

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
INSTITUTO DE FÍSICA - INFIS

Matrizes Circulantes Aleatórias

Pedro Henrique Santos Bento

Uberlândia

2018

Pedro Henrique Santos Bento

Matrizes Circulantes Aleatórias

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física, como parte das exigências para a obtenção do título de bacharel em Física de Materiais.

Orientador: Prof. Dr. Marcel Novaes

Uberlândia

2018

Pedro Henrique Santos Bento

Matrizes Circulantes Aleatórias. Uberlândia, 2018.

47p. : il.; 30 cm.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal de Uberlândia, como parte das exigências para a obtenção do título de bacharel em Física de Materiais,

Área: Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcel Novaes

1. Teoria de Matrizes Aleatórias. 2. Enumeração de mapas. 3. Matrizes Circulantes.

Pedro Henrique Santos Bento

Matrizes Circulantes Aleatórias

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física, como parte das exigências para a obtenção do título de bacharel em Física de Materiais.

Trabalho aprovado. Uberlândia, 18 de Dezembro de 2018:

Prof. Dr. Marcel Novaes
Orientador

Prof. Dr. George Balster Martins
Convidado 1

Prof. Dr. Wellington Akira Iwamoto
Convidado 2

Uberlândia
2018

Agradecimentos

Ao meu orientador, professor Marcel, por toda a orientação, paciência e ensinamentos durante a iniciação científica e durante o TCC.

A minha mãe, Raquel, por todo o amor e atenção dedicados à mim durante toda a graduação, por todos os conselhos e ajuda nas coisas pequenas do dia a dia. Ao meu pai, Iran, pela sabedoria e conselhos transmitidos durante estes 4 anos, sem a sua ajuda eu não teria chegado até aqui hoje. Em todos os momentos em que eu me desanimei e até pensei em desistir, vocês me impulsionaram de várias formas. Deixo aqui meu muito obrigado.

Ao meu melhor amigo Lucas, o seu suporte foi essencial nestes 4 anos de graduação. Obrigado por me fazer gostar de teatro.

Agradeço a minha avó pela ajuda financeira no início da graduação.

Aos meus amigos da física Fernanda, Ana Paula, Isabela e Mykaelle pelo incentivo nestas últimas semanas. A todas as pessoas da física que me ajudaram indiretamente. Ao Victor Diana e Gabriel Carrijo que me fizeram companhia em longas noites de produção do TCC.

Ao CNPq e a UFU que fomentaram minha pesquisa durante a iniciação científica.

Resumo

A Teoria de Matrizes Aleatórias (RMT) é uma importante teoria conhecida através dos trabalhos de Wigner em 1955 que resolveu inúmeros problemas de diversas áreas da ciência. Um problema bastante conhecido é o de integrais matriciais. Brezin *et al* (1) foram os primeiros a notar a relação entre integrais matriciais e enumeração de mapas. Foi descoberto que integrais no espaço de matrizes hermitianas com distribuição gaussiana do produto de $2k$ elementos de matriz pode ser calculada fazendo uma soma sobre os mapas de genus g e k arestas. Discutimos também o espectro de matrizes circulantes estocásticas aleatórias. Verificou-se que o espectro das matrizes circulantes de Hankel segue uma distribuição de Rayleigh, enquanto o de matrizes circulantes de Toeplitz é o conjunto de todas as combinações convexas das raízes da unidade. O segundo maior autovalor λ_2 tem distribuição de Tracy-Widom para as matrizes de Hankel e uma distribuição de Gumbel para as matrizes de Toeplitz. A repulsão dos autovalores das matrizes de Hankel tem a mesma distribuição de matrizes com entradas independentes. O produto entre as matrizes circulantes tem uma álgebra interessante: o produto de matrizes de Hankel é uma matriz de Toeplitz, mas o produto de matrizes de Toeplitz permanece sendo uma matriz de Toeplitz. À medida que multiplicamos mais matrizes, as combinações das matrizes de permutação deixam de ser convexas.

Palavras-Chave: Teoria de Matrizes Aleatórias. Integrais Matriciais. Enumeração de Mapas. Matrizes Circulantes.

Abstract

The Random Matrix Theory (RMT) is a very important theory known by Wigner's works in 1955 that solved numerous problems of many areas of science. A well-known problem is that of matrix integrals. Brezin *et al* (1) were the first to note the relation between matrix integrals and map enumeration. It has been found that integrals on gaussian hermitian ensemble of the $2k$ matrix elements product can be calculated by summing the genus g maps with k edges. We discuss about the sprectrum of stochastic circulant random matrices. It was verified that the spectrum of circulant Hankel matrices has Rayleigh distribution, while circulant Toeplitz matrices is the set of all convex combinations of the roots of the unit. The second largest eigenvalue λ_2 has Tracy-Widom distribution for Hankel matrices and a Gumbel distribution for Toeplitz matrices. The repulsion of eigenvalues of Hankel matrices has the same distribution of matrices with independent entries. The product between circulant matrices has an interesting algebra: the Hankel matrices product is a Toeplitz matrix, but the Toeplitz matrix product remains a Toeplitz matrix. As we multiply more matrices, the combinations of the permutation matrices are no longer convex.

Keywords: Random Matrix Theory. Matrix Integrals. Map Enumeration. Circulant Matrices.

Lista de figuras

Figura 1 – Variedades de genus $g = 0, 1, 2$ e equivalências topológicas.	17
Figura 2 – Duas imersões do mesmo grafo no toro: a direita uma imersão celular.	17
Figura 3 – Quatro imersões do mesmo grafo na esfera.	18
Figura 4 – Pares de arestas coladas de um octógono	22
Figura 5 – Representação diagramática do $\text{Tr}(H^4)$	24
Figura 6 – Mapas correspondentes aos três acomplamentos de Wick do $\text{Tr}(H^4)$	25
Figura 7 – Probabilidades de transição entre os $N = 3$ estados de uma cadeia de Markov.	31
Figura 8 – Distribuição de probabilidade dos autovalores de matrizes circulantes estocásticas de Hankel de ordem $N = 2$	32
Figura 9 – Distribuição de probabilidade das matrizes circulantes de Hankel de ordem $N = 3$	34
Figura 10 – Histograma dos autovalores de matrizes circulantes de Hankel de ordem $N = 3$	34
Figura 11 – Espectro de matrizes circulantes de Hankel para $N = 100$	35
Figura 12 – Distribuição de λ_2 das matrizes circulantes de Hankel.	35
Figura 13 – $\langle \lambda_2 \rangle$ e $\text{Var}[\lambda_2]$ em função de N e os gráficos linearizados respectivos.	36
Figura 14 – Distribuição da razão dos espaçamentos dos autovalores de matrizes circulantes de Hankel	37
Figura 15 – Espectro de autovalores das matrizes circulantes de Toeplitz	38
Figura 16 – Distribuição de Gumbel de λ_2 das matrizes circulantes de Toeplitz	40
Figura 17 – Espectro do produto de matrizes de Hankel.	42
Figura 18 – Espectro do produto de matrizes de Toeplitz.	42

Sumário

	Introdução	9
1	TEORIA DE MATRIZES ALEATÓRIAS	11
2	INTEGRAIS MATRICIAIS E ENUMERAÇÃO DE MAPAS	16
2.1	Mapas	16
2.1.1	Grafos	16
2.1.2	Mapas como grafos imersos	16
2.1.3	Permutações	18
2.1.3.1	Um pouco sobre permutações	19
2.1.4	Mapas a partir de polígonos	21
2.2	Integrais de Matrizes Hermitianas	23
3	ESPECTRO DE MATRIZES CIRCULANTES	28
3.1	Matrizes Circulantes	28
3.2	Cadeias de Markov	30
3.3	Espectro de autovalores	31
3.3.1	Matrizes Circulantes de Hankel	31
3.3.2	Matrizes Circulantes de Toeplitz	37
3.3.3	Produto entre matrizes circulantes	40
4	CONCLUSÕES	43
	Referências	44

Introdução

Em 1955, Eugene Wigner usou uma abordagem estatística para tratar o problema dos níveis de energia de um núcleo atômico pesado. Diferente da mecânica estatística tradicional, ele considerou em vez de um ensemble de sistemas idênticos governados pela mesma hamiltoniana, mas com diferentes condições iniciais, um ensemble governado por diferentes hamiltonianas, todas com as mesmas propriedades de simetria. As entradas da matriz hamiltoniana foram sorteadas aleatoriamente com uma certa distribuição de probabilidade e calculou-se propriedades estatísticas da nova hamiltoniana. A comparação entre os cálculos estatísticos e as medidas experimentais mostraram uma ótima concordância. Desde então a teoria de matrizes aleatórias (RMT) foi aplicada a uma vasta quantidade de áreas da física e da matemática (2).

Na mecânica estatística, a posição e o momento de um número grande de partículas são tratadas como variáveis aleatórias. Na mecânica quântica, posição e momento são operadores diferenciais ou matrizes. Assim sendo, a mecânica estatística de sistemas quânticos naturalmente envolvem matrizes aleatórias. O uso de matrizes aleatórias no estudo de sistemas quânticos se justifica quando a dinâmica não pode ser calculada de primeiros princípios. Isso inclui, por um lado, sistemas de muitos corpos e, por outro lado, sistemas caóticos (3). Como exemplo do primeiro tipo de aplicação podemos citar o trabalho de Wigner, o segundo tipo de aplicação recebe tradicionalmente o nome de caos quântico. Em ambos os casos, a hamiltoniana é substituída por uma matriz aleatória e calculam-se propriedades estatísticas médias. Existem inúmeras outras áreas da física e da matemática nas quais matrizes aleatórias se mostraram ferramentas importantes, como: teoria de números, enumeração de mapas, teoria de nós, geometria algébrica, gravitação quântica, econofísica, etc.

Brezin *et al* (1) foram os primeiros a notar a conexão entre enumeração de mapas e matrizes aleatórias. Paralelamente, mais tarde percebeu-se que os mapas funcionavam como uma discretização para as superfícies aleatórias em gravidade quântica 2D. Uma outra aplicação dos mapas foi na solução de Kazakov (4) do modelo de Ising em redes aleatórias planares. Buscou-se neste trabalho dar uma descrição de como se relacionam enumeração de mapas e integrais matriciais. O resultado principal é apresentado no final: as integrais matriciais podem ser expressas como uma soma sobre os mapas.

A RMT se preocupa em estudar as propriedades espectrais de matrizes aleatórias, ainda que as matrizes não tenham aplicação em física. Nessa perspectiva, buscou-se estudar o espectro de matrizes circulantes estocásticas. Matrizes circulantes são matrizes cujas linhas correspondem ao deslocamento circular da sua primeira linha. O deslocamento gera dois tipos de matrizes, as matrizes circulantes de Hankel e as matrizes circulantes de Toeplitz. Uma matriz estocástica é uma matriz cuja soma dos elementos ao longo das linhas ou das colunas é igual a 1. Elas descrevem as probabilidades de transição numa cadeia de Markov. As matrizes circulantes estocásticas de Hankel tem a propriedade de que a probabilidade de transição de um estado i para um estado j da cadeia de Markov é igual sempre que o resultado $(i + j) \bmod N$ for igual. Já as matrizes circulantes estocásticas de Toeplitz tem a propriedade de que a probabilidade de transição de i para j é igual sempre que $(j - i) \bmod N$ for igual. Matrizes circulantes tem aplicação em processamento de informação, por exemplo em análise de vibração (5) e comunicação wireless (6).

Teoria de Matrizes Aleatórias

Fermi observou no espalhamento de nêutrons leves por núcleos de média e alta massa picos de ressonâncias com tempo de vida médio longo (7, 8). Essa descoberta surpreendeu os físicos nucleares nos anos 30, levando Bohr a formular a ideia de um “núcleo composto” constituído por partículas fortemente interagentes (9). Cada uma das ressonâncias corresponde a um “estado composto” de longa vida do sistema formado pelo núcleo alvo e o nêutron. As descobertas de Fermi *et al* e a falta de conhecimento sobre a interação dos nucleons levaram a um rápido desenvolvimento da física nuclear na época e das teorias formais de reações de ressonância nuclear.

A pesquisa sobre o espectro dos núcleos pesados e a introdução do ensemble de Wishart de matrizes aleatórias (10) motivou Wigner a usá-las na sua pesquisa (11, 12). As ideias de Bohr do núcleo composto são a raiz do uso de matrizes aleatórias em física.

A teoria desenvolvida por Wigner para explicar os núcleos pesados usava uma abordagem estatística. De fato, o espectro de um núcleo é determinado pelo hamiltoniano do sistema, não havendo caminho para um tratamento estatístico. Não obstante, o uso de conceitos estatísticos se faz útil e talvez a única ferramenta para lidar com propriedades espectrais de sistemas complexos. A abordagem utilizada por Wigner se difere de uma forma fundamental dos conceitos estatísticos aplicados em física. Em mecânica estatística, considera-se um ensemble de sistemas físicos idênticos, ou seja, todos com o mesmo hamiltoniano, mas com diferentes condições iniciais, e calcula-se propriedades termodinâmicas tomando a média sobre o ensemble. Wigner procedeu considerando um ensemble de sistemas dinâmicos governados por diferentes hamiltonianos todos com a mesmas propriedades de simetria (13).

