

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**Conjectura Jacobiana no caso de aplicações $I+H$ em
dimensão 4**

ANTÔNIO LÍVIO CRUZ DE MENDONÇA

ORIENTADOR: JEAN VENATO SANTOS

Dezembro de 2017

Conjectura Jacobiana no caso de aplicações $I+H$ em dimensão 4

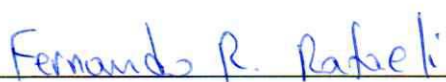
Monografia apresentada à Faculdade de
Matemática, UFU, como requisito parcial
para obtenção do título de Bacharel em
Matemática.

Uberlândia, 18 de Dezembro de 2017.

BANCA:



Prof. Dr. Alonso Sepúlveda Castellanos



Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli



Prof. Dr. Jean Venato Santos (Orientador)



Prof. Dr. Luis Renato Gonçalves Dias

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me dar condições de trilhar o caminho que escolhi e aos meus pais e minha irmã por sempre me apoiarem.

Sou eternamente grato ao meu orientador, Jean Venato, por tanto me ajudar durante a segunda metade da minha graduação. Por todas as horas que dedicou a me ensinar, por todo apoio e incentivo não só no âmbito universitário mas também no pessoal.

Não poderia esquecer professores como Antônio Carlos Nogueira e Francielle Rodrigues com quem cursei várias disciplinas no decorrer da graduação e com certeza me repassaram muito conhecimento.

E por último, aos meus colegas de turma com quem compartilhei várias horas de estudo e lazer, boas risadas e lembranças que guardarei para sempre. Em especial ao meu amigo Luciano Alves pela companhia nas madrugadas de estudo. E pessoas especiais que acompanharam a minha luta diária e me incentivaram nas horas difíceis: Beatriz Sayuri, Katon Oliveira, Victor Becker, Victor Bezerra, e tantas outras.

Sumário

1	Conjectura Jacobiana	7
1.1	Caso complexo	7
1.2	Conjectura Jacobiana real de Jelonek	8
2	Noções de folheação	9
2.1	Submersões e folheações	9
2.2	Folheações e injetividade global	11
3	Classificação de Hubbers	15
4	Análise das folheações	17
4.1	Resultados prévios	17
4.2	Folheações em $\mathbb{R}^8$	18
4.2.1	Aplicações 1), 2), 4), 6) e 7)	19
4.2.2	Aplicações 3), 5) e 8)	21
5	Conclusão	27

Introdução

Dada uma aplicação $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1 , cuja derivada $DF(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo para todo $x \in \mathbb{R}^n$, segue do Teorema da Função Inversa que F é um difeomorfismo local. Poder-se-ia perguntar se, nestas condições, F é um difeomorfismo global de $\mathbb{R}^n$ sobre sua imagem $F(\mathbb{R}^n)$? Em toda generalidade, a resposta é negativa como mostra a exponencial complexa $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ que é um difeomorfismo local, de classe C^∞ , não injetivo e portanto não é um difeomorfismo global. Tal exemplo ilustra a necessidade de se considerar condições adicionais para que um difeomorfismo local F seja um difeomorfismo global na sua imagem. Note que, dado o caráter local do conceito de derivadas, basta que tais condições garantam a injetividade global de F .

Este problema de estabelecer condições suficientes para que um difeomorfismo local $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um difeomorfismo global remonta o início do século XX com o trabalho de Hadamard [12], veja também [23], dizendo que F é um difeomorfismo global (sobrejetivo) se, e somente se, F é uma aplicação própria. Desde então, matemáticos de diversas áreas têm buscado diferentes condições, umas mais simples, outras mais complicadas, que garantam a bijetividade de F , ou em muitos casos, somente sua injetividade global. Neste contexto, se destaca a famosa conjectura proposta por Keller, em 1939 [18], que ficou conhecida como:

Conjectura Jacobiana. *Se $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, é uma aplicação polinomial tal que $\det JF(x)$ é constante não nulo, então F é bijetiva.*

O célebre exemplo de Pinchuk [22] mostrou que um difeomorfismo local polinomial de $\mathbb{R}^n$ não é necessariamente bijetivo, portanto a condição do Jacobiano $\det JF(x)$ ser *constante* não nulo é essencial quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Mesmo sendo atacada por vários matemáticos das mais variadas áreas, tais como álgebra, geometria, geometria algébrica e até mesmo equações diferenciais, a Conjectura Jacobiana permanece em aberto para todo $n \geq 2$. Excelentes referências gerais sobre este problema são [1] e [7].

Por outro lado, avanços importantes foram obtidos ao longo de todos esses anos. Por exemplo, em [25] foi provado que a Conjectura Jacobiana é verdadeira para todo $n \geq 2$ para aplicações polinomiais de grau menor ou igual a 2. Além disto, um resultado de redução de grande relevância foi apresentado por Bass, Conell e Wright em [1]. Tal resultado garante que é suficiente atacar a Conjectura Jacobiana no caso das aplicações polinomiais do tipo $I + H : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, onde H são as aplicações polinomiais homogêneas de grau 3.

Neste sentido, Hubbers em [13] estabeleceu a bijetividade de tais aplicações $I + H$ no caso $n = 4$. Para isto, primeiramente, ele classificou essas aplicações em oito casos e em seguida aplicou um critério algébrico de invertibilidade baseado em bases de Gröbner para concluir a bijetividade das mesmas. No Capítulo 3 será apresentada as aplicações presentes em tal classificação.

Dada uma aplicação contínua $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, um ponto y do contradomínio é dito próprio se possui uma vizinhança U tal que $F^{-1}(\bar{U})$ é compacto. Do contrário, dizemos que y é um ponto não próprio de F . Denotamos por S_F o conjunto de todos os pontos não próprios de F . No caso de F ser uma aplicação polinomial ou semi-algébrica segue, da geometria algébrica, que S_F é um conjunto semi-algébrico e portanto possui uma estratificação em subvariedades analíticas. Isto induz uma noção de dimensão em S_F dada pela maior dimensão entre os extratos de S_F . Uma outra conjectura diretamente relacionada à Conjectura Jacobiana é a seguinte:

Conjectura Jacobiana real de Jelonek. *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo local polinomial. Se $\text{codim}(S_F) \geq 2$ então F é bijetiva.*

Jelonek enunciou esta conjectura em [14] onde mostrou também que a veracidade da mesma implica na veracidade da Conjectura Jacobiana no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Seja $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo local de classe C^r , $r \geq 1$. Dada $\{i_1, \dots, i_k\}$

uma k -combinação do conjunto $\{1, \dots, n\}$, desde que $(f_{i_1}, \dots, f_{i_k}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma submersão, veremos no Capítulo 2 que tal aplicação induz em seu domínio $\mathbb{R}^n$ uma folheação de codimensão k e classe C^r , que denotaremos por $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_k}$. Com esta notação, podemos enunciar a seguinte versão fraca da Conjectura Jacobiana real de Jelonek provada em [21].

Teorema 1. *Seja $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo local polinomial tal que para cada $(n-2)$ -combinação $\{i_1, \dots, i_{n-2}\}$ de $\{1, \dots, n\}$, cada folha de $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_{n-2}}$ é homeomorfa a um plano. Se $\text{codim}(S_F) \geq 2$ então F é bijetiva.*

O principal objetivo desta monografia é fazer um estudo das folheações induzidas pelas 8 aplicações do tipo $I+H$, para $n=4$, apresentadas na classificação obtida por Hubbers em [13]. A ideia é estudar a viabilidade de apresentar uma prova alternativa para a bijetividade de tais aplicações utilizando o argumento topológico do Teorema 1. Como será apresentado no Capítulo 4, em cinco das oito aplicações de Hubbers é possível concluir com certa facilidade a bijetividade por este método. Porém, apesar de termos conseguido avançar em alguns exemplos, para as outras três aplicações ainda é preciso aprofundar nossa análise para ter sucesso na aplicação deste argumento topológico.

1 Conjectura Jacobiana

1.1 Caso complexo

Dada uma aplicação diferenciável $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, denotamos sua matriz Jacobiana em $z \in \mathbb{C}^n$ por $JF(z)$.

Teorema 2. *Se $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é uma aplicação polinomial invertível, então $\det(JF) \equiv cte \in \mathbb{C}^*$.*

Demonstração. Se G é a inversa de F temos

$$G(F(z)) = z.$$

Derivando esta igualdade, pela regra da cadeia, obtemos:

$$JG(F(z)).JF(z) = I_n$$

donde $\det(JG(F(z)).JF(z)) = \det(JG(F(z))).\det(JF(z)) = \det I_n = 1$. Desde que $\det(JG(F(z)))$ e $\det(JF(z))$ são polinômios nas variáveis $(z_1, \dots, z_n) = z$, pelo grau do produto de polinômios concluímos que tais polinômios são constantes, isto é, que $\det(JF) \equiv cte \in \mathbb{C}^*$. $\square$

Note que no caso complexo a Conjectura Jacobiana propõe se a recíproca do teorema acima seria verdadeira, ou seja:

Conjectura Jacobiana. *Se $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é uma aplicação polinomial tal que $\det JF(z)$ é constante não nulo, então F é bijetiva.*

Apesar de ser um problema em aberto para $n \geq 2$, vários avanços foram feitos desde que esta conjectura foi enunciada pela primeira vez em 1939, uma delas é que basta mostrar a injetividade.

Teorema 3 (Białynicki-Birula e M. Rosenlicht 1962 [2]). *Se $F: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, é uma aplicação polinomial injetiva, então F é bijetiva.*

Outro importante avanço é que a conjectura se verifica quando o grau de F é menor ou igual a dois.

Teorema 4 (Wang 1980 [25]). *Se $F = (F_1, \dots, F_n): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é uma aplicação polinomial tal que $\det JF \equiv cte \in \mathbb{C}^*$ e $\text{grau}(F_i) \leq 2$, para todo $i = 1, \dots, n$, então F é bijetiva.*

Demonstração. Pelo Teorema 3 é suficiente mostrar a injetividade de F . Suponha, por absurdo, que existam $a \neq b$ em $\mathbb{C}^n$ tais que $F(a) = F(b)$. Definindo $G(z) := F(z + a) - F(a)$, tomando $c = b - a$ temos que $c \neq 0$ e $G(c) = 0$. Da equação

$$JG(z) = JF(z + a)$$

segue que $\det G \equiv k \in \mathbb{C}^*$. Desde que $\text{grau}(G) \leq 2$ e $G(0) = 0$ temos $G = G_1 + G_2$, onde G_i é a parte homogênea de G de grau i . Assim, dado $t \in \mathbb{C}$ tem-se que

$$G(tc) = G_1(tc) + G_2(tc) = tG_1(c) + t^2G_2(c),$$

a qual derivando obtem-se para todo $t \in \mathbb{C}$:

$$G_1(c) + 2tG_2(c) = \frac{d}{dt}G(tc) = JG(tc) \neq 0$$

Mas substituindo $t = 1/2$ obtemos $G(c) \neq 0$. Tal contradição mostra que F é injetiva. $\square$

A princípio este resultado pode parecer uma versão deveras particular da Conjectura Jacobiana. No entanto o seguinte resultado mostra, em particular, que é suficiente provar esta conjectura para aplicações polinomiais de grau menor ou igual a três.

Teorema 5 (Bass et al 1982 [1]). *Basta mostrar a Conjectura Jacobiana para aplicações polinomiais $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ da forma $F = I + H$, onde I é a identidade e H é homogênea de grau três, para todo $n \geq 2$.*

Em seguida este resultado foi refinado por:

Teorema 6 (Drużkowski 1983 [6]). *Basta mostrar a Conjectura Jacobiana para aplicações polinomiais $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ cúbicas lineares, isto é, da forma*

$$F(z_1, \dots, z_n) = \left(z_1 + \left(\sum_{j=1}^n c_{j1} z_j \right)^3, \dots, z_n + \left(\sum_{j=1}^n c_{jn} z_j \right)^3 \right),$$

onde $c_{ij} \in \mathbb{C}$, para todo $n \geq 2$.

