

Universidade Federal de Uberlândia

Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

O registro semiótico de função de várias
variáveis nos livros de Cálculo: uma análise a
luz da Teoria de Raymond Duval

por

Leandro dos Santos Vieira

Licenciatura em Matemática – Ituiutaba – MG

Orientador: Prof. Dr. Rogério Fernando Pires

O registro semiótico de função de várias variáveis nos livros de Cálculo:
uma análise a luz da Teoria de Raymond Duval

Este exemplar corresponde à redação final da Monografia devidamente corrigida e defendida por **Leandro dos Santos Vieira** e aprovada pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 14 de dezembro de 2018.

Prof. Dr. Rogério Fernando Pires

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Homero Ghioti da Silva.

Prof. Dr. Leandro de Oliveira Souza

Prof. Dr. Rogério Fernando Pires.

Monografia apresentada ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal, UFU como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aos meus Pais

Agradeço a Deus por me sustentar e ter permitido tudo acontecer

Agradeço a meus pais Rosa e Joaquim e aos meus irmãos e irmãs que, mesmo na distância me deram apoio que tanto precisei. Aos meus sobrinhos que me alegram e que tanto sentem minha falta,

Agradeço aos meus amigos, que não deixaram essa graduação se tornar chata e indigesta. Já imaginei uma graduação somente com muita exigência e sem pausa pra nada? Credo!

Agradeço a amizade sincera das licenciadas Cássia e Adrielle, que juntamente a mim, formam um imbatível trio de somente coisas boas... amei ter feito parte da conquista delas e elas da minha :D

Agradeço aos colegas de graduação, a quem compartilhamos reprovações e aprovações, definições, teoremas e muita conta legal e complicada

Agradeço aos amigos e colegas de república (das algumas que morei) que aqui estão e alguns que já se mudaram, ao proporcionar alguns laços quase familiares: Brandon, Ríssia, Daniel, Leonardo, Miguel, alguns vizinhos que moram aqui por perto, os agregados ...

Agradeço aos bons professores que tive por aqui, que me fizeram aprender além das muitas demonstrações, proposições, cálculos, metodologias ou tendências em educação Matemática, aos que estão ou já se aposentaram

Agradeço meu professor orientador, pela paciência em orientar este trabalho bem maneiro sobre funções de duas variáveis, o conteúdo que mais gostei durante minha graduação fora as disciplinas pedagógicas. Em contraste com minhas procrastinações diárias, diz ele que este TCC não ficou ruim não: P

Por fim, fico muito grato ao Leandro, o Leo da Matemática, que por algum motivo começou a acreditar mais nele mesmo, e olha: parece que está dando certo.

Valeu!

RESUMO

As funções nos livros de Cálculo Diferencial e Integral voltados para o ensino superior apresentam diversas representações diferentes de função, desde gráficos a tabelas. Porém, a forma como os autores abordam cada representação influencia na conceitualização de objetos matemáticos, que neste caso são as funções de várias variáveis. Dessa forma, realizou-se uma pesquisa bibliográfica afim de investigar como os livros privilegiam o estudo de função de duas ou mais variáveis a luz da Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. A escolha dos livros de Cálculo se deu por meio de um pequeno estudo das ementas dos cursos de Matemática de Faculdades do Triângulo Mineiro que se mostraram mais relevantes quanto a formação e impacto social na região. Para este trabalho, foram selecionados a 6ª edição do livro *Cálculo* - volume 2 de James Stewart, publicado em São Paulo pela Cengage Learning em 2009, a 12ª edição do livro *Cálculo* - volume 2 de George B. Thomas, publicado em São Paulo pela Pearson Education do Brasil em 2012 e a quinta edição do livro *Um Curso de Cálculo* – Volume 2 de Hamilton Luiz Guidorizzi, publicado no Rio de Janeiro pela LTC em 2001. Os resultados mostraram que livros com mais representações de função de várias variáveis implicam em mais coordenações entre registros, atividade necessária para a apreensão dos objetos matemáticos, ou simplesmente *noesis*.

Palavras-chave: Funções de várias variáveis, Teoria de Registro de Representação Semiótica, Livro didático

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	11
CAPITULO 1 - A FUNÇÃO COMO OBJETO MATEMÁTICO DE ESTUDO.....	14
1.1 Introdução	14
1.2 Discussão histórica sobre o conceito de função.....	15
1.3 Motivações do Estudo da Física nas Funções.....	22
1.4 As funções hoje: as definições presentes nos livros de Cálculo	23
CAPÍTULO 2 - O PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS	29
2.1 Introdução	29
2.2 A semiose e noesis no pensamento cognitivo.....	30
2.3 A semiose e registros de representação	32
2.4 A noesis e (coordenação) registros de representação	34
2.5 Os fenômenos de Congruência e não congruência	35
CAPITULO 3 - ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA E FUNÇÕES	37
3.1 Introdução	37
3.2 A pesquisa bibliográfica nos livros de Cálculo “2”	37
CAPITULO 4 - FUNÇÕES, TEORIA DE REGISTROS SEMIÓTICOS E FENÔMENOS DE CONGRUÊNCIAS: UMA BREVE ANÁLISE	48
4.1 Introdução	48
4.2 Os livros e os seus registros semióticos de função	49
4.3 Articulação entre registros em Cálculo: a não congruência mais que necessária.....	57
CONSIDERAÇÕES FINAIS	69

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Diagrama de setas para a função $z = f(x,y)$. (Thomas, 2012)	26
Figura 2. Fluxograma metodológico da pesquisa. (Construído pelo autor)	39
Figura 3. Capas das obras obtidas para análise. (Imagens obtidas pela internet)	42
Figura 4. Mapa conceitual de Função de duas ou mais variáveis presente no livro de Guidorizzi. (Construído pelo autor)	42
Figura 5. Mapa conceitual de Função de duas ou mais variáveis presente no livro de Stewart. (Construído pelo autor)	43
Figura 6. Mapa conceitual de Função de duas ou mais variáveis presente no livro de Thomas. (Construído pelo autor)	43
Figura 7. Imagem do livro Cálculo Volume II. (Fonte: Stewart, 2010, p. 815)	50
Figura 8 – Exemplo de conversões entre registros tabular, numérico e natural (Stewart, 2010, p.825)	56
Figura 9. Exemplo de conversão congruente (Stewart, 2010, p.816).	58
Figura 10. Exemplo de conversão congruente. (Stewart, 2010, p.825)	59
Figura 11. Exemplo de conversão não congruente. (Stewart, 2010, p.825)	60
Figura 12. Exemplo de conversão não congruente (Guidorizzi, 2009, p.148)	61
Figura 13. Exemplo de conversão não congruente. (Thomas, 2012, p.215)	61
Figura 14. Exemplo de conversão não congruente. (Stewart, 2010, p.816)	62
Figura 15. Exemplo de conversão não congruente. (Stewart, 2010, p.816)	63

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Definição Stewart 1 – função de duas variáveis.....	24
Quadro 2 – Definição Stewart 2 – função de duas variáveis.....	24
Quadro 3 – Definição Stewart 3 – gráfico de função de duas variáveis.....	25
Quadro 4 – Definição Stewart 4 – função de três variáveis	25
Quadro 5 – Definição Stewart 4 – função de n variáveis	25
Quadro 6 – Definição Thomas 1 – função de várias variáveis.....	25
Quadro 7 – Definição Thomas 2 – gráfico de função de duas variáveis	26
Quadro 8 – Definição Guidorizzi 1 – função de duas variáveis.....	27
Quadro 9 – Definição Guidorizzi 2 – gráfico de função de duas variáveis.....	27
Quadro 10 – Definição Guidorizzi 3 – gráfico e função de três variáveis.	27
Quadro 11 – Organização dos registros no funcionamento matemático	33
Quadro 12 – Obras mencionadas nas ementas dos cursos de Matemática	40
Quadro 13 – Conteúdos comum selecionados para análise presentes nos livros	44
Quadro 14 – Representações e sistemas semióticos aplicados as funções de duas ou mais variáveis.....	45
Quadro 15 – Categorias de análise	47
Quadro 16 – tipos de representações discursivas e não discursivas nas obras investigadas	49
Quadro 17. Algumas possibilidades de Conversão no estudo de Função.	51
Quadro 18 – Possibilidades de Tratamento no estudo de Função	52
Quadro 19 – Quantificação das atividades semióticas de Tratamento e Conversão em cada atividade (exemplo ou exercício)	55
Quadro 20: Relação entre total de atividades com tratamentos e conversões possíveis	56
Quadro 21 – Atividades que propõe coordenação entre registros	65

INTRODUÇÃO

A Abordagem das funções de duas ou mais variáveis reais a valores reais presente nos livros de ensino superior, objeto matemático do estudo de Cálculo Diferencial e Integral, apresenta diversas singularidades: desde representações geométricas destas funções até suas equações algébricas, as várias interpretações geométricas analíticas de algumas superfícies e suas relações no espaço tridimensional.

Essas funções com n número de variáveis, que é uma regra que associa um número real $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ à n -upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de números reais, denotando $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas as n -uplas, ainda que pareçam exigir um nível mais aguçado de abstração matemática, podem se tornar mais compreensíveis se as diversas representações desse objeto em questão, no caso as funções de duas ou mais variáveis, forem pensadas de maneira que contribuam com o processo de cognição. Por exemplo, um parabolóide de função $f(x,y)=x^2+y^2$ e suas implicações podem ser mais bem compreendidas através de processos cognitivos e de inter-relações entre algumas de suas representações, tais como pela equação $x^2+y^2-z=0$ e pela esboço da superfície parabólica de concavidade positiva rotacionada pelo eixo O_z em $\mathbb{R}^3$.

Neste caminho, os livros didáticos para o ensino superior deveriam justificar a aprendizagem de funções, destacando tais processos cognitivos internos (DUVAL, 2012) que levam a aprendizagem do objeto matemático em estudo. Contudo, surge o seguinte questionamento: Como esses livros, de fato, privilegiam as diversas representações de funções (de duas ou mais variáveis reais a valores reais) de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica?

Delimitando um pouco mais este cenário, fez-se necessário uma pequena busca pelos livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral que abordam o conteúdo de funções de duas ou mais variáveis reais a valores reais presentes nas bibliografias das ementas dos cursos de licenciatura e/ou de bacharelado em Matemática das instituições de ensino superior.

Uma vez que se tornaria demasiado trabalhoso pensar em todos os cursos de formação em Matemática em território nacional, a Faculdade de Matemática (FAMAT) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), o Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) – antiga Faculdade de Ciências Integradas do Pontal (FACIP) – da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e o Instituto de Ciências Exatas, Naturais e Educação (ICENE) da Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), todas localizadas no Triângulo Mineiro, foram as selecionadas para este estudo, devido as suas relevâncias no ensino e formação de Professores e Matemáticos para a região e cidades circunvizinhas. Um exemplo neste contexto acontece no ICENP, em que no curso de licenciatura em matemática, de 2007 até 2018 aproximadamente 88,23% dos egressos estão trabalhando como professores da Educação Básica e Superior (RAMOS, 2018).

Ainda com o olhar voltado para as ementas destes cursos, notou-se que haviam três obras em comum de Cálculo Diferencial e Integral: (a) a 6ª edição do livro *Cálculo* - volume 2 de James Stewart, publicado em São Paulo pela Cengage Learning em 2009; (b) a 12ª edição do livro *Cálculo* - volume 2 de George B. Thomas, publicado em São Paulo pela Pearson Education do Brasil em 2012 e (c) a quinta edição do livro *Um Curso de Cálculo* – Volume 2 de Hamilton Luiz Guidorizzi, publicado no Rio de Janeiro pela LTC em 2001.

Metodologicamente, esta pesquisa tem caráter bibliográfico, no sentido de que foi feita uma análise didática das obras selecionadas. Sabe-se que uma de suas etapas é o levantamento dos livros, periódicos e demais materiais de origem escrita que servem como fonte de estudo ou leitura (FACHIN, 2003). Isso justifica o levantamento de dados acerca do conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral presente nos três livros didáticos aqui referidos. Consideremos então o caráter desta pesquisa como sendo bibliográfica, que pode ser entendida como:

[...] conjunto de conhecimentos reunidos em obras de toda natureza. Tem como finalidade conduzir o leitor à pesquisa de determinado assunto, proporcionando o saber. Ela se fundamenta em vários procedimentos metodológicos, desde a leitura até como selecionar, fichar, organizar, arquivar, resumir o texto; ela é a base para as demais pesquisas. (FACHIN, 2003.)

Isso é, foi reunido um grande volume de dados e informação que possibilitou conhecer melhor as atividades propostas por cada autor, analisadas e comentadas de acordo com o referencial teórico, averiguando a possibilidade de efetivação dos processos cognitivos *noesis* e *semioses*, oriundas da teoria dos registros de representação semiótica.

A estrutura desse trabalho de conclusão de curso segue a seguinte ordem, a saber nos próximos parágrafos.

O capítulo 1, A FUNÇÃO COMO OBJETO MATEMÁTICO DE ESTUDO, é realizada uma abordagem histórica de função ao longo do desenvolvimento da Matemática, destacando a definição de função e estudos sobre em diferentes momentos históricos da ciência. Em seguida, é apresentado as noções atuais de função de duas ou mais variáveis, justificando o objeto matemático como principal base da análise funcional.

No capítulo 2, O PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS, discute-se o papel cognitivo da teoria dos registros de representação semiótica e como essa ideia se articula com atividade e aprendizagem matemática. Ainda, se faz uma breve consideração acerca de fenômenos de aprendizagem que dificultam o entendimento e apreensão cognitiva por parte dos alunos.

No capítulo 3, ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA E FUNÇÕES, é revelado os procedimentos que fundamentaram a pesquisa bem como sua natureza bibliográfica. É neste item do trabalho que contém a coleta dos dados a ponderações de cada um três dos livros já citados, buscando pelas representações diferentes de funções em comum.

O capítulo 4, FUNÇÕES, TEORIA DE REGISTROS SEMIÓTICOS E FENÔMENOS DE CONGRUÊNCIAS: UMA BREVE ANÁLISE, é apresentada a análise de cada livro investigado, tendo como pano de fundo a teoria dos registros de representação semiótica e fenômenos de congruência semântica. E dado certa importância em como cada autor se privilegiou das representações variadas na devolutiva ao leitor, ou seja, no indivíduo interessado em aprender sobre as funções de duas ou mais variáveis reais a valores reais.

Por fim, o parágrafos e capítulos deste trabalho foram concluídos em função da resposta da questão de pesquisa. Dessa forma, sentimos seguros ao dizer que apenas um livro se sobressaiu e soube privilegiar de maneira positiva o estudo de função a luz da teoria dos registros de representações semiótica, por apresentar mais representações de função que os demais. Assim, reafirma-se a importância da coordenação de vários registros semióticos quanto a apreensão conceitual de objetos matemáticos, que neste trabalho são as funções de duas ou mais variáveis reais a valores reais.

CAPITULO 1

A FUNÇÃO COMO OBJETO MATEMÁTICO DE ESTUDO

1.1 Introdução

Quando se olha para a função como objeto matemático, percebe-se que ela se encontra em vários campos da Matemática e também em outras ciências. É o principal objeto de estudo da Análise Funcional, está presente como as variáveis dependentes das equações diferenciais, no cálculo numérico em que se vê os erros e aproximações quanto ao comportamento de funções reais, nas clássicas ideias de movimento, velocidade e aceleração da Física, suas relações e operações também são objetos de estudo da Álgebra, além de também aparecer na estatística e lógica matemática.

Como é concebida hoje e desde que respeite seu rigor matemático, as funções também podem e devem ser representadas por diversas situações ou registros diferentes.

Pense na relação de calorias perdidas em relação a quantidade de exercícios, o combustível gasto num automóvel frente a quilometragem rodada dentre outras situações hipotéticas como sendo funções de uma única variável real a valores reais, representada arbitrariamente pelos símbolos letra f com x fechado em parênteses. Visualize as curvas de

nível dos mapas em geografia que delimitam e agrupam regiões diferentes para cada altitude ou na previsão do tempo em que se tem pontos no mapa (pares ordenados) de entrada vinculados a uma certa temperatura de saída como sendo exemplos de funções de duas variáveis.

Ainda que as funções de várias variáveis reais a valores reais englobem todos os exemplos acima, fica difícil imaginar exemplos usuais quando o número de variáveis se aproxima do infinito. Assim, nestes exemplos entra em jogo a abstração matemática. É preciso compreender o objeto matemático, mesmo que este não tenha uma aplicação próxima da vida cotidiana, implicando na Matemática como Ciência própria. Um dos caminhos para essa compressão conceitual passa pelas representações anteriores aqui citadas.

Note que, das representações apresentadas, elas podem ser consideradas função porquê, temos regras de conformidade para isso, tais como as definições. A definição de função de duas ou mais variáveis reais a valores reais como entendemos hoje demorou séculos para ser delimitada e convencionada. Perceba que as funções não foram inventadas ou criadas por alguém na história (da mesma forma que se entende que a Matemática não foi inventada ou criada), mas passou a ser estudado como objeto de estudo matemático, servindo de ferramenta para a própria Matemática e outras Ciências, a partir do século XVII.

Assim, este capítulo trará uma breve discussão histórica acerca do desenvolvimento de conceito de função, bem como o conceito atual de funções de duas ou mais variáveis reais a valores reais hoje em dia.

1.2 Discussão histórica sobre o conceito de função

Na geometria Euclidiana é impossível não compreender toda sua estrutura axiomática senão pelo conceito primitivo de ponto e reta. Da mesma maneira, a função é o principal coadjuvante da Análise, ramo da Matemática que lida com os conceitos introduzidos pelo cálculo diferencial e integral, séries e sequências, teoria que se tornou central no desenvolvimento matemático desde então (PONTE, 1992).

A função como conhecemos hoje, objeto individualizado de estudo só viria começar a surgir conceitualmente no final do século XVII – de forma bem generalizada, com o surgimento do Cálculo Infinitesimal. A partir disso, sabemos e podemos mentalmente associar a representação gráfica e algébrica quando pensamos em função. Se lembrarmos das ideias de correspondência entre conjuntos, podemos associar a noção de função em eventos históricos do passado, como nas tabelas babilônicas (tabelas recíprocas) e egípcias já que continham registros de correspondências entre números e o resultado das operações que envolvem esse número

(ROQUE, 2012). Outras representações simples do conceito de função também são vistas nos povos antigos, como exemplo da contagem, que é uma sequência biunívoca de elementos dados a uma sequência de contas (PONTE, 1992).