A teoria de Wigner teve grande contribuição de Dyson. Os fundamentos matemáticos da teoria de matrizes aleatórias foram estabelecidos por Dyson numa série de papers (14, 15, 16, 17, 18). Baseado nos trabalhos de Wigner em teoria de grupos (19), Dyson mostrou que existem três ensembles genéricos de matrizes aleatórias definidos em termos das propriedades de simetria do hamiltoniano:

1. Sistemas com invariância de reversão temporal com simetria rotacional: Para esses sistemas, a matriz hamiltoniana pode ser escolhida real e simétrica:

$$H_{mn} = H_{nm} = H_{mn}^* \quad (1.1)$$

2. Sistemas sem invariância de reversão temporal: A matriz hamiltoniana é hermitiana:

$$H = H^\dagger \quad (1.2)$$

3. Sistemas com invariância de reversão temporal com spin semi-inteiro sem simetria rotacional: As matrizes desse ensemble são escritas em termos dos quaternions q que são combinações lineares da matriz identidade $\mathbb{1}$ e das matrizes de Pauli σ_j ($j = x, y, z$) da forma:

$$q = H^{(0)}.\mathbb{1} + i \sum_j H^{(j)}\sigma_j \quad (1.3)$$

Ao decidir-se sobre uma boa escolha do modelo, a aplicação de matrizes aleatórias em física é limitada e guiada pelas considerações de simetria do problema. A noção de “classes de simetria” expressa a relevância das simetrias como um princípio organizacional. Os anos que se seguiram da introdução de matrizes aleatórias por Wigner viu um rápido desenvolvimento da teoria de flutuações espectrais.

O ensemble de Wishart consiste de matrizes H que podem ser escritas como $H = AA^T$, onde A tem as entradas reais com distribuição de probabilidade gaussiana e T denota o transposto, esse ensemble tem apenas autovalores positivos. Em adição ao ensemble de Wishart, Wigner considerou também um ensemble de matrizes reais e simétricas H com elementos que tem uma distribuição gaussiana centrada no zero. Ensembles gaussianos com a densidade de probabilidade proporcional a:

$$P(H) \propto \exp\left(-\frac{\beta N}{\lambda^2} \text{Tr } H^2\right) \quad (1.4)$$

tem desempenhado um papel dominante em aplicações físicas de matrizes aleatórias. O índice β é chamado índice de Dyson e conta o número de “graus de liberdade” dos elementos de entrada, isto é, o número de variáveis aleatórias necessárias para especificá-la, N é a ordem da matriz. Wigner considerou entradas reais, complexas ou real quaterniônicas que correspondem a $\beta = 1, 2$ ou 4 , respectivamente. Desde que a transformação $H \rightarrow UHU^{-1}$, com U ortogonal ($\beta = 1$), unitária ($\beta = 2$) ou simplética ($\beta = 4$) deixe $P(H)$ invariante, o ensemble é chamado gaussiano ortogonal (GOE), unitário (GUE) ou simplético (GSE), as suas propriedades de simetria são tais como Dyson classificou.

Os principais resultados via RMT até aproximadamente 1977 foram de aplicações em física nuclear. Em particular, a teoria estatística de flutuações da matriz-S recebeu

uma grande atenção. O primeiro trabalho nesta direção é devido à Wigner (20), que estudou simultaneamente a distribuição das larguras e os espaçamentos de ressonâncias nucleares, e também o trabalho de Porter e Thomas (21) que introduziram a distribuição de Porter-Thomas para larguras de decaimento nuclear. Correlações de seções de choque a duas diferentes energias ficaram conhecidas por flutuações de Ericson (22). O problema da distribuição de polos da matriz-S foi também motivação para Ginibre (23) introduzir o que é hoje conhecido como ensemble de Ginibre com autovalores uniformemente distribuídos em um disco no plano complexo.

Em torno da mesma época dos primeiros desenvolvimentos da RMT em física nuclear, a aplicação de RMT no campo de sistemas desordenados surgiu através dos trabalhos de Anderson (24) sobre a localização de funções de onda em sistemas desordenados unidimensionais. Anderson considerou uma rede unidimensional com um potencial aleatório em cada ponto da rede, descobrindo que as autofunções do sistema são exponencialmente localizadas. Seu trabalho teve grande impacto teórico e experimental na física do estado sólido. Outra aplicação é na teoria de pequenas partículas metálicas por Gorkov e Eliasberg (25), as quais hoje seriam parte da física mesoscópica. É surpreendente que a teoria de sistemas desordenados (1958) e a aplicação de RMT em física nuclear (1955) procederam quase independentemente até o trabalho de Efetov (1983) sobre o método supersimétrico (26) e sua aplicação na teoria de pequenas partículas metálicas (27) e na teoria de localização (28).

No período 1975-1985, a teoria de matrizes aleatórias se desenvolveu rapidamente e se tornou unificada com a teoria de sistemas desordenados. O método supersimétrico de Efetov (26), publicado em 1983, permitiu obter novos resultados para fios desordenados unidimensionais e resultados exatos foram obtidos para a teoria de flutuações da matriz-S. Um dos principais desenvolvimentos foi a descoberta das flutuações de condutância universal por Webb e Washburn em 1986 (29), depois de serem previstas por Altshuler (30) e Stone e Lee (31, 32). Essa descoberta iniciou um novo campo de pontos quânticos caóticos. As propriedades de transporte desses pontos quânticos podiam ser descritas pelo modelo- σ não linear supersimétrico que foi usado para a teoria de flutuações da matriz-S em núcleos compostos (33, 34, 35).

Na matemática, o estudo da RMT continuou independentemente do estudo em física. Resultados importantes com respeito à medida de integração de ensembles de matrizes aleatórias invariantes foram obtidos por Hua (36). Um resultado muito importante é devido a Harish Chandra (37), que avaliou integrais matriciais unitárias conhecidas por integral de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber. Posteriormente, Zinn Justin e Zuber (38) reviram este tópico. Outra contribuição de destaque é a introdução dos *zonal polynomials* por James (39). O livro de 1982 de Muirhead unifica integrais matriciais e *zonal polynomials* (40). Girko publicou livros (41) relacionados a propriedades analíticas da distribuição de autovalores

de matrizes aleatórias de alta dimensão e Voiculescu (42) usou matrizes aleatórias como um primeiro exemplo do conceito de variáveis aleatórias livres não-comutativas em álgebra de operadores.

Em 1973, Montgomery fez uma conjectura para o limite assintótico da função de correlação de dois pontos dos zeros da função ζ de Riemann sobre a reta crítica. Junto com Dyson, Montgomery percebeu que sua conjectura é a função de correlação de dois pontos do GUE (Ensemble Unitário Gaussiano). A conexão foi estendida para função de correlação de ordens mais altas dos zeros de Riemann por Hejhal (43) e Rudnick e Sarnak (44), embora a correspondência completa das funções de correlação com RMT ainda não tenha sido provada. Uma derivação heurística desses resultados usando a conjectura de Hardy-Littlewood para a correlação entre primos foi dada por Bogomolny e Keating em 1995 (45, 46). Resultados matematicamente rigorosos relacionando as funções de dois pontos para os zeros de funções zeta e autovalores de matrizes aleatórias de grupos clássicos são discutidos por Katz e Sarnak (47).

Desde então, a RMT ganhou bastante notoriedade e se espalhou para uma série de áreas, a princípio não afins. O livro *The Oxford Handbook of Random Matrix Theory* (2) traz nas suas mais de 800 páginas um conteúdo com aplicações de RMT em diversas áreas: teoria de números, geometria algébrica e modelos de matrizes, gravidade quântica 2D, teoria das cordas, cromodinâmica quântica, matéria condensada, aplicações em finanças, biofísica do RNA etc. A questão do porquê RMT funciona foi analisada de muitos pontos de vista diferentes (48). Segundo Forrester *et al* ((48)), foi percebido anteriormente que propriedades específicas de correlações de autovalores não dependem das características da distribuição de probabilidade. Uma razão importante para RMT funcionar já foi mencionada em um artigo de Dyson (14), afirmando que se um sistema é suficientemente complexo, o hamiltoniano do sistema não é mais importante. Entretanto, levou-se várias décadas até perceber que a razão chave é que o sistema clássico correspondente é caótico. Embora tenham havido alguns estudos anteriores relacionando correlações de RMT ao caos clássico, foi formulado explicitamente em um paper por Bohigas *et al* (49) quem, baseado em um estudo numérico do biliar de Sinai, conjecturou que as correlações de níveis na escala do espaçamento médio de níveis são dadas por RMT se o sistema clássico é caótico. Esta conjectura foi confirmada para vários sistemas. O contrário também foi mostrado numericamente como verdade: se o sistema não é completamente caótico, as correlações espectrais não são dadas por ensembles de Wigner-Dyson (50, 51). Estas inter-relações significam que RMT desempenha um papel essencial no estudo de caos quântico (13). Uma subárea do caos quântico na qual houve um grande volume de aplicações da teoria de matrizes aleatórias é o transporte, que tem aplicações em pontos quânticos, por exemplo. Os avanços realizados até 1997 foram revisados por Beenakker (33). Mas desde então outros caminhos e outras aplicações continuam sendo desenvolvidas nessa área, que continua bastante ativa. Inclusive é uma das áreas de atuação do Prof. Marcel, que desenvolveu

uma interface dessa teoria com análise combinatória e teoria de representação (52, 53, 54).

Integrais Matriciais e Enumeração de Mapas

2.1 Mapas

2.1.1 Grafos

Grafos são objetos matemáticos definidos por um conjunto de vértices ligados por arestas. Os grafos podem conter loops, neste caso os dois vértices das extremidades de uma aresta coincidem, e ainda admitem multiarestas, em que várias arestas contêm as mesmas extremidades. Um grafo é dito conexo, quando não for possível dividir seus vértices em subconjuntos tal que nenhuma aresta de um subconjunto incida em um vértice de um subconjunto diferente, em outras palavras se existir um caminho entre quaisquer dois pares de vértices. O grau de um vértice é o número de arestas que incidem nele, loops são contados duas vezes.

2.1.2 Mapas como grafos imersos

Mapas são definidos como grafos desenhados sobre superfícies. As superfícies consideradas neste capítulo serão compactas, conexas, orientáveis e sem borda, a escolha se justifica nos detalhes da imersão que vem a seguir e no fato de que tais superfícies podem ser caracterizadas por uma quantidade g chamada *genus* da superfície, que é sempre positiva ou igual a zero.

A maneira mais intuitiva de definir o genus é como sendo o número de “buracos” ou alças da superfície. A esfera tem genus $g = 0$ porque não tem nenhum buraco ou alça, o toro tem $g = 1$, o toro duplo tem $g = 2$ e assim por diante. A esfera com uma alça pode ser continuamente deformada no toro, portanto são topologicamente equivalentes e tem $g = 1$. Estes exemplos estão ilustrados na figura (1). A imersão do grafo na superfície é uma aplicação que associa cada vértice a um ponto da superfície e cada aresta a um arco simples aberto, de tal forma que a imagem da aplicação desses elementos do grafo

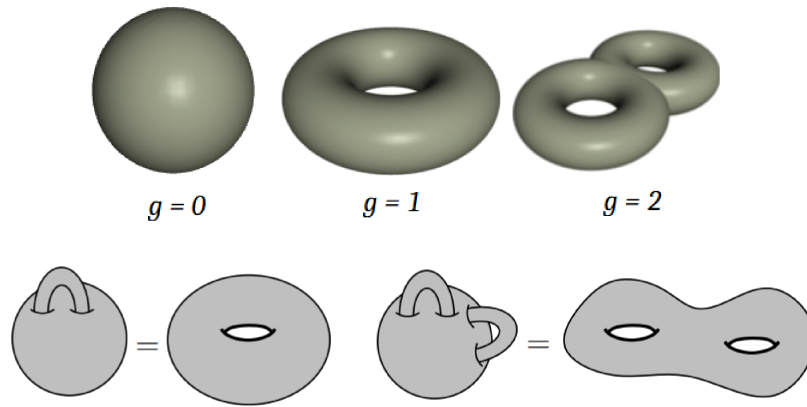


Figura 1 – Variedades de genus $g = 0, 1, 2$ e equivalências topológicas.

(arestas e vértices) são disjuntas, ou seja, não existe interseção das arestas nem dos vértices e as relações de incidência são preservadas. Um tipo especial de imersão é a chamada *imersão celular*, em que as componentes conexas do complementar do grafo imerso na superfície G/S são homeomorfas ao disco, logo simplesmente conexas. Essas componentes são chamadas de *faces* do mapa. De forma mais simples, podemos entender as faces da seguinte maneira: se ao recortarmos o mapa ao longo das arestas obtermos uma superfície sem buracos, então esta superfície é chamada face. O grau de uma face é o número de arestas que a delimitam. Uma única aresta divide duas faces, logo é contada duas vezes. A figura (2) mostra duas imersões do mesmo grafo no toro. Na figura (a), a imersão produz uma componente na superfície do toro que não é homeomorfa a um disco, não sendo uma imersão celular. Já na figura (b), a imersão é celular, já que todas as componentes do complementar são homeomorfas a um disco.