A fim de enunciar um importante critério de invertibilidade, introduziremos algumas notações. Seja $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma aplicação polinomial, isto é, com $F_i \in \mathbb{C}[z]$. Introduza n novas variáveis $w_1, \dots, w_n$ e considere o ideal A de $\mathbb{C}[z, w] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n]$ gerado pelos elementos $w_1 - F_1(z), \dots, w_n - F_n(z)$. Escolha uma ordem monomial tal que qualquer produto de potências em $w_1, \dots, w_n$ seja menor que qualquer produto de potências em $z_1, \dots, z_n$.

Teorema 7 (Essen 1990 [8]). *Seja $\mathcal{G}$ a base de Gröbner reduzida do ideal A . Então F é invertível se, e somente se, $\mathcal{G} = \{z_1 - G_1(w), \dots, z_n - G_n(w)\}$ com $G_i \in \mathbb{C}[w]$. Além disto, se F é invertível então sua inversa é $G = (G_1, \dots, G_n)$.*

Como já mencionado na introdução, Hubbers em [13] apresentou uma classificação para as aplicações do tipo $I + H$, quando $n = 4$, obtendo somente oito casos a serem analisados. A partir disto, ele aplica o critério de invertibilidade enunciado acima para concluir a bijetividade destas oito aplicações (cf [13, p. 25]).

1.2 Conjectura Jacobiana real de Jelonek

Em 2002, Jelonek provou em [14] que: se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, é um difeomorfismo local polinomial e $\text{codim}(S_F) \geq 3$, então F é um difeomorfismo global. Por outro lado, no exemplo de Pinchuck, dado em [22], que é um difeomorfismo local polinomial não injetivo do plano, temos que $\text{codim}(S_F) = 1$. Estes fatos motivaram Jelonek a estabelecer, em [14], a seguinte:

Conjectura Jacobiana real de Jelonek. *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo local polinomial. Se $\text{codim}(S_F) \geq 2$ então F é bijetiva.*

Outro fato, provado por Jelonek em [14], que ilustra a relevância de sua conjectura, é que uma resposta afirmativa para ela implica na solução da Conjectura Jacobiana.

Neste trabalho pretende-se aplicar um resultado que consiste numa versão fraca da Conjectura Jacobiana real de Jelonek (cf. Teorema 15) para estudar a bijetividade das oito aplicações $F : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ da forma $I + H$ obtidas na classificação de Hubbers. Antes de enunciar este teorema, será introduzido a seguir algumas noções sobre folheações.

2 Noções de folheação

2.1 Submersões e folheações

Iniciamos com alguns resultados da teoria clássica de cálculo avançado, os quais retiramos das referências: [19] e [20].

Teorema 8 (Teorema da Função Inversa). *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, de classe C^r , ($r \geq 1$) no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um isomorfismo. (Equivalentemente: o determinante jacobiano $\det Jf(a) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$ diferente de zero). Então f é um difeomorfismo de um aberto V contendo a sobre um aberto W contendo $f(a)$. Além disso, $f^{-1} : W \rightarrow V$ é de classe C^r e sua derivada no ponto $f(a)$ é $[f'(a)]^{-1}$.*

Uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, chama-se uma submersão quando, para todo $x \in U$, se sua derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear sobrejetiva. Note que neste caso é necessário que $m \geq n$.

Um funcional linear é sobrejetivo ou nulo. Portanto uma função diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma submersão se, e somente se, $f'(x) \neq 0$ ou, equivalentemente, $\nabla f(x) \neq 0$, para todo $x \in U$.

Se pensarmos na decomposição em soma direta do tipo $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$, basta tomarmos uma partição $\{1, \dots, m+n\} = I \cup J$, onde $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ e $J = \{j_1, \dots, j_n\}$. Assim sendo, é fácil ver que $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ já que o mesmo é o subespaço gerado pelos vetores $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$, para $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_n}\}$ temos o subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Evidentemente, cada vetor $x \in \mathbb{R}^{m+n}$ se escreve de modo único como $z = x + y$, onde $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Assim, dada $f : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável em $a \in U$ tal que $f'(a)$ é sobrejetora podemos reordenar, se necessário, as coordenadas de modo que as n últimas colunas da matriz Jacobiana de f em a sejam linearmente independentes, de forma que, no enunciado a seguir, não há perda de generalidade.

Teorema 9 (Forma local das submersões). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^r , ($r \geq 1$) no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Se num ponto $p = (a, b) \in U$, a matriz*

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(p) \right] (i, j = 1, \dots, n)$$

é invertível então existem abertos $Z \ni p$ em $\mathbb{R}^{m+n}$, $V \ni a$ em $\mathbb{R}^m$, $W \ni c = f(p)$ em $\mathbb{R}^n$ e um difeomorfismo $h : V \times W \rightarrow Z$, de classe C^r , tal que $f \circ h(x, w) = w$ para todo $(x, w) \in V \times W$.

Demonstração. Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ a aplicação de classe C^r definida por $\varphi(x, y) = (x, f(x, y))$. A matriz jacobiana de φ tem a forma

$$J\varphi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix}$$

onde I é a matriz identidade $m \times m$ e a matriz $n \times n$

$$B = B(p) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(p) \right]$$

é, no ponto $p = (a, b)$, invertível.

Pelo Teorema da Função Inversa, φ é um difeomorfismo de um aberto $Z \ni p$ sobre um aberto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, o qual podemos supor da forma $V \times W$, onde $V \subset \mathbb{R}^m$ e $W \subset \mathbb{R}^n$, com $a \in V$ e $c = f(a, b) \in W$. Como o difeomorfismo φ deixa fixa a primeira coordenada então seu inverso h tem a mesma propriedade e assim $h : V \times W \rightarrow Z$ é da forma $h(x, w) = (x, h_2(x, w))$.

Então, para qualquer $(x, w) \in V \times W$, tem-se

$$\begin{aligned}(x, w) &= \varphi(h(x, w)) = \varphi(x, h_2(x, w)) \\ &= (x, f(x, h_2(x, w))) = (x, f(h(x, w))).\end{aligned}$$

Logo, $f(h(x, w)) = w$ para qualquer $(x, y) \in V \times W$. $\square$

O teorema acima nos diz que, dada uma submersão f , é possível tomar novas coordenadas em torno de cada ponto de seu domínio de modo que f seja localmente uma projeção sobre as n últimas coordenadas.

A seguir introduzimos o conceito de folheações em $\mathbb{R}^{m+n}$ e na sequência mostramos como submersões de $\mathbb{R}^{m+n}$ em $\mathbb{R}^n$ induzem folheações em $\mathbb{R}^{m+n}$. Tais noções foram obtidas do texto [4].

Definição 1. Uma folheação de classe C^r e dimensão m em $\mathbb{R}^{m+n}$, é um conjunto de cartas $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \Lambda}$, onde Λ é um conjunto de índices, satisfazendo:

- (i) $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$ é uma família de conjuntos abertos em $\mathbb{R}^{m+n}$ cuja união cobre $\mathbb{R}^{m+n}$.
- (ii) Se $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{F}$ então $\varphi_i(U_i) = V_1^i \times V_2^i \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, onde V_1^i e V_2^i são discos abertos de $\mathbb{R}^m$ e de $\mathbb{R}^n$ respectivamente.
- (iii) Se $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j) \in \mathcal{F}$ são tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ é de classe C^r e da forma:

$$h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

isto é, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$. Dizemos também que $\mathbb{R}^{m+n}$ é folheada por $\mathcal{F}$, ou ainda que $\mathcal{F}$ é uma estrutura folheada de dimensão m e classe C^r sobre $\mathbb{R}^{m+n}$.

Teorema 10. Se $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma submersão de classe C^r , $r \geq 1$, então f induz uma folheação em $\mathbb{R}^{m+n}$ de classe C^r e dimensão m .

Demonstração. Como $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma submersão de classe C^r . Pela forma local das submersões, dados $p \in \mathbb{R}^{m+n}$ e $q = f(p) \in \mathbb{R}^n$ existem abertos U em $\mathbb{R}^{m+n}$, V_1 em $\mathbb{R}^m$, V_2 em $\mathbb{R}^n$ tais que $p \in U$, $q \in V_2$ e um difeomorfismo $h : V_1 \times V_2 \rightarrow U$ tal que $f \circ h(x, y) = y$, $\forall (x, y) \in V_1 \times V_2$. Definindo $\varphi = h^{-1} : U \rightarrow V_1 \times V_2$ e tomando $\mathcal{F} = \{(U_p, \varphi_p)\}_{p \in \mathbb{R}^{m+n}}$ temos (i), (ii) e (iii) da Definição 1. De fato, (i) e (ii) são óbvios pela construção de $\mathcal{F}$.

Assim, falta verificar a condição (iii). Dados $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j) \in \mathcal{F}$ tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, queremos mostrar que $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, y) = (l(x, y), g(y))$, ou seja, que a segunda função coordenada de $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ só depende de y . Note que:

$$f \circ \varphi_i^{-1}(x, y) = \pi_2(x, y) = y, \quad \text{para todo } (x, y) \in \varphi_i(U_i \cap U_j) \quad (2.1)$$

$$f \circ \varphi_j^{-1}(x, y) = \pi_2(x, y) = y, \quad \text{para todo } (x, y) \in \varphi_j(U_i \cap U_j) \quad (2.2)$$

Assim, para todo $(x, y) \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$, temos

$$y = f \circ \varphi_i^{-1}(x, y) = f \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, y) = \pi_2(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x, y).$$

O que mostra que a segunda função coordenada g de $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ depende somente de y , de fato, $g(x, y) = g(y) = y$. Além disto, por construção, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ é de classe C^r . $\square$

A seguir apresentamos alguns exemplos ilustrando este resultado:

Exemplo 1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função de classe C^∞ dada por $f(x, y) = (x^2 - 1)e^{-y}$, o campo vetorial gradiente é: $\nabla f(x, y) = (2xe^{-y}, -(x^2 - 1)e^{-y})$, é fácil notar que este é um campo de vetores não nulo, logo f é uma submersão. As retas $x = -1$ e $x = 1$ são curvas de nível zero de f , as curvas de nível $c < 0$ se encontram na faixa $-1 < x < 1$, esta faixa está decomposta por uma família de curvas assintotando as retas $x = -1$ e $x = 1$, as curvas de nível $c > 0$ encontram-se no complemento da faixa $-1 \leq x \leq 1$, assim esta submersão f define uma folheação no plano como na figura abaixo.

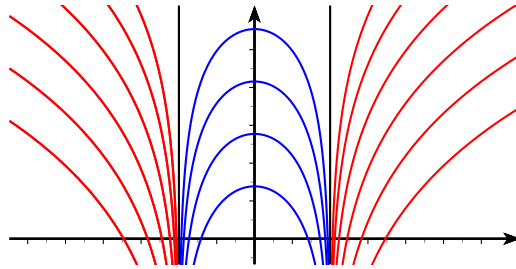


Figura 2.1: Folheação definida por submersão, exemplo 1

Exemplo 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a submersão definida por $f(x_1, x_2, x_3) = \alpha(r^2)e^{x_3}$, onde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^∞ tal que $\alpha(1) = 0$, $\alpha(0) = 1$ e se $t > 0$ então $\alpha'(t) < 0$.

As folhas de $\mathcal{F}$ no interior do cilindro sólido $C = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ são todas homeomorfas a $\mathbb{R}^2$ e podem ser parametrizadas por $(x_1, x_2) \in D^2 \mapsto (x_1, x_2, \log(c/\alpha(r^2)))$, sendo $c > 0$. O bordo de C , $\partial C = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ é também uma folha. Fora de C as folhas são todas homeomorfas a cilindros.

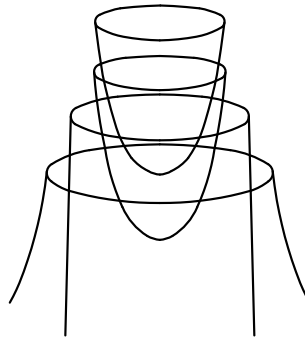


Figura 2.2: Folheação definida por submersão, exemplo 2

2.2 Folheações e injetividade global

Sejam $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo local de classe C^r e $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ uma k -combinação do conjunto $\{1, \dots, n\}$. Desde que $(f_{i_1}, \dots, f_{i_k}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma submersão, pelo Teorema 10, segue que tal aplicação induz em seu domínio $\mathbb{R}^n$ uma folheação de codimensão k e classe C^r , que denotaremos por $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_k}$.