Porém, um grande passo para o desenvolvimento da noção atual de função veio a partir das ideias de variação entre quantidades de grandezas. Este fato só viria ocorrer com o nascimento da Física Matemática. Depois de Galileu (1564-1642), a ideia de variação em função do tempo se tornou fundamental na Física. Nessa época, era comum estudos sobre o deslocamento de partículas. Buscava-se de uma lei ou fórmula que descrevesse essa trajetória entre as duas quantidades – que na linguagem atual poderia ser a busca por uma função que relacionasse a posição de objetos em diferentes momentos do tempo. Assim, de acordo com ROQUE (2012) “uma das principais motivações para a introdução da ideia de função é a noção de trajetória, que associa um movimento a uma curva que poderá ser expressa por meio de uma equação”.

Contudo, atente-se ao fato de que existiam diferentes tipos de equações conhecidas na época. Nas equações determináveis, a parte desconhecida só poderia assumir um único valor. Já as equações indetermináveis, poderiam se encontrar infinitos valores variando de acordo com o valor da outra quantidade. Descartes (1596-1650) havia percebido isso, e conclui que tomando infinitos valores para x , acham-se também infinitos valores para y . Assim, as quantidades que eram calculadas a partir de outra eram esboçadas graficamente por uma curva, num plano cartesiano. Aqui o conceito de função atual tomava forma, mas perceba que a restrição de relação de conjuntos de chegada e partida não era obedecida, como no caso da equação da circunferência – e que segundo Descartes poderia ser algo que ainda viria a ser chamada de função.

As “funções de Descartes” eram limitadas as equações algébricas, o que seria expandido por Leibniz (1646-1716) mais tarde. Essa restrição cartesiana se tornara um inconveniente, já que a introdução das séries infinitas no estudo das curvas possibilitou adicionar as curvas transcendentais neste estudo. A partir deste momento da história, as curvas passaram a ser expressas por séries e no século XVIII, tais séries se tornariam o principal objeto de estudo das relações entre variáveis quantificáveis.

Apesar dos avanços das futuras funções na época, fez-se necessário criar um termo arbitrário para indicar as quantidades que dependem das outras. Newton (1642-1727) usava termos especiais em seus trabalhos de séries de potência. “Fluente” era usado para designar as variáveis independentes. “Relatias quantitas” para designar variável dependente, e “genita” para

designar uma quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatro operações aritméticas fundamentais (PONTE, 1992).

Historicamente, foi Leibniz (1646-1716) quem primeiro usou o termo "função" em 1673, além da terminologia "constante", "variável" e "parâmetro" (PONTE, 1992), que se tornariam populares com a publicação do primeiro tratado de Cálculo Diferencial, publicado por L'Hôpital (1661-1704) em 1696 (ROQUE, 2012). Os registros de correspondências entre Leibniz e Bernoulli já discutiam acerca das funções, ao propor qual seria a sua melhor definição, até o consenso dos dois matemáticos em 1698, redigida por Bernoulli.

A definição formal então veio em 1718, por um artigo de Bernoulli apresentado à Academia de Ciências de Paris: “Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes” (BERNOULLI, 1718, *apud* ROQUE, 2012). Também foi introduzido ideias para singularizar as funções, uma espécie de nome:

No mesmo artigo, ele usa a letra grega ϕ para representar a “característica” da função, ou seja, o nome da função, escrevendo o argumento sem os parênteses: ϕx . Bernoulli não diz mais nada sobre o modo de constituir funções a partir da variável independente, mas o que ele tem em mente são as expressões analíticas de curvas (ROQUE, 2012, p. 299).

Contudo, o Cálculo foi redesenhado, voltando nas bases algébricas, porém deixando de lado o uso da geometria para explicações, regras e demonstrações e focando na pura análise. Essas ideias defendidas por Euler (1707-1783), pupilo de Bernoulli, transformaram o Cálculo a época, o que tornou as funções como seu principal objeto de estudo, não mais as curvas e influenciou toda a Matemática do século XVIII. O livro “Introductio in analysin infinitorum” com edições de 1748 já trazia a função como objeto principal da atividade matemática, além da seguinte definição: “Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes” (EULER, 1748, *apud* ROQUE, 2012). Também definia as já conhecidas constantes, como sendo uma quantidade já definida, ou seja, “uma quantidade variável (que) compreende todos os números nela mesma, tanto positivos quanto negativos, inteiros e fracionários, os que são racionais, transcendentos e irracionais. Não devemos excluir nem mesmo o zero e os números imaginários.” (EULER, 1748, *apud* ROQUE, 2012).

A expressão analítica de Euler podia ser formada pela aplicação de finitas ou infinitas operações algébricas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, incluindo em seu universo as funções não algébricas (transcendentos, como exponencial, do logaritmo e das funções trigonométricas). Ele tomava o cuidado de definir precisamente tais

expressões analíticas. Seu intuito era não apenas usar a álgebra para ajudar nas representações matemáticas no estudo do Cálculo, mas compreender as funções de maneira mais abstratas. As quantidades das variáveis agora poderiam ser incontáveis ou transcendentais, pois o que era mais importante eram as relações operacionais entre essas grandezas. Assim, a “análise algébrica” introduzida por Euler sucedeu a “análise algebrizada”, definição da historiadora Tatiana Roque, de 2012, que foi a concepção que transformou o Cálculo Infinitesimal no estudo algébrico de séries anteriormente.

Apesar de muito bem aceita a princípio (definição de função de Euler) um problema físico pertinente do século XVIII a fez questionável. O “problema das cordas vibrantes”, que estuda as vibrações infinitamente pequenas de uma corda presa por suas extremidades. As discussões estimuladas por d’Alembert (1717-1783) que resolveu o problema usando equações diferenciais e Daniel Bernoulli (1700-1782) que optou na periodicidade das séries trigonométricas, fizeram Euler redefinir o conceito de função, levando em conta todas as socializações a respeito. Que condições iniciais deveriam ser levadas em conta já que um problema tem múltiplas soluções aceitáveis (pelo próprio Euler). Assim, na revista “*Institutiones calculi differentialis*” de 1755, Euler redefine o que já havia publicado, muito mais generalizada que a anterior.

Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que se as outras mudam essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x , de qualquer maneira, ou que são determinadas por x , são chamadas funções de x (EULER *apud* ROQUE, 2012, p.302).

Paralelamente, D’Alembert também possuía sua própria concepção de função, o que resultou num verbete incluído na “*Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*” conhecida enciclopédia francesa, em seu sétimo volume de 1757.

Função, s.f. (Álgebra). Os antigos geômetras, ou melhor, os antigos analistas, chamaram função de uma quantidade qualquer x às diferentes potências dessa quantidade; mas, hoje, chamamos função de x , ou, em geral, de uma quantidade qualquer, a uma quantidade algébrica composta de tantos termos quanto quisermos e na qual x se encontra, ou não, misturado de um modo qualquer com constantes (D’ALEMBERT *apud* ROQUE, 2012, p.303).

Atente como essa definição é menos abrangente se comparada a de Euler. As contribuições de D’Alembert para o campo das funções vão mais além que seu recorte no tempo

dos geômetras. O uso de equações diferenciais para resolver problemas físicos segundo Euler, daria brecha para a origem de novas classes de funções que não eram contínuas.

Antes da nova definição de Euler, não havia espaço na análise para desenvolver o estudo desse tipo de função. Ao propor que uma função pudesse ser definida por múltiplas expressões analíticas, que podem ser distintas em intervalos distintos, passaram a ser admitidas tais funções, denominadas nessa época de “descontínuas”. A nossa atual definição de continuidade é muito diferente da que era usada por Euler. Para ele, uma função era dita contínua se pudesse ser representada em apenas uma única expressão analítica. Se não o fosse, era dita descontínua. Esse fato mostra como Cálculo Infinitesimal da época era fortemente centrado na análise algébrica de Euler. Infelizmente as discussões acerca do conceito de função não tiveram tanta repercussão desde então, e os debates acerca de continuidade permaneceram nos meios acadêmicos e não teve grande relevância no século XIX (ROQUE, 2012).

Mesmo com tantos matemáticos vivendo na França pré-revolucionária no final do século XVIII como Lagrange, Laplace, Legendre e Monge, estes não tinham a função de ensinar. Assim, a educação matemática da época era marginalizada e carecia de bons profissionais (ROQUE, 2012). No entanto toda a academia – numa visão eurocêntrica – foi influenciada pelos ideais de racionalidade da revolução francesa, movimento que impulsionado pela burguesia e das classes não elitizadas. Além dos princípios de princípios da liberdade, da igualdade, da fraternidade, no campo acadêmico o método analítico era defendido, e por conta disso a toda a Matemática foi dominada pela hegemonia da Álgebra. A ciência que antes exercia pouca influência na sociedade, passou a ser usada para disseminar a racionalidade dentre os alunos. Mudanças no currículo deixaram as disciplinas de Química e Matemática no começo dos estudos, e não no último ano do ensino secundário da época, assolado pela evasão.

Assim, a pesquisa que antes era bancada pela realeza e nobreza, agora fora institucionalizada com a criação de centros de formação de engenheiros e cientistas, como a francesa École Polytechnique, de 1794. O capitalismo ganhava força, bem como ideias do uso da ciência em seu favor, principalmente na indústria e armamento. A historiadora e Matemática Tatiana Roque (2012) ressalta como a revolução moldou os novos currículos de ensino de Matemática, responsáveis pela nova geração de cientistas daquele tempo.

Foi nesse contexto que Lagrange e Lacroix produziram livros-texto que se tornaram ferramentas cruciais para o ensino superior da Matemática, formando gerações de matemáticos de peso, como o próprio Cauchy. Essas instituições públicas geraram uma inédita padronização do currículo que tinha no método analítico, praticado pela Matemática e pela Química, seu principal elemento. No contexto mais geral, na tradição do racionalismo, esse método já havia sido defendido pelo filósofo iluminista

francês Étienne Bonnot de Condillac. Na matemática, a abordagem algébrica da análise podia vencer o conceito sintético (geométrico) das quantidades infinitamente pequenas (ROQUE, 2012, p. 308-309).

A Química analítica da época já permitia uma série de descobertas oriunda pela adoção de simbologia ao invés dos métodos mais sintéticos. Assim, o operar com símbolos se tornou uma alternativa viável também na Matemática através das ferramentas operacionais da álgebra.

Antes de seguir, retornaremos as contribuições de Euler. A primeira foi a operacionalização algébrica do Cálculo aqui já mencionada. A Segunda foi as suas considerações sobre o infinito no que se referia a transição natural do Cálculo Infinitesimal para o Cálculo Diferencial – fortemente ignorada na época. No curso inaugural de Análise em 1795 da École Polytechnique, criou-se livros textos que se baseavam nos primeiros capítulos do Livro de Euler, disseminando as funções como principal objeto da análise e adotando fortemente suas notações, embora tenha excluído o viés do infinitamente pequenos.

Havia também movimentos mais radicais que expressavam a vontade de libertar a Matemática das noções ambíguas, como na obra de Lagrange (1736-1813) intitulada “*Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d’infiniments petits, d’évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l’analyse algébrique des quantités finies*” ou Teoria das funções analíticas, contendo os princípios do cálculo diferencial, livres de qualquer consideração de infinitamente pequenos, evanescentes, limites e fluxões, e reduzidos à análise algébrica de quantidades finitas, de 1797.

A rejeição dos infinitamente pequenos de Euler e fluxões de Descartes eram comuns nos livros de Cálculo desta época. Três anos mais tarde seria publicado a última versão do Tratado do Cálculo Diferencial e Integral, contribuindo para difundir novas ideias sobre a Análise e apaziguar os ânimos da comunidade científica. Escrito por Lacroix (1765-1843), este projeto era uma coletânea dos princípios de toda a análise daquele momento, tentando reestruturar a análise propriamente dita. O livro era favorável a ideia de função como sendo centro da Análise, mas trazia definições mais gerais, como a de função - toda quantidade que depende de outras quantidades é dita “função” dessas últimas, ainda que não se saiba por meio de que operações se pode passar destas à primeira. O uso do símbolo “ f ” para representar funções em geral também foi proposto nesse tratado (ROQUE, 2012).

Movimentos como esse tiveram papel definitivo no abandono das referências geométricas da Análise para se fundamentar somente na álgebra. As deduções ficariam cada vez mais algébricas algoritmizadas. Assim, problemas de análise de curvas era feito por meio de fórmulas e teoremas, e os teoremas provados por relações lógicas entre as mesmas formulas.

No entanto, tais concepções eram as mais gerais possíveis, confiantes demasiadamente no sucesso do método analítico, validando a maioria dos resultados, excluindo casos especiais. Assim, a generalidade da álgebra perde força no século XIX, por Cauchy (1789-1857) e outros matemáticos, com uma linha científica de tornar a Matemática mais rigorosa e não tão generalista. A busca pelo rigor matemático expandiram o universo de funções conhecidas por Euler. Assim, o conceito de função é novamente discutido e aprimorado, por meio de outro problema físico, quase um século depois.

Como o calor se propaga em uma massa sólida, dadas certas condições iniciais? Este foi um dos trabalhos de Fourier (1768-1830) que datam do início do século XIX, que teve o papel fundamental de redefinir o conceito de função. “Quando o calor é desigualmente distribuído em diferentes pontos da massa sólida, ele tende a se colocar em equilíbrio e passa lentamente das partes mais quentes às menos quentes, como se estivesse em um tubo que atravessa perpendicularmente as curvas de mesma temperatura sobre a superfície sólida” (ROQUE, 2012, p. 317). Ao resolver o problema, Fourier trouxe à tona um novo recurso, que considerava apenas um intervalo predeterminado para solucionar o problema inicial. Assim, surgiam os primeiros trabalhos que traziam os conceitos de domínio de funções que conhecemos hoje.

Desta maneira, a obra *Théorie analytique de la chaleur* (Teoria analítica do calor) de 1822 trazia uma nova definição do conceito de função, levando em conta um único valor correspondente da ordenada fx , dado um único valor para cada abscissa x .

Em geral, a função fx representa uma sucessão de valores, ou ordenadas, os quais cada um é arbitrário. Uma infinidade de valores sendo atribuídos à abscissa x , existe um número igual de ordenadas fx . Todas têm valores numéricos atuais, ou positivos, ou negativos, ou nulos. Não se supõe que essas ordenadas estejam sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem uma à outra de um modo qualquer, e cada uma delas é dada como se fosse uma única quantidade (FOURIER *apud* ROQUE, 2012, p. 320).

Até aqui, vemos que o estudo das funções caminhava junto com o estudo das expressões analíticas, o que era reafirmado na época pela celebre profissão matemática de encontrar uma função dada uma curva. Contudo, uma mesma função pode ser representada por várias expressões analíticas diferentes num mesmo domínio. Ao resolver o problema físico, como era comum na época, Fourier desenvolveu um novo tipo de série para o estudo das funções relacionadas ao problema do calor, porém nunca chegou a demonstrar as suas afirmações. Mais tarde em 1837, Dirichlet (1805-1859) retomou o problema dando condições especiais para que a série de Fourier pudesse realmente ocorrer.

Dessa maneira, as definições de funções foram desprendidas das ideias de expressões analíticas. Através de Dirichlet, surgiu-se uma nova definição de função aprimorada das ideias

de Fourier, como sendo correspondência arbitrária entre variáveis que representam conjuntos numéricos. Uma função, então, tornou-se uma correspondência entre duas variáveis, de modo que, para qualquer valor da variável independente, haja um e apenas um valor da variável dependente (PONTE, 1992).

A partir daí a noção de função englobaria também as definições de teoria de conjuntos, satisfazendo as condições de unicidade entre os conjuntos numéricos, aumentando ainda mais o leque de funções conhecidas, já no século XX. Com o desenvolvimento paralelo da álgebra, a noção de função passa também a ser considerada como um caso especial de relação. Ponte (1992) destaca ainda que, essa relação é entendida hoje em dia como uma sucessão de regras, tal qual vista na linguagem computacional ou nas definições atuais de função nos livros de Cálculo – deixando de lado o teor discursivo em suas definições.

Num olhar rápido ao passado da Matemática, historicamente o conceito de função em seus primórdios era usada como correspondência entre entidades, e (bem) mais tarde ficaria explícito que essas entidades eram representações geométricas. É muito recente os caminhos que a função percorreria se pensarmos em outras áreas da Matemática, como a Geometria que remonta pelo menos 300 a.C. A eficiência do método analítico e os movimentos de algebrização na análise tornarão a função como peça fundamental da atividade matemática, física e química.

Finalmente, concorda-se com PONTE (1992) que, de fato, a associação de funções com as representações de curvas e expressões fundadas nas ferramentas algébricas se revela tão bem-sucedido no passado que ainda hoje tem papel essencial na prática da Matemática atual – e é justamente essas associações que são defendidas e estudadas neste trabalho.

1.3 Motivações do Estudo da Física nas Funções

Como vimos, a trajetória das funções e seu conceito matemático não se desenvolveu aleatoriamente. A Física teve um papel primordial, uma vez que a cada conceito de função foi aprimorado ou estendido de acordo com problemas físicos que assombravam os acadêmicos passados. Deste modo, segundo CARAÇA (1951) *apud* PONTE (1992) as funções e seu desenvolvimento conceitual podem ser vistas como a ferramenta matemática necessária para o estudo de fenômenos naturais, iniciado por Galileu e Kepler (1571-1630).

As noções de Álgebra e simbologia de VIÈTE (1540-1640) que fizeram as funções ganhar espaço na Álgebra, tal qual as curvas da Geometria Analítica vindas de DESCARTES e FERMAT (1601-1665) impulsionaram as funções como sendo uma linguagem mais apropriada para representar modelos e problemas físicos.

Na física, as ideias de variação surgiam de forma natural, assim como relações direta e inversamente proporcionais. Newton já usava as funções diferenciais para estudo e resolução de problemas físicos – aceleração é derivada da velocidade, que é derivada da função de deslocamento.

Desta maneira, segundo PONTE (1992) a origem da definição moderna de função está relacionada a três elementos principais do século XVII e XVIII: (a) a álgebra, carregando aspectos importantes como simplicidade e rigor, permitindo a manipulação de expressões analíticas e condensando em si uma grande quantidade de informação; (b) geometria, sendo uma base fundamental e de intuitiva representação, que como vimos, dava espaço para estudos de dependência e derivadas como retas tangentes; e (c) a conexão com os problemas concretos do mundo físico, associada à ideia de regularidade, proporcionando a motivação fundamental e interesse pelo estudo das famílias de funções.

Contudo, as funções foram se abstraindo, de forma natural como parte integrante da ciência matemática, em que passaram a ser consideradas funções com ou sem representações algébricas, funções descontínuas e funções transcendentais à época. Perceba que as origens das funções quanto a sua relevância em problemas físicos aos poucos deixariam lugar para uma Matemática mais rigorosa, abstrata e menos generalista – ao ponto que chegamos na atualidade.