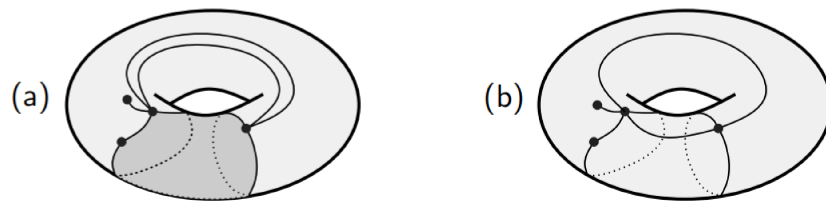


Figura 2 – Duas imersões do mesmo grafo no toro: a direita uma imersão celular.

Consideraremos que mapas são imersões celulares de grafos em superfícies. Dois mapas serão iguais quando se diferirem apenas por uma deformação contínua que preserve as relações de incidência e o genus da superfície.

Definição 2.1. *Seja G um grafo e S uma superfície compacta, conexa e sem borda. Então um mapa é uma imersão de G em S tal que $G/S \cong D^2$, isto é, as componentes do complementar do grafo imerso são homeomorfas ao disco.*

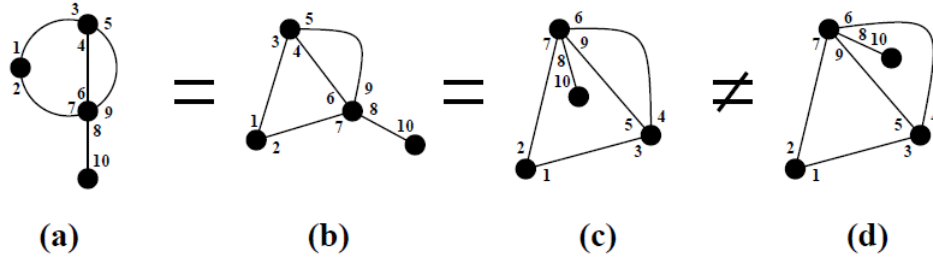


Figura 3 – Quatro imersões do mesmo grafo na esfera.

Um mapa de genus zero é chamado *mapa planar*. A figura (3) mostra algumas imersões celulares de um mesmo grafo na esfera. Do ponto de vista de grafos, todos eles são iguais, visto que possuem o mesmo número de vértices, arestas e relações de incidência; mas do ponto de vista de mapas apenas os três primeiros são iguais: (a), (b) e (c) possuem três faces de graus 3, 2 e 5; enquanto (d) possui duas faces de grau 3 e uma face de grau 4. Os mapas podem ser caracterizados por mais um parâmetro chamado *característica de Euler*, que relaciona o número de faces, vértices e arestas com o genus.

Teorema 2.1. *Um mapa de genus g tem característica de Euler χ :*

$$\chi = V - E + F = 2 - 2g \quad (2.1)$$

onde V , E e F são o número de vértices, arestas e faces do mapa, respectivamente.

A característica de Euler passa a depender apenas do genus. No caso em que é necessário considerar grafos não conexos, os mapas são construídos desenhando-se os grafos não em uma única superfície, mas em várias superfícies disjuntas, uma para cada componente do grafo. A vantagem é que a característica de Euler é aditiva, ou seja, a característica de Euler do mapa inteiro é a soma da característica dos seus componentes, enquanto o genus não é aditivo.

2.1.3 Permutações

A figura (3) permite ver como a diferença entre grafos e mapas é sutil. Um mapa carrega mais informação, que pode ser descrita da seguinte maneira. A imersão do grafo na superfície define uma ordem cíclica das arestas incidentes nos vértices. Vamos agora considerar as arestas como duas *semiaarestas* apontando em sentidos contrários como uma via de mão dupla, cada uma incidente a um único vértice, e identificá-las por inteiros consecutivos de 1 a $2m$ (onde m é o número de arestas) de uma maneira arbitrária. Dada uma semiaresta i , definimos $\alpha(i)$ como sendo a outra semiaresta da mesma aresta e definimos $\sigma(i)$ a próxima semiaresta encontrada depois de i quando girarmos no sentido anti-horário em torno do vértice incidente (2). Por exemplo, no mapa (a) da figura (3), a

aplicação de α na semiaresta 1 resulta na semiaresta de sentido contrário 3, a aplicação de α em 5 é igual a aresta 9 e assim por diante. Para o mesmo mapa, a aplicação de σ na semiaresta 6 resulta na semiaresta 7, que por sua vez resulta em 8, a aplicação em 1 resulta na semiaresta 2.

Os dois elementos α e σ que agem sobre os índices são nada mais do que permutações do conjunto de índices $\{1, \dots, 2m\}$ e apresentam as seguintes propriedades:

- (A). α é uma involução sem ponto fixo;
- (B). O subgrupo do grupo de permutação gerado por α e σ age transitivamente em $\{1, \dots, 2m\}$.

A propriedade (A) simplesmente significa que $\alpha(\alpha(i)) = i$, isto é, α é sua própria inversa e que $\alpha(i) \neq i$, $\forall i \in \{1, \dots, 2m\}$. A ação transitiva é aquela em que para todo par de índices i, j quaisquer do conjunto $\{1, \dots, 2m\}$, sempre existe uma permutação p do subgrupo composto pelos elementos de σ e α tal que $p(i) = j$. Esta propriedade (B) implica na conectividade do grafo. O subgrupo gerado por σ e α é chamado *grupo cartográfico*. Essas permutações caracterizam completamente o mapa e são suficientes para defini-lo.

2.1.3.1 Um pouco sobre permutações

A permutação mais simples consiste em trocar dois números de uma lista e esta ação é chamada *transposição*. É claro que uma permutação pode ser implementada por uma sequência de transposições. Por exemplo, a lista [123] pode ser transformada em [231] trocando o 1 com 2 e em seguida trocando o 1 com 3. A troca de 1 com 2 é representada por (12) e a troca de 1 com 3 é representada por (13). A composição das duas transposições é denotada como um produto (13)(12) e é escrita para ser lida da direita para esquerda. Note que permutações nem sempre comutam, isto é, $(13)(12) \neq (12)(13)$, pois a permutação (12)(13) leva [123] em [312]. As transposições comutam apenas quando não tiverem elementos comuns. Por exemplo, a lista [1234] pode ser transformada em [2143] pela permutação $(12)(34) = (34)(12)$.

Pode-se trocar vários elementos de uma só vez. Para isso, utilizamos a notação de vários números entre parênteses. Por exemplo, a lista [12345] pode ser transformada em [43251] através da permutação (145)(23). Lê-se o símbolo (145) como “o 1 vai no lugar do 4, que vai no lugar do 5, que vai no lugar do 1”. Esse símbolo é chamado de ciclo. Uma permutação está em notação de ciclos quando não há ciclos com elementos em comum. Por exemplo:

$$(12)(13) = (132), \quad (13)(12) = (123), \quad (12)(13)(12) = (1)(23).$$

Por convenção, o primeiro elemento de um ciclo é sempre o menor elemento e escrevemos os ciclos em ordem crescente do seu primeiro elemento. Além disso, muitas vezes suprimimos os números que não são alterados pela permutação, chamados de pontos fixos. Portanto, $(1)(23) \equiv (23)$. A permutação que consiste de n pontos fixos, $(1)(2)\dots(n)$, é a identidade, denotada 1_n . O conjunto de todas as permutações forma um grupo, denotado por S_n , pois: *i)* Contém a permutação identidade 1_n , *ii)* O produto de duas permutações é também uma permutação, *iii)* toda permutação p tem sua inversa p^{-1} tal que $pp^{-1} = p^{-1}p = 1_n$. É fácil ver que toda transposição é sua própria inversa. Para ciclos mais longos, a inversa é obtida invertendo a ordem dos números. Por exemplo:

$$(1324)^{-1} = (4231) = (1423)$$

A inversa de uma permutação geral é obtida invertendo cada ciclo independentemente. O número de elementos de um grupo G é denotado por $|G|$. O grupo de permutações S_n tem $|S_n| = n!$. Por exemplo, o grupo S_3 é composto pelas $3! = 6$ permutações:

$$1_3, (12), (13), (23), (123), (132)$$

As funções α e σ são permutações da lista $[1, \dots, 2m]$. De fato, vamos agora aplicar as funções α e σ nos mapas da figura (3). Como os mapas (a), (b) e (c) são equivalentes, todos eles terão as mesmas permutações α e σ . Ao aplicarmos α nas arestas, tem-se:

$$\begin{aligned}\alpha(1) &= 3, & \alpha(3) &= 1 \\ \alpha(5) &= 9, & \alpha(9) &= 5 \\ \alpha(2) &= 7, & \alpha(7) &= 2 \\ \alpha(4) &= 6, & \alpha(6) &= 4 \\ \alpha(8) &= 10, & \alpha(10) &= 8\end{aligned}$$

que resulta na permutação $\alpha = (13)(27)(46)(59)(8\ 10)$ e ao aplicarmos σ nos mapas (a), (b), (c), tem-se:

$$\begin{aligned}\sigma(1) &= 2, & \sigma(2) &= 1 \\ \sigma(3) &= 4, & \sigma(4) &= 5, & \sigma(5) &= 3 \\ \sigma(6) &= 7, & \sigma(7) &= 8, & \sigma(8) &= 9, & \sigma(9) &= 6 \\ \sigma(10) &= 10\end{aligned}$$

que resulta na permutação $\sigma = (12)(345)(6789)(10)$. O mapa (d) possui a mesma permutação α' que os mapas (a),(b) e (c) $\alpha' = \alpha$, mas a permutação sigma é dada por: $\sigma' = \sigma \circ (89)$, onde $\circ$ denota a composição, que é simplesmente o produto.

Assim as arestas estão relacionadas à aplicação α , cada ciclo de α está relacionado com uma aresta e, portanto, o número de ciclos de α corresponde ao número de arestas; os

vértices estão relacionados a σ , cada ciclo define as relações de incidência de um vértice, portanto o número de ciclos corresponde ao número de vértices, além disso o comprimento do ciclo corresponde ao grau dos vértices; e as faces estão relacionadas à composição $\sigma \circ \alpha$. De fato, o mapa pode ser definido especificando as arestas e as faces segundo o par $(\sigma \circ \alpha, \alpha)$, os vértices e as faces desempenham um papel simétrico.

Os mapas (a),(b) e (c) da figura (3) possuem 3 faces, de graus 3, 2 e 5. Ao fazer a composição $\sigma \circ \alpha = (12)(345)(6789)(10) \circ (13)(27)(46)(59)(8\ 10)$, tomemos como exemplo a semiaresta 1, faz-se as transposições da direita para esquerda: “ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ”, onde a seta denota a transposição. Essa sequência desenha um caminho fechado no sentido horário no mapa e define uma região componente de G/S que é homeomorfo ao disco, portanto define uma face de grau 3. Se começarmos da semiaresta 3, obteremos: “ $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 10 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 5 \rightarrow 3$ ”, que é um caminho fechado de sentido anti-horário homeomorfo ao disco, de grau 5. Assim, as faces “de dentro” tem sempre ordem cíclica no sentido horário e a face “de fora” tem sempre sentido anti-horário. O número de ciclos de $\sigma \circ \alpha$ corresponde ao número de faces e o comprimento dos ciclos corresponde ao grau das faces. De fato, como visto anteriormente, $\sigma \circ \alpha = (12)(345)(6789)(10) \circ (13)(27)(46)(59)(8\ 10) = (56)(147)(2\ 8\ 10\ 9\ 3)$ que representa 3 faces de graus 2,3 e 5. A característica de Euler pode ser reescrita em termos das permutações α e σ como:

$$\chi(\sigma, \alpha) = c(\sigma) - c(\alpha) + c(\sigma \circ \alpha) \quad (2.2)$$

onde $c(\cdot)$ denota o número de ciclos.

2.1.4 Mapas a partir de polígonos

Uma maneira alternativa de construir mapas é a partir de polígonos com um número par de arestas $2k$. As arestas do polígono serão orientadas no sentido horário e os vértices, que é o encontro da ponta de uma aresta com o início da próxima aresta, serão identificados por índices $i_1, i_2, \dots, i_{2k}$ no mesmo sentido. Cola-se os lados do polígono em pares, respeitando a regra de que a ponta das arestas deve ser colada com o início da aresta correspondente. Ao colar todas as $2k$ arestas, formando k pares, obtém-se um mapa.

Cada combinação de arestas gerará um mapa diferente, tentar adivinhar qual a forma do mapa gerado por uma determinada combinação pode ser bastante complicado. O número de maneiras possíveis de colar os lados do polígono é $(2k - 1)!!$. De fato, primeiro escolhemos 1 das arestas (restam $2k - 1$) que colamos com outra, e em seguida tomamos uma nova aresta (restam agora $2k - 3$) que também é colada, a próxima aresta será colada com uma das $2k - 5$ arestas restantes e assim por diante; o produto $(2k - 1)(2k - 3)(2k - 5)\dots 1 = (2k - 1)!!$. Portanto, o número total de mapas será $(2k - 1)!!$.

