
CAPÍTULO 5

Resultados e Discussões



ESTE CAPÍTULO são apresentados os principais resultados obtidos através dos ensaios experimentais e de modelagem e simulação de processos de sedimentação gravitacional em batelada. O capítulo é basicamente dividido em duas partes: (1) otimização, desenvolvimento e análise dos resultados experimentais de laboratório e (2) simulação numérica de um modelo matemático para a sedimentação em campo gravitacional. Os resultados experimentais foram analisados e discutidos fazendo uso de técnicas estatísticas apropriadas para a confiabilidade de parâmetros cuja reprodutibilidade se tornou possível graças à otimização e controle das condições de réplicas.

5.1 Otimização dos Testes Experimentais e Sistematização dos Erros

5.1.1 Otimização de medidas de centralidade e espalhamento de uma amostra de dados

Para avaliar o erro na medida da contagem de pulsos associado à variabilidade incontroleável do próprio equipamento, buscou-se analisar o comportamento das distribuições amostrais envolvidas nos experimentos, coletando-se uma quantidade de pontos relativamente grande ($n=100$ pontos) a partir da repetição de uma mesma medida de contagem de pulsos que atingiam o detector. O conjunto total de pontos era suposto como sendo o

que possuía a melhor representatividade dos dados, aproximando-se de uma população de interesse. Tal medida, amostrada com número de observações tão grande quanto possível, poderia ser interpretada como sendo a melhor representação do conjunto de dados de contagens de pulsos coletados, como foi feito inicialmente por Arouca (2003).

Pelo Teorema do Limite Central (Anexo A), quando o número de pontos de uma amostra é muito grande a média amostral tende ao valor mais esperado da média populacional com mínimo desvio, ou seja, a distribuição de erros tende para a normalidade (BARROZO, 2001). Desta forma, haverá um número mínimo de medidas de uma mesma amostra tal que seu desvio padrão tenderá ao mínimo desvio que garantirá a melhor representação da média. O método desenvolvido por Arouca (2003) para determinação da representatividade ótima da média de pulsos de radiação apresenta o comportamento da relação dada pelo desvio padrão de uma amostra de tamanho variável de medidas de contagens de pulsos de radiação e o desvio padrão da amostra total de 100 pontos, como mostra a Figura 5.1.

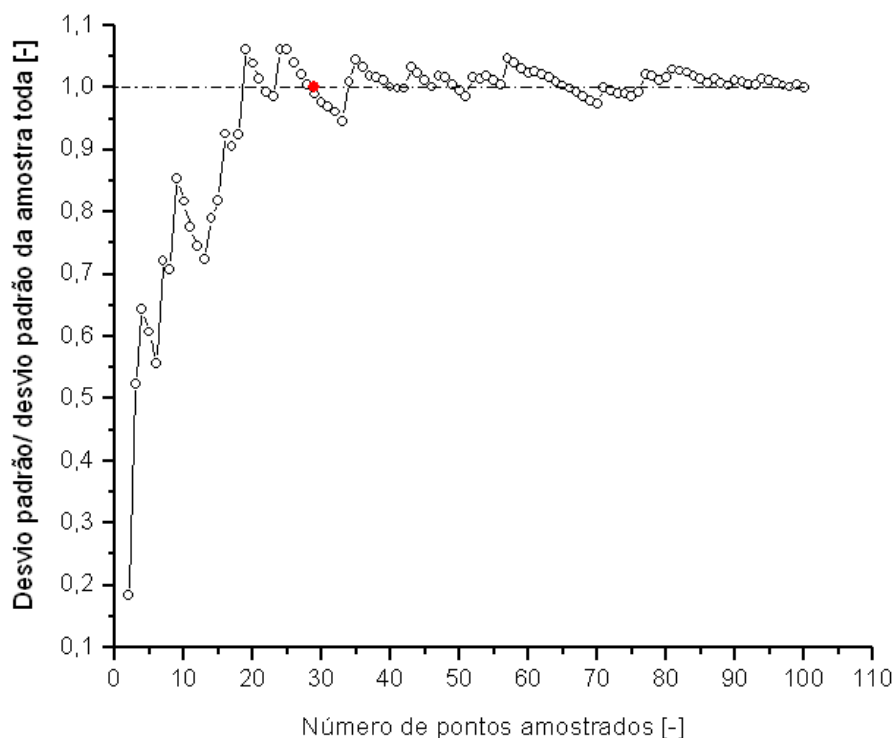


Figura 5.1: Análise do desvio padrão amostral das contagens de pulsos.

Analisando-se a Figura 5.1 observa-se que a partir de 20 pontos amostrados, a distribuição de erros tende para a normalidade, apresentando para tanto, mais desvios pequenos que desvios grandes, o que conseqüentemente caracteriza uma média amostral com boa representação do valor real. Arouca (2003) arbitrou a coleta de 30 pontos de contagens de pulsos como sendo o menor valor que garantiria uma boa reprodutibilidade dos ensaios,

permitindo cálculos de concentração que conduzem a representações mais realistas. Nota-se ainda através da Figura 5.1 que a amplitude oscilatória em torno do valor um, é menor a partir de 35 pontos amostrados. Certamente, com base na análise gráfica, qualquer valor adotado a partir de uma amostra de 20 pontos teoricamente reproduz bem o valor médio para o cálculo da concentração local de sólidos.

A grande vantagem de se otimizar a aquisição de dados está diretamente relacionada à representatividade dos mesmos e também no ganho de reprodutibilidade dos ensaios laboratoriais que por sua vez se tornam mais precisos.

5.1.2 Análise do erro associado ao intervalo de tempo de contagem de pulsos

Para análise do comportamento da variabilidade de contagens de pulsos em diferentes intervalos de tempos medidos, utilizou-se o sistema constituído pela fonte radioativa e o detector sem que houvesse anteparo atenuador entre os mesmos. As durações das contagens de pulsos (CP) variaram em intervalos de tempos $t_c = 3, 5, 10, 12, 15, 20, 30$ e 50 segundos, sendo que em cada caso eram realizadas 30 medidas através das quais se avaliava a média e o desvio padrão de cada amostra. Os valores medidos em cada caso foram divididos pelos tempos reais das aquisições dos dados, a fim de se padronizar a contagem em pulsos por segundo.

A Tabela 5.1 apresenta os valores das contagens de pulsos a partir de médias e desvios de amostras de 30 pontos para diferentes intervalos de tempo avaliados.

Tabela 5.1: Contagens de pulsos médios para diferentes intervalos de tempos.

t_c [s]	CP [s^{-1}]	d_v [s^{-1}]	$d_{\%}$ [%]
3	4174	148	3,6
4	4090	68	1,7
5	4218	56	1,3
10	4234	41	1
12	4245	30	0,7
15	4239	28	0,7
20	4243	22	0,5
30	4241	16	0,4
50	4259	11	0,3

Uma vez que não havia meio atenuador entre a fonte radioativa e o sistema de detecção tal que pudesse alterar a contagem com o decorrer do tempo, evidentemente pode-se considerar que todas as medidas em diferentes intervalos de tempos deveriam conduzir a

um mesmo valor médio de contagens de pulsos, a menos do desvio natural da amostra. Partindo-se de tal hipótese, para o valor médio geral totalizado a partir dos oito casos de diferentes intervalos de tempos de amostragem com 30 pontos cada, a contagem de pulsos de uma mesma medida contabilizada 240 vezes foi equivalente a (4216 ± 48) pulsos por segundo (cps). A Figura 5.2 torna possível a análise gráfica entre as medidas de centralidades para cada intervalo de tempo e a média geral, assim como suas variabilidades.

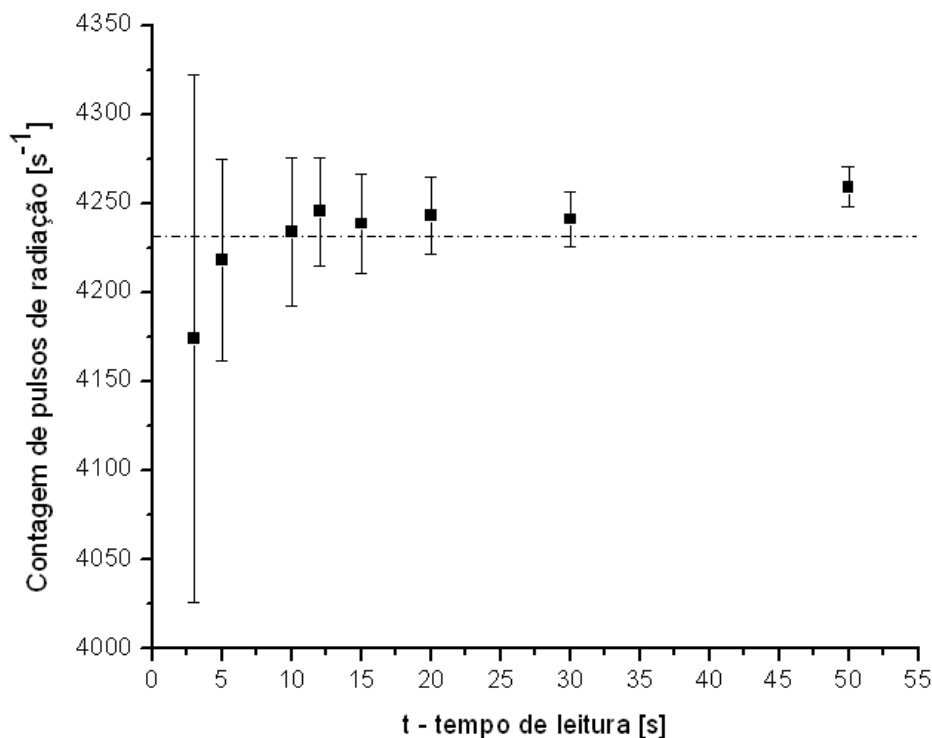


Figura 5.2: Médias e desvios de contagens de pulsos para diversos intervalos de tempo.

A média geral das contagens de pulsos é representada pela linha tracejada na Figura 5.2. Nota-se que, apesar de medidas em intervalos de 3 e 5 segundos conduzirem a uma maior quantidade de pontos em um menor tempo em testes experimentais, seus desvios foram bem superiores aos demais casos observados. Além disso, a média obtida pela amostra de 30 pontos de 3 segundos apresentou maior resíduo quando comparada à média geral. A Figura 5.3 apresenta os desvios percentuais para cada conjunto.

Certamente, a depender da situação, pontos amostrados a partir de contagens de pulsos em intervalos de 50 segundos conduzem aos valores mais aproximados da medida real. Entretanto, em testes dinâmicos cuja concentração local de sólidos varia em função do tempo, tal intervalo seria inviável pela própria alteração da grandeza medida durante o período. Assim sendo, o intervalo de tempo ideal deve ser definido para cada teste em específico, a depender ou não de variações da contagem como função do tempo, mostrando-se para tanto como sendo aquele que associa o menor tempo com os menores desvios.

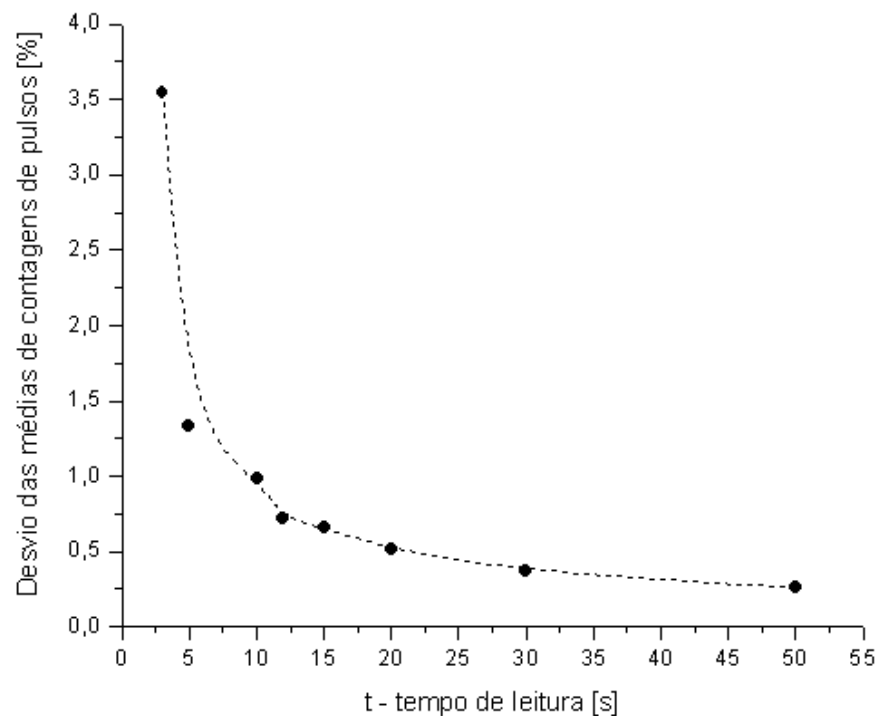


Figura 5.3: Desvios percentuais das contagens de pulsos para diversos intervalos de tempo.

5.1.3 Avaliação de medidas para condições de referências do branco da proveta através da variabilidade dos dados por imperfeições dos recipientes de testes

A atenuação de raios gama que atravessam um determinado meio físico é função, dentre outras variáveis, da espessura do mesmo (GARDNEY; ELY-JR, 1967).

Os recipientes de testes eram constituídos por tubos cilíndricos de vidro para os quais, inicialmente, foram realizadas algumas medidas de contagem de pulsos, corrigidas pelo tempo morto, quando não havia a presença de sólidos (R_0). O teste para determinação das condições de referência foi denominado branco da proveta. O procedimento de leitura em diversos pontos da coluna visava avaliar imperfeições na espessura do meio vidro-água capazes de provocar diferenças significativas na contagem de pulsos ao longo do tubo, fato que, uma vez constatado, tornaria necessária a estipulação de uma condição de referência para cada posição.

Para a análise da variabilidade de contagens de pulsos medidos para o recipiente de testes A foram realizadas leituras no meio contendo apenas água destilada em 61 posições igualmente espaçadas entre 0 e 30 cm acima da base da coluna. Cada posição teve a contagem de pulsos que atravessavam o meio vidro-água medidas por 30 vezes, totalizando 1830 pontos utilizados em testes de significância.

O desvio médio entre as diversas posições ao longo do recipiente de testes A foi de 2,2%. A Figura 5.4 apresenta os valores médios de referência para cada posição, assim como os desvios padrões verificados. Nota-se através da Figura 5.4 que os valores de contagens de pulsos apresentaram em geral uma aleatoriedade em torno de uma média, com exceção de posições na faixa de 13,5 e 16,5 cm, nas quais são verificadas as maiores variações na espessura da parede da coluna.

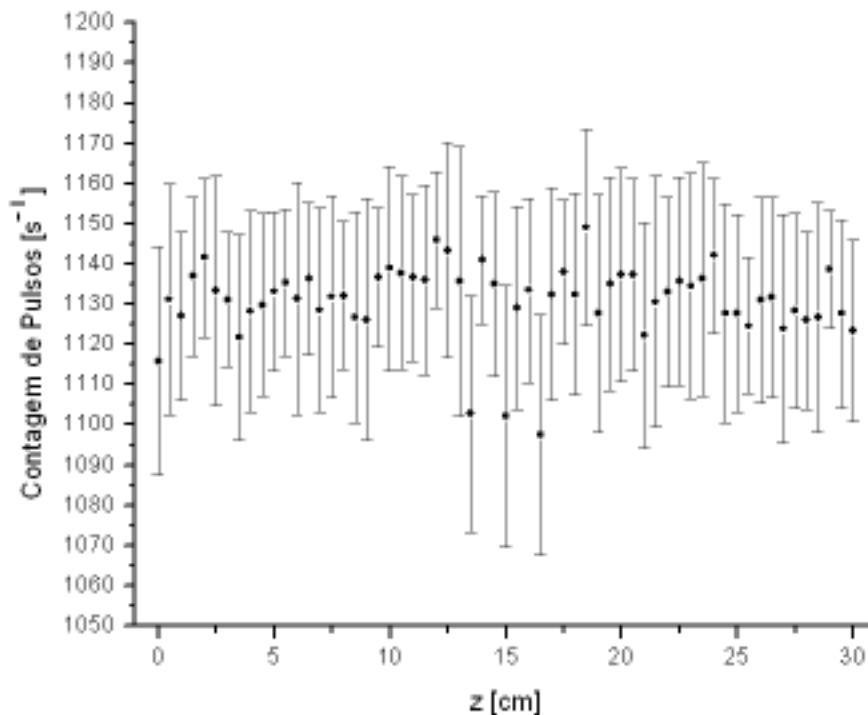


Figura 5.4: Distribuição da contagem de pulsos ao longo do recipiente de testes A.

A mesma análise foi aplicada ao recipiente de testes B, no qual foram realizadas diversas leituras de pulsos que atravessavam o meio contendo apenas água destilada, percorrendo-se 49 posições diferentes em ao longo de 25 cm, iniciando-se a partir de 0,5 cm acima de sua base. Para cada posição de leitura no recipiente de ensaios foram realizadas 30 medidas de contagens de pulsos totalizando 1470 pontos, dos quais foram calculados, as médias locais e os respectivos desvios padrões.

A Figura 5.5 apresenta os valores médios de contagens de pulsos para diversas posições no recipiente de testes B.

Observou-se pela análise dos resultados que os desvios padrões das contagens de pulsos eram em média de 1,2%, e os dados apresentavam uma certa tendência de diminuição da contagem conforme se afastava da base do tubo, fato que pode ser mais bem visualizado na Figura 5.5.

Uma vez que os resultados para o recipiente de testes B apresentam claramente uma tendência de diminuição da contagem de pulsos com o aumento da altura do tubo

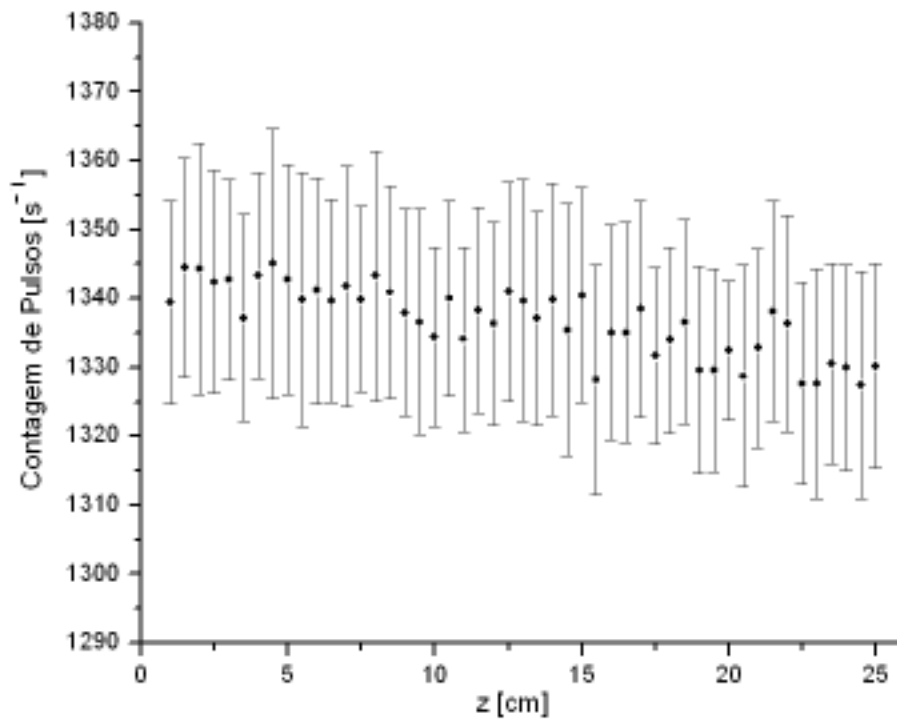


Figura 5.5: Distribuição da contagem de pulsos ao longo do recipiente de testes B.

imaginou-se que erros sistemáticos, definidos no Anexo A, deveriam ainda ser eliminados. Desta forma repetiu-se as leituras de contagens de pulsos para todas as posições sob as mesmas condições operacionais. Os resultados obtidos foram idênticos ao anterior, variando devido apenas a desvios do próprio equipamento. A repetibilidade coerente dos dados comprova que realmente existe uma pequena variação na espessura do tubo ao longo de seu comprimento.

O passo seguinte das avaliações das medidas de condições de branco da proveta para os recipientes de testes A e B foi investigar a possibilidade da não homogeneidade dos tubos causarem alguma diferença significativa na média real das contagens de pulsos caso a condição de referência (R_0) seja admitida como única para todas as posições em cada coluna em particular. Tal estudo pode ser desenvolvido pela elaboração de testes de hipóteses aplicados aos dados experimentais em cada caso.

Os testes de hipóteses são definidos no Anexo A, Fundamentos da Estatística.

As hipóteses de nulidade (H_0) e alternativa (H_1) adotadas para a investigação foram:

- H_0 : $\eta = \eta_1 = \dots = \eta_i$ (as médias das contagens de pulsos são iguais para todas as posições);
- H_1 : $\eta \neq \eta_1 \neq \dots \neq \eta_i$ (as médias das contagens de pulsos são diferentes).

sendo o subscrito i equivalente a 61 ou 49, para os recipientes A e B, respectivamente.

Comparações entre mais de dois tratamentos foram realizadas estipulando-se um nível de significância de 5% ($\alpha=0,05$) para os testes. Os cálculos foram desenvolvidos através de elaboração de um quadro de ANOVA (Anexo A) e os testes estatísticos são fundamentados na distribuição de *F de Fisher*, utilizando-se para tanto os recursos do software *Statistica*® 5.0.

Os resultados apresentaram níveis de significância α observados (α_{obs}) bem inferiores ao nível de significância estipulado, como mostra a Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Análise estatística do teste de hipóteses aplicado aos casos dos frascos A e B.

Recipiente	F_{obs}	Graus de Liberdade	α_{obs}
A	4,32	60	$2,08 \cdot 10^{-24}$
B	2,5	48	$1,02 \cdot 10^{-7}$

O teste mostrou que, em ambos os casos, *F's de Fisher* observados (F_{obs}) encontram-se em uma área bem menor que a área que delimita o nível de significância da distribuição de *F de Fisher* em 5% ou seja, dentro da região de rejeição de H_0 . Isso implica que existem diferenças reais entre as médias das contagens de pulsos de radiação que atravessam o meio físico ao longo dos recipientes de testes A e B. No caso particular do recipiente de testes B, a sua não-uniformidade da espessura ao longo do recipiente contribui para uma menor atenuação em posições mais próximas da base.

Os valores da contagem de pulsos corrigida (R_0) obtidos foram usados como referência em cálculos futuros.

5.2 Sedimentação em batelada: Resultados experimentais

5.2.1 Análise do comportamento de sistemas sólido-líquidos com base nas propriedades físicas dos materiais sólidos

Avaliação das variáveis significativas na dinâmica de queda de partículas sólidas imersas em meio fluido

A grande utilização industrial de equipamentos que promovem a separação sólido-líquido é responsável por um crescente interesse no desenvolvimento de estudos das variáveis

envolvidas no processo. A dinâmica da sedimentação de partículas em meio líquido e a compressibilidade do sedimento através da acomodação das partículas são características particulares do tipo de sólido envolvido na separação. Partículas sólidas freqüentemente utilizadas em vários processos industriais quase nunca apresentam formas e tamanhos regulares dificultando consideravelmente a complexidade da descrição do processo.

Para a condução dos experimentos, suspensões aquosas de caulim ($2,577 \pm 0,001$)g/cm³, carbonato de cálcio ($2,69 \pm 0,01$)g/cm³ e microesferas de vidro ($2,50 \pm 0,01$)g/cm³ foram preparadas nas concentrações desejadas em testes de sedimentação em batelada monitorados pela técnica de atenuação de raios gama.

Análises visuais das partículas dos sólidos caulim, carbonato de cálcio e microesferas de vidro foram feitas usando o microscópio ótico *Neophot 21*[®] e são apresentadas na Figura 5.6. Nota-se que, enquanto partículas sólidas dos materiais caulim e carbonato de cálcio apresentam formas bastante irregulares, as microesferas de vidro destacam-se por suas altas esfericidades (mínima de 80% fornecida pelo fabricante).

Cabe ressaltar também que as amostras de sólidos utilizadas nos testes preliminares apresentaram diferentes faixas de tamanhos das partículas. As distribuições granulométricas dos materiais foram obtidas através do difratômetro *Laser* com um *Malvern Mastersizer Microplus*[®] (MAF 5001) e os diâmetros de corte determinados para as amostras foram: caulim ($d_{50} = 16,8 \mu\text{m}$), carbonato de cálcio ($d_{50} = 3 \mu\text{m}$) e microesferas de vidro ($d_{50} = 37,2 \mu\text{m}$) (Ver Seção 4.7.1 do Capítulo 4). Em geral notou-se que partículas associadas a amostras de carbonato de cálcio são bem mais finas quando comparadas aos demais sólidos.

Testes de sedimentação em batelada foram conduzidos a partir de suspensões aquosas de mesma concentração volumétrica inicial para cada um dos sólidos avaliados ($\varepsilon_{s0} = 4\%$). Sendo as porosidades dos meios idênticas em todos os casos, a dinâmica de queda das partículas foi analisada na região de sedimentação livre na qual as partículas sólidas percorrem livremente a trajetória sem o efeito da tensão nos sólidos. O monitoramento do deslocamento da interface superior como uma função do tempo em cada teste permitiu a determinação das velocidades iniciais de queda das partículas pela inclinação das retas, como mostra a Figura 5.7. Foram reproduzidas três réplicas para cada sólido submetidas às mesmas condições experimentais (Réplicas 1, 2 e 3).

Analisando-se a Figura 5.7 observa-se que partículas de microesferas de vidro decantam muito mais rapidamente que partículas de caulim ou carbonato de cálcio. As velocidades iniciais de sedimentação medidas para cada sólido foram: $v_{s0} = (18,9 \pm 0,7) \cdot 10^{-3}$ cm/s para suspensões aquosas de caulim, $v_{s0} = (3,4 \pm 0,3) \cdot 10^{-3}$ cm/s para carbonato de cálcio e $v_{s0} = (102 \pm 9) \cdot 10^{-3}$ cm/s para microesferas de vidro.

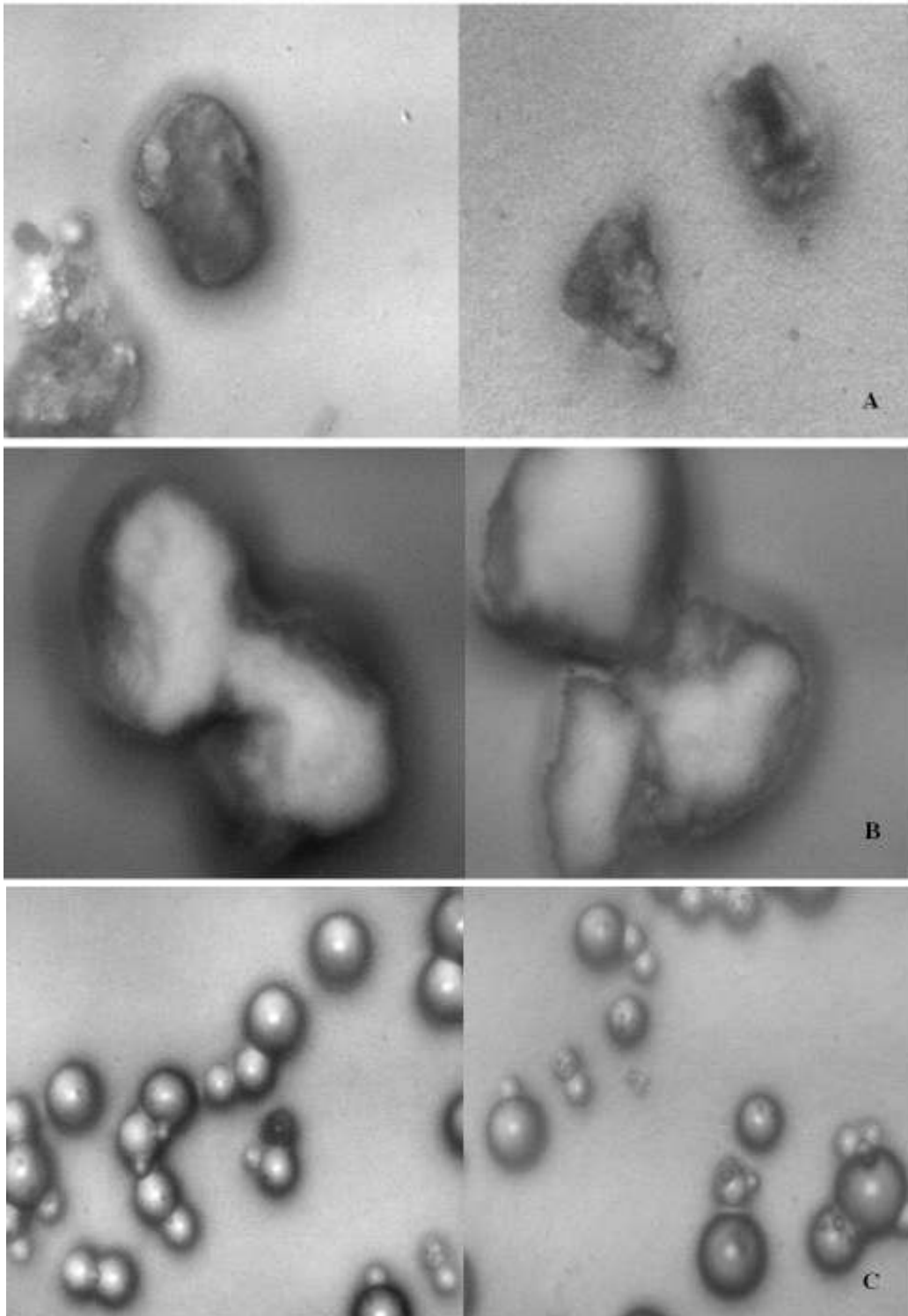


Figura 5.6: Análise visual das partículas sólidas utilizando microscópio ótico: caulim (A), carbonato de cálcio (B) e microesferas de vidro (C).

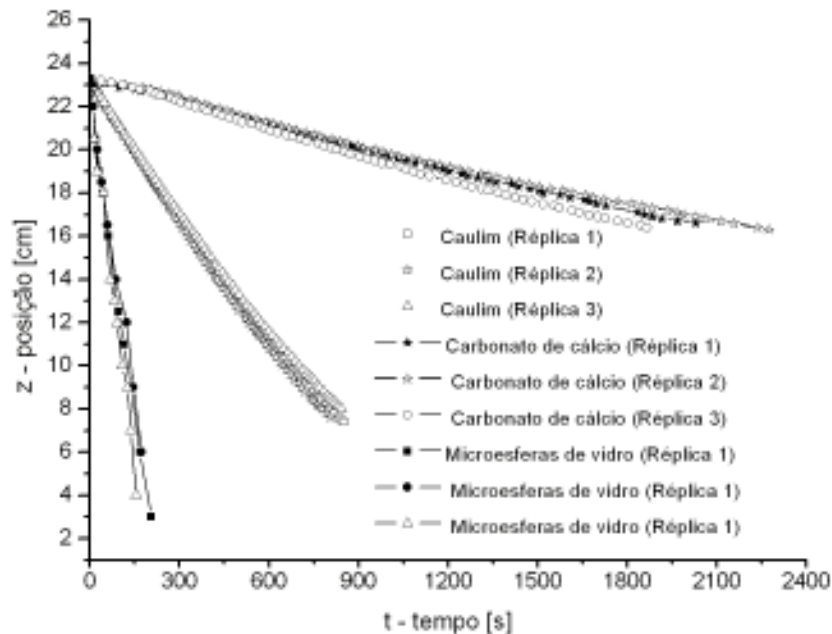


Figura 5.7: Monitoramento de interfaces superiores em testes de sedimentação em batelada.

As esferas de vidro, apesar de possuírem menor densidade em relação aos demais sólidos, apresentaram velocidade de sedimentação cerca de 30 vezes superior ao de partículas de carbonato de cálcio que por sua vez apresentaram menores diâmetros e a maior densidade entre os materiais. Tal observação pode ser justificada pela alta esfericidade das partículas que garantem menores efeitos de resistividade do meio.

Partículas de carbonato de cálcio separaram-se numa dinâmica bem diferente comparada aos demais sólidos provavelmente por se tratar de um material que, apesar de apresentar a maior densidade entre os casos avaliados, é bastante fino (tipo: extraleve), além do que a análise visual de suas partículas mostrou a grande irregularidade nos formatos das partículas.

Observa-se que partículas mais esféricas sedimentam mais rapidamente que partículas de formas irregulares, além do que a distribuição de tamanhos da amostra pode ser uma variável bastante significativa na descrição dinâmica do processo de separação.

Naturalmente são observadas diferenças significativas entre as dinâmicas de queda das partículas de diferentes materiais, sendo que tais diferenças não se restringem apenas aos efeitos de diferenças de densidades entre as fases, mas também aos efeitos de forma e distribuição de tamanhos, além de possíveis efeitos cruzados entre tais variáveis.

Avaliação das variáveis significativas na acomodação de partículas sólidas em sedimentos

Para um conhecimento detalhado e a descrição dos efeitos de compressibilidade de sedimentos formados a partir de teste de sedimentação em batelada utilizou-se a técnica de atenuação de raios gama em suspensões aquosas de concentrações iniciais de 8% em volume. As distribuições de concentrações em sedimentos formados pela decantação de partículas sólidas de caulim, carbonato de cálcio e microesferas de vidro foram reproduzidas a partir de três réplicas para cada material. Tais medidas permitiram a análise das acomodações das partículas apresentadas nos diagramas da Figura 5.8.

Analisando-se a Figura 5.8 nota-se que suspensões aquosas de diferentes materiais sólidos preparadas sob as mesmas condições na experimentação produziram sedimentos com acomodações bastante distintas. Os diagramas mostram que sedimentos formados por partículas de maior esfericidade, no caso microesferas de vidro, se acomodaram produzindo sedimentos mais compactados com concentrações volumétricas de sólidos até 56% na base da coluna, enquanto que sedimentos de caulim apresentaram concentrações máximas de 26% em volume e carbonato de cálcio 16%. Após 48 horas de repouso as alturas finais dos sedimentos formados eram aproximadamente 13, 14 e 3,5 cm para caulim, carbonato de cálcio e microesferas de vidro, respectivamente.

Observa-se que sedimentos formados a partir de suspensões aquosas de microesferas de vidro apresentam melhor acomodação das partículas. Naturalmente a facilidade das partículas se acomodarem formando o sedimento se deve por sua alta esfericidade, ao contrário dos materiais como caulim e carbonato de cálcio que, além de apresentarem maior resistividade durante a queda das partículas pelo próprio efeito da camada limite, também apresentam maior dificuldade na acomodação final por suas formas irregulares e de baixa esfericidade.

As réplicas 1, 2 e 3 apresentadas nos diagramas da Figura 5.8 foram preparadas sob as mesmas condições experimentais e servem para avaliar a precisão da técnica nas medidas de concentrações.

A compressibilidade de sistemas sólido-líquidos pode ser avaliada através de medidas de pressões nos sólidos. Para tanto, de posse das distribuições de concentrações apresentadas na Figura 5.8 utilizou-se o procedimento descrito na Seção 4.12.1 para determinação da pressão nos sólidos como função da porosidade local através da Equação (4.43) (DAMASCENO, 1992) A Figura 5.9 apresenta as distribuições de pressões nos sólidos para os materiais: caulim, carbonato de cálcio e microesferas de vidro.

Analogamente as réplicas 1, 2 e 3 da Figura 5.9 representam resultados obtidos sob

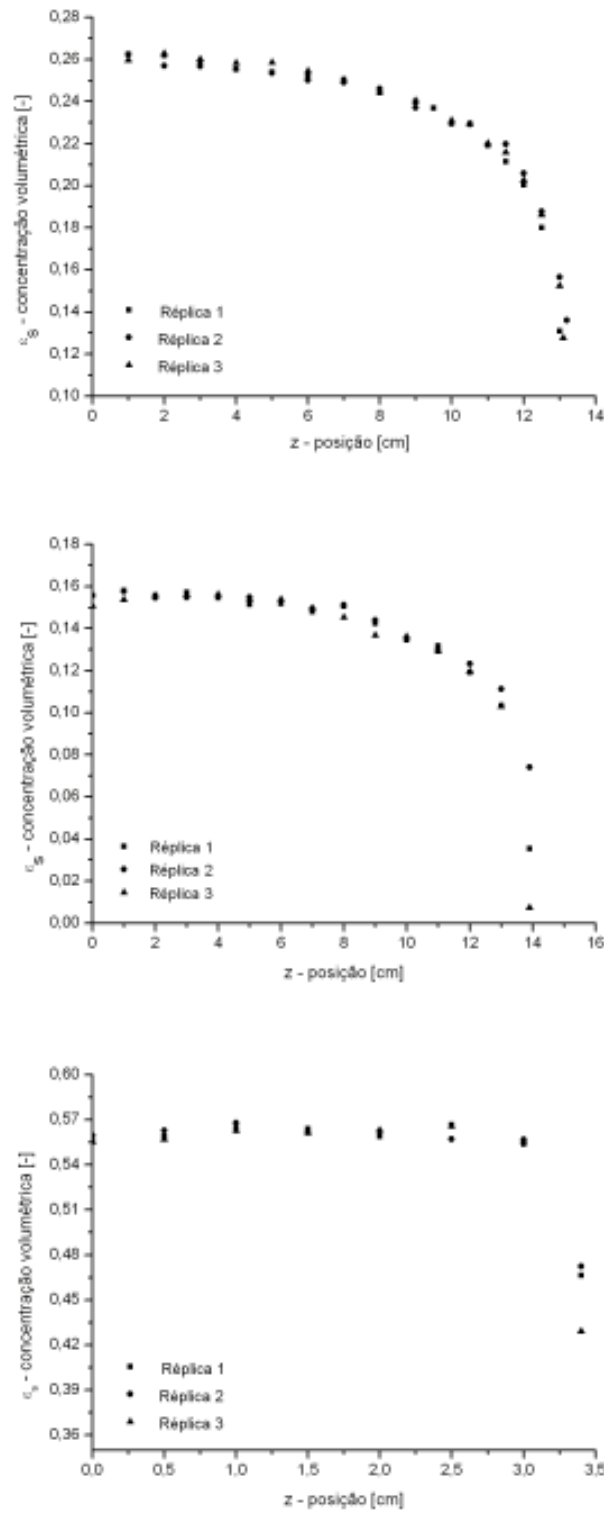


Figura 5.8: Diagramas de distribuições em sedimentos de caulim (A), carbonato de cálcio (B) microesferas de vidro (C).

as mesmas condições da experimentação.