1.4 As funções hoje: as definições presentes nos livros de Cálculo

A noção atual de função abrange um gama de características, indexadas aos trabalhos de teoria de conjuntos, Álgebra e Geometria. Assim, a Análise atual convencionou definições apropriadas e sensatas ao conceito de função, embora carregue as ideias principais das definições apresentadas no passado.

Os livros e trabalhos atuais trazem definições de funções que convergem para um mesmo ideal, salvo de algumas mudanças na sintaxe de apresentação em função dos autores das obras. Assim, os próximos parágrafos trazem as definições mais importantes acerca das funções de duas ou mais variáveis reais a valores reais presentes obras didáticas de Cálculo Diferencial e Integral diferentes publicados no Brasil.

As próximas linhas, serão apresentadas as definições acerca de função de duas ou mais variáveis reais a valores reais presentes em alguns livros de Cálculo, que contemplam o ensino desse tipo de função. A escolha desses livros não se deu ao acaso, o que é explicado no capítulo 3 deste trabalho.

Na página 815, na 6ª edição do livro *Cálculo* - volume 2 de James Stewart, de 2010 na seção 14 em que se trata as derivadas parciais e antes de se definir as funções de várias variáveis,

é introduzido um pequeno problema físico de temperatura e outro de volume. No primeiro, fica entendido que a temperatura numa região terrestre depende de sua longitude e latitude. No outro, é trago a informação que o volume de um objeto cilíndrico depende de seu raio e de sua altura. Essas problematizações servem para motivar a primeira definição sobre as funções de duas variáveis.

Quadro 1 – Definição Stewart 1 – função de duas variáveis

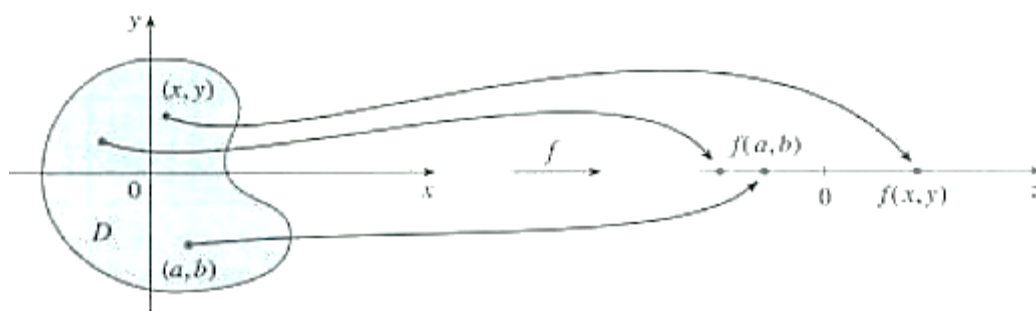
Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D um único valor real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o *domínio* de f e sua *imagem* é conjunto de valores possíveis de f , ou seja, $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

Fonte: Stewart (2010)

Para complementar essa definição, o autor nos lembra da forma explícita para representar tais funções – $z = f(x, y)$ – e indica que as variáveis x e y são independentes e z como sendo dependente. De forma resumida, o autor então descreve uma outra definição usando diagramas.

Quadro 2 – Definição Stewart 2 – função de duas variáveis

Uma função de duas variáveis é simplesmente aquela cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas (na figura abaixo, extraída da p. 815 do livro de referência), no qual o domínio D é representado como um subconjunto do plano xy .



Se a função f é dada por uma fórmula e seu domínio não é especificado, fica subentendido que o domínio f é o conjunto de todos os pares (x, y) para os quais a expressão dada fornece um número real bem definido.

Fonte: Stewart (2010)

Conceitos importantes como domínio e imagem de uma função são definidos implicitamente por meio de exemplos resolvidos, tendo o cuidado de apresentar as funções com

diferentes representações. Mas antes de inserir um exemplo gráfico, outra maneira de visualizar os comportamentos das funções, e inserida a terceira definição.

Quadro 3 – Definição Stewart 3 – gráfico de função de duas variáveis

Se f é uma função duas variáveis com domínio D , então o gráfico de f é conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertença a D .

Fonte: Stewart (2010)

A partir deste ponto, o conceito de função duas variáveis são estendidas para três ou mais variáveis, a saber, ambas na página 824.

Quadro 4 – Definição Stewart 4 – função de três variáveis

Uma função de três variáveis, f , é uma regra que associa cada tripla ordenada (x, y, z) em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ um único número real, denotado por $f(x, y, z)$.

Fonte: Stewart (2010)

Quadro 5 – Definição Stewart 4 – função de n variáveis

Uma função com n variáveis é uma regra que associa um número real $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ à n -upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de números reais. Denotamos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas as n -uplas.

Fonte: Stewart (2010)

George B. Thomas, em seu livro (12ª edição de *Cálculo* - volume 2, publicado em São Paulo pela Pearson Education do Brasil em 2012) também na seção em que se aborda as derivadas parciais, é introduzido o mesmo exemplo de relação entre volume e raio num cilindro circular, justificando assim sua abordagem. De forma geral, são abrangidas todas as funções numa única definição.

Quadro 6 – Definição Thomas 1 – função de várias variáveis

Suponha que D seja um conjunto de n -uplas de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Uma função a valores reais f em D é uma regra que associa um único número real

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a cada elemento em D . o conjunto D é o domínio da função. O conjunto de valores w assumidos por f é a imagem da função. O símbolo w é a variável dependente de f , e dizemos que f é uma função de n variáveis independentes x_1 a x_n . Também chamamos os x_j de variáveis de entrada da função, é denominamos w a variável de saída da função.

Fonte: Thomas (2012)

Dessa maneira, se faz uma generalização em relação a função de duas variáveis reais a valores reais, em que é dito que x e y são as variáveis independentes, z é a variável independente e se pode representar o domínio de f como uma região no plano xy , como mostra a figura extraída da página 210 do livro referência, idêntica a encontrada na obra de Stewart. Note que a edição 11 deste mesmo livro não traz tal figura.

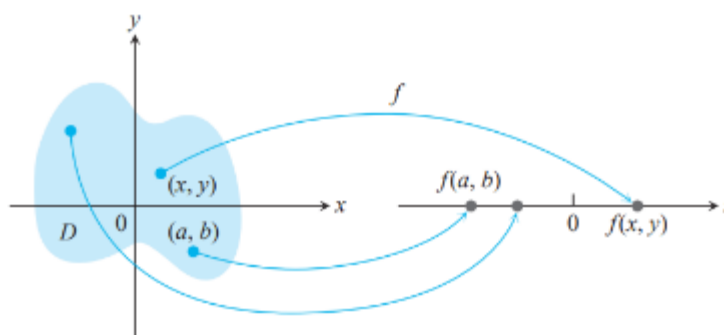


Figura 1. Diagrama de setas para a função $z = f(x, y)$. (Thomas, 2012)

Já para funções de três variáveis a valores reais, denomina-se x , y e z como variáveis independentes, w como variável dependente e seu domínio pode ser representado como uma região no espaço tridimensional.

O conceito de domínio é dito como o maior conjunto de entrada para o qual a regra gera números reais. Os conceitos de gráficos, curvas e superfícies de nível também são inseridos como formas de visualizar as funções e seus valores.

Quadro 7 – Definição Thomas 2 – gráfico de função de duas variáveis

[...] o conjunto de todos os pontos $(x, y, f(x, y))$ no espaço, para (x, y) no domínio de f , é denominado gráfico de f . O gráfico de f também é conhecido como superfície $z = f(x, y)$

Fonte: Thomas (2012)

Finalmente, Guidorizzi (5ª edição do livro *Um Curso de Cálculo – Volume 2*, publicado no Rio de Janeiro pela LTC em 2001) define as funções de somente duas e três variáveis, numa linguagem mais algébrica que as anteriores. Não há nenhum exemplo motivador para introduzir as definições, apenas a menção desse tipo de função em vários ramos da ciência, a saber:

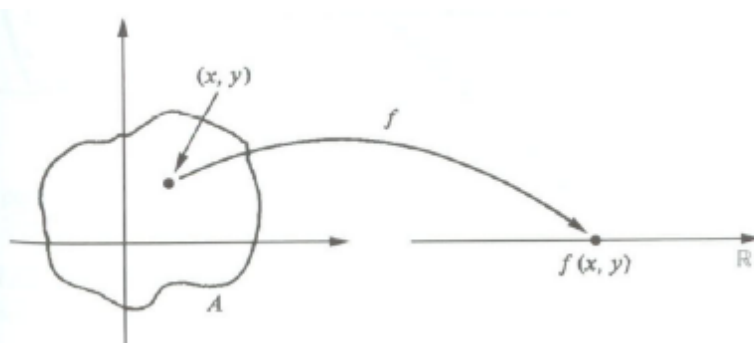
Quadro 8 – Definição Guidorizzi 1 – função de duas variáveis

Uma função de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, onde A é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Uma tal função associa, a cada par $(x, y) \in A$, um único número $f(x, y) \in \mathbb{R}$.

O conjunto A é o domínio de f e será indicado por D_f . O Conjunto

$$Im_f = \{f(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in D_f\}$$

é a imagem de f . as palavras *aplicação* e *transformação* são sinônimas de função.



f transforma o par (x, y) no número $f(x, y)$.

Fonte: Guidorizzi (2001)

De forma a simplificar o estudo de funções, Guidorizzi ainda define o conceito de domínio como maior subconjunto do $\mathbb{R}^2$ em que se faz sentido a regra em questão. Quanto a sua definição de gráfico de função de duas variáveis, o autor expõe:

Quadro 9 – Definição Guidorizzi 2 – gráfico de função de duas variáveis

Seja $z = f(x, y)$, $(x, y) \in A$, uma função real de duas variáveis reais. O conjunto

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in A\}$$

Denomina-se gráfico de f .

Fonte: Guidorizzi (2001)

Para as funções de 3 variáveis reais a valores reais, e definido juntamente com seu gráfico – embora não seja possível representar geometricamente.

Quadro 10 – Definição Guidorizzi 3 – gráfico e função de três variáveis.

Uma função de três variáveis reais a valores reais, definida em $A \subset \mathbb{R}^3$, é uma função que associa, a cada terna ordenada $(x, y, z) \in A$, um único número real $w = f(x, y, z)$. O gráfico de tal função é o conjunto

$$G_f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid w = f(x, y, z), (x, y, z) \in A\}$$

Fonte: Guidorizzi (2001)

Nota-se que alguns livros não trazem definições aquém dessas, como por exemplo, há livros que não conceitualizam gráficos de 3 variáveis ou funções de n variáveis. Ainda assim, é notável o quão rico é o campo das funções, se valendo de ferramentas algébricas, de teoria de conjuntos, diagramas, geometria e outras áreas da ciência Matemática para definir o que demorou séculos para ser explorado, construído e delimitado no passado. Veja isso nas diferentes formas de se apresentar as definições de acordo com a ótica de cada autor, que apesar de serem diferentes tentam ser o mais fiel e próximo ao que se consolidou como definição de conceito de função ao longo do tempo.

Convenientemente, tomaremos a liberdade de chamar daqui por diante as funções de duas ou mais variáveis reais a valores reais ou suas representações apenas de funções de duas, três ou n variáveis.

CAPÍTULO 2

O PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS

2.1 Introdução

Diferentes das ciências empíricas, a Matemática exige um maior grau de abstração, uma vez que seus objetos de estudo não são “palpáveis” como nas outras ciências exatas. Felizmente, tais objetos podem ser representados de diversas maneiras, usando ferramentas matemáticas adequadas. Assim, a compreensão do objeto matemático se torna menos complicada, do ponto de vista cognitivo.

Historicamente, pelo menos duas representações de função (equações e curvas) caminharam juntas, e esta associação se mostrou na prática bem-sucedida, como aponta PONTE (1992). E ele não estava enganado. O pesquisador francês Raymond Duval, filósofo e psicólogo, em seus estudos acerca da aprendizagem matemática desde a década de 70, vem discutindo como papel dos registros de representação semiótica (as representações registradas, ou seja, fora do campo mental) torna eficaz a apreensão do conhecimento matemático.

Assim sendo, este capítulo apresenta as principais teorias de Duval quanto a aprendizagem em Matemática, que foram o alicerce para as análises dos dados coletados neste trabalho.

2.2 A semiose e noesis no pensamento cognitivo

O verbo representar é palavra presente nos planejamentos dos professores como objetivo de aprendizagem. Geralmente, carrega como finalidade de levar aluno a representar um conceito ou ideia de maneira a utilizar ferramentas matemáticas previamente selecionadas. O representado também ganha importância, são as formas que se tem em apresentar algum objeto Matemático.

Veja que, pelo que foi discutido até aqui, a representação se sobressai ao objeto representado. Quando falamos de reta ou de funções, logo pensamos nas representações destes objetos, como o traçado da reta em papel ou nas equações e seus gráficos. Apesar de serem boas representações, estas não devem ser confundidas com o objeto matemático que foi representado.

Segundo Duval (2012) os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis a percepção ou experiência intuitiva imediata em relação aos ditos reais ou físicos. Assim, o uso de representações aproxima essa relação de percepção que normalmente não se teria no campo dessa ciência não empírica. Caímos então no seguinte paradoxo cognitivo: embora a apreensão do objeto seja conceitual é somente através das representações que o estudo sobre os objetos se torna possível. Se voltarmos as discussões, ficam as seguintes perguntas: Como os sujeitos em aprendizagem podem não confundir as representações com os objetos dado a impossibilidade de acesso direto aos objetos senão pelas próprias representações? Ainda de acordo com o autor, esse dilema só não é tão promissor porquê no ensino se considera as representações semióticas (note que é a primeira vez que o termo semiótico aparece, em referência às representações que o aluno produz ou registra) como sendo algo de fora e de papel secundário. Se dá muito mais valor as representações mentais do que as representações semióticas (DUVAL, 2012).

Há muitas diferenças entre as duas representações: enquanto as mentais ficam no campo da mente, como algo se visualiza ou todas as conceitualizações que se tem acerca de um objeto, as representações semióticas são muito mais que a exteriorização dessas imagens mentais no mundo físico, mas “produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento” (DUVAL, 2012). Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma equação algébrica ou gráfico são representações semióticas que mostram sistemas semióticos distintos. Engana-se então, que o papel das representações semióticas visa somente comunicação a

outrem (por meio da exteriorização e materialização de ideias). Elas são peças chaves na atividade cognitiva do pensamento e aprendizagem matemática em três itens:

(a) no desenvolvimento das representações mentais: estas dependem de uma interiorização de representações semióticas, do mesmo modo que as representações mentais são uma interiorização daquilo que é percebido [...]; (b) na realização de diferentes funções cognitivas: a função de objetivação (expressão particular) que é independente daquela de comunicação (expressão para outrem), e a função de tratamento que não pode ser preenchida pelas representações mentais (algumas atividades de tratamento são diretamente ligadas à utilização de sistemas semióticos, por exemplo, o cálculo); (c) a produção de conhecimentos: as representações semióticas permitem representações radicalmente diferentes de um mesmo objeto, na medida em que elas podem atender sistemas semióticos totalmente diferentes. [...]. Assim, o desenvolvimento das ciências está ligado a um desenvolvimento de sistemas semióticos cada vez mais específicos e independentes da língua natural [...] (DUVAL, 2012, p. 269).

Desse modo, fica evidenciado que as representações mentais e as representações semióticas são duas atividades indissociáveis, uma vez que a primeira e sua interiorização depende da segunda, que ainda exerce papel importante nas funções cognitivas do pensamento. Logo, há a implicação de que a chamada *semiose*, termo ligado a produção de representações semióticas e a *noesis*, termo ligado a apreensão conceitual de objetos e as representações mentais, caminham juntas. Retraduzindo o paradoxo cognitivo do pensamento, é notável que não há noesis sem semiose, embora a história do ensino em Matemática nos induz a pensar que a atividade cognitiva da noesis é bem mais relevante que a semiose. No entanto, segundo DUVAL (2012) é essencial poder mobilizar muitas representações durante a atividade matemática como figuras, gráficos, símbolos, linguagem materna e etc. E somente assim, que o recorrer “a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações” (Duval, 2012, p.270).

Assim, a coordenação de muito registros de representação semiótica é necessária para a apreensão dos conceitos dos objetos. Fica aqui também o apelo de que as representações não devem ser confundidas com o objeto representado, mas que cada objeto seja reconhecido através de suas diferentes representações, que dão acesso ao objeto. E é tão forte a ligação entre semiose e noesis no funcionamento cognitivo do pensamento e o papel primordial que a primeira exerce nesse campo de estudo que ela se auto justifica na coordenação de muitas representações semióticas na apreensão de objetos.

2.3 A semiose e registros de representação

De acordo com DUVAL (2012), para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose: a formação, o tratamento e a conversão.

A formação de uma representação identificável é como uma representação de um registro dado, como um enunciado, a composição de uma frase, a confecção de um desenho, esquemas, diagramas e etc. ela implica na seleção de relações e de dados a representar em função de unidades e regras próprias da representação a ser registrada. Isso tem o posto de assegurar que essa representação será reconhecida e identificada e possibilita os tratamentos (que serão abordados a seguir). DUVAL (2012) ainda destaca que essas regras são de conformidade, e não são regras de produção efetiva por um sujeito. Isto quer dizer que o conhecimento de regras de conformidade não está relacionado a competência para formar representações, mas somente para reconhecê-las.

O tratamento de uma representação é a transformação dessa representação no mesmo registro em que ela se formou, algo interno e não há coordenação de outros registros de representação diferentes. As regras usadas na formação são empregadas aqui, em que cada registro carrega suas próprias regras necessárias para o tratamento. Temos as regras de derivação, regras de desenho geométrico, as regras de cálculo, enfim. Segundo DUVAL (2012), a Paráfrase e inferência são tratamentos em língua natural, o cálculo e uma forma de tratamento em expressões simbólicas, a reconfiguração é um tipo particular de tratamento ligado as figuras geométricas e a Anamorfose é o tratamento que se destina a toda representação figural.

Por fim, a conversão de uma representação é transformação de um registro inicial em outro, conservando sua totalidade ou parte de seu conteúdo, em um novo sistema semiótico com suas regras próprias, como na formação. A ilustração é uma conversão de representação linguística para figural, a tradução é a conversão de duas línguas diferentes, a descrição é a conversão de algo não linguístico para o uma representação linguística, dentre outros exemplos. No entanto, DUVAL (2012) atenta de que a as atividades cognitivas de conversão e tratamento não dependem uma da outra. Um exemplo claro trazido pelo psicólogo em seus trabalhos é o de alunos que vão resolver operações com expressões fracionárias e decimais e não convertem um registro ao outro e vice-versa. Logo, não há certa percepção de que os mesmos números podem ser representados de forma decimal e fracionária. A conversão requer que se perceba a diferença entre o que Frege (1971) *apud* DUVAL (2012) chamaria de sentido e referência dos

símbolos ou dos signos. Nos casos anterior, usa-se outros tratamentos e significantes (0,5 e $\frac{1}{2}$ por exemplo), mas representam o mesmo objeto.

