira seção, apresentamos duas condições e resultados que nos permitem saber quando a função f é uma fibração topológica local em t_0 , ou seja, quando $t_0 \notin \Lambda_f$. O primeiro é o Teorema 1.15 provado em [12, Lemma 1.2] e o segundo é o Teorema 1.19 demonstrado em [2, Theorem 3.4].

1.2.1 Trivialização de Tibăr e Zaharia

O próximo resultado, apresentado em [16, Proposition 2.7], que chamaremos de Teorema de trivialização de Tibăr e Zaharia, permite dizer sob quais condições uma submersão suave $g : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma fibração topológica local, com $M \subset \mathbb{R}^n$ variedade suave de dimensão $m + 1$. Observamos que como $\mathbb{R}^m$ é contrátil, segue que se g é uma fibração topológica local então g é uma fibração topológica (Teorema 1.3). Em particular, neste caso $\Lambda_g = \emptyset$ e M é homeomorfa a $\mathbb{R}^{m+1}$.

Teorema 1.11 (Trivialização Tibăr e Zaharia). *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade suave de dimensão $m + 1$ e $g : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave. Assuma que a aplicação g é uma submersão e que todas as fibras $g^{-1}(p)$ são difeomorfas a $\mathbb{R}$ e fechadas em $\mathbb{R}^n$. Então g é uma fibração topológica. Em particular, M é homeomorfa a $\mathbb{R}^{m+1}$.*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que g é uma fibração topológica local. Então a prova segue pelo Teorema 1.3 e pelo fato que $\mathbb{R}^m$ é contrátil.

Seja p um ponto arbitrário de $\mathbb{R}^m$ e $q \in g^{-1}(p)$. Como g é uma submersão, podemos encontrar uma subvariedade $T \subset M$, com $q \in T$ e tal que T é transversal às fibras de g .

De fato, pelo Teorema Local das Submersões sabemos que existem parametrizações (ou seja, difeomorfismos) $\phi_1 : U \times J \rightarrow \phi_1(U \times J) \subset M$ e $\phi_2 : U \rightarrow \phi_2(U) \subset \mathbb{R}^m$, com $U \subset \mathbb{R}^m$, $J \subset \mathbb{R}$ abertos, $q \in \phi_1(U \times J)$, $p \in \phi_2(U)$ e tais que

$$\phi_2^{-1} \circ g \circ \phi_1(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = (x_1, \dots, x_m), \forall (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \in U \times J.$$

Sejam $(z_1, \dots, z_m, z_{m+1}) = \phi_1^{-1}(q)$ e $Y = U \times \{z_{m+1}\}$. Observamos que Y é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{m+1}$ contida em $U \times J$ de dimensão m . Como ϕ_1 é um difeomorfismo, segue que $\phi_1(Y) := T$ é uma subvariedade de M e, por construção, T é transversal às fibras de g .

De novo, pela construção de T , temos que $g(T) = \phi_2(U)$ e portanto $g(T) := W$ é um aberto de $\mathbb{R}^m$ (temos também por construção de T que T, U e W são difeomorfos dois a dois). Considere o campo vetorial tangente às fibras de g definido da seguinte maneira: $\tilde{v} : g^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ tal que $\tilde{v}(x) = \nabla g_1(x) \wedge \nabla g_2(x) \wedge \dots \wedge \nabla g_m(x)$. Como g é uma submersão, temos que $\tilde{v}$ nunca se anula. Logo, podemos tomar o campo vetorial v unitário de $\tilde{v}$. Portanto, v é tangente às fibras de g e unitário. Para cada $z \in T$, temos o seguinte problema com valor inicial:

$$\begin{cases} v(\alpha_z(t)) = \alpha'_z(t) \\ z = \alpha_z(0). \end{cases}$$

Como o campo v é unitário e por hipótese as fibras de g são difeomorfas à $\mathbb{R}$ e fechadas em $\mathbb{R}^n$, segue pelo Teorema do Fluxo Tubular (veja por exemplo [3, Teorema 4.2.3]) que o campo acima produz um fluxo global $\tilde{h} : T \times \mathbb{R} \rightarrow g^{-1}(W)$, o qual é um difeomorfismo sobre o aberto $g^{-1}(W)$. Como T é difeomorfo à W , obtemos diretamente a partir de $\tilde{h}$ o difeomorfismo $h : W \times \mathbb{R} \rightarrow g^{-1}(W)$ que satisfaz, $g \circ h(z, t) = z$, o que mostra que g é uma fibração topológica local em p , com $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário. Finalmente, como já mencionado, pelo fato que $\mathbb{R}^m$ é contrátil e pelo Teorema 1.3 segue que g é uma fibração topológica, o que termina a prova. $\square$

1.2.2 Trivialização de Parusiński

Seja $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ uma função polinomial complexa para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou semialgébrica para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nesta seção, apresentamos a condição de Parusiński [12], veja Definição 1.13 abaixo. Apresentamos o Teorema de Parusiński que mostra que se um valor regular $t_0 \in \mathbb{K}$ satisfaz esta condição, então f é uma fibração topológica local em t_0 (Teorema 1.15). Em particular, $t_0 \notin \Lambda_f$.

Para a demonstração deste teorema precisamos inicialmente do Lema de Seleção da Curva 1.7 e posteriormente o Teorema do Fluxo local de um campo vetorial $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Dada $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ como antes, denotamos por ∇f o vetor $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$. Desta maneira se $\mathbf{v} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ é um campo vetorial, então

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\mathbf{v}(x)) - f(x)}{t} = \langle \mathbf{v}(x), \nabla f(x) \rangle. \quad (1.1)$$

A seguir, apresentamos três condições apresentadas em [12, página 371], que controlam o crescimento assintótico de $\nabla f(x)$, quando $\|x\| \rightarrow \infty$, $f(x) \rightarrow t_0$.

Definição 1.12 (Condição de Fedoryuk). *Seja $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ uma função de classe C^1 . Dizemos que a fibra $f^{-1}(t_0)$ verifica a condição de Fedoryuk, se existe $\delta > 0$, tal que, para toda sequência de pontos $x_i \in \mathbb{K}^n$ que satisfaz $\|x_i\| \rightarrow \infty$, $f(x_i) \rightarrow t_0$ quando $i \rightarrow \infty$, temos que*

$$\|\nabla f(x_i)\| \geq \delta, \text{ } i \text{ suficientemente grande} \quad (1.2)$$

Definição 1.13 (Condição de Parusiński). *Seja $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ uma função de classe C^1 . Dizemos que a fibra $f^{-1}(t_0)$ verifica a condição de Parusiński, se existem $\delta > 0$ e um inteiro positivo*

N , tal que, para toda sequência de pontos $x_i \in \mathbb{K}^n$ que satisfaz $\|x_i\| \rightarrow \infty$, $f(x_i) \rightarrow t_0$ quando $i \rightarrow \infty$, temos que

$$\|x_i\|^{\frac{N-1}{N}} \|\nabla f(x_i)\| \geq \delta, \text{ } i \text{ suficientemente grande} \quad (1.3)$$

Definição 1.14 (Condição de Malgrange). *Seja $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ uma função de classe C^1 . Dizemos que a fibra $f^{-1}(t_0)$ verifica a condição de Malgrange, se existe $\delta > 0$, tal que, para toda sequência de pontos $x_i \in \mathbb{K}^n$ que satisfaz $\|x_i\| \rightarrow \infty$, $f(x_i) \rightarrow t_0$ quando $i \rightarrow \infty$, temos que*

$$\|x_i\| \|\nabla f(x_i)\| \geq \delta, \text{ } i \text{ suficientemente grande} \quad (1.4)$$

Observe que se t_0 verifica a condição de Fedoryuk então

$$\delta \leq \|\nabla f(x_i)\| \leq \|x_i\|^{\frac{N-1}{N}} \|\nabla f(x_i)\| \text{ para todo } N \in \mathbb{N}$$

Por outro lado, se t_0 verifica a condição de Parusiński, segue que

$$\delta \leq \|x_i\|^{\frac{N-1}{N}} \|\nabla f(x_i)\| \leq \|x_i\| \|\nabla f(x_i)\|.$$

Portanto (1.2) $\Rightarrow$ (1.3) $\Rightarrow$ (1.4). Isto prova que, condição de Federyouk $\Rightarrow$ condição de Parusiński $\Rightarrow$ condição de Malgrange.

É conhecido que as condições de Malgrange e Federyouk definidas anteriormente também implicam a trivialidade topológica de f em um aberto de t_0 , ou seja, se t_0 é um valor regular de f que satisfaz a condição de Malgrange ou a condição de Federyouk, então f é uma fibração topológica local em t_0 . Em particular, sob estas condições $t_0 \notin \Lambda_f$. Para mais informações, veja por exemplo [17]. No Exemplo 1.20 apresentamos um exemplo que mostra que não vale a recíproca nestes casos.

Na seção 1.2.3 mostraremos uma condição sobre a função f para que esta seja uma fibração topológica nos valores onde a condição de Malgrange não é válida.

Com as definições e resultados anteriores, apresentamos e demonstramos o teorema principal desta seção, que foi obtido em [12, Lemma 1.2]:

Teorema 1.15 (Trivialização de Parusiński). *Seja $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação polinomial para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou semialgébrica de classe C^2 para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Suponha que t_0 é um valor regular de f tal que a condição (1.3) vale quando $\|x\| \rightarrow \infty$, $f(x) \rightarrow t_0$. Então existe um aberto U de t_0 tal que f é uma fibração topológica sobre U .*

Demonstração. Apresentamos somente a prova para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, que é análoga à prova apresentada para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ em [12]. Inicialmente, definimos um campo vetorial V que é a projeção de ∇f sobre uma esfera e mostramos que V é não nulo. Renormalizamos V e obtemos o campo W . Então mostramos que o campo W é integrável e obtemos um difeomorfismo através do fluxo deste campo para concluir que f é uma fibração local em t_0 no complemento da bola $\mathbf{B}_R$. Com W construímos um campo H que fornece a trivialização de f através de seu fluxo.

Seja $V : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ o campo vetorial definido por:

$$V(x) = \nabla f(x) - \frac{\langle x, \nabla f(x) \rangle}{\|x\|^2} x. \quad (1.5)$$

Temos que V é a projeção de $\nabla f(x)$ sobre o espaço tangente à esfera S_r em x , com $r = \|x\|$.

A seguir, provamos que se a condição (1.3) é satisfeita, então existem $R > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que $V(x) \neq 0$ para todo $x \in f^{-1}([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]) \cap \mathbf{B}_R^c$, onde $\mathbf{B}_R^c$ denota o complemento da bola de raio R em $\mathbb{R}^n$. Do contrário, pelo Lema de Seleção da Curva 1.7, existe uma curva analítica $x(s)$ tal que

$$x(s) = s^\alpha(a_0 + a_1 s + \dots), \text{ } a_0 \neq 0 \quad (1.6)$$

$\lim_{s \rightarrow 0} \|x(s)\| = \infty$, $\lim_{s \rightarrow 0} f(x(s)) = t_0$ e $V(x(s)) \equiv 0$. Desta forma, temos $\alpha < 0$. Consideramos também

$$\nabla f(x(s)) = s^\beta(b_0 + b_1s + \dots), \quad b_0 \neq 0. \quad (1.7)$$

Pela condição (1.3), temos que $\|x(s)\|^{\frac{N-1}{N}} \|\nabla f(x(s))\| \geq \delta$, para s próximo suficiente de 0. Logo, as equações (1.6) e (1.7) implicam:

$$s^{\alpha+\beta-\frac{\alpha}{N}} \|a_0 + a_1s + \dots\|^{\frac{N-1}{N}} \|b_0 + b_1s + \dots\| \geq \delta \quad (1.8)$$

com s suficientemente próximo de 0. Portanto $\alpha + \beta - \frac{\alpha}{N} < 0$ e como $-\frac{\alpha}{N} > 0$, concluímos que $\alpha + \beta < 0$.

Como $\lim_{s \rightarrow 0} f(x(s)) = t_0$, segue que f é limitada para s próximo de 0. Portanto, $f(x(s))$ é uma função analítica de s em 0 e consequentemente $\frac{df(x(s))}{ds}$ também é uma função analítica de s em 0.

Mas

$$\frac{df(x(s))}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x(s))}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = \left\langle \frac{d}{ds} x(s), \nabla f(x(s)) \right\rangle \quad (1.9)$$

$$= s^{\alpha+\beta-1} (\alpha \langle a_0, b_0 \rangle + (\alpha \langle a_0, b_1 \rangle + (\alpha + 1) \langle b_0, a_1 \rangle) s + \dots). \quad (1.10)$$

Como $\frac{df(x(s))}{ds}$ é analítica em 0, e $\alpha + \beta - 1 < 0$, concluímos que $\langle a_0, b_0 \rangle = 0$. Logo, como $V(x(s)) \equiv 0$, temos:

$$\begin{aligned} V(x(s)) &= \nabla f(x(s)) - \frac{\langle x(s), \nabla f(x(s)) \rangle}{\|x(s)\|^2} x(s) \\ &= s^\beta(b_0 + b_1s + \dots) - \frac{\langle s^\alpha(a_0 + a_1s + \dots), s^\beta(b_0 + b_1s + \dots) \rangle}{s^{2\alpha} \|a_0 + a_1s + \dots\|^2} s^\alpha(a_0 + a_1s + \dots) \\ &= s^\beta(b_0 + b_1s + \dots) - \frac{s^\beta(\langle a_0, b_0 \rangle + (\langle a_0, b_1 \rangle + \langle a_1, b_0 \rangle) s + \dots)}{\|a_0 + a_1s + \dots\|^2} (a_0 + a_1s + \dots) \\ &= s^\beta(b_0 + b_1s + \dots) - \frac{s^\beta((a_0 \langle a_0, b_1 \rangle + a_0 \langle a_1, b_0 \rangle) s + \dots)}{\|a_0 + a_1s + \dots\|^2} \\ &= s^\beta(b_0 + b_1s + \dots) - \frac{s^{\beta+1}((a_0 \langle a_0, b_1 \rangle + a_0 \langle a_1, b_0 \rangle) + \dots)}{\|a_0 + a_1s + \dots\|^2} = 0. \end{aligned}$$

A última expressão implica que

$$b_0 + b_1s + \dots = \frac{s((a_0 \langle a_0, b_1 \rangle + a_0 \langle a_1, b_0 \rangle) + \dots)}{\|a_0 + a_1s + \dots\|^2}.$$

Assim, obtemos que $b_0 = 0$ o que é uma contradição. Portanto, isso nos mostra que existem $R > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que $V(x) \neq 0$ para todo $x \in f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) \cap \mathbf{B}_R^c$. Considere o seguinte aberto $\mathcal{U} := f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) \cap \mathbf{B}_R^c$ e consideramos $W : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, uma renormalização de V , definido por:

$$W(x) = \frac{V(x)}{\|V(x)\|^2} = \frac{V(x)}{\langle V(x), V(x) \rangle} = \frac{V(x)}{\langle V(x), \nabla f(x) \rangle}.$$

Temos $W(x) \neq 0$ e $\langle x, W(x) \rangle = 0$, pela construção de $V(x)$. Além disso, por (1.1) obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial W} = \langle \nabla f(x), W(x) \rangle = \left\langle \nabla f(x), \frac{V(x)}{\langle V(x), \nabla f(x) \rangle} \right\rangle = 1. \quad (1.11)$$

Agora provamos que o campo vetorial $W(x)$ é integrável em $\mathcal{U}$, e posteriormente obtemos um difeomorfismo ϕ através do fluxo deste campo, para mostrar que ϕ trivializa f em $\mathcal{U}$. Seja $p_0 \in f^{-1}(t_0) \cap \mathbf{B}_R^c$ arbitrário. Por (1.11), temos que se $\gamma_{p_0}(t)$ é uma solução de

$$\begin{cases} W(\gamma_{p_0}(t)) = \gamma'_{p_0}(t) \\ p_0 = \gamma_{p_0}(t_0), \end{cases}$$

então $f(\gamma_{p_0}(t)) = t$, para todo t no domínio de γ_{p_0} .

De fato, derivando $f(\gamma_{p_0}(t)) = t$, com relação a t , temos $\langle \nabla f(\gamma_{p_0}(t)), \gamma'_{p_0}(t) \rangle = 1$.

Temos que γ_{p_0} está definida para todo $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. De fato, esta afirmação segue pelo fato de que γ_{p_0} satisfaz as seguintes duas propriedades:

- $\lim_{t \rightarrow b} \|\gamma_{p_0}(t)\|$ não diverge para todo $b \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. Esta propriedade segue pela construção de W , pois $\|\gamma_{p_0}(t)\| = \|p_0\|$, $\forall t$ no domínio de γ_{p_0} .

- $\{\gamma_{p_0}(t), t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\}$ não contém pontos da fronteira de $\mathcal{U}$. Esta propriedade segue pelo fato de que $f(\gamma(t)) = t, \forall t$ no domínio de γ_{p_0} .

Logo, pelo Teorema do Fluxo Local (veja por exemplo [3, Teorema 4.0.4]), temos que a aplicação

$$\phi : (f^{-1}(t_0) \cap \mathbf{B}_R^c) \times]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\rightarrow (f^{-1}]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) \cap \mathbf{B}_R^c = \mathcal{U}, \quad (1.12)$$

definida por $\phi(p_0, t) = \gamma_{p_0}(t)$ é um difeomorfismo. Além disso, temos que $f \circ \phi(p_0, t) = f(\gamma_{p_0}(t)) = t$, o que mostra que ϕ trivializa f em $\mathcal{U}$.