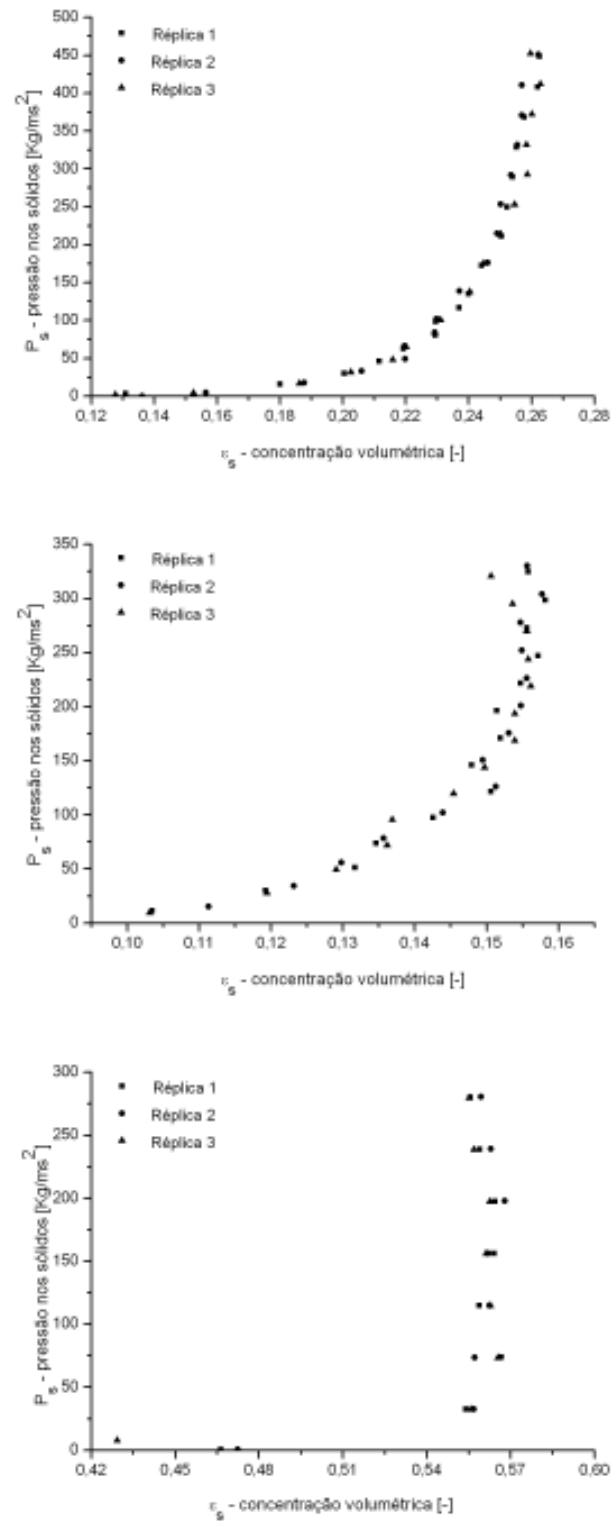


Figura 5.9: Pressões nos sólidos em sedimentos de caulim (A), carbonato de cálcio (B) microesferas de vidro (C).

Através de uma análise geral dos diagramas de pressão nos sólidos apresentados na

Figura 5.9 conclui-se que o sólido carbonato de cálcio foi o mais compressível dentre os três materiais avaliados, seguido pelo caulim. Tal constatação se deve pela curva acentuada da distribuição de pressão como função da concentração local. Em contrapartida, o material sólido constituído pelas microesferas de vidro mostrou-se como o mais incompressível por formar sedimentos com pequenos gradientes de concentração ao longo de sua altura.

As consolidações das partículas nos sedimentos certamente são funções da forma e da distribuição de tamanhos dos sólidos. Partículas com formas irregulares produzem sedimentos menos compactados com os maiores gradientes de concentrações.

As diferenças significativas entre os sedimentos formados por diferentes materiais são evidentes através das Figuras 5.8 (A, B e C) e tais diferenças não se restringem apenas aos efeitos de diferenças de densidades entre as fases, mas também aos efeitos de forma, distribuição de tamanhos e possíveis efeitos cruzados entre tais variáveis. Nota-se que a acomodação das partículas e conseqüentemente os efeitos de compressibilidade do material são características intrínsecas dos sólidos. Para tanto, testes que avaliam a importância de tais variáveis na compressibilidade dos sistemas sólido-líquidos foram desenvolvidos e são apresentados na sequência.

Efeito da distribuição de tamanhos de partículas na dinâmica de separação sólido-líquido e na acomodação de sedimentos

Para a condução dos testes experimentais foi utilizado caulim como fase sólida. Conforme observado, o material sólido cujas propriedades foram apresentadas e discutidas no Capítulo 4, doravante relacionado no texto como amostra original, possui densidade $\rho=(2,577\pm0,001)$ g/cm³ e distribuição de tamanhos de partículas que seguem o modelo de RRB com os maiores diâmetros observados na ordem de 100 μ m. Uma outra amostra de caulim foi classificada à partir da amostra original por meio de um sistema de peneiras vibratórias. Tal amostra, cujo diâmetro de peneira final obtido é inferior a 38 μ m, será relacionada no texto como a amostra de sólidos classificados com $d<38\mu$ m. Desta forma, duas diferentes classificações de um mesmo material sólido são empregados para a caracterização e estudo do efeito isolado de distribuição de tamanhos na dinâmica de separação sólido-líquido e na acomodação de sedimentos, anulando os efeitos de densidade e forma da partículas.

Testes de sedimentação em batelada foram conduzidos à partir de suspensões aquosas de concentração inicial de 4% em volume para cada amostra estudada. Para cada teste foram realizadas três replicas adicionais favorecendo a confiabilidade dos dados. As dinâmicas de queda das partículas foram analisadas para a região de sedimentação livre na qual as partículas sólidas decantam livremente, sem efeito de tensão nos sólidos.

Monitorando-se o deslocamento da interface superior em função do tempo em cada teste de diferentes amostras (amostra de sólidos classificados com $d < 38 \mu\text{m}$ e a amostra original) foi possível determinar a velocidade de sedimentação das partículas pela inclinação inicial do gráfico $z-t$, cuja velocidade de sedimentação é constante e igual a velocidade inicial de sedimentação do sólido, como mostra a Figura 5.10.

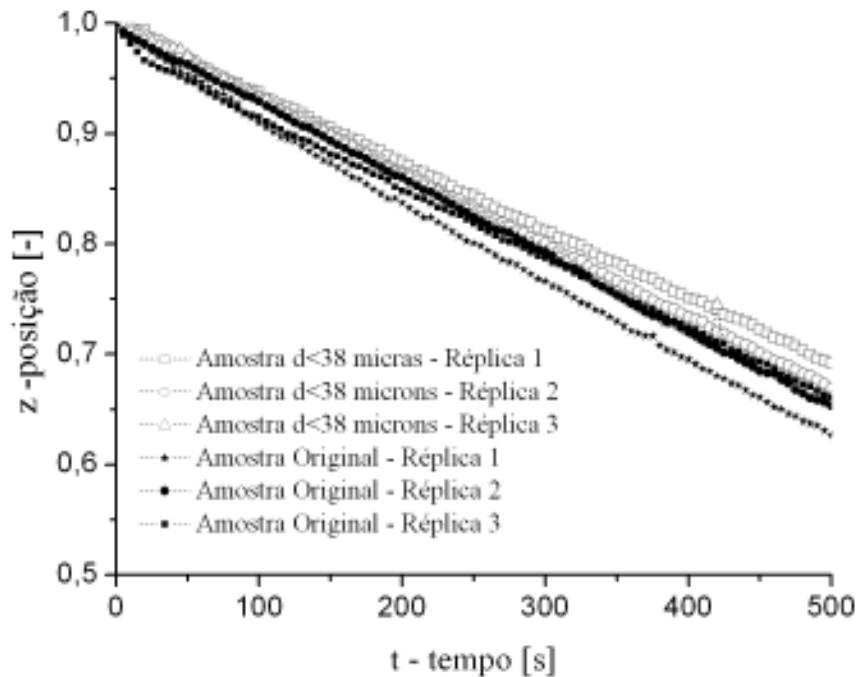


Figura 5.10: Monitoramento da interface superior em testes de sedimentação batelada.

As alturas iniciais das suspensões foram medidas e eram equivalentes a 22 cm. As velocidades iniciais de sedimentação medidas para cada amostra foram: $v_s = (15,5 \pm 1) \cdot 10^{-3}$ cm/s para o conjunto de partículas da faixa de distribuição de tamanhos da amostra original e $v_s = (13,6 \pm 0,4) \cdot 10^{-3}$ cm/s para partículas que foram classificadas por peneiras ($d < 38 \mu\text{m}$). Observa-se que a sedimentação das partículas cuja a faixa de distribuição de tamanhos apresenta em sua maioria os menores diâmetros, as velocidade de sedimentação foram menores. Partículas em classes de menores diâmetros decantaram mais lentamente que o conjunto de partículas da amostra original.

Medidas de distribuições de concentração nos sedimentos formados com concentração igual a 8% permitiram avaliar a acomodação das partículas representadas pelos diagramas das Figuras 5.11 e 5.12.

De acordo com a Figura 5.11, podemos verificar que a amostra original produz sedimentos de altura igual a 0,09 m, aproximadamente, enquanto, que a amostra de partículas menores produz sedimentos menores na Figura 5.12. A Figura 5.12 indica que os sedi-

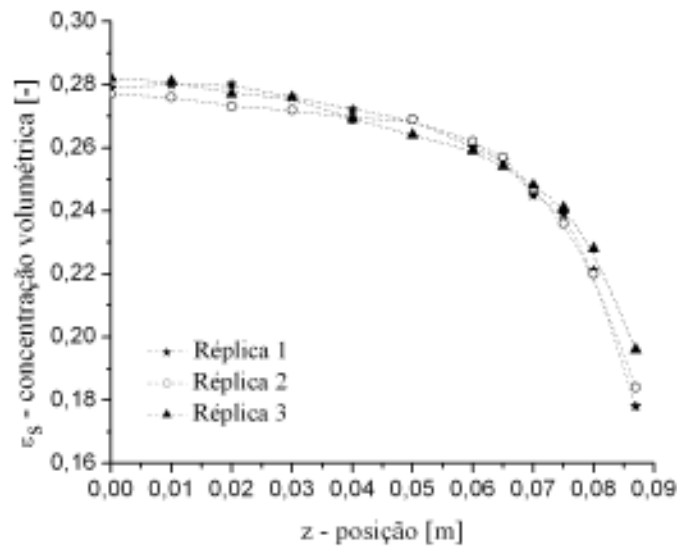
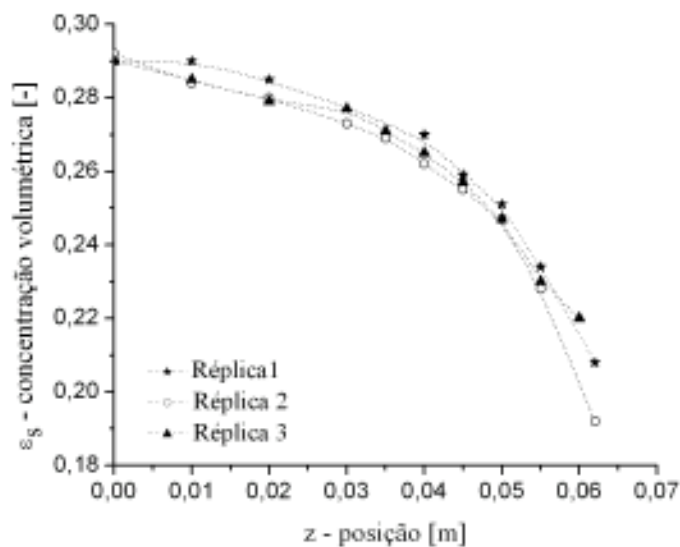


Figura 5.11: Distribuição de concentrações: amostra original.

mentos formados pelas partículas mais finas, neste caso com $d < 38\mu\text{m}$ selecionadas pelo sistema de peneiras vibratórias, forma sedimentos mais compactados (concentração de sólidos de 29% em volume na base) quando comparado com a amostra original formada por partículas numa faixa de tamanhos mais ampla.

De acordo com as Figuras de 5.10 a 5.12, observou-se diferenças significativas no comportamento dinâmico e na acomodação dos materiais sólidos em suspensões aquosas produzidas por diferentes tamanhos de partículas, e estas diferenças não se restringem

Figura 5.12: Distribuição de concentrações: amostra classificada por peneiras ($d < 38\mu\text{m}$).

apenas à diferença de densidade e forma, mas também à distribuição de tamanhos. Efeito isolado da distribuição de tamanhos das partículas se mostra bastante significativo na cinética de sedimentação e na formação do sedimento.

As distribuições de concentrações nos sedimentos obtidos experimentalmente passaram por testes de regressões não-lineares com o intuito de se obter uma equação representativa da concentração em função da posição, representada por (AROUCA, 2003):

$$\varepsilon_s = \frac{(a + cz)}{(1 + bz)} \quad (5.1)$$

onde a , b e c são parâmetros obtidos pela regressão apropriada.

Os coeficientes de correlação encontrados indicam que, levando-se em consideração cada réplica experimental, pelo menos 97% dos resultados são representados pela Equação 5.1. Determinada a concentração dos sólidos, foi possível obter a pressão dos sólidos, supondo que esta é função exclusiva da concentração local através da Equação 4.43, como mostra a Figura 5.13, utilizando-se a metodologia empregada por Damasceno (1992).

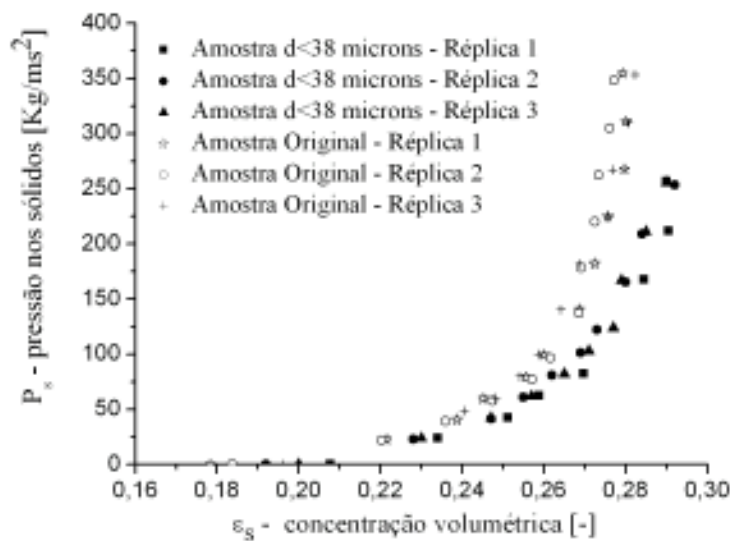


Figura 5.13: Pressão nos sólidos versus concentração local das suspensões ($\varepsilon_{s0} = 8\%$).

Através de uma análise da Figura 5.13 nota-se claramente que a pressão na amostra original de caulim foi superior a amostra peneirada ($d < 38 \mu\text{m}$), certamente devido ao fato do sedimento formado ser maior. Desta forma, o efeito da distribuição de tamanhos de partículas mostrou-se bastante significativo, uma vez que partículas maiores possuem maior massa e então sedimentam mais rapidamente. A concentração local aumenta na nova condição de estabilidade quando em um mesmo teste, nas mesmas condições experimentais, ocorre em sua maioria, partículas de pequenos diâmetros.

Efeito da forma das partículas na dinâmica de separação sólido-líquido e na acomodação de sedimentos

Os fenômenos de separação sólido-líquido envolvem inúmeras variáveis que tornam a descrição do processo bastante complexa. No processo de decantação de partículas sólidas em meio líquido, tal como a sedimentação gravitacional, a separação das fases está fortemente relacionada à diferença de densidades entre as mesmas. Entretanto, sabe-se que a distribuição de tamanhos e o formato das partículas podem definir a cinética de separação e o arranjo da matriz porosa no sedimento.

O objetivo principal dessa análise é isolar o efeito da forma das partículas no processo de separação sólido-líquido e avaliar quantitativamente a importância de tal efeito na descrição física do fenômeno.

Para a condução dos experimentos, procurou-se isolar o efeito da forma das partículas utilizando-se dois sólidos com esfericidades distintas. O método de caracterização das esfericidades foi a análise visual através de microscopia ótica (Figura 5.6). Os sólidos empregados nos testes foram: microesfera de vidro, com esfericidade mínima observada equivalente à 80%, e caulim, cujas partículas possuem baixa esfericidade, como pode ser observado através da Figura 5.6.

As partículas de microesferas de vidro foram submetidas ao processo de peneiramento para classificação em diferentes faixas de tamanhos. Tais partículas separadas por uma peneira de 400 *mesh* apresentaram o diâmetro médio de Sauter ($\bar{D}$) equivalente à 11,07 (μm).

Para garantir a baixa esfericidade do caulim, o material foi submetido aos processos de quebra das partículas em moinho de bolas e peneiramento. A distribuição de tamanhos de partículas final foi avaliada por difração *Laser* utilizando o granulômetro *Malvern Mastersizer*. O diâmetro médio de Sauter calculado para a amostra final foi equivalente à $\bar{D}=10,65$ (μm).

Uma vez que ambas as amostras dos materiais sólidos possuem semelhanças nas propriedades físicas de densidade e de classe de tamanhos, o efeito da forma das partículas se torna o efeito principal.

Testes de sedimentação em batelada foram conduzidos à partir de suspensões aquosas de concentração inicial de 4% em volume para cada amostra estudada. As dinâmicas de queda das partículas foram analisadas para a região de sedimentação livre na qual as partículas sólidas decantam livremente, sem efeito de tensão nos sólidos. Três réplicas experimentais foram realizadas para cada material com a finalidade de quantificar os erros das medidas.

Monitorando-se o deslocamento da interface superior em função do tempo em cada teste de diferentes amostras (caulim e microesferas de vidro) foi possível determinar a velocidade de sedimentação das partículas pela inclinação da parte linear do gráfico $z - t$, cuja velocidade é constante e igual a velocidade inicial de sedimentação do sólido, como mostra a Figura 5.14.

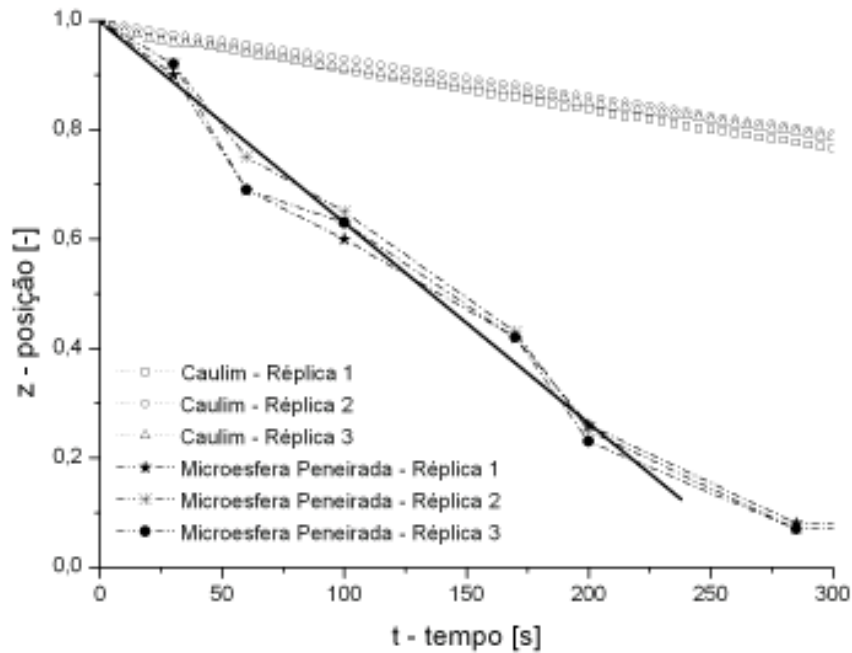


Figura 5.14: Monitoramento da interface superior em testes de sedimentação batelada para caulim e microesfera de vidro.

Os resultados da cinética de separação de ambos os materiais sólidos podem ser observados na Figura 5.6. Os testes de sedimentação foram conduzidos em dois recipientes de dimensões diferentes, o que justifica a adimensionalização do espaço para a comparação dos resultados. A velocidade de separação das microesferas dificulta o monitoramento da interface descendente em cada teste, motivo que causa um maior desvio além de um menor número de pontos no monitoramento do deslocamento da interface.

Pela análise da Figura 5.14 nota-se que suspensões aquosas de microesferas de vidro são separadas mais rapidamente que as suspensões aquosas de caulim. O resultado observado mostra que o efeito isolado da forma das partículas é bastante significativo. Os efeitos de camada limite sob o conjunto de partículas de maior esfericidade é menor que quando comparado com partículas irregulares e tal efeito não deve ser negligenciado.

A análise da acomodação das partículas em sedimentos foi realizada à partir de testes de sedimentação em batelada de concentrações iniciais de 8% em volume.

As medidas de distribuições de concentrações nas matrizes porosas formadas pela decantação das suspensões aquosas de caulim e microesfera de vidro, cujo efeito da forma das partículas foi isolado dos demais efeitos, são apresentados nos diagramas das Figuras 5.15 e 5.16. Para cada teste foram realizadas três réplicas adicionais favorecendo a confiabilidade dos dados.

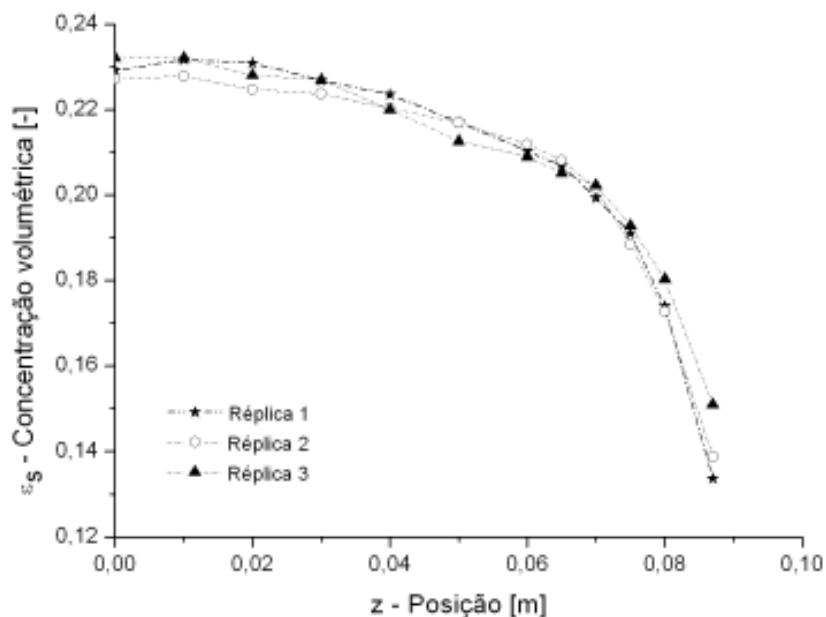


Figura 5.15: Distribuições de concentrações em sedimentos de caulim.

De posse do diagrama apresentado na Figura 5.15, observa-se que o sedimento formado apresenta altura média de 8,7 cm e concentração máxima na base equivalente à 23% em volume. O grande gradiente de concentração ao longo de todo o sedimento indica que o material sólido é bem compressível.

A Figura 5.16 apresenta as distribuições de concentrações no sedimento formado pela decantação de microesferas de vidro.

Nota-se que, ao contrário do caso observado em sedimentos de caulim, as microesferas de vidro apresentam uma região de concentração constante no sedimento que compreende cerca de 83% de toda sua extensão, ou seja, existe uma região que se estende da base do sedimentador à 2,5 cm acima da mesma na qual a concentração de sólidos praticamente não varia. Tal característica se deve ao fato do material sólido ser pouco compressível.

Comparando-se as Figuras 5.15 e 5.16 pode-se concluir que apesar de ambos os materiais possuírem densidades e distribuições de tamanhos semelhantes (comparadas através dos diâmetros médios de Sauter), os mesmos apresentaram diferentes configurações nas matrizes porosas dos sedimentos.

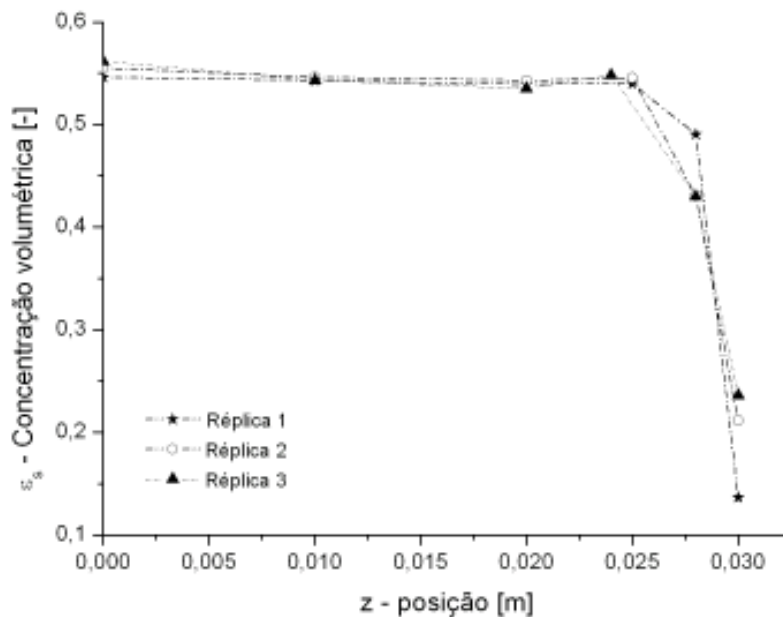


Figura 5.16: Distribuições de concentrações em sedimentos de microesferas de vidro.

Partículas de formas mais regulares, ou maior esfericidade, apresentaram os menores sedimentos e as maiores concentrações na base. Em contrapartida o caulim, cujas partículas possuem as formas mais irregulares, apresentou os sedimentos mais compressíveis.

As distribuições de concentrações nos sedimentos obtidos experimentalmente passaram por testes de regressões não-lineares com o intuito de se obter uma equação representativa da concentração em função da posição, Equação 5.1 proposta por Arouca (2003). Os coeficientes de correlação encontrados indicam que os parâmetros ajustados representam adequadamente 99% dos resultados de caulim e 98% de microesferas. Determinada a concentração dos sólidos, foi possível obter a pressão dos sólidos, supondo que esta é função exclusiva da concentração local através da Equação 4.43, como mostram as Figuras 5.17 e 5.18.

Observando-se a Figura 5.17 nota-se claramente o forte efeito de compressibilidade do caulim através da variação de pressão nos sólidos para uma ampla faixa de concentrações que se estende de 18 à 23% em volume no sedimento. Por outro lado, através da Figura 5.18 é possível concluir que as microesferas de vidro são mais incompressíveis.

O estudo da compressibilidade de sistemas sólido-líquidos, assim como a determinação de equações empíricas para o fenômeno, certamente estão ligadas ao conhecimento das propriedades físicas de ambos os constituintes da mistura. As equações constitutivas que descrevem o comportamento de um determinado sistema físico são específicas para cada material sólido, uma vez que englobam variáveis físicas que apresentam comportamentos

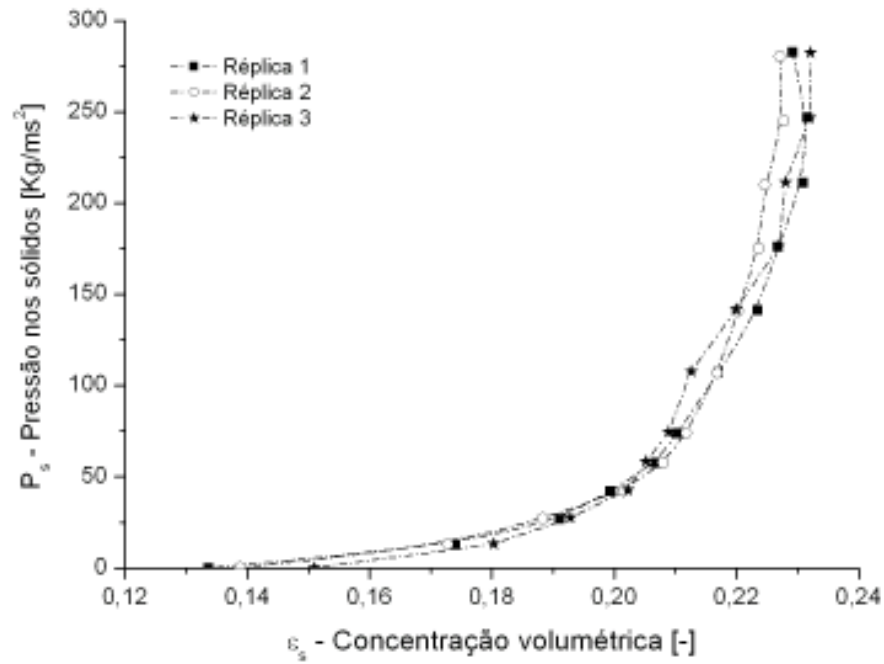


Figura 5.17: Pressão nos sólidos versus concentração local de suspensões de caulim ($\epsilon_{s0}=8\%$).

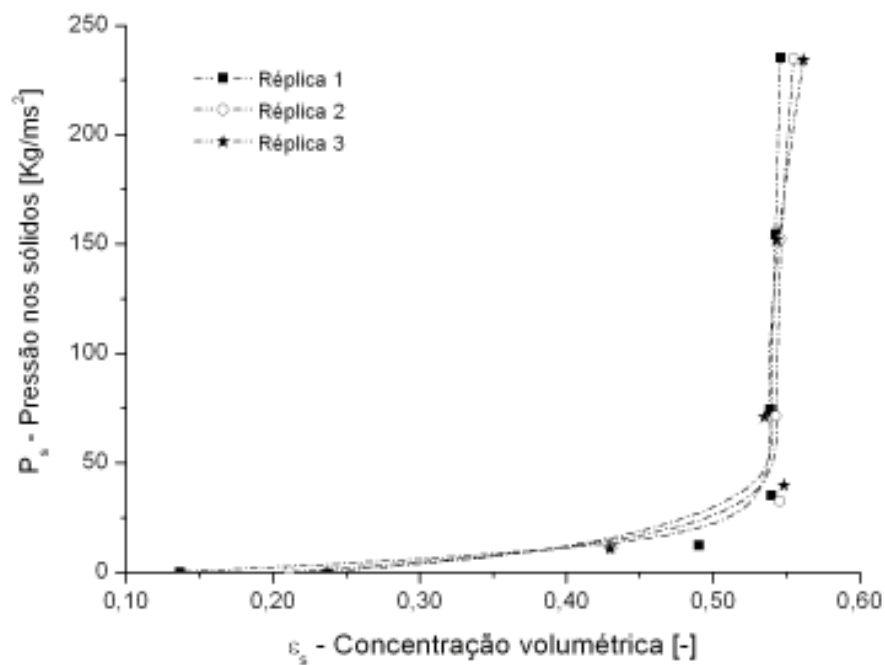


Figura 5.18: Pressão nos sólidos versus concentração local de suspensões de microesferas de vidro ($\epsilon_{s0}=8\%$).

bem complexos. Certamente o conhecimento cada vez mais aprofundado do efeito das propriedades físicas dos materiais sólidos sobre a dinâmica de separação sólido-líquido e a acomodação das partículas no sedimento tornará cada vez melhor a determinação de parâmetros de equações constitutivas, tais como a pressão nos sólidos e a permeabilidade do meio poroso, importantes para a modelagem de sistemas de separação sólido-líquido.

Análise do comportamento de sistemas sólido-líquidos: Uma descrição física para a sedimentação em batelada

Os fenômenos de separação sólido-líquido envolvem inúmeras variáveis que dificultam sua descrição física. A sedimentação em batelada certamente é um processo de separação bem mais complexo do que aparenta ser a primeira vista. Com base nos resultados experimentais obtidos neste trabalho é possível descrever com maiores detalhes o fenômeno da sedimentação em batelada.

Sabe-se que no processo de decantação de partículas sólidas em meio líquido, tal como a sedimentação em campo gravitacional, a separação das fases está diretamente relacionada à diferença de densidades entre as mesmas. *À priori* quanto maior a diferença entre as densidades dos constituintes mais rapidamente se observa a separação da mistura.

À medida que uma partícula sólida decanta pela diferença de sua densidade em relação à fase fluida num processo de separação unidimensional e não-reacional, um mesmo volume de líquido ocupa seu lugar, promovendo naturalmente a separação. Estendendo-se a análise para um amplo conjunto de partículas de mesmo tamanho e densidade, submetidas à ação do campo gravitacional e que se decantam ao mesmo tempo, o volume de líquido total separado é equivalente ao volume de todas as partículas que sedimentam, ocupando assim seus lugares e promovendo a separação.

Levando-se em consideração que os materiais pulverulentos freqüentemente usados nos mais variados processos de separação apresentam distribuições de tamanhos de partículas, naturalmente as maiores partículas tendem a decantar mais rapidamente pela própria ação do peso quando imersas em meio fluido com outras partículas da distribuição. Sendo assim, o volume de líquido que ocupará o lugar das maiores partículas sólidas durante a processo também se separa com maior energia. Havendo uma distribuição de tamanhos de partículas, à medida que a fase líquida ocupa o lugar daquelas que decantam primeiramente com maior energia cinética inicial (partículas maiores), o fluido em ascensão que ocupará o lugar de tais partículas também atua num balanço de forças com partículas menores que se separam. Desta forma, partículas maiores são separadas primeiro que aquelas de menores tamanhos, que por sua vez estão sujeitas ao arraste ou mesmo ao equilíbrio entre empuxo e força peso. Tal efeito está diretamente ligado à dinâmica de

separação e aos processos de acomodação no sedimento. Naturalmente o mecanismo de separação é dependente da concentração inicial da suspensão.

Supõe-se que à medida que as partículas mais pesadas decantam mais rapidamente que partículas mais leves, as mesmas tendem a ser as primeiras a se acomodarem nos sedimentos. Espera-se que as partículas menores se acomodem nos espaços vazios que ocorrem entre as maiores partículas. Tal fenômeno está diretamente ligado à compressibilidade do material sólido, sendo que sólidos mais compressíveis são aqueles que produzem uma matriz porosa com maiores gradientes de concentrações ao longo do sedimento.

O processo natural de separação produz camadas de partículas que são comprimidas pela ação do próprio peso das camadas imediatamente superiores, produzindo as maiores concentrações próximas à base do sedimentador. Tal característica não é observada para materiais incompressíveis.

Os resultados apresentados na Seção 5.2.1 indicam que havendo amostras de sólidos com faixas de tamanhos de partículas distintas de um mesmo material, o efeito isolado da distribuição granulométrica é bastante significativo na dinâmica de sedimentação e na compactação do sedimento, ou seja, os efeitos relacionados com a separação de sistemas sólido-líquidos cuja distribuição de tamanhos de partículas são diferentes também produzem resultados com diferenças significativas.

Somando-se ao efeito de distribuição de tamanhos, observou-se que o formato das partículas é bastante significativo na descrição do comportamento de sistemas sólido-líquidos, como foi apresentado na Seção 5.2.1.

Supondo a decantação de uma esfera pequena e homogênea, que se desloca sob a ação do campo gravitacional, sem efeito de parede, a partícula sofre um menor efeito da resistividade do meio quando comparada com outra de forma irregular ou baixa esfericidade. O efeito da camada limite sobre o escoamento laminar de um fluido viscoso ao redor de uma partícula de baixa esfericidade certamente é maior que quando comparada à esfera de mesma densidade. Ampliando a análise para o caso de um grande número de partículas de formas irregulares e de mesmos tamanhos decantando simultaneamente, o fluido sofre um maior efeito de resistência ao escoamento do que quando comparado com partículas de maior esfericidade.

Os resultados apresentados na Seção 5.2.1 indicaram que testes de sedimentação em batelada de suspensões aquosas de microesferas de vidro, de baixas concentrações iniciais, separaram-se muito mais rapidamente que partículas de caulim de mesmos diâmetros médios nas mesmas condições experimentais.

Uma descrição física coerente para a sedimentação em batelada depende do conheci-

mento aprofundado de diversas variáveis que, juntas apresentam efeitos cruzados bastante significativos. A necessidade de se buscar equações constitutivas cada vez mais precisas se deve ao fato de que os parâmetros de ajuste de tais equações são específicos para cada material sólido e sendo assim, carregam informações particulares dos comportamentos dos mesmos quando imersos em meio fluido.

5.2.2 As regiões da sedimentação em batelada: Análise dinâmica das distribuições de concentrações

O monitoramento de concentrações de sólidos em testes de sedimentação em batelada foi realizado aplicando-se a técnica de atenuação de raios gama a partir de suspensões aquosas de carbonato de cálcio em concentrações iniciais de 3% em volume. O mapeamento foi feito em intervalos de 1 cm ao longo do recipiente de testes, partindo-se da base (0 cm) em direção ao topo da coluna de suspensão (22 cm). O tempo de aquisição de dados era ajustado de acordo com a rapidez na variação da concentração local em uma dada posição na qual era realizada a medida. Para posições definidas no intervalo de 0 e 10 cm acima da base o tempo de leitura de pulsos foi estabelecido em 30 s, diferentemente das posições de 11 a 19 cm, cujas variações ocorriam mais rapidamente e por sua vez tiveram seus pontos experimentais coletados por períodos de 20 s. As demais posições próximas ao topo da coluna de suspensão foram monitoradas em intervalos de 15 s.

Testes preliminares indicaram que a variação da concentração local apresentava comportamentos distintos ao longo do tempo nas várias posições da coluna, como se era previsto, definindo regiões distintas do fenômeno. A Figura 5.19 apresenta o comportamento da concentração volumétrica de sólidos com o tempo para três regiões distintas.

Pela análise da Figura 5.19 é possível avaliar os comportamentos distintos de variações da concentração volumétrica local com o tempo através das curvas típicas que definem as regiões I, II e III.

Dentre as curvas apresentadas na Figura 5.19, observa-se que existe uma região na qual a concentração de sólidos monitorada se inicia com valores próximos aos da concentração volumétrica inicial de 3% em volume, doravante definida como região I. Pequenas flutuações nas concentrações iniciais das medidas possivelmente são causadas por problemas na homogeneização. A concentração em tal região da coluna pode se manter constante por um pequeno intervalo de tempo, tão menor quanto maior for a proximidade do ponto de medida da base do recipiente, aumentando gradativamente seu valor até atingir uma concentração máxima local com pequenas variações em longos períodos de tempo.

A Figura 5.20 apresenta o monitoramento de posições ao longo da coluna de suspensão

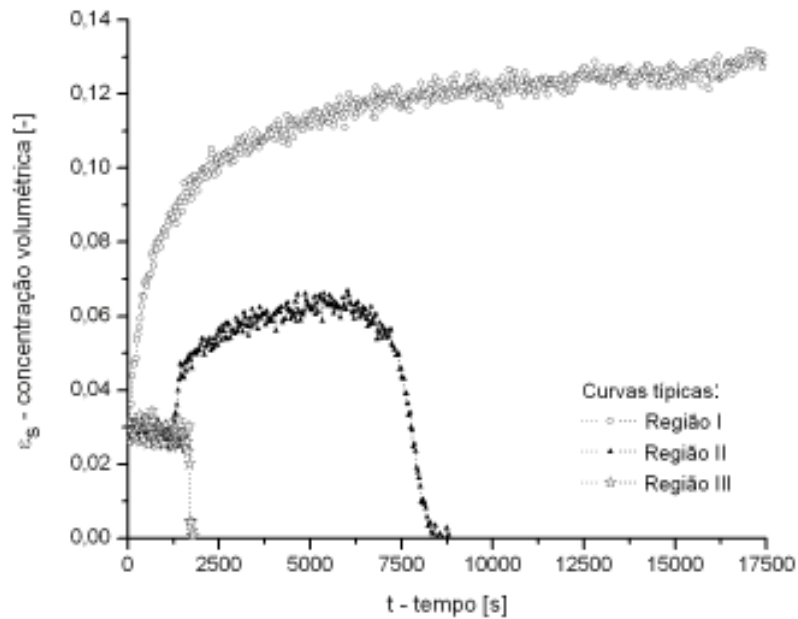


Figura 5.19: Curvas típicas da concentração volumétrica local como função do tempo.

nas quais foram verificados comportamentos típicos da região I.