Ainda de acordo com DUVAL (2012) a conversão não é uma interpretação, que nada mais é que uma contextualização de sentidos novos e que não muda de registro ou uma codificação, que apesar de migrar de um registro para outro, usa regras próprias de correspondência de cada símbolo, aplicadas diretamente nos significantes (espécie de objeto matemático final de cada representação semiótica), sem levar em conta sua representação e o sistema semiótico. Logo, é plausível afirmar que na conversão não há regras para realização dessa, bem como, na formação e tratamento, sendo uma atividade livre e criativa.

Considerando a semiose como importante função cognitiva na atividade matemática, dois pontos geralmente são considerados, ainda que marginalizados por DUVAL.

(a) a conversão das representações acontece por si mesma desde que haja capacidade de formar representações nos registros diferentes e efetuar tratamentos sobre as representações [...]; (b) a conversão não tem nenhuma importância real para a compreensão dos objetos ou dos conteúdos representados, pois o seu resultado se limita a uma mudança de registro (DUVAL, 2012, p.277).

Elas são legitimadas se for atingida certa autonomia nos processos de formação e tratamento pelos sujeitos em aprendizagem. Mas tome cuidado: essas duas afirmações escondem um fato importante de que a conversão desempenha um papel importante na apreensão de conceitos e significados dos objetos. Isso é percebido na pluralidade de registros de representação que podem ser organizados, no quadro a seguir.

Quadro 11 – Organização dos registros no funcionamento matemático

Registros Multifuncionais	O seu processo de tratamento não utiliza algoritmos	Exemplos de representação discursiva.	Exemplos de representação não discursiva.
		Língua natural e as formas de raciocínio como argumentações escritas ou deduções válidas a partir de definições ou teoremas.	Figuras planas a tridimensionais: apreensão operatória e não somente perceptiva, construções geométricas.
Registros Monofuncionais	O seu processo de tratamento faz uso dos algoritmos	Exemplos de Representação discursiva	Exemplos de representação não discursiva
		Os sistemas de escrita matemática (numérica, algébrica e simbólica).	Gráficos cartesianos: mudanças de coordenadas e interpolações/extrapolações lineares

Fonte: Duval (2003) com adaptações do autor

2.4 A noesis e (coordenação) registros de representação

Na ligação entre semiose e noesis, destacam-se duas situações relacionadas à atividade do pensamento humano, lembradas por DUVAL em 2012 em seu artigo. A primeira é que a utilização de muitos registros de representação é característica única e exclusiva da inteligência humana, se comparada a inteligência artificial e animal. O segundo é que o progresso dos conhecimentos é sempre acompanhado da criação e do desenvolvimento de sistemas semióticos novos e específicos que mais ou menos coexistem com o primeiro entre eles [...] (GRANGER, 1979 *apud* DUVAL, 2012).

O porquê de toda essa coordenação de registros na aprendizagem e sua múltipla existência é explicada por meio de três respostas de Duval (2012): (a) a economia de tratamento, que diz respeito em poder escolher e mudar o registro que mais lhe será econômico em relação aos custos de tratamento, algo visto em na relação entre registros de língua natural em relação aos registros algébricos por exemplo, sendo esse último considerado mais fácil compreensão; (b) a complementaridade dos registros, ao dizer que uma representação é cognitivamente parcial em relação ao objeto que se representa. Nesse caso, o uso de múltiplas representações semióticas tenta compensar essa situação e (c) a conceitualização implica na coordenação de registros de representação, tenho duas hipóteses plausíveis: se o registro de representação é bem escolhido, eles são suficientes para permitir a compreensão do conteúdo representado ou a compreensão de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, de maneira espontânea.

Como colocado anteriormente, a não coordenação de registros não impedem a conceitualização do objeto matemático:

[...] ausência de coordenação não impede toda compreensão. Mas esta compreensão, limitada ao contexto semiótico de um registro apenas, não favorece em nada as transferências e as aprendizagens ulteriores: torna os conhecimentos adquiridos pouco ou não utilizáveis em outras situações aonde deveriam realmente ser utilizados. Em definitivo, esta compreensão mono-registro conduz a um trabalho às cegas, sem possibilidade de controle do “sentido” daquilo que é feito (DUVAL, 2012, p.283).

Porém o processo perde parte de seu potencial e sua aprendizagem tende a ser menos significativa.

Ainda de acordo com DUVAL (2012) a coordenação de imagens mentais e língua natural não é mais suficiente para assegurar a múltipla coordenação de registros semióticos mobilizados durante a atividade matemática. Apesar disso, fica mais que justificado a coordenação de registros diferentes como alicerce para as aprendizagens matemáticas. É a

condição fundamental para todas as aprendizagens de base, ao menos nos domínios em que os únicos dados que são utilizados são as representações semióticas (DUVAL, 2012).

2.5 Os fenômenos de Congruência e não congruência

Em defesa da coordenação de múltiplos registros de representação semiótica na atividade matemática, ainda existem certos inconvenientes que levam o isolamento de representações ou a compreensão mono-registro. Para entender essa problemática, traremos algumas considerações sobre sentido e referência, no campo cognitivo.

Frege (1971) *apud* Duval (2012) introduziu uma importante distinção entre significação, que depende do registro escolhido e referência, que depende do objeto a ser representado. Assim, podemos delimitar o seguinte problema realçado por Duval (2012): a possibilidade troca entre duas expressões referencialmente equivalentes. Ainda de acordo com o mesmo autor, essa troca, realizada por sujeitos em aprendizagem, representa um salto entre duas redes semânticas, não sendo perceptíveis por eles, de forma arbitrária. Segundo, Duval (2012), essa condição ocorre por dois caminhos: significação e referência:

[...] do ponto de vista da constituição objetiva do saber, a substituição, que permite desenvolver o cálculo e a demonstração, funciona em relação à referência. Mas, do ponto de vista da apropriação subjetiva do saber matemático, a substituição funciona primeiramente em relação ao sentido associativo interno[...] (DUVAL, 2012, p.100).

Ou seja, a troca de uma expressão referencialmente equivalente por outra de igual referência visando apenas o objeto e fomentando o procedimental é diferente da troca de uma expressão objetivada por sua significação (sendo essa mais apreensível na ótica da aprendizagem). Esses dois caminhos dependem exclusivamente do que que Duval chama de congruência ou não congruência semântica de expressões a serem trocadas. Assim, duas expressões (referencialmente equivalentes) podem ser ou não ser semanticamente congruentes. O que comanda essa dualidade na congruência são os custos cognitivos presentes no processo de aprendizagem: quanto mais custoso é, essa se aproxima da não congruência.

Note que na atividade matemática, o que primeiro é analisado é a equivalência referencial. Segundo Duval (2012), esse procedimento condiz com a condição necessária para que haja sentido no pensamento natural: a continuidade semântica e associativa entre as expressões a serem trocadas. Um exemplo trago pelo autor é quando um aluno ou sujeito em

aprendizagem não percebe o custo intelectual exigido em atividades matemáticas. Ele faz, automaticamente, da congruência semântica condição necessária e as vezes suficiente para equivalência referencial. Ele irá ficar feliz nas substituições de expressões que são congruentes, mas relutará nas trocas não congruentes, mesmo que sejam referencialmente equivalentes. Assim, Duval (2012, p. 100) conclui que a Matemática, excluindo o cálculo aritmético elementar, mostra-se geralmente mais arbitrária do que “lógica”.

A substitutividade de expressões referencialmente equivalentes, nas palavras de Duval (2012) é uma característica essencial a qualquer registro de representação semiótica, principalmente nas mudanças, que em Matemática são frequentes, seja nas substituições mais imediatas como na coordenação de texto e figura ou nas passagens de escrita algébrica para sua representação gráfica.

Paralelamente a isso, é notável que a equivalência referencial se sobrepõe a congruência semântica. Dessa forma, o funcionamento espontâneo do pensamento segue majoritariamente os ditos da congruência semântica (Duval, 2012) dando ênfase as substituições menos complicadas e mais simples, trazendo à tona uma das justificativas da atividade cognitiva ligada a semiose chamada conversão, a economia de tratamento.

O que torna essas substituições fáceis ou difíceis são os processos de codificação responsáveis por relacionar cada elemento de uma rede semântica (na ideia de expressões referencialmente equivalentes) ou registro semiótico a outro diferente. Assim, a possibilidade de troca entre duas expressões segundo Duval (2012), enfrenta dificuldades relacionadas as regras de correspondência entre os registros. A partir desse momento, se pode também definir a não congruência como ocorrência entre alunos que não enxergam o mesmo objeto matemático dentre uma representação de partida e uma segunda de chegada, pondo em risco a atividade cognitiva de conversão, presente na semiose devido a dificuldades e não trivialidade dos custos em codificação exigida na substituição. A importância desse fenômeno na matemática se auto justifica na aprendizagem de certos conteúdos, uma vez que a atividade matemática geralmente depende de muitas trocas entre expressões ou mudanças de registros e quase sempre estas são ditas não congruentes.

Desta forma, as dificuldades e especificidades inerentes ao fenômeno de não congruência semântica é evidenciada em estudos acerca da teoria de registros de representação semiótica, de maneira que a atividade matemática não se prive da apreensão conceitual seja ela qual for por causa do processo de troca de uma expressão/representação a outra equivalente.

CAPITULO 3

ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA E FUNÇÕES

3.1 Introdução

Em metodologia científica, a pesquisa bibliográfica é, “por excelência, uma fonte inesgotável de informações, pois auxilia na atividade intelectual e contribui para o conhecimento cultural em todas as formas do saber. ” (FACHIN, 2005, p.119). Este capítulo apresenta os procedimentos adotados na pesquisa deste trabalho, bem como os percursos do processo de coleta e análise de dados nos livros didáticos que abordam o conteúdo de função de duas ou mais variáveis, tendo como pano de fundo, o diálogo entre a teoria de registros de representação semiótica e pesquisa bibliográfica.

3.2 A pesquisa bibliográfica nos livros de Cálculo “2”

O caráter bibliográfico deste trabalho se deu devido à natureza do processo em que ele nasceu. Ainda em esboço, se via uma forte silhueta de análise de funções de duas ou mais variáveis, sem teoria definida até então. Como este conteúdo é inerente ao ensino superior, os

livros didáticos de Cálculo serviriam para coleta de dados e ajudariam na tarefa de tentar responder à pergunta de pesquisa, ainda em esboço.

Desta maneira, pesquisa bibliográfica se tornou mais atraente para a execução deste trabalho. Tomou-se como base a definição de FACHIN (2003), que considera tal modalidade de pesquisa como a união de conhecimentos em obras, aqui se entende em produções humanas, de qualquer natureza, com a finalidade de pesquisar tal assunto em prol do saber. Com uma abordagem qualitativa, tomou-se a considerações de Creswell (2007), ao dizer que:

A investigação qualitativa emprega diferentes alegações de conhecimento, estratégias de investigação e métodos de coleta e análise de dados. [...] os procedimentos qualitativos se baseiam em dados de texto e imagem, têm passos únicos na análise de dados e usam estratégias diversas de investigação (CRESWELL, 2007, p. 184).

E ainda

A pesquisa qualitativa é fundamentalmente interpretativa. Isso significa que o pesquisador faz uma interpretação dos dados. Isso inclui o desenvolvimento da descrição de uma pessoa ou de um cenário, análise de dados para identificar temas ou categorias e, finalmente, fazer uma interpretação ou tirar conclusões sobre seu significado, pessoal e teoricamente, mencionando as lições aprendidas e oferecendo mais perguntas a serem feitas [...]. Não é possível evitar as interpretações pessoais, na análise de dados qualitativos. (CRESWELL, 2007, p. 186-187).

Dessa forma, entende-se que a abordagem qualitativa é mais subjetiva se comparada a investigação quantitativa, o que torna a pesquisa em si mais apta de responder à questão de pesquisa, que leva o pronome relativo “como” com sentido de adjunto adverbial de modo ou maneira – algo bem relativo e não passível de quantificação.

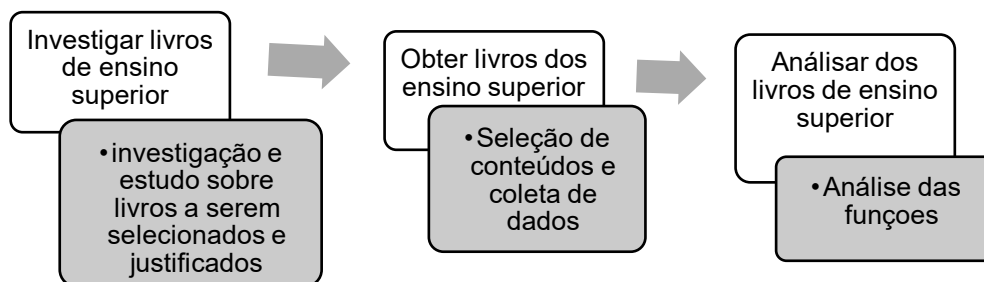
Contudo, o fato de caracterizar a natureza dessa pesquisa como qualitativa não pressupõe uma negação aos dados quantitativos. O que determina uma metodologia quantitativa ou qualitativa é a maneira pela qual pretendemos analisar o fenômeno e o enfoque adotado. Desse modo, concorda-se que:

[...] os investigadores qualitativos dispõem-se à recolha de dados quantitativos de forma crítica. Não é que os números por si só não tenham valor. Em vez disso, o investigador qualitativo tende a variar o processo de compilação na sua cabeça perguntando-se o que é que os números dizem acerca das suposições das pessoas que os usam e os compilam. [...]. Os investigadores qualitativos são inflexíveis em não tomar os dados quantitativos pelo seu valor facial (Bogdan e Biklen, 1994, p. 195).

Assim, o tipo de abordagem utilizada na pesquisa dependerá dos interesses do pesquisador respeitando os limites do estudo proposto. Isso significa que o entendimento de diferentes tipos de estudo e suas classificações são fundamentais para a obtenção do sucesso na realização da pesquisa científica.

A partir dessas leituras, buscou-se estratégias de investigação para coleta e análise de dados acerca do objetivo deste trabalho, que é averiguar como os autores privilegiam as representações semióticas de funções de duas ou mais variáveis em seus livros didáticos de ensino superior. Metodologicamente, este trabalho se compõe nas seguintes etapas:

Figura 2. Fluxograma metodológico da pesquisa. (Construído pelo autor)



No começo desta pesquisa, houve um momento em que foi preciso decidir quais livros didáticos de ensino superior seriam utilizados nessa investigação. Pensou-se então em olhar nas ementas dos cursos de ensino superior, que ofereciam a disciplina de Cálculo em sua grade curricular e selecionar algumas obras didáticas em comum. Certamente os cursos de Matemática poderiam ser escolhidos, mas faltava uma justificativa melhor elaborada. Mas, se as faculdades têm certa relevância em relação a formação de professores de Matemática e Matemáticos para a região do triângulo mineiro, supõe-se que as ementas de suas disciplinas estão bem estruturadas - o que implica na boa formação destes profissionais.

Para se ter uma ideia, em Ituiutaba 88,23% dos egressos de 2007 a 2018 do curso de licenciatura em matemática do ICENP estão atuando como professores (RAMOS, 2018). Já o curso de Graduação em Matemática da FAMAT existe desde 1972 e, de acordo com dados obtidos em sua página da internet, vem se caracterizando por um nível de excelência que o coloca entre os melhores do país.

O curso oferece uma formação abrangente, necessária ao entendimento do impacto das soluções encontradas num contexto global e social, proporciona uma sólida formação de Matemática, preparando os educandos para enfrentar os desafios das rápidas transformações da sociedade, do mercado de trabalho e das condições do exercício profissional (FAMAT, acesso em: nov. 2018).

O triângulo mineiro se destaca pela economia agropecuária e industrial, que atrai mão de obra de todo o país. Assim, a cultura e tradição local em contraste com o progresso da

agroindústria, provocam controvérsias que subjetivam a realidade e a forma dos moradores locais de se enxergarem no mundo.

Atentos a essa realidade e dispostos a desenvolver um projeto que atenda à população dessa região, o curso de Licenciatura em Matemática propõe-se a engajar-se nas políticas públicas, situando-se em um mercado de trabalho que se abre constantemente, buscando elencar os elementos regionais e culturais à sua proposta curricular (ICENE, 2011, p. 41).

Desta forma, o curso de licenciatura em Matemática do ICENE usa da coordenação entre a regionalização própria e currículo uma proposta para resgatar a população dessa problemática, legitimando a academia como espaço que também pertençam a eles.

Com essa estratégia, três cursos de Matemática no triângulo mineiro e suas respectivas faculdades foram selecionadas: a graduação da FAMAT em Uberlândia, do ICENP em Ituiutaba e do ICENE em Uberaba. O quadro abaixo mostra a relação de obras de Cálculo (que trazem o conteúdo de funções de duas ou mais variáveis) e cursos de Matemática destas três universidades.

Quadro 12 – Obras mencionadas nas ementas dos cursos de Matemática

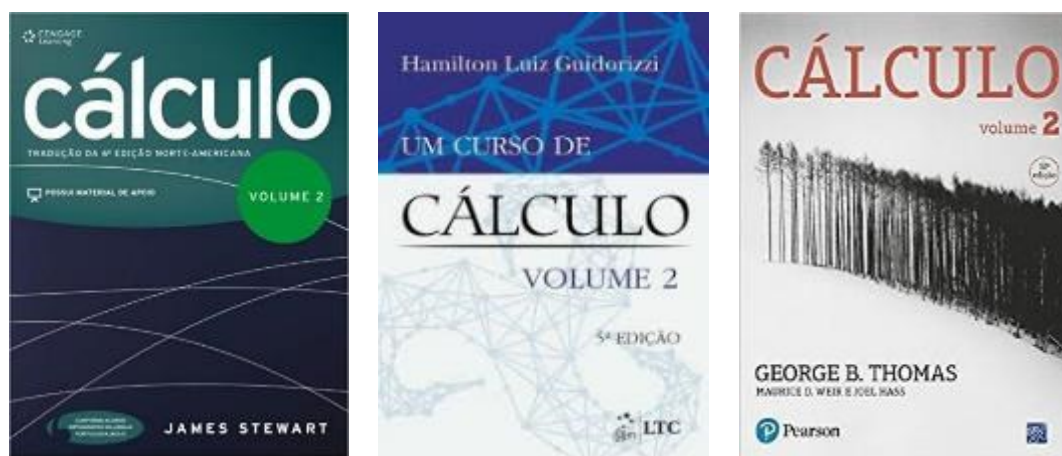
	Modalidade	Nome da disciplina	Bibliografia presente nas ementas
I C E N P	Licenciatura	Cálculo Diferencial e Integral II	[1] BOULOS, P., Introdução ao Cálculo - Volume 2. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1974. [2] GUIDORIZZI, H. L., Um Curso de Cálculo - Volume 2. São Paulo: LTC Editora, 2001. [3] LEITHOLD, L., O Cálculo com Geometria Analítica – Volume 2. São Paulo: Editora Harbra, 1994. [4] BASSANEZI, R. C., Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática. São Paulo: Contexto, 2002. [5] THOMAS, G. B., Cálculo - Volume 2. São Paulo: Addison Wesley, 2009.
	Bacharelado	Cálculo Diferencial e Integral II	[6] SIMMONS, G. F., Cálculo com Geometria Analítica – Volume 2. São Paulo: Makron Books, 1987. [7] STEWART, J., Cálculo – Volume II. São Paulo: Thomson Learning, 2005. [8] MORETTIN, P. A., Cálculo: Funções de uma e Várias Variáveis. São Paulo: Saraiva, 2003.