Nosso próximo objetivo é apresentar a versão fraca da Conjectura Jacobiana real de Jelonek provada em [21], que será usada para estudar a bijetividade das aplicações obtidas na classificação de

Hubbers. Antes porém, discorreremos sucintamente sobre a relação entre folheações e a injetividade de difeomorfismos locais. Começaremos esta discussão em dimensões mais baixas para culminar no caso n -dimensional que consiste na versão fraca citada acima.

Dado $F = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo local as folhas das folheações $\mathcal{F}_{f_1}$ e $\mathcal{F}_{f_2}$ são linhas cujos fins são sempre no infinito, pela teoria de folheações (veja classificação feita por Kaplan em [17]); neste caso, se a folheação não for trivial, ocorre um fenômeno chamado componente de Reeb, o que equivale à existência de uma semi-componente de Reeb (scR). Na Figura 2.3 ilustra-se uma semi-componente de Reeb (em pontilhado) e indicamos [9] para uma definição rigorosa deste conceito.

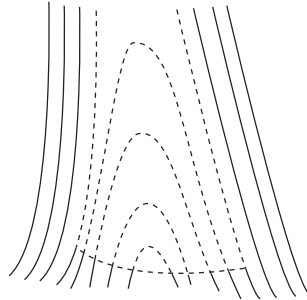


Figura 2.3: Semi-componente de Reeb (scR) em um folheação do $\mathbb{R}^2$

Em 1995 [10], Gutierrez estabelece a seguinte relação entre a (não) injetividade de F e suas folheações coordenadas:

Teorema 11. *Dado $F = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo local de classe C^1 , se F não for injetivo, então tanto $\mathcal{F}_{f_1}$ quanto $\mathcal{F}_{f_2}$ possuem scR.*

Portanto, para se estabelecer a injetividade global de F , basta encontrar condições sob as quais $\mathcal{F}_{f_1}$ quanto $\mathcal{F}_{f_2}$ não possuam scR. A fim de apresentar um exemplo de uma tal condição, denotaremos por $\text{Spec}(F)$ o espectro da aplicação F que consiste no conjunto dos autovalores (complexos) da matriz jacobiana $JF(x)$, quando x varia em todo domínio de F . Em [10], Gutierrez mostrou que se $\text{Spec}(F) \cap [0, \infty) = \emptyset$ então tanto $\mathcal{F}_{f_1}$ quanto $\mathcal{F}_{f_2}$ não possuem scR e do Teorema 11 segue que F é injetora. Posteriormente este resultado foi refinado por Gutierrez em conjunto com parceiros nos trabalhos [5] e [9] culminando no seguinte resultado:

Teorema 12 (Fernandes, Gutierrez e Rabanal [9]). *Seja $F = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável (não necessariamente de classe C^1). Se $\text{Spec}(F) \cap [0, \varepsilon) = \emptyset$, para algum $\varepsilon > 0$, então F é globalmente injetiva.*

Gutierrez e Maquera [11] introduziram a noção de semi-componente de Reeb (scR) para uma folheação bidimensional em $\mathbb{R}^3$ que, a grosso modo, consiste na existência de uma folha cilíndrica (possivelmente com várias “pernas”) delimitando uma folheação de Reeb (ver Figura 2.4 para uma visualização geométrica e [11] para uma definição rigorosa). Gutierrez e Maquera mostraram que as folheações coordenadas não possuem scR sempre que $\text{Spec}(F) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$, para algum $\varepsilon > 0$, ou seja:

Teorema 13. *Dado um difeomorfismo local $F = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^2 . Se $\text{Spec}(F) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$, para algum $\varepsilon > 0$, então $\mathcal{F}_{f_i}$ não possui scR₂, para todo $i = 1, 2, 3$. Em particular, todas as folhas $\mathcal{F}_{f_i}$ são difeomorfas a $\mathbb{R}^2$.*

Porém, em $\mathbb{R}^3$ não é verdade que a não existência de scR em $\mathcal{F}_{f_i}$ implique na injetividade global de F , isto é, com estes termos sabemos que o Teorema 11 não é válido em $\mathbb{R}^3$. Com efeito, no exemplo Braun e Venato-Santos [3] apresentaram a aplicação $F = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $F(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - e^{x_1} \cos x_2, x_3 - e^{x_1} \sin x_2, x_3)$. Desde que $\det DF(x) = e^{2x_1}$ e $F(0, 0, 0) =$

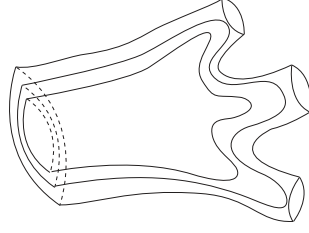


Figura 2.4: Semi-componente de Reeb (scR) em um folheação do $\mathbb{R}^3$

$F(0, 2\pi, 0)$ temos que F é um difeomorfismo local suave não injetivo. Além disto, dado $i \in \{1, 2, 3\}$ qualquer nível de f_i pode ser descrito como um gráfico de uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ e portanto é conexo e homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, donde a folheação $\mathcal{F}_i$ é trivial e, em particular, não contém scR's.

Na realidade, dado um difeomorfismo local $F = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, de classe C^2 , então é um problema em aberto saber se a condição $\text{Spec}(F) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$, para algum $\varepsilon > 0$, é suficiente para garantir a injetividade global de F . Para dimensões maiores, Smyth e Xavier em [24] provaram a existência de números naturais n e aplicações polinomiais $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ não injetoras satisfazendo $\text{Spec}(F) \cap [0, \infty) = \emptyset$.

Por outro lado, Gutierrez e Maquera [11] mostraram que a hipótese espectral é efetiva como condição adicional na Conjectura Jacobiana real de Jelonek:

Teorema 14 (Gutierrez e Maquera [11]). *Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um difeomorfismo local polinomial tal que $\text{Spec}(F) \cap [0, \varepsilon) = \emptyset$, para algum $\varepsilon > 0$. Se $\text{codim}(S_F) \geq 2$ então F é bijetiva.*

Neste trabalho estamos interessados em estudar a viabilidade de aplicar a seguinte versão fraca da Conjectura Jacobiana real de Jelonek provada por Maquera e Venato-Santos em [21], para estabelecer a bijetividade das aplicações de Hubbers.

Teorema 15 (Maquera e Venato-Santos [21]). *Seja $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo local polinomial. Então, cada folha de $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_{n-2}}$ é homeomorfa a um plano, para cada $(n-2)$ -combinação $\{i_1, \dots, i_{n-2}\}$ de $\{1, \dots, n\}$ e $\text{codim}(S_F) \geq 2$ se, e somente se, F é bijetiva.*

A fim de se contornar a necessidade de se estudar o conjunto S_F de pontos não próprios, o que iremos aplicar é uma consequência do Teorema acima relacionada à Conjectura Jacobiana (complexa). Seja $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $F(z) = (F_1(z), \dots, F_n(z))$ onde $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z_i \in \mathbb{C}$, $\forall i = 1, \dots, n$. Considere a aplicação $F_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ associada a F do seguinte modo:

$$\begin{aligned} F_{\mathbb{R}}(\tilde{z}) &= (f_1(\tilde{z}), \dots, f_{2n}(\tilde{z})) \\ &= (\text{Re}(F_1(\tilde{z})), \dots, \text{Re}(F_n(\tilde{z})), \text{Im}(F_1(\tilde{z})), \dots, \text{Im}(F_n(\tilde{z}))) \end{aligned}$$

onde $\tilde{z} = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, $x_i + iy_i = z_i$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Com esta notação temos a seguinte consequência do teorema acima provada em [21]:

Corolário 16 (Maquera e Venato-Santos [21]). *Dada $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma aplicação polinomial com $\det JF(z) \equiv 1$ e $F_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ associada a F . Então as folhas de $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_{2n-2}}$ são homeomorfas a planos para toda $(i_1, \dots, i_{2n-1})$, $(2n-2)$ -combinação de $\{1, \dots, 2n\}$ se, e somente se, F é bijetora.*

Demonstração. Suponha para toda $(i_1, \dots, i_{2n-1})$, $(2n-2)$ -combinação de $\{1, \dots, 2n\}$, as folhas de $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_{2n-2}}$ são homeomorfas a planos. Em [15] e [16], Jelonek mostrou que o conjunto S_F , de pontos não próprios de F , é vazio ou tem $\text{codim } S_F = 1$. Em qualquer destes casos, segue que para a aplicação associada $F_{\mathbb{R}}$ temos $\text{codim } S_{F_{\mathbb{R}}} \geq 2$. Portanto, do Teorema 15, F é bijetora.

Por outro lado, se F é bijetora, em particular, $F_{\mathbb{R}}$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n}$. Dada uma $(2n-2)$ -combinação $(i_1, \dots, i_{2n-1})$ de $\{1, \dots, 2n\}$, seja $\{a, b\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-2}\}$. Agora note que as folhas de $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_{n-2}}$ são dadas por $F^{-1}(L)$ onde

$$L = \{c_{i_1}, \dots, c_{a-1}, \mathbb{R}, c_{a+1}, \dots, c_{b-1}, \mathbb{R}, c_{b+1}, \dots, c_{i_{n-2}}\},$$

e $c_{i_1}, \dots, c_{i_{n-2}}$ são constantes reais. Sendo L homeomorfa a um plano e F^{-1} um homeomorfismo, segue que as folhas de $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_{n-2}}$ são homeomorfas a planos. $\square$

Nosso objetivo é estudar a viabilidade de aplicar este Corolário a fim de apresentar uma demonstração alternativa para a bijetividade das aplicações $F: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ da forma $I + H$ obtidas na classificação de Hubbers, as quais apresentaremos na próxima seção. Para isto, tomaremos cada aplicação associada $F_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$ e temos que mostrar que as folhas das 28 folheações $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_6}$ são homeomorfas a planos. Como já foi observado acima, Hubbers conclui a bijetividade das aplicações obtidas em sua classificação aplicando a caracterização via bases de Gröbner dada pelo Teorema 7. Portanto, pelo Corolário 16, temos a comodidade de saber de antemão que tais folhas são homeomorfas a planos, sendo assim o nosso objetivo é descrever uma maneira de confirmar este fato topológico.

3 Classificação de Hubbers

Como foi mencionado na Introdução, Bass, Conell e Wright garantem em [1] que é suficiente atacar a Conjectura Jacobiana nos casos de aplicações polinomiais do tipo $I + H : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ com jacobiano constante, onde H são as aplicações polinomiais homogêneas de grau 3. A seguir, apresentamos a classificação das aplicações $I + H : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ para $n = 4$ feita por Hubbers em [13].

Nesse intuito, começaremos definindo a forma mais geral de uma função do tipo $I + H$ discriminando os termos da parte homogênea em ordem lexicográfica.

Definição 2. *A forma mais geral de uma função polinomial da forma $F = I + H$, onde H é cúbica homogênea, em dimensão quatro, $(F : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4)$ é:*

$$F(X) = I + H(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_1(X) \\ H_2(X) \\ H_3(X) \\ H_4(X) \end{pmatrix}$$

onde, para cada u , com $1 \leq u \leq 4$, H_u é da forma:

$$\begin{aligned} H_u(X) = & a_u x_1^3 + b_u x_1^2 x_2 + c_u x_1^2 x_3 + d_u x_1^2 x_4 + e_u x_1 x_2 x_3 + f_u x_1 x_2 x_4 + g_u x_1 x_3 x_4 + \\ & h_u x_1 x_2^2 + i_u x_1 x_3^2 + j_u x_1 x_4^2 + k_u x_2^3 + l_u x_2^2 x_3 + m_u x_2^2 x_4 + n_u x_2 x_3^2 + \\ & o_u x_2 x_3 x_4 + p_u x_2 x_4^2 + q_u x_3^3 + r_u x_3^2 x_4 + s_u x_3 x_4^2 + t_u x_4^3 \end{aligned}$$

e $\mathbb{K}$ é um corpo com característica zero.

Como uma consequência do Lema 6.2.11 de [7], temos que F satisfazer a hipótese da conjectura Jacobiana é equivalente à matriz Jacobiana JH da parte homogênea de F ser nilpotente, já que F é cúbica homogênea.