Nota-se através da Figura 5.20 que as posições entre zero e 5 cm acima da base da coluna de sedimentação definem uma região cujo sólido sofre compressão no sedimento, aumentando gradativamente a concentração volumétrica local até valores máximos locais,

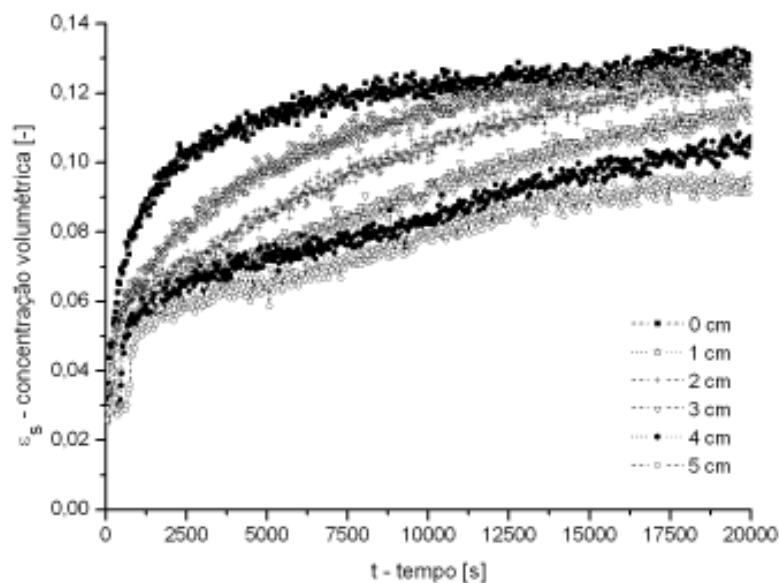


Figura 5.20: Variação da concentração volumétrica local com o tempo na região I.

como no caso observado na base da coluna (0cm) em que a concentração atingiu em média 13% em volume. Observou-se ainda que no tempo de 20.000 s as concentrações locais praticamente não sofriam alterações significativas, ocasião na qual o monitoramento era encerrado.

Uma outra região se caracteriza por não apresentar inicialmente o efeito de interação entre as partículas do sólido se mantendo constante por um determinado tempo na concentração inicial da suspensão, até o momento em que começa a sofrer grandes variações da concentração de sólidos atingindo valores máximos locais. Tal região, definida como região II, diferencia-se da primeira pela passagem da interface descendente no ponto monitorado, momento no qual a concentração decresce atingindo valores próximos de zero. Posições da região II foram monitoradas ao longo do tempo como mostra a Figura 5.21.

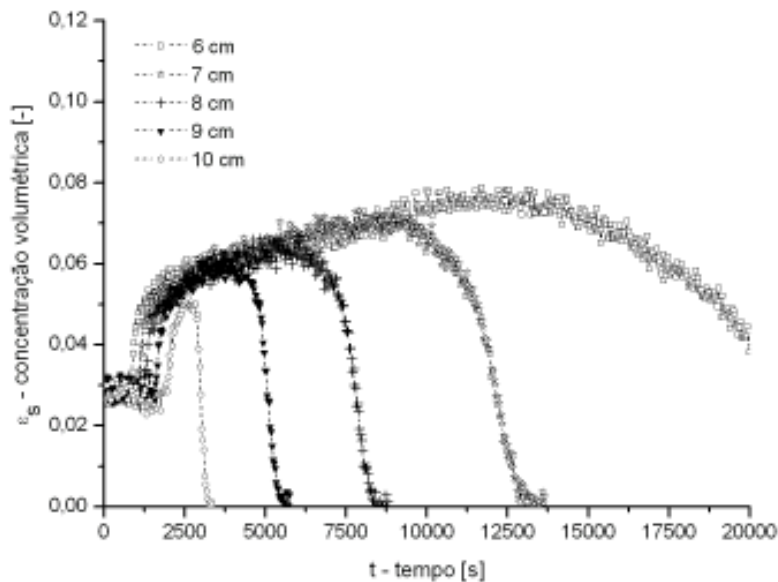


Figura 5.21: Variação da concentração volumétrica local com o tempo na região II.

Observa-se através da Figura 5.21 que a região II, compreendida pelas posições de 6 a 10 cm acima da base da coluna de sedimentação, se mantém inicialmente constante na concentração de sólidos de 3% em volume por um determinado tempo tão menor quanto maior a proximidade do ponto monitorado do topo da coluna de suspensão. Tal comportamento é característico da região de sedimentação livre descrita por Kynch (1952), na qual a velocidade inicial de sedimentação do sólido é constante e os efeitos de interação entre as partículas não se desenvolvem.

A Figura 5.22 apresenta o monitoramento da concentração volumétrica de sólidos para a posição de 9 cm acima da base. Nota-se que no caso particular da posição de 9cm monitorada ao longo do tempo, a região de sedimentação livre das partículas é verificada

desde a homogeneização da suspensão ($t=0$ s) até cerca de 1.500 s, como apresentado na área *A* demarcada na Figura 5.22.

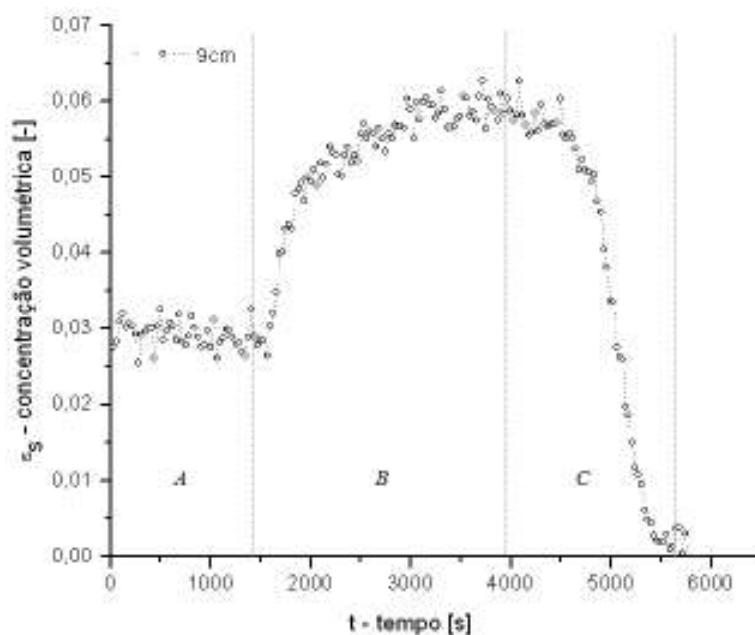


Figura 5.22: Monitoramento da concentração de sólidos ao longo do tempo para a posição de 9 cm acima da base da coluna.

Através da Figura 5.22, analisando-se a área *B*, nota-se que depois de transcorridos 1.500 s da homogeneização da suspensão, ocorre um aumento considerável da concentração de sólidos até atingir um valor máximo local, caracterizando o fim da região de sedimentação livre e o início de efeitos consideráveis de tensão nos sólidos. A concentração durante esse período aumenta de 3 para 6% no final de 4.000 s de decantação. Desta forma, a concentração máxima observada para a posição de 9 cm é equivalente a 6% em volume e a partir de então se nota seu decréscimo através do desenvolvimento de um perfil que se inicia em 6% até atingir valores próximos de zero em cerca de 5.750 s, na área *C* apresentada na figura.

O perfil de concentrações observado na área *C* se desenvolve pela passagem da interface descendente através do ponto monitorado. O fato dos colimadores da fonte de raios gama e do sistema de detecção possuírem 0,5 cm de diâmetro interno é causador de medidas concomitantes de regiões com e sem sólidos durante a passagem da interface pelo ponto, até que todo o feixe de radiação tenha feito a varredura naquela posição, gerando o perfil observado na área *C* da Figura 5.22.

Durante o monitoramento da suspensão de carbonato de cálcio notou-se ainda comportamentos particulares da concentração de sólidos ao longo do tempo em posições que caracterizam uma terceira região distinta na coluna. Tal região (definida como região III) compreendia as posições de 11 a 22 cm acima da base da coluna. A Figura 5.23 apresenta

os comportamentos das concentrações volumétricas de sólidos monitoradas com o tempo.

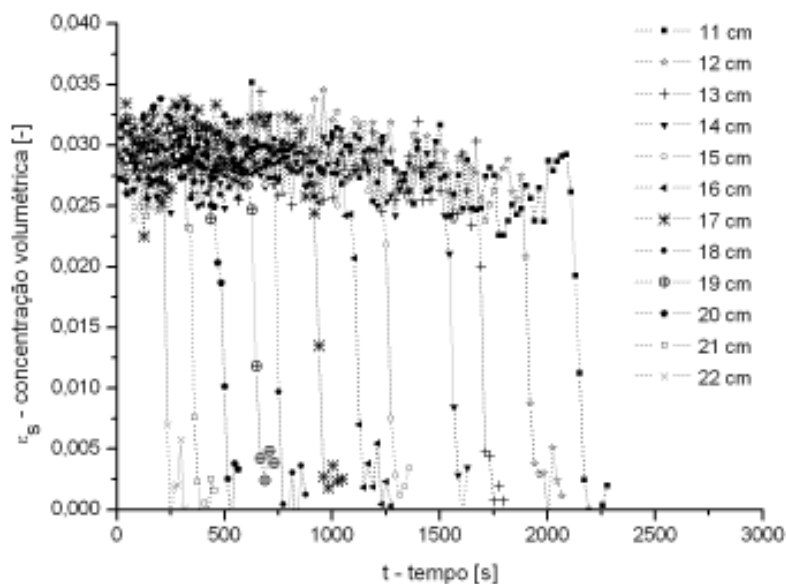


Figura 5.23: Variação da concentração volumétrica local com o tempo na região III.

Observando-se a Figura 5.23 nota-se que para posições localizadas próximas ao topo da suspensão, como é o caso da Região III, as concentrações em cada posição se mantêm constantes e iguais a concentração inicial até a passagem da interface descendente, instante no qual as concentrações atingem valores próximos de zero. Apenas a região de sedimentação livre de um teste em proveta é registrada durante o monitoramento de tais posições. A região III para testes de sedimentação em batelada com suspensões aquosas de carbonato de cálcio em concentrações iniciais de 3% em volume é observada em praticamente 50% das posições monitoradas.

A Figura 5.24 apresenta o mapeamento completo do teste realizado para suspensões aquosas de carbonato de cálcio 3% em volume no monitoramento da concentração local como função da posição e do tempo.

De acordo com a Figura 5.24 nota-se que a técnica de atenuação de raios gama se mostrou eficiente no monitoramento de concentração de sólidos em suspensões aquosas de carbonato de cálcio através de ensaios dinâmicos sem que houvesse a necessidade de amostragem por alíquotas da suspensão. A técnica tornou possível ainda descrever o comportamento da concentração volumétrica de sólidos em três regiões bem definidas durante um mesmo teste para diferentes posições monitoradas ao longo da coluna.

Através dos resultados obtidos para as distribuições de concentrações em função da posição e do tempo de suspensões aquosas de CaCO_3 a 3% torna-se possível determinar

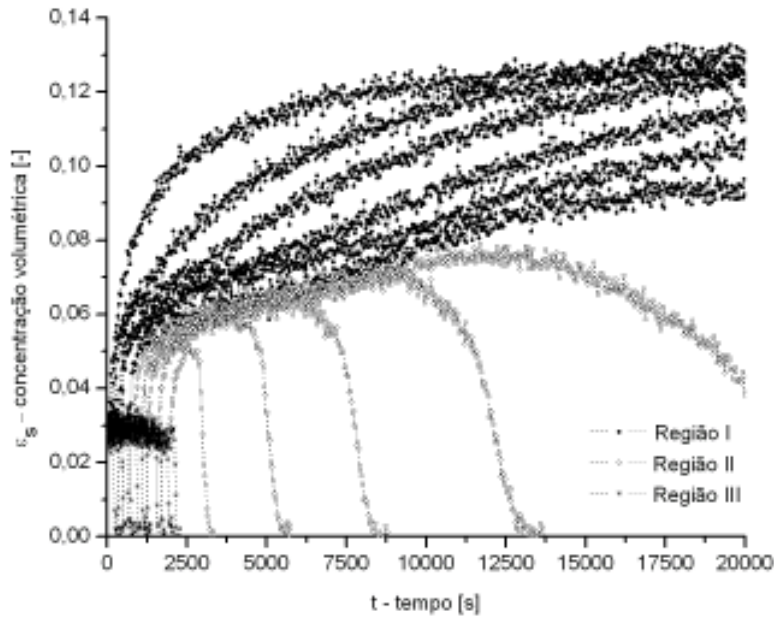


Figura 5.24: Distribuições de concentração em função da posição e do tempo para testes de sedimentação em batelada de suspensões aquosas de CaCO_3 a 3% em volume.

as curvas de equi-concentrações apresentadas por Kynch (1952) a partir de testes de sedimentação em batelada.

5.2.3 Curvas de equi-concentrações

Conforme discutido em capítulos anteriores, Kynch (1952) descreveu o processo da sedimentação como um fenômeno de propagação de ondas de concentrações constantes que partem da base do recipiente de testes em direção ao topo do sedimento, definindo-as como curvas de equi-concentrações. De posse das medidas de $\varepsilon_s(z, t)$ foi possível determinar experimentalmente as curvas de equi-concentrações que relacionam posições e tempos para situações nas quais a concentração volumétrica é constante.

Os resultados obtidos no monitoramento de suspensões aquosas de carbonato de cálcio 3% através da técnica de atenuação de raios gama foram utilizados para a determinação das curvas de equi-concentrações em testes de sedimentação em batelada. Aproximadamente 6.300 pontos experimentais foram medidos em intervalos de tempos de 15, 20 ou 30 segundos em 22 diferentes posições ao longo da coluna de sedimentação.

A Figura 5.25 apresenta a superfície que descreve o comportamento da concentração volumétrica como função do tempo para onze posições ao longo da coluna de sedimentação compreendidas entre 0 e 10 cm acima de sua base. Tais posições foram monitoradas em

intervalos de tempos de 30 s e compõem as regiões I e II. As curvas de níveis apresentadas na projeção da superfície no plano $z - t$ apresentam o comportamento experimental das curvas de equi-concentrações. Os contornos apresentados na figura a partir de gradientes de cores representam níveis de concentrações constantes que se propagam ao longo do tempo.

Pela análise da superfície apresentada na Figura 5.25-a, observa-se a compressão do sólido em uma região de máximo local na qual, quanto maior é o efeito de compressão, maior a proximidade da posição monitorada em relação à base da coluna de sedimentação ($z=0$ cm) para os maiores tempos do processo de decantação. Os contornos de ondas de concentrações constantes apresentados na Figura 5.25-b mostram que inicialmente as equi-concentrações de baixas concentrações são retas que partem da origem dos tempos e das posições. Entretanto, concentrações mais elevadas desenvolvem tendências não-lineares pela própria compressão do sólido, além do que se verifica que não partem da origem dos tempos conforme sugeriu Kynch (1952), como antes verificado por Concha e Bustos (1987) e Ruiz (2000).

Cabe ressaltar também pela análise da Figura 5.25-b, que o monitoramento da interface descendente é observado na região imediatamente abaixo da área demarcada pela cor preta na figura. Nota-se que são registradas oscilações na queda da interface ao longo do tempo que certamente possuem várias possíveis fontes de erros que não devem ser descartadas, dentre elas: (1) a dificuldade de uma perfeita homogeneização da suspensão principalmente com distúrbios no sistema provocados no momento da retirada do homogeneizador; (2) a necessidade de um melhor refinamento na área monitorada entre as posições de 6 a 10 cm para intervalos de 0,5 cm ao invés de 1 cm, uma vez que nas posições de 7,5; 8,5 e 9,5 são registradas anormalidades; (3) problemas de natureza numérica no arredondamento de casas decimais ou erro pela própria flutuação dos resultados em torno da concentração inicial da suspensão. Em contrapartida, o mapeamento das ondas de mesma concentração apresentou com nitidez as tendências de compressão das camadas de sólidos no sistema, avaliação de grande interesse para o trabalho.

A Figura 5.26 apresenta as curvas de equi-concentrações obtidas através dos contornos de níveis que utilizam todos os pontos experimentais monitorados nas posições de 0 a 10 cm acima da base para as concentrações de interesse. A Figura 5.27 foi obtida plotando-se apenas a média dos pontos que oscilavam em torno de valores de concentrações de interesse previamente definidos para todas as posições monitoradas (AROUCA; DAMASCENO, 2005a). Desta forma valores médios que relacionam posições e tempos para situações em que a concentração volumétrica é constante foram usados para a determinação das curvas de equi-concentrações.

Comparando-se as Figuras 5.26 e 5.27 nota-se que ao utilizar valores médios de con-

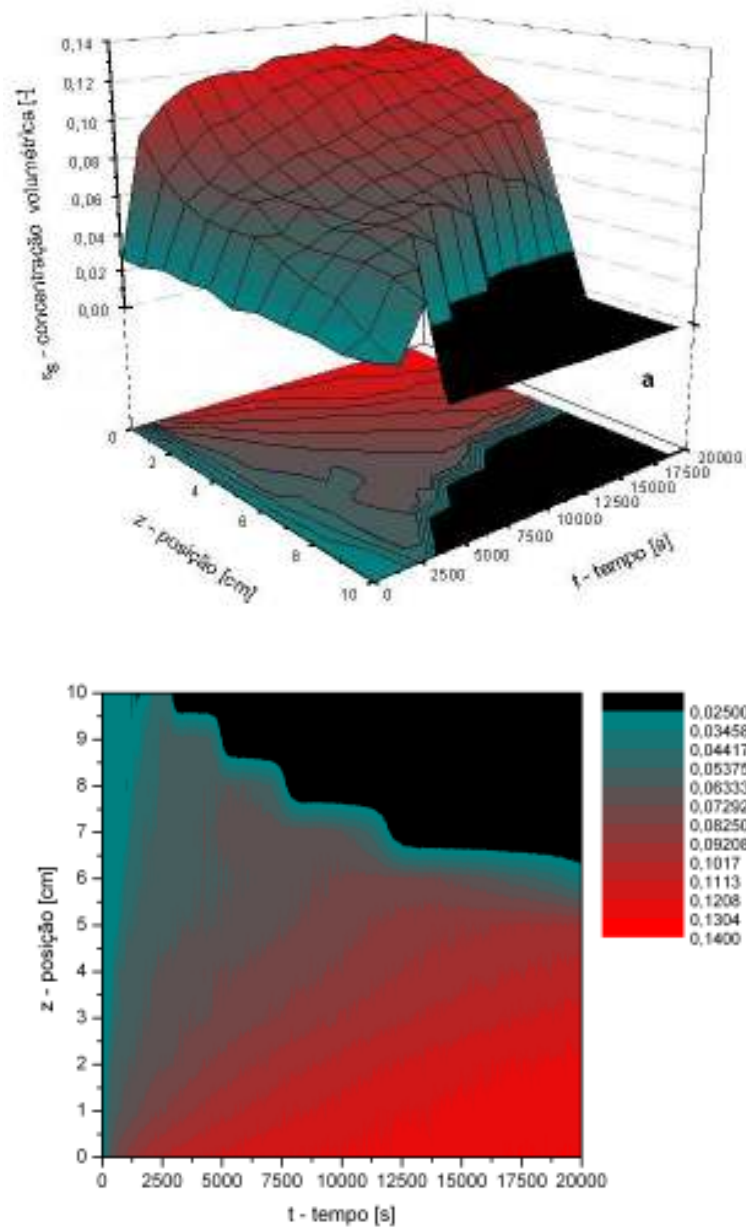


Figura 5.25: Superfície de distribuições de $\varepsilon_s(z, t)$ (a) e equi-concentrações (b).

centrações locais para as curvas de equi-concentrações, como foi feito inicialmente por Arouca e Damasceno (2005a), as mesmas apresentam traços suavizados quando comparadas com o mapeamento convencional e desenvolvem comportamentos semelhantes ao caso observado no mapeamento completo dos pontos experimentais. Entretanto, nota-se maiores discrepâncias para valores dos tempos em medidas registradas nas Figuras 5.26 e 5.27 para o caso de altas concentrações.

Ainda pela análise gráfica as equi-concentrações representam, sob um ponto de vista matemático, retas para concentrações próximas da inicial com velocidades de propagação das ondas determinadas por suas grandes inclinações. As curvas desenvolvem tendências

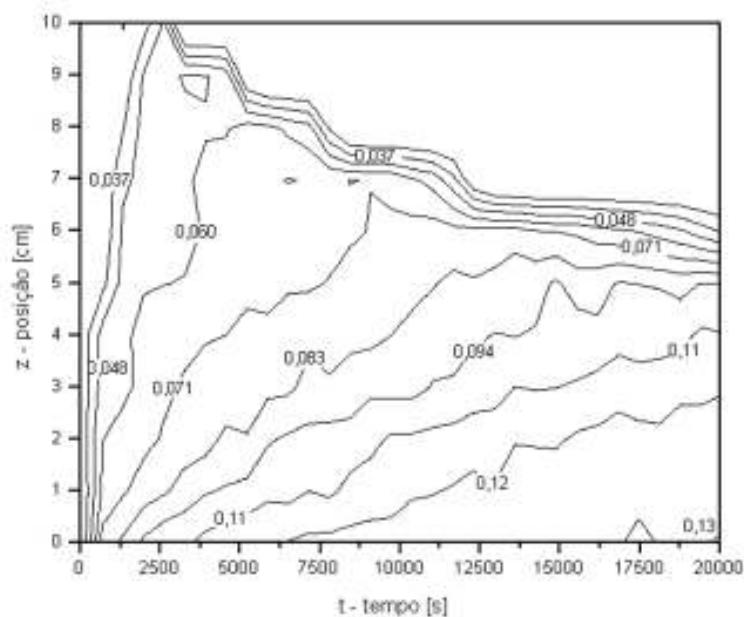


Figura 5.26: Curvas de equi-concentrações para suspensões aquosas de CaCO_3 (3%) determinadas utilizando-se todos os pontos experimentais coletados.

não-lineares ao passo que a concentração local aumenta pelo próprio efeito de compressão através da ação do peso das camadas de sólidos depositados no sedimento.

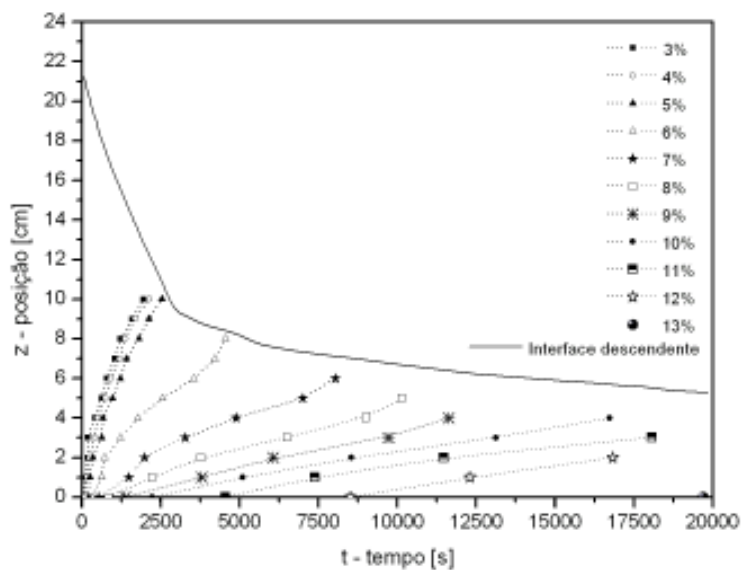


Figura 5.27: Curvas de equi-concentrações para suspensões aquosas de CaCO_3 (3%) determinadas a partir das médias das concentrações locais.

5.3 Equações Constitutivas

5.3.1 Determinação da permeabilidade do meio poroso de suspensões aquosas diluídas

A permeabilidade do meio poroso pode ser determinada através da equação do movimento para o constituinte sólido bastando-se conhecer as distribuições de concentrações em sedimentos formados a partir de testes de proveta, como foi feito inicialmente por Damasceno (1992). Entretanto, pela aplicação da metodologia de Damasceno (1992) observa-se que a faixa de concentrações medida se restringe apenas a sistemas concentrados cujo menor valor de permeabilidade determinado é aquele relativo à concentração crítica do sólido. Para avaliar a permeabilidade de sistemas diluídos utilizou-se uma metodologia que se baseia em testes de sedimentação em proveta nos quais a interface superior é monitorada com o tempo para a região de sedimentação livre (SILVA, 2004).

Diversos testes de proveta foram realizados a partir de suspensões aquosas de caulim e carbonato de cálcio nas concentrações volumétricas iniciais de 2, 3, 4 e 5% e microesferas de vidro nas concentrações de 4 e 5% em volume. Para cada teste foram realizadas três diferentes réplicas submetidas às mesmas condições experimentais. A Figura 5.28 apresenta o deslocamento da interface descendente ao longo do tempo em ensaios de suspensões aquosas de caulim ($\varepsilon_{s0} = 2$ e 3%). Observa-se através da região linear de cada gráfico que nos primeiros instantes a interface superior desenvolve velocidade de queda constante.

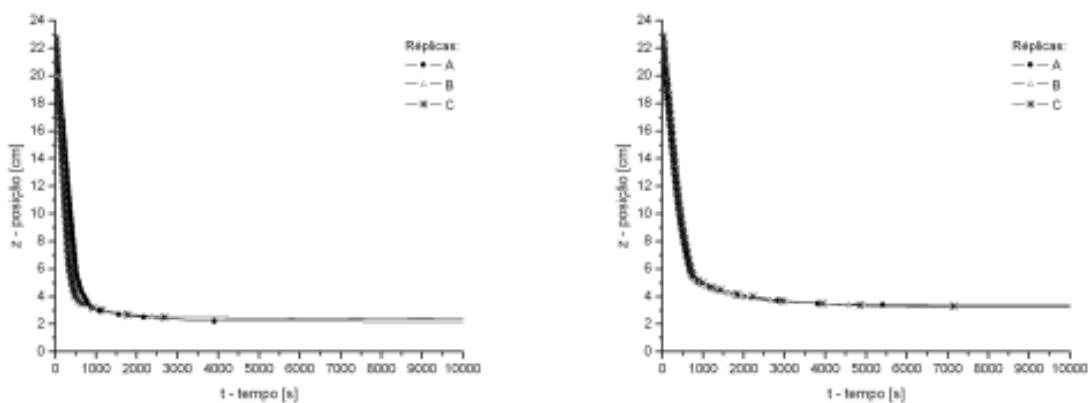


Figura 5.28: Monitoramento da interface descendente em suspensões aquosas de caulim nas concentrações iniciais de 2 e 3% em volume, respectivamente.

Os deslocamentos das interfaces descendentes de suspensões aquosas de caulim nas concentrações iniciais de 4 e 5% em volume podem ser visualizados através da Figura 5.29.

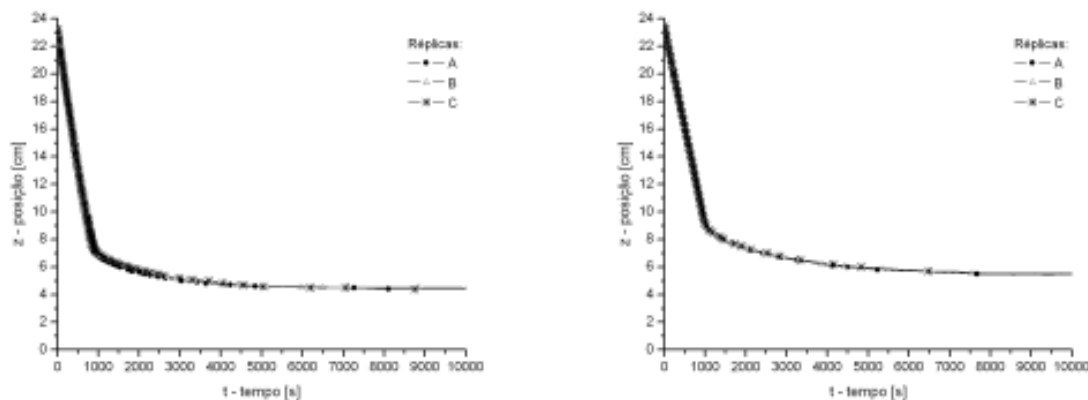


Figura 5.29: Monitoramento da interface descendente em suspensões aquosas de caulim nas concentrações iniciais de 4 e 5% em volume, respectivamente.

Através da Figura 5.29 nota-se que à medida que se utiliza uma concentração inicial de sólidos em sistemas discretamente mais concentrados, como no caso de 5% em volume de sólidos, observou-se uma menor velocidade inicial de queda das partículas comprovada pelo próprio aumento na abertura do ângulo formado entre a região linear de cada gráfico no início dos tempos e o eixo das posições. A Figura 5.30 apresenta o acompanhamento de suspensões de carbonato de cálcio nas concentrações iniciais de 2 e 3%.

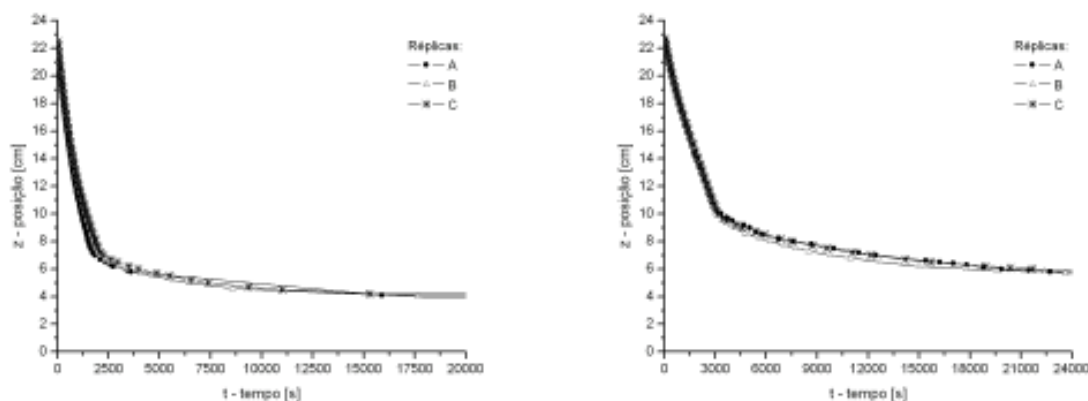


Figura 5.30: Monitoramento da interface descendente em suspensões aquosas de carbonato de cálcio nas concentrações iniciais de 2 e 3% em volume, respectivamente.

A Figura 5.30 indica que suspensões aquosas de carbonato de cálcio desenvolvem uma dinâmica diferente daquela observada para suspensões de caulim nas mesmas concentrações iniciais das suspensões. Os testes com carbonato de cálcio mostraram que as velocidades iniciais de queda das interfaces são mais lentas do que as observadas em suspensões aquosas de caulim. A Figura 5.31 ilustra os testes com carbonato de cálcio em concentrações iniciais de 4 e 5%.

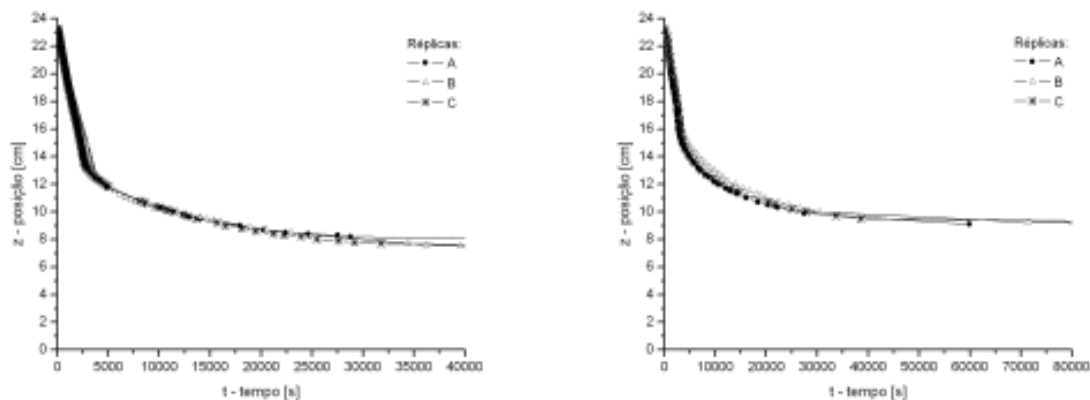


Figura 5.31: Monitoramento da interface descendente em suspensões aquosas de carbonato de cálcio nas concentrações iniciais de 4 e 5% em volume, respectivamente.

Cabe ressaltar que as interfaces partem das alturas máximas das suspensões que, para os casos avaliados, estão entre 23 e 24 cm acima da base e as alturas finais dos sedimentos são observadas no momento em que as interfaces sofrem desaceleração deslocando-se muito lentamente em grandes intervalos de tempo.

Para grandes tempos de repouso das suspensões, nota-se através da Figura 5.31, que os sedimentos formados para suspensões aquosas de carbonato nas concentrações iniciais de 5% em volume são em média até 100% maiores quando comparados com sedimentos formados a partir de concentrações iniciais de 3%.

Os desvios observados pela avaliação das réplicas mostram que suspensões aquosas de carbonato de cálcio são mais sensíveis a perturbações e requerem uma homogeneização mais vigorosa durante os testes.

Testes de decantação de suspensões aquosas de microesferas de vidro nas concentrações iniciais de 2 e 3% em volume apresentaram comportamentos de alta sensibilidade quanto aos procedimentos de homogeneização das suspensões, além do que suas dinâmicas de sedimentação mostraram-se bastante rápidas, o que tornou difícil a visualização e o monitoramento das interfaces descendentes. Para tanto, efetuaram-se testes com o sólido apenas nas concentrações de 4 e 5% em volume.

A Figura 5.32 apresenta os resultados de testes realizados com suspensões aquosas de microesferas de vidro nas concentrações volumétricas iniciais de 4 e 5%, respectivamente.

Observa-se pela análise da Figura 5.32 que as partículas de microesferas de vidro completaram os períodos de decantação num intervalo de tempo bem inferior que os demais casos estudados. Em contrapartida a qualidade da reprodutibilidade dos pontos ficou comprometida uma vez que os desvios das réplicas mostraram-se superiores.

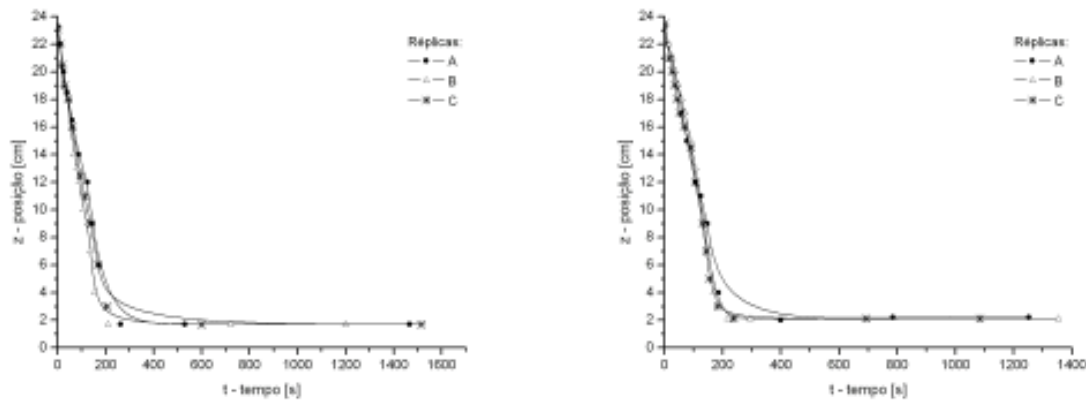


Figura 5.32: Monitoramento da interface descendente em suspensões aquosas de microesferas de vidro nas concentrações iniciais de 4 e 5% em volume, respectivamente.

Uma análise comparativa entre testes de provetas de diferentes concentrações iniciais das suspensões de um mesmo material sólido pode ser efetuada através das Figuras 5.33 a 5.35, nas quais as interfaces descendentes são monitoradas ao longo do tempo para as diversas concentrações. Nota-se claramente que o efeito de concentração é evidente na dinâmica dos processos de separação das fases principalmente para os materiais caulim e carbonato de cálcio, certamente por serem sólidos de menor compressibilidade que as microesferas.

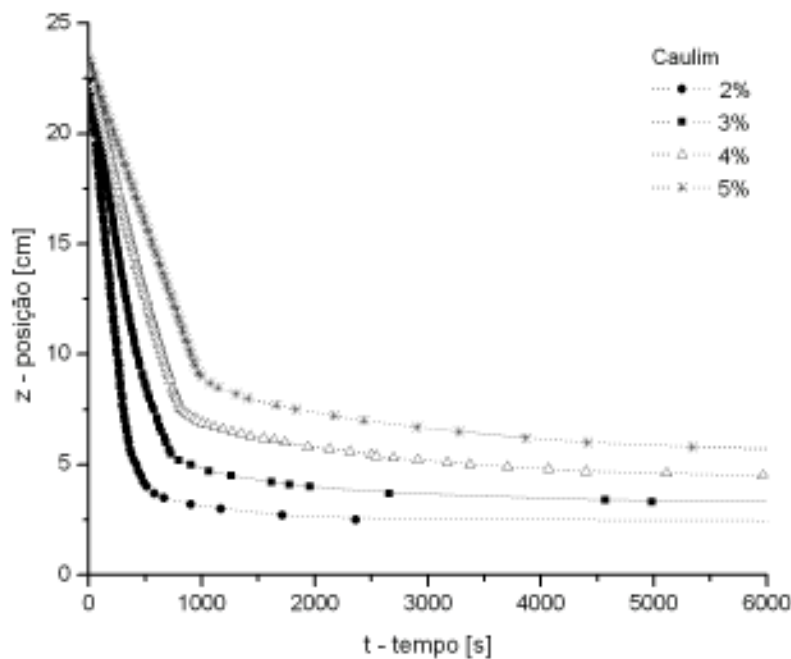


Figura 5.33: Monitoramento de suspensões de caulim nas concentrações iniciais de 2, 3, 4 e 5% em volume.

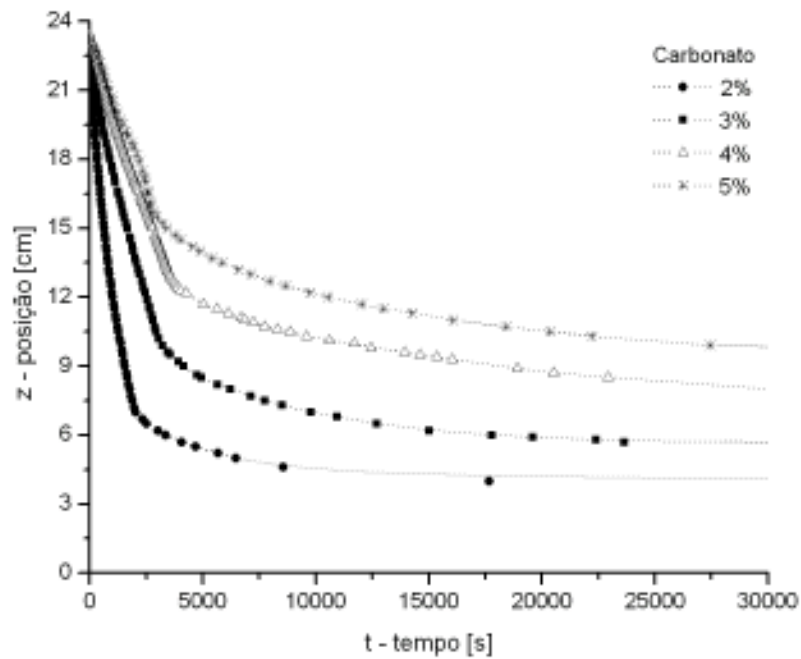


Figura 5.34: Monitoramento de suspensões de carbonato de cálcio nas concentrações iniciais de 2, 3, 4 e 5% em volume.