A seguir, provaremos que a restrição $f| : f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) \rightarrow]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ é uma fibração utilizando o campo W acima. Como t_0 é um valor regular de f , podemos supor que ϵ tomado acima é pequeno suficiente de modo que o intervalo $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ contém somente valores regulares de f . Logo, o campo vetorial $Z(x) := \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|^2}$ está bem definido para todo $x \in f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$. Além disso, por (1.1) temos:

$$\frac{\partial f}{\partial Z} = \langle \nabla f(x), Z(x) \rangle = \left\langle \nabla f(x), \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|^2} \right\rangle = 1. \quad (1.13)$$

Vamos “grudar” os campos vetoriais $W(x)$ e $Z(x)$ para obter uma trivialização de f . Considere $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, com $r_1, r_2 > 0$, tais que $R < r_1 < r_2$. Para r_1, r_2 temos que existem funções contínuas $\lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ (veja por exemplo [9, página 186]) tais que:

$$\text{i-)} \quad \lambda_1(\mathbf{B}_{r_1}) = 1 \text{ e } \lambda_2(\mathbf{B}_{r_1}) = 0.$$

$$\text{ii-)} \quad \lambda_1(\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{B}_{r_2}) = 0 \text{ e } \lambda_2(\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{B}_{r_2}) = 1.$$

$$\text{iii-)} \quad 0 < \lambda_1(\mathbf{B}_{r_2} \setminus \overline{\mathbf{B}_{r_1}}) < 1 \text{ e } 0 < \lambda_2(\mathbf{B}_{r_2} \setminus \overline{\mathbf{B}_{r_1}}) < 1.$$

Com as funções anteriores, definimos o campo vetorial $H : f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por:

$$H(x) = \frac{1}{\lambda_1(x) + \lambda_2(x)} (\lambda_1(x)Z(x) + \lambda_2(x)W(x)).$$

Este campo gruda os campos vetoriais mencionados anteriormente. Além disso, pela construção, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial H} = 1, \quad (1.14)$$

o que mostra em particular que H é não nulo.

Utilizaremos o fluxo de H para produzir o difeomorfismo que prova que f é uma fibração local em t_0 . Seja $p_1 \in f^{-1}(t_0)$ arbitrário. Por (1.13), temos que se $\xi_{p_1}(t)$ é uma solução de

$$\begin{cases} H(\xi_{p_1}(t)) = \xi'_{p_1}(t) \\ p_1 = \xi_{p_1}(t_0), \end{cases}$$

então $f(\xi_{p_1}(t)) = t$ (isso segue, como antes, derivando $f(\xi_{p_1}(t)) = t$). Temos que ξ_{p_1} está definida para todo $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. De fato, esta afirmação segue pelo fato de que ξ_{p_1} satisfaz as seguintes duas propriedades:

- $\lim_{t \rightarrow b} \|\xi_{p_1}(t)\|$ não diverge para todo $b \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. Esta propriedade segue pela propriedade de W discutida anteriormente e pelo fato de que se $\xi_{p_1}(t) \notin \mathbf{B}_{r_2}$, quando $t \rightarrow b$, então $H = W$ por construção.

- $\{\xi_{p_1}(t), t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\}$ não contém pontos da fronteira de $f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$. Esta propriedade segue pelo fato de que $f(\xi_{p_1}(t)) = t, \forall t$ no domínio de ξ_{p_1} .

Logo, novamente pelo Teorema do Fluxo Local (veja por exemplo [3, Teorema 4.0.4]), temos que a aplicação

$$\phi_1 : f^{-1}(t_0) \times]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\rightarrow f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[), \quad (1.15)$$

definida por $\phi_1(p, t) = \xi_p(t)$ é um difeomorfismo. Além disso, temos que $f \circ \phi_1(p, t) = f(\xi_p(t)) = t$, o que mostra que f é uma fibração topológica local em t_0 , o que termina a prova. $\square$

Observação 1.16. *Com a mesma demonstração do Teorema 1.15, também prova-se que a condição de Malgrange (veja Definição 1.14) implica $t_0 \notin \Lambda_f$. A única mudança é que, quando a condição (1.4) é satisfeita, das equações (1.6), (1.7) e (1.8) concluímos que $\alpha + \beta \leq 0$ e o resto das justificativas são análogas.*

Exemplo 1.17. *Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x - x^2y$. Na Observação 2.11 do próximo capítulo justificaremos que $0 \in \Lambda_f$. Logo, pelo Teorema 1.15 segue que (1.3) não é satisfeita em 0. Neste exemplo, mostraremos explicitamente que (1.3) não é satisfeita em 0. De fato, considere a sequência de pontos $\{(\frac{1}{2n}, n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$. Esta sequência verifica:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{1}{2n}, n \right) \right\| = \infty, \quad (1.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f \left(\frac{1}{2n}, n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n} = 0, \quad (1.17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{1}{2n}, n \right) \right\|^{\frac{N-1}{N}} \left\| \nabla f \left(\frac{1}{2n}, n \right) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 4n^4}{4n^2} \right)^{\frac{N-1}{2N}} \left(\frac{1}{4n^2} \right) = 0. \quad (1.18)$$

As três expressões acima mostram que 0 não satisfaz a condição (1.3).

Mais a frente, no Exemplo 1.20 vemos que a recíproca do teorema anterior não é válida. Ou seja, o Teorema 1.15 não fornece uma caracterização completa do conjunto de bifurcação.

1.2.3 Trivialização de D'Acunto e Grandjean

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semialgébrica de classe C^2 . Suponha que $t_0 \in \mathbb{R}$ é um valor regular de f que não satisfaz a condição de Malgrange, veja Definição 1.14. Nesta seção mostraremos uma condição para que f seja uma fibração topológica local em t_0 (Teorema 1.19). Este teorema é um resultado apresentado por D'Acunto e Grandjean em [2]. Para a demonstração deste teorema precisamos somente de dois resultados, o primeiro é a Proposição 1.18 apresentado em [2, Proposition 3.1], que chamaremos de Condição de Kurdyka-Lojasiewicz como em [2]. O segundo é o Teorema do Fluxo Local de um campo vetorial $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Começamos com o seguinte resultado:

Proposição 1.18 (Condição de Kurdyka-Lojasiewicz). *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semialgébrica de classe C^1 e $t_0 \in \overline{f(\mathbb{R}^n)}$, então existem números reais $C, R, T > 0$ e um menor número racional ρ_{t_0} , com $\rho_{t_0} \leq 1$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq R$ e $|f(x) - t_0| < T$, tem-se*

$$\|x\| \|\nabla f(x)\| \geq C|f(x) - t_0|^{\rho_{t_0}}.$$

O expoente ρ_{t_0} é chamado de expoente de Kurdyka-Lojasiewicz no infinito para o valor t_0 .

Teorema 1.19 (Trivialização de D'Acunto e Grandjean). *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semialgébrica de classe C^2 . Suponha $t_0 \in \overline{f(\mathbb{R}^n)}$ um valor regular. Se $\rho_{t_0} < 1$, onde ρ_{t_0} é definido na proposição anterior, então f é uma fibração topológica local em t_0 . Mais ainda, a trivialização, pode ser realizada pelo fluxo de $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2}$.*

Demonstração. Sejam $R, C, \epsilon > 0$ número reais tal que $\|x\| \|\nabla f(x)\| \geq C|f(x) - t_0|^{\rho_{t_0}}$ em $f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) \cap \mathbf{B}_R^c$, onde como antes $\mathbf{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < R\}$.

Sejam $x_0 \in f^{-1}(t_0)$ e $\gamma_{x_0}(t)$ uma trajetória maximal satisfazendo o seguinte problema:

$$\begin{cases} \gamma'_{x_0}(t) = \frac{\nabla f(\gamma_{x_0}(t))}{\|\nabla f(\gamma_{x_0}(t))\|^2} \\ \gamma_{x_0}(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Então, para todo $t \in \mathbb{R}$ obtemos que $f(\gamma_{x_0}(t)) = t$, pois

$$\frac{df(\gamma_{x_0}(t))}{dt} = \langle \nabla f(\gamma_{x_0}(t)), \gamma'_{x_0}(t) \rangle = \frac{\langle \nabla f(\gamma_{x_0}(t)), \nabla f(\gamma_{x_0}(t)) \rangle}{\|\nabla f(\gamma_{x_0}(t))\|^2} = 1. \quad (1.20)$$

Temos que γ_{x_0} está definida para todo $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. De fato, como antes, esta afirmação segue pelo fato de que γ_{x_0} satisfaz as seguintes duas propriedades:

- $\{\gamma_{x_0}(t), t \in]t_0, t_0 + \epsilon[\}$ não contém pontos da fronteira de $f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$. Esta propriedade segue pelo fato de que $f(\gamma_{x_0}(t)) = t, \forall t$ no domínio de γ_{x_0} .

- $\lim_{t \rightarrow b} \|\gamma_{x_0}(t)\|$ não diverge para todo $b \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. Mostremos a seguir esta afirmação para $b > t_0$ (a prova para $b < t_0$ é análoga). De fato, se $\gamma_{x_0}(t)$ é uma solução do problema (1.19) e com $\|\gamma_{x_0}(t)\|$ grande suficiente, então $\gamma_{x_0}(t)$ satisfaz a seguinte relação, com $t, t_1 \in]t_0, t_0 + \epsilon[$:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^t \gamma'_{x_0}(s) ds &= \int_{t_1}^t \frac{\nabla f(\gamma(s))}{\|\nabla f(\gamma(s))\|^2} ds, \\ \gamma_{x_0}(t) &= \gamma_{x_0}(t_1) + \int_{t_1}^t \frac{\nabla f(\gamma(s))}{\|\nabla f(\gamma(s))\|^2} ds. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|\gamma_{x_0}(t)\| &\leq \|\gamma_{x_0}(t_1)\| + \left\| \int_{t_1}^t \frac{\nabla f(\gamma_{x_0}(s))}{\|\nabla f(\gamma_{x_0}(s))\|^2} ds \right\| \\ &\leq \|\gamma_{x_0}(t_1)\| + \int_{t_1}^t \frac{\|\nabla f(\gamma_{x_0}(s))\|}{\|\nabla f(\gamma_{x_0}(s))\|^2} ds \\ &= \|\gamma_{x_0}(t_1)\| + \int_{t_1}^t \frac{1}{\|\nabla f(\gamma_{x_0}(s))\|} ds. \end{aligned}$$

Pela hipótese e Proposição 1.18 na expressão anterior, obtemos

$$\|\gamma_{x_0}(t)\| \leq \|\gamma_{x_0}(t_1)\| + \int_{t_1}^t \frac{\|\gamma_{x_0}(s)\|}{C|f(\gamma_{x_0}(s)) - t_0|^{\rho_{t_0}}} ds. \quad (1.22)$$

Pelo Lema de Gronwall (veja por exemplo [3, Lema 3.1.5]) a expressão (1.22) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\|\gamma_{x_0}(t)\| \leq \|\gamma_{x_0}(t_1)\| \exp \int_{t_1}^t \frac{ds}{C|f(\gamma_{x_0}(s)) - t_0|^{\rho_{t_0}}} \quad (1.23)$$

Dado que $f(\gamma_{x_0}(t)) = t$, então podemos reescrever a desigualdade (1.23) como segue

$$\begin{aligned} \|\gamma_{x_0}(t)\| &\leq \|\gamma_{x_0}(t_1)\| \exp \int_{t_1}^t \frac{ds}{C|s - t_0|^{\rho_{t_0}}} \\ &= \|\gamma_{x_0}(t_1)\| \exp \left\{ \frac{(s - t_0)^{1-\rho_{t_0}} \Big|_{t_1}^t}{C(1 - \rho_{t_0})} \right\} \\ &= \|\gamma_{x_0}(t_1)\| \exp \left\{ \frac{(t - t_0)^{1-\rho_{t_0}} - (t_1 - t_0)^{1-\rho_{t_0}}}{C(1 - \rho_{t_0})} \right\} \end{aligned}$$

Portanto $\lim_{t \rightarrow b} \|\gamma_{x_0}(t)\|$ não diverge. Logo, pelo Teorema do Fluxo Local (veja por exemplo [3, Teorema 4.0.4]), temos que a aplicação

$$\phi_1 : f^{-1}(t_0) \times]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\rightarrow f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[), \quad (1.24)$$

definido por $\phi_1(x, t) = \gamma_x(t)$ é um difeomorfismo. Além disso, temos que $f \circ \phi_1(p, t) = f(\gamma_p(t)) = t$, o que mostra que f é uma fibração topológica local em t_0 , o que termina a prova. $\square$

O exemplo a seguir dado em [16, Example 5.4], mostra que a recíproca dos teoremas 1.15 e 1.19 não são válidos. Ou seja, esses teoremas não fornecem uma caracterização completa do conjunto de bifurcação.

Exemplo 1.20. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x^2y^3 - 9xy^2 + 12y$. Para esta função temos que $\Lambda_f = \emptyset$ (veja por exemplo [16, Example 5.4]), ou seja, f é uma fibração topológica, mas $\rho_0 = 1$. Para provar a última afirmação, considere a sequência de pontos $\{(n, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$. Esta sequência verifica:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(n, \frac{1}{n} \right) \right\| &= \infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f \left(n, \frac{1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla f \left(n, \frac{1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-5}{n^2}, 0 \right) = (0, 0). \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 1.18, temos que existem $C > 0$ e ρ_0 , tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, vale a seguinte desigualdade

$$\left\| \left(n, \frac{1}{n} \right) \right\| \left\| \nabla f \left(n, \frac{1}{n} \right) \right\| \geq C \left\| f \left(n, \frac{1}{n} \right) \right\|^{\rho_0}.$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(n, \frac{1}{n} \right) \right\| \left\| \nabla f \left(n, \frac{1}{n} \right) \right\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} C \left\| f \left(n, \frac{1}{n} \right) \right\|^{\rho_0}.$$

Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n^4 + 1}{n^2}} \right) \left(\frac{5}{n^2} \right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} C \left\| f \left(n, \frac{1}{n} \right) \right\|^{\rho_0}$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{n^4 + 1}}{n^2} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} C 5^{\rho_0} n^{1-\rho_0}. \quad (1.25)$$

A expressão (1.25) implica que $C \leq 1$ e $\rho_0 = 1$. As contas acima também mostram com a mesma sequência $\{(n, 1/n)\}$ que 0 não satisfaz a condição de Malgrange (Definição 1.14), consequentemente 0 não satisfaz a condição de Parusiński (Definição 1.13).

A seguir, comparamos brevemente as condições dos teoremas 1.15 e 1.19 e apresentamos a noção de valores críticos assintóticos.

Dada $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ uma função diferenciável, com $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Definimos os seguintes conjuntos.

$$K_0(f) := f(\text{crit}(f)).$$

Onde $\text{crit}(f)$ denota o conjunto dos pontos críticos de f , isto é, $\text{crit}(f) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \nabla f(x) = 0\}$.

$$K_\infty(f) = \{y \in \mathbb{K} \mid \exists x_n \in \mathbb{K}^n, \text{ tal que } \|x_n\| \rightarrow \infty, f(x_n) \rightarrow y, \text{ e } \|x_n\| \|\nabla f(x_n)\| \rightarrow 0\}.$$

O conjunto $K_\infty(f)$ é chamado de conjunto de valores críticos assintóticos. Com isso, definimos o conjunto $K(f) := K_0(f) \cup K_\infty(f)$. O conjunto $K(f)$ é chamado de conjunto dos pontos críticos generalizados, veja por exemplo [14], [7] e [8]. Um resultado clássico que relaciona o conjunto $K(f)$ e o conjunto de bifurcação Λ_f é o Teorema de Rabier, que diz basicamente que $\Lambda_f \subset K(f)$. Este resultado pode ser visto no caso mais geral em [14, seções 6 e 7], veja também [7, Theorem 3.1].

Os valores que pertencem ao conjunto $K_\infty(f)$ são justamente os valores onde a condição de Malgrange falha, veja (Definição 1.14).

Em particular, D'Acunto e Grandjean provaram que todo valor regular que pertence ao conjunto $K_\infty(f)$ cujo expoente de Kurdyka-Lojasiewicz é menor que 1, não é um valor de bifurcação (Teorema 1.19). Assim, podemos ver o Teorema 1.19 como um resultado que generaliza o Teorema 1.15 no caso real. O exemplo apresentado em [2, Example 5.3], $f(x, y) = y^{11} + (1 + (1 + x^2)y)^3$, mostra que a recíproca não é válida. Neste exemplo, temos que $\rho_0 < 1$ mas $f^{-1}(0)$ não satisfaz a condição de Malgrange.

Capítulo 2

Valores de bifurcação no plano real

Neste capítulo, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial.

No Capítulo 1, apresentamos a definição do conjunto de valores de bifurcação de f , que denotamos por Λ_f , veja Definição 1.8. Apresentamos a prova de que se t_0 é um valor regular de f que satisfaz a condição de Parusiński, veja Definição 1.13, então f é uma fibração topológica local em t_0 (Teorema 1.15). Na seção 1.2.3, apresentamos a prova de que se $t_0 \in \overline{f(\mathbb{R}^2)}$ é um valor regular e o expoente de Kurdyka-Lojasiewicz para t_0 é menor que 1, então f é uma fibração topológica local em t_0 (Teorema 1.19).

Para provar estes resultados foram usados fluxos de campos vetoriais. Porém, o Exemplo 1.20 mostra que as condições destes teoremas não caracterizam o conjunto Λ_f .

O principal objetivo deste capítulo é apresentar o Teorema de Tibăr e Zaharia provado em [16, Theorem 2.5], veja Teorema 2.10. Este resultado se diferencia dos outros teoremas mencionados anteriormente, pois ele fornece uma caracterização exata do conjunto de bifurcação.

O teorema de Tibar e Zaharia depende de condições Geométricas/Topológicas das fibras de f . Em particular, este teorema prova que um valor regular t_0 de f não é um valor de bifurcação se, e somente se, existe um aberto U de t_0 tal que a Característica de Euler é constante para todo $t \in U$ e nenhuma componente conexa da fibra $f^{-1}(t)$ desaparece no infinito quando $t \rightarrow t_0$, veja Teorema 2.12.

Este capítulo está dividido em três seções. Na primeira seção, consideramos uma família de componentes conexas $Y_t^\Gamma = f^{-1}(t) \cap \Gamma$, onde Γ é uma componente conexa de $f^{-1}(]a, b[)$, $]a, b[\subset f(\mathbb{R}^2) \setminus \Lambda_f$ e $t \in]a, b[$. Posteriormente apresentamos três definições que nos permite saber quando $\lim_{t \rightarrow a} Y_t^\Gamma$ existe, não existe, ou existe e é único. Na segunda seção, apresentamos o Teorema de Tibăr e Zaharia com sua prova. Na última seção exibimos exemplos que mostram que as condições de cada item deste teorema são necessárias.

2.1 Limite de componentes conexas

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Denotamos por $X_t := f^{-1}(t)$ a fibra de f sobre $t \in \mathbb{R}$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, X_t é um conjunto algébrico. Temos também $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t$.