I C E N E	Licenciatura	Cálculo Diferencial e Integral III	[1] STEWART, James. Cálculo, volume 2. 6ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2009. [2] THOMAS, George B. Cálculo, volume 2. 11ª edição. São Paulo: Addison-Wesley, 2002. [3] GUIDORIZZI, Hamilton L. Um Curso de Cálculo, volume 2. 5ª edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001. [4] ÁVILA, Geraldo. Cálculo das funções de várias variáveis. 7ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2006. [5]. GONÇALVES S, Mirian Buss; FLEMMING, Diva Marília. Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície. 2.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007. [6] GUIDORIZZI, Hamilton L. Um Curso de Cálculo, volume 3. 5ª edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001. [7] MUNEM, Mustafa A.; FOULIS, David J. Cálculo, volume 2. Rio de Janeiro: LTC, 1982. [5] LEITHOLD, L. O cálculo com geometria analítica, volume 2. 3ª edição. São Paulo: Harbra, 1994.
	Licenciatura	Cálculo Diferencial e Integral 3	[1] GUIDORIZZI, H. L., Um Curso de Cálculo, Volumes 2 e 3, LTC, São Paulo, 1988. [2] THOMAS, G. B., Cálculo, Volumes 1 e 2, Addilson Wesley, São Paulo, 2002. [3] BOUCHARA, J. E OUTROS, “Cálculo Integral Avançado”, EdUSP, São Paulo, 1999. [4] WILLIANSON, R. E., CROWELL, R. H. E TROTTER H. F., Cálculo de Funções Vetoriais, Volumes 1 e 2, LTC, São Paulo, 1974.
F A M A T	Bacharelado		

Fonte: Fichas de disciplina e Ementas dos cursos de Matemática do ICENP, FAMAT e ICENE

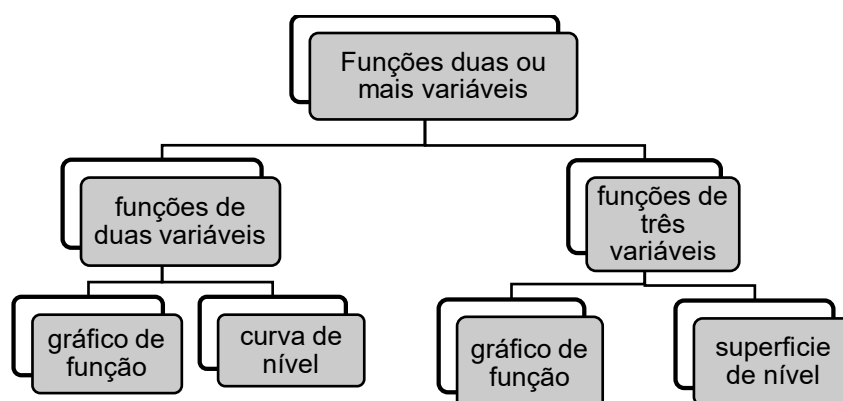
Desse quadro, identificou-se três livros em comum, em pelo menos dois cursos. São eles a 6ª edição do livro *Cálculo* - volume 2 de James Stewart, a 11ª edição do livro *Cálculo* - volume 2 de George B. Thomas, e a 5ª edição do livro *Um Curso de Cálculo* – Volume 2 de Hamilton Luiz Guidorizzi. No entanto, não foi possível ter acesso à 11ª edição do livro de Thomas, o que levou a adotar a edição seguinte da mesma obra.

Figura 3. Capas das obras obtidas para análise. (Imagens obtidas pela internet)



De posse dos livros em questão, foi preciso delimitar quais conteúdos seriam passíveis de análise, com enfoque nas funções de duas ou mais variáveis. Dessa forma, foi realizada uma pequena exploração nos livros mencionados focando na estrutura didática em que as funções foram apresentadas. Construiu-se assim os seguintes mapas conceituais¹ de cada livro. O objeto de pesquisa são as funções de duas ou mais variáveis.

Figura 4. Mapa conceitual de Função de duas ou mais variáveis presente no livro de Guidorizzi. (Construído pelo autor)



¹ Conceitos e definições sobre domínio, imagem, interior, pontos de fronteira e interior foram omitidas, pois nos livros de Guidorizzi e Stewart estes itens aparecem de forma implícita através de exemplos e exercícios

Figura 5. Mapa conceitual de Função de duas ou mais variáveis presente no livro de Stewart. (Construído pelo autor)

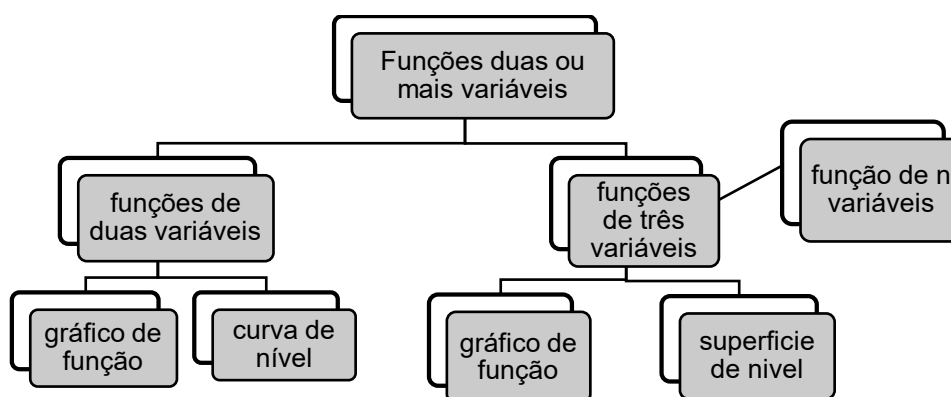
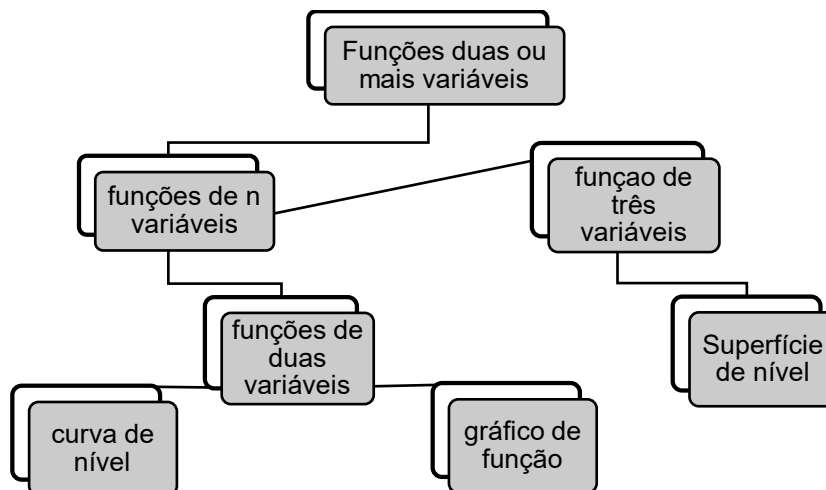


Figura 6. Mapa conceitual de Função de duas ou mais variáveis presente no livro de Thomas. (Construído pelo autor)



Observando os três mapas conceituais, fica claro que há uma certa hierarquia conceitual, comum aos três livros. Assim sendo, os itens e subitens escolhidos para serem analisados foram distribuídos no seguinte quadro, para melhor visualização.

Quadro 13 – Conteúdos comum selecionados para análise presentes nos livros

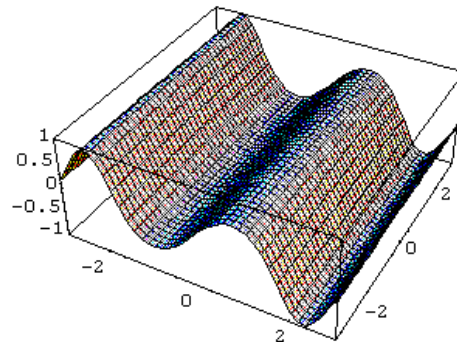
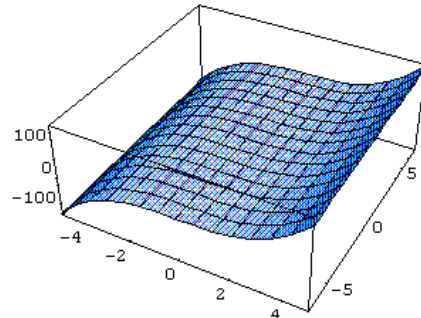
Funções de duas ou mais variáveis	
Função de duas variáveis	Gráfico de função
	Curva de nível
Função de Três Variáveis	Superfície de nível

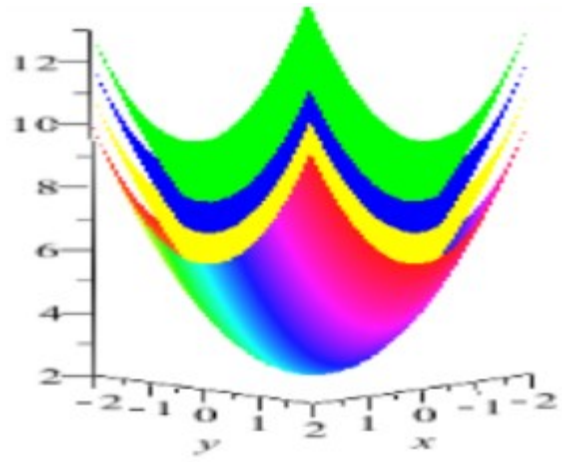
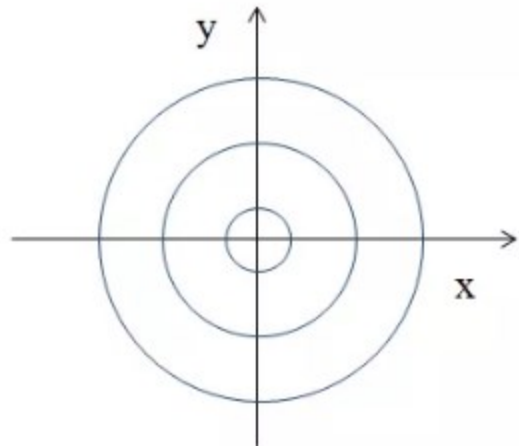
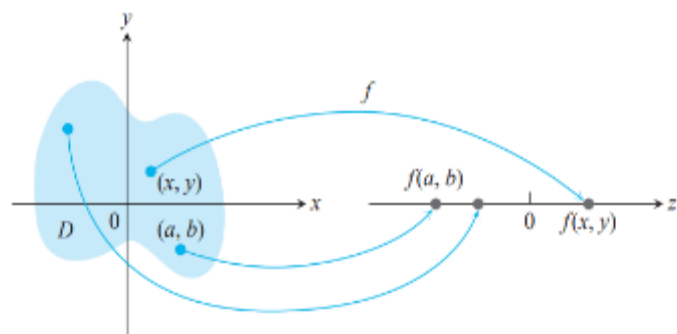
Fonte: Construído pelo autor

Note que os itens de função de n variáveis não foram analisados, pois está ausente tal definição na obra e questão de Guidorizzi e nem gráfico de funções de três variáveis, cujo não foi definido por Thomas em seu livro por ser impossível de se representar geometricamente.

Antes da etapa final, foi necessário rever as representações semióticas do conceito de função. Maggio (2011) com base em Duval (2003), elenca os diferentes registros de função e seus sistemas semióticos próprios. O seguinte quadro apresenta adaptações do autor em relação ao conceito de função de várias variáveis.

Quadro 14 – Representações e sistemas semioticos aplicados as funções de duas ou mais variáveis

E X E M P L O S	REPRESENTAÇÕES DISCURSIVAS				
	Registro de lingua natural	Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D um único valor real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o <i>domínio</i> de f e sua <i>imagem</i> é conjunto de valores possíveis de f , ou seja, $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$ (Stewart, 2009, p.815).			
		Suponha de D seja um conjunto de n -uplas de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Uma função a valores reais f em D é uma regra que associa um único número real $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a cada elemento em D . o conjunto D é o domínio da função. O conjunto de valores w assumidos por f é a imagem da função. O símbolo w é a variável dependente de f , e dizemos que f é uma função de n variáveis independentes x_1 a x_n . Também chamamos os x_j de variáveis de entrada da função, é denominamos w a variável de saída da função (Thomas, 2012, p.209).			
	Registro de sistema de escrita simbólica	$f: A \rightarrow \mathbb{R}$, onde A é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$; $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in A\}$; $z = f(x, y)$			
	Registro de sistema de escrita algébrica	$z = x+y$; $f(x, y)=x^2+y^2$; $z=\sqrt{-x^2-y^2}$; $f(x, y)=3$; $f(x, y,z)=x^2+y^2+z^2$			
	Registro numérico	$4=f(3,4)$; $f(0,0,0)=0$; $f(2,4,3)=3$; $D_f=\{2,3,4,5,6,7\}$ e $Im(f)=\{0,2,4,5,6,7,9\}$;			
	REPRESENTAÇÕES NÃO DISCURSIVAS				
	Registro em figuras (2D / 3D)	Não se aplica			
	Registro Cartesiano de Gráficos de função	 $Gráfico\ de\ f(x,y) = x^3 + y$  $Gráfico\ f(x,y) = sen\ x\ cos\ x$			

E X E M P L O S	REPRESENTAÇÕES NÃO DISCURSIVAS																																																																																																																																						
	Registro cartesiano em curvas ou superfícies de nível	 Superfícies de nível de $f(x, y, z) = z - 1 - x^2 - y^2$, (HENRIQUES e ALMOULOU, 2015)	 Curvas de nível da função representada por um parabolóide																																																																																																																																				
	Registro em diagramas e tabular (tabelas e quadros)	 (Thomas, 2012, p.209)	Velocidade do vento (km/h) <table><tr><th>$T \backslash v$</th><th>5</th><th>10</th><th>15</th><th>20</th><th>25</th><th>30</th><th>40</th><th>50</th><th>60</th><th>70</th><th>80</th></tr><tr><th>5</th><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-3</td></tr><tr><th>0</th><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>-5</td><td>-6</td><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-9</td><td>-10</td></tr><tr><th>-5</th><td>-7</td><td>-9</td><td>-11</td><td>-12</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td><td>-16</td><td>-16</td><td>-17</td></tr><tr><th>-10</th><td>-13</td><td>-15</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-23</td><td>-24</td></tr><tr><th>-15</th><td>-19</td><td>-21</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td><td>-26</td><td>-27</td><td>-29</td><td>-30</td><td>-30</td><td>-31</td></tr><tr><th>-20</th><td>-24</td><td>-27</td><td>-29</td><td>-30</td><td>-32</td><td>-33</td><td>-34</td><td>-35</td><td>-36</td><td>-37</td><td>-38</td></tr><tr><th>-25</th><td>-30</td><td>-33</td><td>-35</td><td>-37</td><td>-38</td><td>-39</td><td>-41</td><td>-42</td><td>-43</td><td>-44</td><td>-45</td></tr><tr><th>-30</th><td>-36</td><td>-39</td><td>-41</td><td>-43</td><td>-44</td><td>-46</td><td>-48</td><td>-49</td><td>-50</td><td>-51</td><td>-52</td></tr><tr><th>-35</th><td>-41</td><td>-45</td><td>-48</td><td>-49</td><td>-51</td><td>-52</td><td>-54</td><td>-56</td><td>-57</td><td>-58</td><td>-60</td></tr><tr><th>-40</th><td>-47</td><td>-51</td><td>-54</td><td>-56</td><td>-57</td><td>-59</td><td>-61</td><td>-63</td><td>-64</td><td>-65</td><td>-67</td></tr></table> Temperatura real (°C) (Stewart, 2009, p. 816)	$T \backslash v$	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	5	4	3	2	1	1	0	-1	-1	-2	-2	-3	0	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-7	-8	-9	-9	-10	-5	-7	-9	-11	-12	-12	-13	-14	-15	-16	-16	-17	-10	-13	-15	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-23	-24	-15	-19	-21	-23	-24	-25	-26	-27	-29	-30	-30	-31	-20	-24	-27	-29	-30	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38	-25	-30	-33	-35	-37	-38	-39	-41	-42	-43	-44	-45	-30	-36	-39	-41	-43	-44	-46	-48	-49	-50	-51	-52	-35	-41	-45	-48	-49	-51	-52	-54	-56	-57	-58	-60	-40	-47	-51	-54	-56	-57	-59	-61	-63	-64	-65	-67
	$T \backslash v$	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80																																																																																																																											
5	4	3	2	1	1	0	-1	-1	-2	-2	-3																																																																																																																												
0	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-7	-8	-9	-9	-10																																																																																																																												
-5	-7	-9	-11	-12	-12	-13	-14	-15	-16	-16	-17																																																																																																																												
-10	-13	-15	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-23	-24																																																																																																																												
-15	-19	-21	-23	-24	-25	-26	-27	-29	-30	-30	-31																																																																																																																												
-20	-24	-27	-29	-30	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38																																																																																																																												
-25	-30	-33	-35	-37	-38	-39	-41	-42	-43	-44	-45																																																																																																																												
-30	-36	-39	-41	-43	-44	-46	-48	-49	-50	-51	-52																																																																																																																												
-35	-41	-45	-48	-49	-51	-52	-54	-56	-57	-58	-60																																																																																																																												
-40	-47	-51	-54	-56	-57	-59	-61	-63	-64	-65	-67																																																																																																																												

Assim sendo, essas representações foram os atores na coleta de dados, no processo de registro dessas informações.