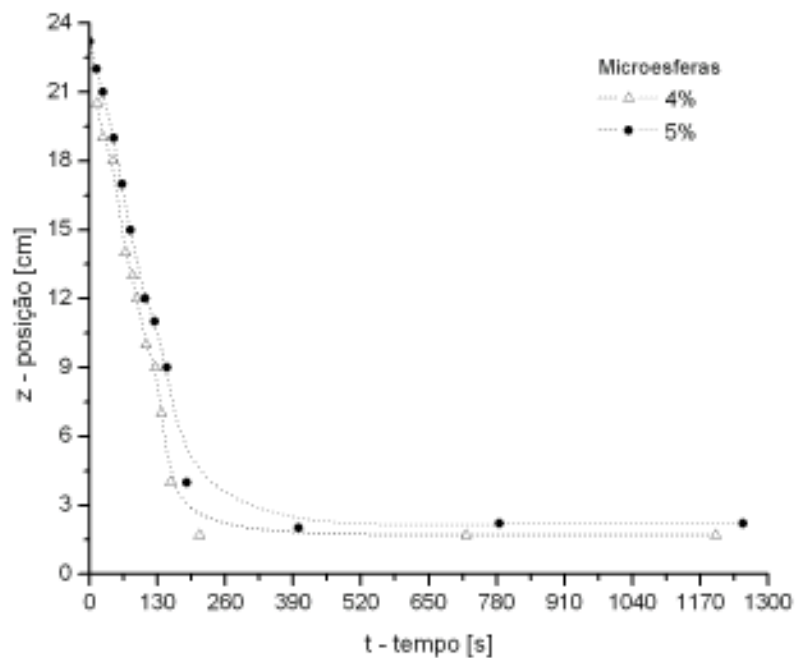


Figura 5.35: Monitoramento de suspensões de microesferas de vidro nas concentrações iniciais de 4 e 5% em volume.

De posse dos resultados obtidos no monitoramento de suspensões aquosas de caulim, carbonato de cálcio e microesferas de vidro em testes de proveta preparados para baixas concentrações iniciais, tornou-se possível a estimativa das permeabilidades dos meios porosos como funções da porosidade local.

Observa-se através das Figuras 5.33 a 5.35 que para os primeiros instantes de tempo as interfaces superiores desenvolvem velocidades de queda constantes. Tendo em vista que tal característica é particular da região de sedimentação livre, e sendo que em tal região o efeito de pressão nos sólidos pode ser desprezado, a equação do movimento para o sólido, Equação (3.75), após as devidas simplificações permite a determinação da permeabilidade dos meios porosos através da expressão:

$$k = \frac{\mu v_s}{(\rho_s - \rho_f) \varepsilon_s g} \quad (5.2)$$

Fazendo uso de tal expressão para o cálculo de k foi possível determinar as permeabilidades em meios porosos de suspensões de sistemas diluídos como mostra a Tabela 5.3. Para tanto, determinou-se a velocidade inicial de sedimentação de cada sólido em estudo, v_{s0} , na concentração inicial do teste de proveta, por meio da inclinação da reta na região linear do gráfico no início dos tempos. De posse de v_{s0} e ε_{s0} , calculou-se a permeabilidade média, $\bar{k}$, pela média aritmética dos valores obtidos através das réplicas A, B e C para cada material.

A viscosidade e a massa específica da fase líquida utilizada foi $\mu=0,001$ kg/(m s) e $\rho_f=1.000$ kg/m³, respectivamente. As massas específicas dos materiais sólidos utilizados (caulim, carbonato de cálcio e microesferas de vidro) foram, respectivamente: (2.577 ± 1) kg/m³, (2.690 ± 50) kg/m³ e (2.500 ± 10) kg/m³. O valor da constante gravitacional utilizado para os cálculos foi $g=9,8$ m/s².

Observa-se na Tabela 5.3, como era de se esperar, que as permeabilidades dos meios porosos diminuem com o aumento da concentração local de sólidos.

Dentre os sólidos estudados nota-se que as maiores permeabilidades ocorrem para suspensões aquosas de microesferas de vidro, uma vez que resultados de diferentes materiais obtidos a partir de testes submetidos às mesmas condições na experimentação são comparados entre si.

Tabela 5.3: Valores de permeabilidade de meios porosos médios ($\bar{k}$).

Material	ε_{s0} [—]	Réplica	v_{s0} [m/s]	k [m ²]	$\bar{k}$ [m ²]
Caulim	0,02	A	$3,33 \cdot 10^{-4}$	$1,077 \cdot 10^{-9}$	$(1,4 \pm 0,3) \cdot 10^{-9}$
		B	$4,97 \cdot 10^{-4}$	$1,608 \cdot 10^{-9}$	
		C	$5,01 \cdot 10^{-4}$	$1,620 \cdot 10^{-9}$	
	0,03	A	$3,14 \cdot 10^{-4}$	$6,780 \cdot 10^{-10}$	$(6,74 \pm 0,08) \cdot 10^{-10}$
		B	$3,15 \cdot 10^{-4}$	$6,796 \cdot 10^{-10}$	
		C	$3,08 \cdot 10^{-4}$	$6,641 \cdot 10^{-10}$	
	0,04	A	$2,06 \cdot 10^{-4}$	$3,326 \cdot 10^{-10}$	$(3,29 \pm 0,09) \cdot 10^{-10}$
		B	$2,08 \cdot 10^{-4}$	$3,360 \cdot 10^{-10}$	
		C	$1,97 \cdot 10^{-4}$	$3,186 \cdot 10^{-10}$	
	0,05	A	$1,42 \cdot 10^{-4}$	$1,841 \cdot 10^{-10}$	$(1,87 \pm 0,03) \cdot 10^{-10}$
		B	$1,47 \cdot 10^{-4}$	$1,903 \cdot 10^{-10}$	
		C	$1,44 \cdot 10^{-4}$	$1,866 \cdot 10^{-10}$	
Carbonato	0,02	A	$1,44 \cdot 10^{-4}$	$4,361 \cdot 10^{-10}$	$(3,9 \pm 0,4) \cdot 10^{-10}$
		B	$1,23 \cdot 10^{-4}$	$3,727 \cdot 10^{-10}$	
		C	$1,25 \cdot 10^{-4}$	$3,773 \cdot 10^{-10}$	
	0,03	A	$4,62 \cdot 10^{-5}$	$9,305 \cdot 10^{-10}$	$(1,00 \pm 0,06) \cdot 10^{-10}$
		B	$5,21 \cdot 10^{-5}$	$1,048 \cdot 10^{-10}$	
		C	$5,08 \cdot 10^{-5}$	$1,022 \cdot 10^{-10}$	
	0,04	A	$3,60 \cdot 10^{-5}$	$5,437 \cdot 10^{-11}$	$(5,7 \pm 0,5) \cdot 10^{-11}$
		B	$3,61 \cdot 10^{-5}$	$5,450 \cdot 10^{-11}$	
		C	$4,16 \cdot 10^{-5}$	$6,275 \cdot 10^{-11}$	
	0,05	A	$2,46 \cdot 10^{-5}$	$2,976 \cdot 10^{-11}$	$(2,7 \pm 0,4) \cdot 10^{-11}$
		B	$1,84 \cdot 10^{-5}$	$2,217 \cdot 10^{-11}$	
		C	$2,31 \cdot 10^{-5}$	$2,789 \cdot 10^{-11}$	
Microesferas	0,04	A	$1,19 \cdot 10^{-3}$	$2,021 \cdot 10^{-9}$	$(1,9 \pm 0,2) \cdot 10^{-9}$
		B	$1,12 \cdot 10^{-3}$	$1,910 \cdot 10^{-9}$	
		C	$1,01 \cdot 10^{-3}$	$1,711 \cdot 10^{-9}$	
	0,05	A	$1,02 \cdot 10^{-3}$	$1,387 \cdot 10^{-9}$	$(1,392 \pm 0,005) \cdot 10^{-9}$
		B	$1,03 \cdot 10^{-3}$	$1,396 \cdot 10^{-9}$	
		C	$1,02 \cdot 10^{-3}$	$1,394 \cdot 10^{-9}$	

5.3.2 Determinação de equações constitutivas para a pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso

Diagramas de distribuições de concentrações em sedimentos

Arouca (2003) mostrou que a compressibilidade do caulim avaliada pelos formatos das curvas de distribuições de concentrações nos sedimentos é independente da concentração inicial da suspensão. Os resultados mostraram que para qualquer ε_{s0} na faixa de 8 à 12% em volume, os diagramas de concentrações apresentam mesma tendência de compressibilidade do sólido. Desta forma, testes de sedimentação em batelada foram realizados sob altas concentrações iniciais das suspensões ($\varepsilon_{s0}=12\%$) de tal forma a produzir sedimentos com grande área efetiva para varredura da radiação. De posse da curva de calibração do sistema foi possível determinar as distribuições de concentração em sedimentos formados pela decantação de suspensões aquosas de caulim.

O procedimento experimental para determinação das distribuições de concentração desenvolvido por Damasceno (1992) é apresentado na Seção 4.11. As Figuras 5.36 e 5.37 mostram os perfis de concentrações em sedimentos de caulim em diferentes condições de estabilidade: decantação natural das partículas e percolação do líquido sob a matriz porosa. Cada teste foi submetido à três réplicas experimentais para avaliação de confiabilidade dos resultados.

De acordo com a Figura 5.36 observa-se que a concentração máxima alcançada para suspensões aquosas de caulim nas condições estabelecidas foi equivalente à $\varepsilon_{sm}=26,7\%$, enquanto a concentração crítica na superfície do sedimento de altura $L=21,8$ cm é da ordem de $\varepsilon_{sc}=13,7\%$. As informações das concentrações crítica e máxima do sedimento são de grande importância para a modelagem e simulação dos processos de separação sólido-líquido com efeitos de compressão. Os erros experimentais associados às medidas das réplicas são indicados pelas barras verticais em cada ponto associado à uma dada posição no sedimento.

A Figura 5.37 apresenta a nova condição de estabilidade do sedimento submetido à percolação do líquido na matriz porosa. O procedimento experimental é apresentado na Seção 4.12.1.

No experimento seguinte, o líquido é filtrado sob vazão constante através do mesmo sedimento avaliado. O sistema é sustentado por uma placa porosa que por sua vez retém a passagem dos sólidos ($q_s=0$) e permite a percolação do fluido. A velocidade superficial de filtração do líquido foi equivalente à $q_f=(3,2\pm0,2)\cdot10^{-6}$ m/s. A nova condição de estabilidade produz sedimentos mais compactados, como mostra a Figura 5.37.

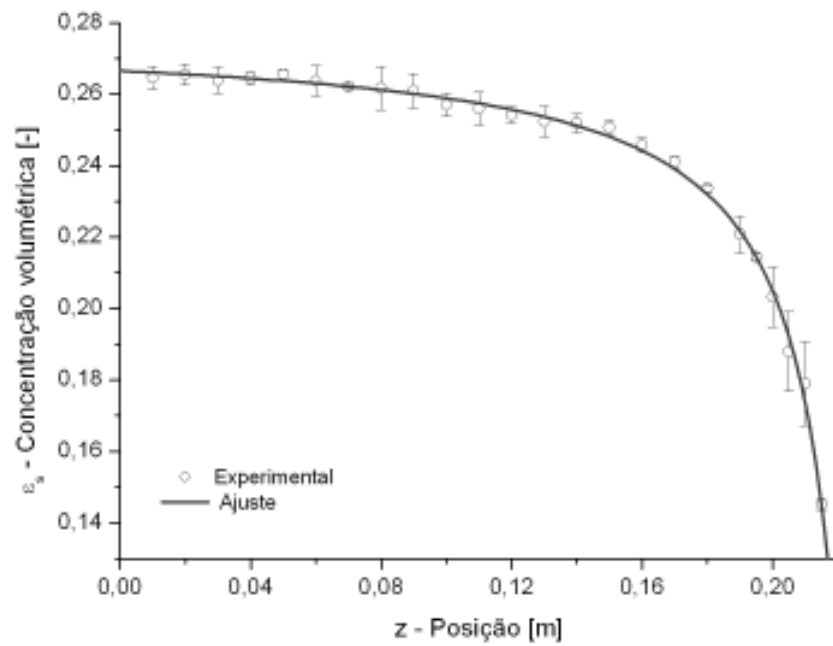


Figura 5.36: Distribuições de concentrações em sedimentos de caulim $\varepsilon_{s0}=12\%$ na condição de decantação natural das partículas (condição de não-escoamento).

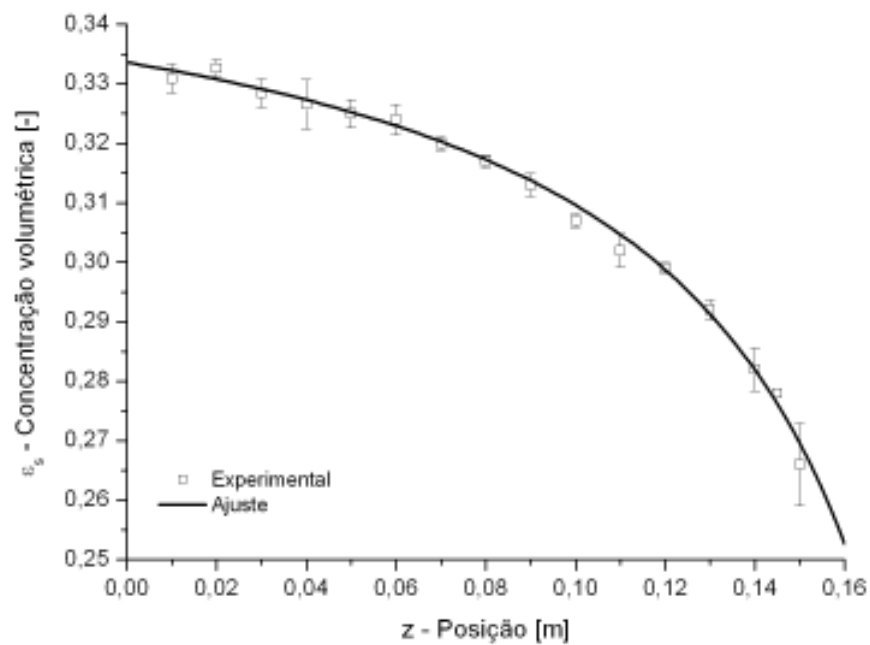


Figura 5.37: Distribuições de concentrações em sedimentos de caulim $\varepsilon_{s0}=12\%$ na condição de percolação do líquido sob a matriz porosa.

De posse das distribuições de concentrações no sedimento submetido à percolação do líquido observa-se que a concentração crítica na superfície do sedimento foi igual $\varepsilon_{sc}=26,7\%$, equivalente à concentração máxima do sedimento antes da percolação do líquido. A concentração máxima atingiu $\varepsilon_{sm}=33,3\%$ em média, ou seja, um acréscimo de $24,7\%$ devido à passagem do fluido pela matriz porosa. Tal constatação pode ser explicada pelo fato de que, no processo de decantação, partículas maiores sedimentam mais rapidamente enquanto que o líquido ascendente que compensa tal deslocamento freia partículas menores. Desta forma, partículas maiores se acomodam primeiro e, aos poucos, partículas menores se acomodam sobre elas. Quando tal disposição foi submetida ao escoamento do líquido, partículas muito pequenas foram misturadas com outras bem maiores, ocupando os espaços vazios entre elas e conseqüentemente aumentando a concentração local. O efeito observado é conivente com os resultados comentados na Seção 5.2.1.

Técnicas de regressão não-lineares foram usadas para ajustar os perfis de concentrações obtidos nos testes em batelada. Ambas as Figuras 5.36 e 5.37 apresentam os resultados das regressões dos pontos experimentais de acordo com a equação proposta por Arouca (2003) para distribuições de concentrações em sedimentos, Equação (5.3).

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{sm} + az}{1 + bz} \quad (5.3)$$

na qual ε_{sm} , a e b são parâmetros de ajuste. A Tabela 5.4 apresenta os parâmetros da Equação (5.3) para os testes de acomodação natural das partículas (Figura 5.36) e de percolação do líquido sob a matriz porosa na nova condição de estabilidade do sedimento (Figura 5.37).

Tabela 5.4: Parâmetros da equação de Arouca (2003).

Sedimento	Parâmetro			r^2
	ε_{sm} [-]	a [-]	b [-]	
Acomodação natural	$0,2665 \pm 0,0006$	$-1,187 \pm 0,003$	$-4,29 \pm 0,02$	0,9966
Percolação do líquido	$0,3334 \pm 0,0009$	$-1,69 \pm 0,04$	$-4,7 \pm 0,2$	0,9946

Nota-se através das Figuras 5.36 e 5.37 e da Tabela 5.4 que a equação de Arouca (2003) representa bem os perfis de concentrações nos sedimentos nas duas condições de estabilidade avaliadas. O fato da Equação (5.3) representar adequadamente os diagramas de concentrações no sedimento formado pela acomodação natural de partículas e no sedimento estabelecido pela percolação do fluido mostra que o modelo pode ser bem empregado para diferentes condições experimentais de sólidos compressíveis.

Equação constitutiva para a pressão nos sólidos

De posse das distribuições de concentrações nos sedimentos não submetidos à condição de escoamento do líquido $\varepsilon_s(z)$, foi possível determinar a função $P_s(\varepsilon_s)$ pela aplicação da metodologia apresentada na Seção 4.12.1, através da Equação (4.43):

$$P_s = (\rho_s - \rho_f) g \int_0^L \varepsilon_s(z) dz \quad (5.4)$$

na qual z é a distância vertical medida a partir do topo do sedimento de comprimento L .

A integral expressa na Equação (5.4) foi resolvida utilizando-se a equação ajustada para os perfis de concentrações, Equação (5.3), uma vez que o coeficiente de correlação indicou que na maioria dos ensaios cerca de 99% dos dados experimentais são representados pelo modelo. Além disso, os resíduos apresentaram-se aleatórios e bem distribuídos. Os parâmetros da equação de Arouca (2003) utilizados para os cálculos foram os apresentados na Tabela 5.4. Os parâmetros ρ_s , ρ_f , g e L utilizados foram equivalentes à 2.577 Kg/m³, 1.000 Kg/m³, 9,81 m/s² e 21,8 cm, respectivamente.

A Figura 5.38 apresenta o diagrama que relaciona a pressão nos sólidos e as concentrações volumétricas locais para a faixa de concentrações estudada. O erro experimental associado às réplicas submetidas às mesmas condições é apresentado na figura através das barras verticais e horizontais dos desvios padrões para cada posição.

Pela análise da Figura 5.38 nota-se que os erros das medidas de concentrações locais foram mais significativos do que os erros associados aos cálculos das pressões nos sólidos. O material sólido mostrou-se bastante compressível e a pressão na base do sedimentador foi em média equivalente à $P_s = (7824 \pm 58)$ dyn/cm².

Os resultados experimentais de cada ensaio foram analisados por técnicas de regressão não-linear a fim de se estimar os parâmetros para a equação proposta por Tiller e Leu (1980) apresentada na Seção 3.3.2, Equação (3.64):

$$P_s = P_a \left[\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sc}} \right)^{\frac{1}{\beta}} - 1 \right] \quad (5.5)$$

Os parâmetros ajustados para a Equação (5.5) são apresentados na Tabela 5.5, válidos para a faixa de concentrações de $0,137 \leq \varepsilon_s \leq 0,267$.

Silva (2004) fazendo uso do mesmo lote do material sólido empregado neste trabalho, avaliou a técnica desenvolvida por França et al. (1995) para a determinação de parâmetros de equações constitutivas. Em seu estudo ao produzir suspensões aquosas de caulim em

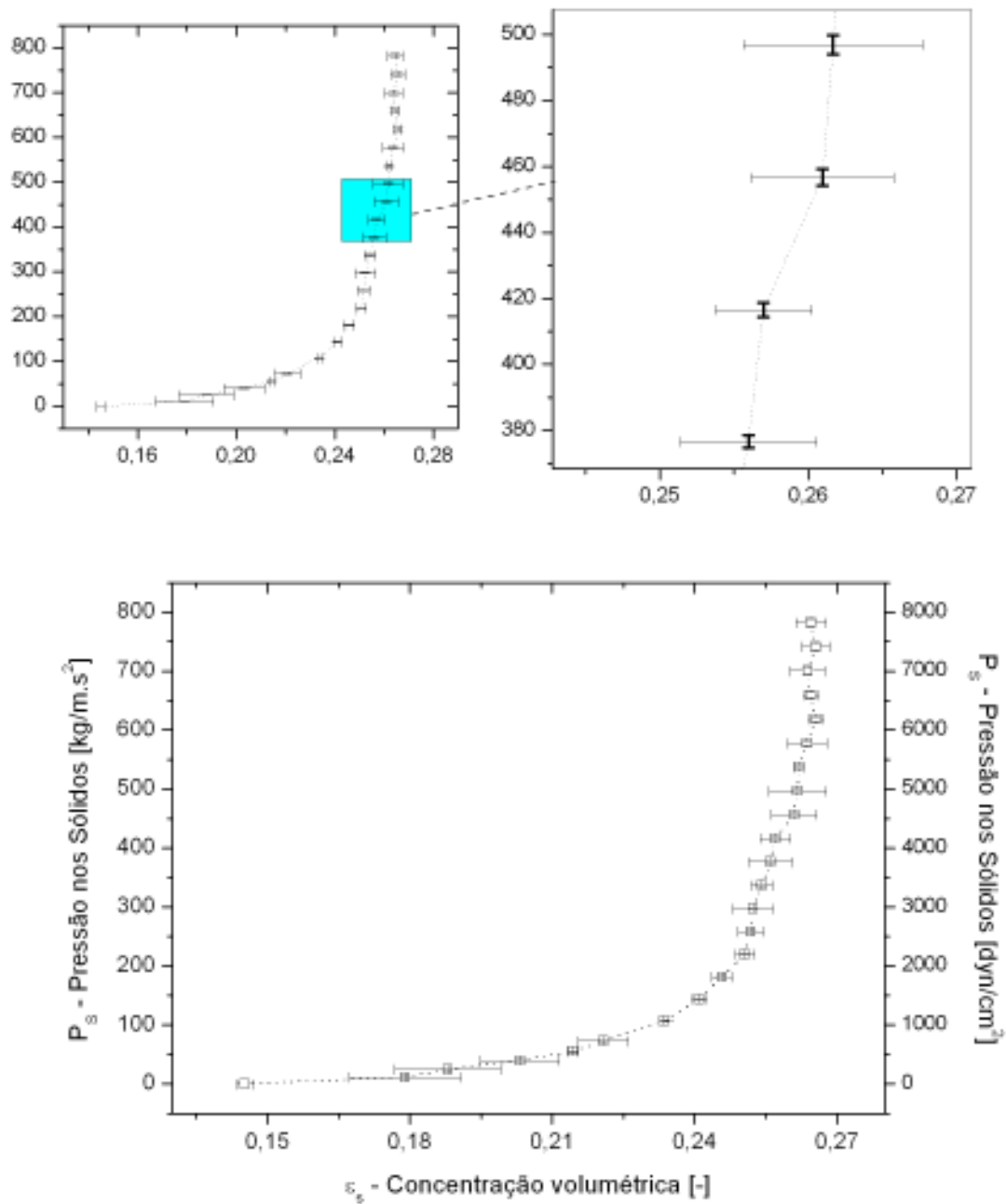


Figura 5.38: Pressão nos sólidos como função da concentração local para suspensões aquosas de caulim em $\varepsilon_{s0}=12\%$.

Tabela 5.5: Parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos ($\varepsilon_{s0}=12\%$).

Parâmetro			r^2
P_a [dyn/cm ²]	ε_{sc} [-]	$1/\beta$ [-]	
0,1965	0,1375	15,83	0,9330

provetas de diferentes tamanhos, obteve resultados para a pressão nos sólidos na base do sedimentador como uma função da concentração média e com isso determinou parâmetros para a equação de Tiller e Leu (1980).

A eficácia da técnica empregada foi comprovada por França et al. (1995) ao comparar a equação constitutiva obtida em seu trabalho com os resultados obtidos por Damasceno (1992) através da Técnica de Atenuação de Raios Gama. Desta forma, os parâmetros obtidos por Silva (2004) para a pressão nos sólidos puderam ser comparados aos obtidos neste trabalho (Tabela 5.5).

A Tabela 5.6 apresenta os parâmetros para a equação de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos do material caulim utilizado neste trabalho, obtidos pela técnica para estimação de equações constitutivas em sedimentos por França et al. (1995).

Tabela 5.6: Parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos obtidos por Silva (2004).

Parâmetro		
P_a [dyn/cm ²]	ε_{sc} [-]	$1/\beta$ [-]
0,2183	0,1081	11,26

Uma característica da expressão de Tiller e Leu (1980) para a pressão, Equação (5.5), é a estimativa da concentração crítica dos sólidos, fornecida pelo parâmetro ε_{sc} . Comparando-se os parâmetros referentes à ε_{sc} nas Tabelas 5.5 e 5.6 nota-se uma discrepância de 21,4%.

Uma vez que os parâmetros para a equação da pressão nos sólidos determinados neste trabalho foram obtidos por técnicas de regressão não-linear, sabe-se que a estimativa inicial dos parâmetros é de fundamental importância para a obtenção de bons resultados. Uma boa estimativa inicial é o valor experimental da concentração crítica obtida nos diagramas de distribuições de concentrações em sedimentos (Figura 5.36). As equações constitutivas para a pressão nos sólidos obtidas por Silva (2004) e por este trabalhos são comparadas na Figura 5.39.

De acordo com a Figura 5.39 observa-se que ambas as metodologias empregadas na

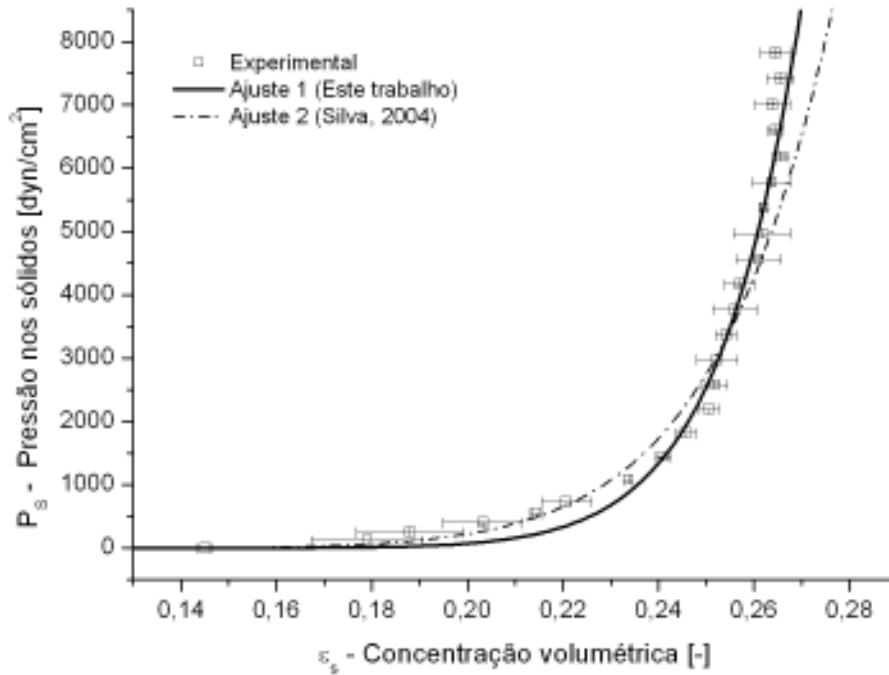


Figura 5.39: Parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos em suspensões aquosas de caulim por diferentes metodologias.

estimação de parâmetros da equação constitutiva para a pressão nos sólidos obtiveram resultados bastante significativos. Nota-se que os parâmetros obtidos neste trabalho representam bem as pressões nas faixas de concentrações inferiores à 18% e superiores à 24%, apresentando pequenos desvios. Em contrapartida, os parâmetros obtidos por Silva (2004) se mostraram mais eficientes para a faixa intermediária de concentrações. Embora a metodologia desenvolvida por França et al. (1995) seja uma técnica bastante simples, a estimação de parâmetros para equações de pressão nos sólidos conduz à resultados similares aos obtidos por técnica mais complexas, como a TARG. Certamente uma boa estimativa inicial aliada à técnica de França et al. (1995) poderá conduzir a resultados bastante satisfatórios.

Sabendo-se que as equações constitutivas obtidas serão acopladas ao modelo matemático para a sedimentação em batelada desenvolvido neste trabalho, e que testes preliminares em laboratório mostraram que as concentrações relevantes para as simulações computacionais estão compreendidas na faixa $0 \leq \varepsilon_s \leq 0,25$, optou-se por uma nova estimativa dos parâmetros de Tiller e Leu (1980) apenas para o intervalo de interesse. Desta forma, os resíduos obtidos entre os valores preditos pelo modelo e observados experimentalmente são minimizados, permitindo uma representação física mais coerente. A Tabela 5.7 apresenta o ajuste de parâmetros para a faixa de concentrações de interesse

no trabalho.

Tabela 5.7: Parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos para a faixa de concentrações $0 \leq \varepsilon_s \leq 0,25$.

Parâmetro			r^2
P_a [dyn/cm ²]	ε_{sc} [-]	$1/\beta$ [-]	
1,0125	0,1042	8,7237	0,9947

A Figura 5.40 apresenta a equação constitutiva para a pressão nos sólidos para a faixa de concentrações de interesse no trabalho.

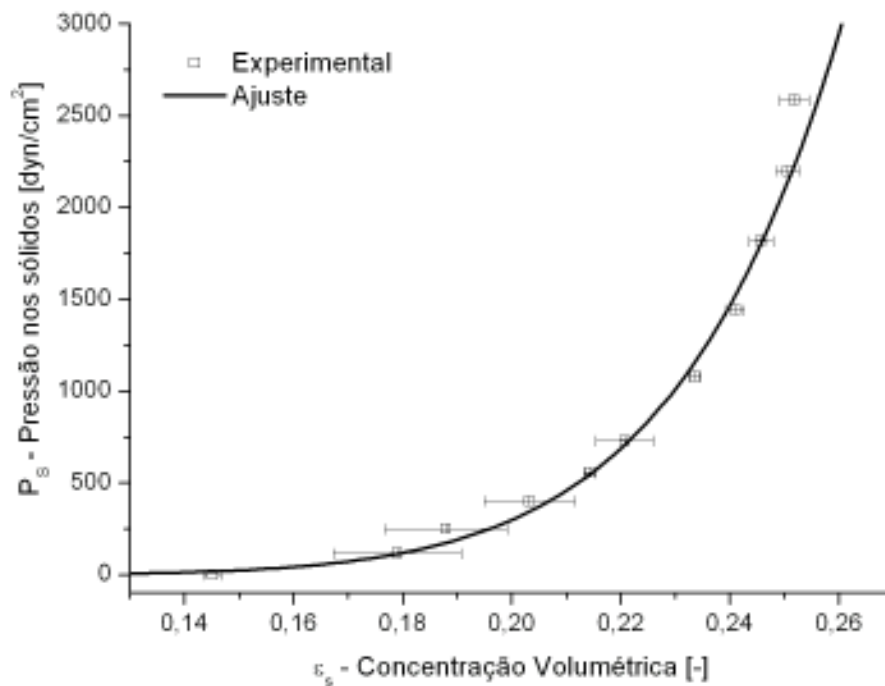


Figura 5.40: Parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos em uma faixa específica de concentrações.

Nota-se pela análise da Tabela 5.7 e da Figura 5.40 que a equação constitutiva para a pressão nos sólidos representa bem os resultados experimentais. Desta forma, os parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980) obtidos para a faixa $0 \leq \varepsilon_s \leq 0,25$ serão empregados para a modelagem e simulação da sedimentação em batelada neste trabalho.

Análise de sensibilidade dos parâmetros da equação constitutiva de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos

A equação de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos, Equação (5.5) é um dos modelos mais utilizados na literatura para estimação da pressão nos sólidos até os dias atuais. Certamente a freqüente aplicação da equação está ligada ao fato da mesma apresentar informações importantes do fenômeno físico tais como o parâmetro que fornece uma estimativa da concentração crítica ε_{sc} e conseqüentemente a pressão crítica P_{sc} em $\varepsilon_s = \varepsilon_{sc}$. Entretanto uma inconsistência física pode ser observada em $\varepsilon_s = 0$, que deveria fornecer $P_s = 0$ enquanto fornece P_a . Isso equivale dizer que a pressão dos sólidos na região de líquido clarificado não é nula.

Como foi discutido anteriormente, o modelo de Tiller e Leu (1980) para a pressão conduz a resultados satisfatórios, mas a dependência dos parâmetros à uma estimativa inicial coerente na regressão é bastante significativa. Naturalmente, uma vez medida a concentração crítica do material sólido a estimativa para este parâmetro fica estabelecida. Entretanto, muitas vezes tais informações não são conhecidas, mas sim desejadas de se obter pela equação de ajuste. A Figura 5.41 apresenta um conjunto de funções cujos parâmetros ajustados para o modelo de Tiller e Leu (1980) mostram suas interdependências.

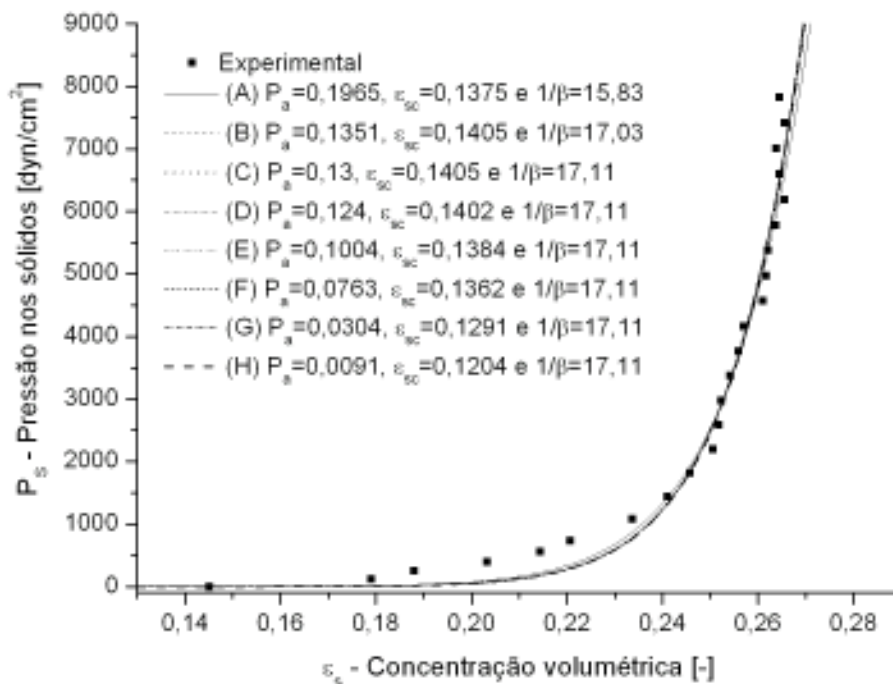


Figura 5.41: Parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos em diversas estimativas iniciais de regressão.

Nota-se através da Figura 5.41 que existem várias combinações dos parâmetros de ajuste que conduzem ao mesmo resultado e o erro associado aos desvios dos parâmetros é grande. Em média, para os ajustes apresentados na figura, os desvios dos parâmetros P_a , ε_{sc} e $1/\beta$ foram 60,4, 5,2 e 2,4%, respectivamente.

Uma outra observação relevante está ligada ao parâmetro ε_{sc} que apresentou uma média de $(0,135 \pm 0,007)$ consistente com a concentração crítica medida experimentalmente, apesar do parâmetro P_a apresentar um elevado desvio.

Avaliando-se ainda as estimativas apresentadas na Figura 5.41, observa-se que os ajustes indicados pela seqüência de (C) à (H) na legenda apresentam o mesmo valor para o parâmetro $1/\beta$, enquanto os pares P_a e ε_{sc} mostram uma relação de dependência entre si. Assim sendo provavelmente tais parâmetros não sejam independentes, ou melhor, estejam fornecendo ao modelo uma mesma informação do comportamento do material sólido, seja ela física ou comportamental.

A fim de se avaliar a sensibilidade dos parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980), diversas análises em termos das derivadas da função P_s em ε_s , P_a , ε_{sc} e $1/\beta$ foram avaliadas. A Equação (5.6) apresenta a derivada da pressão nos sólidos em termos da concentração volumétrica local.

$$\frac{dP_s}{d\varepsilon_s} = \frac{P_a}{\beta\varepsilon_{sc}} \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sc}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (5.6)$$

A análise de sensibilidade paramétrica da equação constitutiva de Tiller e Leu (1980) pode ser efetuada avaliando-se o comportamento das derivadas dP_s/dP_a , $dP_s/d\varepsilon_{sc}$, e $dP_s/d(1/\beta)$ dadas pelas Equações (5.7) a (5.9).

$$\frac{dP_s}{dP_a} = \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sc}} \right)^{\frac{1}{\beta}} - 1 \quad (5.7)$$

$$\frac{dP_s}{d\varepsilon_{sc}} = -\frac{P_a}{\beta\varepsilon_{sc}} \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sc}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (5.8)$$

$$\frac{dP_s}{d(1/\beta)} = P_a \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sc}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \ln \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sc}} \right) \quad (5.9)$$

A Figura 5.42 apresenta o comportamento da derivada $dP_s/d\varepsilon_s$. Os parâmetros da Tabela 5.5 foram usados como referência na análise.

O conhecimento da derivada $dP_s/d\varepsilon_s$ é importante para a fundamentação da abordagem matemática do modelo da sedimentação em batelada. Sabe-se também que quanto menor for a derivada da função em termos da concentração local, maior será a compressibilidade do sólido. Como se pode observar na Figura 5.42, a derivada é nula para

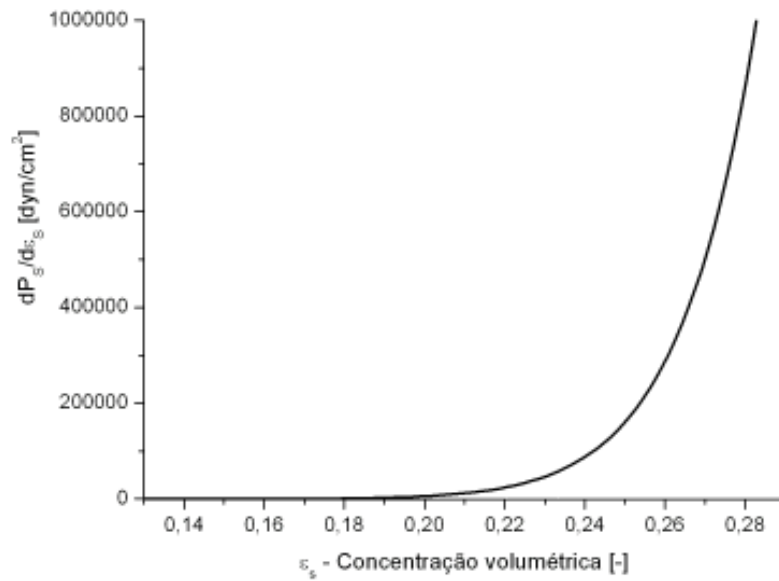


Figura 5.42: Derivada da pressão nos sólidos de Tiller e Leu (1980) em termos da concentração local.

concentrações menores que a crítica.

A Figura 5.43 apresenta o comportamento quantitativo do módulo das derivadas da equação de Tiller e Leu (1980) em termos dos parâmetros da função.