Nesta seção, apresentamos três definições e alguns resultados relevantes. Estas definições e resultados serão utilizados no desenvolvimento da prova do teorema principal deste capítulo (Teorema 2.10) e para a compreensão do mesmo.

As definições e os resultados apresentados nesta seção são de [16, página 385]. Começamos com a seguinte definição:

Definição 2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Considere $]a, b[\subset \mathbb{R}$ um intervalo de $\mathbb{R}$ com $]a, b[\subset f(\mathbb{R}^2) \setminus \Lambda_f$. Denotamos por Γ uma componente conexa de $f^{-1}(]a, b[)$ e por $Y_t^\Gamma = X_t \cap \Gamma$ com $t \in]a, b[$.*

Dizemos que $p \in \mathbb{R}^2$ é um ponto limite da família $\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a, b[}$ com $t \rightarrow a$, se existe uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} f(p_k) = a$. Analogamente, dizemos que $p \in \mathbb{R}^2$ é um ponto limite da família $\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a, b[}$ com $t \rightarrow b$, se existe uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} f(p_k) = b$.

Com as definições acima, utilizaremos as seguintes notações:

$$\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid p \text{ é ponto limite da família } \{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a, b[} \text{ com } t \rightarrow a\}.$$

Da mesma forma

$$\lim_{t \rightarrow b, t < b} Y_t^\Gamma = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid p \text{ é ponto limite da família } \{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a, b[} \text{ com } t \rightarrow b\}.$$

Os seguintes dois resultados são consequências da definição anterior.

Proposição 2.2. *Considere $\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a, b[}$ como na Definição 2.1. Para esta família, temos que $\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma \subset f^{-1}(a)$ e $\lim_{t \rightarrow b, t < b} Y_t^\Gamma \subset f^{-1}(b)$.*

Demonstração. Se $\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma = \emptyset$, a prova segue. Assim, suponhamos que $\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma \neq \emptyset$. Seja $p \in \lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma$, então existe uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} f(p_k) = a$ (Definição 2.1). Como f é contínua, segue que $a = \lim_{k \rightarrow \infty} f(p_k) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} p_k\right) = f(p)$, assim $p \in f^{-1}(a)$. Portanto $\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma \subset f^{-1}(a)$. De maneira análoga se mostra que $\lim_{t \rightarrow b, t < b} Y_t^\Gamma \subset f^{-1}(b)$. $\square$

Pela Definição 2.1, temos que $]a, b[\cap \Lambda_f = \emptyset$. Observamos que esta hipótese não foi necessária para a demonstração da Proposição 2.2. No entanto, no próximo resultado, utilizaremos a condição $]a, b[\cap \Lambda_f = \emptyset$.

Proposição 2.3. *Sejam Γ e $\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a, b[}$ como na Definição 2.1. Então Y_t^Γ é não vazio e conexo para todo $t \in]a, b[$.*

Demonstração. Pela Definição 2.1 temos que $f^{-1}(]a, b[) \neq \emptyset$. Temos que $X_t = f^{-1}(t)$ é uma união de componentes conexas e também $f^{-1}(]a, b[)$ é uma união de componentes conexas, sendo que Γ é uma das componentes conexas deste último conjunto. Como $]a, b[\cap \Lambda_f = \emptyset$, temos que a restrição $f : f^{-1}(]a, b[) \rightarrow]a, b[$ é uma fibração topológica local (Definição 1.2) e como $]a, b[$ é contrátil segue que esta restrição de f é uma fibração topológica (Teorema 1.3). Logo, pela definição de fibração, temos que $f^{-1}(]a, b[)$ é homeomorfo à $X_t \times]a, b[$, para qualquer $t \in]a, b[$. Em particular, X_t é não vazio para qualquer $t \in]a, b[$.

Por outro lado, como f é polinomial, em particular semialgébrica, segue por [6, Theorem (2.4.5)] que o número de componentes conexas de X_t e de $f^{-1}(]a, b[)$ são finitos. Como já vimos que $X_t \times]a, b[$ é homeomorfo à $f^{-1}(]a, b[)$, segue que X_t e $f^{-1}(]a, b[)$ possuem o mesmo número de componentes conexas. Além disso, como a restrição $f : f^{-1}(]a, b[) \rightarrow]a, b[$ é uma fibração topológica, segue que cada componente conexa de $f^{-1}(]a, b[)$ possui uma, e somente uma, componente conexa de X_t . Isto mostra em particular que Y_t^Γ é conexo, o que termina a prova. $\square$

A seguinte proposição é uma consequência da Definição 2.1. Em particular, o próximo resultado mostra que $\lim_{t \rightarrow a, t > a} \{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a, b[}$ pode ser vazio, ter somente uma componente ou mais de uma componente conexa. O caso onde este conjunto é vazio, será caracterizado e exemplificado na seção 2.1.1. O caso onde este conjunto tem mais de uma componente, será discutido e exemplificado na seção 2.1.2. Estes casos também serão utilizados no Teorema 2.10 que fornece uma caracterização dos valores de bifurcação.

Proposição 2.4. Considere $\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a, b[}$ como na Definição 2.1. Suponha que $a \in f(\mathbb{R}^2)$ é um valor regular de f , então:

- i-) O limite $\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma$ é vazio ou é uma união de componentes conexas de $f^{-1}(a)$.
- ii-) Seja $\{Y_t^{\Gamma'}\}_{t \in]a, b[}$ uma família de curvas como na Definição 2.1 correspondendo a alguma componente conexa Γ' de $f^{-1}(]a, b[)$. Se

$$\left(\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma \right) \cap \left(\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^{\Gamma'} \right) \neq \emptyset.$$

Então $\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a, b[} = \{Y_t^{\Gamma'}\}_{t \in]a, b[}$.

Demonstração. i-) Seja $A = \lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma$. Suponhamos que $A \neq \emptyset$, então provaremos que A é um conjunto aberto e fechado de $f^{-1}(a)$. Mostraremos inicialmente que A é um conjunto fechado de $f^{-1}(a)$. Seja $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em A tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$. Pela Definição 2.1, temos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $\{z_l^k\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$ tal que $\lim_{l \rightarrow \infty} z_l^k = p_k$ e $\lim_{l \rightarrow \infty} f(z_l^k) = a$. Como $p_k \rightarrow p$ e $z_l^k \rightarrow p_k$, então, para todo $m \in \mathbb{N}$, existem $k_m, l_m \in \mathbb{N}$ tais que $|p_{k_m} - p| < \frac{1}{2m}$ e $|z_{l_m}^{k_m} - p_{k_m}| < \frac{1}{2m}$. Logo a sequência $\{z_{l_m}^{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$ converge para o ponto p . De fato, para todo $m \in \mathbb{N}$, segue que

$$0 \leq |z_{l_m}^{k_m} - p| \leq |z_{l_m}^{k_m} - p_{k_m}| + |p_{k_m} - p| < \frac{1}{m}. \quad (2.1)$$

Assim $z_{l_m}^{k_m} \rightarrow p$ quando $m \rightarrow \infty$. Por outro lado, como f é contínua e $f(p_k) = a$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(z_{l_m}^{k_m}) = f\left(\lim_{m \rightarrow \infty} z_{l_m}^{k_m}\right) = f(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(p_k) = a.$$

Portanto $p \in A$. Consequentemente, A é um conjunto fechado de $f^{-1}(a)$.

Agora provaremos que A é um conjunto aberto de $f^{-1}(a)$. Seja p um ponto arbitrário de A , então $p \in f^{-1}(a)$ (Proposição 2.2). Como a é um valor regular de f , podemos encontrar um conjunto aberto W de $f^{-1}(a)$, tal que $p \in W$ e $W \subset A$. De fato, pelo Teorema da Forma Local das Submersões, temos que existem parametrizações (ou seja, difeomorfismos) $\phi_1 : I \times J \rightarrow \phi_1(I \times J)$ e $\phi_2 : I \rightarrow \phi_2(I)$, com $I, J \subset \mathbb{R}$ abertos, $p \in \phi_1(I \times J)$, $a \in \phi_2(I)$ e tais que

$$(\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1)(x_1, x_2) = x_1, \forall (x_1, x_2) \in I \times J.$$

Como ϕ_1 é um difeomorfismo, segue que, $\phi_1(I \times J)$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, logo $W = \phi_1(I \times J) \cap f^{-1}(a)$ é um conjunto aberto de $f^{-1}(a)$, que contém o ponto p , além disso $W \subset A$.

De fato, sejam $\phi_2^{-1}(a) = t$, $\phi_1^{-1}(p) = (t, z)$ e $\bar{p}$ um ponto arbitrário de W , com $\bar{p} \neq p$.

Como $p \in A$, existe uma sequência $(x_k, y_k) \in \Gamma$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = p$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} f((x_k, y_k)) = a$ (Definição 2.1), então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$, $(x_k, y_k) \in \Gamma \cap \phi_1(I \times J)$.

Assim, para cada $k \geq k_0$, $\phi_1^{-1}((x_k, y_k)) = (h_k, g_k) \in I \times J$, portanto $\lim_{k \rightarrow \infty} (h_k, g_k) = (t, z)$, e $(\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1)((h_k, g_k)) = h_k$. Por outro lado, pela construção de W , temos que $\bar{p} = f^{-1}(a)$ e $\phi_1^{-1}(\bar{p}) = (t, \bar{z}) \neq (t, z)$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = t$ e $(\phi_1^{-1} \circ f^{-1} \circ \phi_2)(h_k) = \{h_k\} \times J$, então para $k \geq k_0$, podemos encontrar um ponto $\bar{g}_k \in J$, tal que $(h_k, \bar{g}_k) \rightarrow (t, \bar{z})$ e $\phi_1((h_k, \bar{g}_k)) = (x_k, \bar{y}_k) \in \Gamma \cap \phi_1(I \times J)$.

Consequentemente $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_1((h_k, \bar{g}_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, \bar{y}_k) = \bar{p}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f((x_k, \bar{y}_k)) = a$.

Portanto $\bar{p} \in A$. Desta maneira obtemos que A é um conjunto aberto de $f^{-1}(a)$. Finalmente, pelo fato de A ser um conjunto aberto e fechado em $f^{-1}(a)$ segue que A é uma união de componentes conexas de $f^{-1}(a)$, o que termina a prova do item i).

ii-) Por hipótese, temos que existe um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $p \in \left(\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma \right) \cap \left(\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^{\Gamma'} \right)$. Então, existem sequências $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$ e $\{p'_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Gamma'$, tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \lim_{k \rightarrow \infty} p'_k = p$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(p_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(p'_k) = a$ e $f(p_k) > a$ e $f(p'_k) > a$ (Definição 2.1). Como a é um valor regular, segue pelo Teorema da Forma Local das Submersões que para k grande suficiente temos que $p_k, p'_k \in \Gamma \cap \Gamma'$, que em particular mostra que $\Gamma \cap \Gamma' \neq \emptyset$. Como Γ e Γ' são componentes conexas, temos $\Gamma = \Gamma'$.

Portanto, para cada $t \in]a, b[$ segue que

$$Y_t^\Gamma = X_t \cap \Gamma = X_t \cap \Gamma' = Y_t^{\Gamma'}.$$

Consequentemente $\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a, b[} = \{Y_t^{\Gamma'}\}_{t \in]a, b[}$, o que termina a prova do lema. $\square$

2.1.1 Desaparecimento no infinito de uma família de componentes conexas

Pela Proposição 2.4 temos que $\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma$ pode ser igual a vazio. Nesta seção, apresentamos uma definição formal, uma caracterização e um exemplo para este caso.

A próxima definição faz parte das condições do teorema principal do capítulo (Teorema 2.10).

Definição 2.5. Considere $\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a, b[}$ como na Definição 2.1. Dizemos que esta família, desaparece no infinito, com $t \rightarrow a$ e $t > a$, se $\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma = \emptyset$.

Analogamente, dizemos que a família $\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a, b[}$ desaparece no infinito, com $t \rightarrow b$ e $t < b$, se $\lim_{t \rightarrow b, t < b} Y_t^\Gamma = \emptyset$.

Uma caracterização da definição anterior é dada pelo seguinte resultado.

Proposição 2.6. Considere $\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a, b[}$ como na Definição 2.1. Temos que $\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma = \emptyset$ se, e somente se,

$$\lim_{t \rightarrow a, t > a} \inf \{\|z\| \mid z \in Y_t^\Gamma\} = \infty.$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponhamos que $\lim_{t \rightarrow a, t > a} \inf \{\|z\| \mid z \in Y_t^\Gamma\} \neq \infty$. Logo, existem $R > 0$ e uma sequência $p_{t_k} \in Y_{t_k}^\Gamma$, com $t_k \in]a, b[$ e $t_k \rightarrow a$, tais que $\|p_{t_k}\| < R$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Logo, a menos de tomar uma subsequência, podemos supor que $p_{t_k} \rightarrow p$ para algum $p \in \mathbb{R}^2$. Pela continuidade de f temos que $p \in f^{-1}(a)$ e portanto $p \in \lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma$. Isto prova que $\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$) Suponhamos que $\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma \neq \emptyset$. Seja $p \in \lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma$, então, existe uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} f(p_k) = a$ (Definição 2.1). Como a função modular é contínua e $p_k \rightarrow p$, segue que, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|p_k\| = \|p\| < \infty$. Assim $\lim_{t \rightarrow a, t > a} \inf \{\|z\| \mid z \in Y_t^\Gamma\} \neq \infty$. $\square$

O exemplo a seguir mostra quando uma família $\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a, b[}$ como na Definição 2.1, desaparece no infinito. Veja também os exemplos 2.3.1 e 2.3.3.

Exemplo 2.7. Considere a função: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + (xy - 1)^2$. Como a função f é estritamente positiva, temos que para cada $t \in]0, 1[$, a fibra X_t é dado por:

$$X_t = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{\pm\sqrt{t-x^2}}{x} + \frac{1}{x}, \text{ com } -\sqrt{t} \leq x \leq \sqrt{t} \right\}.$$

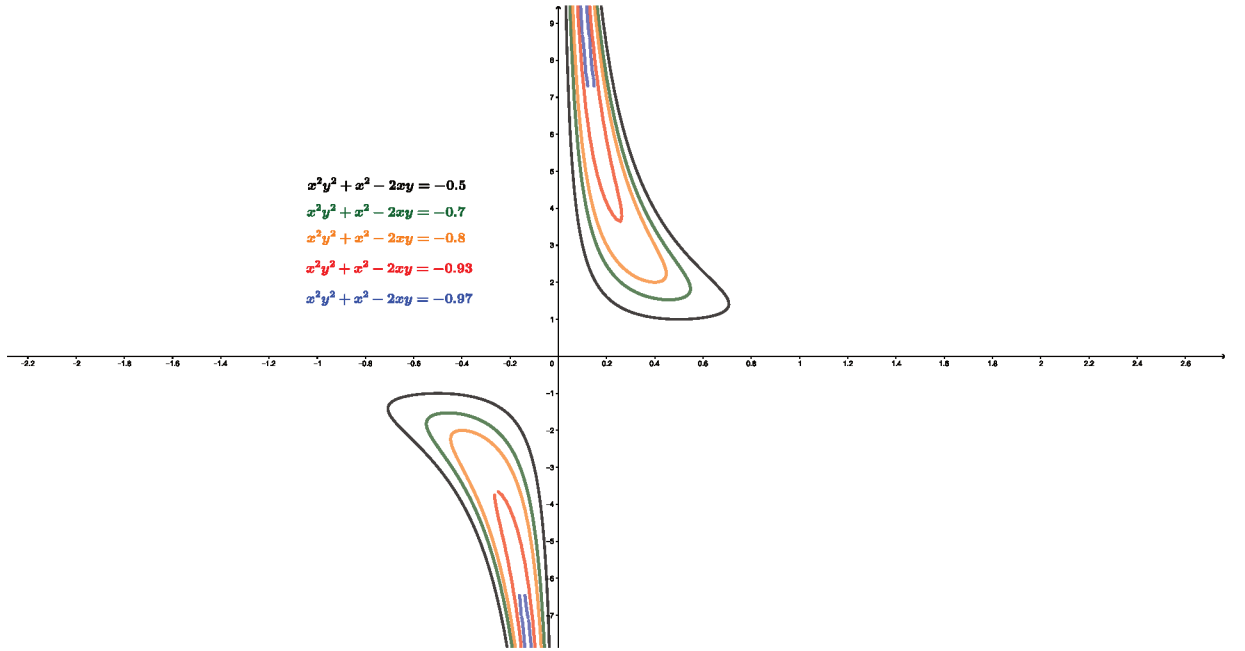
Temos que a fibra X_t é a união de duas componentes conexas separadas pela reta $x = 0$. Consequentemente existem duas famílias de componentes conexas definidas como segue:

$$\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]0, 1[} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{\pm\sqrt{t-x^2}}{x} + \frac{1}{x} \text{ e } 0 < x \leq \sqrt{t} \right\}.$$

$$\{Y_t^{\Gamma'}\}_{t \in]0, 1[} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{\pm\sqrt{t-x^2}}{x} + \frac{1}{x} \text{ e } -\sqrt{t} \leq x < 0 \right\}.$$

A família $\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]0, 1[}$ desaparece no infinito, ou seja, $\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} Y_t^\Gamma = \emptyset$. De fato, suponha que $p \in \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} Y_t^\Gamma$, então existe uma sequência $p_k \in \Gamma$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} f(p_k) = 0$ (Definição 2.1). Pela continuidade de f temos $f(p) = 0$. Isto contradiz o fato de que f é estritamente maior que zero. Analogamente, temos que a família $\{Y_t^{\Gamma'}\}_{t \in]0, 1[}$ desaparece no infinito.

A seguir, apresentamos um gráfico das fibras de f que ilustram o seu comportamento para alguns valores de t . Mais especificamente, $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{7}{100}$ e $\frac{3}{100}$.



2.1.2 Divisão de uma família de componentes conexas

Pela Proposição 2.4 temos que, $\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma$ pode ter mais de uma componente conexa. Nesta seção, apresentamos uma definição formal e um exemplo para este caso.

A próxima definição faz parte das condições do teorema principal deste capítulo (Teorema 2.10).

