

Edson Agustini

Um Curso de Geometria Euclidiana Espacial



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE UBERLÂNDIA

2014

Agustini, Edson.

Um Curso de Geometria Euclidiana Espacial / Edson Agustini.

Uberlândia, MG: UFU, 2014, 89p.

Licenciatura em Matemática

1. Geometria Espacial

Reitor

Elmiro Santos Resende

Coordenador UAB/CEAD/UFU

Maria Teresa Menezes Freitas

Conselho Editorial

Carlos Rinaldi-UFMT

Carmen Lucia Brancaglion Passos-UFScar

Célia Zorzo Barcelos-UFU

Ivete Martins Pinto-FURG

João Frederico Costa Azevedo Meyer-UNICAMP

Marisa Pinheiro Mourão-UFU

Edição

Centro de Educação a Distância

Comissão Editorial-CEAD/UFU

Diagramação

Edson Agustini

PRESIDENTE DA REPÚBLICA
Dilma Vana Rousseff

MINISTRO DA EDUCAÇÃO
Aloizio Mercadante

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA/CAPES
João Carlos Teatini de Souza Clímaco

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA - UFU
REITOR
Elmiro Santos Resende

VICE-REITOR
Eduardo Nunes Guimarães

CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
DIRETORA E REPRESENTANTE UAB/UFU
Maria Teresa Menezes Freitas

SUPLENTE UAB/UFU
José Benedito de Almeida Júnior

FACULDADE DE MATEMÁTICA -FAMAT - UFU
DIRETOR
Luís Antônio Benedetti

COORDENADOR DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - PARFOR
Douglas Marin

PROFESSOR
Edson Agustini

ASSESSORA DA DIRETORIA
Sarah Mendonça de Araújo

EQUIPE MULTIDISCIPLINAR
Danilo Adrian Marques
Alberto Dumont Aves Oliveira
Dirceu Nogueira de Sales Duarte Jr.
Gustavo Bruno do Vale
João Victor da Silva Alves
Otaviano Ferreira Guimarães

Apresentação

Este material é a continuação do texto “*Um Curso de Geometria Euclidiana Plana*” (referência [1]) que escrevemos para o curso de Licenciatura em Matemática à Distância da Universidade Federal de Uberlândia. Sendo assim, tal referência é um importante pré-requisito para o estudo de geometria espacial que estamos considerando no presente material didático.

As considerações apresentadas em [1] continuam válidas aqui, ou seja, nosso enfoque é um texto curto e axiomático de Geometria Euclidiana Espacial acessível a leitores que cursaram o Ensino Médio (portanto, leitores que já tiveram contato com a geometria espacial daquele nível). Também ressaltamos que este texto é quase que exclusivamente de *Geometria Sintética*, portanto, faremos o uso mínimo de ferramentas de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral.

Quanto à originalidade, o leitor perceberá que o presente texto difere bastante dos já consagrados [5], [10] e [3]. Procuramos apresentar uma redação bastante enxuta e objetiva para um curso curto de geometria espacial.

Quanto aos exercícios, há cerca de 70 deles neste material, sendo a maioria resolvidos. Aqueles exercícios que estão propostos certamente são factíveis para os estudantes que entenderam bem a parte teórica e a resolução dos exercícios resolvidos. É importante enfatizar que os exercícios são parte integrante do curso e constituem um valioso auxílio ao aprendizado. Aliás, o leitor que estudou Cálculo Diferencial e Integral perceberá que no último capítulo desse texto (estudo de cilindros, cones, esferas e partes desses sólidos), vários exercícios podem ser feitos por meio de integrais. Ao leitor interessado em aprofundar seus estudos, sugerimos que a resolução desses exercícios seja feita dos dois modos (sintética e com integrais) para efeito de comparação do nível de dificuldade que cada tipo de resolução apresenta.

Sobre o conteúdo, o curso está claramente dividido em três grandes partes:

Geometria de Posição no Espaço.

Paralelismo e ortogonalidade no espaço euclidiano:

Noções primitivas e axiomas da Geometria Euclidiana Espacial.

Determinação de planos no espaço.

Posições relativas entre retas no espaço.

Posições relativas entre retas e planos no espaço.

O Teorema Fundamental do Perpendicularismo.

Posições relativas entre planos no espaço.

Projeção ortogonal de pontos e figuras sobre um plano.

Distâncias envolvendo pontos, retas e planos no espaço.

Ângulo entre reta e plano.

Diedros.

Ângulos Polédricos.

Sólidos de Faces Planas.

Poliedros, prismas e pirâmides:

Poliedros.

Poliedros convexos.
A Relação de Euler para poliedros convexos.
Condições necessárias e suficientes para a existência de poliedros convexos.
Poliedros regulares.
Volumes.
Sólidos congruentes e sólidos semelhantes.
O Teorema Fundamental da Proporcionalidade.
O Princípio de Cavalieri.
Prismas.
Prismas regulares.
Volumes de prismas.
Pirâmides.
Pirâmides regulares.
Volumes de pirâmides.
Troncos de prismas e troncos de pirâmides.

Sólidos com Faces Não Necessariamente Planas.

Cilindros de revolução, cones de revolução e esferas:

Cilindros de revolução.
Cilindros equiláteros.
Áreas e volumes de cilindros de revolução.
Cones de revolução.
Cones equiláteros.
Relações métricas em cones de revolução.
Áreas e volumes de cones de revolução.
Troncos de cones de revolução.
Áreas e volumes de esferas.
Calotas, zonas e segmentos esféricos.
Fusos e cunhas esféricas.
Setores e anéis esféricos.
Inscrição e circunscrição de esferas em poliedros regulares.
Inscrição e circunscrição de esferas em cones de revolução.

Por último, mas não menos importante, algumas *Referências Bibliográficas* são apresentadas.

Bons estudos!
Edson Agustini.

Uberlândia-MG, agosto de 2014.

Sumário

Um Curso de Geometria Euclidiana Espacial	1
1 Paralelismo e Ortogonalidade no Espaço Euclidiano	5
1.1 Ampliando a Lista de Axiomas	5
1.2 Determinação de Planos no Espaço Euclidiano	7
1.3 Posições Relativas entre Retas no Espaço Euclidiano	8
1.4 Posições Relativas entre Retas e Planos no Espaço Euclidiano	10
1.5 Posições Relativas entre Planos no Espaço Euclidiano	15
1.6 Distâncias	17
1.7 Ângulo entre Reta e Plano e Ângulo entre Planos	23
1.8 Ângulos Poliédracos	24
2 Poliedros, Prismas e Pirâmides	29
2.1 Poliedros	29
2.2 Volume	37
2.3 Prismas	43
2.4 Pirâmides	44
2.5 Troncos de Prisma e de Pirâmide	51
3 Cilindros, Cones e Esferas	55
3.1 Cilindros de Revolução	55
3.2 Cones de Revolução	59
3.3 Troncos de Cilindro e de Cone	64
3.4 Esferas e Sólidos Esféricos	68
3.5 Inscrição e Circunscrição de Esferas em Poliedros Regulares e em Cones de Revolução	82
Referências Bibliográficas	89

Capítulo 1

Paralelismo e Ortogonalidade no Espaço Euclidiano

1.1 Ampliando a Lista de Axiomas

Já comentamos na seção de *Apresentação* que este texto é continuação natural da referência [1] e, portanto, devemos considerá-la como pré-requisito para nossos estudos.

No referido texto, apresentamos algumas considerações sobre sistemas axiomáticos para a Geometria Euclidiana Plana, alguns comentários históricos e, naturalmente, todos os axiomas necessários para o desenvolvimento da geometria plana. Para avançarmos no estudo de Geometria Euclidiana Espacial, alguns axiomas adicionais àqueles que já foram introduzidos em [1] são necessários, e começamos esse capítulo com eles. Antes, porém, vamos recordar as notações que estamos adotando.

RECORDANDO NOTAÇÕES

Pontos: letras latinas maiúsculas ($A, B, C, \dots$).

Segmento com extremos A e B : “*segmento* AB ” ou, simplesmente, $\overline{AB}$.

Comprimento do segmento AB : denotamos simplesmente por “ AB ”, sem a barra superior. Também utilizamos letras latinas minúsculas para designar comprimentos ($a, b, c, \dots$). Alguns textos também trazem a notação $|AB|$.

Observação importante: quando não houver perigo de confusão, denotamos “ AB ” tanto para o *segmento* AB (que é um conjunto de pontos), quanto para o *comprimento do segmento* AB (que é um número real).

Semirreta com origem A contendo B : “*semirreta* AB ” ou, simplesmente, $\overrightarrow{AB}$ (quando não houver perigo de confusão com vetores). Alguns textos também utilizam a notação S_{AB} .

Retas: letras latinas minúsculas ($r, s, t, \dots$). Também utilizamos a notação $\overleftrightarrow{AB}$ para designar a reta que contém os pontos distintos A e B .

Planos: letras gregas minúsculas ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$).

ALGUNS AXIOMAS ADICIONAIS

Vamos destacar 8 axiomas, baseados na obra de Hilbert ⁽¹⁾, no estudo de Geometria Euclidiana Espacial que faremos nesse texto. Naturalmente, conforme já comentado, estamos admitindo os demais axiomas por meio dos diversos resultados de Geometria Euclidiana Plana e das construções geométricas que estamos utilizando a todo momento.

Com o objetivo de tornar o estudo mais didático, vamos dar os seguintes nomes aos axiomas destacados:

“Axiomas de Existência”

A1: Em uma reta existem infinitos pontos. Dada uma reta, existe um ponto que não pertence a essa reta.

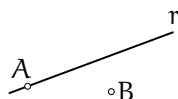


FIGURA 1.1: $A \in r$; $B \notin r$.

A2: Em um plano existem infinitos pontos. Dado um plano, existe um ponto que não pertence a esse plano.

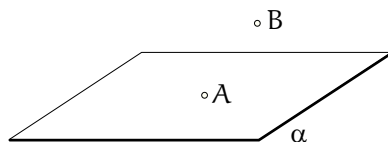


FIGURA 1.2: $A \in \alpha$; $B \notin \alpha$.

“Axiomas de Determinação”

A3: Dois pontos distintos determinam ⁽²⁾ uma única reta.

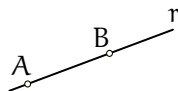


FIGURA 1.3: $r = \overleftrightarrow{AB}$.

A4: Três pontos não colineares determinam um único plano.

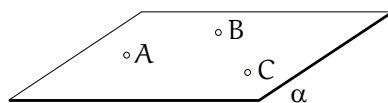


FIGURA 1.4: $A, B, C \in \alpha$.