Então Hubbers supôs que F satisfizesse a hipótese da conjectura Jacobiana e portanto que JH é nilpotente. Com isso ele fez uma análise para as possibilidades do posto de JH que pode ser zero, um, dois ou três, de acordo com a forma de Jordan. Assim, obteve sistemas de equações para cada caso onde os coeficientes da parte homogênea são as incógnitas.

Resolvendo esses sistemas, Hubbers obteve os coeficientes da parte homogênea e pode então classificar a forma geral das funções polinomiais de dimensão quatro que satisfazem a hipótese da Conjectura Jacobiana. Aqui vamos nos limitar a enunciar a classificação final.

Teorema 17 (Classificação). *Seja $F = X + H : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4$ uma função polinomial cúbica homogênea em dimensão 4 tal que $\det(JH) = 1$. Então existe $T \in GL_4(\mathbb{K})$ tal que $T^{-1}FT$ é de uma das formas a seguir:*

$$\begin{aligned} 1) & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 - a_4 x_1^3 - b_4 x_1^2 x_2 - c_4 x_1^2 x_3 - e_4 x_1 x_2^2 - f_4 x_1 x_2 x_3 \\ - h_4 x_1 x_3^2 - k_4 x_2^3 - l_4 x_2^2 x_3 - n_4 x_2 x_3^2 - q_4 x_3^3 \end{pmatrix}, \\ 2) & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \frac{1}{3} x_1^3 - h_2 x_1 x_3^2 - q_2 x_3^3 \\ x_3 \\ x_4 - x_1^2 x_3 - h_4 x_1 x_3^2 - q_4 x_3^3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_1^3 - c_1x_1^2x_4 + 3c_1x_1x_2x_3 - \frac{16q_4c_1^2 - r_4^2}{48c_1^2}x_1x_3^2 - \frac{1}{2}r_4x_1x_3x_4 \\ + \frac{3}{4}r_4x_2x_3^2 - \frac{r_4q_4}{12c_1}x_3^3 - \frac{r_4^2}{16c_1}x_3^2x_4 \\ x_3 \\ x_4 - x_1^2x_3 + \frac{r_4}{4c_1}x_1x_3^2 - 3c_1x_1x_3x_4 + 9c_1x_2x_3^2 - q_4x_3^3 - \frac{3}{4}r_4x_3^2x_4 \end{pmatrix},$$

$$4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_1^3 \\ x_3 - x_1^2x_2 - e_3x_1x_2^2 - k_3x_2^3 \\ x_4 - e_4x_1x_2^2 - k_4x_2^3 \end{pmatrix},$$

$$5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_1^3 + i_3x_1x_2x_4 - j_2x_1x_4^2 + s_3x_2x_4^2 + i_3^2x_3x_4^2 - t_2x_4^3 \\ x_3 - x_1^2x_2 - \frac{2s_3}{i_3}x_1x_2x_4 - i_3x_1x_3x_4 - j_3x_1x_4^2 - \frac{s_3^2}{i_3^2}x_2x_4^2 \\ - s_3x_3x_4^2 - t_3x_4^3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

$$6) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_1^3 - j_2x_1x_4^2 - t_2x_4^3 \\ x_3 - x_1^2x_2 - e_3x_1x_2^2 - g_3x_1x_2x_4 - j_3x_1x_4^2 - k_3x_2^3 - m_3x_2^2x_4 \\ - p_3x_2x_4^2 - t_3x_4^3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

$$7) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_1^3 \\ x_3 - x_1^2x_2 - e_3x_1x_2^2 - k_3x_2^3 \\ x_4 - x_1^2x_3 - e_4x_1x_2^2 - f_4x_1x_2x_3 - h_4x_1x_3^2 - k_4x_2^3 - l_4x_2^2x_3 \\ - n_4x_2x_3^2 - q_4x_3^3 \end{pmatrix},$$

$$8) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_1^3 \\ x_3 - x_1^2x_2 - e_3x_1x_2^2 + g_4x_1x_2x_3 - k_3x_2^3 + m_4x_2^2x_3 + g_4^2x_2^2x_4 \\ x_4 - x_1^2x_3 - e_4x_1x_2^2 - \frac{2m_4}{g_4}x_1x_2x_3 - g_4x_1x_2x_4 - k_4x_2^3 \\ - \frac{m_4^2}{g_4^2}x_2^2x_3 - m_4x_2^2x_4 \end{pmatrix}.$$

4 Análise das folheações

4.1 Resultados prévios

Nesta seção, iremos estudar a viabilidade de se aplicar o Corolário 16 para obter a bijetividade das aplicações da classificação de Hubbers, descritas no Teorema 17. Vamos começar com alguns resultados que serão usados para este fim.

Lema 18. *Se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função contínua então seu gráfico $gr(F)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, ou seja, $gr(F) \simeq \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. O gráfico da F é o conjunto de todos os “pares” coordenados da forma $(x, F(x)) \in \mathbb{R}^{n+m}$. É claro que $(x, F(x))$ pode ser escrito também como $(x_1, \dots, x_n, f_1(x), \dots, f_m(x))$, onde as f_i , $i = 1, \dots, m$ são as funções coordenadas de F .

Assim, o homeomorfismo em questão é dado por $h : \mathbb{R}^n \rightarrow gr(F)$ que leva cada ponto x de $\mathbb{R}^n$ em $(x, F(x))$. Mostremos que h é de fato um homeomorfismo.

Seja $j = 1, \dots, n+m$ e h_j as funções coordenadas de h . As n primeiras são projeções e por isso contínuas; as m últimas são as funções coordenadas da F e portanto contínuas. Logo, h é contínua.

Temos que $h^{-1} : gr(F) \rightarrow \mathbb{R}^n$, é a função que leva $(x, F(x))$ em x . Tal função é contínua pois é a restrição da projeção $\pi_1 : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ao gráfico de F . $\square$

Lema 19. *Se $f : A \rightarrow X$ e $g : B \rightarrow Y$ são homeomorfismos então $(f, g) : A \times B \rightarrow X \times Y$ é um homeomorfismo. Em particular, se A é homeomorfo a X e B é homeomorfo a Y então o produto cartesiano $A \times B$ é homeomorfo a $X \times Y$.*

Demonstração. Vamos denotar $h = (f, g) : A \times B \rightarrow X \times Y$. Temos h contínua pois suas funções coordenadas são contínuas por hipótese. É fácil ver que h é bijetora e portanto possui inversa h^{-1} que é dada por $h^{-1} = (f^{-1}, g^{-1})$. Como f e g são homeomorfismos então as funções coordenadas de h^{-1} são contínuas, logo h^{-1} é contínua. $\square$

Como já mencionado, a ideia é usar o Corolário 16 considerando as aplicações de Hubbers de $\mathbb{C}^4$ em $\mathbb{C}^4$ e estudar as folheações bidimensionais induzidas pela aplicação associada $F_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}^8$ em $\mathbb{R}^8$ sob a luz dos lemas acima. De fato, por este corolário basta mostrar que cada folha de tais folheações é homeomorfa a um plano. Antes de começar este procedimento, iremos realizar o estudo das folheações de uma aplicação de Hubbers tomada de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^4$. Veremos que neste caso não é tão complicado estudar as folheações, porém tal processo não seria suficiente para concluir a bijetividade destas aplicações.

Um caso em dimensão 4

Abordaremos um caso mais simples que consiste no estudo das folheações de dimensão dois associadas à aplicação 1) do Teorema 17 pensada como aplicação de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^4$, em seguida será observado porque esta análise é insuficiente para concluir a bijetividade da aplicação.

Seja $F = (F_1, F_2, F_3, F_4) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por:

$$\begin{aligned} F_1 &= x_1 \\ F_2 &= x_2 \\ F_3 &= x_3 \\ F_4 &= x_4 - a_4 x_1^3 - b_4 x_1^2 x_2 - c_4 x_1^2 x_3 - e_4 x_1 x_2^2 - f_4 x_1 x_2 x_3 \\ &\quad - h_4 x_1 x_3^2 - k_4 x_2^3 - l_4 x_2^2 x_3 - n_4 x_2 x_3^2 - q_4 x_3^3. \end{aligned}$$

Então, as folheações que temos que estudar são $\mathcal{F}_{12}$, $\mathcal{F}_{13}$, $\mathcal{F}_{14}$, $\mathcal{F}_{23}$, $\mathcal{F}_{24}$ e $\mathcal{F}_{34}$. É fácil ver que as folheações $\mathcal{F}_{12}$, $\mathcal{F}_{13}$, $\mathcal{F}_{23}$ são todas por planos, tais folheações são representadas respectivamente por:

$$\{(D_1, D_2, x_3, x_4); (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2\}, \{(D_1, x_2, D_3, x_4); (x_2, x_4) \in \mathbb{R}^2\} \text{ e } \{(x_1, D_2, D_3, x_4); (x_1, x_4) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Assim resta analisarmos as demais folheações. Para $\mathcal{F}_{14}$, temos:

$$\begin{cases} F_1 = D_1 \\ F_4 = D_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = D_1 \\ x_4 - a_4x_1^3 - b_4x_1^2x_2 - c_4x_1^2x_3 - e_4x_1x_2^2 - f_4x_1x_2x_3 \\ - h_4x_1x_3^2 - k_4x_2^3 - l_4x_2^2x_3 - n_4x_2x_3^2 - q_4x_3^3 = D_4 \end{cases}$$

Isolando x_4 e substituindo $x_1 = D_1$, segue:

$$\begin{aligned} x_4 &= g(x_2, x_3) \\ &= a_4D_1^3 + b_4D_1^2x_2 + c_4D_1^2x_3 + e_4D_1x_2^2 + f_4D_1x_2x_3 \\ &\quad + h_4D_1x_3^2 + k_4x_2^3 + l_4x_2^2x_3 + n_4x_2x_3^2 + q_4x_3^3 + D_4. \end{aligned}$$

Desde que $x_4 = x_4(x_2, x_3)$ é uma função nas variáveis x_2 e x_3 , podemos expressar as folhas da folheação $\mathcal{F}_{14}$ por $\{(D_1, x_2, x_3, x_4(x_2, x_3)); (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\}$. Ou seja, as folhas de $\mathcal{F}_{14}$ são homeomorfas ao gráfico da função contínua $x_4: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e portanto, pelo Lema 18, segue que as folhas de $\mathcal{F}_{14}$ são homeomorfas a $\mathbb{R}^2$. O caso das folheações $\mathcal{F}_{24}$ e $\mathcal{F}_{34}$ são análogos ao que foi feito, e assim tais folheações são por planos.

Observação 1. *É interessante salientar que tal análise não seria suficiente para concluir a bijetividade de F , via Teorema 15, pois faltaria verificar a hipótese sobre o conjunto de pontos não próprios: $\text{codim}(S_F) \geq 2$.*

4.2 Folheações em $\mathbb{R}^8$

A observação acima mostra a necessidade de se considerar o Corolário 16 para estudar a bijetividade das aplicações de Hubbers, ou seja, a imposição de se tomar F de $\mathbb{C}^4$ em $\mathbb{C}^4$ e fazer a análise, deveras mais complicada, das 28 folheações bidimensionais induzidas pela $F_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$ associada.

Para isso, vamos dividir as aplicações da classificação de Hubbers em dois grupos:

1. Aplicações onde a variável da parte identidade **não** aparece na parte homogênea, são elas: 1), 2), 4), 6) e 7);
2. Aplicações onde a variável da parte identidade também aparece na parte homogênea, são as restantes: 3), 5) e 8).

Um exemplo do grupo 2 é a segunda função coordenada da aplicação 5), onde a variável x_2 aparece na parte homogênea:

$$\underbrace{\mathbf{x}_2}_{\text{I}} - \underbrace{\frac{1}{3}x_1^3 + i_3x_1\mathbf{x}_2x_4 - j_2x_1x_4^2 - j_2x_1x_4^2 + s_3\mathbf{x}_2x_4^2 + i_2^3x_3x_4^2 - t_2x_4^3}_{\text{H}}. \quad (4.1)$$

Observação 2. *Inspeccionando a função coordenada acima notamos que x_2 é linear em todas suas ocorrências na parte homogênea. Estendendo a inspeção para as aplicações 3), 5) e 8) é possível concluir que a situação no caso específico (4.1) não é particular, ou seja, em todos os casos de tais aplicações, o termo da parte identidade que aparece na parte homogênea é linear. Este fato facilita o processo de isolar a variável em questão.*

Essa divisão é importante pois nas aplicações do primeiro grupo não é difícil perceber que basta isolar a variável da parte identidade e a expressão buscada vem de forma natural. No exemplo em dimensão 4 acima, vimos o que estamos buscando de modo geral quando falamos em encontrar uma expressão para uma variável. A seguir veremos por meio de exemplos casos de dimensão 8 para observar o que acontece nas aplicações do grupo 1 e do grupo 2.