Para calcular a característica de Euler, devemos saber o número de vértices V , o número de arestas E e o número de faces F . Por construção, o número de faces é $F = 1$, que corresponde a única face do polígono. Como a colagem é feita em pares, então o número de arestas do mapa é $E = k$, pois o polígono original tem $2k$ lados. O único parâmetro desconhecido é V . Logo, temos:

$$\chi = V - E + F = V - k + 1 = 2 - 2g \quad (2.3)$$

$$V = k + 1 - 2g \quad (2.4)$$

Vejamos um exemplo particular de como determinar o genus (55). Consideremos um polígono de 8 lados ($k = 4$) com arestas de ordem cíclica no sentido horário e vértices enumerados de i_1 a i_8 no mesmo sentido. Das $(2k - 1)!!$ maneiras de colar as arestas, vamos proceder como indicado na figura (4): As setas devem ser coladas em direções

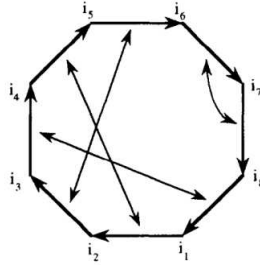


Figura 4 – Pares de arestas coladas de um octógono

opostas. O fato de que o lado i_1i_2 é colado com i_4i_5 significa que o vértice i_1 é identificado com i_5 e o vértice i_2 é identificado com i_4 , isto é:

$$i_1 = i_5 \quad i_2 = i_4$$

da mesma forma, realizando as outras colagens, teremos:

$$i_2 = i_6 \quad i_3 = i_5$$

$$i_3 = i_1 \quad i_4 = i_8$$

$$i_6 = i_8 \quad i_7 = i_7$$

Por fim, obtemos uma identificação entre os 8 índices do polígono através das igualdades:

$$i_1 = i_5 = i_3 = i_1$$

$$i_2 = i_4 = i_8 = i_6 = i_2$$

$$i_7 = i_7$$

e o mapa correspondente terá 3 vértices. Dizemos, portanto, que o número de índices livres é 3, ao especificar o valor dos índices i_1 , i_2 e i_7 , todos os outros estão determinados. Portanto, o genus do mapa correspondente será:

$$V = k + 1 - 2g = 3 \Rightarrow g = 1 \quad (2.5)$$

ou seja, o mapa será homeomorfo ao toro. Veremos a seguir que existe uma relação entre os mapas e integrais de matrizes hermitianas.

2.2 Integrais de Matrizes Hermitianas

Vamos considerar as matrizes aleatórias do GUE (Gaussian Unitary Ensemble)¹. As matrizes desse ensemble são matrizes hermitianas aleatórias H de ordem N com entradas H_{ij} complexas tal que $H_{ij} = H_{ji}^*$ em que $*$ denota o complexo conjugado. As variáveis $H_{ij} = x_{ij} + iy_{ij}$ tem distribuição de probabilidade gaussiana dada pela medida:

$$d\mu(H) = \frac{1}{Z_0} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr}(H^2) \right\} d\nu(H) \quad (2.6)$$

em que $d\nu(H) = \prod_{i=1}^N dx_{ii} \prod_{i < j} dx_{ij} dy_{ij}$ é a chamada medida de Lebesgue no espaço de matrizes hermitianas e Z_0 é um fator que garante a normalização. De fato,

$$\text{Tr}(H^2) = \sum_{i,j=1}^N H_{ij} H_{ji} = \sum_{i,j=1}^N H_{ij} H_{ij}^* = \sum_{i,j=1}^N |H_{ij}|^2 \quad (2.7)$$

como os elementos do triângulo superior ($i < j$) de H são o complexo conjugado dos elementos do triângulo inferior ($i > j$), portanto têm o mesmo módulo, a soma em (2.7) pode ser feita apenas para os termos da diagonal e do triângulo superior multiplicado por um fator 2:

$$\text{Tr}(H^2) = \sum_{i,j=1}^N |H_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^N x_{ii}^2 + 2 \sum_{i < j} (x_{ij}^2 + y_{ij}^2) \quad (2.8)$$

portanto, $d\mu(H)$ é uma distribuição gaussiana nas variáveis x_{ij} e y_{ij} . Vamos adotar a notação $\langle f(H) \rangle$ como sendo a média de $f(H)$ com respeito à medida (2.6):

$$\langle f(H) \rangle = \int f(H) d\mu(H) \quad (2.9)$$

Estamos interessados em calcular valores médios do produto de elementos de matrizes, por exemplo $\langle \text{Tr}(H^{2k}) \rangle$.

Uma das maneiras de fazer o cálculo é através do método da integral fonte (56), consideramos a integral:

$$\langle e^{\text{Tr}(SH)} \rangle = \frac{1}{Z_0} \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr}(H^2 - 2SH) \right\} d\nu(H) = e^{\frac{\text{Tr}(S^2)}{2}} \quad (2.10)$$

e tomamos as derivadas com respeito aos elementos de matriz S calculadas em $S = 0$:

$$\langle H_{ij} H_{kl} \dots \rangle = \frac{\partial}{\partial S_{lk}} \frac{\partial}{\partial S_{ji}} \dots e^{\frac{\text{Tr}(S^2)}{2}}, \quad S = 0 \quad (2.11)$$

¹ A unitariedade está no fato de que as matrizes do GUE são invariantes por transformação unitária.

os índices são invertidos nas derivadas pelo fato de que $\text{Tr}(S^2) = \sum_{i,j=1}^N S_{ij}S_{ji}$, as derivadas agem na exponencial e adicionam um pré-fator S_{ij} que multiplica a exponencial. No caso da média do produto de dois elementos de matriz:

$$\langle H_{ij}H_{kl} \rangle = \frac{\partial}{\partial S_{lk}} \frac{\partial}{\partial S_{ji}} e^{\frac{\text{Tr}(S^2)}{2}} = \frac{\partial}{\partial S_{lk}} \frac{\partial}{\partial S_{ji}} e^{\sum_{i,j=1}^N S_{ij}S_{ji}/2} = \frac{\partial}{\partial S_{lk}} S_{ij} e^{\sum_{i,j=1}^N S_{ij}S_{ji}/2} \quad (2.12)$$

a derivada com respeito a S_{lk} age tanto no termo S_{ij} quanto na exponencial:

$$\langle H_{ij}H_{kl} \rangle = \frac{\partial}{\partial S_{lk}} (S_{ij} e^{\sum_{i,j=1}^N S_{ij}S_{ji}}) = \left(\frac{\partial}{\partial S_{lk}} S_{ij} \right) e^{\sum_{i,j=1}^N S_{ij}S_{ji}} + S_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial S_{lk}} e^{\sum_{i,j=1}^N S_{ij}S_{ji}} \right) \quad (2.13)$$

o primeiro termo da soma não é nulo apenas se $i = l$ e $j = k$ e o segundo termo da soma se anula porque a derivada é calculada em $S = 0$, logo resulta:

$$\langle H_{ij}H_{kl} \rangle = \delta_{kj}\delta_{li} \quad (2.14)$$

uma outra maneira de calcular médias como a (2.11) é através do Teorema de Wick.

Teorema 2.2. (Teorema de Wick) *A média do produto de um número par de elementos de matriz é uma soma, sobre todas as combinações em pares de elementos de matriz, do produto dos pares de covariância.*

Como um exemplo de aplicação, calculemos a média:

$$\langle \text{Tr}(H^4) \rangle = \left\langle \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^N H_{i_1 i_2} H_{i_2 i_3} H_{i_3 i_4} H_{i_4 i_1} \right\rangle = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^N \langle H_{i_1 i_2} H_{i_2 i_3} H_{i_3 i_4} H_{i_4 i_1} \rangle \quad (2.15)$$

o termo $\langle H_{i_1 i_2} H_{i_2 i_3} H_{i_3 i_4} H_{i_4 i_1} \rangle$ tem a seguinte interpretação diagramática: desenha-se um grafo com uma aresta dupla (duas semiarestas com sentidos contrários) para cada elemento de matriz, identificadas com os índices correspondentes ao elemento de matriz, conforme a figura (5). A aplicação do Teorema de Wick em $\langle H_{i_1 i_2} H_{i_2 i_3} H_{i_3 i_4} H_{i_4 i_1} \rangle$ resulta na soma

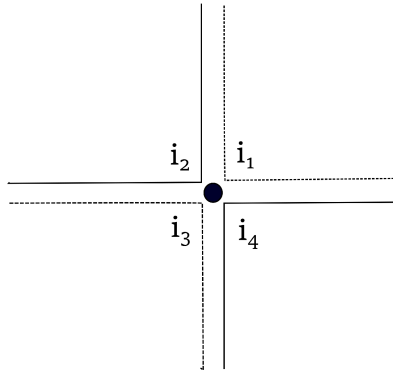


Figura 5 – Representação diagramática do $\text{Tr}(H^4)$

sobre todas as combinações dos produtos de pareamentos dos elementos de matriz:

$$\langle \text{Tr}(H^4) \rangle = \langle H_{i_1 i_2} H_{i_2 i_3} \rangle \langle H_{i_3 i_4} H_{i_4 i_1} \rangle + \langle H_{i_1 i_2} H_{i_3 i_4} \rangle \langle H_{i_2 i_3} H_{i_4 i_1} \rangle + \langle H_{i_1 i_2} H_{i_4 i_1} \rangle \langle H_{i_2 i_3} H_{i_3 i_4} \rangle \quad (2.16)$$

cada valor médio do produto de dois elementos é chamado covariância, cujo resultado é dado pela equação (2.14), a delta de Kronecker significa no diagrama ligar os pares de semiarestas do grafo identificadas pelos índices da delta. Por exemplo, o acoplamento $\langle H_{i_1 i_2} H_{i_2 i_3} \rangle \langle H_{i_3 i_4} H_{i_4 i_1} \rangle$ diz que devemos ligar a aresta i_2 com seu par i_2 e a aresta i_1 com i_3 ; ligamos também a aresta i_4 com sua par i_4 e a aresta i_3 com i_1 restantes. Aplicando a equação (2.14) em cada covariância, teremos:

$$\langle \text{Tr}(H^4) \rangle = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^N \delta_{i_2 i_2} \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_4 i_4} \delta_{i_4 i_4} \delta_{i_3 i_1} + \delta_{i_2 i_3} \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_3 i_4} \delta_{i_2 i_1} + \delta_{i_2 i_4} \delta_{i_1 i_1} \delta_{i_3 i_3} \delta_{i_2 i_4} \quad (2.17)$$

$$\langle \text{Tr}(H^4) \rangle = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^N \delta_{i_1 i_3} + \delta_{i_2 i_3} \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_3 i_4} \delta_{i_2 i_1} + \delta_{i_2 i_4} \quad (2.18)$$

no primeiro termo apenas os índices i_1 e i_3 devem ser iguais, isso significa que é necessário especificar apenas i_1, i_2 e i_4 , então dizemos que o número de índices livres é 3; no segundo termo todos os índices devem ser iguais, portanto ao especificar o valor de um deles, todos os outros estão determinados, logo o número de índices livres é 1; no terceiro termo i_2 e i_4 são iguais e o número de índices livres é 3. Ao realizar a soma em (2.18), resulta:

$$\langle \text{Tr}(H^4) \rangle = N^3 + N + N^3 = N + 2N^3 \quad (2.19)$$

de forma geral, dizemos que a contribuição de um produto de covariâncias é N^V , onde V é o número de índices livres. O número de termos somados ao aplicar-se o teorema de Wick é $(2k - 1)!!$ e a análise é idêntica ao número de maneiras de colar os lados de polígono de $2k$ arestas. Os três mapas correspondentes aos três acoplamentos em (2.16) estão representados na figura (6).

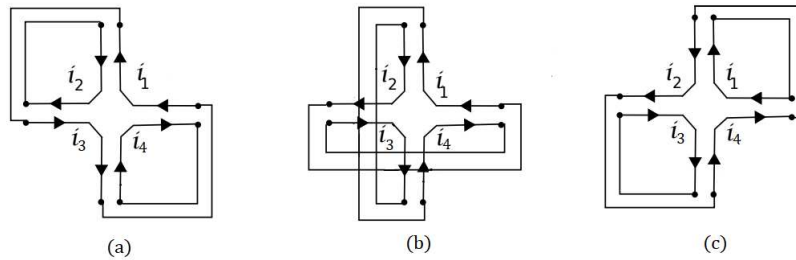


Figura 6 – Mapas correspondentes aos três acoplamentos de Wick do $\text{Tr}(H^4)$

A razão por trás do teorema de Wick expressar a média do produto de elementos de matriz como uma soma dos produtos do valor médio de todas as combinações em pares dos elementos é que os elementos de matriz H_{ij} são números complexos. Se o produto entre os elementos de matriz resultar em um número complexo, o valor médio será zero. A única maneira de não resultar zero é se o produto dos elementos de matriz for um número positivo, essa condição se cumpre se os elementos consistirem de pares conjugados. Por exemplo, para o valor médio $\langle z_1 z_2 z_3 z_4 \rangle$, onde z_i são números complexos, os únicos

resultados não nulos serão quando $z_2 = z_1^*$ e $z_4 = z_3^*$ ou $z_3 = z_1^*$ e $z_4 = z_2^*$ ou $z_4 = z_1^*$ e $z_3 = z_2^*$.