Para efeito comparativo os valores dos parâmetros apresentados na Tabela 5.5 foram

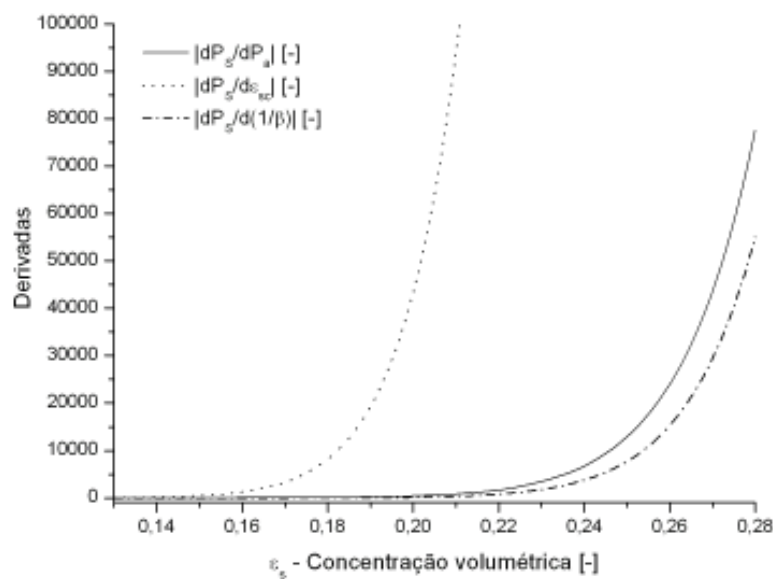


Figura 5.43: Análise de sensibilidade dos parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980).

utilizados para os cálculos das derivadas nas Equações (5.7) a (5.9). As derivadas são apresentadas em módulo e foram adimensionalizadas pelo parâmetro P_a , que por sua vez possui dimensão de força por unidade de área.

Como mostra a Figura 5.43, a maior derivada se dá em relação ao parâmetro ε_{sc} . A derivada da pressão nos sólidos em termos do parâmetro $1/\beta$ parece ser a menos expressiva. Desta forma, é possível concluir que sendo o parâmetro ε_{sc} o mais significativo, certamente é o que necessita ter maior precisão. Tal observação reforça a necessidade de uma estimativa inicial adequada para o parâmetro para que a equação de Tiller e Leu (1980) produza resultados satisfatórios.

A Tabela 5.8 apresenta os valores das derivadas para três concentrações distintas dentro da faixa estudada para o caulim: 14, 21 e 28%.

Tabela 5.8: Cálculos das derivadas da pressão nos sólidos em termos dos parâmetros de Tiller e Leu (1980).

Derivadas	ε_s [-]		
	0,14	0,21	0,28
dP_s/dP_a [-]	0,3301	845,58	$7,76 \cdot 10^4$
$dP_s/d\varepsilon_{sc}$ [-]	153,17	$9,4 \cdot 10^4$	$8,94 \cdot 10^6$
$dP_s/d(1/\beta)$ [-]	0,024	345,81	$5,52 \cdot 10^4$

Pela Tabela 5.8 é possível quantificar a importância de cada parâmetro na equação constitutiva. O efeito do parâmetro ε_{sc} é claramente notado como o mais significativo. Os modelos matemáticos para a sedimentação em batelada somente poderão ser capazes de representar bem o fenômeno físico à medida que os erros sistemáticos na estimação de parâmetros de equações constitutivas sejam eliminados.

Análise de um modelo de potências para a pressão nos sólidos

Tendo em vista a otimização dos resultados das simulações numéricas e visando minimizar os resíduos entre valores preditos por equações constitutivas e observados pela experimentação, buscou-se desenvolver uma equação constitutiva para a pressão nos sólidos que pudesse ser uma alternativa ao uso do modelo de Tiller e Leu (1980).

De posse dos resultados experimentais para a pressão nos sólidos apresentados na Figura 5.38 para sedimentos de caulim, diversas funções foram testadas nos ajustes de parâmetros para a função. Os critérios de seleção foram baseados em expressar a pressão nos sólidos por funções com menor número possível de parâmetros ajustáveis, os melhores coeficientes de correlações e as melhores distribuições de resíduos (aleatoriedade dos míni-

mos resíduos). Dentre as funções que foram avaliadas, um modelo de potências pôde ser adaptado de tal maneira que ajustasse a pressão nos sólidos mantendo-se a consistência física.

A equação constitutiva proposta para o ajuste da pressão nos sólidos é apresentada na Equação (5.10):

$$P_s(\varepsilon_s) = a\varepsilon_s^b \quad (5.10)$$

na qual a e b são parâmetros ajustáveis do modelo. O ajuste para a pressão nos sólidos, fazendo uso do modelo de potências proposto, é apresentado na Figura 5.44.

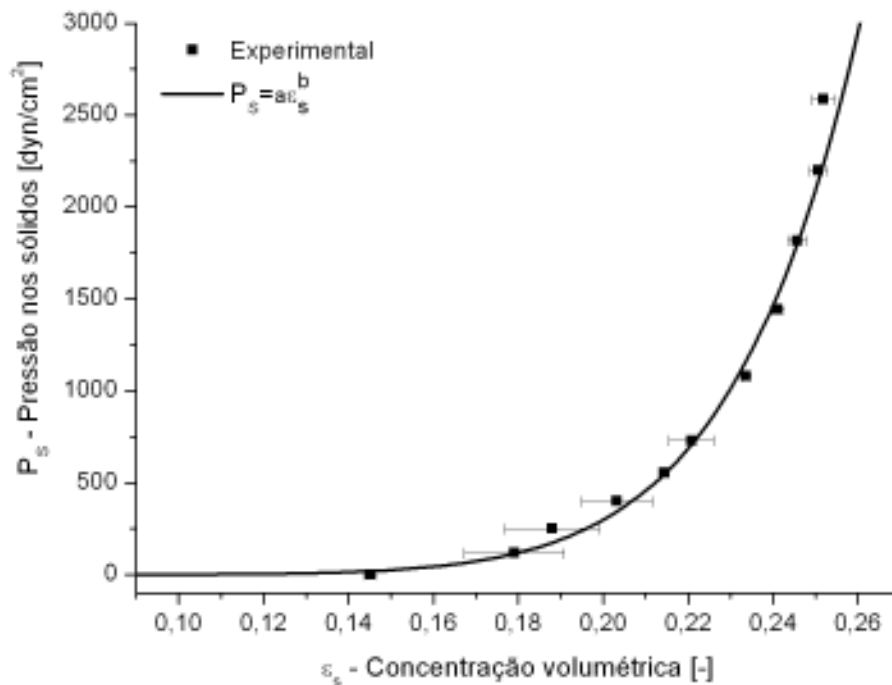


Figura 5.44: Modelo de potências proposto para a equação constitutiva da pressão nos sólidos.

Os parâmetros da equação ajustada são apresentados na Tabela 5.9.

Tabela 5.9: Parâmetros de ajuste do modelo de potências para a pressão nos sólidos.

Parâmetro		r^2
a [dyn/cm ²]	b [-]	
$3,80 \cdot 10^8$	8,7358	0,9969

Pela análise da Figura 5.44 nota-se que o modelo de potência ajustou bem os resultados da pressão nos sólidos para a faixa de concentrações de interesse no trabalho com

a vantagem de ser um modelo de dois parâmetros ajustáveis, com menores resíduos e conseqüentemente maior coeficiente de correlação r^2 . Além disso, cabe ainda ressaltar que para a Equação 5.10 não se observou sensibilidade dos parâmetros do modelo de potência quando se procedeu à uma análise de estimativa inicial para os testes de regressão não-linear. O modelo proposto não fere a restrição física $P_s=0$ em $\varepsilon_s=0$, como observado para a equação de Tiller e Leu (1980), garantindo a consistência com o fenômeno físico. A Equação (5.10) e seus respectivos parâmetros apresentados na Tabela 5.9 serão utilizados na simulação numérica da sedimentação em batelada.

Equação constitutiva para a permeabilidade do meio poroso

Os resultados de permeabilidade do meio poroso foram obtidos à partir de distribuições de concentrações nos sedimentos submetidos à percolação do líquido sob vazão constante, apresentado na Figura 5.37. Foram realizadas três réplicas experimentais de maneira a quantificar o erro experimental. A velocidade superficial de percolação do líquido foi equivalente à $q_f=(3,2\pm0,2)\cdot10^{-6}\text{m/s}$. A metodologia empregada para a determinação da permeabilidade foi desenvolvida por Damasceno (1992) e é apresentada na Seção 4.12.1.

Uma vez conhecida a nova distribuição de concentrações no sedimento submetido à condição de escoamento do fluido aplicou-se a Equação (4.44), derivada da equação do movimento para o constituinte sólido, para a determinação da permeabilidade do meio:

$$k = \frac{\mu q_f}{\frac{dP_s}{d\varepsilon_f} \frac{d\varepsilon_f}{dz} - (\rho_s - \rho_f) \varepsilon_s g} \quad (5.11)$$

na qual ε_f é a porosidade do meio, μ a viscosidade do fluido, q_f a velocidade superficial do fluido, ρ_s e ρ_f as densidades dos constituintes sólido e fluido, e g a constante gravitacional.

Os resultados obtidos para sedimentos formados pela decantação de suspensões aquosas de caulim ($\varepsilon_{s0}=12\%$) e submetidos à condição de percolação do fluido são apresentados na Figura 5.45. Os erros experimentais associados ao uso de réplicas dos testes podem ser verificados através das barras verticais e horizontais em cada ponto do diagrama.

Pela análise da Figura 5.45 observa-se que os maiores erros estão associados às posições próximas ao topo do sedimento, nas quais as concentrações locais são as menores observadas. Tal fato pode ser justificado pela dificuldade em manter a mesma vazão de escoamento do líquido para cada réplica. Espera-se que partículas menores ocupem os espaços vazios entre as partículas maiores. De acordo com Damasceno (1992) quanto maior a velocidade superficial do líquido em ensaios submetidos às mesmas condições experimentais, menor deverá ser o sedimento e conseqüentemente maior a concentração na base

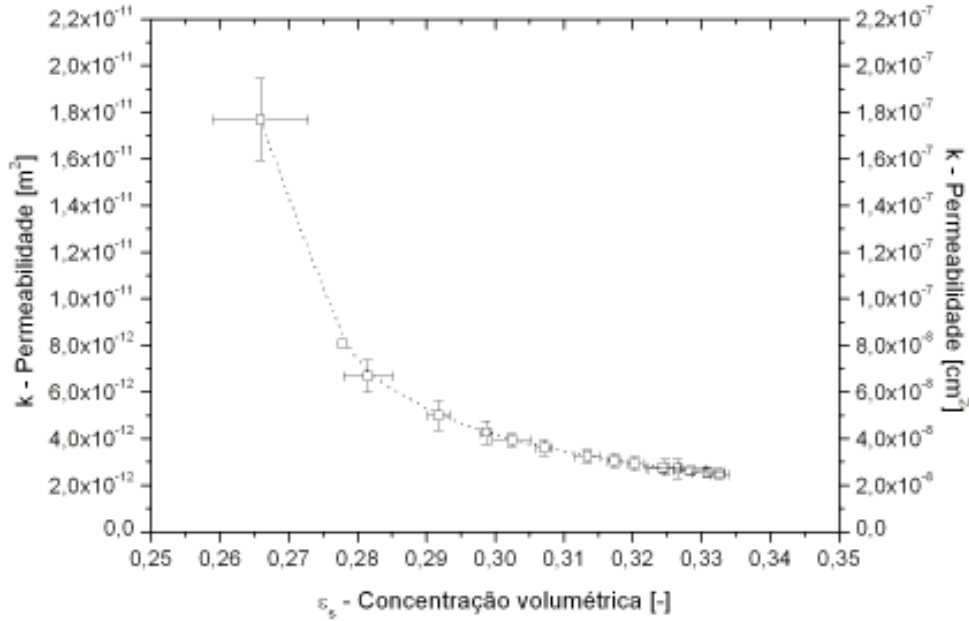


Figura 5.45: Permeabilidade do meio poroso de suspensões aquosas de caulim ($\varepsilon_{s0}=12\%$).

do sedimentador. A velocidade superficial média foi equivalente à $q_f=(3,2\pm0,2)\cdot10^{-6}\text{m/s}$.

Arouca (2003) fazendo uso do mesmo material sólido utilizado neste trabalho obteve os valores de permeabilidade do meio poroso para altas concentrações utilizando a Técnica de Atenuação de Raios Gama. Silva (2004) também utilizando o mesmo material sólido determinou a permeabilidade de suspensões diluídas na faixa de $0,06 \leq \varepsilon_s \leq 0,095$. Além disso, este trabalho procurou ampliar a faixa de permeabilidades em testes de concentrações iniciais na faixa de $0,02 \leq \varepsilon_s \leq 0,05$ (Ver Tabela 5.3). Desta forma, de posse dos resultados de diferentes pesquisadores para o mesmo lote de material sólido, determinou-se a permeabilidade do meio poroso para uma ampla faixa de concentrações de sólidos.

Os resultados foram ajustados utilizando-se a equação de Tiller e Leu (1980) para a permeabilidade do meio poroso, apresentada na Seção 3.3.2, Equação (3.71):

$$k(\varepsilon_s) = k_0 \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sc}} \right)^{-\eta} \quad (5.12)$$

na qual k_0 , ε_{sc} e η são parâmetros experimentais. A Tabela 5.10 apresenta os valores dos parâmetros.

A Figura 5.46 apresenta a equação constitutiva de Tiller e Leu (1980) para a permeabilidade do meio poroso para diversas concentrações, Equação 5.12, com os parâmetros da Tabela 5.10.

Tabela 5.10: Parâmetros de ajuste da equação de Tiller e Leu (1980) para a permeabilidade do meio poroso.

Parâmetro			r^2
k_0 [cm ²]	ε_{sc} [-]	η [-]	
$1,69 \cdot 10^{-7}$	0,1287	2,4736	0,9989

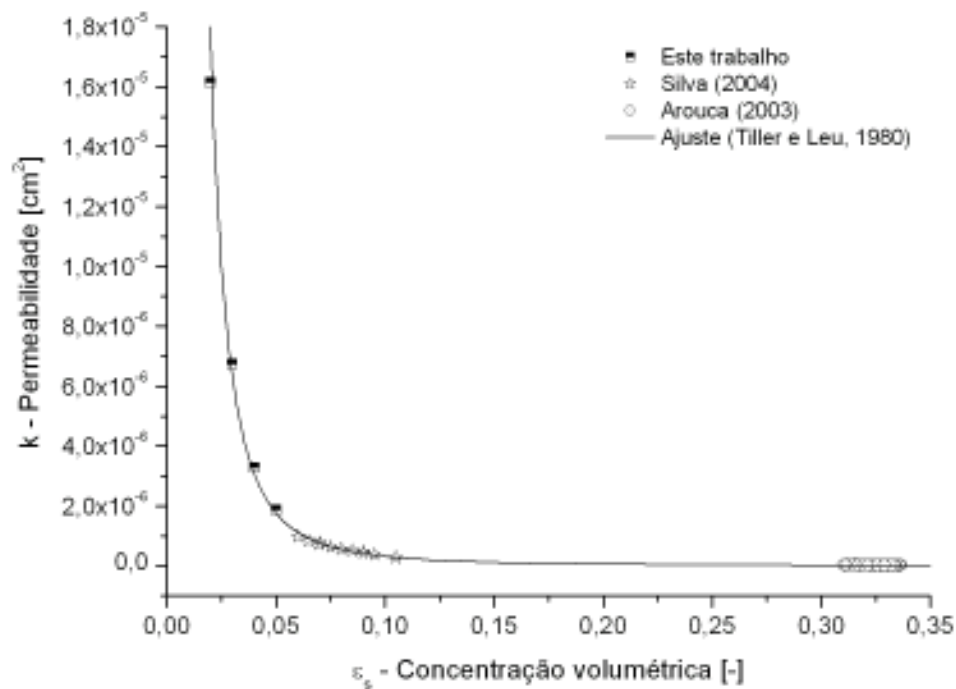


Figura 5.46: Equação constitutiva para a permeabilidade do meio poroso de suspensões aquosas de caulim.

A equação de Tiller e Leu (1980) para a permeabilidade ajustou bem os resultados experimentais para toda a faixa de concentrações avaliada. O coeficiente de correlação r^2 apresentado na Tabela 5.10 mostra que 99,9% dos resultados são representados pelo modelo. A equação constitutiva obtida para a permeabilidade do meio poroso será utilizada na modelagem e simulação de processos de sedimentação em batelada nas seções seguintes.

5.4 Simulação numérica da sedimentação em campo gravitacional

5.4.1 Métodos numéricos e adaptativos para a resolução de modelos matemáticos para a sedimentação

A eliminação do problema de fronteiras móveis (D'ÁVILA, 1978) através do desenvolvimento de um modelo matemático para a sedimentação capaz de descrever o fenômeno em todo o domínio espaço-tempo despertou o interesse na análise da abordagem de Burger e Concha (1998), que diminuiu substancialmente o grau de complexidade da resolução numérica.

Burger e Concha (1998) resolveram o problema transiente da sedimentação contínua e em batelada utilizando o método das Diferenças Finitas não-oscilatório acoplado ao método de modificação de *Lax-Friedrichs* para uma malha fixa com 400 pontos de discretização espacial. Os autores utilizaram discretização na variável tempo obedecendo a relação $\lambda = \Delta t / \Delta x = 0,01$. A solução aproximada para o modelo de Burger e Concha (1998) para a sedimentação é obtida através da implementação do problema de valor inicial e de contornos (PVIC) apresentado pela Equação (3.230), válida no domínio $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq t \leq T$, e pelas condições nas Equações (3.231) a (3.231). As especificações de parâmetros físicos e equações constitutivas para a tensão nos sólidos e a função f_{bk} foram fundamentais para a caracterização do comportamento específico do sólido e para a determinação do sistema de equações.

A descrição física introduzida por D'Ávila (1978) em seu modelo matemático juntamente com a abordagem matemática de Burger e Concha (1998) deram origem ao modelo matemático alternativo proposto para a sedimentação em campo gravitacional, apresentado na Seção 3.7. O modelo foi resolvido implementando-se a Equação (3.260), válida no domínio $0 \leq z \leq L$ e $0 \leq t \leq T$, e pelas condições inicial e de contornos das Equações (3.266), (3.268) e (3.269). As equações constitutivas para $P_s(\varepsilon_s)$ e $k(\varepsilon_s)$ utilizadas são apresentadas na Seção 5.3.

Ambos os modelos matemáticos de Burger e Concha (1998) e o modelo alternativo para a sedimentação foram resolvidos neste trabalho fazendo uso de métodos numéricos e adaptativos apropriados para cada caso.

Na formulação do modelo de sedimentação supõe-se que a pressão nos sólidos pode ser transmitida sólido a sólido quando as partículas em sedimentação entram em contato umas com as outras. O ponto no qual esse efeito se torna significativo é suposto ser numa

determinada concentração de sólidos, a concentração crítica, tal que a derivada da tensão nos sólidos admite o seguinte comportamento:

$$P'_s = \begin{cases} 0 & \text{para } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sc} \\ > 0 & \text{para } \varepsilon_s > \varepsilon_{sc} \end{cases} \quad (5.13)$$

Um aspecto não usual das equações não-lineares que representam o comportamento da sedimentação de partículas em meio fluido é a natureza mista hiperbólica-parabólica das equações do modelo. Tal característica corresponde à interface entre a zona de compressão, na qual a tensão nos sólidos varia continuamente e a região de sedimentação, onde a concentração de sólidos é suposta ser constante. A zona de sedimentação é limitada simultaneamente por uma outra interface física que descreve um movimento descendente e define a região de líquido clarificado. Sob o ponto de vista matemático tais interfaces representam as descontinuidades presentes no modelo.

As localizações das interfaces entre as regiões de compressão, sedimentação e líquido clarificado não são conhecidas *a priori* e esse fato introduz uma complexidade matemática à resolução do modelo. A resolução de equações com essa natureza leva em geral a soluções descontínuas que necessitam ser analisadas em um contexto de soluções fracas do sistema diferencial, tornando necessário a abordagem de soluções generalizadas com condições de garantia de unicidade decorrentes da condição de entropia (BURGER; KARLSEN, 2001). Somando-se a esse fato decorrente da descontinuidade de soluções, sabe-se que nesse contexto o problema pode não apresentar unicidade de soluções fracas, exigindo-se assim que um critério adicional (condição entrópica) seja avaliado para a escolha da solução representativa dentre as soluções do problema levando a definição da solução fraca generalizada para a equação diferencial.

Várias técnicas são conhecidas para a resolução desse tipo de problema, sendo que dentre elas destacam-se como as mais usuais a técnica de discretização por diferenças finitas com mecanismos de discretização do tipo *upwind* e a técnica por divisão dos operadores. Nesse trabalho aplicou-se a técnica de discretização por diferenças finitas transformando o sistema diferencial em um sistema de equações algébrico-diferenciais (EAD's). Os algoritmos simples de discretização não são capazes de resolver problemas para a classe com soluções descontínuas, gerando falhas na resolução. A resolução de equações dessa natureza por técnicas numéricas convencionais pode levar a soluções incorretas mesmo para discretizações com malhas refinadíssimas.

Para a resolução dos modelos aplicou-se uma modificação da técnica de aproximação espacial *upwind* de segunda ordem MUSCL com extrapolação de variável: *Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws* (EVJE et al., 2000). A abordagem

MUSCL baseia-se numa reconstrução linear por partes da média das concentrações na malha de discretização em cada instante para aumentar a resolução. A aproximação do termo $\partial\Gamma/\partial x$ é dada por:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x} \approx \frac{F(u_j^R, u_{j+1}^L) - F(u_{j-1}^R, u_j^L)}{\Delta x} \quad (5.14)$$

sendo u a variável computacional em x adimensional, equivalente à ε_s .

Para funções Γ monotônicas, têm-se que:

$$F(a, b) = \begin{cases} a & \text{se } \Gamma' > 0 \\ b & \text{se } \Gamma' < 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

e ainda,

$$u_j^L(t) = u_j(t) - \frac{\Delta x}{2} s_j(t) \quad (5.16)$$

$$u_j^R(t) = u_j(t) + \frac{\Delta x}{2} s_j(t) \quad (5.17)$$

sendo $s_j(t)$ dado pela expressão:

$$s_j(t) = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \left[\operatorname{sgn} \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} \right) + \operatorname{sgn} \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \right) \right] m \quad (5.18)$$

e m dado por:

$$m = \min \left(\left| \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} \right|, \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \right| \right) \quad (5.19)$$

Na definição de $s_j(t)$ utilizou-se o limitador *minmod*, entretanto, outros limitadores cujo valor se encontra limitado pelos mínimos e máximos dos argumentos poderiam ser utilizados.

Para o caso de funções Γ não-monotônicas é preciso utilizar a função de fluxo generalizado de *Engquist-Osher* (BURGER; KARLSEN, 2001), dada por:

$$F(a, b) = f^+(a) + f^-(b) \quad (5.20)$$

e ainda,

$$f^+(a) = f(0) + \int_0^a \max(f'(\zeta), 0) d\zeta \quad (5.21)$$

$$f^-(b) = \int_0^a \min(f'(\zeta), 0) d\zeta \quad (5.22)$$

Assim, pode-se escrever a função $F(a, b)$,

$$F(a, b) = \begin{cases} f(b) & \text{se } a \leq u^*, b \leq u^* \\ f(a) + f(b) - f(u^*) & \text{se } a > u^*, b \leq u^* \\ f(u^*) & \text{se } a \leq u^*, b > u^* \\ f(a) & \text{se } a > u^*, b > u^* \end{cases} \quad (5.23)$$

sendo a e b duas concentrações quaisquer e u^* equivalente a concentração no ponto de máximo da função, ou

$$F(a, b) = \begin{cases} f(a) & \text{se } a \leq u^*, b \leq u^* \\ f(a) + f(b) - f(u^*) & \text{se } a > u^*, b \leq u^* \\ f(u^*) & \text{se } a \leq u^*, b > u^* \\ f(b) & \text{se } a > u^*, b > u^* \end{cases} \quad (5.24)$$

com u^* equivalente a concentração no ponto de mínimo da função.

A metodologia de discretização espacial MUSCL de segunda ordem foi aplicada às equações diferenciais parciais e suas respectivas condições iniciais e de contornos para cada modelo implementado (modelo de Burger e Concha (1998) e modelo alternativo proposto). Cada sistema é acoplado ao método das linhas (MOL), determinando-se um novo sistema de equações algébrico-diferenciais cuja resolução numérica foi realizada com o código DASSL (BRENAN et al., 1996) disponível no *Scilab*®. A técnica de *Moving Mesh* foi aplicada para o problema de natureza mista hiperbólico-parabólico.

Certamente uma contribuição do trabalho aos métodos numéricos para resolução de problemas desta natureza está relacionada ao uso de uma abordagem MUSCL de segunda ordem acoplada à um sistema de EAD's resolvido em malha variável.

5.4.2 Simulação numérica do modelo de Burger e Concha (1998) para a sedimentação em Batelada

A solução do modelo matemático de Burger e Concha (1998) para a sedimentação em campo gravitacional foi obtida através da implementação da Equação (5.25):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (5.25)$$

com o termo do coeficiente difusivo $a(u)$ dado pela equação:

$$a(u) = -\frac{f_{bk}(u) \sigma'_e}{L \Delta \rho g u} \quad (5.26)$$

e a função $f(u, t)$ expressa por:

$$f[u(z, t), t] = q(t) u + f_{bk}(u) \quad (5.27)$$

sendo $x = z/L$ e $u(x, t) = \varepsilon_s(Lx, t)$. Para o caso específico da sedimentação em batelada, na qual não ocorre entradas ou saídas de material, $q(t)=0$.

O problema está sujeito às condições inicial e de contorno apresentada pelas Equações (5.28) à (5.30), respectivamente:

$$u(x, t = 0) = u_0(x) \quad (5.28)$$

$$f_{bk}(u) - a(u) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (5.29)$$

$$u(x = 1, t) = u_1(t) \quad (5.30)$$

O equacionamento apresentado por Burger e Concha (1998) é válido no domínio $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq t \leq T$, sendo T equivalente ao tempo final de sedimentação. O problema foi resolvido utilizando Diferenças Finitas em malha fixa acoplada ao método de MUSCL de segunda ordem e ao método das linhas (MOL).

O sistema original de EAD's é representado pela expressão:

$$\begin{aligned} \left. \frac{du}{dt} \right|_j = & -\frac{F(u_j, u_{j+1}) - F(u_{j-1}, u_j)}{\Delta x} + a(u_j) \left(\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} \right) + \\ & + \left(\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} \right) \left(\frac{a(u_{j+1}) - a(u_{j-1})}{2\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

O sistema fornecido pela Equação 5.31 é acoplado às equações oriundas das condições de contorno em $j=0$ e $j=N+1$ e da condição inicial $u_j(0)=u_{0j}$ sendo válida em $1 \leq j \leq N$.

A equação resultante para o fundo do sedimentador ($x=0$) deve ser avaliada para consistência, uma vez que os dados experimentais podem levar à descontinuidade na equação das tensões nos sólidos:

$$\frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2\Delta x} + \frac{L \Delta \rho g u_0}{\sigma'_e(u_0)} = 0 \quad (5.32)$$

Várias abordagens podem ser realizadas para se avaliar a consistência da condição

inicial com a Equação (5.32). Neste trabalho, utilizando uma discretização com malha sem refino ajustou-se a condição inicial no fundo do sedimentador de forma a satisfazer a condição de contorno. A incorporação de equações constitutivas ao conjunto de equações de balanço de massa e quantidade de movimento é fundamental para a descrição do comportamento específico do material na abordagem de processos de separação. Burger et al. (2000) empregaram em seu modelo fenomenológico uma série de estudos experimentais de equações constitutivas para processos de sedimentação obtidos na literatura. Os autores utilizaram os resultados experimentais disponíveis para validação do modelo teórico.

Simulações numéricas da sedimentação gravitacional de suspensões floculentas para diferentes abordagens experimentais foram reproduzidas neste trabalho com a finalidade de se avaliar a aplicação do modelo de Burger e Concha (1998) no comportamento de sistemas de sedimentação. As simulações numéricas foram obtidas utilizando-se o *software* livre de processamento numérico *Scilab*[®] e equações constitutivas para f_{bk} e σ_e extraídas do trabalho de Burger et al. (2000).

Simulações numéricas utilizando as equações constitutivas de Been e Sills (1981) relativo ao experimento A

Been e Sills (1981) *apud* Burger et al. (2000) fizeram estudos experimentais da sedimentação em batelada de suspensões aquosas de lamas naturais produzindo várias densidades iniciais. Os autores utilizaram a técnica de raios- x para medidas de concentrações. Dois experimentos distintos de sedimentação de lama natural foram usados pelos autores na determinação de equações constitutivas para as simulações numéricas reproduzidas neste trabalho: experimentos A e B (BURGER et al., 2000).

As equações constitutivas de Been e Sills (1981) relativas ao experimento A, usadas na simulação da sedimentação em batelada de suspensões floculentas de lama natural, são apresentadas nas Equações (5.33) à (5.35):

$$f_{bk}(u) = -1,433 \cdot 10^{-8} \cdot u^2 \exp \left[\frac{0,6168(1-u)}{u} \right] \quad (5.33)$$

$$f_{bk}(u) = -1,211 \cdot 10^{-4} \cdot u(1 - 7,226u)^{5,15} \quad (5.34)$$

obtidas para a função f_{bk} em m/s com validades nos domínios $u > u_c$ e $0 \leq u \leq u_c$, respectivamente, sendo u_c a concentração crítica em x adimensional.

A tensão efetiva nos sólidos é dada por:

$$\sigma_e = 15,56 \exp(14,01u) \quad (5.35)$$

com validade no domínio $u > u_c$. Os parâmetros físicos utilizados no modelo foram: $L=1,802$ m, $\Delta\rho=1689,7$ Kg/m³, $u_0=0,02954$ e $u_c=0,0833$.

A Figura 5.47 apresenta a distribuição de concentrações na coluna de sedimentação para o tempo de sedimentação equivalente a 20.000 s.

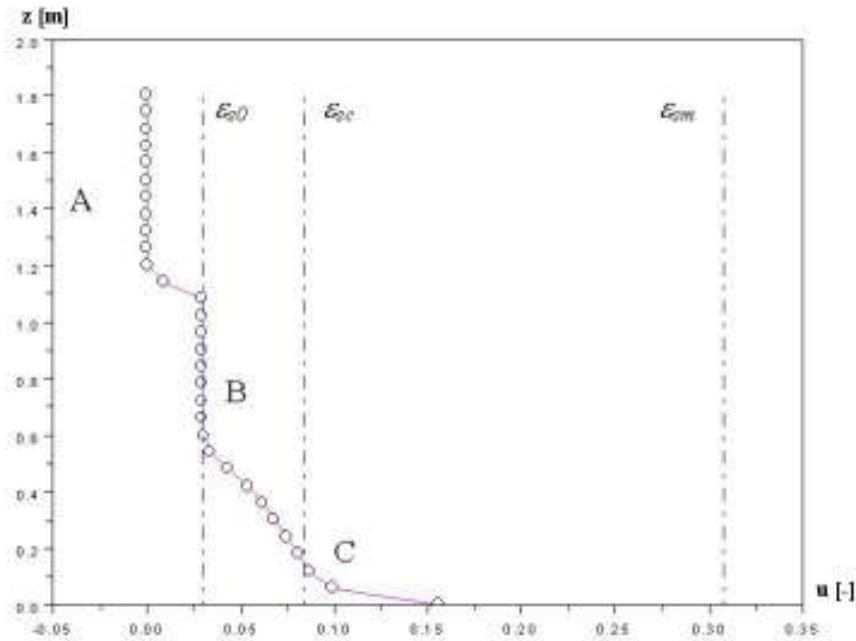


Figura 5.47: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as equações constitutivas de Been e Sills (1981) para o tempo de 20.000 s.

De acordo com o resultado apresentado na Figura 5.47 nota-se que para o tempo de decantação de 20.000 s as três regiões do fenômeno estão bem definidas no diagrama de posição versus concentração volumétrica local. A região de líquido clarificado aparece em A no diagrama, enquanto as regiões de sedimentação livre e compressão ocorrem em B e C, respectivamente. As linhas tracejadas apresentam as concentrações inicial (ε_{s0}), crítica (ε_{sc}) e máxima (ε_{sm}) do fenômeno.

A Figura 5.48 apresenta o comportamento do fenômeno físico para o tempo de 50.000 s de decantação.

Observa-se pela análise da Figura 5.48 que para o tempo de sedimentação de 50.000 s a existência da região de sedimentação livre, região cuja concentração do sólido é constante e igual a ε_{s0} não é mais verificada no fenômeno. Apenas as regiões de líquido clarificado e compressão são observadas em A e B, respectivamente. A concentração máxima de sólidos atingida na base foi equivalente à 17% em volume.

Os resultados da simulação numérica do modelo de Burger e Concha (1998) foram obtidos para o experimento A de Been e Sills (1981) para os tempos de sedimentação

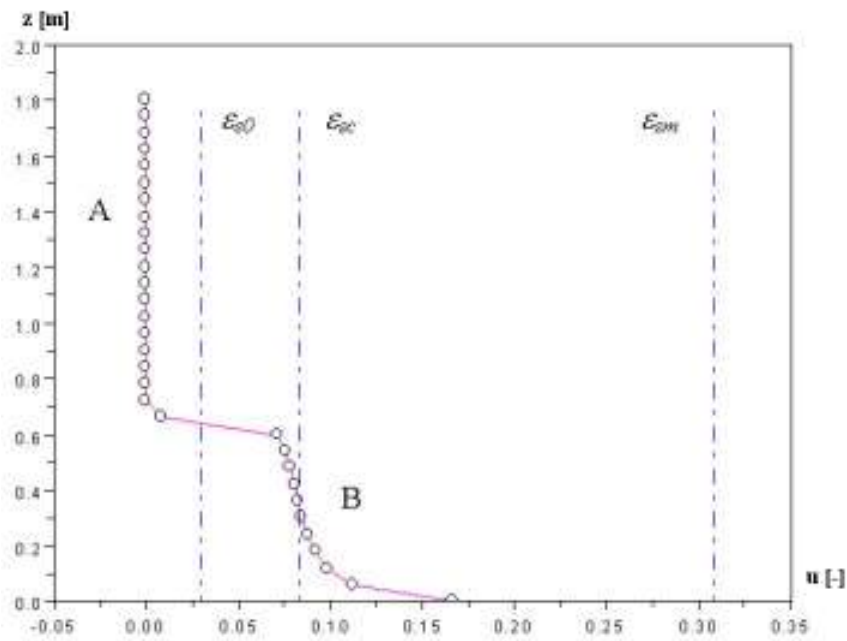


Figura 5.48: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as equações constitutivas de Been e Sills (1981) para o tempo de 50.000 s.

equivalentes a 4.900, 9.900, 19.900, 29.900, 39.900 e 50.000 s.

A Figura 5.49 apresenta as distribuições de concentrações para a sedimentação em batelada de lama natural para diversos tempos de decantação.

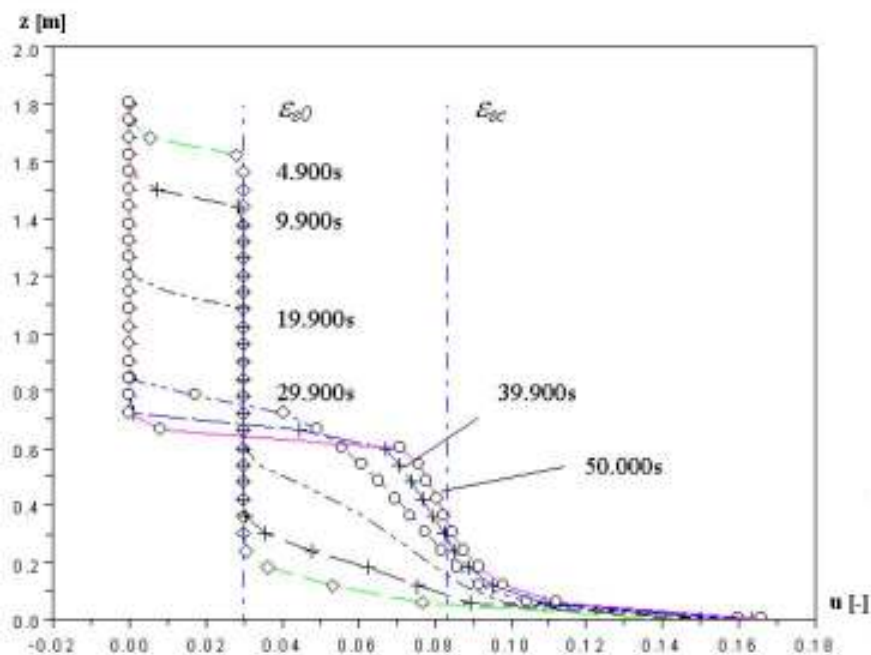


Figura 5.49: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as equações constitutivas de Been e Sills (1981) para os tempos de 4.900, 9.900, 19.900, 29.900, 39.900 e 50.000 s.

Nota-se através da figura que o modelo consegue descrever o fenômeno através da previsão de ambas as interfaces, descendente e ascendente, naturalmente durante a resolução do problema. Os pontos apresentados na figura representam os pontos de discretização da malha fixa do método das diferenças finitas. Para conduzir as simulações foram aplicados 30 pontos de discretização.

A Figura 5.50 destaca o deslocamento das interfaces descendente e ascendente através da simulação numérica.

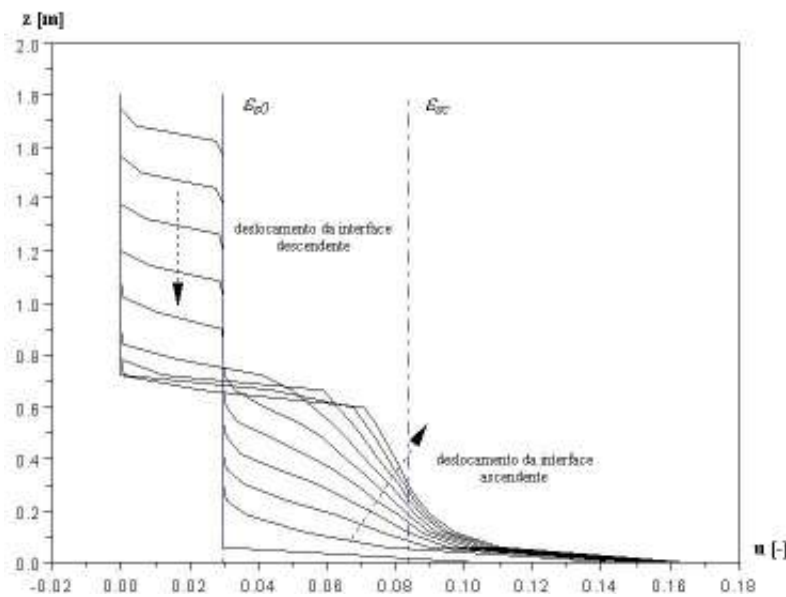


Figura 5.50: Deslocamento das interfaces ao longo do tempo.

Através da Figura 5.50 conclui-se que o método matemático desenvolvido por Burger e Concha (1998) é capaz de prever o comportamento físico das interfaces descendente e ascendente do fenômeno. É importante ressaltar que a interface descendente no diagrama de distribuições de concentrações na Figura 5.50 deveria descrever, sob o ponto de vista matemático, um patamar horizontal paralelo ao eixo das concentrações e que o erro associado aos resultados preditos pelo modelo está ligado ao número de pontos de discretização utilizados ($N=30$). Naturalmente, quanto mais refinada for a malha de discretização menor o erro associado à predição das interfaces.