“Axioma de Inclusão”

A5: Uma reta que possui dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.

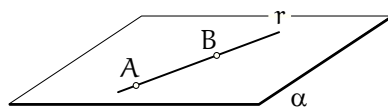


FIGURA 1.5: $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$.

¹Com o objetivo de tornar os textos de geometria mais enxutos, alguns autores costumam sintetizar os 7 Axiomas de Incidência de Hilbert em apenas 2 ou 3. O procedimento inverso também é adotado em prol da didática, ou seja, às vezes, um dos axiomas de Hilbert é dividido em 2 ou 3 axiomas. Por exemplo, os axiomas **A1** e **A2** que estamos introduzindo neste texto é parte de apenas um axioma de Hilbert.

²Nesses axiomas *determinar* tem o sentido de *existir*.

“Axioma de Intersecção”

A6: A intersecção de dois planos distintos que têm um ponto em comum é uma reta.

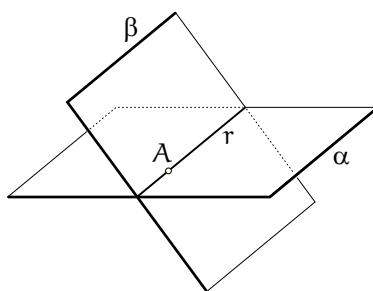


FIGURA 1.6: $A \in r = \alpha \cap \beta$.

Dizemos que os dois planos do Axioma **A6** acima são **planos concorrentes** ou **planos secantes**.

Dizemos que um conjunto não vazio $\mathcal{C}$ de pontos do espaço euclidiano é um **conjunto convexo** quando, dados quaisquer pontos A e B em $\mathcal{C}$, o segmento AB está contido em $\mathcal{C}$.

“Axioma de Separação”

A7: Uma reta r contida em um plano determina dois conjuntos nesse plano, chamados de **semiplanos com origem em r** , de tal modo que:

- A intersecção dos dois semiplanos é a reta r ;
- Cada semiplano é um conjunto convexo.
- Se o ponto A pertence a um dos semiplanos e o ponto B pertence ao outro, então a intersecção do segmento AB com r é não vazia.

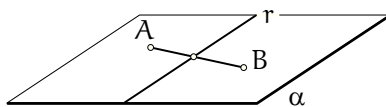


FIGURA 1.7: $AB \cap r \neq \emptyset$.

Nota. O Axioma **A7** acima, que fornece a visão de um plano como reunião de dois semiplanos de mesma origem, possui versões para a reta (vista como reunião de duas semirretas de mesma origem) e para o espaço (visto como reunião de dois semiespaços de mesma origem).

Dizemos que dois conjuntos de pontos no espaço são **conjuntos coplanares** quando existe um plano que os contém.

Dizemos que duas retas r e s distintas no espaço são **retas paralelas** quando são coplanares e não possuem ponto em comum (notação: $r // s$).

“Axioma das Paralelas”

A8: Em um plano, por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada.

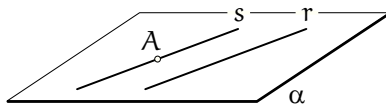


FIGURA 1.8: $\exists! s \subset \alpha, A \in s, r // s$.

1.2 Determinação de Planos no Espaço Euclidiano

Um plano fica univocamente determinado no espaço de quatro modos distintos:

1º. modo: Pelo Axioma **A4**: “Três pontos não colineares determinam um único plano”.

2º. modo: (teorema) “Uma reta e um ponto exterior a ela determinam um único plano”.

Demonstração

Sejam A um ponto e r uma reta tais que $A \notin r$. Pelo Axioma **A1**, existem pontos $B, C \in r$ com $B \neq C$. Logo, A, B e C são pontos não colineares (de fato, o Axioma **A3** estabelece que r é a única reta que passa por B e C e, por hipótese, $A \notin r$). Pelo Axioma **A4**, existe um único plano α tal que $A, B, C \in \alpha$. De $B, C \in r \cap \alpha$ e do Axioma **A5** temos $r \subset \alpha$. Conclusão: α contém A e r .

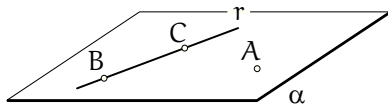


FIGURA 1.9: Reta e ponto determinam plano.

Por fim, não há outro plano $\alpha' \neq \alpha$ que contém A e r pois, caso contrário, α' deveria conter A, B, C . Mas, como vimos acima, o único plano que contém A, B, C é α . $\square$

3º. modo: (teorema) “Duas retas concorrentes determinam um único plano”.

Demonstração

Sejam r e s retas concorrentes em A . Pelo Axioma **A1**, existe $B \in r$ e $B \neq A$. Logo, $B \notin s$. Pelo 2º. modo de determinação de planos acima, existe um único plano α tal que $B \in \alpha$ e $s \subset \alpha$. Como $A, B \in \alpha$, o Axioma **A5** garante que $r \subset \alpha$. Conclusão: α contém r e s .

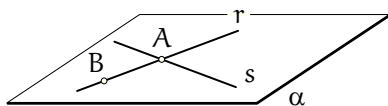


FIGURA 1.10: Retas concorrentes determinam plano.

Por fim, não há outro plano $\alpha' \neq \alpha$ que contém r e s pois, caso contrário, α' deveria conter B e s . Mas, como vimos acima, o único plano que contém B e s é α . $\square$

4º. modo: (teorema) “Duas retas paralelas determinam um único plano”.

Demonstração

Sejam r e s retas paralelas. Pela definição de retas paralelas, r e s são coplanares e não possuem ponto em comum. Deste modo, seja α o plano que as contém.

Resta mostrar que α é o único plano tal que $r, s \subset \alpha$. Mas, tomando um ponto $A \in s$ (Axioma **A1**), temos, pelo 2º. modo de determinação de planos acima, que existe um único plano que contém A e r . Mas α é um plano que contém A e r . Logo, α é único. $\square$

1.3 Posições Relativas entre Retas no Espaço Euclidiano

O estudo de posições relativas entre retas no espaço faz uso do princípio lógico do “terceiro excluído”, ou seja, que uma afirmação ou é verdadeira ou é falsa, não havendo terceira possibilidade. Equivalentemente, ou “ x é y ” ou “ x não é y ”, não havendo terceira possibilidade.

Sejam r e s retas distintas no espaço. Logo, podemos considerar as duas seguintes possibilidades:

- (1) r e s são coplanares.
- (2) r e s não são coplanares.

No caso (1) temos outras duas possibilidades:

- (1.1) $r \cap s$ é um conjunto vazio.
- (1.2) $r \cap s$ não é um conjunto vazio.

Em (1.1) temos cumprida a definição de retas paralelas, ou seja, r e s são coplanares e não possuem ponto em comum.

Em (1.2) temos, devido ao fato de r e s serem distintas e ao Axioma **A3**, que $r \cap s$ é um conjunto unitário. Logo, temos cumprida a definição de retas concorrentes, ou seja, r e s possuem um único ponto em comum.

No caso (2) temos um trabalho extra: provar que existem retas não coplanares.

Exercício Resolvido

EXERCÍCIO 1.1) Prove que existem retas não coplanares.

Resolução.

De fato, vimos que uma reta r e um ponto $A \notin r$ determinam um único plano α (2º. modo de determinação de planos). Seja $B \notin \alpha$ (Axioma **A2**). Seja $s = \overleftrightarrow{AB}$ (Axioma **A3**) e, portanto, $s \cap \alpha = \{A\}$ (caso contrário, ou seja, se s possuir outro ponto em comum com α além de A , teríamos $s \subset \alpha$ pelo Axioma **A5**, o que contradiz $B \notin \alpha$).

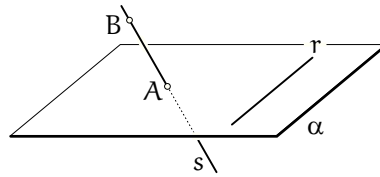
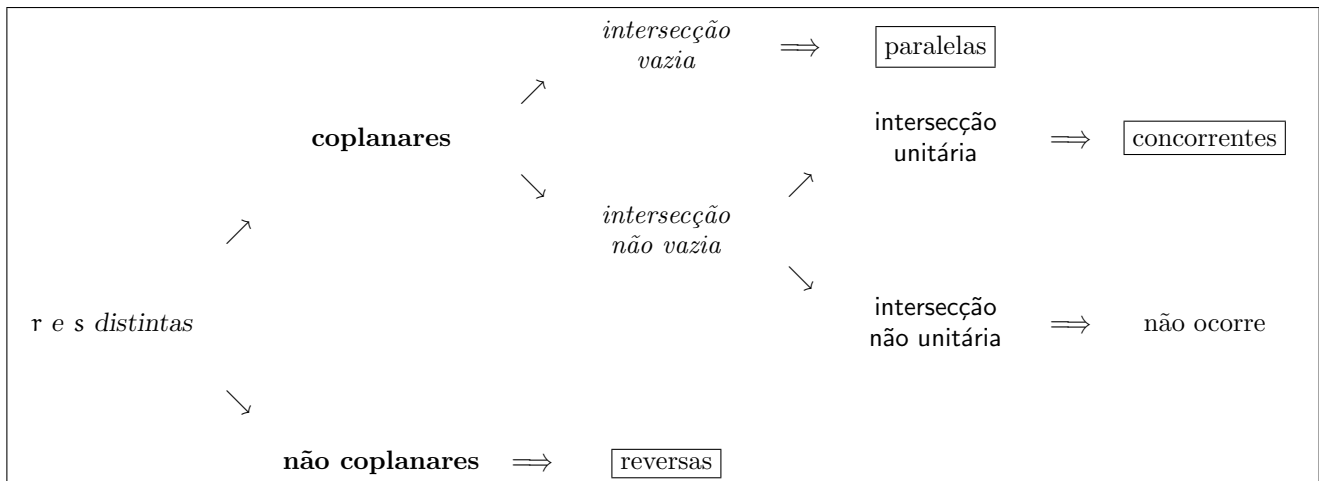


FIGURA 1.11: *Existem retas não coplanares.*

Afirmamos que r e s são não coplanares. De fato, se existir um plano α' que contém r e s , então α' deverá conter A e r e, portanto, deverá coincidir com α . Contradição, pois α não contém s . $\square$

Retas não coplanares são chamadas de **retas reversas**. Também é comum dizer, neste caso, que r é reversa a s .

Em resumo:



ÂNGULO ENTRE RETAS REVERSAS

Recordemos a noção de ângulo entre duas retas concorrentes da Geometria Euclidiana Plana.