Para o exemplo acima $\langle \text{Tr}(H^4) \rangle$, os mapas (a) e (c) da figura (6) têm 3 faces. Por construção, o número de vértices $V = 1$ e o número de arestas é $E = 2$, assim o genus é:

$$\chi = V - E + F = 2 - 2g = 1 - 2 + 3 \Rightarrow g = 0 \quad (2.20)$$

O mapa (b) contém apenas 1 face e o seu genus é:

$$\chi = V - E + F = 2 - 2g = 1 - 2 + 1 \Rightarrow g = 1 \quad (2.21)$$

Note que o número de faces do mapa é igual ao número de índices livres, no exemplo acima há 2 mapas de 3 índices livres e 3 faces e 1 mapa com 1 único índice livre e 1 face, e o coeficiente que multiplica o termo N^F , onde F é o número de faces, é justamente o número de mapas de F faces. Os mapas do problema geral $\langle \text{Tr}(H^{2k}) \rangle$ podem ser vistos na representação dual como todas as possíveis colagens dos lados de um polígono de $2k$ lados. Ao aplicarmos o Teorema de Wick à média, as covariâncias serão dadas pela expressão (2.14). Como discutido na seção (2.1.4), o número de índices livres resultante das colagens das arestas do polígono corresponde ao número de vértices do mapa gerado e é análogo aos índices livres resultantes das ligações das semiarestas de um grafo estrela, neste último caso o número de índices livres corresponde ao número de faces dos mapas. Isso mostra que os vértices e as faces, de fato, desempenham um papel simétrico.

De forma geral, queremos enumerar os mapas pelo genus. Seja $\epsilon_g(k)$ o número de mapas de genus g gerados a partir da colagem dos $2k$ lados de um polígono ou dos pareamentos das $2k$ semiarestas de um grafo, então a soma sobre todos os gêneros deve ser igual ao número de mapas:

$$\sum_{g=0}^{g_{max}} \epsilon_g(k) = (2k - 1)!! \quad (2.22)$$

Na representação de mapas usando grafos, o valor máximo de g é obtido facilmente observando que o mapa terá k arestas, apenas 1 vértice por construção e F é um parâmetro livre.

$$\chi = V - E + F = 1 - k + F = 2 - 2g \quad (2.23)$$

o valor máximo de g corresponde ao valor mínimo de F . Como os mapas devem ter pelo menos 1 face, então o valor máximo de g :

$$1 - k + F = 2 - 2g \Rightarrow g = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \quad (2.24)$$

onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a parte inteira, uma vez que g é sempre um número inteiro. Na representação dual, $F = 1$ e V é o parâmetro livre, a análise decorre idêntica. O problema de encontrar os valores $\epsilon_g(k)$ foi inicialmente resolvido para alguns valores de genus g por Walsh e Lehman (57) em 1972 e posteriormente foi completamente resolvido por Harer e Zagier (58) em

1986. Podemos escrever uma função geratriz para o resultado de $\langle \text{Tr}(H^{2k}) \rangle$ a partir da solução em (2.19) notando que o resultado da média é igual à soma das contribuições N^F (na representação dual N^V) dos acoplamentos de Wick multiplicados pelo respectivo número de mapas de gênero g :

$$f(k, N) = \langle \text{Tr}(H^{2k}) \rangle = \sum_{g=0}^{[k/2]} \epsilon_g(k) N^{k+1-2g} = N^{k+1} \sum_{g=0}^{[k/2]} \epsilon_g(k) \left(\frac{1}{N^2} \right)^g \quad (2.25)$$

Para o exemplo $\langle \text{Tr}(H^4) \rangle$ em que $k = 2$, a função geratriz (2.25) dá o mesmo resultado em (2.19):

$$f(2, N) = \langle \text{Tr}(H^4) \rangle = N^3 \left[\epsilon_0(2) \left(\frac{1}{N^2} \right)^0 + \epsilon_1(2) \left(\frac{1}{N^2} \right)^1 \right] \quad (2.26)$$

onde $\epsilon_0(2)$ é o número de mapas de genus $g = 0$ e $k = 2$ arestas e $\epsilon_1(2)$ o número de mapas de genus $g = 1$ e $k = 2$ arestas. Esses mapas estão desenhados na figura (6), logo:

$$f(2, N) = \langle \text{Tr}(H^4) \rangle = N^3 \left[2 + 1 \left(\frac{1}{N^2} \right) \right] = N + 2N^3 \quad (2.27)$$

A integral em (2.25) foi calculada em (58):

$$f(k, N) = (2k-1)!! \sum_{m \geq 1} \binom{N}{m} \binom{k}{m-1} 2^{m-1} \quad (2.28)$$

Além disso, foi derivada em (58) uma relação de recorrência dos números $\epsilon_g(k)$:

$$\epsilon_g(k) = \frac{4k-2}{k+1} \epsilon_g(k-1) + \frac{(k-1)(2k-1)(2k-3)}{k+1} \epsilon_{g-1}(k-2) \quad (2.29)$$

com a condição de contorno:

$$\epsilon_g(0) = \begin{cases} 1, & \text{se } g = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.30)$$

Espectro de Matrizes Circulantes

3.1 Matrizes Circulantes

As matrizes circulantes são matrizes cujas linhas são o resultado do deslocamento circular da sua primeira linha. Como um exemplo simples, consideramos uma matriz H de ordem $N = 4$ cuja primeira linha é formada pelos elementos $\{c_0, c_1, c_2, c_3\}$. A segunda linha é o resultado do deslocamento circular da sua primeira linha, se considerarmos o deslocamento para a esquerda então cada elemento se desloca de uma posição para a esquerda na segunda linha. O espaço vazio na posição H_{24} é completado pelo elemento H_{11} que foi transladado para fora da matriz:

$$H = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

a terceira linha é obtida pelo deslocamento circular da segunda linha, que por sua vez é o deslocamento circular da primeira, ou seja, a terceira linha é o deslocamento duplo da primeira linha em que cada elemento se transladou duas posições para a esquerda, sempre preenchendo a posição desocupada circularmente. Cada elemento se translada de uma posição para a esquerda na matriz e a posição H_{34} é ocupada pelo elemento H_{21} :

$$H = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

finalmente, a quarta linha é formada pelo deslocamento da terceira linha, que por sua vez é o deslocamento da segunda, ou seja, a quarta linha é formada pelo deslocamento triplo da primeira linha que consiste em transladar os elementos três posições para a esquerda, a

cada vez que se realiza um deslocamento, faz-se o preenchimento circular do espaço vazio.

$$H = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

A matriz H obtida a partir do vetor $\{c_0, c_1, c_2, c_3\}$ possui os elementos das diagonais ascendentes iguais. A característica comum entre os elementos H_{ij} de uma mesma diagonal é que todos eles tem a mesma soma $(i + j)$, de sorte que os elementos H_{ij} de uma matriz circulante com deslocamento para a esquerda serão iguais quando o resultado da operação $(i + j) \bmod N$ for igual, onde $\bmod$ é o resto inteiro da divisão. As matrizes cujos elementos das diagonais ascendentes são iguais são chamadas *matrizes de Hankel*. Assim, a matriz (3.1) é chamada matriz circulante de Hankel. Como nem toda matriz de Hankel é uma matriz circulante, as matrizes circulantes de Hankel são um subconjunto das matrizes de Hankel.

Alternativamente, podemos fazer o deslocamento dos elementos $\{c_0, c_1, c_2, c_3\}$ para a direita. Cada elemento da primeira linha se translada uma posição para a direita e o elemento T_{14} ocupa a posição vazia T_{21} , produzindo a segunda linha:

$$T = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

a terceira linha obtida pelo deslocamento para a direita da segunda linha ou ainda o deslocamento duplo da primeira linha, o elemento T_{24} ocupa a posição T_{31} :

$$T = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

e, por fim, a quarta linha é resultado do deslocamento para a direita da terceira linha ou ainda o deslocamento triplo da primeira linha:

$$T = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

A matriz T contém os elementos das diagonais descendentes iguais. Os elementos de uma mesma diagonal descendente tem o mesmo resultado de $(j - i)$, mas agora os

elementos da matriz T_{ij} serão iguais sempre que o resultado de $(j - i) \bmod N$ for igual. As matrizes cujos elementos das diagonais descendentes são iguais são chamadas *matrizes de Toeplitz*. A matriz (3.2) é chamada matriz circulante de Toeplitz e, novamente, essas matrizes formam um subconjunto das matrizes de Toeplitz.

As matrizes circulantes de Hankel são simétricas, ou seja, $H = H^T$, em que ^{T} é o transposto, pelo fato de que a troca de i por j não altera a operação $(i + j) \bmod N$. Essa simetria implica que os seus autovalores $\{\lambda_i\}$ são variáveis reais. No caso das matrizes de Toeplitz, a troca de i por j altera o resultado da operação $(j - i) \bmod N$, portanto as matrizes circulantes de Toeplitz não são simétricas, isso implica que os seus autovalores são complexos.

3.2 Cadeias de Markov

Muitos processos naturais do dia a dia são aleatórios, exemplos disso são as flutuações do mercado financeiro e da taxa de câmbio e o movimento browniano das partículas de um gás. Todos esses processos são chamados processos estocásticos. Um processo estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias representando a evolução de um sistema no tempo. Em geral, uma cadeia de Markov é representada por um grafo orientado, em que cada vértice é um estado do sistema e a transição entre os estados tem uma probabilidade associada. A probabilidade de transição do estado atual i para o estado futuro j independe dos estados anteriores, mas unicamente do estado atual, esta propriedade é chamada *propriedade markoviana* e define uma cadeia de Markov. O conjunto desses estados do sistema é chamado *espaço de estados*. As probabilidades de transição podem ser organizadas segundo uma matriz de transição M . A transição do estado i para o estado j é representado pelo elemento M_{ij} da matriz. Em termos matemáticos, a estocasticidade impõe que a soma dos elementos ao longo das linhas seja:

$$\sum_{j=1}^N M_{ij} = 1, \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.3)$$

em vez das linhas, esta propriedade pode também ser imposta às colunas. Vamos considerar que as matrizes circulantes representam a transição em uma cadeia de Markov e apresentam a propriedade (3.3). Em uma cadeia de Markov cuja matriz de transição é circulante de Hankel, as probabilidades de transição de i para j serão iguais sempre que o resultado de $(i + j) \bmod N$ for o mesmo, já se a matriz de transição for circulante de Toeplitz, as probabilidades serão iguais sempre que $(j - i) \bmod N$ for igual.

No contexto de matrizes estocásticas há o seguinte importante teorema.

Teorema 3.1. (Teorema de Perron-Frobenius) - *Toda matriz estocástica de ordem N tem como maior autovalor único $|\lambda_p| = 1$ cujo autovetor é $v_p = (1, 1, \dots, 1)$ N -dimensional*

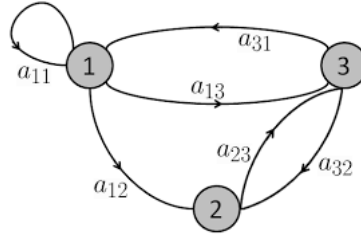


Figura 7 – Probabilidades de transição entre os $N = 3$ estados de uma cadeia de Markov.

e todos os outros valores $|\lambda_i| < |\lambda_p|$.

3.3 Espectro de autovalores

Estamos interessados em estudar o espectro de autovalores das matrizes circulares estocásticas. Para isso, sorteamos um ensemble delas com entradas aleatórias e estudamos suas propriedades estatísticas. Os elementos da primeira linha c_i são sorteados independentemente e dividimos cada um deles pela sua soma, de forma a impor a estocasticidade.

3.3.1 Matrizes Circulantes de Hankel

Para $N = 2$, a matriz circulante de Hankel tem a forma:

$$H = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

a estocasticidade impõe que $c_0 + c_1 = 1 \rightarrow c_1 = 1 - c_0$:

$$H = \begin{pmatrix} c_0 & 1 - c_0 \\ 1 - c_0 & c_0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

A distribuição de probabilidade dos autovalores λ_i dependem agora apenas da variável aleatória c_0 . A distribuição de probabilidade dos autovalores $P(\lambda)$ pode ser obtida notando que a probabilidade de encontrar um autovalor entre λ e $\lambda + d\lambda$ deve ser igual à probabilidade de sortear c_0 entre c_0 e $c_0 + dc_0$:

$$P(\lambda)d\lambda = P(c_0)dc_0$$

$$P(\lambda) = P(c_0) \frac{dc_0}{d\lambda} = \frac{P(c_0)}{|d\lambda/dc_0|}$$

o termo $|d\lambda/dc_0|$ funciona como uma espécie de jacobiano que descreve como a probabilidade de sortear a variável c_0 reflete na probabilidade de sortear autovalor. A variável aleatória

c_0 tem distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$, logo $P(c_0) = 1$. O polinômio característico é obtido calculando-se $\det(H - \lambda I)$

$$(c_0 - \lambda)^2 - (1 - c_0)^2 = 0 \quad (3.6)$$

$$c_0 - \lambda = \pm(1 - c_0)$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2c_0 - 1$, λ_1 é o autovalor de Perron-Frobenius. Assim:

$$\frac{d}{dc_0}(2c_0 - 1) = 2 \quad \Rightarrow \quad P(\lambda) = \frac{1}{2} \quad (3.7)$$

Esse resultado pode ser testado sorteando-se muitas matrizes aleatórias de ordem $N = 2$ e plotando o histograma dos autovalores, o resultado é mostrado na figura (8).

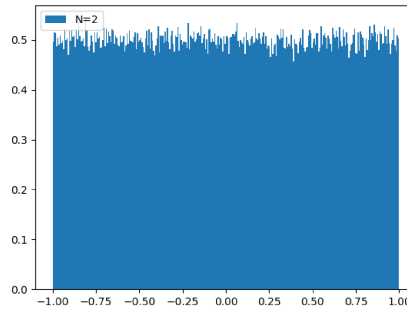


Figura 8 – Distribuição de probabilidade dos autovalores de matrizes circulantes estocásticas de Hankel de ordem $N = 2$.