4.2.1 Aplicações 1), 2), 4), 6) e 7)

Vamos estudar a mesma aplicação 1) abordada acima mas para F vista como uma aplicação complexa, ou seja, $F = (F_1, F_2, F_3, F_4) : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$. Porém agora, faremos a análise das folheações para a aplicação real associada $F_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$ recaindo assim nas hipóteses do Corolário 16. Temos que a aplicação F neste caso é dada por:

$$\begin{aligned} F_1 &= z_1, \\ F_2 &= z_2, \\ F_3 &= z_3, \\ F_4 &= z_4 - a_4 z_1^3 - b_4 z_1^2 z_2 - c_4 z_1^2 z_3 - e_4 z_1 z_2^2 - f_4 z_1 z_2 z_3 \\ &\quad - h_4 z_1 z_3^2 - k_4 z_2^3 - l_4 z_2^2 z_3 - n_4 z_2 z_3^2 - q_4 z_3^3. \end{aligned}$$

Seja $z_i = x_i + iy_i$ para $i = 1, \dots, 4$. Separando parte real e imaginária das F_i 's, obtemos que a $F_{\mathbb{R}}$ associada é dada por:

$$\begin{aligned} F_1 &= x_1, \\ F_2 &= x_2, \\ F_3 &= x_3, \\ F_4 &= x_4 - a_4(x_1^3 - 3x_1y_1^2) - b_4(x_2(x_1^2 - y_1^2) - 2x_1y_1y_2) - c_4(x_3(x_1^2 - y_1^2) - 2x_1y_1y_3) \\ &\quad - e_4(x_1(x_2^2 - y_2^2) - 2x_2y_1y_2) - f_4(x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + x_3y_2)) \\ &\quad - h_4(x_1(x_3^2 - y_3^2) - 2x_3y_1y_3) - k_4(x_2^3 - 3x_2y_2^2) - l_4(x_3(x_2^2 - y_2^2) - 2x_2y_2y_3) \\ &\quad - n_4(x_2(x_3^2 - y_3^2) - 2x_3y_2y_3) - q_4(x_3^3 - 3x_3y_3^2), \\ F_5 &= y_1, \\ F_6 &= y_2, \\ F_7 &= y_3, \\ F_8 &= y_4 - a_4(3x_1^2y_1 - y_1^3) - b_4((x_1^2 - y_1^2)y_2 + 2x_1x_2y_1) - c_4((x_1^2 - y_1^2)y_3 + 2x_1x_3y_1) \\ &\quad - e_4(y_1(x_2^2 - y_2^2) + 2x_1x_2y_2) - f_4(y_1(x_2x_3 - y_2y_3) + x_1(x_2y_3 + x_3y_2)) \\ &\quad - h_4(y_1(x_3^2 - y_3^2) + 2x_1x_3y_3) - k_4(3x_2^2y_2 - y_2^3) - l_4((x_2^2 - y_2^2)y_3 + 2x_2x_3y_2) \\ &\quad - n_4(y_2(x_3^2 - y_3^2) + 2x_2x_3y_3) - q_4(3x_3^2y_3 - y_3^3). \end{aligned}$$

Para $F_{\mathbb{R}}$ temos 28 folheações para estudar. É fácil ver que a folheação $\mathcal{F}_{123567}$ é por planos pois ficaremos com apenas x_4 e y_4 livres e todas as outras variáveis ficariam constantes. Analisemos uma das folheações que têm F_4 ou F_8 (mas não F_4 e F_8 simultaneamente) em sua combinação pois as outras seguirão de modo análogo. Uma folheação desse tipo é $\mathcal{F}_{123456}$, que nos dá o seguinte sistema:

$$\begin{cases} F_1 = D_1 \\ F_2 = D_2 \\ F_3 = D_3 \\ F_4 = D_4 \\ F_5 = D_5 \\ F_6 = D_6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 = x_1 \\ D_2 = x_2 \\ D_3 = x_3 \\ D_4 = x_4 - a_4(x_1^3 - 3x_1y_1^2) - b_4(x_2(x_1^2 - y_1^2) - 2x_1y_1y_2) - c_4(x_3(x_1^2 - y_1^2) \\ \quad - 2x_1y_1y_3) - e_4(x_1(x_2^2 - y_2^2) - 2x_2y_1y_2) - f_4(x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 \\ \quad + x_3y_2)) - h_4(x_1(x_3^2 - y_3^2) - 2x_3y_1y_3) - k_4(x_2^3 - 3x_2y_2^2) - l_4(x_3(x_2^2 - y_2^2) \\ \quad - 2x_2y_2y_3) - n_4(x_2(x_3^2 - y_3^2) - 2x_3y_2y_3) - q_4(x_3^3 - 3x_3y_3^2) \\ D_5 = y_1 \\ D_6 = y_2 \end{cases}$$

Perceba que F_4 depende de todas as variáveis com exceção de y_4 e, nessa folheação em particular, temos x_1, x_2, x_3, y_1 e y_2 constantes, ficando então y_3 e y_4 livres. Portanto podemos reescrever $F_4 = D_4$ de modo que:

$$\begin{aligned} x_4 &= x_4(y_3) = g(y_3) \\ &= + a_4(D_1^3 - 3D_1D_5^2) + b_4(D_2(D_1^2 - D_5^2) - 2D_1D_5D_6) + c_4(D_3(D_1^2 - D_5^2) - 2D_1D_5y_3) \\ &\quad + e_4(D_1(D_2^2 - D_6^2) - 2D_2D_5D_6) + f_4(D_1(D_2D_3 - D_6y_3) - D_5(D_2y_3 + D_3D_6)) \\ &\quad + h_4(D_1(D_3^2 - y_3^2) - 2D_3D_5y_3) + k_4(D_2^3 - 3D_2D_6^2) + l_4(D_3(D_2^2 - D_6^2) - 2D_2D_6y_3) \\ &\quad + n_4(D_2(D_3^2 - y_3^2) - 2D_3D_6y_3) + q_4(D_3^3 - 3D_3y_3^2) + D_4. \end{aligned}$$

Portanto, tais folhas são descritas por:

$$\{(D_1, D_2, D_3, x_4(y_3), D_5, D_6, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^8; (y_3, y_4) \in \mathbb{R}^2\} \simeq gr(g) \times \mathbb{R},$$

e aplicando-se os lemas 18 e 19, concluímos que estas folhas são homeomorfas a $\mathbb{R}^2$. Como queríamos mostrar.

Perceba que temos 8 variáveis de modo geral: $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3$ e y_4 . Porém estamos escolhendo folheações que têm F_4 ou F_8 , então, das 6 funções coordenadas que tomamos na combinação, 5 delas são projeções, assim ficamos com apenas 3 variáveis: x_4 (ou y_4) e outras duas. Desde que x_4 (ou y_4) não aparecem na parte homogênea, sempre conseguimos isolá-las em função de uma das duas variáveis ou de ambas. De toda forma, os lemas 18 e 19 garantem o homeomorfismo das folhas com $\mathbb{R}^2$.

No caso de folheações onde temos F_4 e F_8 simultaneamente, tais como $\mathcal{F}_{123478}$, um estudo análogo ao feito acima nos mostra que:

$$\begin{aligned} x_4 &= a_4(D_1^3 - 3D_1y_1^2) + b_4(D_2(D_1^2 - y_1^2) - 2D_1y_1y_2) + c_4(D_3(D_1^2 - y_1^2) - 2D_1D_5y_1) \\ &\quad + e_4(D_1(D_2^2 - y_2^2) - 2D_2y_1y_2) + f_4(D_1(D_2D_3 - D_5y_2) - y_1(D_3y_2 + D_2D_5)) \\ &\quad + h_4(D_1(D_3^2 - D_5^2) - 2D_3D_5y_1) + k_4(D_2^3 - 3D_2y_2^2) + l_4(D_3(D_2^2 - y_2^2) - 2D_2D_5y_2) \\ &\quad + n_4(D_2(D_3^2 - D_5^2) - 2D_3D_5y_2) + q_4(D_3^3 - 3D_3D_5^2) + D_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_4 &= a_4(3D_1^2y_1 - y_1^3) + b_4((D_1^2 - y_1^2)y_2 + 2D_1D_2y_1) + c_4(D_5(D_1^2 - y_1^2) + 2D_1D_3y_1) \\ &\quad + e_4(y_1(D_2^2 - y_2^2) + 2D_1D_2y_2) + f_4(y_1(D_2D_3 - D_5y_2) + D_1(D_3y_2 + D_2D_5)) \\ &\quad + h_4((D_3^2 - D_5^2)y_1 + 2D_1D_3D_5) + k_4(3D_2^2y_2 - y_2^3) + l_4(D_5(D_2^2 - y_2^2) + 2D_2D_3y_2) \\ &\quad + n_4((D_3^2 - D_5^2)y_2 + 2D_2D_3D_5) + q_4(3D_3^2D_5 - D_5^3) + D_6. \end{aligned}$$

Ou seja, x_4 e y_4 são escritas em função de y_1 e y_2 . Logo, as folhas dessa folheação são expressas por $\{(D_1, D_2, D_3, x_4(y_1, y_2), y_1, y_2, D_5, y_4(y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^8; (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\}$ e, novamente, o Lema 18 nos garante que as folhas são homeomorfas a planos. Analogamente, mostra-se que todas as folheações bidimensionais associadas a F_4 e F_8 , simultaneamente, são por planos.

O grande facilitador no caso das aplicações do grupo 1 é que a variável da identidade não aparece na parte homogênea e assim podemos escrever $x_i = D_i - H_i$, onde H_i é a parte homogênea da função coordenada F_i e não depende de x_i (idem para $y_i = D_i - H_i$). Restando somente verificar quais variáveis aparecem na parte homogênea para aplicar os lemas 18 e 19 conforme necessário.

4.2.2 Aplicações 3), 5) e 8)

Nessas aplicações não contamos com facilidade em isolar as variáveis da identidade como tínhamos nas aplicações do grupo 1. A seguir, apresentamos uma tentativa de análise das folheações associadas à aplicação 5).

Conforme a Observação 2, sabemos que as variáveis da identidade, que aparecem na parte homogênea, são sempre lineares. Como também já foi mostrado na Seção 4.1 e na Observação 1, devemos analisar as folheações das aplicações dentro das condições do Corolário 16. Então primeiramente queremos saber quem são as variáveis lineares na $F_{\mathbb{R}}$ associada, que no caso da aplicação 5) é dada por:

$$\begin{aligned}
F_1 &= x_1, \\
F_2 &= x_2 - t_2(x_4^3 - 3x_4y_4^2) + i_3^2(x_3(x_4^2 - y_4^2) - 2x_4y_3y_4) + s_3(x_2(x_4^2 - y_4^2) - 2x_4y_2y_4) - j_2(x_1(x_4^2 - y_4^2) - 2x_4y_1y_4) + i_3(x_1(x_2x_4 - y_2y_4) - y_1(x_2y_4 + x_4y_2)) - (x_1^3 - 3x_1y_1^2)/3, \\
F_3 &= x_3 - t_3(x_4^3 - 3x_4y_4^2) - s_3(x_3(x_4^2 - y_4^2) - 2x_4y_3y_4) - (s_3^2(x_2(x_4^2 - y_4^2) - 2x_4y_2y_4))/i_3^2 - j_3(x_1(x_4^2 - y_4^2) - 2x_4y_1y_4) - i_3(x_1(x_3x_4 - y_3y_4) - y_1(x_3y_4 + x_4y_3)) - (2s_3(x_1(x_2x_4 - y_2y_4) - y_1(x_2y_4 + x_4y_2)))/i_3 + 2x_1y_1y_2 - x_2(x_1^2 - y_1^2), \\
F_4 &= x_4, \\
F_5 &= y_1, \\
F_6 &= y_2 - t_2(3x_4^2y_4 - y_4^3) + i_3^2(y_3(x_4^2 - y_4^2) + 2x_3x_4y_4) + s_3(y_2(x_4^2 - y_4^2) + 2x_2x_4y_4) - j_2(y_1(x_4^2 - y_4^2) + 2x_1x_4y_4) + i_3(y_1(x_2x_4 - y_2y_4) + x_1(x_2y_4 + x_4y_2)) - (3x_1^2y_1 - y_1^3)/3, \\
F_7 &= y_3 - t_3(3x_4^2y_4 - y_4^3) - s_3(y_3(x_4^2 - y_4^2) + 2x_3x_4y_4) - (s_3^2(y_2(x_4^2 - y_4^2) + 2x_2x_4y_4))/i_3^2 - j_3(y_1(x_4^2 - y_4^2) + 2x_1x_4y_4) - i_3(y_1(x_3x_4 - y_3y_4) + x_1(x_3y_4 + x_4y_3)) - (2s_3(y_1(x_2x_4 - y_2y_4) + x_1(x_2y_4 + x_4y_2)))/i_3 - (x_1^2 - y_1^2)y_2 - 2x_1x_2y_1, \\
F_8 &= y_4.
\end{aligned}$$

Vemos que F_1 , F_4 , F_5 e F_8 são projeções; F_2 , F_3 , F_6 e F_7 são funções com a parte homogênea não nula onde as variáveis x_2 , x_3 , y_2 e y_3 aparecem de maneira linear, e as demais, x_1 , x_4 , y_1 e y_4 estão presentes de forma não linear.