O comportamento fluidodinâmico da suspensão pode ser avaliado através da Figura 5.51 na qual são apresentados diagramas de contornos de concentrações diretamente sob a coluna de sedimentação em batelada dimensionada no problema.

Pode-se verificar que a abordagem mista resolvida pelo método de Diferenças Finitas acoplado ao método de MUSCL de segunda ordem, mesmo para uma discretização sem refino foi capaz de descrever satisfatoriamente bem o fenômeno físico estudado através dos resultados experimentais da referência utilizada. A abordagem pelo método das EAD's

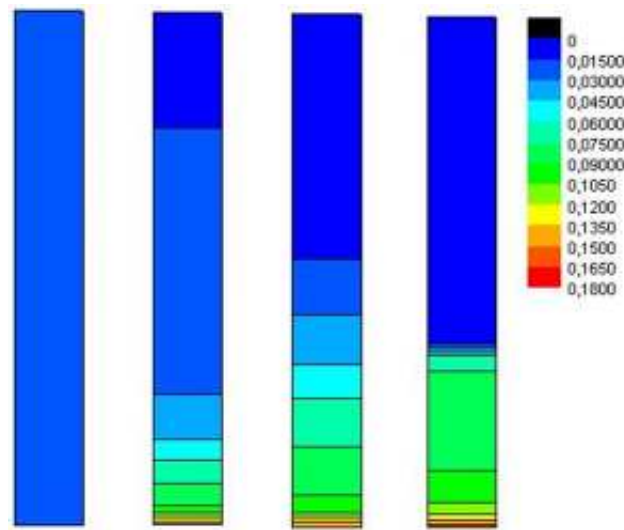


Figura 5.51: Contornos de concentrações na coluna de sedimentação em batelada obtidos a partir da simulação numérica do estudo experimental de Been e Sills (1981).

manteve a condição CFL (BURGER; KARLSEN, 2001) satisfeita, garantindo a estabilidade do método.

As tradicionais curvas de equi-concentração também puderam ser determinadas. Como ilustração apresenta-se através da Figura 5.52 as curvas de concentração constante para a região de compactação do caso relativo ao experimento A de Been e Sills (1981) equivalentes a $\varepsilon_s = (0,125; 0,15 \text{ e } 0,175)$. Nota-se que as curvas de equi-concentrações simuladas não partem da origem dos tempos, como já se esperava dos resultados preditos pelo modelo, e descrevem as tendências específicas da compressão do sólido no sedimento.

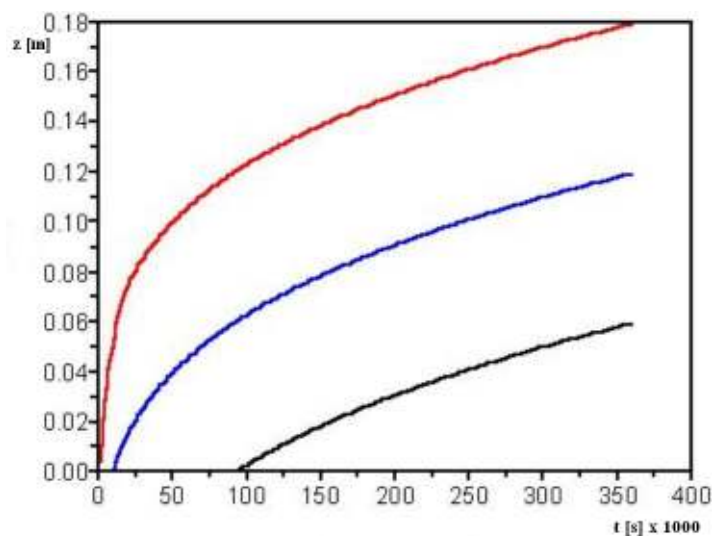


Figura 5.52: Comportamento da região de compactação. Curvas de equi-concentração para o caso relativo ao experimento A de Been e Sills (1981) $\varepsilon_s = (0,125; 0,15 \text{ e } 0,175)$, curvas vermelha, azul e preta respectivamente.

Outras simulações experimentais foram realizadas objetivando avaliar o desempenho do modelo de Burger e Concha (1998) na predição da sedimentação gravitacional de suspensões floculentas de diferentes dinâmicas de separação. Os principais resultados das simulações numéricas são apresentados na sequência.

Simulações numéricas utilizando as equações constitutivas de Been e Sills (1981) relativas ao experimento B

Simulações numéricas da sedimentação em batelada de lamas naturais foram conduzidas a partir de equações empíricas de Been e Sills (1981) referentes ao experimento B (BURGER et al., 2000).

As equações constitutivas de Been e Sills (1981) relativas ao experimento B, usadas na simulação da sedimentação em batelada de suspensões floculentas de lama natural, são apresentadas nas Equações (5.36) à (5.38):

$$f_{bk}(u) = -8 \cdot 10^{-9} \cdot u^2 \exp \left[\frac{0,7675(1-u)}{u} \right] \quad (5.36)$$

$$f_{bk}(u) = -1,39 \cdot 10^{-4} \cdot u(1-u)^{28,59} \quad (5.37)$$

obtidas para a função f_{bk} em m/s com validades nos domínios $u > u_c$ e $\varepsilon_s \leq \varepsilon_{sc}$, respectivamente.

Para a tensão efetiva nos sólidos foi utilizada a seguinte expressão:

$$\sigma_e = 4,0 \exp(21,265u) \quad (5.38)$$

com validade na faixa $u > u_c$.

Os parâmetros físicos utilizados no modelo foram: $L=1,742$ m, $\Delta\rho=1689,7$ Kg/m³, $u_0=0,05264$ e $u_c=0,0833$. A diferença entre os experimentos A e B de Been e Sills (1981) se deve ao fato dos autores avaliarem diferentes concentrações iniciais da suspensão, o que possibilita o estudo do efeito de compressão do sólido.

A Figura 5.53 apresenta a solução transiente do problema de sedimentação para o caso relativo ao experimento B de Been e Sills (1981).

Nota-se através da Figura 5.53 que a dinâmica de sedimentação para o caso relativo ao experimento B de Been e Sills (1981) é relativamente lenta. Após um tempo de repouso da suspensão equivalente a 20.000 s (5,56 h) ainda se observou as características particulares da região de sedimentação livre. Por outro lado o crescimento do sedimento

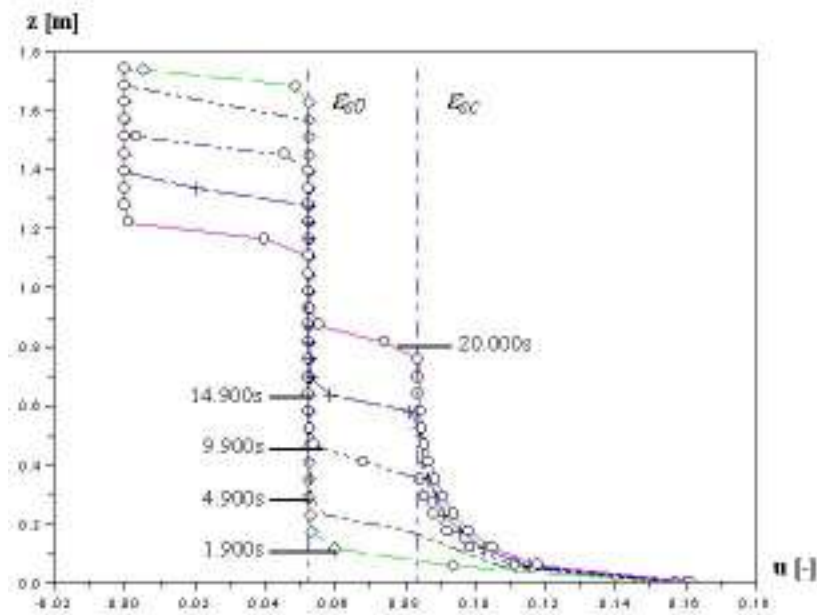


Figura 5.53: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as equações constitutivas de Been e Sills (1981) Exp. B para os tempos de 1.900, 4.900, 9.900, 14.900 e 20.000 s.

parece significativo, como observado além do ponto de compressão (concentração crítica do material).

Simulações numéricas utilizando as equações constitutivas de Becker (1982)

Becker (1982) *apud* Burger e Concha (1998) e BURGER et al. (1999) apresentou um estudo de sedimentação de suspensões de minério de cobre para o projeto e simulação de espessadores. As equações constitutivas determinadas a partir do estudo de Becker (1982) são dadas por:

$$f_{bk}(u) = -6,05 \cdot 10^{-4} u (1 - u)^{12,59} \quad (5.39)$$

Para f_{bk} em m/s com validade no domínio $0 \leq u \leq 1$, e

$$\sigma_e = 5,35 \exp(17,9u) \quad (5.40)$$

para a tensão efetiva nos sólidos, válida para a faixa de concentrações $u \geq u_c$.

Os resultados da simulação numérica do modelo matemático através da incorporação de equações constitutivas de Becker (1982) são apresentados na Figura 5.54. Os parâmetros utilizados na simulação foram: $L=6$ m, $\Delta\rho=1500$ Kg/m³, $u_0=0,123$ e $u_c=0,23$.

A solução numérica do problema que utiliza as equações constitutivas de Becker (1982) foi obtida utilizando-se uma malha fixa de 25 pontos de discretização. Os pontos do gráfico

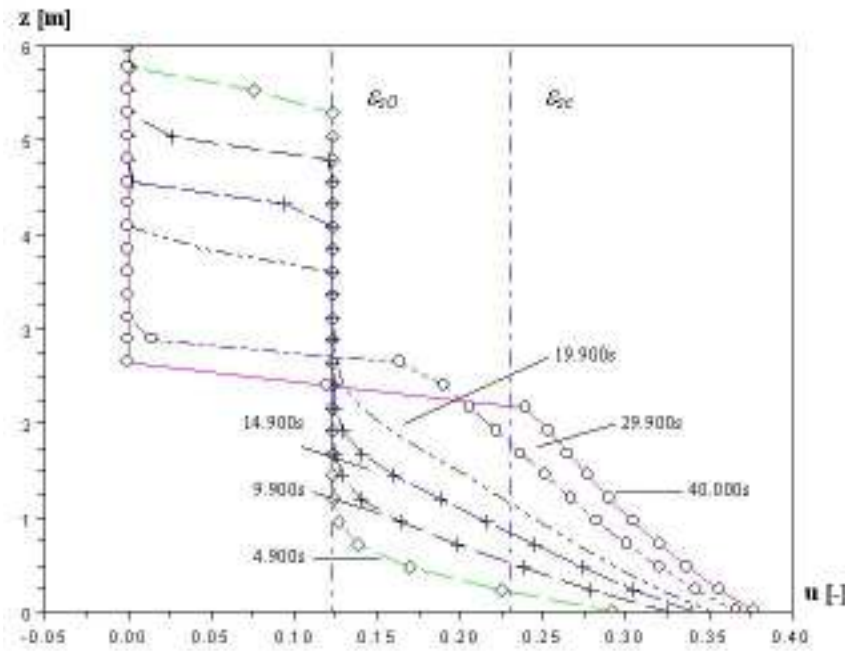


Figura 5.54: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as equações constitutivas de Becker (1982) para os tempos de 4.900, 9.900, 14.900 e 19.900, 29.900 e 40.000 s.

equivalem aos nós da malha discretizada.

Uma análise geral dos resultados através da Figura 5.54 mostra que o problema matemático de Burger e Concha (1998) descreve bem o caso da sedimentação em batelada para malhas pouco refinadas. Observou-se que para o tempo de discretização de 29.900 s (8,05h) apenas a região de compressão do sólido no sedimento predominava no sistema.

Simulações numéricas utilizando as equações constitutivas de Tiller et al. (1991)

Outro caso experimental utilizado para a avaliação da simulação numérica do modelo matemático foi obtido através das equações constitutivas de Tiller et al. (1991) *apud* Burger et al. (2000).

Tiller et al. (1991) apresentaram um estudo utilizando escaneamento axial por tomografia computadorizada (CATSCAN) para a determinação de distribuições de concentrações em testes de sedimentação em batelada de suspensões aquosas de caulim. As seguintes equações constitutivas foram obtidas através de seus resultados experimentais (BURGER et al., 2000):

$$f_{bk}(u) = -3,082736 \cdot 10^{-4} u (1 - 2u)^{21,5} \quad (5.41)$$

para f_{bk} em m/s, válida para o domínio $0 \leq u \leq u_m = 0,5$, sendo u_m equivalente à concentração máxima do sedimento.

A tensão efetiva nos sólidos, em Pa, é descrita pela equação de Tiller e Leu (1980) expressa por:

$$\sigma_e = 0,04 \left[\left(\frac{u}{0,07} \right)^5 - 1 \right] \quad (5.42)$$

ajustada para a faixa $u > u_c$. Os parâmetros utilizados na simulação foram: $L=0,16$ m, $\Delta\rho=1562$ Kg/m³, $u_0=0,05$ e $u_c=0,07$.

A solução numérica foi determinada para uma malha fixa com 30 pontos de discretização. A Figura 5.55 apresenta a solução de um problema com dinâmica bastante rápida por apresentar grandes gradientes de concentrações em pouco tempo de repouso da suspensão quando comparado aos demais estudos avaliados.

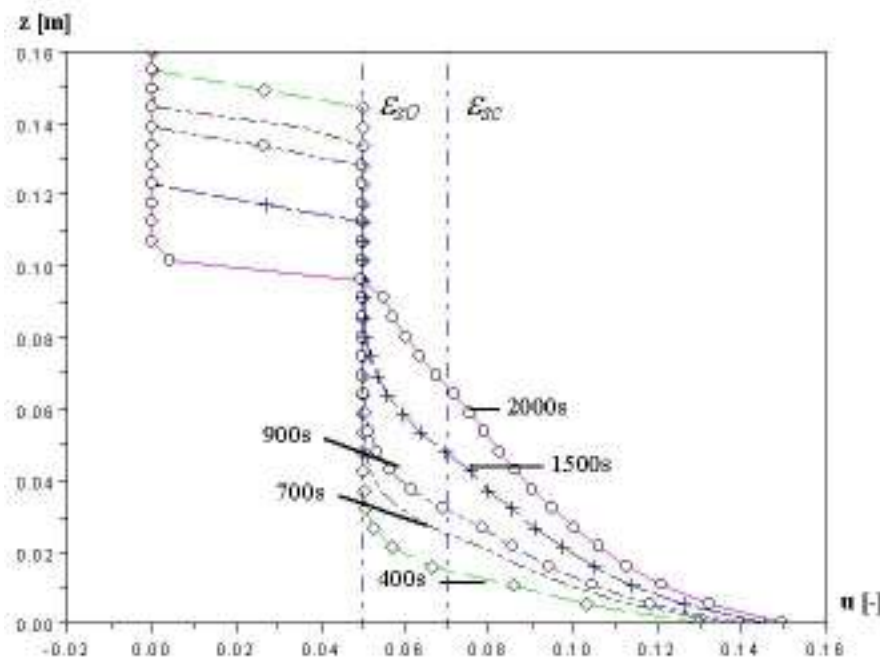


Figura 5.55: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as equações constitutivas de Tiller et al. (1991) para os tempos de 400, 700, 900 e 1.500 e 2.000 s.

Comparando-se as concentrações na base para a simulação numérica deste trabalho e os resultados fornecidos por Burger et al. (2000) à partir da implementação de seu modelo, nota-se que o erro entre as simulações é aparentemente desprezível. Pela análise da Figura 5.55 observa-se que a suspensão preparada inicialmente na concentração volumétrica de 5% foi concentrada no sedimento atingindo valores próximos a 15% em volume para o tempo de decantação de 2.000 s, enquanto Burger et al. (2000) obtiveram valores pouco superiores a 14%. Levando-se em consideração a malha refinada utilizada por Burger

et al. (2000) ($N=400$) e a malha fixa utilizada neste trabalho ($N=30$), os resultados se mostraram satisfatórios.

Para as simulações realizadas neste trabalho, a localização da interface descendente obtida foi 0,10 m no tempo de 2000 s, enquanto para as simulações de Burger et al. (2000) o resultado observado foi em torno de 0,107 m. Tal constatação indica que as simulações numéricas puderam ser reproduzidas com fidelidade ao modelo de Burger e Concha (1998).

Simulações numéricas utilizando as equações constitutivas de Dreher (1997)

Dreher (1997) *apud* Burger et al. (2000) apresentou um estudo experimental de sedimentação em batelada de suspensões aquosas de caulim utilizando atenuação de raios gama. As equações constitutivas obtidas à partir do trabalho de Dreher (1997) usadas na simulação numérica do modelo de Burger e Concha (1998) são apresentadas pelas Equações (5.43) à (5.46).

$$f_{bk}(u) = (3,7942u^2 - 0,3175u) \cdot 10^{-4} \quad (5.43)$$

$$f_{bk}(u) = (-3,8178u^2 + 0,7482u - 0,0373) \cdot 10^{-4} \quad (5.44)$$

$$f_{bk}(u) = -4,877 \cdot 10^{-4} \frac{u^2 \exp 0,6168(1-u)}{1-u} \quad (5.45)$$

para as funções f_{bk} em m/s, válidas para as faixas de concentrações $0 \leq u \leq 0,07$, $0,07 < u \leq u_c$ e $u > u_c$, respectivamente, e

$$\sigma_e = 11 \left[\left(\frac{u}{0,096} \right)^5 - 1 \right] \quad (5.46)$$

determinada para a tensão nos sólidos em Pa, aplicada em $u > u_c$. Para a simulação numérica foram utilizados os seguintes parâmetros experimentais: $L=1,19$ m, $\Delta\rho=1560$ Kg/m³, $u_0=0,07$ e $u_c=0,096$. Os resultados obtidos para a solução do modelo de Burger e Concha (1998), acoplado ao sistema de equações constitutivas de Dreher (1997), são apresentados na Figura 5.56.

A simulação numérica foi realizada usando uma malha com 30 pontos de discretização. O tempo final de decantação da suspensão foi de 50.000 s.

Tomando-se como referência o tempo total de sedimentação igual à 29.900 s (0,34 dia) obteve-se através da simulação numérica deste trabalho uma concentração máxima na base equivalente à 14% em volume de sólidos. A mesma concentração na base do sedimentador foi obtida através das simulações de Burger et al. (2000) para um tempo total de aproximadamente 27.000 s (0,313 dia). Levando-se em consideração lentidão do processo de separação, avaliado por Burger et al. (2000) até um tempo total de 1.146.528 s

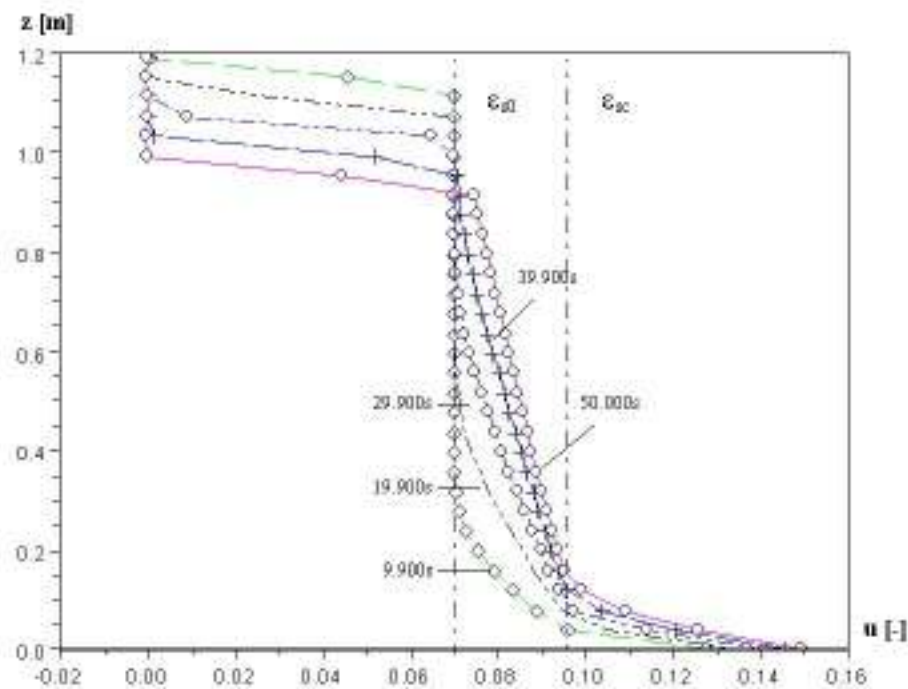


Figura 5.56: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as equações constitutivas de Dreher (1997) para os tempos de 9.900, 19.900, 29.900, 39.900 e 50.000 s.

(13,27 dias), além dos refinamentos das malhas, conclui-se que os resultados obtidos neste trabalho reproduzem bem as simulações numéricas da sedimentação através do modelo de Burger et al. (2000).

Uma análise geral dos estudos de casos permite concluir que em todas as simulações o modelo matemático descreve a sedimentação em campo gravitacional de maneira consistente com o fenômeno físico. Além disso, os resultados das simulações numéricas obtidos neste trabalho reproduzem bem as simulações numéricas do trabalho de Burger et al. (2000).

Burger e Concha (1998) desenvolveram apenas o trabalho teórico e buscaram a validação do modelo matemático para a sedimentação através do uso de equações constitutivas da literatura. Os autores utilizaram o método das diferenças finitas central não-oscilatório usando o método de modificação de *Lax-Friedrichs* e uma malha fixa de 400 pontos de discretização.

Os resultados obtidos a partir da implementação do modelo de Burger e Concha (1998) são fundamentais para o desenvolvimento e avaliação do modelo alternativo proposto neste trabalho. Uma vez que a abordagem matemática é apresentada de forma coerente e sustentada por resultados já consolidados pela literatura, a introdução dos conceitos físicos no modelo se torna o alvo principal do estudo da modelagem e simulação do processo.

5.4.3 Simulação numérica do modelo alternativo proposto para a sedimentação em batelada

Equações discretizadas do modelo

O modelo para a sedimentação em batelada proposto neste trabalho, apresentado na Seção 3.7 do Capítulo 3, foi desenvolvido com base nas abordagens dos modelos matemáticos de D'Ávila (1978) e Burger e Concha (1998). Mediante a incorporação da abordagem matemática de Burger e Concha (1998) aos conceitos físicos introduzidos por D'Ávila (1978), o modelo alternativo propõe uma solução numérica para a sedimentação descrita através de variáveis que podem ser obtidas na experimentação.

Visando eliminar qualquer erro associado à implementação numérica e aos métodos utilizados nas simulações do modelo alternativo, diversas simulações numéricas do sistema de equações do modelo de Burger e Concha (1998) foram realizadas e apresentadas na Seção 5.4.2. Os resultados obtidos para as simulações de Burger e Concha (1998) deste trabalho mostraram que a abordagem matemática e os métodos numéricos implementados reproduziram bem o estudo de casos avaliados por Burger et al. (2000) para sedimentação em campo gravitacional. Desta forma, o domínio sobre os métodos numéricos e a abordagem matemática conferem sustentabilidade ao modelo alternativo uma vez que o modelo de Burger e Concha (1998) está bem consolidado na literatura.

Uma vez que a implementação do modelo de D'Ávila (1978) estava restrita à complexidade do uso de condições de salto e fronteiras móveis para a solução do problema, a adaptação do modelo alternativo buscou simplificar a abordagem e aproximar os resultados teóricos ao fenômeno físico. Para a validação do modelo proposto, diversas simulações numéricas são comparadas aos resultados experimentais de monitoramento de concentrações volumétricas como função da posição no sedimentador e no tempo de separação. Testes em laboratório do monitoramento $\varepsilon_s(z, t)$ para suspensões aquosas de caulim foram submetidos à Técnica de Atenuação de Raios Gama.

As simulações numéricas para o modelo da sedimentação em batelada foram realizadas através da aplicação da discretização por Diferenças Finitas acoplada ao método MUSCL de segunda ordem e método das linhas (MOL). O sistema de equações algébrico-diferencial resultante foi resolvido através do pacote computacional DASSL disponível no *software* de resolução numérica *Scilab*®.

Uma vez que a simulação numérica do modelo misto hiperbólico-parabólico composto por equações algébrico-diferenciais exige um elevado esforço computacional e conseqüentemente elevada demanda de tempo para a obtenção da solução do problema, procurou-se

aplicar um método adaptativo na discretização da malha do problema. O método conhecido como *Moving Mesh* consistiu no uso de uma malha variável que se adapta com o tempo, bastando para isso a estimativa da derivada da concentração em cada passo de integração.

As interfaces físicas provenientes do fenômeno da sedimentação, sob o ponto de vista matemático, são descontinuidades das funções avaliadas. Tais descontinuidades *à priori* não possuem suas localizações definidas no problema. Sob ponto de vista numérico, as regiões próximas às descontinuidades são caracterizadas por grandes mudanças nas derivadas, fato que justifica a necessidade de malhas refinadíssimas. A introdução do método de *Moving Mesh* permitiu refinar a malha nas regiões em que as mudanças das derivadas são significativas. Além disso, a malha móvel foi reconstruída à cada passo de integração. O método de *Moving Mesh* é descrito em detalhes no Anexo B.

O problema consistiu na resolução da Equação (3.265) sujeita às condições inicial e de contornos apresentadas pelas Equações (3.266), (3.268) e (3.269). Para termos de simplificação de representação das variáveis nas equações, utilizou-se a variável computacional u para denotar a concentração volumétrica dos sólidos ε_s , sendo $u = \varepsilon_s(Lx, t)$. A equação original do modelo alternativo é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma(u)}{\partial x} - \frac{\partial D(u)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - D(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (5.47)$$

válida no domínio $0 \leq t \leq T$ e $0 \leq x \leq 1$, sendo $x = z/L$, com L equivalente a altura da coluna da mistura e T o tempo final de sedimentação.

As funções $\Gamma(u)$ e $D(u)$ expressas por:

$$\Gamma(u) = \frac{k\Delta\rho gu}{L\mu} \quad (5.48)$$

$$D(u) = \frac{kP'_s u}{L^2\mu} \quad (5.49)$$

As condições inicial e de contornos são:

$$u(x, t = 0) = u_0(x) \quad (5.50)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{L\Delta\rho gu}{P'_s} \quad (5.51)$$

$$u_s(x = 1) = u_L(t) \quad (5.52)$$

sendo $u_L(t = 0) = u_0$ e $u_L(t \geq 0^+) = 0$.

A Figura 5.57 apresenta a malha inicial ($t=0$) para o problema unidimensional da

sedimentação em batelada. Funções de amortecimento (M) e suavização espacial (SM) acopladas ao método de *Moving Mesh* foram aplicadas na malha variável. A malha foi dividida em regiões fixa e móvel, o que caracteriza um problema híbrido. Um contador i foi usado na especificação do nó da malha e o problema da sedimentação em batelada foi discretizado em $N+1$ pontos nos quais as equações devem ser aplicadas. O ponto $i=1$ equivale ao nó na base da coluna de sedimentação em $x=0$ denotado por $x_{mf}(1)$ na malha fixa. Em tal ponto aplicou-se a equação referente à condição de contorno na base, Equação (5.50).

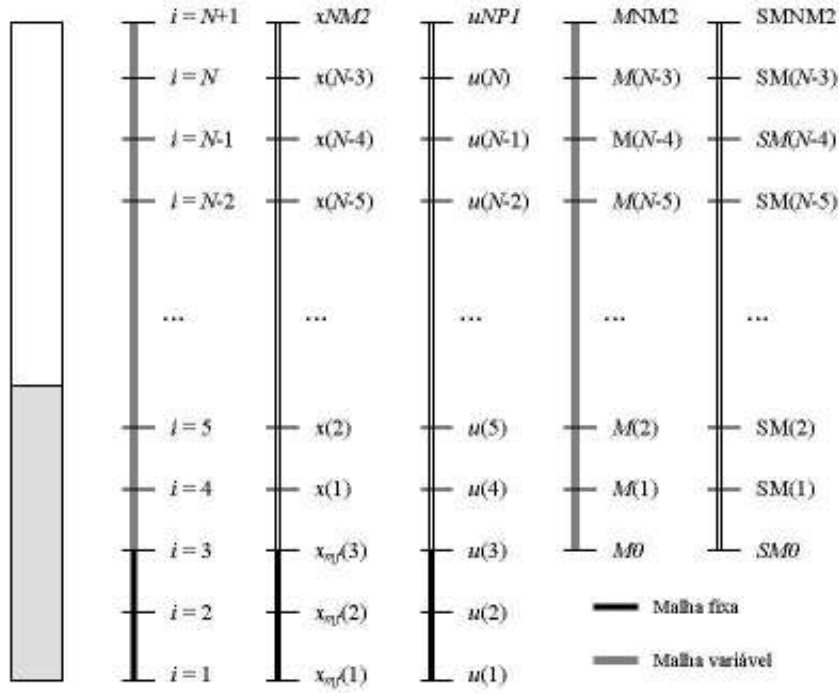


Figura 5.57: Esquema da malha inicial para o problema unidimensional da sedimentação em batelada ($t=0$).

Sendo o espaçamento da malha fixa constante e igual a h_{mf} , o erro da aproximação é da ordem de h_{mf}^2 . Desta forma, quanto mais refinada a malha melhor será a estimativa da derivada. Uma vez que a aplicação do método da malha adaptativa permite a implementação do problema com um número de pontos de discretização bem menor sem perda de qualidade da solução (NOLL, 2002), foi importante estimar os três primeiros pontos em uma malha fixa ($x_{mf}(1)$, $x_{mf}(2)$ e $x_{mf}(3)$), para que o cálculo de $u(1)$ encontre o melhor valor para condição inicial. A malha variável foi utilizada nos demais pontos do *grid* (Figura 5.57).

A aproximação da derivada na condição de contorno na base pelo método das Diferenças Finitas fornece uma equação algébrica para a estimativa da concentração $u(1)$ dependente de outras duas concentrações de sólidos, $u(2)$ e $u(3)$, que são avaliadas nos pontos $i=2$ e $i=3$, respectivamente. A expressão para a derivada discretizada na condição

de contorno em $x=0$ é apresentada pela Equação (5.53). A derivada presente na Equação (5.51) foi aproximada através da aplicação da Equação (B.14) do Anexo B, por Diferenças Finitas à frente (*forward*):

$$\left. \frac{-3u(1) + 4u(2) - u(3)}{2h_{mf}} \right|_{x=0} = - \left. \frac{L\Delta\rho g u(1)}{P'_s(1)} \right|_{x=0} \quad (5.53)$$

sendo $2h_{mf}=x_{mf}(3)-x_{mf}(1)$, válida para $i=1$.

Para estimar $u(1)$ na Equação (5.53) é necessário se conhecer a derivada da equação constitutiva para a pressão nos sólidos P'_s no ponto $x_{mf}(1)$, dependente de $u(1)$, através de métodos numéricos específicos, visto a não-linearidade da função na condição de contorno. Além disso, de acordo com a condição inicial expressa na Equação (5.50) é correto afirmar que para $t=0$, $u(1)=u_0 < u_c$ e, uma vez que a derivada P'_s é nula para concentrações menores que a crítica (u_c), o termo presente no denominador da equação resultante leva à inconsistência do método.

Entretanto, sabe-se pela observação do fenômeno físico que a concentração na base da coluna de sedimentação muda instantaneamente de um valor inicial u_0 para o valor da máxima concentração no sedimentador u_m no tempo t de separação. Desta forma para resolver o problema utilizou-se o método da Bissecção para determinar a concentração inicial $u_0(1) > u_c$ que desse consistência ao equacionamento.

Para regiões da sedimentação em batelada cuja concentração local de sólidos é inferior à concentração crítica, $u < u_c$, sabe-se que o modelo que rege o fenômeno é representado pela equação hiperbólica:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \Gamma(u)}{\partial x} \quad (5.54)$$

Desta forma, uma outra alternativa para a estimativa da concentração no ponto $i=1$, no caso específico de $u(1) < u_c$, foi a discretização da Equação (5.54) fazendo uso do método de MUSCL de segunda ordem apresentado na Seção 5.4.1:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i=1} = \frac{F(u^R(1), u^L(2)) - F(u_m, u^L(1))}{0,5h_{mf}} \quad (5.55)$$

com a concentração máxima u_{m0} utilizada como hipótese na discretização através da introdução de um ponto fictício localizado à esquerda do ponto $i=1$, e as concentrações $u^R(1)$ e $u^L(1)$ dadas pelas Equações (5.56) e (5.57), respectivamente.

$$u^R(1) = u(1) + \frac{h_{mf}}{2}s(1) \quad (5.56)$$

$$u^L(1) = u(1) - \frac{h_{mf}}{2}s(1) \quad (5.57)$$

com $s(1)$ equivalente à:

$$s(1) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sgn} \left(\frac{u(1) - u_{m0}}{h_{mf}} \right) + \operatorname{sgn} \left(\frac{u(2) - u(1)}{h_{mf}} \right) \right] m(1) \quad (5.58)$$

sendo $m(1)$ fornecido pela expressão:

$$m(1) = \min \left(\left| \frac{u(1) - u_{m0}}{h_{mf}} \right|, \left| \frac{u(2) - u(1)}{h_{mf}} \right| \right) \quad (5.59)$$

O sistema de equações discretizadas aplicado para as estimativas das soluções nos pontos internos da malha (do ponto $i=2$ ao ponto $i=N-1$) é dado pelas expressões:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i = \frac{F(u^R(i), u^L(i+1)) - F(u^R(i-1), u^L(i))}{0,5(dx(i-1) + dx(i))} \quad (5.60)$$

para $u(i) < u_c$, com $dx(i) = x(i+1) - x(i)$. Sendo as concentrações $u^R(i)$ e $u^L(i)$ estimadas através das seguintes expressões:

$$u^R(i) = u(i) + \frac{dx(i)}{2} s(i) \quad (5.61)$$

$$u^L(i) = u(i) - \frac{dx(i)}{2} s(i) \quad (5.62)$$

com $s(i)$ equivalente à:

$$s(i) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sgn} \left(\frac{u(i) - u(i-1)}{dx(i-1)} \right) + \operatorname{sgn} \left(\frac{u(i+1) - u(i)}{dx(i)} \right) \right] m(i) \quad (5.63)$$

sendo $m(i)$ fornecido pela expressão:

$$m(i) = \min \left(\left| \frac{u(i) - u(i-1)}{dx(i-1)} \right|, \left| \frac{u(i+1) - u(i)}{dx(i)} \right| \right) \quad (5.64)$$

Para o caso específico de concentrações locais maiores ou iguais à concentração crítica do material sólido ($u(i) \geq u_c$):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i = \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right|_i + \left. \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i + D(i) \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i \quad (5.65)$$

com as aproximações das derivadas dadas por:

$$\left. \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right|_i = \frac{F(u^R(i), u^L(i+1)) - F(u^R(i-1), u^L(i))}{0,5(dx(i-1) + dx(i))} \quad (5.66)$$

$$\left. \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \left(\frac{D(i+1) - D(i-1)}{x(i+1) - x(i-1)} \right) \left(\frac{u(i+1) - u(i-1)}{x(i+1) - x(i-1)} \right) \quad (5.67)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i = \frac{\frac{u(i+1) - u(i)}{x(i+1) - x(i)} - \frac{u(i) - u(i-1)}{x(i) - x(i-1)}}{x(i+1) - x(i-1)} \quad (5.68)$$

Com base em ensaios experimentais preliminares para suspensões aquosas diluídas (baixas concentrações iniciais), nota-se que para pontos localizados próximos ao topo da coluna de sedimentação, como o caso de $i=N$ e $i=N+1$, observou-se que a concentração local não atingiu concentrações maiores que a concentração inicial. Tal fato é justificado pela própria formação da região de sedimentação livre, e é de se esperar que a Equação (5.65) não seja necessária para tais pontos. Assim, para o nó interno $i=N$ têm-se:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i=N} = \frac{F(u^R(N), u^L(N+1)) - F(u^R(N-1), u^L(N))}{0,5(dx(N-1) + dx(N))} \quad (5.69)$$

sendo as concentrações $u^R(N)$ e $u^L(N)$ obtidas pelas expressões:

$$u^R(N) = u(N) + \frac{dx(N)}{2} s(N) \quad (5.70)$$

$$u^L(N) = u(N) - \frac{dx(N)}{2} s(N) \quad (5.71)$$

com $s(N)$ equivalente à:

$$s(N) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sgn} \left(\frac{u(N+1) - u(N)}{dx(N)} \right) + \operatorname{sgn} \left(\frac{u(N) - u(N-1)}{dx(N-1)} \right) \right] m(N) \quad (5.72)$$

e $m(N)$ fornecido pela expressão:

$$m(N) = \min \left(\left| \frac{u(N) - u(N-1)}{dx(N-1)} \right|, \left| \frac{u(N+1) - u(N)}{dx(N)} \right| \right) \quad (5.73)$$

A condição de contorno do topo da coluna de sedimentação, apresentada pela Equação (5.52), mostra que a concentração $uNP1$ na posição $xNM2$ (Figura 5.57) é uma função do tempo que pode ser escrita na forma:

$$uNP1(x = xNM2, t) = \begin{cases} u_0 & \text{para } t = 0 \\ 0 & \text{para } t \geq 0^+ \end{cases} \quad (5.74)$$

e deve ser aplicada no nó $i=N+1$ da malha de discretização (Figura 5.57). Entretanto, espera-se que o próprio método desenvolvido seja capaz de prever o comportamento apresentado na Equação 5.74. Assim sendo, utilizou-se o seguinte equacionamento aplicado

no topo do sedimentador:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i=N+1} = \frac{F(u^R(N+1), u^L(N+2)) - F(u^R(N), u^L(N+1))}{dx(N)} \quad (5.75)$$

com $u^L(N+2)=0$ equivalente a um ponto fictício criado além do ponto $i=N+1$ na malha de discretização. As concentrações $u^R(N+1)$ e $u^L(N+1)$ são dadas por:

$$u^R(N+1) = u(N+1) + \frac{dx(N)}{2} s(N+1) \quad (5.76)$$

$$u^L(N+1) = u(N+1) - \frac{dx(N)}{2} s(N+1) \quad (5.77)$$

com $s(N+1)$ equivalente à:

$$s(N+1) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sgn} \left(\frac{u(N+1) - u(N)}{dx(N)} \right) + \operatorname{sgn} \left(\frac{-u(N+1)}{dx(N)} \right) \right] m(N+1) \quad (5.78)$$

e $m(N+1)$ fornecido pela expressão:

$$m(N+1) = \min \left(\left| \frac{u(N+1) - u(N)}{dx(N)} \right|, \left| \frac{-u(N+1)}{dx(N)} \right| \right) \quad (5.79)$$

O sistema de equações original é acoplado ao conjunto de equações de monitoramento e suavização espacial para otimização do método *Moving Mesh* apresentado na sequência.

Equações de Monitoramento e Suavização Espacial da Malha Adaptativa

Para a desenvolvimento da malha adaptativa pelo método de *Moving Mesh* utilizou-se uma função de monitoramento da variável espacial capaz de estimar a qualidade da solução através do conhecimento da derivada da função $\partial u / \partial x$. O conjunto de posições dos nós internos da malha adaptativa passa a ser constituído por variáveis a serem determinadas simultaneamente através do sistema de equações acoplado. A seguinte função de monitoramento (M) foi introduzida no sistema de equações original:

$$M(u, x) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} \quad (5.80)$$

Sabendo-se que as variáveis u e x tem dimensões diferentes, introduziu-se uma modificação na Equação (5.80) para o escalonamento da função, ou seja, um parâmetro a_f foi introduzido na função de monitoramento para que dimensionalmente a variação de u e de x pudessem ser comparados em M . Assim, da Equação (5.80) verifica-se que

M é decorrente de $(u/x)^2$, então a ordem de grandeza foi alterada multiplicando-se por $a_f=(L/u_m)^2$. Caso o escalonamento não tivesse sido realizado ter-se-ia que a malha não se adaptaria. Desta forma, a função de monitoramento modificada utilizada nas simulações é apresentada pela Equação (5.81):

$$M(u, x) = \sqrt{1 + a_f \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} \quad (5.81)$$

com $a_f=(L/u_m)^2$.