Como forma de encontrar indicativos para análise qualitativa, criou-se categorias baseadas também na teoria de Raymond Duval.

Quadro 15 – Categorias de análise

Categorias	objetivo
Representações	Identificar os tipos de registros de representação abordados nos livros
Tratamento discursivo	Identificar as regras tratadas em cada registro
Tratamento não discursivo	Identificar as regras tratadas em cada registro
Congruência semântica	Buscar conversões congruentes e não congruentes e os elementos que levam a esses dois fenômenos
Articulação entre registros discursivos e não discursivos	Buscar coordenação entre mudança de registro de sistema semióticos diferentes
Exemplos e exercícios	Identificar qual o tipo de transformação os exercícios propostos exigem e, se, no caso for a conversão, identifica-la.

Fonte: Construído pelo autor

A análise então levou em conta as atividades cognitivas ligadas a semiose, a substituidade de expressões referencialmente equivalente e sua influência nos fenômenos de congruência semântica.

CAPITULO 4

FUNÇÕES, TEORIA DE REGISTROS SEMIÓTICOS E FENÔMENOS DE CONGRUÊNCIAS: UMA BREVE ANÁLISE

4.1 Introdução

Os registros de representação semiótica têm papel importante no pensamento Matemático. É a partir delas que temos acesso ao objeto matemático referenciado, momento esse que acontece a apreensão conceitual. Se, cada significação de registro é parcial em relação ao objeto referenciado, está mais do que explicitado a importância da coordenação de pelo menos dois registros diferentes entre si, na substitutividade de expressões referencialmente equivalentes. O estudo de funções de duas ou mais variáveis pode e deve ser alicerçado nessas premissas. As linhas finais desse trabalho mostram como três livros didáticos do ensino superior, que abordam o conteúdo de funções de duas ou mais variáveis, lidaram com a teoria de Registros de Representação Semiótica no estudo dessas funções, dada a sua importância em qualquer atividade matemática.

4.2 Os livros e os seus registros semióticos de função

Invocando a fala de Duval (2012), partimos do pressuposto de que as funções não estão diretamente acessíveis a apreensão se comparada a objetos empíricos. Assim, o uso de representações diminui essa distância entre abstração e compressão. No entanto, como a apreensão conceitual de função depende da representação (tabela, equações, gráficos), podem ocorrer confusões entre esses dois. E como não confundir representação com objeto, se o primeiro contato com o segundo depende exclusivamente do primeiro?

Para tentar contornar este paradoxo, é indicado por Duval (2012) recorrer a muitas representações, de forma que o objeto seja entendido em sua complexidade e que ele seja reconhecido em cada representação referencialmente equivalente.

Nos três livros didáticos investigados², as funções de duas ou mais variáveis foram representadas em seus diferentes sistemas semióticos. O quadro abaixo mostra a relação de registros apresentados em cada livro.

Quadro 16 – tipos de representações discursivas e não discursivas nas obras investigadas

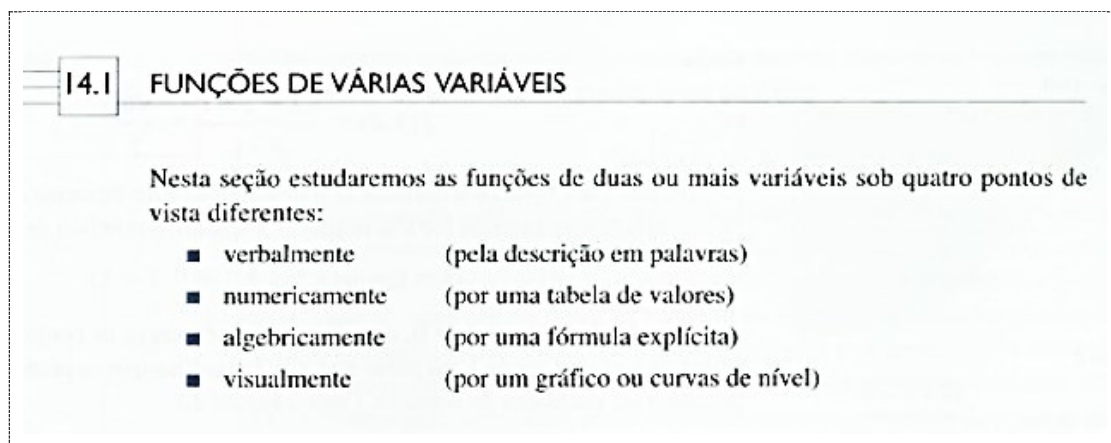
Obra	Representações presentes
Guidorizzi; Stewart e Thomas	▪ Registro de língua natural ▪ Registro de sistema de escrita simbólica ▪ Registro numérico ▪ Registro cartesiano de gráfico de função ▪ Registro cartesiano em curva ou superfície de nível ▪ registro em diagrama
Stewart	▪ registro tabular

Fonte: construído pelo autor

Nota-se que apenas o livro de Stewart apresenta o cuidado de representar as funções por meio de tabelas. Essa preocupação em estudar as funções em suas diferentes representações é evidenciada logo após o início do capítulo que aborda as funções de duas ou mais variáveis, como mostra na figura abaixo:

² A análise considerou apenas as sessões do livro em que se abordou as funções de duas ou mais variáveis. Assim, ficou compreendido a análise das páginas 147-162 do livro Um curso de Cálculo Volume II de Guidorizzi (2001), das páginas 814-828 do livro Cálculo Volume II de Stewart (2010) e das páginas 209-217 do livro Cálculo Volume II de Thomas (2012).

Figura 7. Imagem do livro Cálculo Volume II. (Fonte: Stewart, 2010, p. 815)



Contudo, cada sistema semiótico deve satisfazer algumas atividades cognitivas ligadas a semiose, sendo a formação, o tratamento e a conversão. Como as regras (ferramentas matemáticas próprias) utilizadas por cada sistema semiótico são de conformidade, ou seja, elas têm papel de torna-las reconhecidas em suas representações e uma vez que os registros já foram reconhecidos no quadro anterior, decidiu-se identificar as atividades de tratamento e conversão – obedecendo o quadro 6 – nas sessões dos livros que abordam o conteúdo de função de várias variáveis. Antes dessa identificação, buscou-se então quais seriam os possíveis tratamentos e conversões que poderiam ser encontrados. Essa ação resultou nos quadros 17 e 18.

Quadro 17. Algumas possibilidades de Conversão no estudo de Função.

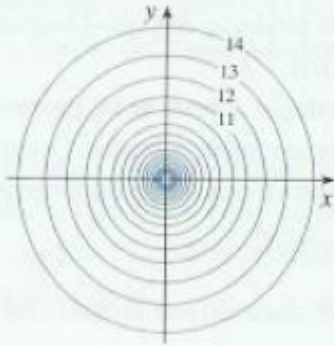
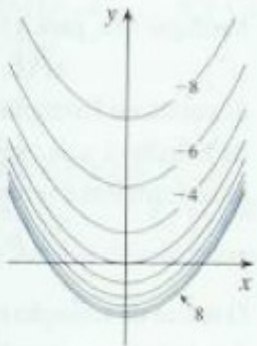
Conversões hipotéticas		
Entre registros discursivos e não discursivos	Registro de partida	Registro de chegada
	Língua natural	Tabular
	Língua natural	Cartesiano de gráfico de função
	Língua natural	Cartesiano de curva/superfície de nível
	Escrita simbólica	Cartesiano de gráfico de função
	Escrita simbólica	Cartesiano de curva/superfície de nível
	Escrita algébrica	Tabular
	Escrita algébrica	Cartesiano de gráfico de função
	Escrita algébrica	Cartesiano de curva/superfície de nível
	Numérico	tabular
	Numérico	Cartesiano de gráfico de função
	Cartesiano de gráfico de função	Língua natural
	Cartesiano de gráfico de função	Escrita simbólica
	Cartesiano de gráfico de função	Escrita algébrica
	Cartesiano de gráfico de função	Numérico
	Cartesiano de curva/superfície de nível	Língua natural
	Cartesiano de curva/superfície de nível	Escrita simbólica
	Cartesiano de curva/superfície de nível	Escrita algébrica
	Tabular	Língua natural
	Tabular	Numérico
	Tabular	Escrita algébrica

Fonte: Construído pelo autor

Quadro 18 – Possibilidades de Tratamento no estudo de Função

Registro/Possíveis tratamentos			Exemplos
Registros discursivos	algébrico	Regras algébricas para resolver equações diversas	EXEMPLO 10. (<i>Função homogênea.</i>) Uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$, denomina-se <i>função homogênea de grau</i> λ se $f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y)$ para todo $t > 0$ e para todo $(x, y) \in A$ tais que $(tx, ty) \in A$. a) $f(x, y) = 3x^2 + 5xy + y^2$ é homogênea de grau 2. De fato, $f(tx, ty) = 3(tx)^2 + 5(tx)(ty) + (ty)^2 = t^2(3x^2 + 5xy + y^2)$ ou seja, $f(tx, ty) = t^2 f(x, y).$ Fonte: Guidorizzi, 2001, p.150
	algébrico	ação de substituir ou atribuir valores as variáveis das funções	Nos Exercícios 1-4, determine os valores de função específicos. 1. $f(x, y) = x^2 + xy^3$ a. $f(0, 0)$ c. $f(2, 3)$ b. $f(-1, 1)$ d. $f(-3, -2)$ 2. $f(x, y) = \sin(xy)$ a. $f\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ c. $f\left(\pi, \frac{1}{4}\right)$ b. $f\left(-3, \frac{\pi}{12}\right)$ d. $f\left(-\frac{\pi}{2}, -7\right)$ Fonte: Thomas, 2012, p. 215
	algébrico	ação de substituir ou atribuir valores as variáveis das funções, alterando a estrutura da função original	Manipulação para cálculo das curvas de nível, por exemplo A curva de nível $f(x, y) = 0$ é o conjunto de pontos no plano xy nos quais $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 100,$ o qual é a circunferência de raio 10 centrada na origem. Similarmente, as curvas de nível $f(x, y) = 51$ e $f(x, y) = 75$ (Figura 14.5) são as circunferências $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 51 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 49$ $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 25.$ Fonte: Thomas, 2012, p. 213

Registros discursivos	algébrico	Interpretar conjuntos ou pontos de funções. Análise global se a função for interpretada por meio de suas propriedades para se definir pontos e, equações para descobrir, usa-se meios algébricos	Para calcular o domínio, fez-se uma interpretação global das propriedades da função, dispensando cálculos EXEMPLO 4. Seja f a função dada por $(x, y) \mapsto z \text{ onde } z = 5x^2y - 3x.$ O valor de f em (x, y) é $z = f(x, y) = 5x^2y - 3x$. Na equação acima, x e y estão sendo vistas como <i>variáveis independentes</i> e z como <i>variável dependente</i>. Observe que o domínio de f é o $\mathbb{R}^2$. ■ Fonte: Guidorizzi, 2001, p.148
	algébrico		(a) $f(3, 2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ A expressão para f está bem definida se o denominador for diferente de 0 e o número cuja raiz quadrada será extraída for não negativo. Portanto, o domínio de f é $D = \{(x, y) x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}$ A desigualdade $x + y + 1 \geq 0$, ou $y \geq -x - 1$, descreve os pontos que estão sobre ou acima da reta $y = -x - 1$, ao passo que $x \neq 1$ significa que os pontos sobre a reta $x = 1$ precisam ser excluídos do domínio. Fonte: Stewart, 2010, p.816
	língua natural	Argumentação em língua natural, descrição em palavras, etc.	(b) Descreva em palavras o significado da questão “Para quais valores de v é verdade que $f(-20, v) = -30$?”. Em seguida, responda à questão. Fonte: Stewart, 2010, p.825

Registros não-discursivos	gráfico	Analisar comportamento da superfície para esboçar um mapa de contorno de curvas de níveis	34. Faça um esboço do diagrama de contorno da função cujo gráfico é mostrado.  Fonte: Stewart, 2010, p.826
	gráfico	Analisar as regularidades das curvas de nível para esboçar o gráfico da função	35-38 Um mapa de contorno de uma função é mostrado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da f. 35.  36.  Fonte: Stewart, 2010, p.826

Fonte: construído pelo autor, com base na teoria de registros de representação semiótica, Guidorizzi, Thomas e Stewart

Dessa forma, os tratamentos e conversões identificados nos exemplos e atividades propostas nos três livros foram agrupados a seguir:

Quadro 19 – Quantificação das atividades semióticas de Tratamento e Conversão em cada atividade (exemplo ou exercício)

G U I D O R I Z Z I	Conteúdo	Exemplos			Exercícios		
		Total	Possíveis tratamentos	Possíveis conversões	Total	Possíveis tratamentos	Possíveis conversões
	Função de duas variáveis (Função Gráfico de função e Curva de nível)	19	14	5	22	16	7
	Função de Três Variáveis (Função e Superfície de nível)	2	1	1	3	0	3
S T E W A R T	Conteúdo	Exemplos			Exercícios		
		Total	Possíveis tratamentos	Possíveis conversões	Total	Possíveis tratamentos	Possíveis conversões
	Função de duas variáveis (Função Gráfico de função e Curva de nível)	13	5	9	67	28	39
	Função de Três Variáveis (Função e Superfície de nível)	2	2	0	8	1	7
T H O M A S	Conteúdo	Exemplos			Exercícios		
		Total	Possíveis tratamentos	Possíveis conversões	Total	Possíveis tratamentos	Possíveis conversões
	Função de duas variáveis (Função Gráfico de função e Curva de nível)	3	1	2	56	33	23
	Função de Três Variáveis (Função e Superfície de nível)	2	1	1	24	12	12

Fonte: construído pelo autor

Note que, a quantidade de atividades de cada obra é variável. Para melhor visualizar esses dados quantitativos, somou-se as atividades (exemplos e exercícios) afim de mostrar um quociente entre número de tratamentos e conversões com essa soma. Por exemplo: 5 exemplos mais 80 exercícios chegam em 85 atividades no livro de Cálculo (volume II) por Thomas. Os tratamentos somados de seus exemplos e exercícios são $2+45=47$ – logo tem se uma relação aproximada de 0,57 tratamentos por cada atividade ($\frac{47}{85}$).

O resultado foi o seguinte:

Quadro 20: Relação entre total de atividades com tratamentos e conversões possíveis

Obra	Valor aproximado	
Guidorizzi	• 0,67 tratamentos por exercício	• 0,34 conversões por exercício
Stewart	• 0,4 tratamentos por exercício	• 0,61 conversão por exercício
Thomas	• 0,57 tratamentos por atividade	• 0,46 conversões por exercício

Fonte: Construído pelo autor

Percebe-se que, enquanto os outros livros focam na quantidade de tratamentos internos possíveis em cada atividade, o livro de Stewart se destaca pela possibilidade de ter quase 0,6 conversões por atividade, o que é razoável de se ter devido a sua natureza de fazer as funções serem representadas por diferentes sistemas semióticos, de acordo com a figura 6. Das conversões quantificadas, a obra de Stewart se destaca por ser a única que apresenta relações usando tabela e linguagem simbólica e numérica, como mostra a figura a seguir.

Figura 8 – Exemplo de conversões entre registros tabular, numérico e natural (Stewart, 2010, p.825)

5. A altura das ondas h em mar aberto depende da velocidade do vento v e do intervalo de tempo t no qual está ventando com a mesma velocidade. Os valores da função $h = f(v, t)$, dados em pés, são apresentados na tabela a seguir.

(a) Qual é o valor de $f(80, 15)$? Qual é o seu significado?

(b) Qual o significado da função $h = f(60, t)$? Descreva seu comportamento.

(c) Qual o significado da função $h = f(v, 30)$? Descreva seu comportamento.

Duração (horas)

$v \backslash t$	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

Velocidade do vento (km/h)

De forma que aparenta ser não tão criativa, os livros restantes abordam as tradicionais conversões entre registros gráficos e algébricos. Num paralelo histórico, assim como no passado (nem tão distante assim) essa configuração se mostrou muito bem-sucedida, sendo uma articulação necessária para o desenvolvimento de propriedades e conceitos ligados a definição de função. Concorde-se com Duval (2012), de que o progresso dos conhecimentos é sempre acompanhado da criação e desenvolvimento de sistemas semióticos que mais ou menos coexistem entre eles.

Um claro exemplo que se tem é quando se quer analisar o comportamento de funções reais de três variáveis de forma gráfica. Como esse tipo de função tem gráfico na quarta dimensão, a única maneira de se analisar seu comportamento é pelas superfícies de nível, no espaço.

Embora seja necessária, essas conversões são em sua maioria não congruentes, devido a quantidade de tratamentos internos realizados em um registro de partida antes que se parta para o registro de chegada. Como o conteúdo de função de duas ou mais variáveis é destinado ao ensino superior, se pressupõe que o sujeito em aprendizagem já tenha adquirido uma ampla bagagem em apreensão conceitual e já tenha contato com diversas representações de função. Assim, mesmo que tais conversões não sejam congruentes, a substitutividade dentre essas expressões referencialmente equivalentes se torna necessária e talvez corriqueira no estudo de Cálculo. Não existe outra maneira de conceitualizar as funções de duas ou mais variáveis senão pelo enfrentamento dos fenômenos de congruência e não congruência.

4.3 Articulação entre registros em Cálculo: a não congruência mais que necessária

Apesar da conversão (apenas a mudança entre registros distintos) representar um salto entre duas redes semânticas, essa mesma atividade não tem importância real para a compreensão dos objetos (DUVAL, 2012). Deve haver certa articulação entre múltiplos registros, o que justifica a grande variedade de registros semióticos de referência a um mesmo objeto. (Rever quadro 4 e 6).