Duas retas concorrentes r e s determinam dois pares de ângulos opostos pelo vértice. Lembremos que ângulos opostos pelo vértice são congruentes por possuírem um mesmo ângulo suplementar comum (teorema de Geometria Euclidiana Plana).

Recordemos também que duas retas concorrentes r e s são chamadas de **perpendiculares** ou **ortogonais** quando determinam quatro ângulos congruentes (notação: $r \perp s$). Nesta situação, também dizemos que as retas r e s formam quatro **ângulos retos**.

Desta forma, há um par de ângulos agudos congruentes, ou retos, formados por duas retas concorrentes r e s .

Com as considerações acima, qualquer um dos ângulos agudos, ou retos, determinado por duas retas concorrentes r e s é definido como sendo o **ângulo entre as retas** r e s .

Por fim, alguns autores ainda definem o ângulo entre duas retas paralelas como sendo o **ângulo nulo**.

Queremos estender a noção de ângulo entre retas para retas reversas. Para isso, consideremos que dada uma reta r e um ponto $A \notin r$ no espaço, existe e é única a reta $r' // r$ tal que $A \in r'$. Essa afirmação é decorrência direta do 2º. modo de determinação de planos e do Axioma **A8**.

Com isso, dadas duas retas reversas r e s e um ponto A exterior a elas, sempre existem e são únicas retas r' e s' concorrentes em A tais que $r // r'$ e $s // s'$. Mais ainda, se tomarmos $B \neq A$ (exterior a r e s) e as retas r'' e s'' paralelas a r e s , respectivamente, passando por B , então os quatro ângulos formados por r' e s' são ordenadamente congruentes aos quatro ângulos formados por r'' e s'' (consequência da transitividade do paralelismo).

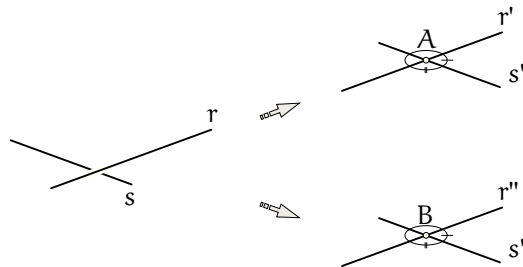


FIGURA 1.12: *Transitividade do paralelismo.*

A discussão acima permite definir, sem ambiguidades, a noção de ângulo entre retas reversas, conforme descrevemos abaixo.

Sejam r e s retas reversas. O ângulo entre retas concorrentes r' e s' paralelas a r e s , respectivamente, é definido como sendo o **ângulo entre as retas reversas** r e s . E ainda, quando as retas concorrentes r' e s' são perpendiculares, dizemos que as retas reversas r e s são **ortogonais**.

Nota. (1) Não é usual utilizar a palavra *perpendicular* para o caso de as retas r e s serem reversas ortogonais. Perpendicularismo pressupõe intersecção não vazia entre os objetos em consideração.

(2) Podemos estender a discussão que fizemos acima, incluindo o caso em que $A \in r$ e $s' // s$ passando por A . O ângulo entre r e s' é congruente ao ângulo que definimos como sendo entre as retas reversas r e s .

1.4 Posições Relativas entre Retas e Planos no Espaço Euclidiano

Uma reta r e um plano α são **paralelos** quando não possuem pontos em comum (notação: $r // \alpha$). Também se diz que r é paralela a α , ou então α é paralelo a r .

Uma reta r e um plano α são ditos **secantes** ou **concorrentes** quando possuem um único ponto em comum. Também se diz que r é concorrente a α , ou então α é concorrente a r .

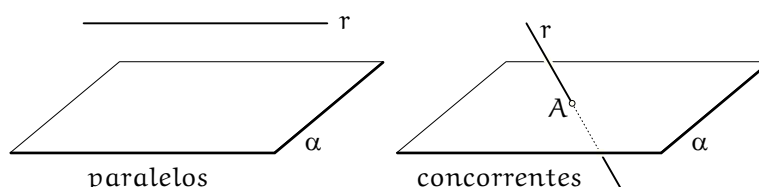


FIGURA 1.13: *Reta e plano paralelos e concorrentes.*

Exercício Proposto

EXERCÍCIO 1.2) Mostre que existem:

- (a) Reta e plano paralelos.
- (b) Reta e plano concorrentes.

Dica: o procedimento no caso (b) já foi desenvolvido quando mostramos a existência de retas reversas (EXERCÍCIO 1.1). Já no caso (a), tome um plano, uma reta contida nele e um ponto fora dele. Use o 2º. modo de determinação de planos e o Axioma A8.

Sejam r reta e α plano. Utilizando o princípio lógico do “terceiro excluído”, temos duas possibilidades:

- (1) $r \cap \alpha$ é vazio;
- (2) $r \cap \alpha$ não é vazio.

No caso (1) temos a definição de reta e plano paralelos cumprida.

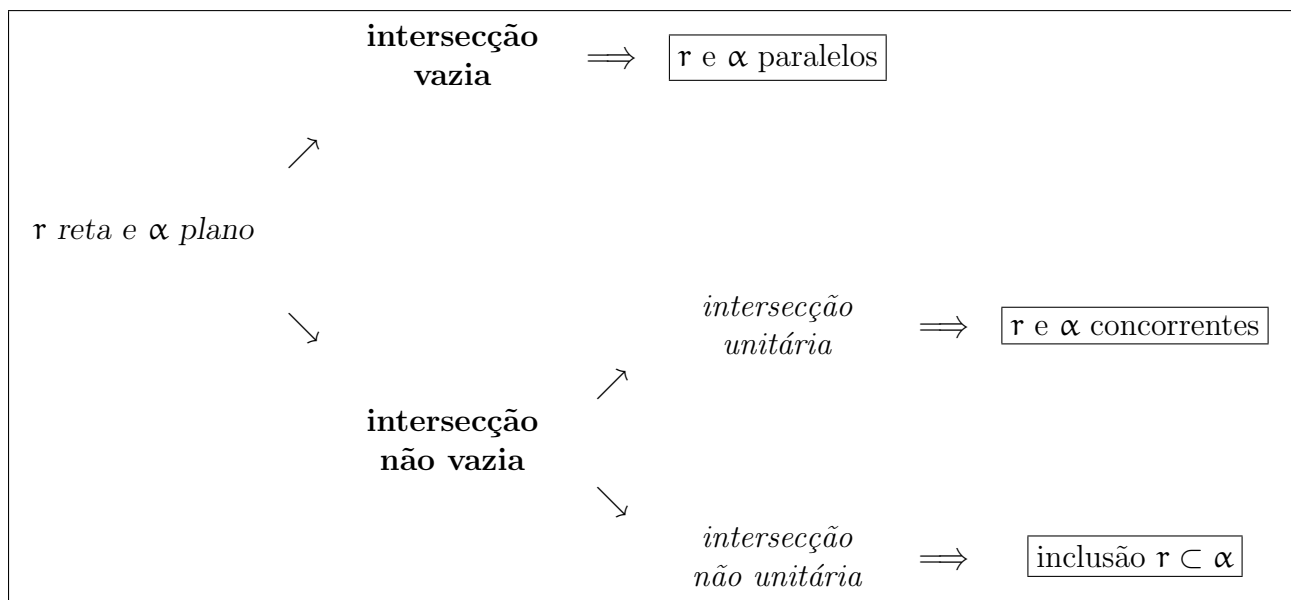
No caso (2) temos dois subcasos possíveis:

- (2.1) $r \cap \alpha$ é conjunto unitário;
- (2.2) $r \cap \alpha$ não é conjunto unitário.

No subcaso (2.1) temos a definição de reta e plano concorrentes cumprida.

No subcaso (2.2) temos, devido ao Axioma A5, a inclusão $r \subset \alpha$.

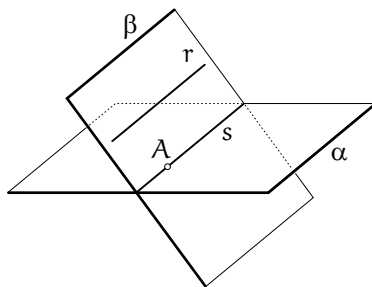
Em resumo:



Proposição 1.1 (Condições necessárias e suficientes para paralelismo entre reta e plano) *Uma reta r é paralela a um plano α se, e somente se, r não está contida em α e é paralela a uma reta de α .*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Como r é paralela a α , r não pode estar contida em α (definição de reta e plano paralelos). Seja $A \in \alpha$. Logo, $A \notin r$ e, pelo 2º. modo de determinação de planos, existe um único plano β que contém r e A . Como $A \in \alpha \cap \beta$, o Axioma A6 garante que $s = \alpha \cap \beta$ é uma reta.

FIGURA 1.14: *Paralelismo entre reta e plano.*

Afirmamos que $r // s$. De fato, como r e s estão em β , se supormos que r não é paralela a s , então r e s são concorrentes, o que leva r a ter ponto em comum com α , uma contradição. Conclusão: $r // s$ e $s \subset \alpha$, como queríamos.

($\Leftarrow$) Seja $s \subset \alpha$ reta paralela a r . Logo, pela definição de retas paralelas, r e s devem ser coplanares, ou seja, deve existir um plano β que as contém. Como $r \subset \beta$ e $r \not\subset \alpha$ temos que os planos α e β são distintos. Além disso, o Axioma **A6** garante que $s = \alpha \cap \beta$.

Afirmamos que $r // \alpha$. De fato, se supormos que existe $A \in r \cap \alpha$, então $A \in \alpha \cap \beta$ (pois $r \subset \beta$), ou seja, $A \in s$, o que é contradição com $r // s$. Conclusão: $r // \alpha$, como queríamos. $\square$

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1.3) Demonstre que se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela ou reversa a qualquer reta desse plano.

Resolução. (por absurdo)

Sejam r reta e α plano tais que $r // \alpha$. Seja $s \subset \alpha$ reta. Suponhamos que r não seja paralela e nem reversa a s . Logo, r deve ser concorrente com s , o que leva à conclusão de que r tem ponto em comum com α , o que é uma contradição. Conclusão: r é paralela ou reversa a s , como queríamos. $\square$

EXERCÍCIO 1.4) Demonstre que se dois planos possuem uma reta como intersecção e uma reta de um deles é paralela ao outro, então essa reta é paralela à intersecção.

Resolução. (por absurdo)

Sejam α e β planos e $s = \alpha \cap \beta$. Seja $r \subset \beta$ reta paralela a α .

Temos que mostrar que $r // s$.

Suponhamos que r não seja paralela a s . Então:

- (1) r e s são reversas ou;
- (2) r e s são concorrentes.