Vamos dividir as folheações da aplicação 5) em três sub-casos:

- 5.1) **Somente variáveis lineares:** para isso, escolheremos F_1 , F_4 , F_5 e F_8 simultaneamente;
- 5.2) **Duas variáveis não lineares:** escolheremos 2 funções dentre F_1 , F_4 , F_5 e F_8 ;
- 5.3) **Apenas uma variável não linear:** escolheremos 3 funções dentre F_1 , F_4 , F_5 e F_8 .

Perceba que não é possível ter mais que duas variáveis não lineares visto que isso caracteriza retirar 3 funções e ficaríamos com apenas 5 para escolher 6 na combinação, impossível. No primeiro e no segundo caso temos 6 folheações cada e 16 no terceiro, totalizando as 28 folheações dessa aplicação.

Exemplo caso 5.1)

Tomemos a folheação $\mathcal{F}_{123458}$ que é um exemplo de folheação do primeiro caso, então temos o sistema:

$$\begin{cases} F_1 = D_1, & F_2 = D_2, & F_3 = D_3 \\ F_4 = D_4, & F_5 = D_5, & F_8 = D_6 \end{cases}.$$

Isto significa que as variáveis x_1 , x_4 , y_1 e y_4 são constantes nas funções F_2 e F_3 (que têm parte homogênea não nula) portanto substituindo essas variáveis por suas respectivas constantes, o sistema acima se reescreve como:

$$\begin{cases} i_3^2((D_4^2 - D_6^2)x_3 - 2D_4D_6y_3) + i_3(D_1(D_4x_2 - D_6y_2) - D_5(D_4y_2 + D_6x_2)) + s_3((D_4^2 - D_6^2)x_2 - 2D_4D_6y_2) + x_2 - (D_4^3 - 3D_4D_6^2)t_2 - (D_1(D_4^2 - D_6^2) - 2D_4D_5D_6)j_2 + (3D_1D_5^2 - D_1^3)/3 = D_2 \\ -i_3(D_1(D_4x_3 - D_6y_3) - D_5(D_4y_3 + D_6x_3)) - s_3((D_4^2 - D_6^2)x_3 - 2D_4D_6y_3) - (2s_3(D_1(D_4x_2 - D_6y_2) - D_5(D_4y_2 + D_6x_2)))/i_3 - (s_3^2((D_4^2 - D_6^2)x_2 - 2D_4D_6y_2))/i_3^2 + 2D_1D_5y_2 + x_3 - (D_1^2 - D_5^2)x_2 - (D_4^3 - 3D_4D_6^2)t_3 - (D_1(D_4^2 - D_6^2) - 2D_4D_5D_6)j_3 = D_3 \end{cases} \quad (4.2)$$

Visto que as variáveis não lineares são todas constantes nessa folheação então esse é um sistema linear nas variáveis x_2 , x_3 , y_2 e y_3 . Como temos as quatro variáveis nas duas equações do sistema, vamos escolher duas delas para reescrever em função das outras duas variáveis independentes. Por exemplo, escrever x_2 e x_3 em função de y_2 e y_3 , no intuito de aplicar o Lema 18 para concluir que as folhas são homeomorfas a $\mathbb{R}^2$.

A solução $x_2 = g_1(y_2, y_3)$ e $x_3 = g_2(y_2, y_3)$ citada é dada por:

$$x_2 = \frac{M_1(y_2, y_3)}{(3D_1^2D_6^2 - 6D_1D_4D_5D_6 + 3D_4^2D_5^2)i_3^2 - 3}, \quad (4.3)$$

$$x_3 = \frac{M_2(y_2, y_3)}{((3D_1^2D_6^2 - 6D_1D_4D_5D_6 + 3D_4^2D_5^2)i_3^2 - 3)i_3^2} \quad (4.4)$$

onde M_i , com $i = 1, 2$, são os numeradores de cada expressão que omitiremos por serem bastante extensos e no momento queremos focar nos denominadores. Note que podemos aplicar o Lema 18 para concluir que as folhas são homeomorfas a $\mathbb{R}^2$ sempre que os denominadores destas expressões são não nulos. Mas fica a questão do que fazer quando tais denominadores se anulam, por exemplo, o que ocorre com as folhas associadas a $D_1 = 0$, $D_4 = D_5 = i_3 = 1$? Uma resposta óbvia é que as representações dadas por (4.3) não poderiam ser usadas para concluir que as folhas são homeomorfas a planos.

Uma alternativa é tomar outras variáveis livres. De fato, como (4.2) é um sistema linear com duas equações e 4 incógnitas (x_2 , x_3 , y_2 e y_3), é possível escolher arbitrariamente duas delas para servirem de variáveis livres. Fizemos este estudo e obtivemos as outras 5 possibilidades:

i) x_2 e x_3 livres:

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{N_1(x_2, x_3)}{(3D_1^2D_6^2 - 6D_1D_4D_5D_6 + 3D_4^2D_5^2)i_3^2}, \\ y_3 &= \frac{N_2(x_2, x_3)}{(3D_1^2D_6^2 - 6D_1D_4D_5D_6 + 3D_4^2D_5^2)i_3^4}. \end{aligned}$$

ii) x_2 e y_2 livres:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{P_1(x_2, y_2)}{(3D_1D_6^3 - 3D_4D_5D_6^2 + 3D_1D_4^2D_6 - 3D_4^3D_5)i_3^3 - 6D_4D_6i_3^2}, \\ y_3 &= \frac{P_2(x_2, y_2)}{(3D_1D_6^3 - 3D_4D_5D_6^2 + 3D_1D_4^2D_6 - 3D_4^3D_5)i_3^3 - 6D_4D_6i_3^2}. \end{aligned}$$

iii) x_2 e y_3 livres:

$$\begin{aligned} x_3 &= Q_1(x_2, y_3)/(((3D_1D_6^3 - 3D_4D_5D_6^2 + 3D_1D_4^2D_6 - 3D_4^3D_5)i_3^3 - 6D_4D_6i_3^2)s_3 \\ &\quad + (3D_1D_5D_6^2 + (3D_1^2D_4 - 3D_4D_5^2)D_6 - 3D_1D_4^2D_5)i_3^4 + (-3D_1D_6 - 3D_4D_5)i_3^3), \\ y_2 &= Q_2(x_2, y_3)/(((3D_1D_6^3 - 3D_4D_5D_6^2 + 3D_1D_4^2D_6 - 3D_4^3D_5)i_3^3 - 6D_4D_6i_3^2)s_3 \\ &\quad + (3D_1D_5D_6^2 + (3D_1^2D_4 - 3D_4D_5^2)D_6 - 3D_1D_4^2D_5)i_3^4 + (-3D_1D_6 - 3D_4D_5)i_3^3). \end{aligned}$$

iv) x_3 e y_2 livres:

$$\begin{aligned} x_2 &= R_1(x_3, y_2)/(((3D_1D_6^3 - 3D_4D_5D_6^2 + 3D_1D_4^2D_6 - 3D_4^3D_5)i_3^3 - 6D_4D_6i_3^2)s_3 \\ &\quad + (3D_1D_5D_6^2 + (3D_1^2D_4 - 3D_4D_5^2)D_6 - 3D_1D_4^2D_5)i_3^4 + (-3D_1D_6 - 3D_4D_5)i_3^3), \\ y_3 &= R_2(x_3, y_2)/(((3D_1D_6^3 - 3D_4D_5D_6^2 + 3D_1D_4^2D_6 - 3D_4^3D_5)i_3^3 - 6D_4D_6i_3^2)s_3 \\ &\quad + (3D_1D_5D_6^2 + (3D_1^2D_4 - 3D_4D_5^2)D_6 - 3D_1D_4^2D_5)i_3^4 + (-3D_1D_6 - 3D_4D_5)i_3^3). \end{aligned}$$

v) x_3 e y_3 livres:

$$\begin{aligned} x_2 &= S_1(x_3, y_3)/(((3D_1D_6^3 - 3D_4D_5D_6^2 + 3D_1D_4^2D_6 - 3D_4^3D_5)i_3^3 - 6D_4D_6i_3^2)s_3^2 \\ &\quad + ((6D_1D_5D_6^2 + (6D_1^2D_4 - 6D_4D_5^2)D_6 - 6D_1D_4^2D_5)i_3^2 + (-6D_1D_6 - 6D_4D_5)i_3)s_3 \\ &\quad + ((3D_1D_5^2 + 3D_1^3)D_6 - 3D_4D_5^3 - 3D_1^2D_4D_5)i_3^3 - 6D_1D_5i_3^2), \\ y_2 &= S_2(x_3, y_3)/(((3D_1D_6^3 - 3D_4D_5D_6^2 + 3D_1D_4^2D_6 - 3D_4^3D_5)i_3^3 - 6D_4D_6i_3^2)s_3^2 \\ &\quad + ((6D_1D_5D_6^2 + (6D_1^2D_4 - 6D_4D_5^2)D_6 - 6D_1D_4^2D_5)i_3^2 + (-6D_1D_6 - 6D_4D_5)i_3)s_3 \\ &\quad + ((3D_1D_5^2 + 3D_1^3)D_6 - 3D_4D_5^3 - 3D_1^2D_4D_5)i_3^3 - 6D_1D_5i_3^2). \end{aligned}$$

Note que em cada caso o denominador das duas expressões coincidem ou um é o outro multiplicado por i_3^2 , que é não nulo por estar no denominador da terceira função coordenada da aplicação 5). Elegendo um denominador em cada caso e igualando a zero, obtemos um sistema com seis equações nas incógnitas D_1 , D_4 , D_5 , D_6 , i_3 e s_3 . Ao solicitar sua solução, obtivemos a seguinte resposta do software Maxima:

“If algsys cannot find a solution, an empty list [] is returned”,

onde *algsys* é o comando do Maxima para resolução de um sistema de equações em determinadas variáveis.

Isto nos leva a concluir que independente das constantes D_i 's e dos parâmetros i_3 e s_3 da aplicação 5), poderemos encontrar uma representação da respectiva folha da folheação $\mathcal{F}_{123458}$ de tal forma que o denominador não se anule e portanto aplicar o Lema 18 para concluir que a mesma é homeomorfa a um plano.

Tal estudo precisa ser realizado nas outras cinco folheações do caso 5.1). Porém, vamos analisar exemplos dos casos 5.2) e 5.3).