Definição 2.8. Considere $\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a, b[}$ como na Definição 2.1. Dizemos que esta família se divide quando $t \rightarrow a$ e $t > a$, se o limite $\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t^\Gamma$ contém pelo menos duas componentes conexas de $f^{-1}(a)$.

Analogamente, dizemos que a família $\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a,b[}$ se divide quando $t \rightarrow b$ e $t < b$, se o limite $\lim_{t \rightarrow b, t < b} Y_t^\Gamma$ contém pelo menos duas componentes conexas de $f^{-1}(b)$.

O exemplo a seguir mostra quando uma família $\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]a,b[}$ como na Definição 2.1, se divide. Veja também o Exemplo 2.3.1.

Exemplo 2.9. Considere a seguinte função: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x - x^2y$. Para esta função, a fibra X_t , com $t \in]0, 1[$ é o conjunto dado por:

$$X_t = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{t - x}{x^2} \right\}.$$

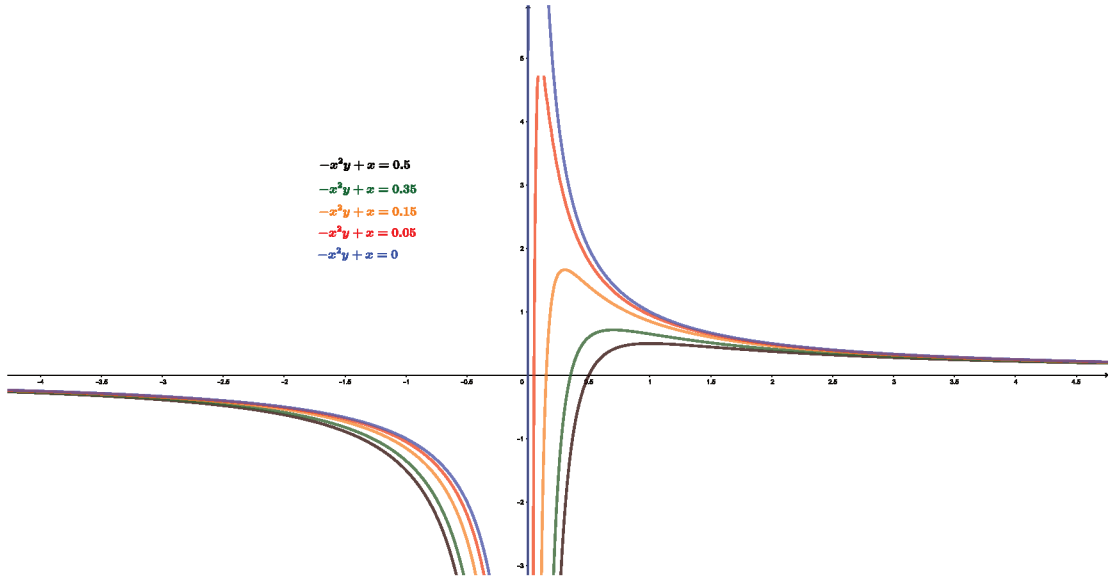
Portanto, para $t \in]0, 1[$, X_t é a reunião de duas componentes conexas. Consequentemente, existem duas famílias de componentes conexas definidas a seguir.

$$\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]0, 1[} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{t - x}{x^2} \text{ e } x > 0 \right\},$$

$$\{Y_t^{\Gamma'}\}_{t \in]0, 1[} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{t - x}{x^2} \text{ e } x < 0 \right\}.$$

Porém, quando $t = 0$, $X_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{x}\}$. Ou seja, quando $t \rightarrow 0$, a família $\{Y_t^\Gamma\}_{t \in]0, 1[}$ se divide em duas componentes geradas pelas equações $x = 0$ e $y = 1/x$, com $x > 0$.

A seguir, apresentamos uma ilustração das fibras $f(x, y) = t$, com $t = \frac{1}{2}, \frac{35}{100}, \frac{15}{100}, \frac{5}{100}$ e 0.



2.2 Caracterização valores de bifurcação

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Dizemos que um valor regular $t_0 \in f(\mathbb{R}^2)$ é típico, se $t_0 \notin \Lambda_f$. Nesta seção apresentamos [16, Theorem 2.5] que, nesta dissertação será Teorema 2.10.

Em particular, neste resultado, Tibăr e Zaharia provaram que, se t_0 é uma valor regular de f , temos que $t_0 \notin \Lambda_f$, se, e somente se, existe $\epsilon > 0$ tal que os Números de Betti da fibra X_t são constantes para todo $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ e não existe uma componente conexa de X_t que desaparece no infinito, quando $t \rightarrow t_0$ (veja Definição 2.5). Ou equivalentemente, t_0 é típico se, e somente se, existe $\epsilon > 0$ tal que os Números de Betti da fibra X_t são constantes para todo

$t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ e não existe uma componente conexa de X_t que se divide, quando $t \rightarrow t_0$ (veja Definição 2.8). Como já mencionado anteriormente, este resultado, diferentemente dos Teoremas 1.15 e 1.19, fornece uma caracterização completa do conjunto de bifurcação de uma aplicação polinomial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Na seção 2.3, apresentamos exemplos de [16] que mostram que todas as hipóteses do Teorema 2.10 são essenciais, isto é, as condições de cada item do teorema não podem ser trocadas ou retiradas.

Como antes, denotamos por $X_t := f^{-1}(t)$ a fibra de f em $t \in \mathbb{R}$. Como $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial, temos que o conjunto dos valores críticos $K_0(f)$ é finito, veja por exemplo [10, Corollary 2.8]. Assim, para cada valor regular t_0 de f , existe um intervalo contendo t_0 que não tem valores críticos de f . Pelo Teorema do Valor Regular, se t está neste intervalo, então $f^{-1}(t)$ é uma variedade suave de dimensão 1.

Portanto, para cada valor regular $t_0 \in \mathbb{R}$ de f , temos que existe um intervalo de t_0 , tal que cada fibra $X_t = f^{-1}(t)$ neste intervalo é uma união finita de circunferências ou retas, a menos de homeomorfismos. O fato de possuir finitas componentes conexas, segue pelo fato de que f é polinomial, veja por exemplo [6, Proposition 2.2.7 e Theorem 2.4.5].

Dado um valor regular t de f e A uma componente conexa de $f^{-1}(t)$. Dizemos que A é uma componente circular, se A é um conjunto homeomorfo a S^1 , onde $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$. Dizemos que A é chamado de componente linha, se A é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Dado um valor regular t de f , definimos:

- i) o Número de Betti $b_0(X_t, f)$ como sendo a quantidade de componentes conexas de X_t ;
- ii) o Número de Betti $b_1(X_t, f)$ como sendo a quantidade de componentes conexas circulares de X_t .

Assim, a Característica de Euler da fibra X_t , que será denotada por $\chi(X_t)$, é dada por:

$$\chi(X_t) := b_0(X_t, f) - b_1(X_t, f). \quad (2.2)$$

Como Λ_f é um conjunto finito, segue que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, os intervalos $I =]t_0, t_0 + \epsilon[$, $J =]t_0 - \epsilon, t_0[\subset f(\mathbb{R}^2)$ contém somente valores típicos de f . Portanto as seguintes restrições:

$$f : f^{-1}(I) \rightarrow I \text{ e } f : f^{-1}(J) \rightarrow J \quad (2.3)$$

são fibrações topológicas C^∞ . Consequentemente, se restringirmos as funções $f : f^{-1}(I) \rightarrow I$ e $f : f^{-1}(J) \rightarrow J$ a qualquer componente conexa Γ de $f^{-1}(I)$ ou de Γ' de $f^{-1}(J)$, então as restrições continuam sendo fibrações topológicas.

Com as considerações e definições anteriores, formulamos as seguintes condições:

- (B) Os Números de Betti da fibra X_t são constantes em algum intervalo aberto contendo t_0 .
- (E) A Característica de Euler $\chi(X_t)$ é constante em algum intervalo aberto contendo t_0 .
- (nV) Não existe uma componente conexa de X_t que desaparece no infinito quando t tende a t_0 , $t < t_0$ ou $t > t_0$.
- (nS) Não existe uma componente conexa de X_t a qual se divide quando t tende a t_0 , $t > t_0$ ou $t < t_0$.

Com as definições acima, apresentamos o teorema principal de Tibar e Zaharia ([16, Theorem 2.5]):

Teorema 2.10. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Seja t_0 um valor regular de f . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) O valor t_0 é um valor típico de f .
- ii) As condições (B) e (nV) são satisfeitas.
- iii) As condições (E) e (nV) são satisfeitas.
- iv) As condições (B) e (nS) são satisfeitas.

Demonstração. Começamos com a seguinte implicação:

i) $\Rightarrow$ ii):

Por hipótese temos que t_0 é um valor típico de f , então existe $\epsilon > 0$ tal que a restrição $f : f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) \rightarrow]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ é uma fibração topológica local (Definição 1.2). Como $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ é contrátil, segue que esta restrição de f é uma fibração topológica (Teorema 1.3). Logo, pela definição de fibração temos que $f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$ é homeomorfo a $X_t \times]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$, para todo $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. Como os Números de Betti são um invariante topológico, segue que os Números de Betti da fibra X_t e os Números de Betti do conjunto $f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$ são iguais para todo $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. Logo, a condição (B) é satisfeita.

Mostraremos a seguir que não existe uma componente conexa de X_t que desaparece no infinito quando $t \rightarrow t_0$, com $t \in]t_0, t_0 + \epsilon[$ (a prova para $t \rightarrow t_0$, com $t \in]t_0 - \epsilon, t_0[$ é análoga). Seja x_0 um ponto arbitrário de X_{t_0} e consideremos a família $\{Y_t\}_{t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[}^\Gamma$ como na Definição 2.1. Seja $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset]t_0, t_0 + \epsilon[$ uma sequência tal que $t_k \rightarrow t_0$.

Pela discussão do paragrafo anterior, temos que existe um homeomorfismo $h : X_{t_0} \times]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\rightarrow f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$. Agora, definamos a sequência $\bar{p}_{t_k} = (x_0, t_k) \in (X_{t_0} \times]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) \cap (\Gamma \times]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$.

Logo, $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{p}_{t_k} = (x_0, t_0)$. Então para cada $k \in \mathbb{N}$, $h(\bar{p}_{t_k}) = p_{t_k} \in Y_{t_k}$. Assim

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{t_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} h(\bar{p}_{t_k}) = h((x_0, t_0)) = p_0 \in Y_{t_0}.$$

Como f é uma função contínua, segue que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(p_{t_k}) = t_0$, conseqüentemente $\lim_{t \rightarrow t_0, t > t_0} Y_t^\Gamma \neq \emptyset$.

Portanto a condição (nV) é satisfeita, o que termina a prova.

ii) $\Rightarrow$ iii):

Por hipótese temos que existe $\epsilon > 0$, tal que os Números de Betti $b_0(X_t, f)$ e $b_1(X_t, f)$ da fibra X_t são constantes para todo $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. Logo, a Característica de Euler da fibra X_t , que é definida por $\chi(X_t) = b_0(X_t, f) - b_1(X_t, f)$, é constante para todo $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. Portanto, a condição (E) é satisfeita, o que termina a prova.

iii) $\Rightarrow$ ii):

Mostraremos que as condições (nV) e (E) implicam a condição (nS). De fato, a condição (nV) implica que nenhuma componente linha da fibra X_t desaparece quando t tende a t_0 . A condição (E) significa que existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que o número de componentes linhas de X_t é constante para todo $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. Assim (nS) é satisfeita. De fato, caso contrário, teremos que $\chi(X_{t_0}) > \chi(X_t)$ para todo $t \in]t_0 - \epsilon, t_0[\cup]t_0, t_0 + \epsilon[$, o que daria uma contradição.

As condições (nS) e (nV) mostram que o número de componentes conexas de X_t é constante para todo $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. Ambas condições com a condição (E) implicam que os Números de Betti $b_0(X_t, f)$ e $b_1(X_t, f)$ são constantes para todo $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$, logo a condição (B) é satisfeita, o que termina a prova.

ii) $\Rightarrow$ i):

Sejam $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e D uma componente conexa de $f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$. Mostraremos inicialmente que, sob a hipótese de (nV), D contém pelo menos uma componente conexa de X_{t_0} . Podemos assumir sem perda de generalidade que $]t_0, t_0 + \epsilon[\subset f(D)$.

Seja $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset]t_0, t_0 + \epsilon[$ uma sequência tal que $t_k \rightarrow t_0$. Como a condição (nV) é assumida, então podemos tomar uma sequência limitada de pontos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, onde $p_k \in Y_{t_k}^D = X_{t_k} \cap D$.

Pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass, esta sequência possui uma subsequência $\{p_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^2$. Como $t_{k_n} \rightarrow t_0$, então $p_0 \in X_{t_0}$. Por outro lado, temos que $\{p_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ e D é fechada em $f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$, logo $p_0 \in D$. Assim

$$\lim_{t_k \rightarrow t_0, t_k > t_0} Y_{t_k}^D \neq \emptyset \text{ e } \lim_{t_k \rightarrow t_0, t_k > t_0} Y_{t_k}^D \subset D.$$

Logo, pela Proposição 2.4 i) concluímos que D contém pelo menos uma componente conexa de X_{t_0} .

Agora, provaremos que a restrição $f|_D : D \cap f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) \rightarrow]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ é uma fibração topológica C^∞ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Suponhamos inicialmente que D contém uma componente circular K de X_{t_0} , $K \simeq S^1$. Então existe um aberto tubular T de K tal que $X_{t_0} \cap T = K$. De fato, como f é uma função polinomial, em particular semialgébrica, segue por [6, Theorem (2.4.5)] que o número de componentes conexas da fibra X_{t_0} é finito. Sejam $K_1, \dots, K_n$ todas as componentes de X_{t_0} diferentes de K . Seja $P_i = d(K, K_i)$, onde $d(K, K_i)$ é a distância de K até K_i , com $i = 1, \dots, n$. Assim para cada $x \in K$ tomamos a bola $B(x, P/2)$ onde $P = \min\{P_i\}$. Logo o aberto tubular T de K tal que $X_{t_0} \cap T = K$, será dado por $T = \bigcup_{x \in K} B(x, P/2)$.

Por outro lado, como K é compacto segue que $X_{t_0+t} \cap T$ é compacto para todo $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$. Portanto a restrição $f|_T : T \cap f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) \rightarrow]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ é uma submersão própria. Pelo Lema de Ehresmann (Lema 1.9), segue que esta restrição é uma fibração topológica local C^∞ . Como $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ é contrátil, temos que $f|_T : T \cap f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) \rightarrow]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ é uma fibração topológica (Teorema 1.3).

Além disso, o conjunto $T \cap f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$ coincide com a componente conexa D . De fato, como f é uma função semialgébrica, segue por [6, Theorem (2.4.5)] que o número de componentes conexas de $f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$ é finito. Logo $f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$ é um conjunto aberto e fechado. Assim $T \cap f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$ é um conjunto aberto de $f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$. Por outro lado, como a restrição $f|_T : T \cap f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) \rightarrow]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ é uma aplicação própria, então $T \cap f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$ é um conjunto compacto. Consequentemente, fechado em $f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$. Portanto $T \cap f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$ é a união de componentes conexas de $f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$. Como já vimos que toda componente conexa de $f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$ contém pelo menos uma componente conexa de X_{t_0} , então pela construção de T , obtemos que $T \cap f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) = D$.

Suponhamos finalmente que D contém uma componente linha L de X_{t_0} , $L \cong \mathbb{R}$. Por hipótese, temos que existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que os Números de Betti da fibra X_t são constantes para todo $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$. Portanto $\sum_{\Gamma} b_0(D \cap X_t)$ sobre todas as componentes conexas Γ de $f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$ é constante. Isto implica que o número $b_0(D \cap X_t)$ não pode aumentar quando $t \rightarrow t_0$. Por outro lado, o número $b_0(D \cap X_t)$ não pode diminuir quando $t \rightarrow t_0$, já que condição (nV) é satisfeita.

Assim $b_0(D \cap X_t)$ é constante para todo $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$. O Número de Betti $m = b_0(D \cap X_t)$ é igual a 1 para todo $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$. De fato, os conjuntos $D \cap f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0[)$ e $D \cap f^{-1}(]t_0, t_0 + \epsilon[)$ contém exatamente m componentes conexas. De fato, pelas considerações dadas no início desta seção, sabemos que os conjuntos $[t_0 - \epsilon, t_0[$ e $]t_0, t_0 + \epsilon]$ contém unicamente valores típicos de f . Assim, as restrições $f|_D : D \cap f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0[) \rightarrow]t_0 - \epsilon, t_0[$, $f|_D : D \cap f^{-1}(]t_0, t_0 + \epsilon[) \rightarrow]t_0, t_0 + \epsilon[$ são fibrações topológicas. Então pela Definição 2.1, isto fornece m famílias $\{Y'_t\}_t$ do lado positivo e outras m famílias $\{Y''_t\}_t$ do lado negativo. Pela discussão anterior e pela Proposição 2.4 i) o limite de tais famílias deve ser uma componente conexa de X_{t_0} . Assim, nossa componente linha L de X_{t_0} é o limite de uma família lateral positiva e de uma família lateral negativa.

Seja V a união dessas duas famílias, com seu limite L . Então V é uma componente conexa de $f^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$, já que V é um conjunto fechado e separado das outras famílias e seus

limites (Proposição 2.4 ii)). Como $L \subset D$ e $L \subset V$, segue que V coincide com D , logo $m = b_0(D \cap X_t) = 1$ para todo $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$.

Portanto $X_t \simeq \mathbb{R}$ para todo $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$. Então, pelo Teorema 1.11 temos que a restrição $f|_D : D \cap f^{-1}([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]) \rightarrow [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ é fibração topológica C^∞ , o que termina a prova.

i) $\Rightarrow$ iv):

Sabemos que i) implica ii) e iii), o que mostra que (B), (E) e (nV) são verificados. Na prova de iii) $\Rightarrow$ ii), mostramos que (E) e (nV) implicam (nS). Portanto, a prova segue.

iv) $\Rightarrow$ i):

É análoga à demonstração ii) $\Rightarrow$ i). □

Observação 2.11. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como no Exemplo 2.7 da seção anterior. Como já discutido, temos que a condição (nV) não é satisfeita quando $t \rightarrow 0$, $t > 0$. Logo, pelo Teorema 2.10 temos que $0 \in \Lambda_f$.*

No Exemplo 2.9 da seção anterior, temos que a condição (nS) não é satisfeita quando $t \rightarrow 0$, $t > 0$. Logo, pelo Teorema 2.10 temos que $0 \in \Lambda_f$.