A opção (1) não ocorre porque r e s são coplanares (ambas estão em β)

Na opção (2) seja $A \in r \cap s$. Logo, $A \in \alpha$ e, portanto, r não é paralela a α , uma contradição.

Conclusão: $s // r$, como queríamos. $\square$

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO PERPENDICULARISMO

Uma reta r é **perpendicular** ou **ortogonal** a um plano α quando r é concorrente com α e é perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto de intersecção $\{O\} = r \cap \alpha$ (notação: $r \perp \alpha$). Também é usual dizer que α é perpendicular (ou ortogonal) a r ou, ainda, que r e α são perpendiculares (ou ortogonais).

Uma reta r concorrente com um plano α e não perpendicular a α é chamada de reta **oblíqua** em relação ao plano α .

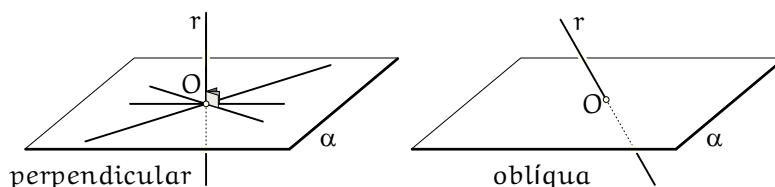


FIGURA 1.15: Reta perpendicular e oblíqua a plano.

Exercício Proposto

EXERCÍCIO 1.5) Mostre que existe reta perpendicular a duas retas concorrentes de um plano.

Dica: tome uma reta r em um plano α . Tome um ponto P fora de α . Tome o plano β passando por P e r . Logo, $r = \alpha \cap \beta$. Tome $O \in r$. Em α há uma única perpendicular s a r passando por O . Em β há uma única perpendicular t a r passando por O . As retas s e t são concorrentes em O e determinam um plano γ . A reta r é perpendicular às retas concorrentes t e s do plano γ .

Teorema 1.1 (Fundamental do Perpendicularismo) Se uma reta é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular a esse plano.

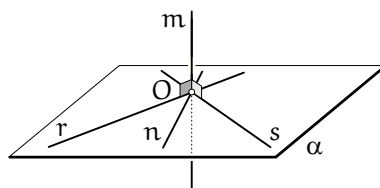
Demonstração

Sejam r e s retas concorrentes em O contidas no plano α . Seja m reta ortogonal a r e a s .

1º. Caso: m é perpendicular a r e a s .

Neste caso, $O \in m$. Além disso, $m \not\subset \alpha$ pois, caso contrário, r e s seriam coincidentes.

Considere n reta arbitrária de α passando por O .

FIGURA 1.16: Reta m perpendicular a r e a s .

Nosso objetivo é mostrar que m é ortogonal a n .

De fato, sejam $B \in r$ em um semiplano (contido em α) determinado por n e $C \in s$ no outro semiplano determinado por n . Pelo Axioma A7, $\exists D \in n$ com $D \in BC$.

Sejam $A, A' \in m$ tais que $AO \equiv A'O$ e $A \neq A'$ (ou seja, A e A' são simétricos em relação a O).

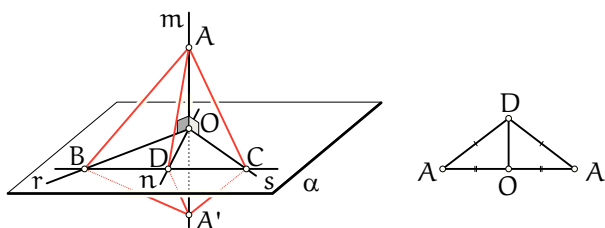


FIGURA 1.17: Usando congruências de triângulos.

Pelo caso de congruência LAL: $ABO \equiv A'BO$ e $ACO \equiv A'CO \Rightarrow AB \equiv A'B$ e $AC \equiv A'C$.

Pelo caso de congruência LLL: $ABC \equiv A'BC \Rightarrow \widehat{ABD} \equiv \widehat{A'BD}$.

Pelo caso de congruência LAL: $ABD \equiv A'BD \Rightarrow AD \equiv A'D$.

Logo, ADA' é isósceles e DO é a mediana relativa a D . Portanto, DO é altura de ADA' relativa a D , ou seja, $DO \perp m \Rightarrow m \perp n$, como queríamos.

2º. Caso: m é perpendicular a r , e reversa ortogonal a s .

Observemos que m não pode estar contida em α (senão m e s não seriam reversas).

Seja $\{P\} = m \cap r$. Neste caso, $P \notin s$. Pelo Axioma **A8** existe uma reta $s' // s$ contida em α passando por P . Pela definição de retas reversas ortogonais, temos que m e s' são perpendiculares. Pelo 1º. Caso acima, m é perpendicular a α , como queríamos.

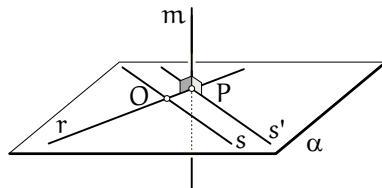


FIGURA 1.18: Reta m perpendicular a r e reversa ortogonal a s .

3º. Caso: m é reversa ortogonal a r e a s .

Como no caso acima, m não pode estar contida em α . Entretanto, temos que garantir que m é concorrente com α . De fato, se supormos que m é paralela a α , a Proposição 1.1 garante que existe $m' \subset \alpha$ com $m // m'$. Sendo m e r reversas ortogonais temos m' e r perpendiculares (definição de reversas ortogonais). Analogamente m' e s são perpendiculares. Logo, r e s são perpendiculares a m' .

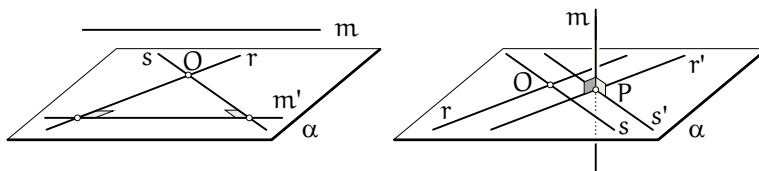


FIGURA 1.19: Reta m reversa ortogonal a r e a s .

Como essas três retas estão em α , temos $r // s$ ou r coincidente com s , uma contradição. Conclusão: m é concorrente com α .

Seja $\{P\} = m \cap \alpha$. Neste caso, $P \notin r$ e $P \notin s$. Pelo Axioma **A8** existem retas $s' // s$ e $r' // r$ contidas em α passando por P . Como r e s são concorrentes em O , o mesmo ocorre com r' e s' em P . Pela definição de retas reversas ortogonais, temos que m e r' são perpendiculares. Analogamente, m e s' também são perpendiculares. Pelo 1º. Caso acima, m é perpendicular a α , como queríamos. $\square$

Observemos que o Teorema Fundamental do Perpendicularismo, juntamente com o EXERCÍCIO 1.5, garantem a existência de reta e plano perpendiculares.

Exercício Proposto

EXERCÍCIO 1.6) Mostre que existe reta oblíqua a plano.

Dica: tome uma reta r perpendicular a um plano α em A . Tome uma reta s em α passando por A . Tome o plano β determinado pelas retas concorrentes r e s . Em β tome uma reta $t \neq s$ não perpendicular a s . A reta t é oblíqua a α .

Para o corolário abaixo: dizemos que um segmento é *ortogonal* a uma reta ou a um plano quando a reta que o contém assim o for. Caso esse segmento ortogonal a reta ou plano possua intersecção não vazia com esses elementos, também podemos dizer que o segmento é *perpendicular* à reta ou ao plano.

Corolário 1.1 (Teorema das Três Perpendiculares) Seja PP' perpendicular ao plano α em P' . Seja $Q \in \alpha$ distinto de P' . Seja $r \subset \alpha$ reta perpendicular a $P'Q$ em Q . Então, PQ é perpendicular a r .

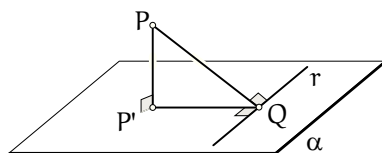
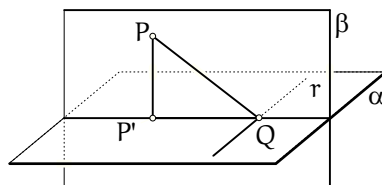


FIGURA 1.20: Figura padrão do “Teorema das Três Perpendiculares”.

Demonstração

Tomemos o plano β determinado por $\overleftrightarrow{PP'}$ e $\overleftrightarrow{P'Q}$.

FIGURA 1.21: Retas concorrentes determinando o plano β .

Logo, $PQ \subset \beta$ (Axioma A5). Sendo $\overleftrightarrow{PP'}$ e $\overleftrightarrow{P'Q}$ concorrentes e contidas em β , r perpendicular a $\overleftrightarrow{P'Q}$ e r ortogonal a $\overleftrightarrow{PP'}$, pelo Teorema Fundamental do Perpendicularismo, temos que r é perpendicular a β . Logo, r é perpendicular a PQ , como queríamos. $\square$

Exercício Proposto

EXERCÍCIO 1.7) Mostre que:

(a) Dado um plano α e um ponto A , existe e é única a reta r que passa por A e é perpendicular a α (observe que A pode ou não estar em α).

(b) Dada uma reta r e um ponto A , existe e é único o plano α que passa por A e é perpendicular a r (observe que A pode ou não estar em r).

Dica: em (a) tome $s \perp \alpha$. Tome o plano β que passa por A e s . Por fim, em β tome $r // s$ passando por A . Já para (b) divida em dois casos: se $A \notin r$ tome o plano β determinado por A e r . Tome $P \notin \beta$ e o plano γ determinado por P e r . Em β tome s perpendicular a r passando por A . Seja $\{B\} = r \cap s$. Em γ tome t perpendicular a r passando por B . Seja α plano determinado por s e t , que é perpendicular a r passando por A . Se $A \in r$ tome β e γ planos distintos passando por A e s e t perpendiculares a r em A em β e γ , respectivamente. Por fim, α é plano determinado por s e t .

1.5 Posições Relativas entre Planos no Espaço Euclidiano

Dois planos α e β são ditos **paralelos** quando não possuem pontos em comum (notação: $\alpha // \beta$). Também se diz que α é paralelo β .

Dois planos são ditos **concorrentes** (ou **secantes**) quando possuem uma única reta em comum. Também se diz que α é concorrente com β .