Para $N = 3$, a matriz circulante será:

$$H = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_0 \\ c_2 & c_0 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & 1 - c_0 - c_1 \\ c_1 & 1 - c_0 - c_1 & c_0 \\ 1 - c_0 - c_1 & c_0 & c_1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Note que $\text{Tr}(H) = c_0 + 1 - c_0 - c_1 + c_1 = 1$. Além disso, o traço de H é igual à soma dos seus autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, pelo teorema de Perron-Frobenius, $\lambda_1 = 1$, logo:

$$\text{Tr}(H) = 1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda_2 = -\lambda_3 \quad (3.9)$$

e H pode ser expressa na forma diagonal como:

$$H' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Como o determinante H é o produto dos autovalores, $\det(H) = -\lambda^2$ e assim

$$\lambda = \pm\sqrt{\det(H)} = \pm\sqrt{3c_0^2 + 3c_1^2 + 3c_0c_1 - 3c_0 - 3c_1 + 1} \quad (3.10)$$

A densidade de probabilidade dos autovalores pode ser calculada integrando-se, sobre todo o intervalo em que as variáveis c_0 e c_1 se distribuem, o produto das distribuições de cada variável aleatória, já que são independentes, selecionando-se os autovalores que são dados pela expressão (3.10) através de uma função delta de Dirac:

$$P(z) = \int_0^1 dc_0 \int_0^{1-c_0} \delta(\lambda \mp \sqrt{3c_0^2 + 3c_1^2 + 3c_0c_1 - 3c_0 - 3c_1 + 1}) dc_1 \quad (3.11)$$

a variável c_0 tem distribuição uniforme $P(c_0) = 1$ no intervalo $[0, 1]$ e c_1 tem distribuição uniforme $P(c_1) = 1$ no intervalo $[0, 1 - c_0]$. Podemos fazer a substituição de variável:

$$\eta = \lambda - \sqrt{3c_0^2 + 3c_1^2 + 3c_0c_1 - 3c_0 - 3c_1 + 1} \quad \lambda > 0 \quad (3.12)$$

Ao fazer isso, é necessário multiplicar a nova integral na variável η pelo módulo do jacobiano. Resolvendo a equação (3.12) para c_1 :

$$\sqrt{3c_0^2 + 3c_1^2 + 3c_0c_1 - 3c_0 - 3c_1 + 1} = \lambda - \eta \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} - \frac{c_0}{2} \pm \frac{1}{6} \sqrt{-27c_0^2 + 18c_0 - 3 + 12(\lambda - \eta)^2} \quad (3.14)$$

o diferencial dc_1 será:

$$dc_1 = \mp \frac{2(\lambda - \eta)}{\sqrt{-27c_0^2 + 18c_0 - 3 + 12(\lambda - \eta)^2}} d\eta \quad (3.15)$$

Reescrevendo a integral (3.11):

$$P(\lambda) = \int_0^1 dc_0 \int_{\eta_0=f_0(\lambda, c_0)}^{\eta_1=f_1(\lambda, c_0)} \frac{2(\lambda - \eta)}{\sqrt{-27c_0^2 + 18c_0 - 3 + 12(\lambda - \eta)^2}} \delta(\eta) d\eta \quad (3.16)$$

Os novos intervalos de integração da variável η agora são funções de λ e c_0 . A princípio a equação (3.16) parece fácil, já que integrais envolvendo a função delta são simples, contudo para que a integração seja simples, é necessário: (i) garantir que $\eta = 0$ esteja no intervalo (η_0, η_1) e (ii) que a raiz no denominador seja real (módulo do jacobiano). Para garantir a primeira, é necessário impor condições limitando c_0 por uma função de z .

Para encontrar $f_0(\lambda, c_0)$ e $f_1(\lambda, c_0)$, basta substituir os antigos intervalos de integração na variável c_1 da equação (3.14). Para o intervalo superior:

$$c_1 = 1 - c_0 = \frac{1}{2} - \frac{c_0}{2} \pm \frac{1}{6} \sqrt{-27c_0^2 + 18c_0 - 3 + 12(\lambda - \eta)^2} \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow \eta_1 = \lambda \pm \sqrt{3c_0^2 - 3c_0 + 1} \quad (3.18)$$

substituindo o intervalo de integração inferior:

$$\eta_0 = \lambda \pm \sqrt{3c_0^2 - 3c_0 + 1} \quad (3.19)$$

Combinando as condições (i) e (ii), chega-se a conclusão de que três integrais devem ser efetuadas para cada um dos valores possíveis de c_1 : a primeira será para $0 \leq \lambda \leq 1/2$ e as outras duas para $1/2 \leq \lambda \leq 1$. Por fim, a distribuição de probabilidade $P(\lambda)$ é dada por:

$$P(\lambda) = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}\lambda, \quad 0 \leq \lambda \leq 1/2. \quad (3.20)$$

$$P(\lambda) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\lambda \left[\arcsin\left(\frac{1}{2\lambda}\right) - \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{12\lambda^2 - 3}}{4\lambda}\right) \right] + \quad (3.21)$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{9}\lambda \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1 + \sqrt{12\lambda^2 - 3}}{4\lambda}\right) \right], \quad 1/2 \leq \lambda \leq 1.$$

Repetindo-se a análise para o sinal positivo em (3.12), obtemos a distribuição $P(\lambda)$ do intervalo $[-1, 0]$:

$$P(\lambda) = -\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}\lambda \quad -1/2 \leq \lambda \leq 0. \quad (3.22)$$

$$P(\lambda) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\lambda \left[\arcsin\left(\frac{1}{2\lambda}\right) - \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{12\lambda^2 - 3}}{4\lambda}\right) \right] - \quad (3.23)$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{9}\lambda \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1 + \sqrt{12\lambda^2 - 3}}{4\lambda}\right) \right], \quad -1 \leq \lambda \leq -1/2.$$

O gráfico de $P(\lambda)$ é mostrado na figura (9). O mesmo resultado é obtido a partir do histograma dos autovalores de matrizes circulantes de Hankel de ordem $N = 3$.

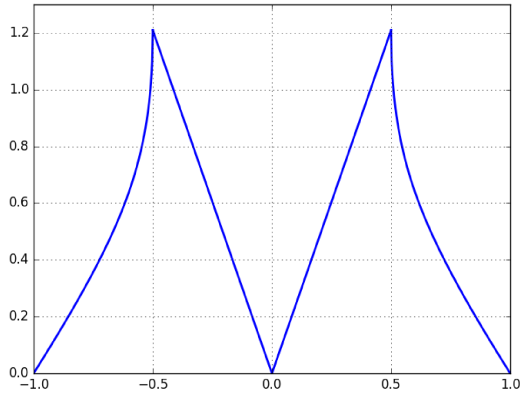


Figura 9 – Distribuição de probabilidade das matrizes circulantes de Hankel de ordem $N = 3$.

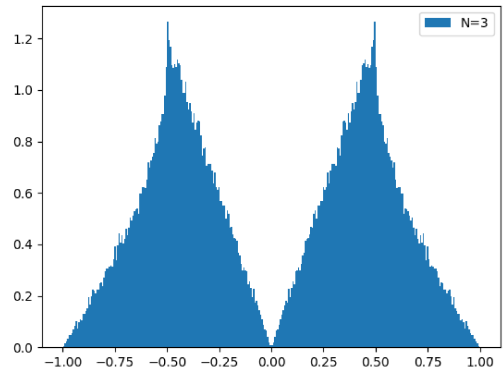


Figura 10 – Histograma dos autovalores de matrizes circulantes de Hankel de ordem $N = 3$.

Para ordens mais altas, o cálculo analítico da distribuição dos autovalores se torna bastante difícil. À medida que N cresce, observamos numericamente que a distribuição dos autovalores tende à distribuição de Rayleigh (59), dada por:

$$P(\lambda) = N\lambda e^{-N\lambda^2} \quad (3.24)$$

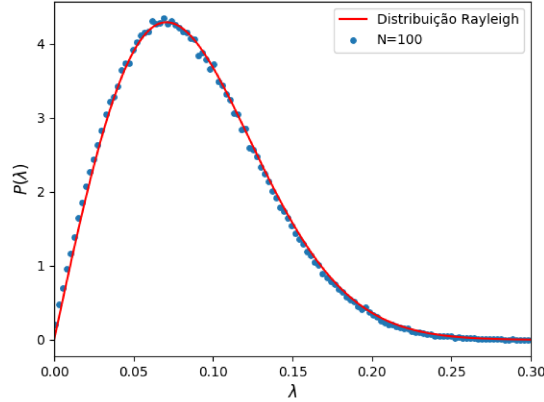


Figura 11 – Espectro de matrizes circulantes de Hankel para $N = 100$

como é possível observar fazendo o histograma dos autovalores para $N = 100$.

Queremos saber a distribuição do maior autovalor. Toda matriz estocástica possui como maior autovalor $\lambda_p = 1$ o autovalor de Perron-Frobenius. Por essa razão, estudamos a distribuição do segundo maior autovalor λ_2 . Pela universalidade das matrizes gaussianas em RMT, é esperado que para um espectro $\{\lambda_i\} \in \mathbb{R}$ a distribuição de probabilidade seja a Distribuição de Tracy-Widom (60). A distribuição de Tracy-Widom possui diferentes formulações, sendo uma delas:

$$F_2(s) = \exp \left(- \int_s^\infty (x - s) q^2(x) dx \right) \quad (3.25)$$

$$F_1(s) = \exp \left(- \frac{1}{2} \int_s^\infty q(x) dx \right) (F_2(s))^{1/2} \quad (3.26)$$

onde $q(s)$ é a solução da equação diferencial de Painlevé II $q''(s) = sq(s) + 2q^3(s)$. F_2 é a distribuição de Tracy-Widom para as matrizes hermitianas (GUE) e F_1 para as matrizes simétricas (GOE), ou seja, F_1 também é a distribuição das matrizes circulantes de Hankel. Ao fazer o histograma de λ_2 para as matrizes circulantes de Hankel, obtemos a mesma distribuição, figura (12).

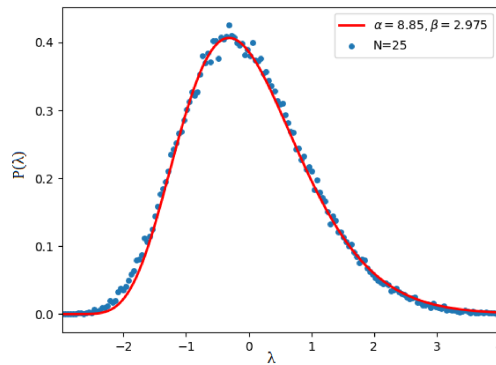


Figura 12 – Distribuição de λ_2 das matrizes circulantes de Hankel.

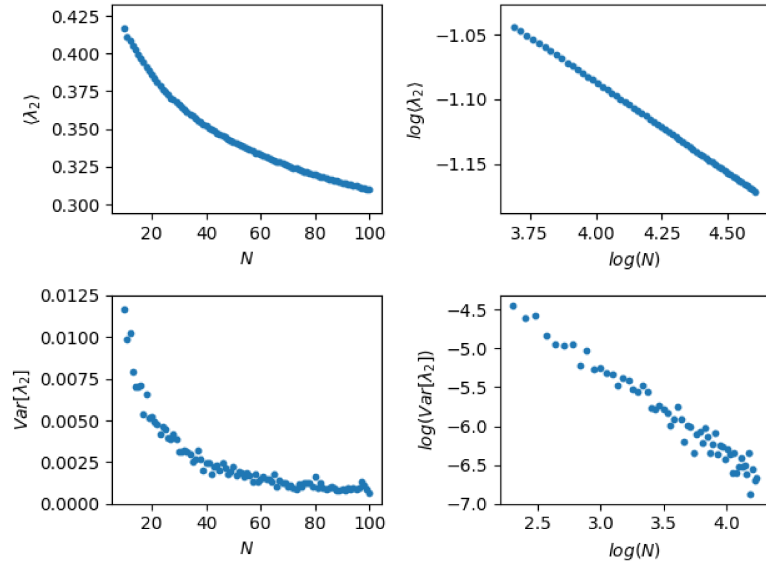


Figura 13 – $\langle \lambda_2 \rangle$ e $Var[\lambda_2]$ em função de N e os gráficos linearizados respectivos.