O Teorema 2.10 prova o seguinte resultado.

Teorema 2.12. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial e t_0 um valor regular de f . O valor $t_0 \in \mathbb{R}$ é um valor típico se, e somente se, a Característica de Euler é constante quando t varia dentro de algum aberto de t_0 e não há componente de X_t que desaparece no infinito quando t tende a t_0 , $t > t_0$ ou $t < t_0$.*

No próximo capítulo apresentamos o teorema da caracterização do conjunto de bifurcação no plano complexo (Teorema 3.4). Em particular, este resultado prova que se $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função polinomial e t_0 é um valor regular de f , temos que $t_0 \notin \Lambda_f$ se, e somente se, a Característica de Euler da fibra $f^{-1}(t)$ é constante, para todo t próximo de t_0 . Em particular, ambos resultados mostram que o caso complexo difere do caso real pois no caso complexo não precisamos da hipótese (nV) do Teorema 2.12.

2.3 Exemplos

Nesta seção, apresentamos os exemplos dados em [16, Section 3]. Os exemplos 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3 mostram que ambas condições de cada um dos itens do Teorema 2.10 são necessárias.

Inicialmente consideramos um polinômio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ descrito da seguinte maneira:

$$f(x, y) = \alpha(y)x^2 + 2\beta(y)x + \gamma(y), \quad (2.4)$$

onde $\alpha(y)$, $\beta(y)$ e $\gamma(y)$ são polinômios na variável y .

Consideraremos algumas nomenclaturas e realizaremos algumas contas relacionadas à $f(x, y)$ que nos permitam entender o comportamento das fibras $f(x, y) = t$, para um valor regular t suficientemente próximo de 0. Isto será utilizado com o Teorema 2.10 para determinar se $0 \in \Lambda_f$.

Posteriormente, utilizaremos estas contas nos exemplos 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3, já que os exemplos apresentados nesta seção são casos particulares da função f .

Seja $A := \{y \in \mathbb{R} \mid \alpha(y) = 0\}$. Para qualquer polinômio f como em (2.4), suponhamos que para $\epsilon > 0$ fixo, o intervalo $I =]-\epsilon, \epsilon[$ contém unicamente valores regulares de f .

Suponhamos que α , β e γ , conseqüentemente f , verificam a seguinte condição:

$$\beta(y) = 0 \text{ e } \|\gamma(y)\| \geq \epsilon, \forall y \in A. \quad (2.5)$$

Logo, com as condições acima, para qualquer $t \in I$, a equação $f(x, y) = t$ na variável x tem duas soluções complexas (podendo ser números reais inclusive) que dependem de y e de t . Denotamos por $x_1(y, t)$ e $x_2(y, t)$ estas soluções. O discriminante desta equação é dado por $\Delta(y, t) := (\beta(y)^2 - \alpha(y)\gamma(y) + t\alpha(y))$. Definimos (para $t \in I$):

$$\begin{aligned} D &:= \{(y, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \Delta(y, t) \geq 0\}, & K &:= \{(y, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \Delta(y, t) = 0\}, \\ L(s) &:= \{(y, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = s\}, & H &:= \{(y, t) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in A\}. \end{aligned}$$

Desta forma, temos o seguinte resultado imediato:

Proposição 2.13. *As soluções $x_1(y, t)$ e $x_2(y, t)$ da equação $f(x, y) = t$ são números reais se, e somente se, $(y, t) \in D$.*

As raízes x_1 e x_2 possuem o seguinte comportamento assintótico:

Proposição 2.14. *Seja $y \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. Suponha que $y \rightarrow p$, com $p \in A$. Então $\|x_1(y, t)\| \rightarrow \infty$ e $\|x_2(y, t)\| \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Como $p \in A$ e $y \rightarrow p$, segue pela definição do conjunto A que $\alpha(y) \rightarrow 0$. Pela condição (2.5) temos que $\beta(y) \rightarrow 0$ e $\|\gamma(y)\| \geq \epsilon$.

Logo, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow p} x_1(y, t) &= \lim_{y \rightarrow p} \frac{-\beta(y) + \sqrt{\beta(y)^2 - \alpha(y)\gamma(y) + t\alpha(y)}}{\alpha(y)} \\ &= \lim_{y \rightarrow p} \frac{(\beta(y)^2 - \alpha(y)\gamma(y) + t\alpha(y)) - \beta(y)^2}{\alpha(y)(\beta(y) + \sqrt{\beta(y)^2 - \alpha(y)\gamma(y) + t\alpha(y)})} \\ &= \lim_{y \rightarrow p} \frac{\alpha(y)(t - \gamma(y))}{\alpha(y)(\beta(y) + \sqrt{\beta(y)^2 - \alpha(y)\gamma(y) + t\alpha(y)})} \\ &= \lim_{y \rightarrow p} \frac{t - \gamma(y)}{\beta(y)^2 + \sqrt{\beta(y)^2 - \alpha(y)\gamma(y) + t\alpha(y)}} = \pm\infty \end{aligned}$$

Nas contas acima, da primeira para a segunda linha multiplicamos e dividimos por $\beta(y) + \sqrt{\beta(y)^2 - \alpha(y)\gamma(y) + t\alpha(y)}$.

Fazendo um procedimento análogo para $x_2(y, t)$ temos que $\lim_{y \rightarrow p} x_2(t) = \pm\infty$, o que termina a prova. $\square$

Temos as seguintes inclusões:

Proposição 2.15. *$H \subset K$ e $K \setminus H \subset \partial D$.*

Demonstração. Seja $(y, t) \in H$. Pela definição de H , temos que $y \in A$. Por (2.5), segue $\beta(y) = 0$. Portanto $\Delta(y, t) = 0$, o que mostra que $(y, t) \in K$. Agora, a inclusão $K \setminus H \subset \partial D$ segue pelo fato de que $\frac{\Delta(y, t)}{\partial t} = \alpha(y)$ e $\alpha(y) \neq 0$, para todo $y \notin A$. $\square$

Descrevendo a topologia da fibra $f^{-1}(t_0)$:

Mostraremos nesta subsecção que para todo $t_0 \in I$, a topologia da fibra $f^{-1}(t_0)$ pode ser descrita usando as projeções $\pi_1 : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\pi_1(x, y, t) \rightarrow (y, t)$, onde $G = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) = t\}$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\pi_2(y, t) \rightarrow t$.

Para cada $t_0 \in I$, definimos

$$Z(t_0) := D \cap L(t_0). \tag{2.6}$$

Assim, as componentes conexas dos conjuntos $Z(t_0)$ e $Z(t_0) \setminus H$ são segmentos e pontos isolados.

Com estas notações, analisemos os seguintes dois casos sobre os pontos isolados de $Z(t_0)$:

a) Se $p = (y_0, t_0) \in Z(t_0)$ tal que $p \in H$, então $\pi_1^{-1}(p) = \emptyset$.

De fato, pela definição da aplicação π_1 , temos que $\pi_1^{-1}(p) = \{(x, y_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y_0) = t_0\}$. Como $p \in H$, temos $y_0 \in A$, ou seja, $\alpha(y_0) = 0$. Por (2.5), segue que $\beta(y_0) = 0$ e $\|\gamma(p_0)\| \geq \epsilon$. Logo, temos que $\pi_1^{-1}(p) = \{(x, y_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 \mid \gamma(y_0) = t_0\} = \emptyset$, já que $t_0 \in I$.

b) Se $p = (y_0, t_0)$ é ponto isolado de $Z(t_0)$ tal que $p \notin H$, então devemos ter que $\pi_1^{-1}(p)$ é um ponto isolado de $f^{-1}(t_0)$. Portanto, deveria ser um ponto crítico de f , o que contradiz a hipótese sobre o intervalo I .

De fato, suponhamos inicialmente que $w \in \pi_1^{-1}(p)$ não é um ponto isolado de $f^{-1}(t_0)$. Então existe uma sequência de pontos $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset G$, tal que $w_k \rightarrow w$ e $\pi_1(w_k) \in Z(t_0)$. Como a aplicação π_1 é contínua, segue que $\pi_1(w_k) \rightarrow p$. Logo p não é ponto isolado do conjunto $Z(t_0)$, o que é uma contradição.

Agora suponhamos que $w = \pi_1^{-1}(p)$ é ponto regular de f . Como já vimos que w é ponto isolado de $f^{-1}(t_0)$, então existe $\delta > 0$ tal que $B(w, \delta) \cap f^{-1}(t_0) = w$. Como w é ponto regular de f , segue pelo Teorema do Valor Regular que $f^{-1}(t_0)$ é uma variedade de dimensão 1 em algum aberto de w , o que é uma contradição com o fato de w ser isolado. Portanto w é um ponto crítico de f . Mas isto não pode acontecer; pois pela hipótese sobre o intervalo I temos que t_0 é um valor regular de f . Logo $\pi_1^{-1}(p) = \emptyset$.

Os casos a) e b) acima implicam o seguinte fato:

Lema 2.16. *Sejam $t_0 \in I$ e $p = (y_0, t_0) \in Z(t_0)$. Temos*

- a) *Se $p \in H$ então $\pi_1^{-1}(p) = \emptyset$. Em particular, temos que $f(x, y_0) \neq t_0, \forall x \in A$.*
- b) *Se p é um ponto isolado de $Z(t_0)$, então $p \in H$.*

O lema acima, em particular, mostra que as componentes conexas de $Z(t_0) \setminus H$ são todas unidimensionais. O lema acima também mostra que para estudar a topologia da fibra $f^{-1}(t_0)$ basta analisarmos as componentes unidimensionais de $Z(t_0) \setminus H$. A seguir faremos este estudo.

Seja J uma componente conexa de $Z(t_0) \setminus H$, que no caso é unidimensional. Como $Z(t_0) \setminus H$ é semialgébrico, segue que J é homeomorfo a um intervalo, veja por exemplo [6, Proposition 2.1.7].

Seja $\bar{J}$ o fecho de J em $[-\infty, \infty] \times \mathbb{R}$. Definimos:

Definição 2.17. *Definimos por $n(J)$ como sendo o número de pontos finais de $\bar{J}$ que estão contidos em $K \setminus H$. Lembramos que $K \setminus H \subset \partial D$ pela Proposição 2.15.*

Se $(y, t_0) \in J \setminus \partial J$, então $\pi_1^{-1}(y, t_0)$ são dois pontos. Agora, assumamos que $(y, t_0) \in J \setminus \partial J$ tende a um ponto final Q de J . Então temos as seguintes três possibilidades:

- a) *Se $Q \in K \setminus H$ então os dois pontos em $\pi_1^{-1}(y, t_0)$ tendem ao único ponto $\pi_1^{-1}(Q)$.*
- b) *Se $Q \in H$ então os dois pontos em $\pi_1^{-1}(y, t_0)$ tendem a infinito porque suas coordenadas em x serão ilimitadas (Proposição 2.14).*
- c) *Se $Q = (\pm\infty, t_0)$ então os dois pontos distintos em $\pi_1^{-1}(y, t_0)$ tendem a infinito porque suas coordenadas em y serão ilimitadas.*

Isto implica e justifica o seguinte fato:

Lema 2.18. i-) *Se $n(J) = 2$ então $\pi_1^{-1}(\bar{J})$ é difeomorfo a uma circunferência.*

ii-) Se $n(J) = 1$ então $\pi_1^{-1}(\bar{J})$ é difeomorfo a uma reta.

iii-) Se $n(J) = 0$ então $\pi_1^{-1}(\bar{J})$ é difeomorfo a uma união disjunta de duas retas.

Portanto para $t \in I$ e f com as propriedades acima, podemos entender a topologia da fibra $f^{-1}(t)$ através de D, K e H . Além disso, com o uso do Teorema 2.10, podemos dizer se 0 é um valor típico de f ou não. As construções e resultados acima serão utilizados nos próximos três exemplos.

2.3.1 Exemplo 1

Apresentamos nesta seção um exemplo que satisfaz as condições (B) e (E), mas que não satisfaz as condições (nV) e (nS) em 0. Logo, $0 \in \Lambda_f$.

Considere o polinômio

$$f(x, y) = x^2 y^3 (y^2 - 25)^2 + 2xy(y^2 - 25)(y + 25) - (y^4 + y^3 - 50y^2 - 51y + 575).$$

Temos $A = \{y \in \mathbb{R} \mid y^3(y^2 - 25)^2 = 0\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y = \pm 5 \text{ e } y = 0\}$. Temos $\beta(y) = y(y^2 - 25)(y + 25)$ e $\gamma(y) = -(y^4 + y^3 - 50y^2 - 51y + 575)$. Logo, se $y \in A$ então $\beta(y) = 0$ e $\|\gamma(y)\| \geq 80$. Portanto, condição (2.5) é satisfeita.

Antes de descrevermos o conjunto D , descrevemos o conjunto $K \setminus H$ como segue:

Conjunto $K \setminus H$

O conjunto $K \setminus H$ contém o gráfico da função $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(y) = \frac{-(y^2 - 25)^2(y + 1)}{y}.$$

De fato, o determinante $\Delta(y, t)$ da equação $f(x, y) = t$ na variável x é dado por:

$$\Delta(y, t) = y^2(y^2 - 25)^2(y + 25)^2 + y^3(y^2 - 25)^2(y^4 + y^3 - 50y^2 - 51y + 575 + t)$$

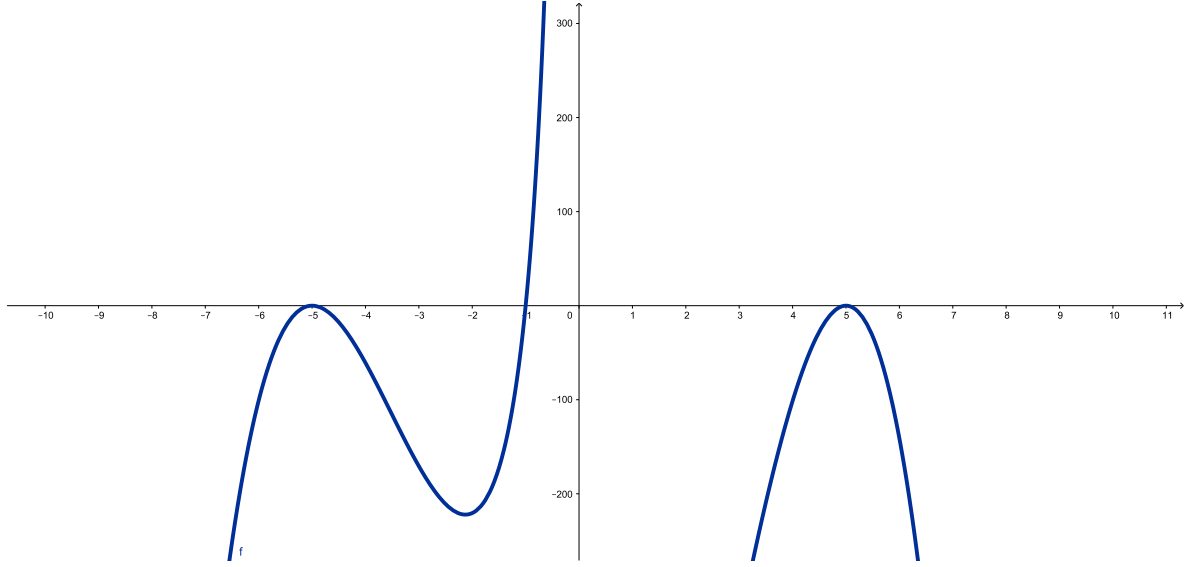
$$\Delta(y, t) = y^2(y^2 - 25)^2[(y + 25)^2 + y(y^4 + y^3 - 50y^2 - 51y + 575 + t)].$$

Sobre o complementar de $H = \{(y, t) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ e } y = \pm 5\}$, trocando t por $\varphi(y)$ e manipulando, temos:

$$\begin{aligned} \Delta(y, t) &= y^2(y^2 - 25)^2((y + 25)^2 + y(y^4 + y^3 - 50y^2 - 51y + 575 + \varphi(y))) \\ &= y^2(y^2 - 25)^2 \left((y + 25)^2 + y \left(y^4 + y^3 - 50y^2 - 51y + 575 - \frac{(y^2 - 25)^2(y + 1)}{y} \right) \right) \\ &= y^2(y^2 - 25)^2((y + 25)^2 + y^5 + y^4 - 50y^3 - 51y^2 + 575y - (y^2 - 25)^2(y + 1)) \\ &= y^2(y^2 - 25)^2(625 + y^5 + y^4 - 50y^3 - 50y^2 + 625y - (y^2 - 25)^2(y + 1)) \\ &= y^2(y^2 - 25)^2((y^2 - 25)^2(y + 1) - (y^2 - 25)^2(y + 1)). \\ &= 0. \end{aligned}$$

A expressão acima mostra que $(y, \varphi(y)) \in K \setminus H$, $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ou seja, o gráfico de φ está contido em $K \setminus H$ como já mencionado.

O gráfico da função φ possui duas componentes conexas $y < 0$ e $y > 0$. Essas componentes dividem o plano em três componentes. Ilustramos o gráfico de φ na próxima figura:



A seguir, analisemos o conjunto D :

Conjunto D

O conjunto D é a união de H com a região do plano situado entre as duas componentes conexas do gráfico de φ .

De fato, para todo $(y, t) \in H$, temos que $y^2(y^2 - 25)^2 = 0$ e assim:

$$\Delta(y, t) = y^2(y^2 - 25)^2((y + 25)^2 + y(y^4 + y^3 - 50y^2 - 51y + 575 + t)) = 0.$$

O que mostra que $(y, t) \in D$.