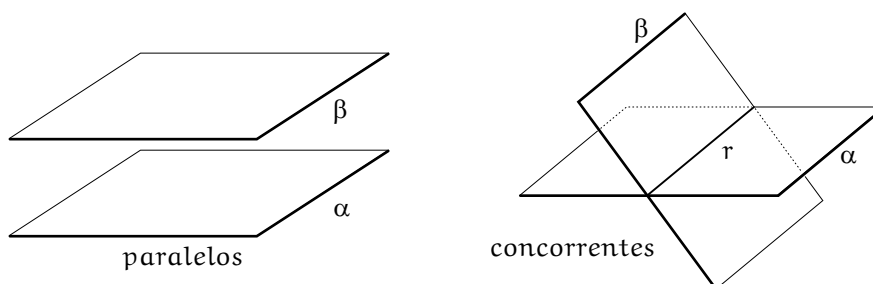


FIGURA 1.22: Planos paralelos e concorrentes.

Exercício Proposto

EXERCÍCIO 1.8) (a) Mostre que existem planos paralelos.

(b) Mostre que existem planos concorrentes.

Dica para (a): use o EXERCÍCIO 1.7.

Sejam α e β planos distintos. Utilizando o princípio lógico do “terceiro excluído”, temos duas possibilidades:

(1) $\alpha \cap \beta$ é vazio;

(2) $\alpha \cap \beta$ não é vazio.

No caso (1) temos a definição de planos paralelos cumprida.

No caso (2) temos dois subcasos possíveis:

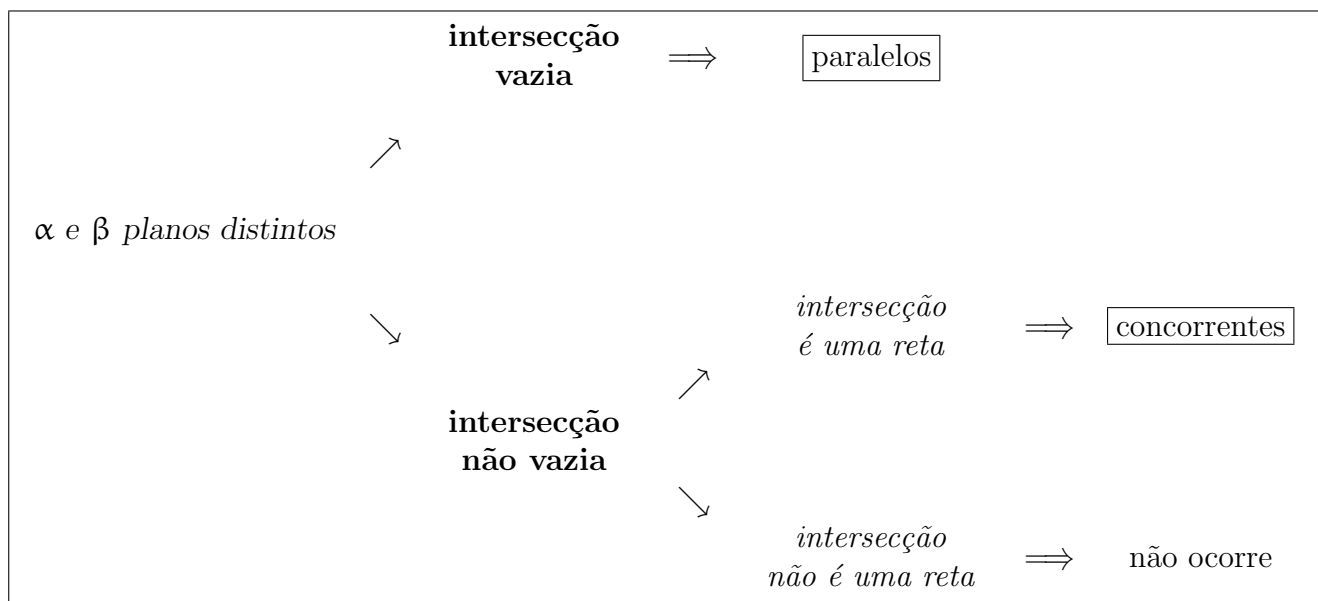
(2.1) $\alpha \cap \beta$ é uma reta;

(2.2) $\alpha \cap \beta$ não é uma reta.

No subcaso (2.1) temos a definição de planos concorrentes cumprida.

O subcaso (2.2) não ocorre, pois pelo Axioma **A6** a única possibilidade de dois planos distintos possuírem intersecção não vazia é quando essa intersecção é uma reta.

Em resumo:



Proposição 1.2 (Condições necessárias e suficientes para paralelismo entre planos) *Demonstre que dois planos α e β são paralelos se, e somente se, existem duas retas concorrentes de α que são paralelas a β .*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Sejam r e s duas retas quaisquer de α que sejam concorrentes (sempre existem: basta tomar três pontos não colineares em α). Como $\alpha // \beta$ temos $\alpha \cap \beta = \emptyset$ e, como $r, s \subset \alpha$ temos $r \cap \beta = s \cap \beta = \emptyset$, ou seja, $r, s // \beta$, como queríamos.

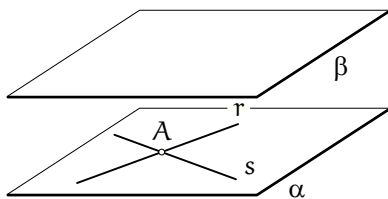


FIGURA 1.23: Considerando retas paralelas a plano.

($\Leftarrow$) Sejam r e s duas retas concorrentes de α que são paralelas a β . Desta forma, α e β são distintos. Suponhamos que α e β sejam concorrentes. Logo, existe a reta $t = \alpha \cap \beta$. O EXERCÍCIO 1.4 garante que $r \nparallel t$ e $s \nparallel t$. Logo, pela transitividade do paralelismo, $r \nparallel s$, uma contradição. Conclusão, α e β são paralelos, como queríamos. $\square$

Dois planos α e β são ditos **perpendiculares** ou **ortogonais** quando em um deles existir uma reta perpendicular ao outro (notação: $\alpha \perp \beta$).

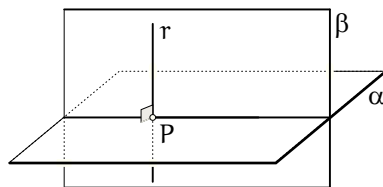


FIGURA 1.24: Planos perpendiculares.

1.6 Distâncias

PROJEÇÃO ORTOGONAL

A **projeção ortogonal de um ponto** A sobre um plano α é definida como sendo o pé da perpendicular, A' , baixada do ponto A ao plano α . Notação: $A' = \text{proj}_{\alpha} A$.

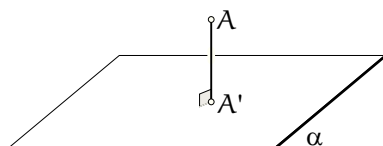


FIGURA 1.25: Projeção ortogonal de ponto sobre plano.

Em particular, se $A \in \alpha$, então $A' = A$.

Vimos no EXERCÍCIO 1.7 que, fixado A , a perpendicular $\overleftrightarrow{AA'}$ a α é única, ou seja, a projeção ortogonal A' é única.

A **projeção ortogonal de uma figura** $\mathcal{F}$ ⁽³⁾ sobre um plano α é definida com sendo o conjunto das projeções ortogonais dos pontos de $\mathcal{F}$ sobre α . Notação: $\mathcal{F}' = \text{proj}_{\alpha} \mathcal{F}$.

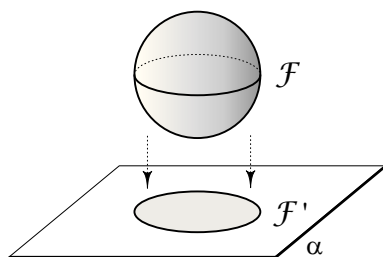


FIGURA 1.26: Projeção ortogonal de figura sobre plano.

Exercício Resolvido

EXERCÍCIO 1.9) A projeção ortogonal r' de uma reta r não perpendicular a um plano α sobre α é, também, uma reta.

Resolução.

De fato, é claro que se $r \subset \alpha$, então $r' = r$. Quando $r \not\subset \alpha$, tomemos $P, Q \in r$ fora de α e suas projeções ortogonais $P' = \text{proj}_{\alpha} P$ e $Q' = \text{proj}_{\alpha} Q$ sobre α .

Afirmamos que P, Q, P' e Q' são coplanares. De fato, supondo o contrário, os planos β_1 e β_2 que passam por P, P', Q' e por Q, P', Q' , respectivamente, seriam distintos mas concorrentes na reta $\overleftrightarrow{P'Q'}$.

³Entendemos por “figura” qualquer conjunto de pontos no espaço.

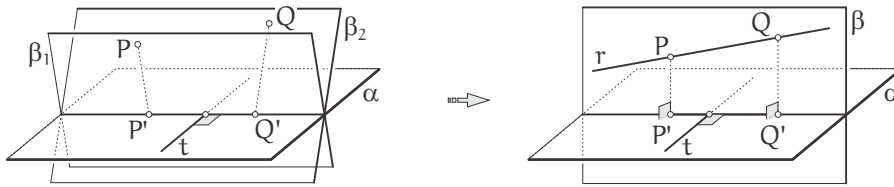


FIGURA 1.27: Supondo que os planos β_1 e β_2 sejam distintos.

Assim, uma reta t de α perpendicular a $\overleftrightarrow{P'Q'}$ seria ortogonal a $\overleftrightarrow{PP'}$, portanto, pelo Teorema Fundamental do Perpendicularismo, t seria perpendicular a β_1 . Analogamente, t seria perpendicular a β_2 . Portanto, β_1 e β_2 seriam planos concorrentes com uma perpendicular comum. Uma contradição, pelo EXERCÍCIO 1.7.

Conclusão: P, Q, P' e Q' são coplanares. Chamemos simplesmente de β o plano que passa por esses quatro pontos. Como $P', Q' \in \alpha \cap \beta$, o Axioma A5 garante que $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{P'Q'}$.

Por fim, afirmamos que $r' = \text{proj}_\alpha r = \overleftrightarrow{P'Q'}$. De fato, caso contrário, existiria um ponto $T \in r \subset \beta$ tal que $T' \notin \overleftrightarrow{P'Q'}$ e, portanto, $T' \notin \beta$. Aplicando o mesmo procedimento acima, temos que P, P', T e T' são coplanares. Mas β é o único plano que passa por P, P' e T (Axioma A4). Logo, $T' \in \beta$. Uma contradição. Conclusão: $r' = \text{proj}_\alpha r$ é uma reta. $\square$

Uma observação importante na resolução do EXERCÍCIO 1.9 é que r e $r' = \text{proj}_\alpha r$ são coplanares (ambas estão no plano β da resolução).

Já a projeção ortogonal de uma reta r perpendicular a um plano α sobre α é um único ponto.