Exemplo caso 5.2)

Vejam os uma folheação do segundo caso. Seja $\mathcal{F}_{123467}$, temos que $F_1 = D_1$, $F_4 = D_4$ ou seja, x_1 e x_4 são constantes nessa folheação. E o sistema resultante se reduz a

$$\begin{cases} F_2(D_1, x_2, x_3, D_4, y_1, y_2, y_3, y_4) = D_2 \\ F_3(D_1, x_2, x_3, D_4, y_1, y_2, y_3, y_4) = D_3 \\ F_6(D_1, x_2, x_3, D_4, y_1, y_2, y_3, y_4) = D_5 \\ F_7(D_1, x_2, x_3, D_4, y_1, y_2, y_3, y_4) = D_6 \end{cases}$$

Aqui cabe um pequeno abuso de notação, escrevemos $F_i(D_1, x_2, x_3, D_4, y_1, y_2, y_3, y_4) = D_i$ onde queremos denotar que as variáveis x_1 e x_4 foram substituídas pelas suas respectivas constantes.

Temos um sistema com 4 equações, 6 variáveis sendo duas delas não lineares, a saber y_1 e y_4 , então vamos escolher tais variáveis como as variáveis independentes das folhas dessa folheação o que deixa x_2 , x_3 , y_2 e y_3 como variáveis dependentes cuja presença é linear no sistema. Resolvendo teremos expressões $x_2(y_1, y_4)$, $x_3(y_1, y_4)$, $y_2(y_1, y_4)$ e $y_3(y_1, y_4)$. E assim garantimos que as folhas das folheações do segundo caso também são homeomorfas a planos. A solução nesse caso é dada por:

$$\begin{aligned} x_2 = & -((i_3^2(15D_4t_3 + 3D_1j_3) + (15D_4s_3 + 3D_1i_3)t_2 + 3D_1j_2s_3)y_4^4 + ((3D_1s_3 + 9D_4i_3j_2)y_1^2 \\ & + (12D_4i_3t_2 + 12D_4j_2s_3 + 12D_4i_3^2j_3 + 6D_1i_3j_2)y_1y_4^3 + i_3^2(-30D_4^3t_3 - 18D_1D_4^2j_3 - 3D_3) \\ & + (-30D_4^3s_3 - 18D_1D_4^2i_3 + 9D_4)t_2 + (-18D_1D_4^2j_2 - 3D_2 - D_1^3)s_3 + (3D_1 - 9D_1^2D_4i_3)j_2)y_4^2 \\ & + ((2D_4s_3 + 4D_1i_3)y_1^3 + (-12D_4^3i_3t_2 + (-12D_4^3j_2 - 6D_1^2D_4)s_3 - 12D_4^3i_3^2j_3 + (-3D_2 \\ & - 4D_1^3)i_3)y_1 + (6D_4 - 18D_1D_4^2i_3)j_2 - 6D_4D_5s_3 - 6D_4D_6i_3^2 - 3D_1D_5i_3)y_4 + D_4i_3y_1^4 \\ & - 6D_1^2D_4i_3 + 3D_1)y_1^2 - 3D_4D_5i_3y_1 + i_3^2(3D_4^5t_3 + 3D_1D_4^4j_3 + 3D_3D_4^2) + (3D_4^5s_3 \\ & + 3D_1D_4^4i_3 - 3D_4^3)t_2 + (3D_1D_4^4j_2 + (3D_2 + D_1^3)D_4^2)s_3 + (3D_1^2D_4^3i_3 - 3D_1D_4^2)j_2 \\ & + (-3D_1D_4^2s_3 - 3D_4^3i_3j_2 + (3D_1D_2 + D_1^4)D_4i_3 - 3D_2 - D_1^3)/3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 = & ((i_3^2s_3(15D_4t_3 + 3D_1j_3) + 3D_1i_3^3t_3 + (15D_4s_3^2 + 6D_1i_3s_3)t_2 + 3D_1j_2s_3^2)y_4^4 + 12D_4j_2s_3^2 \\ & + (i_3^3(12D_4t_3 + 6D_1j_3) + (24D_4i_3s_3 + 6D_1i_3^2)t_2 + (12D_4i_3^2j_3 + 12D_1i_3j_2)s_3)y_1y_4^3 \\ & + ((9D_4i_3^2t_2 + 3D_1s_3^2 + 9D_4i_3^3j_3 + 9D_1i_3^2j_2)y_1^2 + s_3(i_3^2(-30D_4^3t_3 - 18D_1D_4^2j_3 - 3D_3) \\ & - 18D_1^2D_4i_3j_2) + i_3^3(-18D_1D_4^2t_3 - 9D_1^2D_4j_3) + i_3^2(-9D_4t_3 - 3D_1j_3) + 18D_4i_3j_2s_3 \\ & + (-30D_4^3s_3^2 - 36D_1D_4^2i_3s_3 - 9D_1^2D_4i_3^2)t_2 + (-18D_1D_4^2j_2 - 3D_2 - D_1^3)s_3^2 - 3D_1^3i_3^2j_2)y_4^2 \\ & + ((2D_4s_3^2 + 8D_1i_3s_3 + 6D_4i_3^2j_2)y_1^3 + (i_3^3(-12D_4^3t_3 - 18D_1D_4^2j_3 - 3D_3) \\ & + (-24D_4^3i_3s_3 - 18D_1D_4^2i_3^2)t_2 + (-12D_4^3j_2 - 6D_1^2D_4)s_3^2 + (-12D_4^3i_3^2j_3 - 36D_1D_4^2i_3j_2 \\ & + (-6D_2 - 8D_1^3)i_3)s_3 - 6D_4i_3^2j_3 - 18D_1^2D_4i_3^2j_2)y_1 - 6D_4D_5s_3^2 + (-6D_4D_6i_3^2 - 6D_1D_5i_3)s_3 \\ & - 3D_1D_6i_3^3)y_4 + (2D_4i_3s_3 + 5D_1i_3^2)y_1^4 + (-3D_4^3i_3^2t_2 - 3D_1D_4^2s_3^2 + (-6D_4^3i_3j_2 \\ & - 12D_1^2D_4i_3)s_3 - 3D_4^3i_3^3j_3 - 9D_1D_4^2i_3^2j_2 + (-3D_2 - 10D_1^3)i_3^2)y_1^2 + (-6D_4D_5i_3s_3 \\ & - 3D_4D_6i_3^3 - 6D_1D_5i_3^2)y_1 + s_3(i_3^2(3D_4^5t_3 + 3D_1D_4^4j_3 + 3D_3D_4^2) + 6D_1^2D_4^3i_3j_2 \\ & + (6D_1D_2 + 2D_1^4)D_4i_3) + i_3^3(3D_1D_4^4t_3 + 3D_1^2D_4^3j_3 + 3D_1D_3D_4) + i_3^2(3D_4^3t_3 \\ & + 3D_1D_4^2j_3 + 3D_3 + 3D_1^2D_2 + D_1^5) + (3D_4^5s_3^2 + 6D_1D_4^4i_3s_3 + 3D_1^2D_4^3i_3^2)t_2 \\ & + (3D_1D_4^4j_2 + (3D_2 + D_1^3)D_4^2)s_3^2 + 3D_1^3D_4^2i_3^2j_2)/3i_3^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 = & -((3i_3^2 t_3 + 3s_3 t_2)y_4^5 + (3i_3 t_2 + 3j_2 s_3 + 3i_3^2 j_3)y_1 y_4^4 + (3i_3 j_2 y_1^2 + i_3^2(-30D_4^2 t_3 - 12D_1 D_4 j_3) \\
& + (-30D_4^2 s_3 - 12D_1 D_4 i_3 + 3)t_2 - 12D_1 D_4 j_2 s_3 - 3D_1^2 i_3 j_2)y_4^3 + (s_3 y_1^3 + (-18D_4^2 i_3 t_2 + \\
& (-18D_4^2 j_2 - 3D_1^2)s_3 - 18D_4^2 i_3^2 j_3 + (3 - 18D_1 D_4 i_3)j_2)y_1 - 3D_5 s_3 - 3D_6 i_3^2)y_4^2 + (i_3 y_1^4 \\
& + (-6D_1 D_4 s_3 - 9D_4^2 i_3 j_2 - 6D_1^2 i_3)y_1^2 - 3D_5 i_3 y_1 + i_3^2(15D_4^4 t_3 + 12D_1 D_4^3 j_3 + 6D_3 D_4) \\
& + (15D_4^4 s_3 + 12D_1 D_4^3 i_3 - 9D_4^2)t_2 + (12D_1 D_4^3 j_2 + (6D_2 + 2D_1^3)D_4)s_3 + 3D_4^2 D_5 s_3 \\
& + (3D_1 D_2 + D_1^4)i_3)y_4 + (-D_4^2 s_3 - 4D_1 D_4 i_3 + 1)y_1^3 + (3D_4^4 i_3 t_2 + (3D_4^4 j_2 + 3D_1^2 D_4^2)s_3 \\
& + (9D_1^2 D_4^2 i_3 - 6D_1 D_4)j_2 + 3D_4^4 i_3^2 j_3 + (6D_1 D_4^3 i_3 - 3D_4^2)j_2 + (3D_2 + 4D_1^3)D_4 i_3 - 3D_1^2)y_1 \\
& + 3D_4^2 D_6 i_3^2 + 3D_1 D_4 D_5 i_3 - 3D_5)/3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_3 = & ((3i_3^2 s_3 t_3 + 3s_3^2 t_2)y_4^5 + (3i_3^3 t_3 + 6i_3 s_3 t_2 + 3j_2 s_3^2 + 3i_3^2 j_3 s_3)y_1 y_4^4 + ((3i_3^2 t_2 + 6i_3 j_2 s_3 \\
& + 3i_3^3 j_3)y_1^2 + s_3(i_3^2(-30D_4^2 t_3 - 12D_1 D_4 j_3) - 6D_1^2 i_3 j_2) + i_3^3(-12D_1 D_4 t_3 - 3D_1^2 j_3) - 3i_3^2 t_3 \\
& + (-30D_4^2 s_3^2 - 24D_1 D_4 i_3 s_3 - 3D_1^2 i_3^2)t_2 - 12D_1 D_4 j_2 s_3^2)y_4^3 + ((s_3^2 + 3i_3^2 j_2)y_1^3 \\
& + (i_3^3(-18D_4^2 t_3 - 18D_1 D_4 j_3) + (-36D_4^2 i_3 s_3 - 18D_1 D_4 i_3^2)t_2 + (-18D_4^2 j_2 - 3D_1^2)s_3^2 \\
& + (-18D_4^2 i_3^2 j_3 - 36D_1 D_4 i_3 j_2)s_3 - 3i_3^2 j_3 - 9D_1^2 i_3^2 j_2)y_1 - 3D_5 s_3^2 - 3D_6 i_3^2 s_3)y_4^2 \\
& + (2i_3 s_3 y_1^4 + (-9D_4^2 i_3^2 t_2 - 6D_1 D_4 s_3^2 + (-18D_4^2 i_3 j_2 - 12D_1^2 i_3)s_3 - 9D_4^2 i_3^3 j_3 \\
& - 18D_1 D_4 i_3^2 j_2)y_1^2 + (-6D_5 i_3 s_3 - 3D_6 i_3^3)y_1 + s_3(i_3^2(15D_4^4 t_3 + 12D_1 D_4^3 j_3 + 6D_3 D_4) \\
& + 18D_1^2 D_4^2 i_3 j_2 + (6D_1 D_2 + 2D_1^4)i_3) + i_3^3(12D_1 D_4^3 t_3 + 9D_1^2 D_4^2 j_3 + 3D_1 D_3) + i_3^2(9D_4^2 t_3 \\
& + 6D_1 D_4 j_3) + (15D_4^4 s_3^2 + 24D_1 D_4^3 i_3 s_3 + 9D_1^2 D_4^2 i_3^2)t_2 + (12D_1 D_4^3 j_2 + (6D_2 + 2D_1^3)D_4)s_3^2 \\
& + 6D_1^3 D_4^2 i_3^2 j_2)y_4 + i_3^2 y_1^5 + (-D_4^2 s_3^2 - 8D_1 D_4 i_3 s_3 - 3D_4^2 i_3^2 j_2 - 10D_1^2 i_3^2)y_1^3 - 3D_5 i_3^2 y_1^2 \\
& + (i_3^3(3D_4^4 t_3 + 6D_1 D_4^3 j_3 + 3D_3 D_4) + (6D_4^4 i_3 s_3 + 6D_1 D_4^3 i_3^2)t_2 + (3D_4^4 j_2 + 3D_1^2 D_4^2)s_3^2 \\
& + (3D_4^4 i_3^2 j_3 + 12D_1 D_4^3 i_3 j_2 + (6D_2 + 8D_1^3)D_4 i_3)s_3 + i_3^2(3D_4^2 j_3 + 6D_1 D_2 + 5D_1^4) \\
& + 9D_1^2 D_4^2 i_3^2 j_2)y_1 + 3D_4^2 D_5 s_3^2 + (3D_4^2 D_6 i_3^2 + 6D_1 D_4 D_5 i_3)s_3 + 3D_1 D_4 D_6 i_3^3 \\
& + (3D_6 + 3D_1^2 D_5)i_3^2)/(3i_3^2).
\end{aligned}$$

Neste caso, não há problemas de denominador nulo e portanto a representação acima nos permite concluir, pelo Lema 18, que cada folha da folheação $\mathcal{F}_{123467}$ é homeomorfa a um plano.