Agora, se $(y, t) \notin H$, temos que

$$\Delta(y, t) = y^2(y^2 - 25)^2((y + 25)^2 + y(y^4 + y^3 - 50y^2 - 51y + 575 + t)) \geq 0$$

se, e somente se,

$$(y + 25)^2 + y(y^4 + y^3 - 50y^2 - 51y + 575 + t) \geq 0.$$

Manipulando a inequação acima, podemos escrever:

$$ty + (y^2 - 25)^2(y + 1) \geq 0.$$

Logo, se $y > 0$, então

$$t \geq \frac{-(y^2 - 25)^2(y + 1)}{y} = \varphi(y),$$

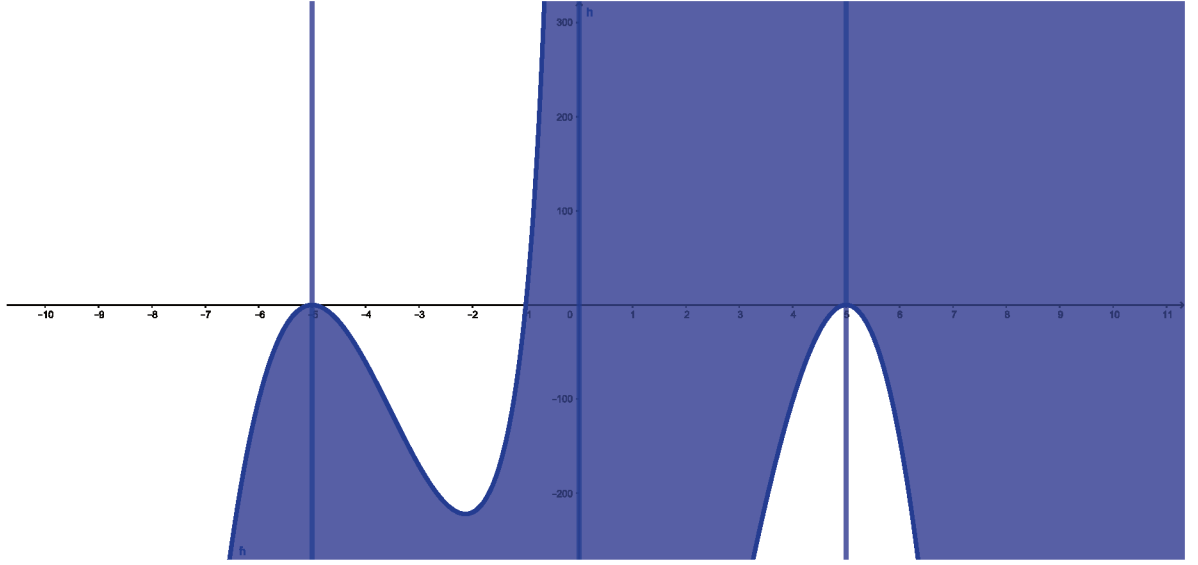
ou seja, acima do gráfico de $\varphi(y)$ com $y > 0$.

Por outro lado, se $y < 0$, segue que

$$t \leq \frac{-(y^2 - 25)^2(y + 1)}{y} = \varphi(y),$$

ou seja, abaixo do gráfico de $\varphi(y)$ com $y < 0$.

As justificativas acima mostram que o conjunto D é a união de H com a componente do plano que está entre as duas componentes conexas do gráfico de φ . A figura a seguir ilustra o conjunto D .



Conjuntos $Z(t)$

Derivando a função $\varphi(y)$, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi'(y) &= \frac{-(y^2 - 25)(4y^3 + 3y^2 + 25)}{y^2} \\ &= -4y^3 - 3y^2 + \frac{625}{y^2} + 100y + 50.\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\varphi''(y) = -12y^2 - 6y - \frac{1250}{y^3} + 100.$$

Logo, os pontos que satisfazem a equação $\varphi'(y) = 0$ são $y = \pm 5$ e $y \approx -2, 12$. Como $\varphi''(-2, 12) \approx 190 > 0$, $\varphi''(5) = -240 < 0$ e $\varphi''(-5) = -160 < 0$, então φ possui máximos locais em $y = \pm 5$ e um mínimo local $y \approx -2, 12$.

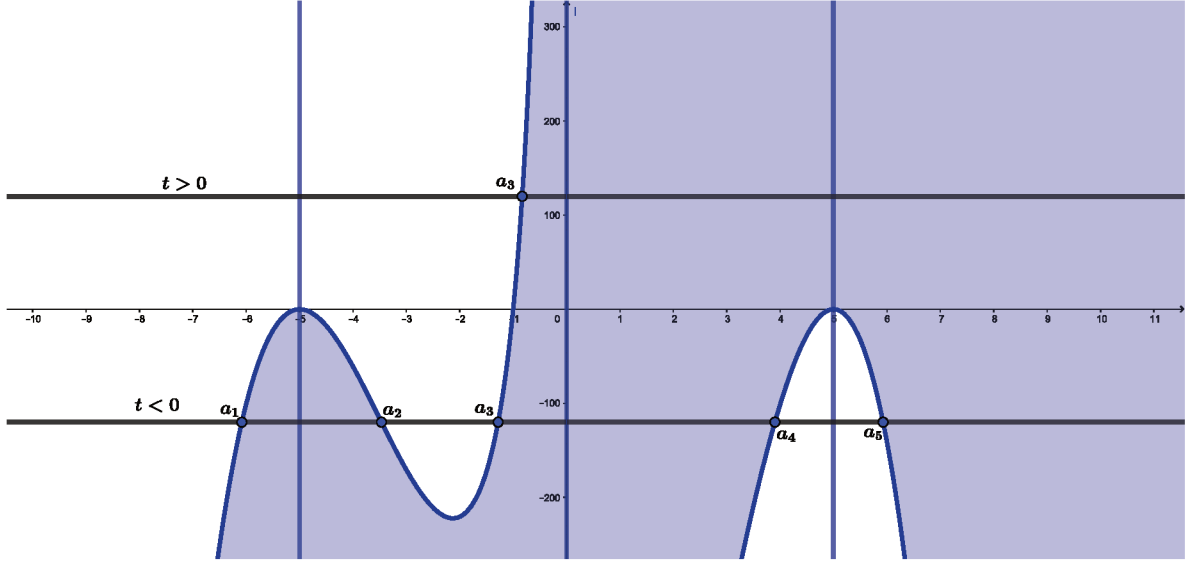
Para $t < 0$ e suficientemente pequeno, temos que $\varphi(y) = t$ possui cinco soluções reais. Para $t > 0$ e suficientemente pequeno temos que $\varphi(y) = t$ possui uma única solução real e 4 raízes complexas. Denotamos por $a_3(t)$ a solução real de $\varphi(y) = t$, com $\|t\|$ suficientemente pequeno. Sejam $a_1(t), a_2(t), a_4(t)$ e $a_5(t)$ as outras soluções de $\varphi(y) = t$ de modo que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} a_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} a_2(t) = -5 \quad (2.7)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} a_4(t) = \lim_{t \rightarrow 0} a_5(t) = 5. \quad (2.8)$$

A figura a seguir representa na parte real a descrição das raízes acima:



Para $t < 0$ e suficientemente pequeno, temos que $Z(t) \setminus H$ tem as seguintes 5 componentes conexas:

$$Z(t) \setminus H = ([a_1(t), -5[\times \{t\}) \cup (]-5, a_2(t)] \times \{t\}) \cup ([a_3(t), 0[\times \{t\}) \\ \cup (]0, a_4(t)] \times \{t\}) \cup ([a_5(t), \infty[\times \{t\}).$$

Se J é qualquer um dos intervalos acima, temos pela Definição 2.17 que $n(J) = 1$ e, portanto, a componente correspondente é uma linha de $f^{-1}(t)$. Por exemplo, se $J = [a_1(t), -5[$ então o ponto final de J que está em $K \setminus H$ é $(a_1(t), t)$. O outro ponto final de J , no caso $(-5, t)$, é um ponto de H .

Portanto, $f^{-1}(t)$ possui 5 componentes linhas, com $t < 0$ suficientemente pequeno.

Para $t = 0$, temos que:

$$Z(0) \setminus H = ([-1, 0) \times \{0\}) \cup (]0, 5[\times \{0\}) \cup (]5, \infty[\times \{0\}).$$

Se J_1, J_2 e J_3 denotam os intervalos acima respectivamente, temos que $n(J_1) = 1$, $n(J_2) = 0$ e $n(J_3) = 0$. Logo, $f^{-1}(0)$ possui também 5 componentes linhas.

Quando $t < 0$ tende a 0, temos que $\lim_{t \rightarrow 0} a_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} a_2(t) = -5$, o que mostram que as componentes linhas em $f^{-1}(t)$ que correspondem aos segmentos $([a_1(t), -5[\times \{t\}) \cup (]-5, a_2(t)] \times \{t\})$ desaparecem no infinito. Ou seja, a condição (nV) não é satisfeita em 0.

Além disso, como $\lim_{t \rightarrow 0} a_4(t) = \lim_{t \rightarrow 0} a_5(t) = 5$, temos que cada uma das componentes linhas em $f^{-1}(t)$ correspondente aos segmentos $(]0, a_4(t)] \times \{t\}) \cup ([a_5(t), \infty[\times \{t\})$ se dividem em duas componentes linhas para $t = 0$. Desta forma, a condição (nS) não é satisfeita em 0.

Para $t > 0$ suficientemente pequeno, o conjunto $Z(t) \setminus H$ possui três componentes conexas:

$$Z(t) \setminus H = ([a_3(t), 0[\times \{t\}) \cup (]0, 5[\times \{t\}) \cup (]5, \infty[\times \{t\}).$$

Se J_1, J_2 e J_3 denotam os três intervalos acima respectivamente, segue pela Definição 2.17 que $n(J_1) = 1$, $n(J_2) = 0$ e $n(J_3) = 0$. Logo, J_1 corresponde a uma componente linha de $f^{-1}(t)$ e J_2, J_3 correspondem cada um a duas componentes linhas de $f^{-1}(t)$. Desta forma, $f^{-1}(t)$ também possui 5 componentes linhas, com $t > 0$ suficientemente pequeno.

Em resumo, pelos argumentos acima, temos:

- $f^{-1}(t)$ é a união de 5 componentes conexas linhas, com $\|t\|$ suficientemente pequeno. Portanto, os Números de Betti de $f^{-1}(t)$ são constantes para todo $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, com ϵ suficientemente pequeno.
- A Característica de Euler de $f^{-1}(t)$ é constante, com $\|t\|$ suficientemente pequeno.
- A restrição $f : f^{-1}(]-\epsilon, 0]) \rightarrow]-\epsilon, 0[$ é uma fibração topológica, já que as condições (B) e (nV) são satisfeitas para todo $t \in]-\epsilon, 0[$.
- A restrição $f : f^{-1}([0, \epsilon]) \rightarrow [0, \epsilon[$ é uma fibração topológica, pois as condições (B) e (nS) são satisfeitas para todo $t \in [0, \epsilon[$.
- $f : f^{-1}(]-\epsilon, \epsilon]) \rightarrow]-\epsilon, \epsilon[$ não é uma fibração topológica, pois as condições (nV) e (nS) não são satisfeitas em 0. Portanto, temos que $0 \in \Lambda_f$.

2.3.2 Exemplo 2

Apresentamos nesta seção um exemplo que satisfaz as condições (nV) e (nS), mas não vale a condição (E). Portanto $0 \in \Lambda_f$.

Considere o polinômio

$$f(x, y) = x^2 y^2 + 2xy + (y^2 - 1)^2$$

Para este polinômio temos que o conjunto $A = \{y \in \mathbb{R} \mid y^2 = 0\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 0\}$. Temos que $\beta(y) = y$ e $\gamma(y) = (y^2 - 1)^2$. Logo, $\beta(0) = 0$ e $\|\gamma(0)\| = 1$, o que mostra que a condição (2.5) é satisfeita.

Conjunto $K \setminus H$

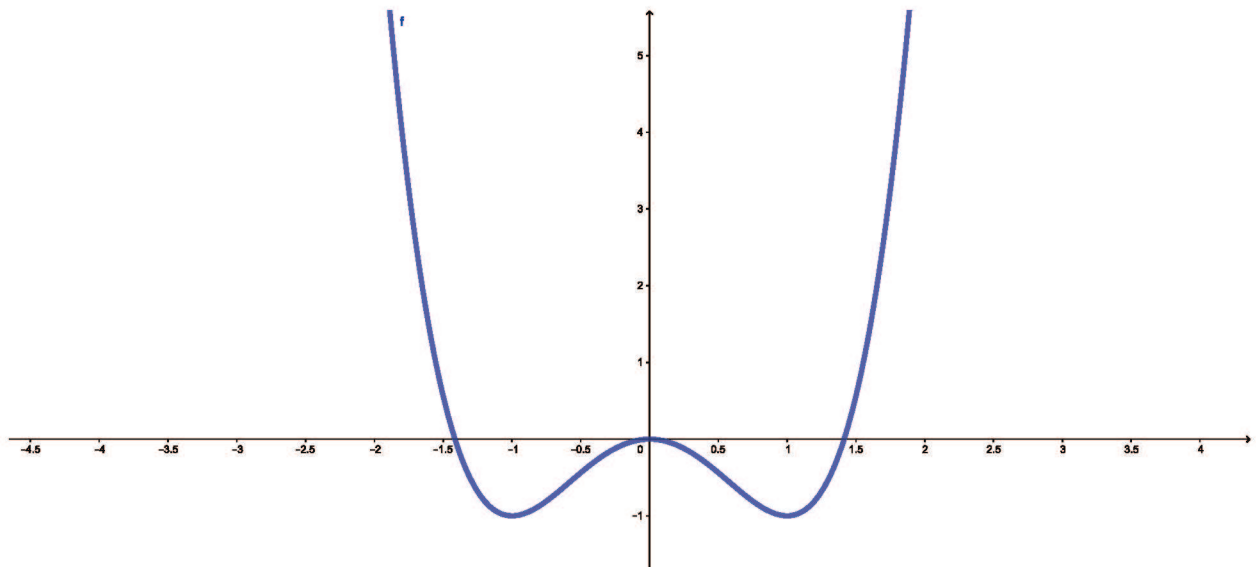
O conjunto $K \setminus H$ contém o gráfico da função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(y) = y^4 - 2y^2$. De fato, o determinante $\Delta(y, t)$ da equação $f(x, y) = t$ na variável x é dado por:

$$\begin{aligned}\Delta(y, t) &= y^2 - y^2((y^2 - 1)^2) + y^2 t \\ \Delta(y, t) &= y^2(1 - (y^2 - 1)^2 + t).\end{aligned}$$

Fora do conjunto $H = \{(y, t) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ e para $t = \varphi(y)$, temos:

$$\begin{aligned}\Delta(y, t) &= y^2(1 - (y^2 - 1)^2 + \varphi(y)) \\ &= y^2(1 - (y^2 - 1)^2 + y^4 - 2y^2) \\ &= y^2((y^2 - 1)^2 - (y^2 - 1)^2) = 0\end{aligned}$$

Portanto o gráfico de φ está contido em $K \setminus H$. A seguir, ilustramos o gráfico de φ :

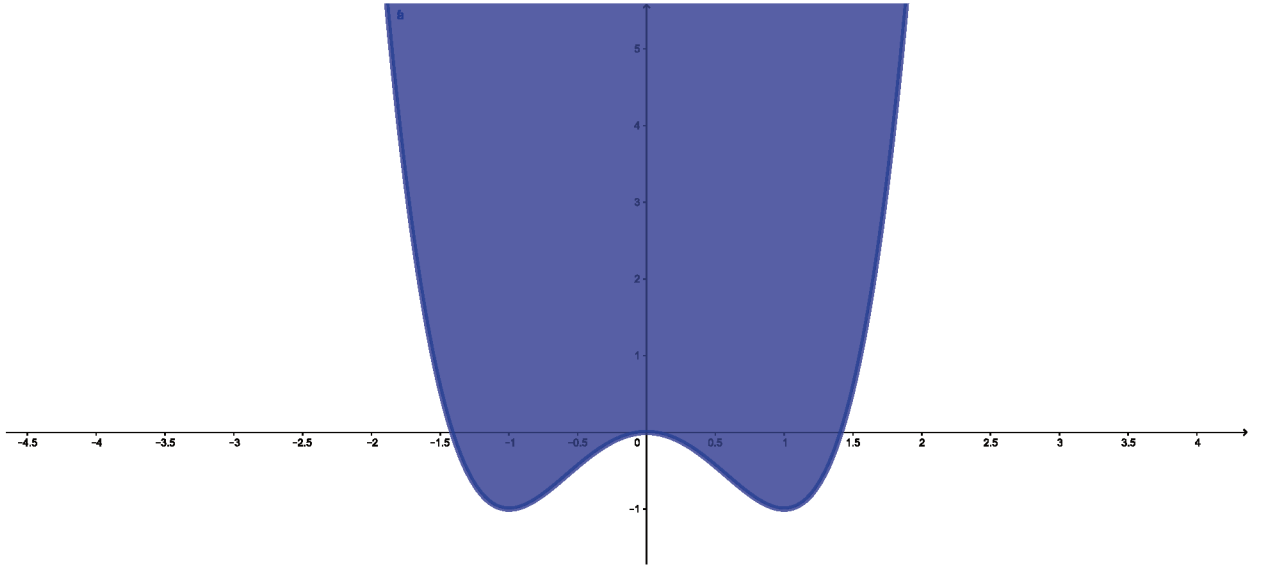


Conjunto D

O gráfico de φ determina no plano duas componentes conexas. O conjunto D é igual à parte do plano situado acima do gráfico φ . De fato, temos:

$$\begin{aligned}
 D &= \{(y, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \Delta(y, t) \geq 0\} \\
 &= \{(y, t) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2(1 - (y^2 - 1)^2) + t \geq 0\} \\
 &= \{(y, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - (y^2 - 1)^2 + t \geq 0\} \\
 &= \{(y, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq (y^2 - 1)^2 - 1\} \\
 &= \{(y, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq y^4 - 2y^2\}.
 \end{aligned}$$

As expressões acima mostram que o conjunto D é a componente conexa do plano acima do gráfico de φ . A figura a seguir, ilustra essa componente em azul:



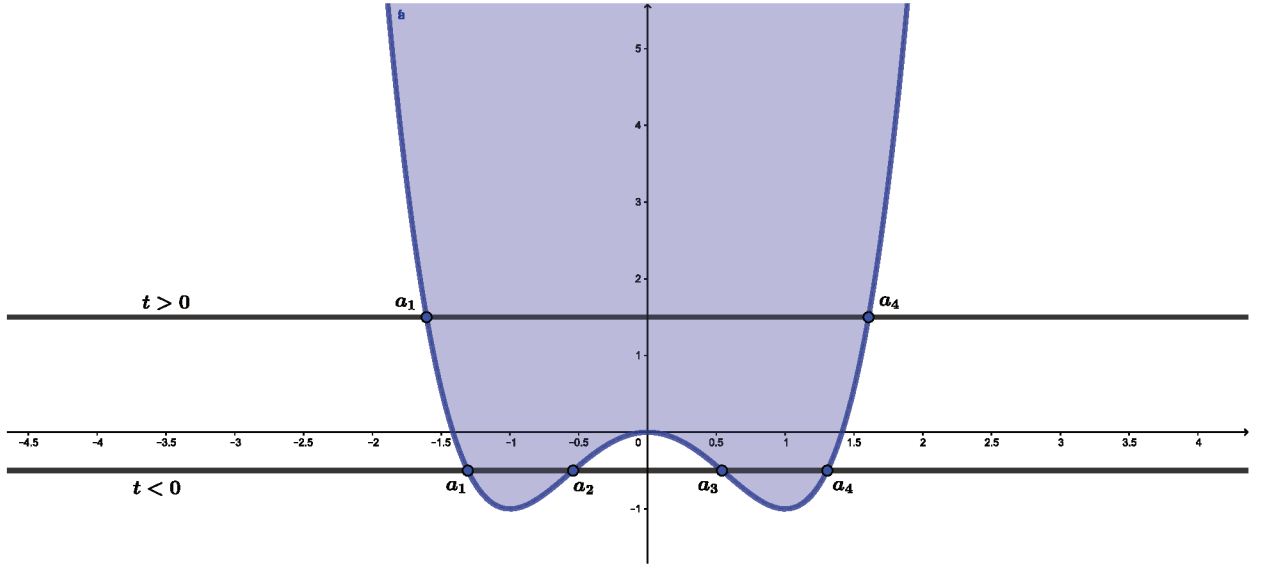
Conjuntos $Z(t)$

Derivando a função $\varphi(y)$ para determinar seu pontos de máximo e mínimo, temos que $\varphi'(y) = 4y^3 - 4y$ e $\varphi''(y) = 12y^2 - 4$. Logo, $\varphi'(y) = 0$ se, e somente se, $y \pm 1$ e $y = 0$. Como $\varphi''(1) = 8 > 0$, $\varphi''(-1) = 8 > 0$ e $\varphi''(0) = -4 < 0$, segue que φ tem mínimos globais em $y = \pm 1$ e um máximo local em $y = 0$.