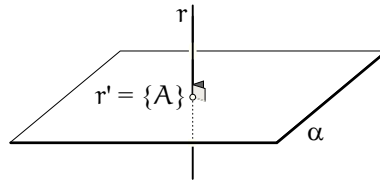


FIGURA 1.28: Projeção ortogonal de reta perpendicular a plano sobre o plano.

DISTÂNCIA DE PONTO A PLANO

Seja P um ponto e α um plano. A unicidade da projeção ortogonal permite que definamos a **distância de P a α** (notação $d(P, \alpha)$) como sendo o comprimento do segmento PP' , sendo $P' = \text{proj}_\alpha P$, ou seja, $d(P, \alpha) = PP'$.

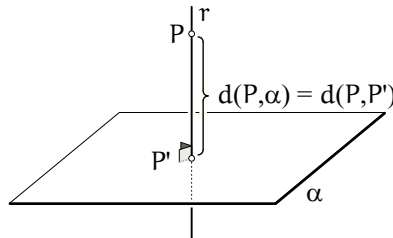


FIGURA 1.29: Distância de ponto a plano.

Em particular, se $P \in \alpha$, então $d(P, \alpha) = 0$.

É importante notar que de todos os segmentos ligando P a um ponto de α , o segmento PP' é o de menor comprimento (consequência do Teorema de Pitágoras). Aliás, essa é a ideia por trás do conceito de distância entre duas figuras quaisquer no espaço: se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são figuras no espaço, $d(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é definida com sendo o *ínfimo* do conjunto dos comprimentos de todos os segmentos que ligam um ponto de $\mathcal{F}$ a um ponto de $\mathcal{G}$. Observemos que devemos utilizar o *ínfimo* e não o *mínimo*, pois nem

sempre existe um segmento ligando um ponto de $\mathcal{F}$ a um ponto de $\mathcal{G}$ que tenha o menor comprimento possível. Por exemplo: na FIGURA 1.30 sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ dois discos abertos (isto é, sem o bordo) de raios 1 com centros distando 3. Temos $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 1$, mas não existe um segmento ligando um ponto de $\mathcal{F}$ a um ponto de $\mathcal{G}$ que tenha comprimento 1.

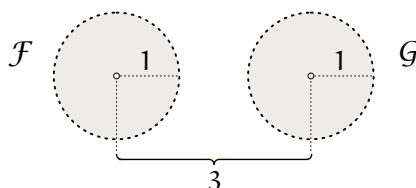


FIGURA 1.30: Analisando a distância entre discos abertos.

DISTÂNCIA DE RETA A PLANO

Seja r uma reta e α um plano.

Quando $r \cap \alpha \neq \emptyset$, definimos a **distância de r a α** (notação $d(r, \alpha)$) como sendo nula, ou seja, $d(r, \alpha) = 0$.

Quando $r \cap \alpha = \emptyset$, ou seja, quando r e α são paralelos, definimos a **distância de r a α** como sendo a distância de um ponto qualquer de r a α , ou seja, $d(r, \alpha) = d(P, \alpha)$, sendo $P \in r$ ponto arbitrário.

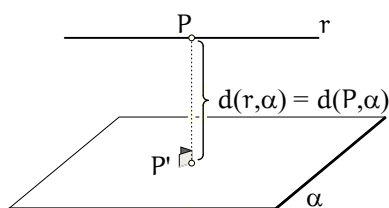


FIGURA 1.31: Distância entre reta e plano paralelos.

Observemos que a definição acima é coerente, pois quando r é paralela a α , todos os pontos de r estão à mesma distância de α .

De fato, suponhamos que existam $P, Q \in r$ tais que $d(P, \alpha) \neq d(Q, \alpha)$. Vimos no EXERCÍCIO 1.9 que P, Q, P' e Q' são coplanares e que $r' = \overleftrightarrow{P'Q'}$. Portanto, r e r' são coplanares. Assim, o quadrilátero $PP'Q'Q$ é plano mas não é um retângulo, o que significa que o ângulo $\widehat{P'PQ}$ não é reto e, conseqüentemente r e r' não são paralelas. portanto existe $\{A\} = r \cap r' \in \alpha$, ou seja, $r \cap \alpha \neq \emptyset$, uma contradição.

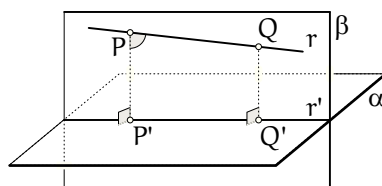


FIGURA 1.32: Supondo que $d(P, \alpha) \neq d(Q, \alpha)$.

DISTÂNCIA DE PLANO A PLANO

Sejam α e β planos distintos.

Quando $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, ou seja, quando α e β são concorrentes, definimos a **distância de α a β** (notação $d(\alpha, \beta)$) como sendo nula, ou seja, $d(\alpha, \beta) = 0$.

Quando $\alpha \cap \beta = \emptyset$, ou seja, quando α e β são paralelos, definimos a **distância de α a β** como sendo a distância de um ponto qualquer de α a β , ou seja, $d(\alpha, \beta) = d(P, \beta)$, sendo $P \in \alpha$ ponto arbitrário.

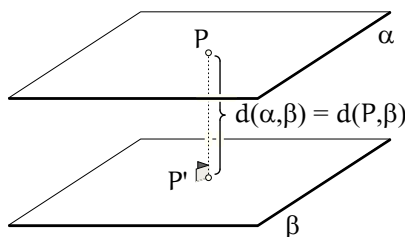


FIGURA 1.33: Distância entre planos paralelos.

Observemos que a definição acima é coerente, pois quando α é paralelo a β , todos os pontos de α estão à mesma distância de β .

De fato, suponhamos que existam $P, Q \in \alpha$ tais que $d(P, \beta) \neq d(Q, \beta)$. Como P e Q determinam uma reta $r \subset \alpha$, a mesma análise que fizemos acima permite concluir que $r \cap \beta \neq \emptyset$, ou seja, que $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, que é uma contradição.

DISTÂNCIA DE RETA A RETA

Sejam r e s retas distintas.

Quando r e s são coplanares, estamos na situação já estudada em Geometria Euclidiana Plana:

- r e s concorrentes: $d(r, s) = 0$.
- r e s paralelas: $d(r, s) = d(P, s)$, sendo $P \in r$ ponto arbitrário.

A situação mais interessante ocorre quando r e s não são coplanares, ou seja, quando r e s são reversas. Nesta situação, consideremos os seguintes exercícios.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1.10) Sejam r e s retas reversas. Mostre que existe e é único o plano que passa por s e é paralelo a r .

Resolução.

Existência:

Seja $P \in s$. Pelo 2º. Modo de Determinação de Planos existe um único plano β passando por r e P . Pelo Axioma **A8** (das paralelas), existe em β uma única reta t passando por P paralela a r . As retas t e s são concorrentes em P . Pelo 3º. Modo de Determinação de Planos existe um único plano α passando por s e t . Sendo r e s reversas, os planos α e β são distintos e, pelo Axioma **A6**, $t = \alpha \cap \beta$. Pela Proposição 1.1, de $r // t$ e $t \subset \alpha$ temos r paralela a α .

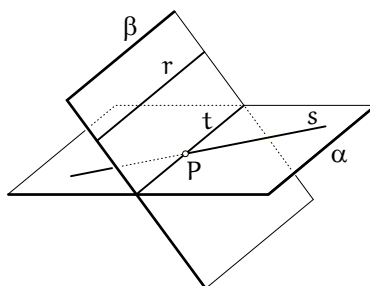


FIGURA 1.34: Determinando plano paralelo a uma de duas retas reversas.

Unicidade:

Aproveitando o ponto $P \in s$ e o plano β acima, suponhamos que existam α_1 e α_2 planos distintos passando por s ($s = \alpha_1 \cap \alpha_2$) e paralelos a r . Sejam $t_1 = \alpha_1 \cap \beta$ e $t_2 = \alpha_2 \cap \beta$. Logo, t_1 , t_2 e r são retas de β com t_1 e t_2 retas concorrentes em P . Logo, pelo Axioma **A8** $r \cap t_1 \neq \emptyset$ ou $r \cap t_2 \neq \emptyset$ (decorrência da unicidade da paralela). Assim, $r \cap \alpha_1 \neq \emptyset$ ou $r \cap \alpha_2 \neq \emptyset$, uma contradição. $\square$

EXERCÍCIO 1.11) Sejam r e s retas reversas. Mostre que existem e são únicos os planos paralelos passando por r e por s .

Resolução.

Existência: aproveitando o EXERCÍCIO 1.10: seja α plano passando por s e paralelo a r . Seja β plano passando por r e paralelo a s .

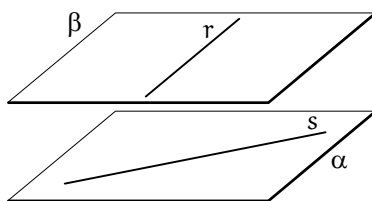


FIGURA 1.35: Planos paralelos passando por retas reversas.

Afirmção: α e β são paralelos.

De fato, caso contrário, α e β seriam concorrentes e existiria a reta $t = \alpha \cap \beta$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $r \cap t \neq \emptyset$ (pela transitividade do paralelismo, t não pode ser paralela a r e a s). Logo, $r \cap \alpha \neq \emptyset$, uma contradição. Conclusão: α e β são paralelos.

Unicidade: como no EXERCÍCIO 1.10. □

EXERCÍCIO 1.12) Sejam r e s retas reversas. Mostre que existe e é única a reta perpendicular comum a r e a s .

Resolução.

Existência: seja α o único plano paralelo a r passando por s (EXERCÍCIO 1.10).

Sejam $r' = \text{proj}_{\alpha} r$ e $\{Q\} = r' \cap s$. Tomemos $P \in r$ como sendo o pé da perpendicular baixada de Q a r .

Como r e r' são paralelas temos que $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular a r e a r' .

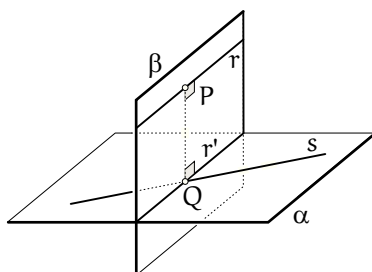


FIGURA 1.36: Encontrando a perpendicular comum às retas reversas.

Afirmção: $P' = \text{proj}_{\alpha} P$ é tal que $P' = Q$ e, portanto, $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular a s .

De fato, caso contrário, $P' \in r'$ seria diferente de Q e teríamos o triângulo PQP' com dois ângulos retos, uma contradição. Conclusão: $P' = Q$.