A média $\langle \lambda_2 \rangle$ e a variância $Var[\lambda]$ do segundo maior autovalor naturalmente dependem da ordem da matriz. A figura (13) ilustram essa dependência. A média decai em N por um fator de 0,14, enquanto a variância $Var[\lambda]$ decai em N por um fator de 1,12. Esse resultado é obtido fazendo-se o gráfico de $\log(\langle \lambda_2 \rangle)$ e $\log(Var[\lambda_2])$ em função de $\log(N)$ e observando que o resultado é linear, ou seja, tanto a média quanto a variância é dada por uma lei de potência $y = Ax^n$. Ao aplicar o logaritmo, obtemos $\log(y) = \log(A) + n\log(x)$ e o coeficiente angular é a taxa de decaimento n .

$$\langle \lambda_2 \rangle \propto \frac{1}{N^{0.14}} \quad (3.27)$$

$$Var[\lambda_2] \propto \frac{1}{N^{1.12}} \quad (3.28)$$

O espaçamento $s_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ entre os autovalores nos dá informação da repulsão entre eles e representa uma medida da correlação entre as entradas da matriz. Em RMT, é esperado que para uma matriz aleatória com entradas sorteadas independentemente, isto é, quando não existe correlação entre as entradas, os autovalores também sejam independentes. Nesse caso, o espaçamento terá distribuição de probabilidade de Poisson $P(s) = e^{-s}$, assim como o tempo entre dois decaimentos radioativos de um núcleo excitado. O fato da distribuição do espaçamento ser uma distribuição de Poisson significa que os autovalores não se repelem. É comum estudar, em vez da distribuição da variável s , a variável r_i que é a razão entre os espaçamentos:

$$r_i = \frac{s_i}{s_{i+1}} = \frac{\lambda_i - \lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2}}, \quad \lambda_i > \lambda_j \text{ se } j > i \quad (3.29)$$

A distribuição da variável r será:

$$\begin{aligned}
 P(r) &= P\left(\frac{s_1}{s_2}\right) = \int ds_2 \int ds_1 e^{-s_1} e^{-s_2} \delta(s_1/s_2 - r) \\
 P(r) &= \int ds_2 e^{-s_2} \int dx' s_2 e^{-s_2 x'} \delta(x' - r) \\
 P(r) &= \int ds_2 e^{-s_2} s_2 e^{-s_2 r} = \int ds_2 e^{-s_2(1+r)} s_2 \\
 P(r) &= \frac{1}{(1+r)^2}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

em (3.30) foi feita a substituição de variável $x' = s_1/s_2$. No caso das matrizes circulantes, a estocasticidade impõe uma correlação entre as variáveis de entrada, portanto é esperado que os autovalores não sejam independentes. A figura (14) mostra o histograma da variável r para as matrizes circulantes de Hankel. A distribuição da variável r é idêntica a de matrizes com autovalores independentes. Esse resultado é surpreendente e a razão por trás disso é que os autovalores das matrizes de Hankel tem uma estrutura especial conhecida (59) e uma aleatoriedade muito parecida com as entradas da matriz.

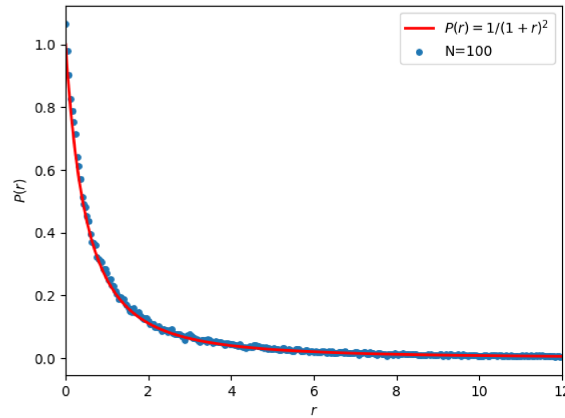


Figura 14 – Distribuição da razão dos espaçamentos dos autovalores de matrizes circulantes de Hankel

3.3.2 Matrizes Circulantes de Toeplitz

As matrizes circulantes de Toeplitz possuem autovalores complexos pelo fato de não serem simétricas como as matrizes de Hankel. Por essa razão, os autovalores devem ser plotados no plano complexo. A figura (15) mostra o espectro de autovalores para alguns valores de N . A forma do espectro é o polígono com N lados, em que N é a ordem da matriz. Vejamos o exemplo $N = 4$. A matriz circulante de Toeplitz é uma combinação

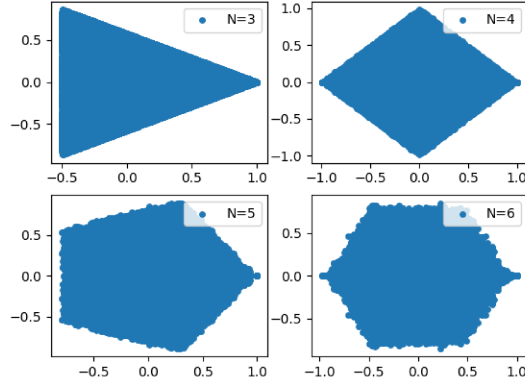


Figura 15 – Espectro de autovalores das matrizes circulantes de Toeplitz

linear das matrizes:

$$T = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Essas matrizes em teoria de grupos são especiais. Elas representam permutações do grupo C_N na *representação definidora*. Enquanto o grupo de permutações S_N contém todas as permutações de N elementos, o grupo circular C_N contém apenas as permutações que são cíclicas, ou seja, a permutação $(123\dots N)$ e todas as suas potências. Uma permutação $p \in S_N$ é representada na representação definidora por uma matriz que possui apenas um elemento igual a 1 por linha e por coluna, sendo todos os outros elementos nulos. O elemento ij é igual a 1 se e somente se a permutação p leva o número j no número i . Por exemplo, as permutações (123) , (132) e $(12)(3)$ em S_3 são representadas pelas matrizes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Um grupo é dito *cíclico* quando seus elementos são gerados pelas potências de um único elemento p , $\{p, p^2, \dots, p^n = e\}$, chamado o *gerador* do grupo, e é o elemento identidade. Os elementos p_k do grupo C_N podem ser vistos como as rotações dos vértices do polígono de N lados por um ângulo de $2\pi/k$. É claro que rodar cada vértice uma vez por um ângulo de θ e depois por um ângulo de ϕ é idêntico à rodar de ϕ e depois rodar de θ , ou seja, a ação de duas permutações p_k na lista de N vértices comuta. Em outras palavras o grupo

C_N é comutativo ou *abeliano*. Logo, as matrizes da equação (3.31) formam um grupo cíclico na representação definidora, sendo o gerador a matriz do coeficiente c_1 .

Os autovalores das matrizes que representam os elementos do grupo C_N na representação definidora são as raízes da unidade. Por exemplo, a matriz do coeficiente c_1 em (3.31):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

possui os autovalores $\{1, -1, i, -i\}$, que são as raízes da equação $\lambda^4 - 1 = 0$. O fato das matrizes circulantes C serem combinação linear das matrizes Q do grupo circular C_N na representação definidora que, por sua vez, é um grupo cíclico pode ser escrito matematicamente por:

$$C = \sum_{i=0}^{N-1} c_i Q^i \quad (3.34)$$

a equação de autovalores será:

$$Cv_j = \sum_{i=0}^{N-1} c_i Q^i v_j = \omega_j v_j \quad (3.35)$$

por outro lado, os vetores v_j continuam sendo os autovetores das matrizes Q^i , portanto:

$$Cv_j = \sum_{i=0}^{N-1} c_i Q^i v_j = \left(\sum_{i=0}^{N-1} c_i \lambda_j^i \right) v_j \quad (3.36)$$

A equação (3.36) expressa uma fórmula explícita para os autovalores das matrizes circulantes de Toeplitz C em termos das entradas de C e dos autovalores das matrizes Q , que são as raízes da unidade λ_j^i . A combinação linear $\left(\sum_{i=0}^{N-1} c_i \lambda_j^i \right)$ é chamada *combinação convexa*. Uma combinação linear $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ é dita convexa quando os coeficientes $\alpha_i \geq 0$ e quando $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. Essas duas condições são satisfeitas pelos coeficientes c_i , devido ao fato das matrizes circulantes serem estocásticas. Ao sortear muitas matrizes circulantes estocásticas de Toeplitz, os autovalores obtidos dessas matrizes serão inúmeras combinações convexas das raízes da unidade, que são as pontas dos polígonos. O conjunto de todas as combinações convexas formam a envoltória do polígono. À medida que N cresce, o espectro se aproxima do círculo unitário.

Estamos interessados também na distribuição de λ_2 das matrizes de Toeplitz, mas agora devemos olhar para o módulo de λ_2 , já que este é complexo. Ao fazer o histograma, figura (16), obtemos o resultado esperado pela universalidade das matrizes gaussianas com autovalores complexos, a distribuição de Gumbel:

$$P(\lambda_2) = \frac{1}{\beta} \exp \left(-\frac{\lambda_2 - \mu}{\beta} - \exp \left(-\frac{\lambda_2 - \mu}{\beta} \right) \right) \quad (3.37)$$

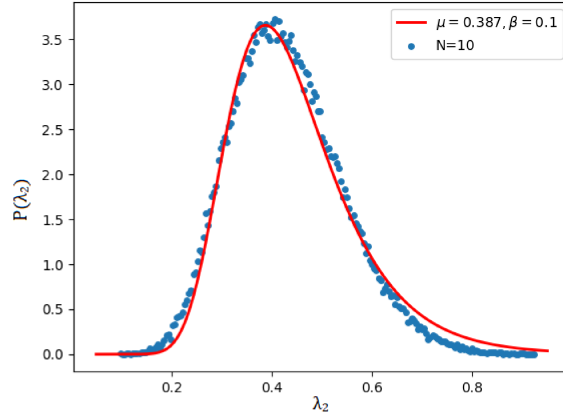


Figura 16 – Distribuição de Gumbel de λ_2 das matrizes circulantes de Toeplitz

3.3.3 Produto entre matrizes circulantes

A evolução no tempo de uma cadeia de Markov é determinada pela sua matriz de transição. Se um vetor X_0 descreve o estado inicial do sistema no tempo $t = 0$, então o estado do sistema X_1 no próximo tempo $t = 1$ é igual ao produto da matriz de transição pelo vetor X_0 . De forma geral:

$$X_{n+1} = MX_n = M(MX_{n-1}) = \dots = M^{n+1}X_0 \quad (3.38)$$

Se diagonalizarmos a matriz de transição M e escrevermos como $M = U^{-1}DU$, então o estado futuro X_{n+1} da cadeia de Markov será dado por:

$$X_{n+1} = M^{n+1}X_0 = (U^{-1}DU)(U^{-1}DU)\dots(U^{-1}DU)X_0 = (U^{-1}D^{n+1}U)X_0 \quad (3.39)$$

ou seja, o estado futuro X_{n+1} no tempo $t = n + 1$ depende agora da $(n+1)$ -ésima potência da matriz diagonal dos autovalores. Nessa perspectiva se justifica o estudo da distribuição dos autovalores do produto entre as matrizes circulantes, mas com a diferença de que a cada tempo t , a probabilidade de transição na cadeia muda, ou seja, sorteamos t matrizes diferentes e estudamos os autovalores do seu produto.

As matrizes circulantes exibem uma álgebra interessante. O produto entre duas matrizes circulantes de Hankel H_1 e H_2 resulta numa matriz de Toeplitz, enquanto o produto entre duas matrizes de Toeplitz T_1 e T_2 permanece sendo uma matriz de Toeplitz.

$$H_1.H_2 = T \quad (3.40)$$

$$T_1.T_2 = T_3 \quad (3.41)$$

Isso pode ser mostrado observando que uma matriz de Hankel H pode ser transformada numa matriz de Toeplitz T multiplicando H pela identidade anti-diagonal I_A (a anti-diagonal principal é preenchida com 1 e todos os outros elementos são zeros), por exemplo:

$$H.I_A = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ c_0 & c_3 & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_3 & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_3 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Observamos também que o produto de duas matrizes de Toeplitz é nada mais que o produto entre as matrizes do grupo C_N na representação definidora. Pelo fato dessas matrizes formarem um grupo cíclico, o resultado é também uma combinação linear dessas mesmas matrizes. Portanto, está provado que o produto entre duas matrizes circulantes de Toeplitz é uma matriz circulante de Toeplitz. Temos que:

$$T_1 T_2 = T_3 \quad \Rightarrow \quad T_1 T_2 I_A = T_3 I_A \quad \Rightarrow \quad T_1 H_2 = H \quad (3.43)$$

ou seja, o produto entre uma matriz circulante de Toeplitz e uma matriz circulante de Hankel resulta uma matriz de Hankel. Se transpormos a equação:

$$(T_1 H_2)^T = H^T \quad \Rightarrow \quad H_2 T_1^T = H \quad (3.44)$$

onde foi usado que as matrizes de Hankel são sempre simétricas. A transposta de uma matriz circulante de Toeplitz é uma outra matriz circulante de Toeplitz, por exemplo:

$$\begin{pmatrix} c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ c_0 & c_3 & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_3 & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

portanto:

$$H_2 T_2 = H \quad (3.46)$$

Basta multiplicarmos à esquerda por I_A , para verificar que o produto de duas matrizes circulantes de Hankel é uma matriz circulante de Toeplitz:

$$H_2 T_2 I_A = H I_A \quad \Rightarrow \quad H_2 H_3 = T \quad (3.47)$$

Devido ao fato de que o produto entre duas matrizes circulantes de Hankel resulta Toeplitz, para estudar o espectro do produto de matrizes circulantes de Hankel, devemos multiplicar sempre um número ímpar delas para obtermos uma matriz circulante de Hankel. A figura (17) mostra o espectro do produto de matrizes circulantes de Hankel para um número t par e ímpar. Para t par, o gráfico tem a forma do espectro de uma matriz circulante de Toeplitz, como era esperado.

O fato do produto entre um número ímpar de matrizes circulantes de Hankel resultar uma matriz do mesmo tipo não implica que a distribuição dos autovalores continua sendo a mesma, ou seja, os autovalores do produto de t matrizes circulantes de Hankel,

sendo t ímpar, não é a distribuição de Rayleigh. Como os coeficientes c_i das matrizes estão no intervalo $[0, 1]$, o produto entre as matrizes resulta em coeficientes cada vez menores. Isso significa que a combinação linear deixa de ser convexa. Por esse motivo, os autovalores também decrescem e perde-se informação do espectro, como ilustra a figura (18).