A equação $\varphi(y) = t$ tem 4 soluções complexas, que denotamos por $a_j(t)$, com $j = 1, \dots, 4$. Para t suficientemente pequeno duas destas soluções, que denotamos por $a_1(t)$ e $a_4(t)$ são soluções reais para todo t . As outras 2 são reais, se e somente se, $t < 0$. Observamos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} a_2(t) = \lim_{t \rightarrow 0} a_3(t) = 0.$$

A figura a seguir representa na parte real a descrição das raízes acima:



Para $t < 0$ suficientemente pequeno, o conjunto $Z(t) \setminus H$ tem 2 componentes conexas:

$$Z(t) \setminus H = ([a_1(t), a_2(t)] \times \{t\}) \cup ([a_3(t), a_4(t)] \times \{t\}).$$

Se J_1 e J_2 denotam os intervalos acima respectivamente, então pela Definição 2.17 segue que $n(J_1) = 2$ e $n(J_2) = 2$. Logo, cada J_i corresponde a uma componente circular de $f^{-1}(t)$. Isto mostra que $f^{-1}(t)$ é a união de duas componentes circulares, com $t < 0$ suficientemente pequeno.

Temos que

$$Z(0) \setminus H = ([-\sqrt{2}, 0[\times \{0\}) \cup ([0, \sqrt{2}] \times \{0\}).$$

Se J_1 e J_2 denotam os intervalos acima respectivamente, então pela Definição 2.17 segue que $n(J_1) = 1$ e $n(J_2) = 1$. Logo, cada J_i corresponde a uma componente linha de $f^{-1}(0)$. Isto mostra que $f^{-1}(0)$ é a união de duas componentes linhas.

Para $t > 0$ suficientemente pequeno, o conjunto $Z(t) \setminus H$ tem duas componentes conexas:

$$Z(t) \setminus H = ([a_1(t), 0[\times \{t\}) \cup ([0, a_4(t)] \times \{t\}).$$

Cada um destes intervalos determinam uma componente linha de $f^{-1}(t)$.

Assim, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno as restrições $f : f^{-1}(]-\epsilon, 0[) \rightarrow]-\epsilon, 0[$ e $f : f^{-1}([0, \epsilon[) \rightarrow [0, \epsilon[$ são fibrações topológicas, pois as condições (B), (nV) e (nS) são satisfeitas para todo $t \in]-\epsilon, 0[$ ou $t \in [0, \epsilon[$.

No entanto, $f : f^{-1}(]-\epsilon, \epsilon[) \rightarrow]-\epsilon, \epsilon[$ não é uma fibração topológica, pois os Números de Betti não são constantes. De fato, para $t < 0$ as duas componentes do conjunto $Z(t) \setminus H$ são difeomorfos a S^1 , o que implica $b_0(x_t, f) = 2$ e $b_1(x_t, f) = 2$. Por outro lado, para $t \geq 0$ temos que as duas componentes do conjunto $Z(t) \setminus H$ são difeomorfos a $\mathbb{R}$, o que implica $b_0(x_t, f) = 2$ e $b_1(x_t, f) = 0$.

Portanto, $\chi(X_t) = 0$ se $t < 0$ e $\chi(X_t) = 2$ se $t \geq 0$. Estas últimas, mostram que a condição (E) não é satisfeita. Portanto, $0 \in \Lambda_f$.

2.3.3 Exemplo 3

Apresentamos nesta seção um exemplo que satisfaz as condições (E) e (nS), mas que não satisfaz a condição (nV). Portanto $0 \in \Lambda_f$.

Considere o polinômio

$$f(x, y) = x^2 y^3 (9 - y^2)^2 + 2xy(9 - y^2)(y^3 + y + 6) + 2(y^5 - 6y^3 + 6y^2 + 25y + 6).$$

Temos que $A = \{y \in \mathbb{R} \mid y^3(9 - y^2)^2 = 0\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y = \pm 3 \text{ ou } y = 0\}$. Temos que $\beta(y) = y(9 - y^2)(y^3 + y + 6)$ e $\gamma(y) = 2(y^5 - 6y^3 + 6y^2 + 25y + 6)$. Logo, $\beta(y) = 0$ e $\|\gamma(y)\| \geq 12$, $\forall y \in A$, o que mostra que a condição (2.5) é satisfeita para β e γ .

Conjunto $K \setminus H$

O conjunto $K \setminus H$ contém o gráfico da função $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi(y) = \frac{(y^2 - 1)(y^2 - 4)(y^2 - 9)}{y}.$$

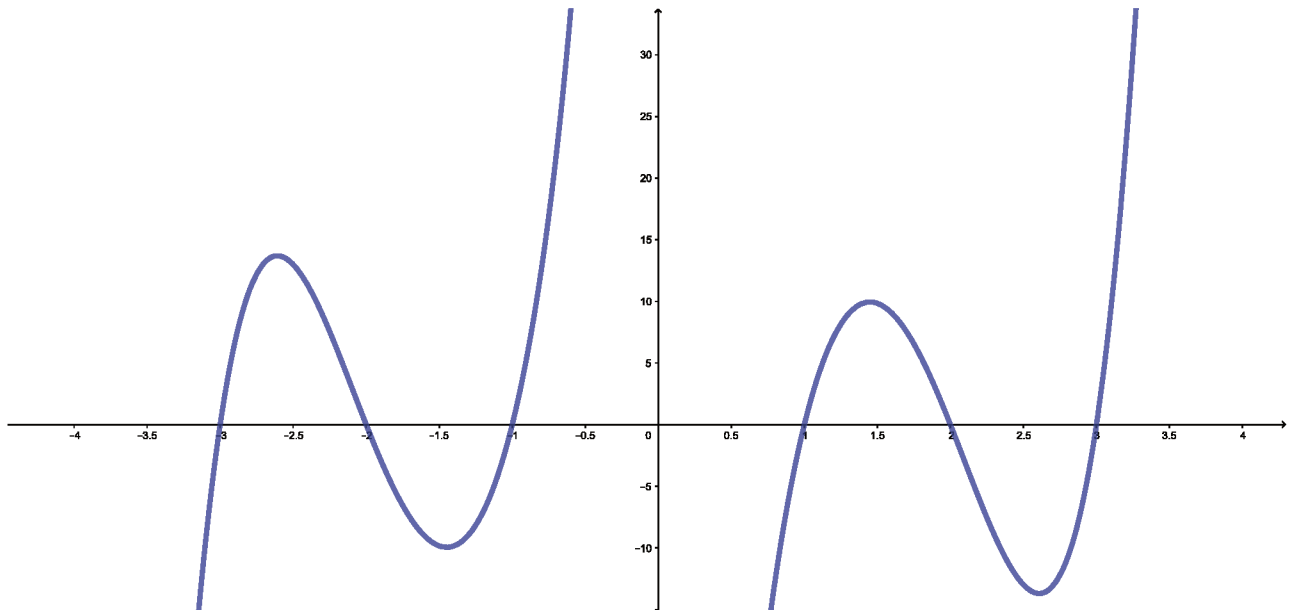
De fato, o determinante $\Delta(y, t)$ da equação $f(x, y) = t$ na variável x é dado por:

$$\begin{aligned} \Delta(y, t) &= y^2(9 - y^2)^2(y^3 + y + 6)^2 - 2y^3(9 - y^2)^2(y^5 - 6y^3 + 6y^2 + 25y + 6) + y^3(9 - y^2)^2 t \\ \Delta(y, t) &= y^2(9 - y^2)^2[(y^3 + y + 6)^2 - 2y(y^5 - 6y^3 + 6y^2 + 25y + 6) + ty]. \end{aligned}$$

Fora de H e para $t = \varphi(y)$, temos que:

$$\begin{aligned} \Delta(y, t) &= y^2(9 - y^2)^2((y^3 + y + 6)^2 - 2y(y^5 - 6y^3 + 6y^2 + 25y + 6) + y\varphi(y)) \\ &= y^2(9 - y^2)^2 \left((y^3 + y + 6)^2 - 2y(y^5 - 6y^3 + 6y^2 + 25y + 6) + y \frac{(y^2 - 1)(y^2 - 4)(y^2 - 9)}{y} \right) \\ &= y^2(9 - y^2)^2(-y^6 + 14y^4 - 49y^2 + 36 + (y^2 - 1)(y^2 - 4)(y^2 - 9)) \\ &= y^2(9 - y^2)^2((y^2 - 1)(y^2 - 4)(y^2 - 9) - (y^2 - 1)(y^2 - 4)(y^2 - 9)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto o gráfico de φ está contido em $K \setminus H$. O gráfico da função φ possui duas componentes conexas. Uma componente contida em $y < 0$ e outra em $y > 0$. A figura a seguir ilustra o gráfico de φ :



Conjunto D

O conjunto D é a união do conjunto H com a região do plano que está entre as duas componentes do gráfico de φ . De fato, lembramos que o conjunto H é dado pelas retas verticais $y = 0$ e $y = \pm 3$.

Assim para todo $(y, t) \in H$ temos que $y^2(9 - y^2)^2 = 0$. Portanto, $\Delta(y, t) = y^2(9 - y^2)^2((y^3 + y + 6)^2 - 2y(y^5 - 6y^3 + 6y^2 + 25y + 6) + ty) = 0$, $\forall (y, t) \in H$.

Agora, no complementar de H , temos:

$$\Delta(y, t) = y^2(9 - y^2)^2[(y^3 + y + 6)^2 - 2y(y^5 - 6y^3 + 6y^2 + 25y + 6) + ty] \geq 0,$$

se, e somente se,

$$(y^3 + y + 6)^2 - 2y(y^5 - 6y^3 + 6y^2 + 25y + 6) + ty \geq 0.$$

Esta última é equivalente à

$$ty - (y^2 - 1)(y^2 - 4)(y^2 - 9) \geq 0.$$

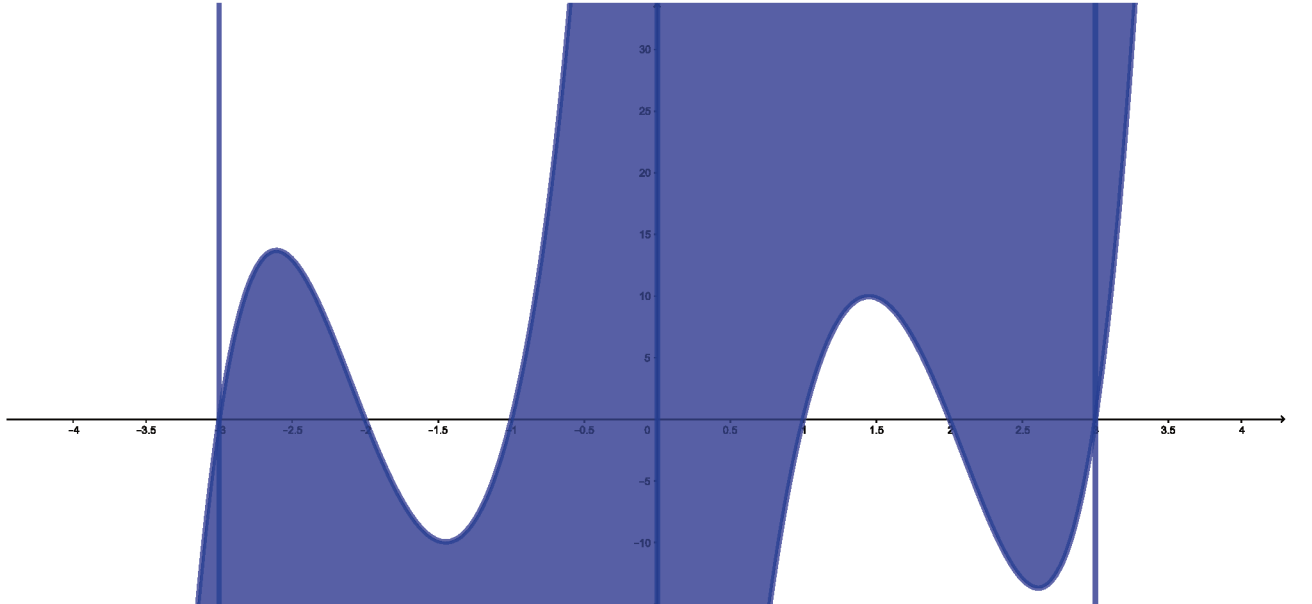
Assim, se $y > 0$, então

$$t \geq \frac{(y^2 - 1)(y^2 - 4)(y^2 - 9)}{y} = \varphi(y).$$

Se $y < 0$, segue que

$$t \leq \frac{(y^2 - 1)(y^2 - 4)(y^2 - 9)}{y} = \varphi(y).$$

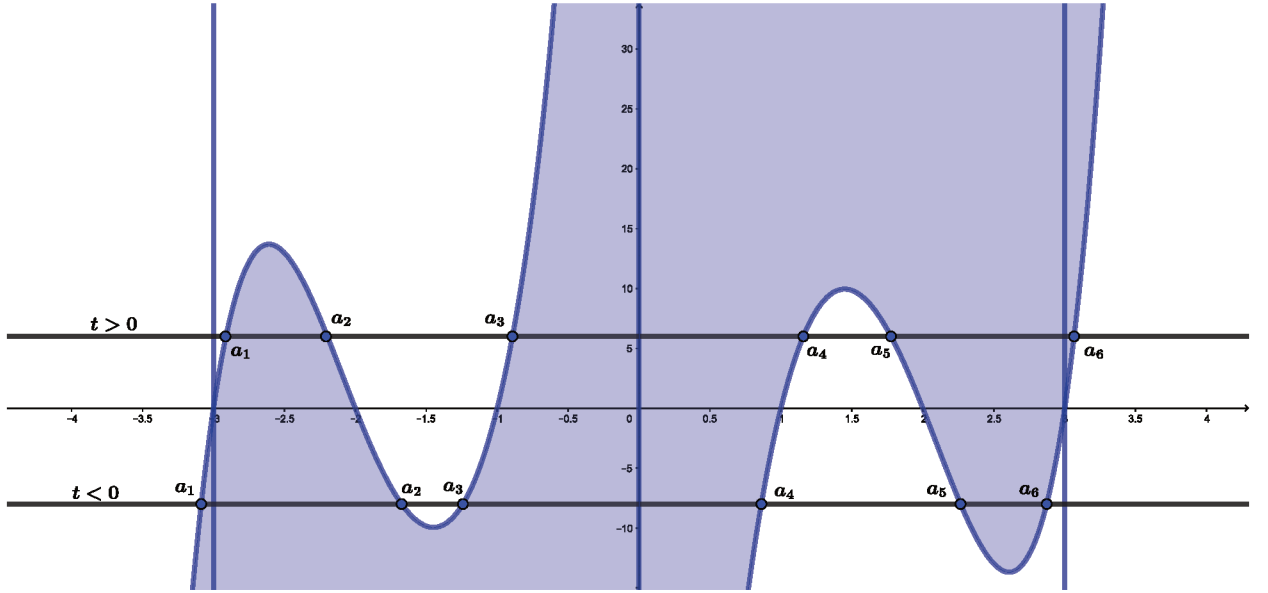
As expressões acima mostram que o conjunto D é a união do conjunto H com a região do plano situado entre as duas componentes conexas do gráfico de φ , como se ilustra a seguir.



Conjuntos $Z(t)$

Para $\|t\|$ suficientemente pequeno, a equação $\varphi(y) = t$ tem 6 soluções. Neste exemplo, todas as soluções são reais. Denotamos $a_j(t)$, com $j = 1, \dots, 6$, essas soluções.

A figura a seguir representa na parte real a descrição das raízes acima:



Existem $a \in]1, 2[$ e $b \in]2, 3[$ tais que os máximos locais de φ são a e $-b$ e os mínimos locais de φ são $-a$ e b .

Para $|t| \neq 0$ suficientemente pequeno, o conjunto $Z(t) \setminus H$ tem 5 componentes conexas. Uma destas componentes corresponde a uma componente circular de $f^{-1}(t)$ e as outras 4 componentes correspondem às componentes linhas de $f^{-1}(t)$.