Com isso, $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular a r e a s .

Unicidade: Suponhamos que existam $\overleftrightarrow{P_1Q_1}$ e $\overleftrightarrow{P_2Q_2}$ distintas perpendiculares a r e a s com $P_1, P_2 \in r$ e $Q_1, Q_2 \in s$. Seja α plano paralelo a r passando por s . Seja $t // r$ contida em α . Logo, t e s são concorrentes sendo $\overleftrightarrow{P_1Q_1}$ e $\overleftrightarrow{P_2Q_2}$ ortogonais a ambas.

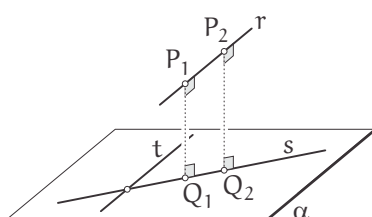


FIGURA 1.37: Provando a unicidade da perpendicular comum a retas reversas.

Pelo Teorema Fundamental do Perpendicularismo, $\overrightarrow{P_1Q_1}$ e $\overrightarrow{P_2Q_2}$ são perpendiculares a α , portanto, são paralelas, fazendo com que $r = \overrightarrow{P_1P_2}$ e $s = \overrightarrow{Q_1Q_2}$ sejam coplanares. Uma contradição. $\square$

Observações.

(1) Um fato importante decorrente da demonstração da unicidade no EXERCÍCIO 1.12: a reta perpendicular comum a duas retas reversas é perpendicular aos planos paralelos que passam por essas reversas.

(2) Outra observação importante decorrente das demonstrações dos EXERCÍCIOS 1.10, 1.11 e 1.12: sejam r e s retas reversas. A distância da reta r ao plano que passa por s e é paralelo a r é a mesma que a distância entre os planos paralelos que passam por r e por s que, por sua vez, também é igual ao comprimento do segmento PQ , sendo $\overrightarrow{PQ}$ a reta perpendicular comum a r e a s com $P \in r$ e $Q \in s$.

Com base no que desenvolvemos acima, vamos definir a **distância entre as retas reversas** r e s como sendo o comprimento do segmento PQ perpendicular comum a r e a s com $P \in r$ e $Q \in s$.

Exercício Resolvido

EXERCÍCIO 1.13) Considere duas retas r e s reversas cuja distância entre elas é a e a medida de seu ângulo é θ . Tome em r um ponto B situado à distância b da perpendicular comum às reversas. Qual é a distância de B à reta s ?

Resolução.

Chamemos de C o pé da perpendicular baixada de B até a reta s . Logo, $x = d(B, s) = d(B, C)$ é a distância procurada.

Sejam α e β os planos paralelos que contêm r e s (EXERCÍCIO 1.11). Já observamos que o segmento RS perpendicular à reta r e à reta s é perpendicular aos planos α e β .

Sejam $r' = \text{proj}_\beta r$ e $s' = \text{proj}_\alpha s$. Logo, $B' = \text{proj}_\beta B \in r'$ e $C' = \text{proj}_\alpha C \in s'$.

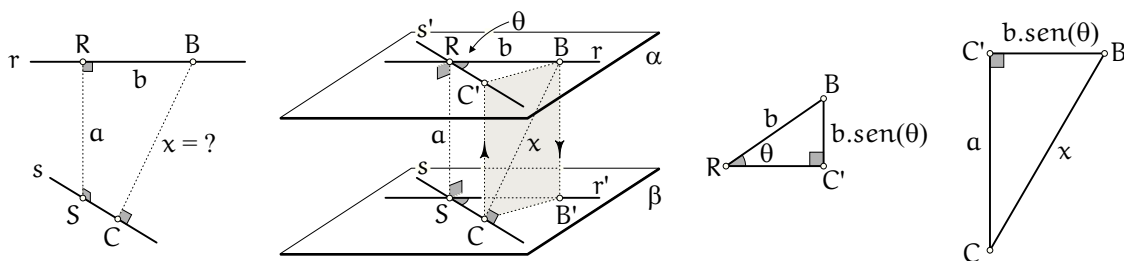


FIGURA 1.38: Visualizando melhor a distância de B a s .

Já vimos que r e r' são coplanares e, sendo α paralelo a β , temos r paralela a r' . Analogamente, s é paralela a s' . Logo, $RSCC'$, $BB'CC'$ e $BB'SR$ são retângulos planos ortogonais a α e β e, portanto, $RS \equiv BB' \equiv CC'$. Em particular, s é perpendicular a CC' . Como s também é perpendicular a BC , o Teorema Fundamental do Perpendicularismo garante que s é perpendicular ao retângulo $BB'CC'$ e, em particular, s é perpendicular a CB' . Consequentemente o triângulo SCB' é retângulo em C . Sendo $SCB' \equiv RC'B$ temos que $RC'B$ é triângulo retângulo em C' .

O ângulo entre r e s (recorde a definição) é o mesmo ângulo entre r e s' (ou entre r' e s). Seja θ a medida desse ângulo.

Desta forma, no triângulo retângulo $RC'B$ temos b como a medida da hipotenusa e θ como medida do ângulo $\widehat{R}$. Logo, o cateto $C'B$ mede $b \sin(\theta)$.

Por fim, no triângulo retângulo $CC'B$ temos o cateto $C'B$ medindo $b \sin(\theta)$, o cateto CC' medindo a e a hipotenusa BC medindo x . Pelo Teorema de Pitágoras $x = \sqrt{a^2 + b^2 \sin^2(\theta)}$.

Uma observação: a resolução acima consiste em construir um prisma triangular reto $RBC'SB'C$ de altura a (estudaremos prismas mais adiante). O comprimento da diagonal de uma das faces é o objetivo desse exercício. $\square$

1.7 Ângulo entre Reta e Plano e Ângulo entre Planos

Seja r uma reta não paralela a um plano α .

Quando r é perpendicular a α dizemos que r forma **ângulo reto** com α .

Quando $r \subset \alpha$ dizemos que r forma **ângulo nulo** com α .

Quando r e α são concorrentes (não perpendiculares), definimos o **ângulo entre r e α** como sendo o ângulo entre r e $r' = \text{proj}_{\alpha} r$.

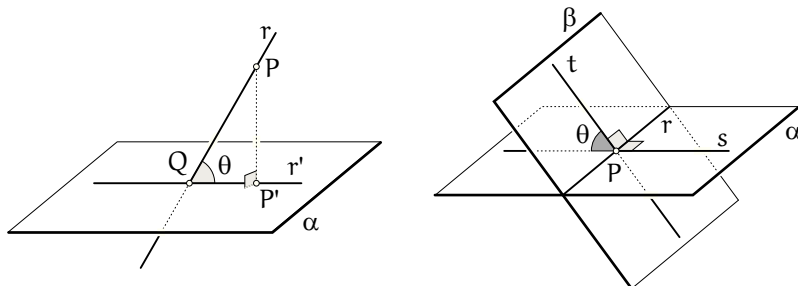


FIGURA 1.39 Ângulo entre reta e plano e entre planos.

Sejam α e β planos concorrentes. Logo, $r = \alpha \cap \beta$ é uma reta. Sejam $P \in r$, $s \subset \alpha$ e $t \subset \beta$ retas perpendiculares a r em P . Definimos o **ângulo entre α e β** como sendo o ângulo entre s e t .

Observemos que a definição acima independe de P . De fato, se $P_1 \in r$ é distinto de P , $s_1 \subset \alpha$ e $t_1 \subset \beta$ são retas perpendiculares a r em P_1 , então $s // s_1$ e $t // t_1$. Logo, os ângulos formados por s e t são ordenadamente congruentes aos ângulos formados por s_1 e t_1 .

Observemos que, na situação em que o ângulo entre α e β é reto, estamos de acordo com a definição, já apresentada, de planos perpendiculares (ou ortogonais).

A reta s da definição acima também é, às vezes, chamada de *reta de maior declive* de α em relação a β pelo motivo exposto no EXERCÍCIO 1.14.

Exercícios Propostos

EXERCÍCIO 1.14) Sejam α e β planos concorrentes, não ortogonais, com $r = \alpha \cap \beta$ reta de intersecção e $P \in r$. Seja $s \subset \beta$, $s \neq r$, reta arbitrária em β passando por P . Mostre que o ângulo formado por s e por $s' = \text{proj}_{\alpha} s$ é menor do que ou igual ao ângulo formado por α e β .

EXERCÍCIO 1.15) Sejam α e β planos concorrentes com $r = \alpha \cap \beta$ reta de intersecção e $P \in r$. Fixemos uma reta $t \subset \beta$ perpendicular a r em P . Por fim, tomemos uma reta $s \subset \alpha$ arbitrária passando por P . Mostre que o ângulo entre s e t é maior do que ou igual ao ângulo entre α e β .

Exercício Resolvido

EXERCÍCIO 1.16) Demonstre que se a reta r intersecta o plano α no ponto A e r não é perpendicular a α , então o ângulo entre r e $r' = \text{proj}_{\alpha} r$ é menor do que ou igual ao ângulo entre r com qualquer outra reta s do plano α que passa por A .

Resolução.

Primeiramente, observemos que a hipótese de r não ser perpendicular a α garante que r' seja, de fato, uma reta e, portanto, faça sentido falar no ângulo entre r e r' .

Consideremos o caso em que $s \neq r'$.

Chamemos de θ a medida do ângulo entre r e α e de γ a medida entre r e s . Sejam $P \in r$ tal que $P \neq A$ e $P' = \text{proj}_{\alpha} P \in r'$. Tomemos $B \in s$ tal que $AB \equiv AP'$ e tal que γ seja a medida do ângulo $\widehat{BAP}$.

Com isso, o triângulo $PP'B$ é retângulo em P' e, portanto, a hipotenusa PB é maior do que o cateto PP' .

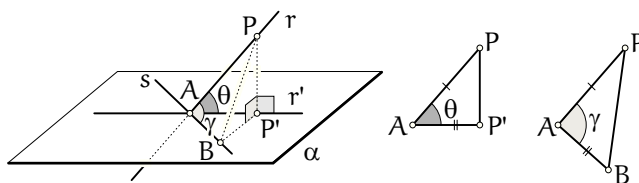


FIGURA 1.40: Aplicando o “Teorema da Dobradiça”.

Sendo $PP'A$ e PBA triângulos tais que PA é lado comum, $AP' \equiv AB$ e $PP' < PB$, temos $\widehat{PAP'} < \widehat{PAB}$, ou seja, $\theta < \gamma$ (teorema de Geometria Euclidiana Plana, também conhecido como “Teorema da Dobradiça” - veja a seção “Desigualdade Triangular” na referência [14]).