Uma vez que a malha variável é aplicada à partir do ponto $i=4$ adiante (Figura 5.57), especificou-se uma mudança de índice no qual $i=4$ é equivalente à $j=1$, ou seja $j=i-3$. As equações de monitoramento discretizadas pelo método das Diferenças Finitas foram aplicadas nos nós internos da malha. A função de monitoramento discretizada é dada por:

$$M(j) = \sqrt{1 + \left(\frac{L}{u_m} \right)^2 \left(\frac{u(i+1) - u(i-1)}{x(i+1) - x(i-1)} \right)^2} \quad (5.82)$$

O nó em $i=3$ constitui o último ponto da malha fixa $x_{mf}(3)$ e é usado como referência na malha variável como x_0 ($j=0$). Neste ponto a função de monitoramento denotada por $M0$ é expressa pela Equação (5.83):

$$M0 = \sqrt{1 + a_f \left(\frac{u(4) - u(2)}{x(1) - x_{mf}(2)} \right)^2} \quad (5.83)$$

Analogamente a função de monitoramento para o ponto $i=4$ pode ser escrita na forma:

$$M(1) = \sqrt{1 + a_f \left(\frac{u(5) - u(3)}{x(2) - x_{mf}(3)} \right)^2} \quad (5.84)$$

Observa-se pela análise das Equações (5.83) e (5.84) que a partir do ponto $i=5$ as funções de monitoramento da variável espacial não são mais dependentes de pontos da malha fixa x_{mf} , o que permite escrever a expressão em sua forma geral:

$$M(i-3) = \sqrt{1 + a_f \left(\frac{u(i+1) - u(i-1)}{x(i-2) - x(i-4)} \right)^2} \quad (5.85)$$

aplicada nos pontos $i=5$ a $N-1$ da malha.

Para o ponto referente ao índice $i=N$ aplica-se a seguinte função de monitoramento

$M(N-3)$:

$$M(N-3) = \sqrt{1 + a_f \left(\frac{uNP1 - u(N-1)}{xNM2 - x(N-4)} \right)^2} \quad (5.86)$$

enquanto a função de monitoramento MNM2 aplicada em $i=N+1$ (Figura 5.57) é dada por:

$$MNM2 = \sqrt{1 + a_f \left(-\frac{u(N)}{2(xNM2 - x(N-3))} \right)^2} \quad (5.87)$$

uma vez que criou-se um ponto fictício além do último ponto da malha ($uNP1$), denotado por $uNP2$, cuja concentração é equivalente à zero.

As funções de monitoramento M não apresentam nenhum mecanismo de suavização da variável espacial x durante o desenvolvimento da malha adaptativa. Para tanto, uma função de suavização da malha pode ser utilizada no equacionamento como função das equações de monitoramento do método (Ver Anexo B).

A Equação (5.88) apresenta a função de suavização (SM) da variável espacial utilizada:

$$SM(j, t) = \sqrt{\frac{\sum_{k=j-p}^{j+p} M_k(t)^2 \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right)^{|k-j|}}{\sum_{k=j-p}^{j+p} \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right)^{|k-j|}}} \quad (5.88)$$

para a qual são adotados os parâmetros $\gamma=2$, $p=2$ e k válido para a faixa $0 \leq k \leq N+1$ (NOLL, 2002). Desenvolvendo-se as funções de suavização e aplicando-as aos pontos de discretização da malha, com $j=i-3$, obteve-se as seguintes equações:

$$SM0 = \sqrt{\frac{9M0^2 + 6M(1)^2 + 4M(2)^2}{19}} \quad (5.89)$$

aplicada no ponto $j=0$,

$$SM(1) = \sqrt{\frac{4M0^2 + 6M(1)^2 + 9M(2)^2 + 6M(3)^2 + 4M(4)^2}{29}} \quad (5.90)$$

aplicada no ponto $j=1$,

$$SM(2) = \sqrt{\frac{4M0^2 + 6M(1)^2 + 9M(2)^2 + 6M(3)^2 + 4M(4)^2}{29}} \quad (5.91)$$

aplicada no ponto $j=2$.

Uma vez que a partir do ponto $j=3$ as funções suavizadas são independentes do termo

$M0$ foi possível escrever uma equação de recorrência geral expressa por:

$$SM(j) = \sqrt{\frac{4M(j-2)^2 + 6M(j-1)^2 + 9M(j)^2 + 6M(j+1)^2 + 4M(j+2)^2}{29}} \quad (5.92)$$

aplicada nos pontos $j=3$ a $N-5$.

Para os demais pontos da malha as seguintes funções de suavização são dadas por:

$$\begin{aligned} SM(N-4) &= \\ &= \sqrt{\frac{4M(N-6)^2 + 6M(N-5)^2 + 9M(N-4)^2 + 6M(N-3)^2 + 4MNM2^2}{29}} \end{aligned} \quad (5.93)$$

aplicada nos pontos $j=N-4$.

$$SM(N-3) = \sqrt{\frac{4M(N-5)^2 + 6M(N-4)^2 + 9M(N-3)^2 + 6MNM2^2}{25}} \quad (5.94)$$

aplicada nos pontos $j=N-3$.

$$SMNM2 = \sqrt{\frac{4M(N-4)^2 + 6M(N-3)^2 + 9MNM2^2}{19}} \quad (5.95)$$

aplicada nos pontos $j=N-2$ ou equivalente $i=N+1$.

Entretanto, as Equações (5.83) a (5.95) não fornecem a velocidade do nó. Para tanto, várias equações diferenciais parciais da malha adaptativa (definidas como MMPDE's) são apresentadas na literatura (HUANG et al., 1994). Tais expressões, MMPDE's discretizadas, são incorporadas ao sistema de equações original a fim de se buscar a solução do problema na malha variável. A seguinte MMPDE foi utilizada neste trabalho (HUANG et al., 1994):

$$\frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(SM \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \quad (5.96)$$

com $\dot{x}=dx/dt$.

A escolha correta da MMPDE é importante para o sucesso da implementação do método. A Equação (5.96) não força a malha para a equi-distribuição, mas previne para que o *grid* não se cruze em nenhum nó. A discretização da MMPDE ocorreu na variável espacial com Diferenças Finitas no *mesh* uniforme e usando o método das linhas. A aproximação é dada respectivamente por:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} (\dot{x}(j+1) - 2\dot{x}(j) + \dot{x}(j-1)) = -\frac{E(j)}{\tau} \quad (5.97)$$

na qual $E(j)$ é a aproximação discreta do termo:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(SM \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \quad (5.98)$$

em $\xi = \xi_j$ e τ é um parâmetro de sintonia equivalente à 10^{-3} . A expressão para $E(j)$ é dada por:

$$E(i) = \frac{M(j+1) + M(j)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} (x(j+1) - x(j)) + \quad (5.99)$$

$$- \frac{M(j) + M(j-1)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} (x(j) - x(j-1))$$

com $n = N-2$.

Uma vez que as equações algébrico-diferenciais originadas do modelo matemático totalizam $N+1$ equações, as equações relativas às velocidades dos nós precisam ter a mesma dimensão. Desta forma, o novo conjunto de equações derivadas das MMPDE's discretizadas possuem índices $N+2$ à $2N+2$, sendo que as três primeiras (referentes aos índices $N+2$, $N+3$ e $N+4$) são referentes às posições da malha fixa e por sua vez não desenvolvem velocidade do nó ($dx/dt=0$). Analogamente, a equação referente ao índice $2N+2$ equivale ao último ponto da malha, que por sua vez é fixo ($dx/dt=0$). Conseqüentemente foi preciso desenvolver as MMPDE's discretizadas para os nós internos equivalentes aos índices $N+5$ à $2N+1$:

$$\frac{1}{\left(\frac{1-2h_{mf}}{n}\right)^2} (\dot{x}(N+6) - 2\dot{x}(N+5) + \dot{x}(N+4)) = -\frac{E(1)}{\tau} \quad (5.100)$$

para a equação $N+5$ com $\dot{x}(N+4)=0$, uma vez que se trata de malha fixa.

A função $E(1)$ é fornecida pela equação:

$$E(1) = \frac{SM(2) + SM(1)}{\left(\frac{1-2h_{mf}}{n}\right)^2} (x(2) - x(1)) - \frac{SM(1) + SM(0)}{\left(\frac{1-2h_{mf}}{n}\right)^2} (x(1) - x_{mf}(3)) \quad (5.101)$$

Para as equações de índices $N+6$ à $2N$ ($j=2$ à $N-4$), foi utilizada a forma geral:

$$\frac{1}{\left(\frac{1-2h_{mf}}{n}\right)^2} (\dot{x}(j+N+5) - 2\dot{x}(j+N+4) + \dot{x}(j+N+3)) = -\frac{E(j)}{\tau} \quad (5.102)$$

com $E(j)$ obtido através da expressão:

$$E(j) = \frac{SM(j+1) + SM(j)}{\left(\frac{1-2h_{mf}}{n}\right)^2} (x(j+1) - x(j)) + \frac{SM(j) + SM(j-1)}{\left(\frac{1-2h_{mf}}{n}\right)^2} (x(j) - x_{mf}(j-1)) \quad (5.103)$$

Para a equação referente à posição $2N+1$ no sistema foi utilizada a seguinte expressão:

$$\frac{1}{\left(\frac{1-2h_{mf}}{n}\right)^2} (\dot{x}(2N+2) - 2\dot{x}(2N+1) + \dot{x}(2N)) = -\frac{E(N-3)}{\tau} \quad (5.104)$$

com a função $E(N-3)$ dada por:

$$E(N-3) = \frac{SM(N-2) + SM(N-3)}{\left(\frac{1-2h_{mf}}{n}\right)^2} (x(N-2) - x(N-3)) + \frac{SM(N-3) + SM(N-4)}{\left(\frac{1-2h_{mf}}{n}\right)^2} (x(N-3) - x_{mf}(N-4)) \quad (5.105)$$

Após a escolha da MMPDE e sua posterior discretização parte-se para a resolução numérica do sistema de equações algébrico-diferencial.

Desta forma, tal sistema de equações foi resolvido para todo o domínio do problema, utilizando-se para tanto as equações constitutivas para pressão nos sólidos, $P_s = P_s(u_s)$, e permeabilidade do meio poroso, $k = k(u_s)$, para cada região específica do fenômeno apresentada na Seção 5.3.

Obtenção das expressões para $\Gamma(\varepsilon_s)$ e $D(\varepsilon_s)$

Para as simulações numéricas do modelo alternativo foram utilizadas as equações constitutivas da pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso apresentadas na Seção 5.3 pelas Equações (5.10) e (5.12), respectivamente:

$$P_s = 3,81 \cdot 10^8 \varepsilon_s^{8,74} \quad (5.106)$$

$$k = 1,69 \cdot 10^{-7} \left(\frac{\varepsilon_s}{0,1287} \right)^{-2,4736} \quad (5.107)$$

com P_s e k expressos em dyn/cm² e cm², respectivamente.

De posse da Equação (5.107) determinou-se a expressão para a função $\Gamma(\varepsilon_s)$ pela

aplicação direta da Equação (5.48) específica para o sistema. Utilizando-se $\Delta\rho=1,577$ g/cm³, $g=981$ cm/s², $L=28,1$ cm e $\mu=0,01$ g/cm·s obteve-se os valores para a função $\Gamma(\varepsilon_s)$ apresentados na Figura 5.58 que foram utilizados para a determinação dos parâmetros da expressão apresentada pela Equação (5.108):

$$\Gamma = 0,6870\varepsilon_s \left(1 + \frac{\varepsilon_s}{3,53 \cdot 10^{-4}}\right)^{-1,4311} \quad (5.108)$$

sendo Γ expresso em s⁻¹.

A expressão para Γ foi determinada forçando-se o modelo de ajuste por regressão não-linear a prever o comportamento ditado pela restrição $\Gamma(\varepsilon_s=0)=0$, que pode ser obtido através da Equação (5.48). Assim sendo, nenhuma informação experimental é utilizada para a faixa de concentrações entre 0 e 2%.

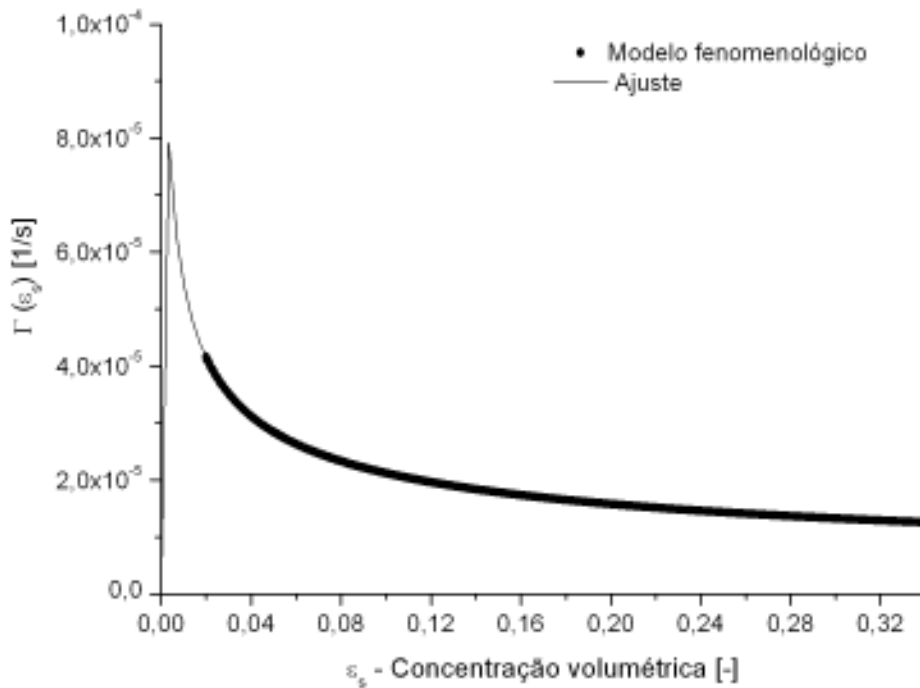


Figura 5.58: Gráfico da função $\Gamma(\varepsilon_s)$.

A função Γ está intimamente relacionada com a velocidade de sedimentação das partículas expressa no termo convectivo da equação do modelo. O coeficiente de difusão dado pela Equação (5.49) foi determinado utilizando-se Equação (5.107) para a permeabilidade do meio poroso, além da derivada da pressão nos sólidos expressa por:

$$P'_s = 3,325 \cdot 10^9 \varepsilon_s^{7,74} \quad (5.109)$$

A Figura 5.59 apresenta o resultado para o comportamento do coeficiente de difusão para o sistema em estudo.

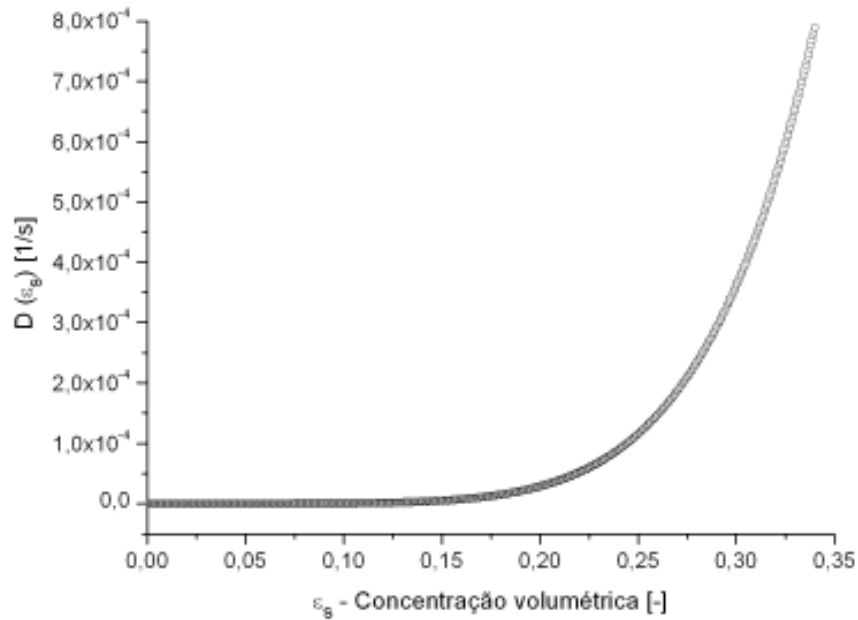


Figura 5.59: Gráfico do coeficiente de difusão $D(\varepsilon_s)$.

Nota-se pela análise da Figura 5.59 que a função $D(\varepsilon_s)$ é contínua em todo o domínio de interesse das concentrações de sólidos. Além disso, cabe ressaltar que uma vez que não ocorre salto na derivada P'_s na concentração crítica do sólido, também não ocorre descontinuidade na derivada do coeficiente D . Tal constatação é uma contribuição significativa ao desenvolvimento numérico do modelo proposto, uma vez que, diferentemente do caso observado no modelo de Burger e Concha (1998), a função contínua $D(\varepsilon_s)$ em todo o domínio de concentrações elimina a necessidade da especificação da concentração crítica ε_{sc} do sólido para a degeneração da equação parabólica do modelo na expressão hiperbólica. Isso se deve ao fato de que à medida com que o coeficiente de difusão aumenta continuamente com o aumento da concentração naturalmente o modelo misto hiperbólico-parabólico é simplificado durante a resolução do problema.

Conhecendo-se os valores das funções $\Gamma(\varepsilon_s)$ e $D(\varepsilon_s)$ para a faixa de concentrações de interesse no trabalho obtidas pela aplicação das equações constitutivas da pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso, realizou-se algumas simulações numéricas preliminares da sedimentação em batelada de caulim na concentração inicial de 2% em volume.

Simulações numéricas preliminares para a avaliação do sistema de equações

Para avaliações qualitativas do comportamento do sistema de equações do modelo realizou-se simulações numéricas em malha fixa definindo-se $dx/dt=0$ no equacionamento. O problema foi resolvido inicialmente para $N=22$ pontos de discretização e utilizando a expressão para $\Gamma(\varepsilon_s)$ fornecida pela Equação (5.108). Os resultados das simulações numéricas foram comparados com resultados experimentais do monitoramento dinâmico de $\varepsilon_s(x,t)$ para suspensões aquosas de caulim.

Para a realização dos testes experimentais utilizou-se o procedimento descrito na Seção 4.10 monitorando-se as suspensões ($\varepsilon_{s0} = 2\%$) ao longo do tempo para posições entre 1 a 10 cm acima da base da proveta. A faixa de posições foi igualmente espaçada de 1 em 1 cm. Três réplicas experimentais foram realizadas para cada posição com a finalidade de avaliar o erro associado ao preparo da suspensão e sua homogeneização.

Para caráter ilustrativo as simulações numéricas preliminares referentes às posições 2 e 3 cm acima da base foram selecionadas e são apresentadas nas Figuras 5.60 e 5.61.

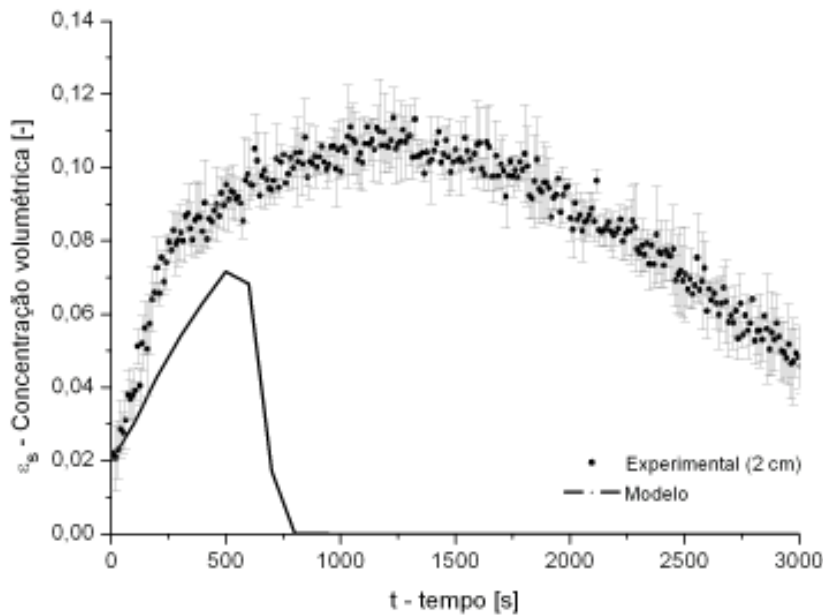


Figura 5.60: Simulação numérica preliminar para suspensões aquosas de caulim 2% na posição 2 cm.

Observa-se pela análise das Figuras 5.60 e 5.61 que o modelo matemático detém uma velocidade de sedimentação das partículas bem superior ao comportamento experimental observado para as posições equivalentes à 2 e 3 cm acima da base. A análise é extensível às demais posições monitoradas, entretanto, as simulações numéricas foram melhores para

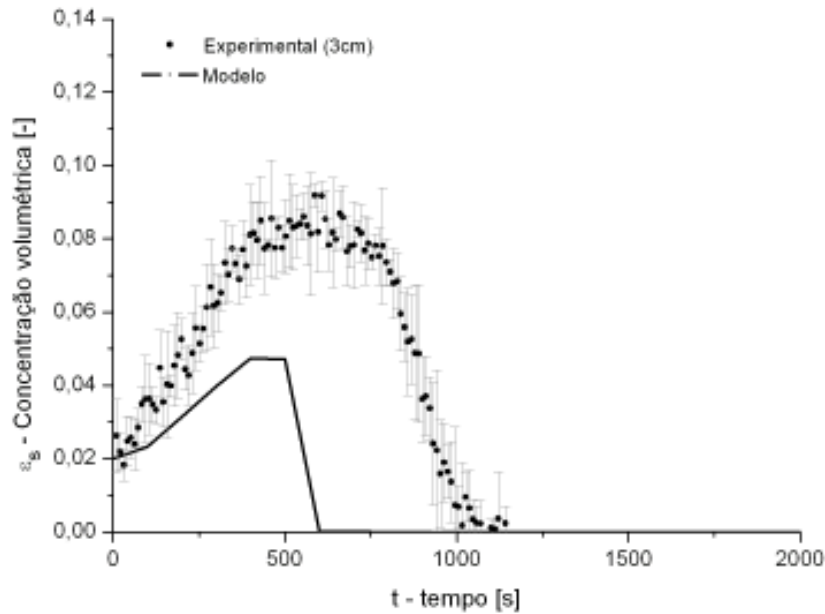


Figura 5.61: Simulação numérica preliminar para suspensões aquosas de caulim 2% na posição 3 cm.

as posições mais afastadas da base por desenvolverem as menores concentrações (valores próximos da concentração inicial da suspensão).

Sabe-se que a velocidade de separação das partículas está fortemente relacionada ao termo convectivo na equação do modelo (BURGER; CONCHA, 1998), cujo comportamento é ditado pela função $\Gamma(\varepsilon_s)$. Desta forma, concluiu-se que a expressão para tal função, Equação (5.108), deveria ser reavaliada.

Avaliação do comportamento do sistema em termos da função $f_{bk}(\varepsilon_s)$

Uma vez que a função $\Gamma(\varepsilon_s)$ é fisicamente equivalente à função $f_{bk}(\varepsilon_s)$ do modelo matemático de Burger e Concha (1998) e admitindo-se correta a igualdade $f_{bk} = -\Gamma$, procurou-se avaliar qualitativamente o comportamento do sistema através da avaliação de f_{bk} adaptado ao caso. A função f_{bk} escrita para o modelo alternativo pode ser obtida através da expressão:

$$f_{bk}(\varepsilon_s) = -\frac{k(\varepsilon_s) \Delta\rho \varepsilon_s^2}{\mu} \quad (5.110)$$

Para a obtenção de função f_{bk} utilizou-se a Equação (5.110) com a aplicação da Equação (5.107) para a permeabilidade do meio filtrante, além dos parâmetros $\Delta\rho=1,577$

g/cm^3 , $g=981 \text{ cm/s}^2$ e $\mu=0,01 \text{ g/cm}\cdot\text{s}$. A expressão final obtida é dada por:

$$\hat{f}_{bk}^I = -1,64 \cdot 10^{-4} \varepsilon_s^{-0,4736} \quad (5.111)$$

expressa em cm/s e válida na faixa de concentrações $0,02 \leq \varepsilon_s \leq 0,34$.

De acordo com Burger et al. (2000) a função f_{bk} deve obedecer às seguintes restrições:

$$f_{bk}(\varepsilon_s = 0) = 0 \quad (5.112)$$

$$f_{bk}(0 < \varepsilon_s < \varepsilon_{sm}) < 0 \quad (5.113)$$

$$f_{bk}(\varepsilon_s \geq \varepsilon_{sm}) = 0 \quad (5.114)$$

Burger et al. (2000) apresentaram a aproximação empírica de *Michael e Bolger* para a generalização da função f_{bk} expressa por:

$$f_{bk}(\varepsilon_s) = u_\infty \varepsilon_s \left(1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sm}}\right)^C \quad (5.115)$$

de forma a garantir que a restrição $f_{bk}(\varepsilon_s \geq \varepsilon_{sm}) = 0$ seja assegurada, sendo as constantes $u_\infty < 0$, $C > 1$ e $0 < \varepsilon_{sm} \leq 1$.

Para atender as restrições apresentadas pelas Equações (5.112), (5.113) e (5.114), além de visar obter uma expressão para f_{bk} que compreende a faixa $0 \leq \varepsilon_s < 0,02$ e que seja contínua em $\hat{f}_{bk}^I$ no ponto 0,02, utilizou-se o modelo generalizado de *Michael e Bolger* (BURGER et al., 2000), Equação (5.115), para a função $\hat{f}_{bk}^{II}$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\hat{f}_{bk}^I(0,02) = \hat{f}_{bk}^{II}(0,02) \quad (5.116)$$

$$\left. \frac{d\hat{f}_{bk}^I}{d\varepsilon_s} \right|_{\varepsilon_s=0,02} = \left. \frac{d\hat{f}_{bk}^{II}}{d\varepsilon_s} \right|_{\varepsilon_s=0,02} \quad (5.117)$$

Admitindo-se pela avaliação dos resultados experimentais $\varepsilon_{sm}=0,27$, foi possível obter a função $\hat{f}_{bk}^{II}$ resolvendo-se o sistema formado pelas Equações (5.116) e (5.117) e pelas variáveis a serem determinadas u_∞ e C . A expressão determinada para $\hat{f}_{bk}^{II}$ é dada por:

$$\hat{f}_{bk}^{II} = -2,596 \cdot 10^{-1} \varepsilon_s \left(1 - \frac{\varepsilon_s}{0,27}\right)^{20,81} \quad (5.118)$$

expressa em cm/s e válida para a faixa $0 \leq \varepsilon_s \leq 0,02$. As Equações $\hat{f}_{bk}^I$ e $\hat{f}_{bk}^{II}$ são apresentadas na Figura 5.62.

Visando-se avaliar a sensibilidade do parâmetro ε_{sm} para f_{bk} generalizado na Equação

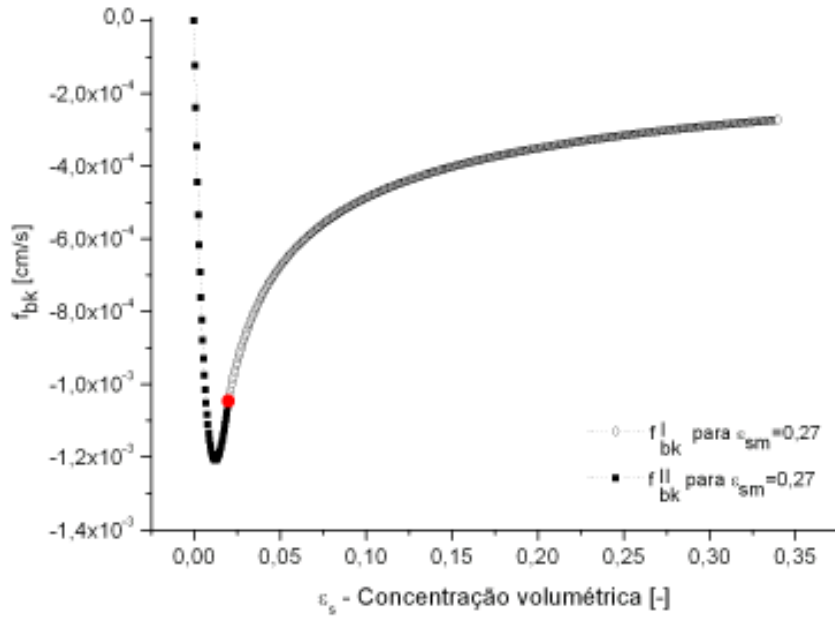


Figura 5.62: Equações constitutivas $\hat{f}_{bk}^I$ e $\hat{f}_{bk}^{II}$ para caulim.

(5.115), uma vez que a determinação dos demais parâmetros da função se restringe à estimativa experimental da concentração máxima na base do sedimentador em um teste de proveta, repetiu-se o procedimento de obtenção dos parâmetros u_∞ e C para $\hat{f}_{bk}^{II}$ admitindo $\varepsilon_{sm}=0,34$ (maior valor de concentração experimental obtido em testes de permeabilidade de sistemas concentrados). Desta forma, o sistema obtido através das Equações (5.116) e (5.117) e $\varepsilon_{sm}=0,34$ fornece a seguinte expressão:

$$\hat{f}_{bk}^{II} = -2,184 \cdot 10^{-1} \varepsilon_s \left(1 - \frac{\varepsilon_s}{0,34} \right)^{23,58} \quad (5.119)$$

expressa em cm/s e válida para a faixa $0 \leq \varepsilon_s \leq 0,02$. A Figura 5.63 permite avaliar a sensibilidade do parâmetro ε_{sm} no modelo generalizado de *Michael e Bolger* para estimativa de f_{bk} .

Pela análise da Figura 5.63 observa-se que existe diferença significativa entre as expressões para $\hat{f}_{bk}^{II}$ em parâmetros ε_{sm} equivalentes à 0,27 e 0,34. Visto que ambas as concentrações utilizadas para ε_{sm} são próximas em relação à toda faixa de concentrações de interesse neste estudo, a sensibilidade do parâmetro pode ser um fator que contribui no aumento do erro associado ao termo convectivo. Além disso, a estimativa experimental da concentração máxima na base do sedimentador envolve técnicas e medidas que muitas vezes não são precisas. Comparando-se as expressões $\hat{f}_{bk}^{II}(0,27)$ e $\hat{f}_{bk}^{II}(0,34)$ nota-se que a expressão referente à primeira equação desenvolve derivadas locais mais acentuadas do que a segunda expressão.

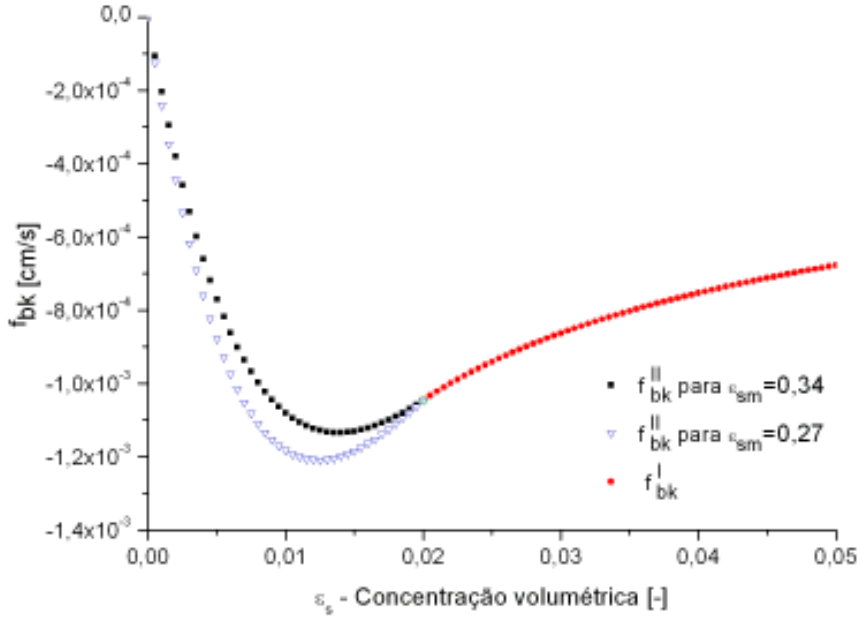


Figura 5.63: Avaliação da sensibilidade do parâmetro ε_{sm} no modelo generalizado de *Michael e Bolger*.

A derivada da função f_{bk} em relação à concentração ($df_{bk}/d\varepsilon_s$) está relacionada com a velocidade de variação da concentração com o tempo e conseqüentemente com a velocidade de separação das partículas através da expressão da equação da continuidade:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} = \frac{df_{bk}}{d\varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} \quad (5.120)$$

Desta forma, o erro associado à função f_{bk} altera o comportamento dinâmico do sistema e leva ao acúmulo dos devios nas aproximações numéricas em cada passo de integração.

Admitindo-se a concentração máxima $\varepsilon_{sm}=0,27$ e conseqüentemente fazendo uso da Equação (5.118), as expressões finais para $f_{bk}(\varepsilon_s)$ puderam ser obtidas através da adimensionalização do espaço pela introdução do parâmetro L , equivalente a 22,8 cm. Assim, a adimensionalização foi dada por $f_{bk}=\hat{f}_{bk}/L$. As Equações (5.121) e (5.122) apresentam as expressões na forma final:

$$f_{bk}^I [s^{-1}] = -7,193 \cdot 10^{-6} \varepsilon_s^{-0,4736} \quad (5.121)$$

$$f_{bk}^{II} [s^{-1}] = -1,138 \cdot 10^{-2} \varepsilon_s \left(1 - \frac{\varepsilon_s}{0,27}\right)^{20,81} \quad (5.122)$$

com validade nos intervalos $0,02 \leq \varepsilon_s \leq 0,34$ e $0 \leq \varepsilon_s \leq 0,02$, respectivamente.

Comparando-se as funções f_{bk} e Γ para análise das discrepâncias entre a abordagem

de Burger e Concha (1998) e este trabalho, plotou-se as Equações (5.121) e (5.122) para f_{bk} juntamente com a função $-\Gamma$ expressa pela Equação (5.108). O resultado gráfico é apresentado na Figura 5.64.

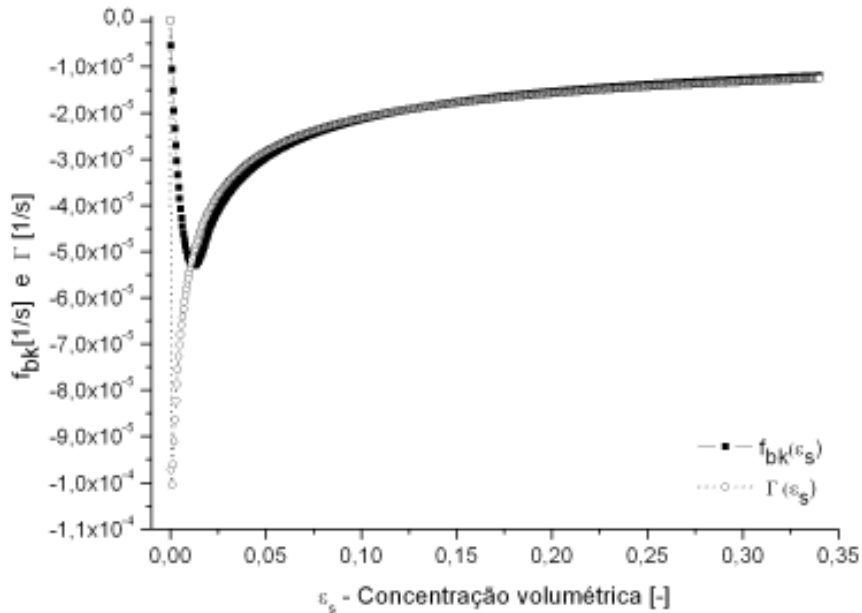


Figura 5.64: Comparação entre as funções f_{bk} e $-\Gamma$ para o sistema proposto.

Através da Figura 5.64 é possível perceber que as aproximações numéricas são semelhantes para as altas concentrações e divergem à medida que a concentração diminui. Cabe ressaltar que a função Γ desenvolve maiores derivadas para sistemas mais diluídos quando comparada com a função f_{bk} , o que confere ao sistema uma maior velocidade na separação das partículas. Uma vez que as maiores discrepâncias entre as simulações numéricas e os resultados experimentais ocorrem principalmente em altas concentrações (gráficos do Apêndice A) é de se esperar que a nova expressão para f_{bk} não resolva o problema.

Nota-se pela análise da Figura 5.64 que uma vez que a função f_{bk}^I foi obtida através da expressão derivada do modelo matemático, Equação (5.110), a restrição apresentada pela Equação (5.114) na qual $f_{bk}(\varepsilon_s \geq \varepsilon_{sm}) = 0$, não pôde ser satisfeita. Cabe ressaltar que uma vez que tal expressão não foi ajustada utilizando o modelo generalizado de *Michael e Bolger* (BURGER et al., 2000) não foi possível assegurar que f_{bk} seja nulo para concentrações maiores que a crítica. Por outro lado observa-se pela análise da Figura 5.65 que os resultados experimentais obtidos pela equação constitutiva da permeabilidade do meio poroso não desenvolvem a tendência imposta pela restrição na Equação (5.114), sendo que a introdução da variável no modelo aponta uma inconsistência física na equação constitutiva para f_{bk} .

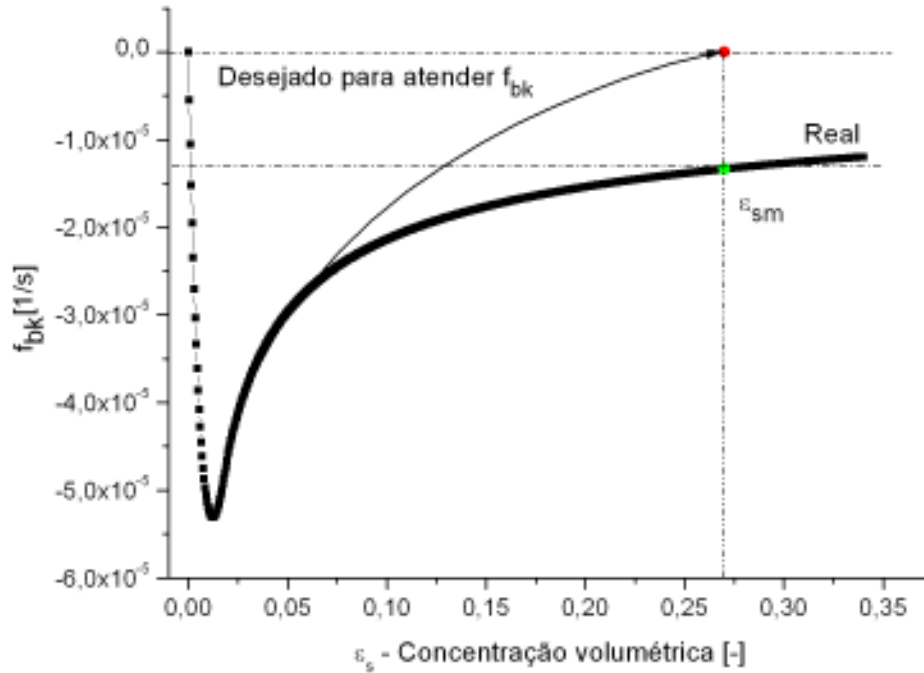


Figura 5.65: Avaliação do comportamento da função f_{bk} em termos das restrições impostas pelo modelo.