Apesar de não apresentarmos aqui os resultados, as 5 outras folheações deste caso foram analisadas e observamos que o mesmo padrão ocorre em todos estes sub-casos. Portanto o Lema 18 se aplica para cada folha destas folheações para concluir que são todas homeomorfas a planos.

Exemplo caso 5.3)

Para as folheações do caso 3, com apenas uma variável não linear, faremos o mesmo procedimento. Tomemos como exemplo a folheação $\mathcal{F}_{123456}$, temos:

$$\begin{cases} F_1 = x_1 = D_1 \\ F_4 = x_4 = D_4. \\ F_5 = y_1 = D_5 \end{cases}$$

Então o sistema se reduz a:

$$\begin{cases} F_2(D_1, x_2, x_3, D_4, D_5, y_2, y_3, y_4) = D_2 \\ F_3(D_1, x_2, x_3, D_4, D_5, y_2, y_3, y_4) = D_3. \\ F_6(D_1, x_2, x_3, D_4, D_5, y_2, y_3, y_4) = D_6 \end{cases}$$

Para não tornar o sistema não linear vamos escolher y_4 como variável independente e escolheremos mais uma dentre as variáveis lineares, digamos y_3 . Resolvendo o sistema acima para obter as expressões $x_2(y_3, y_4)$, $x_3(y_3, y_4)$ e $y_2(y_3, y_4)$, teremos:

$$x_2 = \frac{M_1(y_3, y_4)}{3s_3y_4^2 + 3D_5i_3y_4 - 3D_4^2s_3 - 3D_1D_4i_3 - 3}, \quad (4.5)$$

$$x_3 = \frac{M_2(y_3, y_4)}{3i_3^2s_3y_4^2 + 3D_5i_3^3y_4 - 3D_4^2i_3^2s_3 - 3D_1D_4i_3^3 - 3i_3^2}, \quad (4.6)$$

$$y_2 = \frac{M_3(y_3, y_4)}{3s_3y_4^2 + 3D_5i_3y_4 - 3D_4^2s_3 - 3D_1D_4i_3 - 3}, \quad (4.7)$$

Novamente teremos problemas para o caso de algum destes denominadores se anular. Analogamente ao que foi feito no Exemplo do caso 5.1), mantendo sempre y_4 como variável livre obtemos os outros três casos de pares de variáveis livres:

i) x_2 e y_4 livres:

$$x_3 = \frac{N_1(x_2, y_4)}{6D_4i_3^2y_4}, \quad y_2 = \frac{N_2(x_2, y_4)}{6D_4y_4}, \quad y_3 = \frac{N_3(x_2, y_4)}{6D_4i_3^2y_4}.$$

ii) x_3 e y_4 livres:

$$x_2 = \frac{P_1(x_3, y_4)}{(6D_4s_3 + 3D_1i_3)y_4 + 3D_4D_5i_3}, \quad y_2 = \frac{P_2(x_3, y_4)}{(6D_4s_3 + 3D_1i_3)y_4 + 3D_4D_5i_3},$$

$$y_3 = \frac{P_3(x_3, y_4)}{((6D_4s_3 + 3D_1i_3)y_4 + 3D_4D_5i_3)i_3^2}.$$

iii) y_2 e y_4 livres:

$$x_2 = \frac{Q_1(y_2, y_4)}{3y_4^2 - 3D_4^2}, \quad x_3 = \frac{Q_2(y_2, y_4)}{3i_3^2y_4^2 - 3D_4^2i_3^2}, \quad y_3 = \frac{Q_3(y_2, y_4)}{3i_3^2y_4^2 - 3D_4^2i_3^2}.$$

Note que em cada caso o denominador das três expressões coincidem ou um é o produto de outro por i_3^2 , que é não nulo por estar no denominador da terceira função coordenada da aplicação 5). Elegendo um denominador em cada caso e igualando a zero, obtemos um sistema com 4 equações nas incógnitas D_1, D_4, D_5, i_3, s_3 e y_4 . Novamente o Maxima deu como resposta:

“If algsys cannot find a solution, an empty list [] is returned”.

Todavia, diferente do Exemplo do caso 5.1), aqui a variável livre y_4 está sempre presente nos denominadores e portanto seria necessário avançar nas interpretações. De fato, quando estamos analisando uma folha específica pensamos nos parâmetros D_1, D_4, D_5, i_3, s_3 fixados e na variável y_4 variando a vontade no conjunto $\mathbb{R}$.

Analisemos uma destas situações: digamos que $D_4 \neq 0$, então poderíamos tomar a situação i) acima em que x_2 e y_4 são livres. Neste caso, teremos problema no espaço definido por $y_4 = 0$, ou seja, usando a representação i) para $y_4 < 0$ e $y_4 > 0$ obtemos duas partes homeomorfas a planos de uma mesma folha. Desde que, pelo comentário após Corolário 16, sabemos de antemão que estas folhas são homeomorfas a planos, acreditamos que estas duas componentes devem se colar através de uma curva no espaço $y_4 = 0$ formando assim a folha correspondente que seria uma superfície homeomorfa a um plano. Tal curva poderia ser, por exemplo, obtida aplicando-se $y_4 = 0$ na representação dada pelas equações (4.5), (4.6) e (4.7), note que como $D_1 = 0$ teríamos o denominador igual a -3 e sendo y_3 a única variável livre, teremos definida realmente uma curva algébrica no espaço $y_4 = 0$. Pela resposta do Maxima tal artifício sempre poderia ser realizado. Mas, até então, não conseguimos um argumento convincente de que as duas componentes realmente se colam nesta curva, formando assim uma única superfície homeomorfa a um plano.

5 Conclusão

O objetivo central desta monografia era estudar a viabilidade de se obter uma prova alternativa para a bijetividade das aplicações da classificação de Hubbers, utilizando o argumento topológico descrito no Corolário 16.

Conforme vimos na Seção 4, nas aplicações 1), 2), 4), 6) e 7) da classificação de Hubbers, obtivemos os resultados esperados de forma direta devido a simplicidade dessas aplicações. Nas demais aplicações, a análise ficou mais trabalhosa pois tivemos que separar em mais casos e analisar sistemas de denominadores que podem se anular. Além disto, em alguns exemplos relacionados à aplicação 5), mais especificamente nos casos 5.1) e 5.2), conseguimos mostrar que os denominadores em questão nunca se anulam simultaneamente o que nos permitiu concluir que as folhas são homeomorfas a planos. Contudo, no caso 5.3) nos deparamos com uma situação que ainda não conseguimos analisar. Acredita-se que se esta barreira fosse rompida, conseguiríamos analisar também as folheações da aplicação 3), que têm comportamento análogo à aplicação 5). A partir daí passaríamos a analisar as folheações de 8), onde pode aparecer fenômenos ainda mais complexos.

Este trabalho ilustrou que implementar o Corolário 16 no estudo da Conjectura Jacobiana (complexa) não constitui uma tarefa fácil, pois mesmo num caso de dimensão “baixa”, a saber dimensão 4, em que as aplicações são dadas explicitamente e ainda utilizando certo esforço computacional, até o momento não foi possível analisar completamente as folheações das aplicações na classificação de Hubbers. De fato, de um total de 224 folheações, tivemos sucesso total nas 140 associadas às aplicações 1), 2), 4), 6) e 7). Para a aplicação 5) concluímos as 6 folheações do sub-caso 5.2) e acreditamos ser possível analisar as 6 do sub-caso 5.1). Restando as 16 do sub-caso 5.3). Admitindo que o caso 3) é análogo e conseguiríamos analisar mais 12 folheações, tudo indica que faltariam $224 - 164 = 60$ folheações. Porém, o mais importante é que, se a análise fosse aprofundada a ponto de romper a barreira descrita no parágrafo anterior, teríamos dado um grande passo para conquistar a maioria das 60 restantes.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Bass, E. H. Connell e D. Wright, *The Jacobian Conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse*, Bull. Amer. Math. Soc., **7** (1982), 287-330.
- [2] A. Białynicki-Birula e M. Rosenlicht, *Injective morphisms of real algebraic varieties*, Proc. Amer. Math. Soc., **13** (1962), 200–203.
- [3] F. Braun and J. Venato-Santos, *Half-Reeb components, Palais-Smale condition and global injectivity of local diffeomorphisms in $\mathbb{R}^3$* , Publ. Mat., **EXTRA** (2014), 63–79.
- [4] C. Camacho e A. Lins Neto, *Teoria Geométrica das Folheações*, Projeto Euclides, IMPA, (1979).
- [5] M. Cobo, C. Gutierrez, and J. Llibre. On the injectivity of C^1 maps of the real plane. *Canad. J. Math.*, 54(6):1187–1201, 2002.
- [6] k. Drużkowisk, *An effective approach to Keller’s Jacobian conjecture*, Math. Ann., **264** (1983), 303-313.
- [7] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Progr. Math., Birkhäuser, **190** (2000).
- [8] A. van den Essen, *A criterion to decide if a polynomial map is invertible and to compute the inverse*, Comm. in alg., **18** (1990), 10:3183-3186.
- [9] A. Fernandes, C. Gutierrez and R. Rabanal, *Global asymptotic stability for differentiable vector fields of $\mathbb{R}^2$* , Jour. of Diff. Equations, **206** (2004), 470–482.
- [10] C. Gutierrez, *A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **12** (1995), 627–671.
- [11] C. Gutierrez and C. Maquera, *Foliations and polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{R}^3$* , Math. Zeitschrift, **262** (2009), 613–626.
- [12] J. Hadamard, *Sur les transformations ponetuelles*, Bull. Soc. Math. de France, **34** (1906).
- [13] E. Hubbers, *The Jacobian Conjecture: cubic homogeneous Maps in dimension four, Master’s thesis*, University of Nijmegen, Toernooiveld, 6525 ED Nijmegen, The Netherlands, directed by A. van den Essen, (1994).
- [14] Z. Jelonek, *Geometry of real polynomial mappings*, Math. Zeitschrift, **239** (2002), 321-333.
- [15] Jelonek, Z.: Testing sets for properness of polynomial mappings, *Math. Ann.*, **315** (1999), 1–35.
- [16] Jelonek, Z.: The set of points at which a polynomial map is not proper, *Ann. Polonici Math.*, **58** (1993), 259–266.
- [17] W. Kaplan, *Regular curve-families filling the plane II*, Duke Math. J., **8** (1941), 11-46.
- [18] O. H Keller, *Ganze Cremona-Transformationen*, Monatsh. Math. Phys., **47** (1939), 299-306.
- [19] E. L. Lima, *Análise Real, Volume 2*, Coleção Matemática Universitária, SBM, (2004).
- [20] E. L. Lima, *Curso de Análise, Volume 2*, Projeto Euclides, SBM, Rio de Janeiro, (2000).
- [21] C. Maquera e J. Venato-Santos, *Foliations and global injectivity in $\mathbb{R}^n$* , Bull. Brazilian Math. Soc., **44** (2013), 2:273-284.

- [22] S. Pinchuck, *A counterexample to the strong real Jacobian conjecture*, Math. Zeitschrift, **217** (1994), 1–4.
- [23] R. Plastock, *Homeomorphisms between Banach Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **200** (1974), 169–183.
- [24] B. Smyth and F. Xavier, *Injectivity of local diffeomorphisms from nearly spectral conditions*, J. Differential Equations, **130** (1996), 406–414.
- [25] S. Wang, *A Jacobian criterion for separability*, J. Algebra, **65** (1980), 453–494.