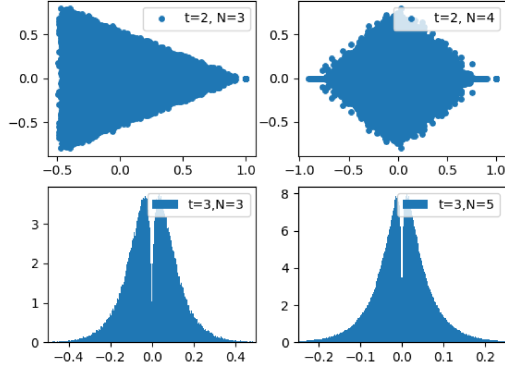


Figura 17 – Espectro do produto de matrizes de Hankel.

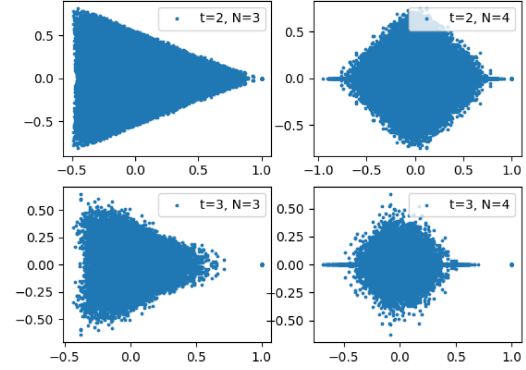


Figura 18 – Espectro do produto de matrizes de Toeplitz.

Conclusões

Foram apresentados a relação entre integrais matriciais e enumeração de mapas e as propriedades espectrais de matrizes circulantes estocásticas aleatórias. Obteve-se uma fórmula explícita para a integral do produto de um número par de elementos de matrizes hermitianas com distribuição gaussiana. A fórmula expressa a integral como uma soma sobre os mapas segundo uma função geratriz. A resolução da integral foi feita em 1986 por Harer e Zagier (58) e uma relação de recorrência foi obtida para os mapas.

Quanto ao espectro de matrizes circulantes, verificou-se que os autovalores de matrizes circulantes de Hankel seguem uma distribuição de Rayleigh, enquanto os autovalores de matrizes circulantes de Toeplitz são o conjunto de todas as combinações convexas das raízes da unidade, a razão por trás disso é que as matrizes de Toeplitz são combinação linear das matrizes do grupo circular C_N na representação definidora, cujos autovalores são as raízes da unidade. O fato dessas matrizes formarem um grupo cíclico garante que os coeficientes da combinação convexa sejam os elementos de entrada da matriz. Devido ao Teorema de Perron-Frobenius garantir que o maior autovalor de matrizes estocásticas seja $|\lambda_p| = 1$, analisamos a distribuição do segundo maior autovalor λ_2 . Foi obtido que λ_2 tem distribuição Tracy-Widom para as matrizes circulantes de Hankel e distribuição de Gumbel para as de Toeplitz, como é esperado pela universalidade das matrizes gaussianas em RMT. É surpreendente que as matrizes circulantes de Hankel tenham distribuição da razão dos espaçamentos de autovalores dado pela expressão (3.30), que corresponde a distribuição para matrizes com entradas independentes. A explicação se dá pela estrutura especial e rígida das matrizes circulantes que confere aos autovalores uma fórmula explícita.

Por fim, investigou-se o produto das matrizes circulantes, provando que o produto entre duas matrizes circulantes de Toeplitz é uma matriz circulante de Toeplitz, bem como o produto entre duas matrizes circulantes de Hankel é uma matriz circulante de Toeplitz. Os autovalores do produto entre as de Toeplitz deixa de ser uma combinação convexa e, por esse motivo, perde-se informação do espectro. A distribuição dos autovalores do produto de um número ímpar de matrizes circulantes de Hankel ainda não foi obtida.

Referências

- 1 BREZIN, E. et al. Planar diagrams. *Math. Phys*, v. 59, p. 35.
- 2 AKEMANN, G.; BAIK, J.; FRANCESCO, P. D. *The Oxford handbook of random matrix theory*. [S.l.]: Oxford University Press, 2011. 15 p.
- 3 HAAKE, F. *Quantum signatures of chaos*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 54.
- 4 KAZAKOV, V. A. Ising model on a dynamical planar random lattice: exact solution. *Physics Letters A*, v. 119, n. 3, p. 140–144, 1986.
- 5 OLSON, B. J. et al. Circulant matrices and their application to vibration analysis. *Applied Mechanics Reviews*, v. 66, n. 4, p. 040803, 2014.
- 6 HAUPT, J. et al. Toeplitz compressed sensing matrices with applications to sparse channel estimation. *IEEE transactions on information theory*, v. 56, n. 11, p. 5862–5875, 2010.
- 7 FERMI, E. et al. Artificial radioactivity produced by neutron bombardment. *Proc. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 146, n. 857, p. 483–500, 1934.
- 8 AMALDI, E. et al. Artificial radioactivity produced by neutron bombardment—ii. *Proc. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 149, n. 868, p. 522–558, 1935.
- 9 BOHR, N. Nature 137,. *Nature*, v. 137, p. 344, 1936.
- 10 WILKS, S. S. Mathematical statistics. New York, John Wileyand Sons, p. 225, 1962.
- 11 WIGNER, E. P. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. *Annals of Mathematics*, Annals of Mathematics, v. 62, n. 3, p. 548–564, 1955. ISSN 0003486X. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1970079>>.
- 12 WIGNER, E. P. Characteristics vectors of bordered matrices with infinite dimensions ii. *Annals of Mathematics*, Annals of Mathematics, v. 65, n. 2, p. 203–207, 1957. ISSN 0003486X. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1969956>>.
- 13 GUHR, T.; MÜLLER-GROELING, A.; WEIDENMÜLLER, H. A. Random-matrix theories in quantum physics: common concepts. *Physics Reports*, Elsevier, v. 299, n. 4-6, p. 189–425, 1998.
- 14 DYSON, F. J. Statistical theory of the energy levels of complex systems. i. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 3, n. 1, p. 140–156, 1962.

- 15 DYSON, F. J. Statistical theory of the energy levels of complex systems. ii. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 3, n. 1, p. 157–165, 1962.
- 16 DYSON, F. J. Statistical theory of the energy levels of complex systems. iii. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 3, n. 1, p. 166–175, 1962.
- 17 DYSON, F. J. A brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 3, n. 6, p. 1191–1198, 1962.
- 18 DYSON, F. J. The threefold way. algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 3, n. 6, p. 1199–1215, 1962.
- 19 WIGNER, E. Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra (academic, new york, 1959). *Google Scholar*, p. 325–331, 1931.
- 20 WIGNER, E. P. On a class of analytic functions from the quantum theory of collisions. In: *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*. [S.l.]: Springer, 1993. p. 409–440.
- 21 PORTER, C.; THOMAS, R. Fluctuations of nuclear reaction widths. *Physical Review*, v. 104, n. 2, p. 483, 1956.
- 22 ERICSON, T. Fluctuations of nuclear cross sections in the "continuum" region. *Physical Review Letters*, v. 5, n. 9, p. 430, 1960.
- 23 GINIBRE, J. Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 6, n. 3, p. 440–449, 1965.
- 24 ANDERSON, P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical review*, v. 109, n. 5, p. 1492, 1958.
- 25 GORKOV, L.; ELIASHBERG, G. Minute metallic particles in an electromagnetic field. *Sov. Phys. JETP*, v. 21, n. 940, 1965.
- 26 EFETOV, K. Supersymmetry and theory of disordered metals. *Advances in Physics*, Taylor & Francis, v. 32, n. 1, p. 53–127, 1983.
- 27 EFETOV, K. Level spacing distribution in small metallic particles. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, v. 15, n. 26, p. L909, 1982.
- 28 EFETOV, K. Supersymmetry method in localization theory. *Sov. Phys. JETP*, v. 55, p. 514, 1982.
- 29 WEBB, R. A. et al. Observation of the aharonov-bohm oscillations in normal-metal rings. *Physical Review Letters*, v. 54, n. 25, p. 2696, 1985.
- 30 ALTSHULER, B. Fluctuations in the extrinsic conductivity of disordered conductors. *JETP lett*, v. 41, n. 12, p. 648–651, 1985.
- 31 STONE, A. D. Magnetoresistance fluctuations in mesoscopic wires and rings. *Physical review letters*, v. 54, n. 25, p. 2692, 1985.
- 32 LEE, P. A.; STONE, A. D. Universal conductance fluctuations in metals. *Physical review letters*, v. 55, n. 15, p. 1622, 1985.

- 33 BEENAKKER, C. W. Random-matrix theory of quantum transport. *Reviews of modern physics*, v. 69, n. 3, p. 731, 1997.
- 34 ALHASSID, Y. The statistical theory of quantum dots. *Reviews of Modern Physics*, v. 72, n. 4, p. 895, 2000.
- 35 POLIANSKI, M.; BROUWER, P. Scattering matrix ensemble for time-dependent transport through a chaotic quantum dot. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 36, n. 12, p. 3215, 2003.
- 36 KENG, H. L. Harmonic analysis of functions of many complex variables in the classical domains. *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 1963.
- 37 HARISH-CHANDRA. Differential operators on a semisimple lie algebra. *American Journal of Mathematics*, p. 87–120, 1957.
- 38 ZINN-JUSTIN, P.; ZUBER, J.-B. On some integrals over the $u(n)$ unitary group and their large n limit. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 36, n. 12, p. 3173, 2003.
- 39 JAMES, A. T. Zonal polynomials of the real positive definite symmetric matrices. *Annals of Mathematics*, p. 456–469, 1961.
- 40 MUIRHEAD, R. J. *Aspects of multivariate statistical theory*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. v. 197.
- 41 GIRKO, V. *Theory of random determinants, volume 45 of Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.
- 42 VOICULESCU, D. Limit laws for random matrices and free products. *Inventiones mathematicae*, Springer, v. 104, n. 1, p. 201–220, 1991.
- 43 HEJHAL, D. A. On the triple correlation of zeros of the zeta function. *International Mathematics Research Notices*, Hindawi Publishing Corporation, v. 1994, n. 7, p. 293–302, 1994.
- 44 RUDNICK, Z.; SARNAK, P. et al. Zeros of principal L -functions and random matrix theory. *Duke Mathematical Journal*, Durham, NC: Duke University Press, 1935-, v. 81, n. 2, p. 269–322, 1996.
- 45 BOGOMOLNY, E. B.; KEATING, J. P. Random matrix theory and the riemann zeros. i. three-and four-point correlations. *Nonlinearity*, v. 8, n. 6, p. 1115, 1995.
- 46 BOGOMOLNY, E. B.; KEATING, J. P. Random matrix theory and the riemann zeros ii: n -point correlations. *Nonlinearity*, v. 9, n. 4, p. 911, 1996.
- 47 KATZ, N. M.; SARNAK, P. *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1999. v. 45.
- 48 FORRESTER, P.; SNAITH, N.; VERBAARSCHOT, J. Developments in random matrix theory. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 36, n. 12, p. R1, 2003.
- 49 BOHIGAS, O.; GIANNONI, M.-J.; SCHMIT, C. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Physical Review Letters*, v. 52, n. 1, p. 4, 1984.

- 50 HALLER, E.; KÖPPEL, H.; CEDERBAUM, L. Uncovering the transition from regularity to irregularity in a quantum system. *Physical review letters*, v. 52, n. 19, p. 1665, 1984.
- 51 SELIGMAN, T.; VERBAARSCHOT, J.; ZIRNBAUER, M. Quantum spectra and transition from regular to chaotic classical motion. *Physical review letters*, v. 53, n. 3, p. 215, 1984.
- 52 NOVAES, M. Statistics of quantum transport in chaotic cavities with broken time-reversal symmetry. *Physical Review B*, v. 78, n. 3, p. 035337, 2008.
- 53 RODRÍGUEZ-PÉREZ, S. et al. Statistics of quantum transport in weakly nonideal chaotic cavities. *Physical Review E*, v. 88, n. 5, p. 052912, 2013.
- 54 NOVAES, M. Statistics of time delay and scattering correlation functions in chaotic systems. i. random matrix theory. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 56, n. 6, p. 062110, 2015.
- 55 ZVONKIN, A. Matrix integrals and map enumeration: an accessible introduction. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 26, n. 8-10, p. 281–304, 1997.
- 56 FRANCESCO, P. D. 2d quantum gravity, matrix models and graph combinatorics. In: *Applications of random matrices in physics*. [S.l.]: Springer, 2006. p. 33–88.
- 57 WALSH, T. R.; LEHMAN, A. B. Counting rooted maps by genus. i. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 13, n. 3, p. 192–218, 1972.
- 58 HARER, J.; ZAGIER, D. The euler characteristic of the moduli space of curves. *Inventiones mathematicae*, v. 85, n. 3, p. 457–485, 1986.
- 59 BOSE, A.; MITRA, J. Limiting spectral distribution of a special circulant. *Statistics & probability letters*, v. 60, n. 1, p. 111–120, 2002.
- 60 CHIANI, M. Distribution of the largest eigenvalue for real wishart and gaussian random matrices and a simple approximation for the tracy–widom distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, v. 129, p. 69–81, 2014.