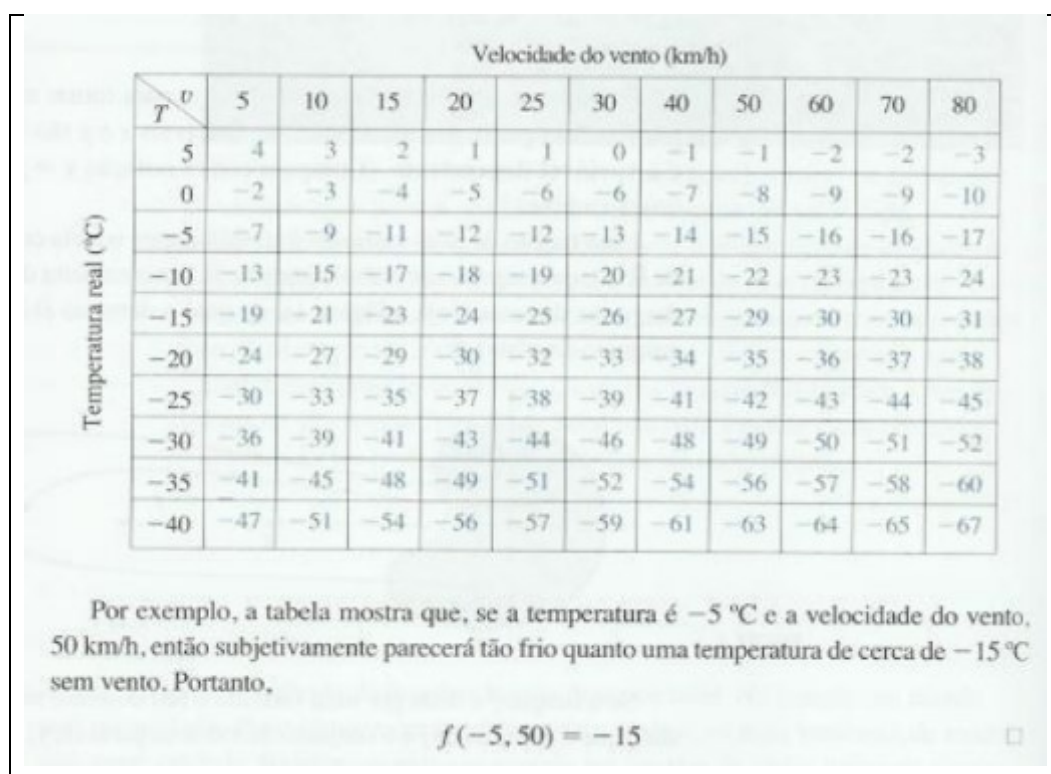
Porém, é fato que a economia de tratamento permite a que a articulação entre registros seja movida a chegar em tratamentos menos custosos, do ponto de vista cognitivo ou até mesmo continuar no mesmo registro, se verificar que ali há os menores tratamentos. Assim, de acordo com Duval (2012), esse tipo de articulação movida a referência (em busca de registros menos custosos, de mesma referência ao objeto) ocasiona o fenômeno chamado congruência semântica. Ou seja, o estudante “foge” ou evita certas representações devido aos seus

tratamentos. Isso pode causar a não articulação entre os registros, propriedade essencial ligada a *noesis*. Como criar representações mentais se me abstenho de certas conversões devido a economia de tratamento?

Dessa forma, nos três livros analisados, selecionou-se 1 problema de congruência e 3 problemas de não congruência, uma vez que se admite a maioria das conversões presentes nos cursos de cálculo não são congruentes.

O primeiro problema de congruência é relacionado a conversão específica entre registro numérico e registro tabular. Para análise de congruência, é necessário a discriminação de unidades significativas de cada registro bem como examinar as transformações internas necessárias para mudança de registro.

Figura 9. Exemplo de conversão congruente (Stewart, 2010, p.816).



Nesta atividade, a conversão parte da tabela para um registro numérico. Note que, a primeira linha e a primeira coluna fazem o papel respectivamente dos eixos x e y do plano e a localização dos pontos ganha uma nova roupagem. O cruzamento das linhas e colunas corresponde a um ponto específico, que corresponde a um valor da função f ou relação entre temperatura e vento. A volta desse tipo de registro também é congruente, pois é realizada

praticamente imediata. Na figura 10, a primeira questão pede que se localize o valor da função no ponto dado.

Figura 10. Exemplo de conversão congruente. (Stewart, 2010, p.825)

TABELA 3 Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

Umidade relativa (%)

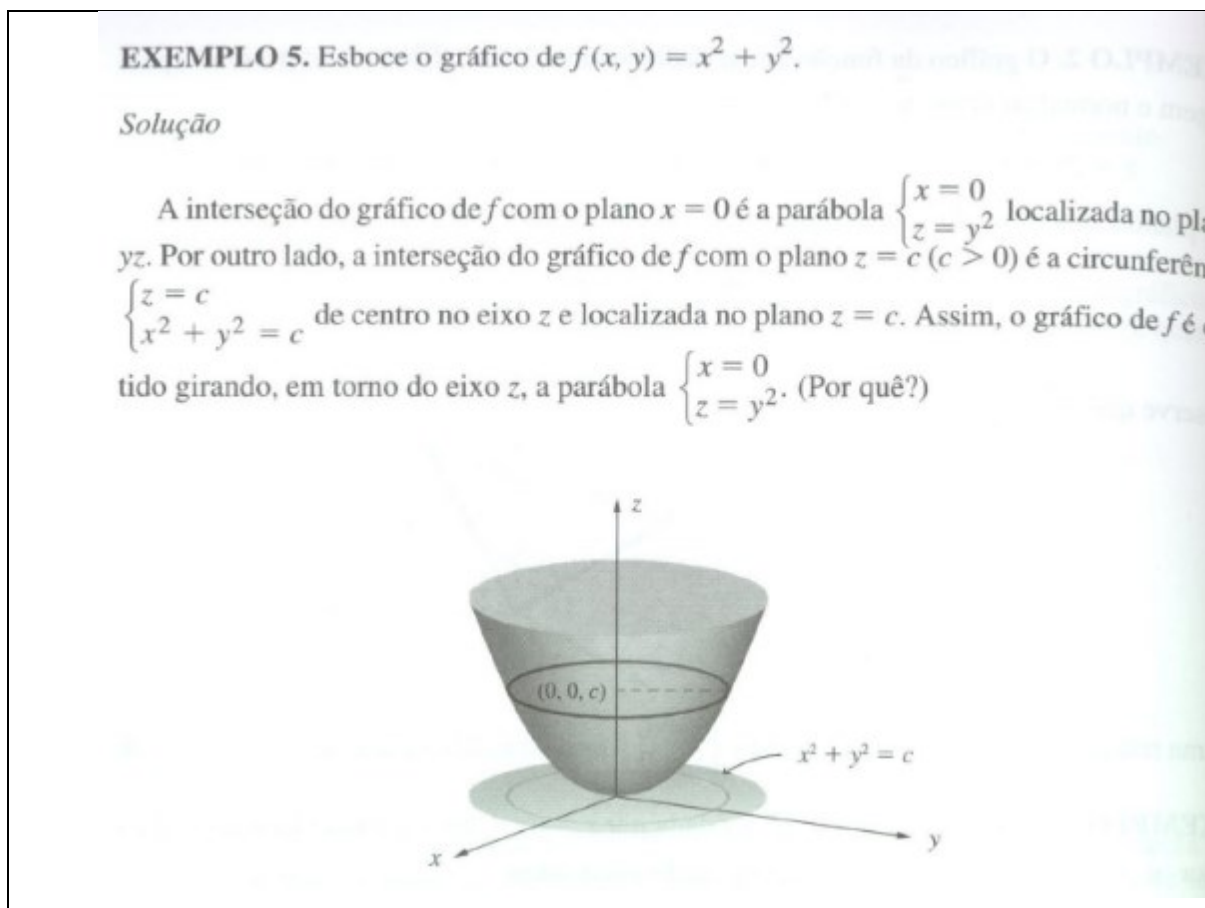
$T \backslash h$	20	30	40	50	60	70
20	20	20	20	21	22	23
25	25	25	26	28	30	32
30	30	31	34	36	38	41
35	36	39	42	45	48	51
40	43	47	51	55	59	63

(a) Qual é o valor de $f(35, 60)$? Qual é o seu significado?
 (b) Para que valor de h temos $f(30, h) = 36$?
 (c) Para que valor de T temos $f(T, 40) = 42$?

Perceba que não há tantos tratamentos internos para que seja feita a mudança de registros: é uma conversão menos trabalhosa ou se diz que o custo cognitivo é bem baixo.

A próxima figura mostra a construção de um parabolóide.

Figura 11. Exemplo de conversão não congruente. (Stewart, 2010, p.825)



A mudança antes de ser realizada requer algumas transformações internas, ainda no registro algébrico. Perceba que, como o sujeito não conhece o gráfico de f , ele vai registrando o comportamento da função nas interseções com os eixos – logo isso devolve equações que já é sabida pelo sujeito como as parábolas. A última análise é em relação com as curvas de níveis serem todas circunferências – o que significa que as parábolas estão girando entorno do eixo z . Aqui não há o tratamento gráfico de ponto a ponto, mas sim de extensão do traçado (Duval, 2011), que foi a revolução das parábolas. A quantidade de transformações internas tornou a construção desse gráfico uma conversão não congruente: seja franco, atividades assim não são feitas de imediato.

A volta desta atividade não seria congruente também – seriam feitos cortes na superfície e analisados esses cortes um a um, o trabalho reverso, afim de se chegar na equação. As superfícies de revolução apresentam um bom comportamento, porém, há superfícies que tornaria a conversão de gráfico para equação bem trabalhosa, elevando o custo cognitivo de tal atividade.

Outra conversão recorrente aos três livros analisados foi a de esboçar os domínios de funções, de acordo com as três seguintes figuras:

Figura 12. Exemplo de conversão não congruente (Guidorizzi, 2009, p.148)

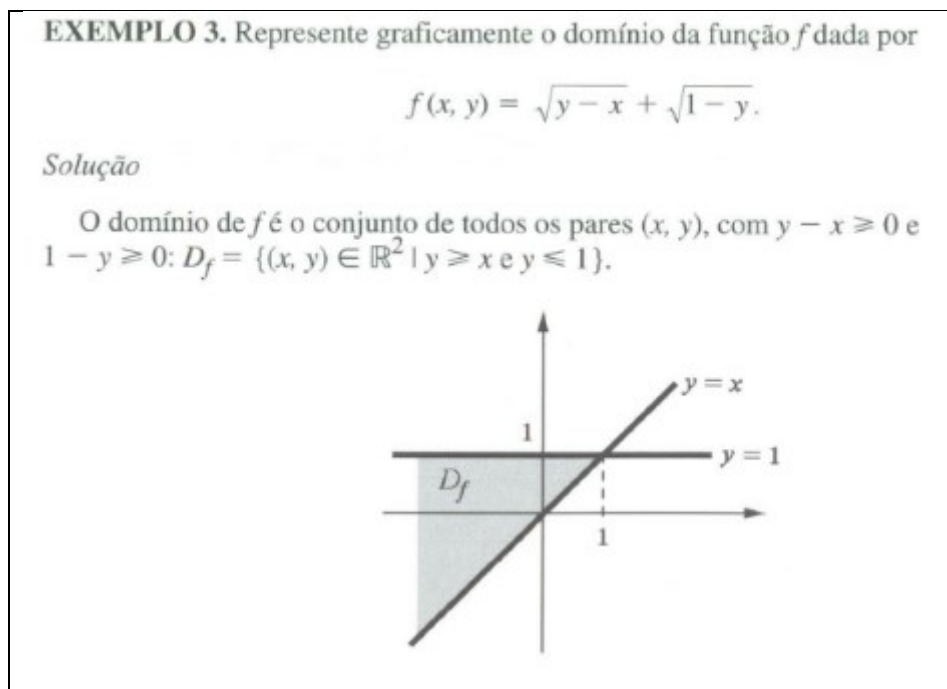
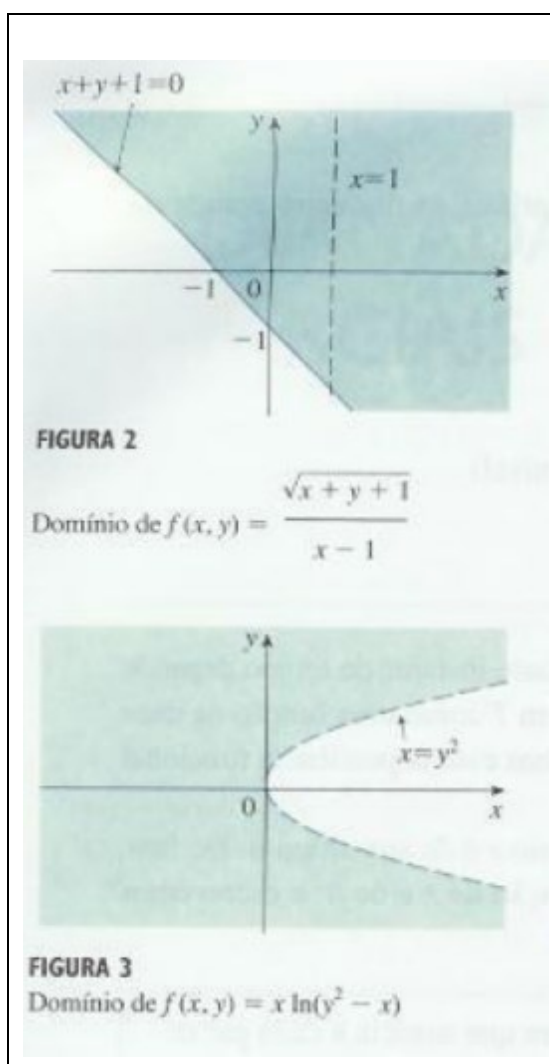


Figura 13. Exemplo de conversão não congruente. (Thomas, 2012, p.215)

Nos Exercícios 5-12, encontre e esboce o domínio para cada função.

5. $f(x, y) = \sqrt{y - x - 2}$
6. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$
7. $f(x, y) = \frac{(x - 1)(y + 2)}{(y - x)(y - x^3)}$
8. $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2 - 25}$
9. $f(x, y) = \cos^{-1}(y - x^2)$
10. $f(x, y) = \ln(xy + x - y - 1)$
11. $f(x, y) = \sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 9)}$
12. $f(x, y) = \frac{1}{\ln(4 - x^2 - y^2)}$

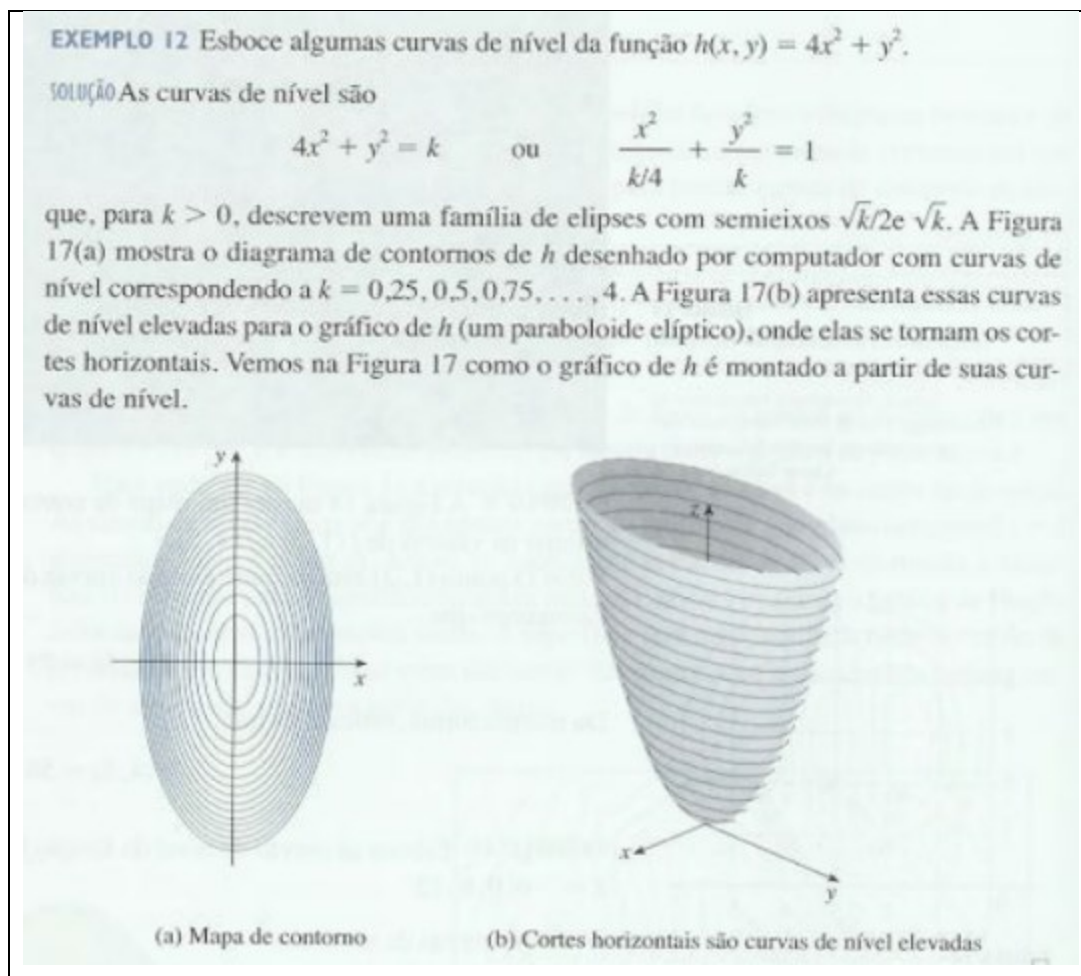
Figura 14. Exemplo de conversão não congruente. (Stewart, 2010, p.816)



Nestes três exemplos, se vê o custo cognitivo semelhante ao de esboçar um gráfico cartesiano. O que antecede a mudança de registros são tratamentos internos algébricos para se determinar o comportamento das funções. Feito isso, a figura é esboçada no plano. Aqui, se vê o que Duval (2009) chama de abordagem de interpretação global de propriedades figurais. Tal qual foi feito nos registros algébricos, as propriedades gráficas agora são analisadas como um todo, e se vê correspondência com os registros algébricos: a equação corresponde ao traçado da curva, os pontos de domínio são os que satisfazem a equação, o plano é todo o $\mathbb{R}^2$ e etc. no entanto, antes de fazer essas correspondências de congruência, foi preciso algumas transformações – o que os caracteriza como um fenômeno de não congruência.

Por fim, a figura 15 traz a não congruência do cálculo das curvas de nível, também análogo as superfícies de nível.

Figura 15. Exemplo de conversão não congruente. (Stewart, 2010, p.816)



Aqui, as transformações para se calcular as curvas ou superfícies seguem passos algoritmizados, que é igualar o valor da função a uma constante real, o que deixa a nova equação com uma dimensão gráfica a menos. Encontrada a família de equações, se parte para ao esboço de algumas curvas ou superfícies. Nesse tipo de atividade, também é feita uma interpretação global das propriedades das figuras, em relação à família de curvas ou superfícies e em relação ao gráfico da função original. Por exemplo: quando se está com dificuldade em representar um gráfico de função, pode se analisar seu comportamento através das curvas de nível. Curvas muito próximas significa crescimento da função, picos ou vales. Curvas longe uma da outra, podem significar uma superfície estável, e etc.