Analisando-se a expressão do modelo matemático para f_{bk} , Equação (5.110), e conseqüentemente para a função Γ , observa-se que f_{bk} é nulo quando ocorre ausência de sólido ($\varepsilon_s=0$) e uma vez que a função permeabilidade do meio poroso só é nula em $\varepsilon_s=1$, isso equivale à dizer que a função f_{bk} se torna fisicamente inconsistente com a introdução da variável física $k(\varepsilon_s)$, uma vez que só será nula em $\varepsilon_s=1$ e não em $\varepsilon_s=\varepsilon_{sm}$.

Dizer que f_{bk} é nulo para concentrações iguais ou superiores à ε_{sm} equivale à dizer que não ocorre fluxo de material, seja este líquido ou sólido, no meio poroso em concentrações superiores à máxima. Entretanto, sabe-se da experimentação que o meio poroso apresenta uma condição de estabilidade que pode ser reconfigurada ao se proceder uma filtração do líquido pelo próprio meio poroso formando um sedimento mais compactado, como foi observado pelos testes de filtração de Damasceno (1992).

Com a finalidade de se avaliar a dependência dos modelos matemáticos à uma função sujeita às restrições apresentadas nas Equações (5.112), (5.113) e (5.114), obteve-se uma expressão para f_{bk} utilizando-se apenas informações experimentais para sistemas diluídos.

Sabendo-se que para sistemas diluídos a função f_{bk} pode ser expressa por:

$$f_{bk} = \varepsilon_{s0} v_{s0} \quad (5.123)$$

utilizou-se os resultados apresentados na Tabela 5.3 referentes às permeabilidades de sistemas diluídos para determinar valores aproximados de f_{bk} para baixas concentrações. A Tabela 5.11 apresenta os valores de f_{bk} para sistemas diluídos para os quais não são observados os efeitos da tensão nos sólidos.

Tabela 5.11: Valores da função f_{bk} para baixas concentrações.

ε_{s0} [-]	v_{s0} [m/s]	f_{bk} [m/s]
0,02	$-4,99 \cdot 10^{-4}$	$-9,97 \cdot 10^{-6}$
0,03	$-3,12 \cdot 10^{-4}$	$-9,37 \cdot 10^{-6}$
0,04	$-2,04 \cdot 10^{-4}$	$-8,14 \cdot 10^{-6}$
0,05	$-1,44 \cdot 10^{-4}$	$-7,20 \cdot 10^{-6}$
0,06	$-1,04 \cdot 10^{-4}$	$-6,24 \cdot 10^{-6}$

Os resultados apresentados na Tabela 5.11 foram utilizados juntamente com os pontos correspondentes às condições $f_{bk}(\varepsilon_s=0)=0$ e $f_{bk}(\varepsilon_s=\varepsilon_{sm})=0$. Uma expressão para f_{bk} foi obtida aplicando-se o modelo generalizado de *Michael e Bolger* (BURGER et al., 2000) apresentado pela Equação (5.115). A Figura 5.66 apresenta o gráfico da função f_{bk} para o sistema em questão.

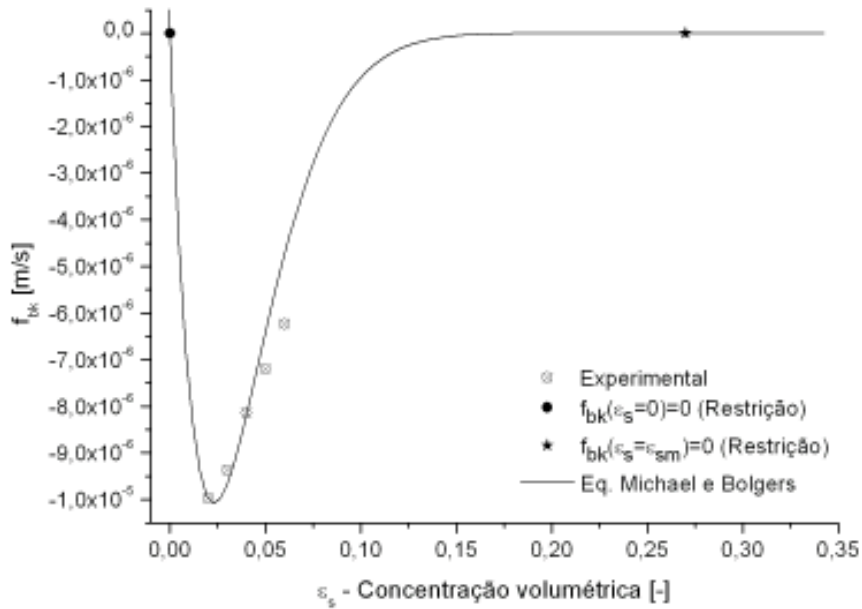


Figura 5.66: Gráfico da função f_{bk} experimental para suspensões diluídas.

A equação do modelo generalizado de *Michael e Bolger* para $f_{bk}(\varepsilon_s)$ é expressa por:

$$f_{bk} [cm/s] = -1,155 \cdot 10^{-1} \varepsilon_s \left(1 - \frac{\varepsilon_s}{0,3438} \right)^{13,98} \quad (5.124)$$

Pela análise da Figura 5.66 nota-se que a expressão obtida é consistente com todas as condições apresentadas nas Equações (5.112), (5.113) e (5.114). Entretanto, uma vez que o ajuste não considera os resultados experimentais para permeabilidade em altas concentrações espera-se uma divergência significativa entre os resultados numéricos e experimentais. Por outro lado as informações das distribuições de permeabilidade do meio poroso são agregadas ao modelo através do coeficiente difusivo $D(\varepsilon_s)$.

De posse da função f_{bk} expressa pela Equação 5.124 e sabendo-se que $f_{bk}=-\Gamma$ foram realizadas simulações numéricas da sedimentação em batelada de suspensões aquosas de caulim na concentração inicial de 2% em volume. Os resultados obtidos através das simulações numéricas são importantes para a avaliação da aplicação da função f_{bk} na resolução do problema.

Simulação numérica da sedimentação em batelada de suspensões aquosas de caulim ($\varepsilon_{s0}=2\%$)

A simulação numérica da sedimentação em batelada de suspensões aquosas de caulim ($\varepsilon_{s0}=2\%$) foi realizada para uma malha fixa estipulando-se a variação temporal dos nós internos através da condição $dx/dt=0$. A malha foi constituída por 26 pontos de discretização. O uso de uma malha pouco refinada está associado ao interesse inicial de análises qualitativas do modelo. As expressões para $\Gamma(\varepsilon_s)$, $k(\varepsilon_s)$ e $P'_s(\varepsilon_s)$ utilizadas são apresentadas pelas Equações (5.124), (5.107) e (5.109), respectivamente, sendo correto aplicar por analogia $f_{bk}=-\Gamma$. Os resultados da simulação numérica foram comparados com resultados experimentais de monitoramento de $\varepsilon_s(z,t)$ para $\varepsilon_{s0}=2\%$.

A coluna de sedimentação no trabalho experimental foi monitorada nas posições entre 1 à 10 cm acima da base do sedimentador em intervalos igualmente espaçados de 1 cm. Três réplicas experimentais foram realizadas para cada posição para a determinação do erro associado às medidas experimentais. A média e os desvios padrões são apresentados em cada diagrama. O tempo total de sedimentação foi equivalente à $T=3000$ s, a concentração máxima utilizada para os cálculos internos foi equivalente à 0,27, enquanto a altura máxima da coluna de sedimentação foi equivalente à $L=22,8$ cm. A concentração crítica do sólido obtida através de testes estáticos do monitoramento das distribuições de concentrações no sedimento foi igual à $\varepsilon_{sc}=0,137$.

Os resultados numéricos dos diagramas de variação da concentração com o tempo para as posições 1, 3, 5 e 9 cm são apresentados na sequência. Os diagramas para as demais posições são apresentados no Apêndice A.

A Figura 5.67 apresenta os comportamentos dinâmicos das posições 1 e 3 cm.

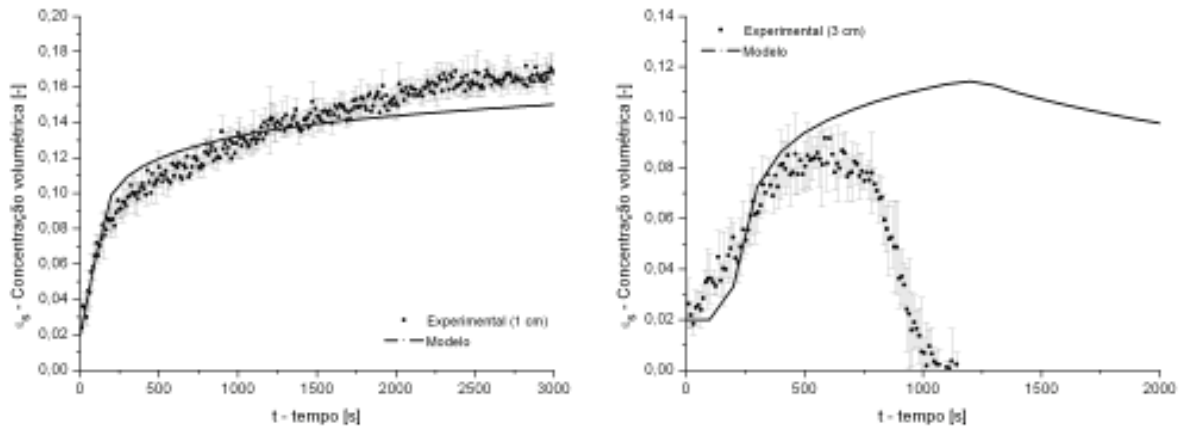


Figura 5.67: Variação da concentração em função do tempo para as posições 1 e 3 cm acima da base ($\varepsilon_{s0}=2\%$).

Pela análise da Figura 5.67 nota-se que a simulação numérica para a posição equivalente à 1 cm acima da base do sedimentador apresentou um comportamento qualitativo consistente. Em contrapartida, o monitoramento da concentração em função do tempo para a posição de 3 cm mostra uma grande discrepância entre o resultado simulado e o correspondente resultado experimental principalmente para o ponto de passagem da interface descendente na máxima concentração local. Para a simulação numérica da posição de 3 cm observa-se a formação de uma pequena região de sedimentação livre cuja concentração se manteve constante e igual à concentração inicial da suspensão ($\varepsilon_s=2\%$) até o tempo total de aproximadamente 150 s de sedimentação. Em contrapartida, tal região não é observada experimentalmente.

Cabe ressaltar ainda de acordo com a Figura 5.67 que o resultado da simulação numérica para a posição de 3 cm apresentou um perfil de queda da interface descendente que não é consistente fisicamente. Esperava-se que a passagem da interface fosse caracterizada pela descontinuidade na concentração, passando de um valor máximo local imediatamente para zero. Para o caso particular da passagem da interface de acordo com os resultados experimentais o perfil é justificado pela existência de uma abertura no colimador de raios γ equivalente à aproximadamente 5 mm, fato que proporciona medidas concomitantes de sólido nas regiões de sedimento e líquido clarificado. Provavelmente o fato observado seria minimizado com o refinamento da malha de discretização.

A Figura 5.68 apresenta os comportamentos dinâmicos das posições 5 e 9 cm.

De acordo com a Figura 5.68 nota-se que para as posições mais afastadas da base do sedimentador o modelo começa a prever bem os resultados físicos. Certamente isso ocorre pelo fato de que as concentrações não variam muito em tais posições, além do que há predominância da região de sedimentação livre seguida da passagem da interface

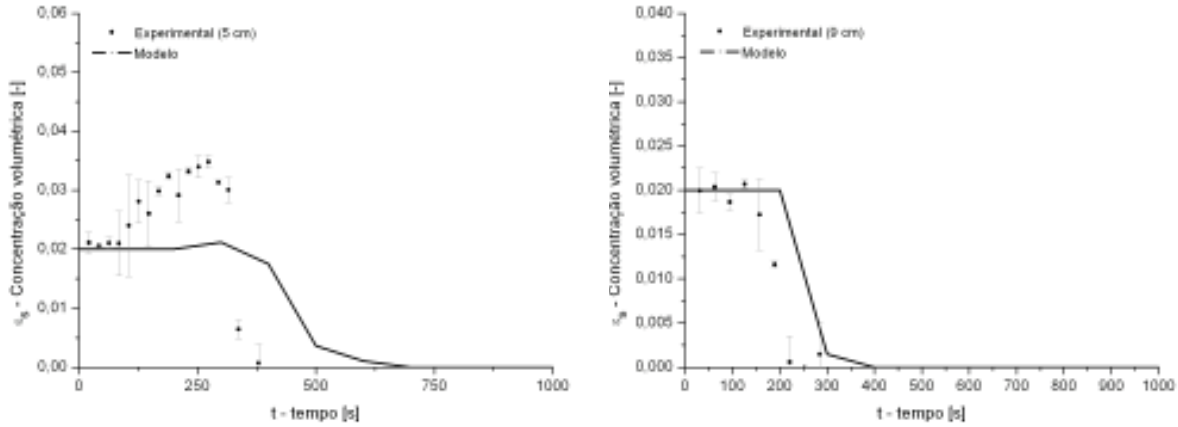


Figura 5.68: Variação da concentração em função do tempo para as posições 5 e 9 cm acima da base ($\varepsilon_{s0}=2\%$).

descendente. O motivo dos resultados para as concentrações mais elevadas não serem satisfatórios certamente se deve ao fato da função Γ não prever adequadamente o comportamento específico do material sólido para tais concentrações.

Para efeito de comparação avaliou-se a simulação do modelo na concentração inicial de 2% em uma malha fixa mais refinada ($N=70$ pontos internos). A Figura 5.69 apresenta os resultados comparativos para as posições de 2 e 10 cm.

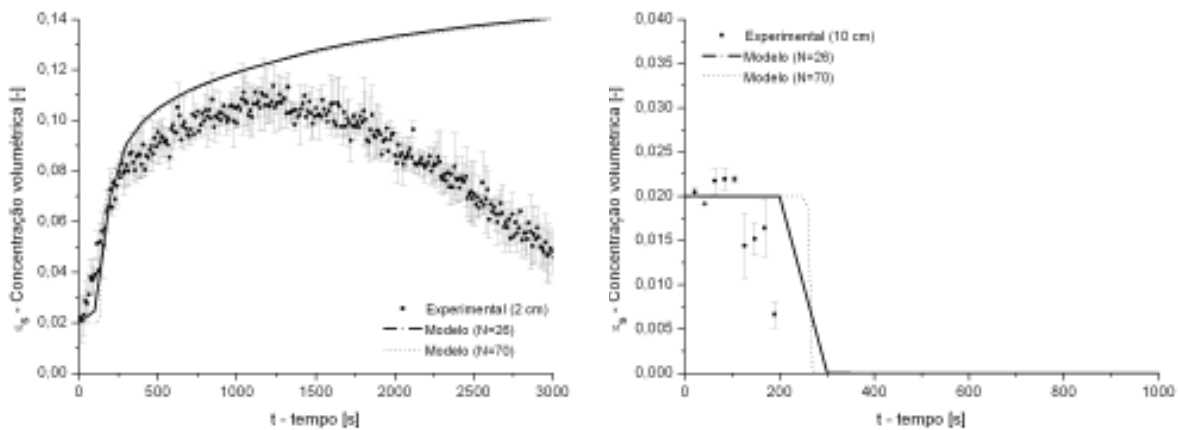


Figura 5.69: Análise do efeito do refinamento na solução numérica do modelo.

Nota-se pela análise da Figura 5.69 que as diferenças entre as malhas com os refinamentos $N=26$ e $N=70$ não alteram significativamente as conclusões qualitativas do modelo.

Simulação numérica da sedimentação em batelada de suspensões aquosas de caulim ($\varepsilon_{s0}=3\%$)

A análise numérica da sedimentação de suspensões aquosas de caulim na concentração inicial $\varepsilon_{s0}=3\%$ foi realizada resolvendo-se o sistema de equações algébrico-diferenciais através do método das Diferenças Finitas acoplado ao método MUSCL de segunda ordem. A malha unidimensional fixa ($dx/dt=0$) foi constituída por 26 pontos de discretização. As expressões para $\Gamma(\varepsilon_s)$, $k(\varepsilon_s)$ e $P'_s(\varepsilon_s)$ utilizadas são apresentadas pelas Equações (5.124), (5.107) e (5.109), respectivamente, sendo correto aplicar por analogia $f_{bk}=-\Gamma$. Os resultados da simulação numérica foram comparados com resultados experimentais de monitoramento de $\varepsilon_s(z,t)$.

A coluna de sedimentação no trabalho experimental foi monitorada nas posições entre 1 a 13 cm acima da base do sedimentador em intervalos igualmente espaçados de 1cm. Três réplicas experimentais foram realizadas para cada posição para a determinação do erro associado às medidas experimentais. A média e os desvios padrões são apresentados em cada diagrama. O tempo total de sedimentação foi equivalente à $T=5000$ s e a altura máxima da coluna de sedimentação foi equivalente à $L=23$ cm. A concentração crítica do sólido obtida através de testes estáticos do monitoramento das distribuições de concentrações no sedimento foi igual à $\varepsilon_{sc}=0,137$.

Os resultados gráficos de variação da concentração com o tempo para as posições 2, 4, 8 e 10 cm são apresentados na sequência. Os diagramas $\varepsilon_s(t)$ para as demais posições são apresentados no Apêndice A.

Os comportamentos dinâmicos das posições 2 e 4 cm são apresentados na Figura 5.70.

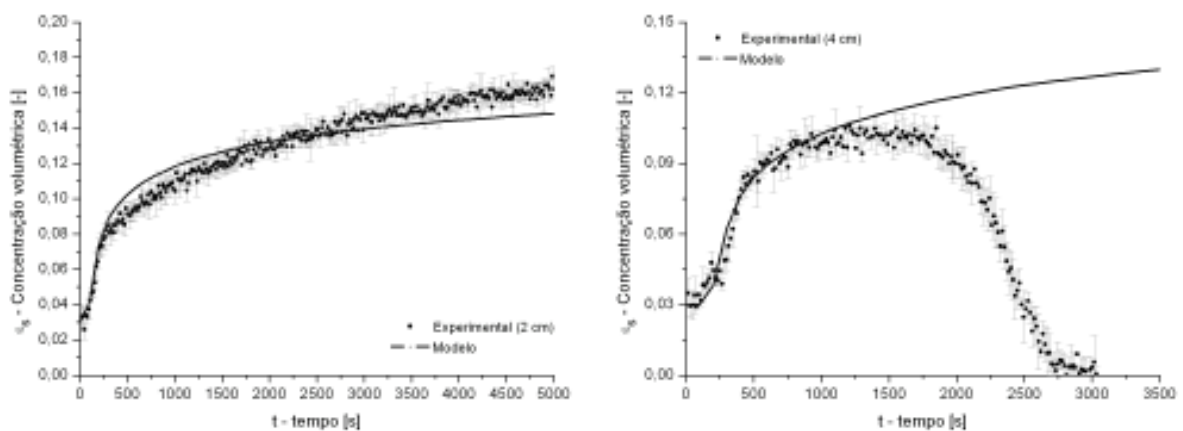


Figura 5.70: Variação da concentração em função do tempo para as posições 2 e 4 cm acima da base ($\varepsilon_{s0}=3\%$).

Pela análise da Figura 5.70 observa-se que o comportamento qualitativo das soluções

numéricas se mostrou consistente fisicamente. Entretanto sob o ponto de vista quantitativo nota-se que para a posição 2 cm acima da base do sedimentador a solução calculada divergiu dos resultados experimentais, sendo que o erro do valor predito pelo modelo em relação ao valor observado é muitas vezes superior ao desvio padrão das medidas obtidas através da experimentação no tempo total de sedimentação equivalente à 5000s. Certamente os resíduos podem ser minimizados com um melhor refinamento da malha.

Avaliando-se os resultados da simulação numérica para a posição de 4 cm nota-se a discrepância entre o modelo e os resultados experimentais principalmente para as concentrações superiores a 11%. Novamente observa-se uma inconsistência física da velocidade de sedimentação das partículas verificada pela passagem da interface descendente pelo ponto monitorado. Nota-se através da Figura 5.66 que a região das concentrações iniciais 2 e 3% encontra-se próxima ao ponto de inflexão da derivada de f_{bk} o que leva à diminuição da velocidade de sedimentação à medida que a concentração decresce para zero.

A Figura 5.71 apresenta os comportamentos dinâmicos das posições 8 e 10 cm.

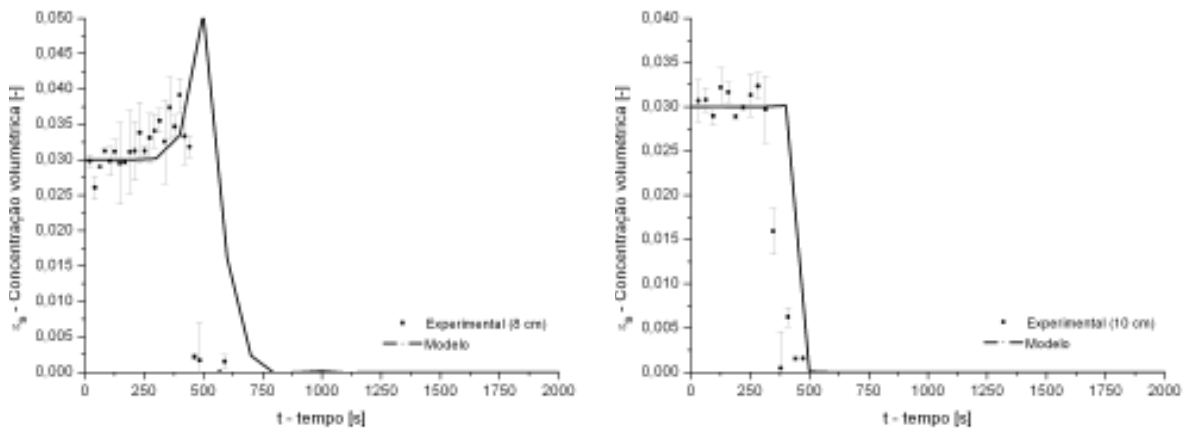


Figura 5.71: Variação da concentração em função do tempo para as posições 8 e 10 cm acima da base ($\epsilon_{s0}=3\%$).

Através da Figura 5.71 pode-se concluir que o modelo prediz bem os resultados experimentais para baixas concentrações de sólidos. Mediante uma análise geral de todos os gráficos para a concentração inicial de 3% em volume (Apêndice A), conclui-se que o modelo descreve bem a sedimentação de partículas em regiões cujo o efeito da tensão nos sólidos parece ser desprezível, mas apresenta elevados desvios para concentrações mais elevadas. A discrepância dos resultados numéricos quando comparados aos resultados físicos certamente se deve pela inconsistência prevista na função f_{bk} por não considerar resultados experimentais para altas concentrações.

Simulação numérica da sedimentação em batelada de suspensões aquosas de caulim ($\varepsilon_{s0}=5\%$)

Para a simulação numérica da sedimentação de suspensões aquosas de caulim na concentração inicial $\varepsilon_{s0}=5\%$ resolveu-se o sistema de equações algébrico-diferenciais em malha fixa ($dx/dt=0$) constituída por 26 pontos de discretização. As expressões para $\Gamma(\varepsilon_s)$, $k(\varepsilon_s)$ e $P'_s(\varepsilon_s)$ utilizadas são apresentadas pelas Equações (5.124), (5.107) e (5.109), respectivamente, sendo correto aplicar por analogia $f_{bk}=-\Gamma$. Os resultados da simulação numérica foram comparados com resultados experimentais de monitoramento de $\varepsilon_s(z,t)$.

A coluna de sedimentação no trabalho experimental foi monitorada nas posições entre 1 a 20 cm acima da base do sedimentador em intervalos igualmente espaçados de 1cm. Três réplicas experimentais foram realizadas para cada posição para a determinação do erro associado às medidas experimentais. A média e os desvios padrões são apresentados em cada diagrama. O tempo total de sedimentação foi equivalente à $T=10000$ s e a altura máxima da coluna de sedimentação foi equivalente à $L=23,6$ cm. A concentração crítica do sólido obtida através de testes estáticos do monitoramento das distribuições de concentrações no sedimento foi igual à $\varepsilon_{sc}=0,137$.

Os resultados gráficos de variação da concentração com o tempo para as posições 2, 5, 7 e 16 cm são apresentados na sequência. Os diagramas $\varepsilon_s(t)$ para as demais posições são apresentados no Apêndice A.

Os comportamentos dinâmicos das posições 2 e 5 cm são apresentados na Figura 5.72.

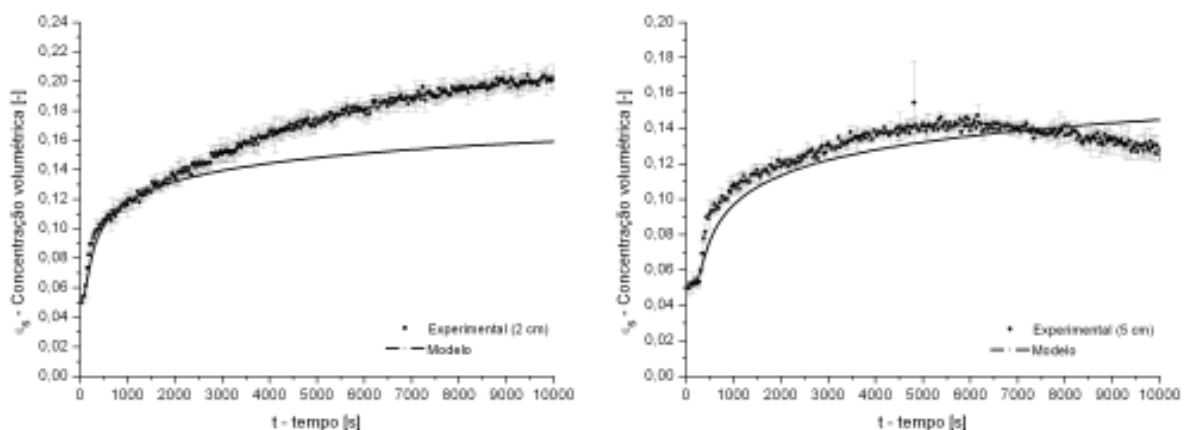


Figura 5.72: Variação da concentração em função do tempo para as posições 2 e 5 cm acima da base ($\varepsilon_{s0}=5\%$).

Analisando-se a Figura 5.72 observa-se uma grande discrepância entre o resultado simulado e o resultado experimental para os testes de concentração inicial de 5% em volume. Para a posição de 2 cm tal discrepância teve início por volta da concentração

crítica do material sólido e o erro certamente se propagou à cada passo de integração. Ao final do tempo de sedimentação o erro associado à simulação numérica é bem superior ao desvio padrão da média das réplicas experimentais.

Para a posição de 5 cm apresentada na Figura 5.72 nota-se que a qualidade da solução melhorou uma vez que não são observadas concentrações elevadas de sólidos.

A Figura 5.73 apresenta os comportamentos dinâmicos das posições 7 e 16 cm.

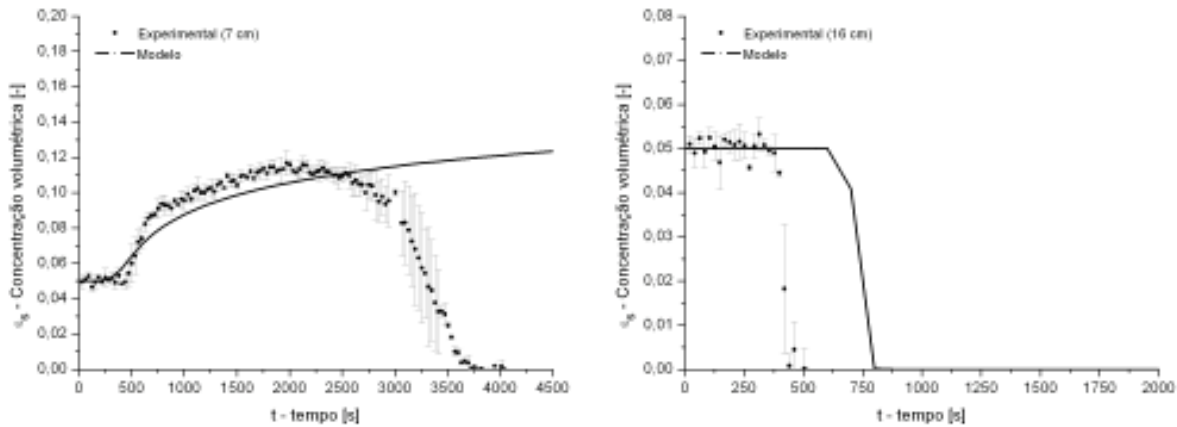


Figura 5.73: Variação da concentração em função do tempo para as posições 7 e 16 cm acima da base ($\varepsilon_{s0}=5\%$).

Para a Figura 5.73 o comportamento dinâmico observado na posição 7 cm indica que o modelo não prediz satisfatoriamente a velocidade de queda das partículas sólidas. De acordo com os resultados experimentais a queda da interface descendente se inicia por volta de 1500 s enquanto o modelo matemático não apresenta a passagem da interface para a mesma posição no intervalo de tempo estabelecido.

Analisando-se a posição de 16 cm acima da base do sedimentador através da Figura 5.73 nota-se que o modelo novamente foi capaz de prever satisfatoriamente a região de sedimentação propriamente dita. Entretanto, a dinâmica de separação aparenta ser mais lenta do que realmente é no fenômeno físico, apresentando uma defasagem de aproximadamente 300 segundos para a passagem da interface pelo ponto.

Uma análise geral dos resultados para concentrações iniciais de 5% através das figuras apresentadas no Apêndice A mostra que o modelo matemático não previu o comportamento dinâmico da suspensão principalmente para altas concentrações. Tal problema se deve ao fato de que a função f_{bk} não representa os resultados experimentais para altas concentrações.

De posse dos resultados das simulações em malha fixa para 2, 3 e 5% pode-se concluir

que a qualidade da solução será tão melhor quanto maior a precisão das equações constitutivas obtidas empiricamente. Paralelamente o desenvolvimento de malhas mais refinadas nas regiões das discontinuidades contribui na minimização dos desvios associados aos métodos numéricos.

Mediante uma análise geral do resultados conclui-se que a função f_{bk} se mostrou como um artifício matemático da abordagem de Burger e Concha (1998) para desenvolver as derivadas positivas e negativas necessárias em cada região do fenômeno previamente estabelecida.

De posse Equação (5.110) foi possível avaliar a sensibilidade dos parâmetros envolvidos no cálculo da função f_{bk} (e consequentemente da função Γ) através da análise da ordem de magnitude das grandezas envolvidas. Para tanto, observou-se que a variável relativa a permeabilidade do meio poroso é a principal responsável por satisfazer ou não a condição ideal para o desenvolvimento numérico na qual f_{bk} deve ser nula para concentrações iguais ou superiores à ε_{sm} . A condição da Equação (5.114) será melhor satisfeita tanto quanto menor for a ordem de grandeza da permeabilidade. Assim sendo, a permeabilidade, uma vez representada pelo modelo de Tiller e Leu (1980), será tão capaz de maximizar a função f_{bk} próximo à concentração máxima (ou minimizar Γ) quanto maior for o coeficiente η da equação de ajuste. Quanto menos permeável for o meio poroso na acomodação final do material sólido mais próximo de zero será a função f_{bk} na concentração máxima ε_{sm} .

A aproximação matemática pela hipótese de f_{bk} ser nula em ε_{sm} é equivalente à dizer que a permeabilidade do meio poroso é igual a zero na concentração máxima de 27% de caulim, sendo que testes de filtração em meios porosos neste trabalho utilizando a metodologia descrita por Damasceno (1992) tornaram possíveis as medidas físicas de $k(\varepsilon_s)$ em concentrações da ordem de 34%.

Em uma análise sob o ponto de vista qualitativo, ao passo que se utilizou a função f_{bk} que atende às restrições do modelo empírico expressa pela Equação (5.124), os resultados das simulações se mostraram melhores que quando comparados aos resultados das simulações em testes preliminares utilizando a Equação (5.108). Entretanto, sob o ponto de vista quantitativo as simulações foram comprometidas pelo modelo empírico uma vez que o sólido caulim utilizado neste trabalho se trata de um material cuja matriz porosa produzida pela decantação das partículas é bastante permeável.

A aproximação através da condição $f_{bk}(\varepsilon_s \geq \varepsilon_{sm})=0$ é importante no ponto de vista do desenvolvimento da abordagem matemática, que por sua vez diminuiu consideravelmente o grau de complexidade da resolução do problema. Entretanto, a função apresenta grandes desvios nos resultados das simulações de sólidos que produzem sedimentos bem permeáveis.

Solução do modelo em malha móvel (*Moving Mesh*)

Diante das conclusões obtidas a partir das simulações numéricas do modelo matemático em malha fixa realizou-se uma simulação utilizando-se a técnica de discretização em malha variável em caráter ilustrativo. O interesse em se aplicar o método de *Moving Mesh* está ligado ao refinamento automático da malha em regiões específicas cujas derivadas das funções variam significativamente, tal como nas regiões próximas ao desenvolvimento das interfaces no fenômeno da sedimentação. Uma vez que não se sabe ao certo a posição exata das interfaces a cada passo de integração, torna-se inviável o refinamento da malha em todo o domínio espacial, seja pelo esforço computacional e limitação de *hardware* ou pelo tempo elevado de processamento numérico.

A alternativa apresentada neste trabalho consistiu no desenvolvimento das equações do modelo aplicando-se o método de *Moving Mesh* acoplado ao método das Diferenças Finitas e MUSCL de segunda ordem. A solução qualitativa do modelo alternativo para a sedimentação em batelada de caulim ($\varepsilon_{s0}=2\%$) foi obtida para $N=11$ pontos de discretização e $\tau=10^{-3}$. A malha fixa utilizada no estudo de casos anterior é comparada com a malha móvel na Figura 5.74.

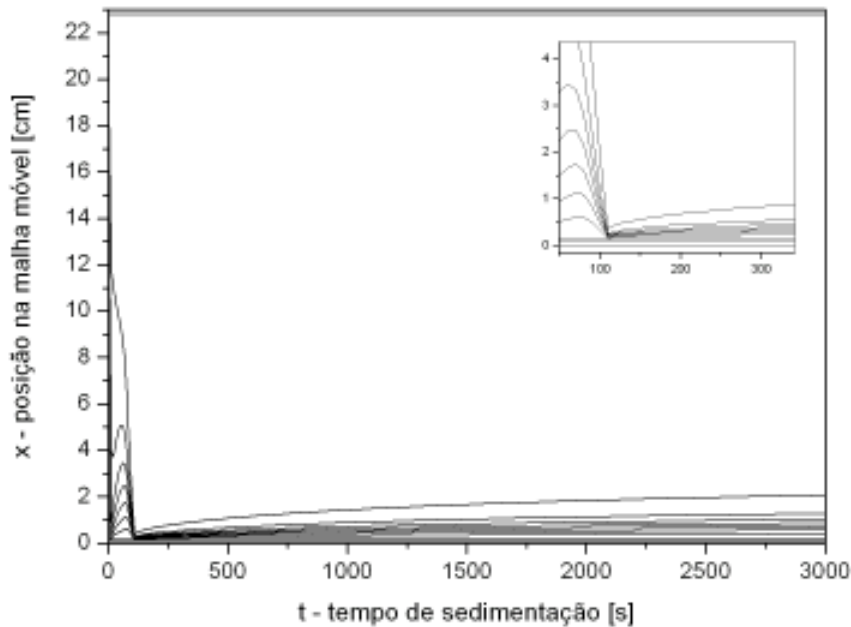


Figura 5.74: Apresentação da malha móvel para $N=11$ e $\tau=10^{-3}$.

A solução numérica da sedimentação em batelada de suspensões aquosas de caulim na concentração inicial $\varepsilon_{s0}=2\%$ foi obtida utilizando-se as expressões para $\Gamma(\varepsilon_s)$, $k(\varepsilon_s)$ e $P'_s(\varepsilon_s)$ fornecidas pelas Equações (5.124), (5.107) e (5.109), respectivamente, sendo correto

aplicar por analogia $f_{bk} = -\Gamma$. O tempo total de sedimentação foi equivalente à $T=3000$ s e a altura máxima da coluna de sedimentação foi equivalente à $L=22,8$ cm. A concentração crítica do sólido obtida através de testes estáticos do monitoramento das distribuições de concentrações no sedimento foi igual à $\varepsilon_{sc}=0,137$.

A Figura 5.75 apresenta o diagrama de distribuições de concentrações no sedimento para os tempos 0, 200, 300, 500, 900, 1500, 2000, 2500 e 3000 segundos de sedimentação.

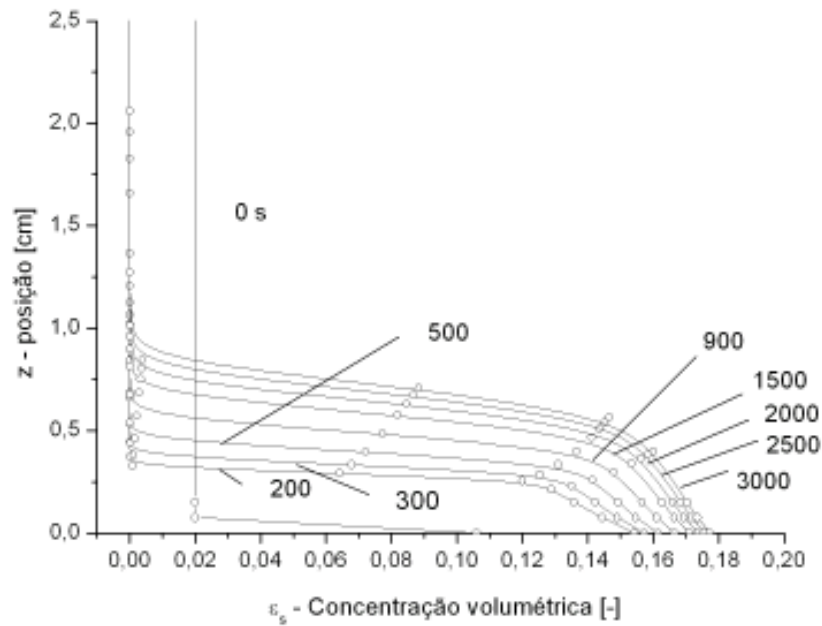


Figura 5.75: Solução numérica do modelo alternativo pelo método de *Moving Mesh*.

Embora os resultados da simulação numérica com malha fixa apontaram a deficiência do método para sólidos que produzem matrizes porosas bem permeáveis, visto que as funções $\Gamma(\varepsilon_s)$ e $f_{bk}(\varepsilon_s)$ apresentam restrições no método numérico, a análise qualitativa dos resultados apresentados na Figura 5.75 mostra que o método de *Moving Mesh* pode contribuir na resolução de problemas de natureza mista hiperbólica-parabólica que apresentam descontinuidades nas soluções.

Resultados obtidos pela aplicação do método da malha móvel na simulação do modelo matemático de Burger e Concha (1998) ilustram a eficiência do método das Diferenças Finitas acoplado aos métodos MUSCL de segunda ordem e *Moving Mesh* introduzidos neste trabalho. Os resultados para o modelo matemático de Burger e Concha (1998) em malha móvel são apresentados no Apêndice A.