Em particular, para a fibra $f^{-1}(t)$, com $t > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$Z(t) \setminus H = ([a_1(t), a_2(t)] \times \{t\}) \cup ([a_3(t), 0] \times \{t\}) \cup ([0, a_4(t)] \times \{t\}) \\ \cup ([a_5(t), 3] \times \{t\}) \cup ([3, a_6(t)] \times \{t\}).$$

Sendo que o primeiro intervalo corresponde a uma componente circular e outros quatro intervalos correspondem às componentes linhas de $f^{-1}(t)$.

Para $t = 0$, temos:

$$Z(0) \setminus H = (]-3, -2] \times \{0\}) \cup ([-1, 0] \times \{0\}) \cup ([0, 1] \times \{0\}) \cup ([2, 3] \times \{0\}).$$

Sendo que os quatro intervalos correspondem a uma componente linha de $f^{-1}(0)$.

Quando $t > 0$ tende a 0, a componente circular de $f^{-1}(t)$ que corresponde ao segmento $([a_1(t), a_2(t)] \times \{t\})$ tem como limite uma componente linha de $f^{-1}(0)$. A componente linha de $f^{-1}(t)$ correspondente ao segmento $([3, a_6(t)] \times \{t\})$ desaparece no infinito. As outras 3 componentes linhas de $f^{-1}(t)$ convergem para uma componente linha de $f^{-1}(0)$. Desta forma, temos que a condição (nV) não é satisfeita em 0.

O comportamento da fibra $f^{-1}(t)$, quando $t < 0$ tende a 0 é análogo ao descrito acima para $t > 0$.

Portanto, temos que a Característica de Euler das fibras $f^{-1}(t)$ é constante igual a 4, para $\|t\|$ suficientemente pequeno. Logo, a condição E é satisfeita em 0. Pelos argumentos acima temos também que a condição (nS) também é satisfeita em 0.

Assim, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, as restrições $f : f^{-1}(]-\epsilon, 0]) \rightarrow]-\epsilon, 0[$ e $f : f^{-1}([0, \epsilon[) \rightarrow]0, \epsilon[$ são fibrações topológicas, pois as condições (B) e (nV) são satisfeitas para todo $t \in]-\epsilon, 0[$ ou $t \in]0, \epsilon[$.

No entanto, $f : f^{-1}(]-\epsilon, \epsilon]) \rightarrow]-\epsilon, \epsilon[$ não é uma fibração topológica, pois para $t \neq 0$ a fibra $f^{-1}(t)$ tem 5 componentes conexas. Para $t = 0$, $f^{-1}(0)$ tem 4 componentes conexas. Portanto $0 \in \Lambda_f$.

Capítulo 3

Valores de bifurcação no plano complexo

Seja $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial complexa com singularidades isoladas no infinito. Neste capítulo apresentamos o teorema que caracteriza o conjunto de bifurcação de f (Teorema 3.4). Este resultado foi provado por Adam Parusiński em [12, Teorema 1.4]. Este capítulo está dividido em duas seções curtas. Na primeira seção definimos quando a função f possui singularidades isoladas no infinito (Definição 3.3) e apresentamos o Teorema 3.4. Na segunda seção, apresentamos uma caracterização para condição μ -constante para uma família de funções, pois uma das equivalências do Teorema 3.4 envolve esta noção. Por último, apresentamos dois exemplos onde calculamos o conjunto de bifurcação para ilustrar o Teorema 3.4.

3.1 Caracterização dos valores de bifurcação

Nesta seção, consideramos $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, com $n \geq 2$. Denotamos por $\mathbb{P}^n$ o espaço projetivo complexo de dimensão n . Usamos coordenadas $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ para denotar um ponto de $\mathbb{P}^n$.

Dada $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial de grau d , consideramos $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$ a decomposição de f em suas componentes homogêneas, sendo $f_d \neq 0$. Consideramos a seguinte homogenização de f dada por:

$$\bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) := x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right). \quad (3.1)$$

Definimos em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}$ a seguinte hipersuperfície:

$$\mathbb{X} := \{([x_0 : x_1 : \dots : x_n], t) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C} \mid F(x, t) = 0\}, \quad (3.2)$$

onde $F(x, t) = \bar{f}(x) - tx_0^d$ e $x = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$.

O conjunto $H_\infty = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 0\}$ será chamado de hiperplano no infinito. Definimos:

$$\mathbb{X}_\infty := \mathbb{X} \cap (H_\infty \times \mathbb{C}). \quad (3.3)$$

Exemplo 3.1. *Seja $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ a função definida por $f(x, y) = x - x^2y$. Temos a seguinte homogenização de f dada por $\bar{f}(w, x, y) = w^2x - x^2y$. Assim a hipersuperfície $\mathbb{X} := \{([w : x : y], t) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{C} \mid w^2x - x^2y - w^3t = 0\}$ e $\mathbb{X}_\infty := \{([0 : x : y], t) \in \mathbb{X} \mid -x^2y = 0\}$, ou seja, $\mathbb{X}_\infty := \{[0 : 0 : 1], [0 : 1 : 0]\} \times \mathbb{C}$.*

Denotamos também por $\bar{f} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$ a aplicação induzida pela projeção de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}$ sobre o segundo fator. As fibras de $\bar{f}$, o qual denotamos por $\bar{X}_t$, são os fechos projetivos das fibras $f^{-1}(t)$.

Com as considerações e definições acima, apresentamos os seguintes resultados:

Lema 3.2. Dada $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, conjunto singular de $\mathbb{X}$ é dado por $A \times \mathbb{C}$, onde

$$A = \left\{ x \in H_\infty \mid \frac{\partial f_d}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f_d}{\partial x_n} = f_{d-1} = 0 \right\}. \quad (3.4)$$

Demonstração. O conjunto singular da hipersuperfície $\mathbb{X}$ é por definição o conjunto $Z = \{([x_0 : x_1 : \dots : x_n], t) \in \mathbb{X} \mid \nabla F(x, t) = 0\}$, com $x = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$. Calculando as derivadas parciais de F , temos:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = dx_0^{d-1}f_0 + (d-1)x_0^{d-2}f_1 + \dots + 2x_0f_{d-2} + f_{d-1} - dtx_0^{d-1}. \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = x_0^d \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + x_0^{d-1} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + x_0 \frac{\partial f_{d-1}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_d}{\partial x_i} \text{ para todo } i = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = x_0^d. \quad (3.7)$$

As três expressões acima implicam que $\nabla F(x, t) = 0$ se, e somente se, $x_0 = 0$, $f_{d-1} = 0$ e $\frac{\partial f_d}{\partial x_i} = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. Portanto $Z = A \times \mathbb{C}$, o que termina a prova. $\square$

Com as notações e noções anteriores apresentamos a seguinte definição, (veja [12, Definition 1.1]):

Definição 3.3. Dizemos que a função polinomial $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tem singularidades isoladas no infinito se o conjunto A definido anteriormente é um conjunto finito em $\mathbb{P}^n$.

Quando $n = 2$, a condição acima é sempre satisfeita. De fato, para $n = 2$ o conjunto A é uma união finita de retas que passam pela origem de $\mathbb{C}^2$. Logo, o conjunto A é uma união finita de pontos em $\mathbb{P}^2$.

A seguir apresentamos o teorema principal deste capítulo, dado em [12, Theorem 1.4]. Em particular, Parusiński provou que todo valor regular t_0 de f é um valor típico se, e somente se, este valor satisfaz a condição de Parusiński (veja Definição 1.13). Ou seja, diferente do caso real, a recíproca do Teorema 1.15 é verdadeira no caso complexo.

Ele mostrou também que um valor é típico se, e somente se, a Característica de Euler é constante para um valor t próximo de t_0 . Em particular, a condição (nV) do Teorema 2.10 não é necessária no caso complexo. Por último, demonstrou que t_0 é típico se, e somente se, a família de singularidades isoladas no infinito das fibra $\overline{X}_t$ definida anteriormente é μ -constante para t próximo de t_0 .

Com as definições acima, apresentamos o seguinte resultado:

Teorema 3.4. Seja $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial com singularidades isoladas $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ no infinito. Seja t_0 um valor regular de f . Então as seguintes condições são equivalentes:

- i) $t_0 \notin \Lambda_f$.
- ii) A condição Parusiński (1.3) é satisfeita.
- iii) As famílias de singularidades isoladas $(\overline{X}_t, a_i \times t)$ são μ -constante para todo t em um aberto de t_0 .
- iv) A característica de Euler $\chi(X_t)$ das fibras de f é constante para todo t em um aberto de t_0 .

A demonstração do Teorema 3.4 não será feita nesta dissertação. O objetivo é ilustrar a diferença entre o caso real e complexo no estudo do conjunto de bifurcação já para o caso $n = 2$.

A seguir, apresentamos alguns exemplos para ilustrar o teorema acima.

3.1.1 Exemplos

A seguir, apresentamos um teorema que caracteriza a condição μ -constante em termos da curva polar. Uma demonstração pode ser vista em [5, página 161].

Teorema 3.5. *A família $f_t = F(x, t) : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ é μ -constante em um aberto de $t = 0$ se, e somente se, a curva polar relativa de F definida por:*

$$\Gamma(F) = \overline{\{(x, t) \in (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \mid \partial F / \partial x_1 = \dots = \partial F / \partial x_n = 0\}}$$

é vazia perto da origem $(0, 0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$.

A seguir apresentamos dois exemplos para ilustrar o Teorema 3.4.

Exemplo 3.6. *Considere a função polinomial $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(x, y) = x^2y - x$. Temos que $\nabla f(x, y) = (2xy - 1, x^2)$, o que mostra que f é uma submersão, ou seja, não possui pontos críticos. Tomando a sequência de pontos $\{(\frac{1}{2n}, n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^2$, obtemos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{1}{2n}, n \right) \right\| = \infty, \quad (3.8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f \left(\frac{1}{2n}, n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{4n} = 0, \quad (3.9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{1}{2n}, n \right) \right\|^{\frac{N-1}{N}} \left\| \nabla f \left(\frac{1}{2n}, n \right) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 4n^4}{4n^2} \right)^{\frac{N-1}{2N}} \left(\frac{1}{4n^2} \right) = 0. \quad (3.10)$$

As condições acima mostram que 0 não satisfaz a condição (1.3). Pelo Teorema 3.4, segue que $0 \in \Lambda_f$.

Utilizaremos o Teorema 3.5 para mostrar que as famílias de singularidades isoladas $(\overline{X}_t, a_i \times t)$ não são μ -constante para t perto de 0. Para a função f , temos que

$$\mathbb{X} = \{([x_0 : x : y], t) \in \mathbb{P} \times \mathbb{C} \mid x^2y - x_0^2x - x_0^3t = 0\}.$$

Logo $\mathbb{X}_\infty = \{([0 : 0 : 1], [0 : 1 : 0]) \times \mathbb{C}\}$ e $A = \{[0 : x : y] \in H_\infty \mid 2xy = x^2 = 0\} = \{[0 : 0 : 1]\}$. Assim, a família de singularidades isoladas $(\overline{X}_t, a_1 \times t)$, onde $a_1 = [0 : 0 : 1]$, tem a seguinte equação na carta $y = 1$:

$$f_t(x_0, x) = x^2 - x_0^2x - x_0^3t.$$

Consequentemente, em um aberto da origem, os pontos críticos de f_t , que denotamos por Σ_{f_t} , são dados por $\{(x_0, x) \in \mathbb{C}^2 \mid -2x_0x - 3x_0^2t = 2x - x_0^2 = 0\}$. Logo, a curva $\left(-3t, \frac{9t^2}{2}, t\right)$ mostra que $\Gamma(f_t)$ é não vazia. Portanto, a família não é μ -constante em um aberto de $t = 0$.

Por último $f^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x = 0 \text{ ou } xy = 1\} \simeq \mathbb{C} \sqcup (\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Para $t \neq 0$, $f^{-1}(t) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \neq 0 \text{ e } y = \frac{t+x}{x^2}\} \simeq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Isto implica que $\chi(f^{-1}(0)) = 1$ e $\chi(f^{-1}(t)) = 0$.

Para o próximo exemplo, veja Exemplo 1.20 para sua versão em $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.7. *Considere a função polinomial $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(x, y) = 2x^2y^3 - 9xy^2 + 12y$. Temos $\nabla f(x, y) = (4xy^3 - 9y^2, 6x^2y^2 - 18xy + 12)$ e assim f é uma submersão. Tomando a sequência de pontos $\{(\frac{1}{n}, n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^2$, temos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{1}{n}, n \right) \right\| = \infty, \quad (3.11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f \left(\frac{1}{n}, n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0, \quad (3.12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{1}{n}, n \right) \right\|^{\frac{N-1}{N}} \left\| \nabla f \left(\frac{1}{n}, n \right) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + n^4}{n^2} \right)^{\frac{N-1}{2N}} \left(\frac{5}{n^2} \right) = 0. \quad (3.13)$$

As condições acima mostram que 0 não satisfaz a condição (1.3). Logo, pelo Teorema 3.4 segue que $0 \in \Lambda_f$.

Usando o Teorema 3.5, mostraremos que as famílias de singularidades isoladas $(\overline{X}_t, a_i \times t)$ não são μ -constante para t perto de 0. Para a função f , temos que

$$\mathbb{X} = \{([x_0 : x : y], t) \in \mathbb{P} \times \mathbb{C} \mid 2x^2y^3 - 9x_0^2xy^2 + 12x_0^4y - x_0^5t = 0\}.$$

Logo $\mathbb{X}_\infty = \{([0 : 0 : 1], [0 : 1 : 0]) \times \mathbb{C}\}$ e $A = \{[0 : x : y] \in H_\infty \mid 4xy^3 = 6x^2y^2 = 0\} = \{[0 : 0 : 1]\} \cup \{[0 : 1 : 0]\}$. Assim a família de singularidades isoladas $(\overline{X}_t, a_2 \times t)$, onde $a_2 = [0 : 1 : 0]$, tem a seguinte equação na carta $x = 1$:

$$f_t(x_0, y) = 2y^3 - 9x_0^2y^2 + 12x_0^4y - x_0^5t.$$

Consequentemente os pontos críticos de f_t são dados por $\Sigma_{f_t} = \{(x_0, x) \in \mathbb{C}^2 \mid -18x_0y^2 + 48x_0^3y - 5x_0^4t = 6y^2 - 18x_0^2y + 12x_0^4 = 0\}$. Logo, a curva $\left(\frac{t}{6}, \frac{t^2}{36}, t\right)$ mostra que $\Gamma(f_t) \neq \emptyset$. Portanto a família não é μ -constante em um aberto de $t = 0$.

Por último $f^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y = 0 \text{ ou } 2x^2y^2 - 9xy = 12\} \simeq \mathbb{C} \sqcup (\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Para $t \neq 0$, temos que $f^{-1}(t) \simeq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Isto implica que $\chi(f^{-1}(0)) = 1$ e $\chi(f^{-1}(t)) = 0$.

Bibliografia

- [1] Broughton, S. A. (1988). Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces. *Inventiones Mathematicae*, 92(2), 217-241. doi:<https://doi.org/10.1007/BF01404452>
- [2] D'Acunto, D., & Grandjean, V. (2005). On gradient at infinity of semialgebraic functions. In *Annales Polonici Mathematici* (Vol. 87, pp. 39-49). Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk. doi:<https://doi.org/10.4064/ap87-0-4>
- [3] de Castro Júnior, A. A. (2009). *Curso de equações diferenciais ordinárias*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).
- [4] Ehresmann, C. (1950, June). Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. In *Colloque de Topologie, Bruxelles* (Vol. 29, pp. 55-75).
- [5] Greuel, G. M. (1986). Constant Milnor number implies constant multiplicity for quasihomogeneous singularities. *Manuscripta Mathematica*, 56(2), 159-166. doi:<https://doi.org/10.1007/BF01172153>
- [6] Jacek Bochnak, Michel Coste, & Marie-Françoise Roy. *Real Algebraic Geometry*, volume 36. Springer Science & Business Media, 2013.
- [7] Jelonek, Z. (2003). On the generalized critical values of a polynomial mapping. *Manuscripta Mathematica*, 110(2), 145-157. doi:<https://doi.org/10.1007/s00229-002-0320-x>
- [8] Kurdyka, K., Orro, P., & Simon, S. (2000). Semialgebraic Sard theorem for generalized critical values. *Journal of Differential Geometry*, 56(1), 67-92. doi:<https://doi.org/10.4310/jdg/1090347525>
- [9] Lima, E. L. (2007). *Variedades diferenciáveis* (No. 15). Instituto Matemática Pura e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas.
- [10] Milnor, J. (1968). *Singular points of complex hypersurfaces* (No. 61). Princeton University Press. doi:<https://doi.org/10.1515/9781400881819>
- [11] Némethi, A., & Zaharia, A. (1992). Milnor fibration at infinity. *Indagationes Mathematicae*, 3(3), 323-335. doi:[https://doi.org/10.1016/0019-3577\(92\)90039-N](https://doi.org/10.1016/0019-3577(92)90039-N)
- [12] Parusiński, A. (1995). On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity. *Compositio Mathematica*, 97(3), 369-384.
- [13] Pham, F. (1983). Vanishing homologies and the n variables saddlepoint method. In *Proc. Symp. Pure Math.* (Vol. 40, pp. 310-333). doi:<https://doi.org/10.1090/pspum/040.2/713258>
- [14] Rabier, P. J. (1997). Ehresmann fibrations and Palais-Smale conditions for morphisms of Finsler manifolds. *Annals of Mathematics*, 647-691. doi:<https://doi.org/10.2307/2952457>

- [15] Steenrod, N. (1999). The topology of fibre bundles. Princeton University Press.
- [16] Tibăr, M., & Zaharia, A. (1999). Asymptotic behaviour of families of real curves. *Manuscripta Mathematica*, 99(3), 383-393. doi:<https://doi.org/10.1007/s002290050180>
- [17] Tibăr, M. (2007). Polynomials and vanishing cycles (Vol. 170). Cambridge University Press. doi:<https://doi.org/10.1017/CB09780511543166>
- [18] Suzuki, M. (1974). Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébriques de l'espace $\mathbb{C}^2$. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 26(2), 241-257. doi:<https://doi.org/10.2969/jmsj/02620241>