No entanto, apesar de algumas conversões entre registros discursivos e não discursivos não apresentarem congruência semântica, elas são necessárias para que haja a coordenação entre esses registros. Se ela não ocorre, a conceitualização pode acontecer, porém fica restrita

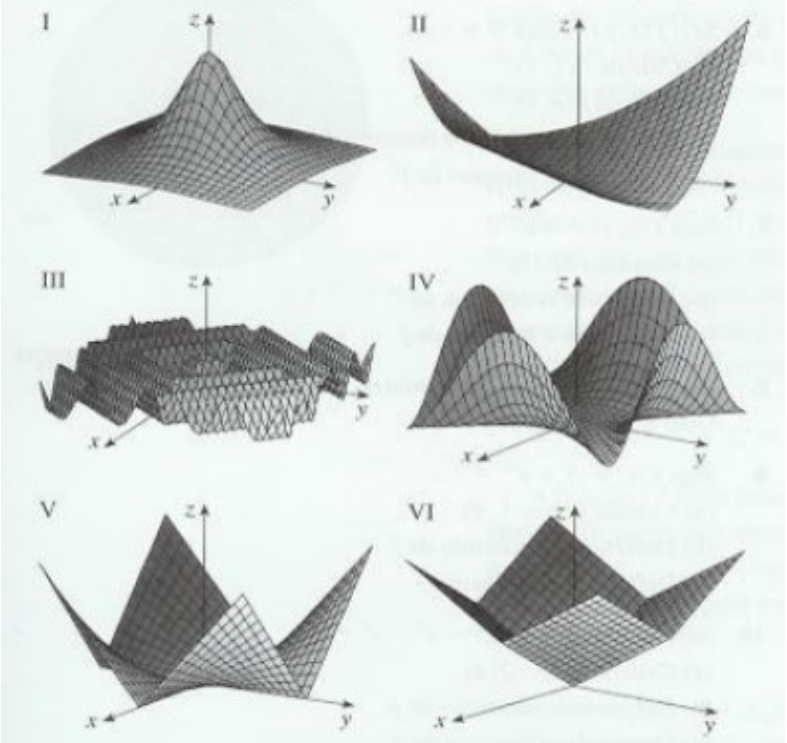
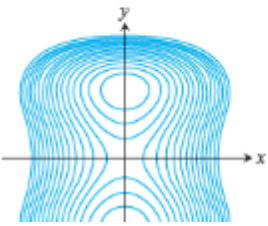
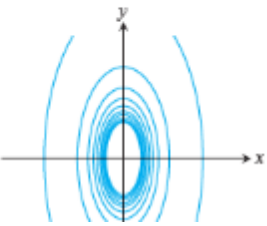
há um único registro, e a aprendizagem perde parte de seu significado – que não é uma alternativa viável dentro da Educação Matemática.

Em suma, “o que é importante não é a mudança de registro [...], mas os tratamentos que poderão ser realizados na representação obtida após a mudança de registro” (Duval, 2012, p.285). Propor conversões locais não favorecem o processo de coordenação de registros, que necessitam de uma visão mais global em relação às representações. Cada aluno pode realizar as coordenações entre registros por si só, no entanto algumas tarefas facilitam esse processo.

Uma aprendizagem que leve em consideração a ligação estreita que existe entre a noesis e semiose deve, então, elevar os alunos a uma condição de tomada de conscientização mais global e, para tal, são necessárias atividades de ensino mais específicas (Duval, 2012, p. 284)

Dessa forma, listamos a seguir algumas atividades que conseguem propor articulações entre registros diferentes apresentadas nos livros em análise.

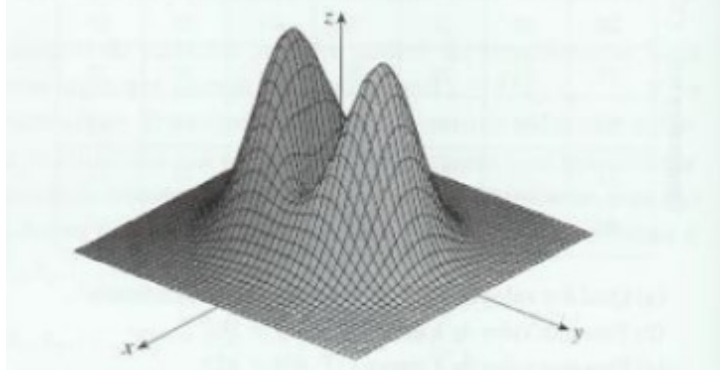
Quadro 21 – Atividades que propõe coordenação entre registros

Característica da atividade	Possíveis exemplificações, segundo Duval (2012)
Atividades de variações comparativas relativas a significação das representações	Exemplo 1: 30. Faça uma correspondência entre a função e seu gráfico (indicado por I-VI). Dê razões para sua escolha. (a) $f(x, y) = x + y$ (b) $f(x, y) = xy$ (c) $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$ (d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$ (e) $f(x, y) = (x - y)^2$ (f) $f(x, y) = \sin(x + y)$  Fonte: Stewart, 2010, p.826
	Exemplo 2 Identificando superfícies e curvas de nível Os Exercícios 31-36 exibem curvas de nível para as funções cujos gráficos são apresentados em (a)-(f) na página a seguir. Associe cada conjunto de curvas à função apropriada. 31.  34.  Fonte: Thomas, 2009, p. 215

Atividades que associam ou não tratamentos não semióticos e semióticos

Exemplo 3:

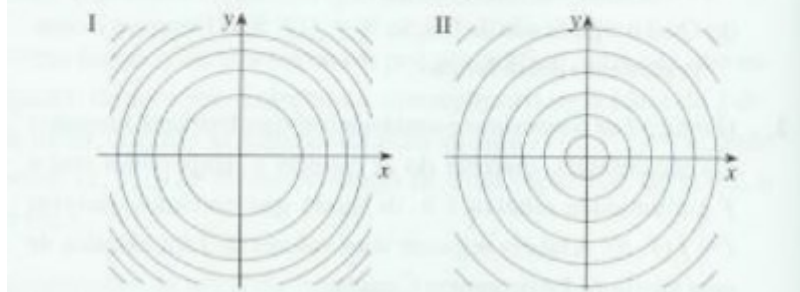
34. Faça um esboço do diagrama de contorno da função cujo gráfico é mostrado.



Fonte: Stewart, 2010, p.826

Exemplo 4:

32. Dois mapas de contorno são mostrados na figura. Um é de uma função f cujo gráfico é um cone. O outro é de uma função g cujo gráfico é um parabolóide. Qual é qual? Por quê?



Fonte: Stewart, 2010, p.826

Exemplo 5

Raciocinando geometricamente, determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em A , bem como os pontos em que estes valores são atingidos.

a) $f(x, y) = 2x + y + 3$ e A o conjunto de todo (x, y) tais que $x \geq 0, y \geq 0$ e $x + y \leq 2$.

b) $f(x, y) = x + y$ e A o conjunto de todos (x, y) tais que $x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 7, 2x + y \leq 5$ e $y \geq x - 1$.

c) $f(x, y) = \frac{y}{x-1}$ e A o conjunto de todos (x, y) tais que $-1 \leq x \leq 0$ e $1 \leq y \leq 2$.

d) $f(x, y) = \frac{y}{x-1}$ e A o círculo $(x-3)^2 + (y-1)^2 \leq 1$.

Fonte: Guidorizzi, 2010, p.160

Atividades de dupla produção para as representações semióticas complexas	Exemplo 6: No Exemplo 2 consideramos a função $W = f(T, v)$, onde W era o índice de sensação térmica ocasionado pelo vento, T, a temperatura real e v, a velocidade do vento. A representação numérica foi fornecida pela Tabela 1. (a) Qual o valor de $f(-15, 40)$? Qual seu significado? (b) Descreva em palavras o significado da questão “Para quais valores de v é verdade que $f(-20, v) = -30$?”. Em seguida, responda à questão. (c) Descreva o significado da questão “Para quais valores de T vale $f(T, 20) = -49$?”. Em seguida, responda à questão. (d) Qual o significado da função $W = f(-5, v)$? Descreva o comportamento dessa função. (e) Qual o significado da função $W = f(T, 50)$? Descreva o comportamento dessa função. Fonte: Stewart, 2010, p.825
	Exemplo 7: 61-64 Descreva as superfícies de nível da função. 61. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$ 62. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$ 63. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ 64. $f(x, y, z) = x^2 - y^2$ Fonte: Stewart, 2010, p.825
	Exemplo 8: 8. Seja $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$. Desenhe a imagem da curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ onde $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ e $z = f(x(t), y(t))$ ($R > 0$). Como é o gráfico de f? Fonte: Guidorizzi, 2010, p.161
	Exemplo 9: 7. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ homogênea e suponha que $f(a, b) = 0$ para todo (a, b), com $a^2 + b^2 = 1$. Mostre que $f(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. 8. Seja $g: [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Prove que existe uma única função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, homogênea de grau $\lambda \neq 0$, tal que, para todo $\alpha \in [0, 2\pi[$, $f(\cos \alpha, \sin \alpha) = g(\alpha)$. (Observação: o Exercício 8 nos diz que uma função homogênea fica completamente determinada quando se conhecem os valores que ela assume sobre os pontos de uma circunferência de centro na origem.) Fonte: Guidorizzi, 2010, p.151

Os exemplos 1 e 2 do quadro 21 se fundamentam na observação de registros diferentes. Assim, de acordo com Duval (2012) a apreensão de representações semióticas está ligada a discriminação de unidades significantes de cada registro em que foi formada. O único modo de se fazer é por meio da observação das variações internas de um registro em relação a outro. O que mudou? O que eles têm em comum? Qual a variação de uma unidade significativa em função dessa (do outro registro). Vejam as comparações solicitadas nos exemplos, ao propor comparações ou associações entre registros referencialmente equivalentes. E para fazer isso, é necessária uma análise para identificar as variações entre as unidades significativas em comum a cada registro.

Nem sempre os tratamentos são puramente cálculos ou ações realizadas em algum registro material. Um exemplo disso está presente na geometria, em que certos tratamentos podem ser realizados mentalmente. De acordo com Duval (2012), certas atividades levam o aluno a apropriar de tratamentos ao propor uma ligação entre tratamentos semióticos (realizados em registro) e não semióticos (que não necessitam ser registrados). O exemplo 3 e 4 apresentado propõe que se faça um esboço e descubra uma representação nova a partir de outra. Como não há valores, a atividade requer tratamentos de orientação, profundidade, noção espacial que não necessitam de ser calculados. Já o exemplo 5 traz relações entre tratamentos gráficos e algébricos para a resolução da questão.

Os exemplos 6, 7, e 8 se referem a toda ação de expor em língua natural um procedimento, um raciocínio, um cálculo, etapas de uma resolução. De acordo com Duval (2012), essas produções são feitas afim de tornar organizado de forma linear um registro semiótico que não apresenta uma organização linear, essenciais ao raciocínio dedutivo e compressão de texto. O exemplo 9 é a síntese deste tipo de atividade: requer de fato a produção de deduções matemáticas.

Dessa forma evidenciou-se que, o uso de muitas representações semióticas quanto ao estudo de função favorece a coordenação entre registros, que se mostrou mais criativa e reincidente na obra de Stewart, em relação as demais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A conceitualização das funções, segundo Duval (2012), repousa na articulação de pelo menos dois registros semióticos, uma vez que as representações semióticas podem ser parciais em relação ao objeto representado, como forma de complementariedade. Em outras palavras, eis aqui a defesa pela articulação entre registros em torno de que dê mais sentido entre eles, por meio de atividades que favoreçam este processo.

A história da Matemática nos conta de uma articulação ou coordenação que permitiu o desenvolvimento e progresso do conceito de função através de registros discursivos e não discursivos. Assim, os registros algébricos e gráficos se tornam indissociáveis, uma vez que ambos coexistem entre si, de forma a se complementarem.

A maioria das atividades analisadas das seções acerca do conteúdo de função de duas ou mais variáveis dos livros contemplam o tratamento, e esses são em maioria dentro dos registros simbólicos (algébricos). As conversões, que em maior parte são de equações aos registros gráficos apresentaram o fenômeno de não congruência semântica. No entanto, esse fenômeno não pode pôr em risco a não articulação de diferentes representações, fundamental a atividade cognitiva *noesis*.

Após essa breve análise nos sentimos confiantes em responder à pergunta de pesquisa deste trabalho: Como os livros de Cálculo II privilegiam as diversas representações de funções de duas ou mais variáveis de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica? Para isso, redigiu-se três considerações que nos levam a solucionar a pergunta de pesquisa.

(a) O livro Calculo Volume II de Stewart foi o único que trouxe a importância de se representar as funções em mais representações da habitual dupla de registro gráfico/algébrico sendo o único a trazer à tona registros em tabela. Assim, isso implicou em mais conversões em

suas atividades, o que não torna tímida a articulação entre esses registros para o entendimento de função de duas ou mais variáveis através de seus exercícios propostos;

(b) O livro *Um curso de Cálculo Volume II* de Guidorizzi apresenta uma proposta afim de contribuir com o raciocínio dedutivo, essencial aos professores e matemáticos, que como vimos na evolução histórica da Análise é puramente algébrico. Toda essa algebrização tira o protagonismo das representações diferentes de função (não apresentando nem a representação discursiva de função de n variáveis), o que torna este livro em relação a coordenação de registros proporcional em relação as suas poucas representações de função.

(c) O livro *Calculo volume II* de Thomas, juntamente com o a obra de Stewart traz um artifício de sugerir articulações entre registros não discursivos e discursivos usando softwares de computador para plotar gráficos, atividades em que a interpretação global de propriedades dessas figuras gráficas em relação a outros registros importa mais que o ato de tracejar ou localizar ponto a ponto no esboço de um gráfico isolado.

Assim sendo, a articulação entre registros de função de duas ou mais variáveis é fundamental para a aprendizagem matemática, e tem relação direta com as representações, ou seja, quanto mais representações, mais conversões e por sua vez, mais coordenações entre registros podem ocorrer. No entanto, esta operação merece ser mais estudada, o que não foi foco deste trabalho. Uma sugestão, é aprofundar sobre este tema em futuros trabalhos acerca de função e a teoria de Raymond Duval.

Também, considera-se que não há livro melhor ou pior quanto ao Ensino de Funções de duas ou mais variáveis, e sim livros que privilegiam as representações de função a luz da teoria de Duval (2012).

Por fim, outros objetos matemáticos podem também ser analisados em livros didáticos, afim de investigar a maneira como as representações ou expressões referencialmente equivalentes estão sendo privilegiadas à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa métodos qualitativo, quantitativo e misto**. In: Projeto de pesquisa métodos qualitativo, quantitativo e misto. 2010.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

_____. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 07, n. 1, p.97-117, 2012. Trad. Mércles Thadeu Moretti.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Trad. Mércles Thadeu Moretti.

FACHIN, Odília. **Fundamentos de metodologia**. 4. ed. São Paulo: Saraiva, 2003.

FAMAT. Curso Matemática - Bacharelado. **Ficha da disciplina de Cálculo III**. Universidade Federal de Uberlândia, 2018. Disponível em: <http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/MA_FD_04_Calculo_3.pdf> Acesso em: 05 abr. 2018.

_____. Curso Matemática – Licenciatura. **Ficha da disciplina de Cálculo III**. Universidade Federal de Uberlândia, 2018. Disponível em: <<http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/c%C3%A1lculo%203-GMA014.pdf>> Acesso em: 05 abr. 2018.

_____. **Graduação em Matemática**. Universidade Federal de Uberlândia, 2018. Disponível em: <<http://www.famat.ufu.br/graduacao/matematica/>>. Acesso em: 05 abr. 2018.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo** - vol. 2, 5ª Edição. Grupo Gen-LTC, Rio de Janeiro, 2001.

HENRIQUES, A; ALMOULOU, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciencia & Educação**, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

ICENE. **Ementário do Curso de licenciatura em matemática**. Universidade Federal do Triângulo Mineiro, 2018. Disponível em: <<http://sistemas.uftm.edu.br/integrado/?to=N29zTFVkdGh2bjcyeC9odGFISIRIRGthNjZ1VWY5Z1N1blFtdTJLUnFmbDdkU0V1YzVvZEtjbkZhTyt2UFBaeXRFSnpFbEMweitJNWV6NXR3RWZBVGE2T2dYMityc3JqbVp5UitkT3Z4LzFiNFNtNHdwU2ZNRTQ0R3RCVURjenluR0hnVzE4Ynd2T0psYkdwZFJUEHRpTXBUQmVDVFNyM1FZZFM1Mzd4VHpDVmlyLzVTSG8vZzNWwkcwYTZtRTBl&secret=uftm>>. Acesso em: 05 abr. 2018.

_____. **Projeto Político Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática**. Universidade Federal do Triângulo Mineiro, 2011. Disponível em: <<http://sistemas.uftm.edu.br/integrado/?to=N29zTFVkdGh2bjcyeC9odGFISIRIRGthNjZ1VWY5Z1N1blFtdTJLUnFmbDdkU0V1YzVvZEtjbkZhTyt2UFBaeXRFSnpFbEMweitJNWV6NXR3RWZBVGE2T2dYMityc3JqbVp5UitkT3Z4LzFiNFNtNHdwU2ZNRTQ0R3RCVURjenluR0hnVzE4Ynd2T0psYkdwZFJUEHRpTXBUQmVDVFNyM1FZZFM1Mzd4VHpES09DWGY5U3UzN1ByMVhhRlZLaFpN&secret=uftm/>>. Acesso em: 05 abr. 2017.

ICENP. Curso Matemática – Bacharelado. **Ficha da disciplina de Cálculo II**. Universidade Federal de Uberlândia, 2018. Disponível em: <<http://www.facip.ufu.br/sites/facip.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/03%20-%20C%C3%A1lculo%20Diferencial%20e%20Integral%20II.pdf>> Acesso em: 05 abr. 2018.

_____. Curso Matemática – Licenciatura. **Ficha da disciplina de Cálculo II**. Universidade Federal de Uberlândia, 2018. Disponível em: <http://www.facip.ufu.br/sites/facip.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/03%20-%20C%C3%A1lculo%20Diferencial%20e%20Integral%20II_1.pdf> Acesso em: 05 abr. 2018.

MAGGIO, D. P. **Saberes docentes de uma professora que ensina funções e conhece a Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí.

PONTE, J. P. The history of the concept of function and some educational implications. **The Mathematics Educator**, v. 3, n. 2, p. 3-8, 1992.

RAMOS, A. N. **Caminhos percorridos pelos egressos do curso de licenciatura em Matemática**. 2018. 49 f. Trabalho de conclusão de Curso (Graduação em licenciatura Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Naturais do pontal da Universidade Federal de Uberlândia. Ituiutaba. 2018.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Editora Zahar, 2012.

STEWART, J. **Cálculo** - Volume 2, 6ª Edição. Cengage Learning, São Paulo, 2009.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo** - volume 2, 12ª Edição. Pearson Education do Brasil, São Paulo. 2012.