No caso em que $s = r'$ temos, obviamente que $\theta = \gamma$. □

1.8 Ângulos Poliédricos

A reunião de dois semiplanos não coplanares com uma mesma reta de origem é chamada de **ângulo diédrico** ou **diedro**.

Cada um dos semiplanos de um diedro são chamados de **faces** e a reta de origem é a **aresta**.

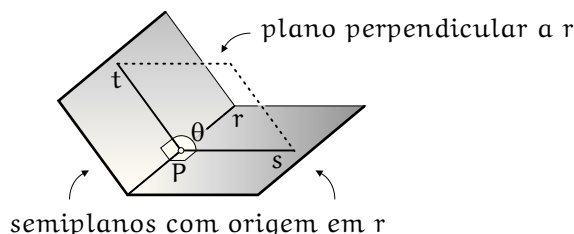


FIGURA 1.41: Diedro.

Um diedro separa o espaço em duas regiões desconexas: uma convexa e a outra não convexa. A região convexa é chamada de **interior** do diedro. A reunião de um diedro com seu interior é chamada de **setor diedral**.

A **medida** de um diedro é a medida de um ângulo obtido pela intersecção do diedro com um plano perpendicular à sua aresta. Ao contrário da noção de ângulo entre planos, um diedro pode ser **obtusos**.

É fácil mostrar que a medida de um diedro não depende do plano perpendicular a sua aresta escolhido para fazer a intersecção. Nesse sentido, a medida de um diedro, conforme acima, está *bem definida*.

Dois diedros são **congruentes** quando possuem a mesma medida.

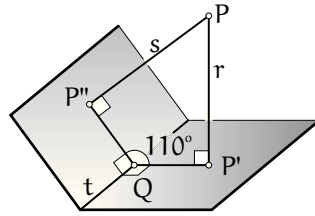
Exercício Resolvido

EXERCÍCIO 1.17) De um ponto P no interior a um diedro de medida 110° traçam-se as perpendiculares r e s às faces. Calcule a medida do ângulo formado por r e s .

Resolução.

Sejam P' e P'' pontos de intersecção de r e s com as faces do diedro. Sejam ainda α o plano determinado por r e s e, por fim, t a aresta do diedro.

Temos que t é ortogonal às retas concorrentes r e s . Pelo Teorema Fundamental do Perpendicularismo temos que t é perpendicular a α . Seja Q ponto de intersecção de t com α . Com isso, a medida do ângulo $P'QP''$ é a medida do diedro, que é de 110° .

FIGURA 1.42: O quadrilátero $PP'QP''$ plano.

Desta forma, temos um quadrilátero $PP'QP''$ contido no plano α , sendo que esse quadrilátero possui dois ângulos retos em P' e P'' , um ângulo de medida 110° em Q e, portanto, o ângulo $\hat{P}$ deve medir 70° .

Conclusão: o ângulo entre r e s mede 70° . $\square$

Recordemos que um *setor angular* é uma região plana composta por um ângulo e seu interior, e que a *medida* de um setor angular é a medida de seu ângulo.

Abaixo, consideramos apenas setores angulares “não degenerados”, ou seja, não nulos e não rasos.

A reunião dos setores angulares $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ distintos, com $n \geq 3$, tais que:

- (1) todos possuem um mesmo vértice V em comum;
 - (2) σ_i e σ_{i+1} , com $i = 1, \dots, n$, (sendo $\sigma_{n+1} = \sigma_1$) não são coplanares;
 - (3) os lados de σ_i , com $i = 1, \dots, n$, são também lados de, e apenas de, σ_{i-1} e σ_{i+1} (sendo $\sigma_0 = \sigma_n$ e $\sigma_{n+1} = \sigma_1$);
 - (4) a intersecção de dois setores angulares quaisquer ou é o vértice V ou é um lado comum;
- é chamada de **ângulo poliédrico** de **vértice** V (ou **ângulo sólido** de vértice V).

Os setores angulares que compõem um ângulo poliédrico são chamados de suas **faces**.

Os lados dos setores angulares que compõem um ângulo poliédrico são chamados de suas **arestas**.

Sendo assim, um ângulo poliédrico possui n arestas que concorrem no vértice V .

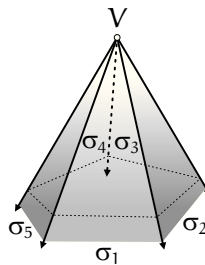


FIGURA 1.43: Ângulo Poliédrico.

Observemos que a condição (2) da definição acima diz que faces vizinhas de um ângulo poliédrico não podem ser coplanares. Isso significa que faces vizinhas de um ângulo poliédrico sempre determinam um diedro (que as contém).

Já a condição (3) diz que uma aresta de ângulo poliédrico pertence exatamente a duas faces.

Por fim, a condição (4) organiza as faces de um ângulo poliédrico de tal forma que não haja autointersecção de seus interiores.

Um ângulo poliédrico recebe o nome de acordo com a quantidade n de arestas:

n	Nomenclatura
3	Ângulo triédrico (ou <i>triedro</i>)
4	Ângulo quadriédrico
5	Ângulo pentaédrico
6	Ângulo hexaédrico
$\vdots$	$\vdots$

Um ângulo poliédrico separa o espaço em duas regiões desconexas. Quando uma dessas regiões é convexa, dizemos que o ângulo poliédrico é **convexo** e a referida região é o **interior** do ângulo poliédrico.

Notemos que, geometricamente, o vértice de um ângulo poliédrico convexo forma, necessariamente, um “bico”.

Cabe ainda observar que um triedro é sempre convexo.

Também é interessante recordar que cada octante do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais da Geometria Analítica é delimitado por um triedro (às vezes chamado de *triedro tri-retângulo*).

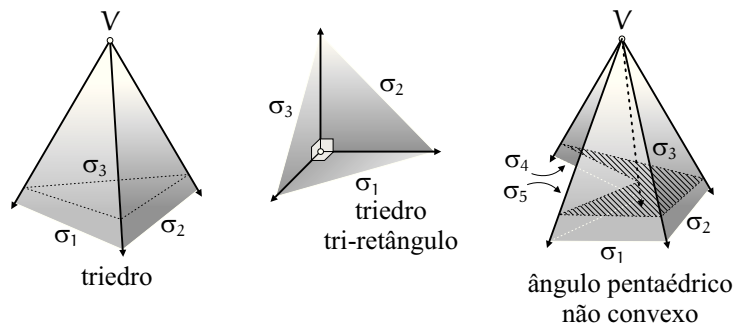


FIGURA 1.44: Alguns ângulos poliédricos.

Um conceito importante utilizado adiante neste texto é o de congruência de ângulos poliédricos.

Dois ângulos poliédricos são **congruentes** quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre as arestas de um e as arestas do outro, de modo que as faces e os diedros correspondentes sejam ordenadamente congruentes.

Geometricamente ângulos poliédricos congruentes são iguais ou “cópia um do outro”, ou seja, é possível levar um no outro por meio de um movimento rígido (sem distorções) no espaço.

A demonstração do teorema abaixo pode ser encontrada na referência [5].

Teorema 1.2 (1) *Sejam $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ as medidas das faces de um ângulo poliédrico convexo. Então:*

(i) $\varphi_i < \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \varphi_k$ para qualquer $i = 1, \dots, n$, ou seja, a medida de uma face qualquer é menor do que a soma das medidas das demais faces;

(ii) $\sum_{k=1}^n \varphi_k^\circ < 360^\circ$ (ou $\sum_{k=1}^n \varphi_k < 2\pi$ radianos), ou seja, suas faces “não cobrem um plano”;

(2) *Sejam $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ números reais tais que:*

$$\left\{ \begin{array}{l} 0^\circ < \varphi_i^\circ < 180^\circ \text{ (ou } 0 < \varphi_i < \pi \text{) para qualquer } i; \\ \varphi_i < \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \varphi_k \text{ para qualquer } i; \\ \sum_{k=1}^n \varphi_k^\circ < 360^\circ \text{ (ou } \sum_{k=1}^n \varphi_k < 2\pi \text{ radianos).} \end{array} \right.$$

Então, existe um ângulo poliédrico convexo com n arestas cujas faces medem φ_i , $i = 1, \dots, n$.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1.18) Existe triedro cujas faces medem:

(a) 70° , 80° e 130° ?

(b) 40° , 75° e 120° ?

(c) 80° , 135° e 150° ?

Resolução.

(a) Os números reais 70, 80 e 130 satisfazem o item (2) do teorema acima. Logo, existe triedro com essas medidas.

(b) Os números reais 40, 75 e 120 são tais que $120 > 40 + 75 = 115$. A contrapositiva do item (1) do teorema acima garante que não existe triedro com essas medidas.

(c) Os números 80, 135 e 150 são tais que $80 + 135 + 150 = 365 > 360$. A contrapositiva do item (1) do teorema acima garante que não existe triedro com essas medidas. $\square$

EXERCÍCIO 1.19) As faces de um triedro medem 60° e 85° . Dê o intervalo de variação da medida da terceira face.

Seja x° a medida da terceira face. De acordo com o teorema acima devemos ter:

$$0^\circ < x^\circ < 180^\circ$$

$$x^\circ < 60^\circ + 85^\circ \Rightarrow x^\circ < 145^\circ$$

$$85^\circ < 60^\circ + x^\circ \Rightarrow 25^\circ < x^\circ$$

$$60^\circ < 85^\circ + x^\circ \Rightarrow -25^\circ < x^\circ$$

$$60^\circ + 85^\circ + x^\circ < 360^\circ \Rightarrow x^\circ < 215^\circ$$

Conclusão: $25 < x < 145$. $\square$

Exercício Proposto

EXERCÍCIO 1.20) As faces de um ângulo pentaédrico convexo medem 10° , 20° , 30° , 40° e x° . Dê o intervalo de variação de x .

Resposta: $0 < x < 100$.

Capítulo 2

Poliedros, Prismas e Pirâmides

2.1 Poliedros

A DEFINIÇÃO DE POLIEDRO

Recordemos a definição de *polígono*:

Sejam $A_1, \dots, A_n$ com $n \geq 3$ pontos distintos de um plano tais que os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ cumprem as seguintes propriedades:

- (i) Nenhum par de segmentos se autointersecciona, a não ser em um extremo.
- (ii) Nenhum par de segmentos com extremo comum é colinear.

A reunião dos segmentos acima é chamada de *polígono* de vértices $A_1, \dots, A_n$ e lados $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ e indicamos por $A_1A_2 \dots A_n$.

Observemos que, como consequência da definição acima, um polígono é uma *linha poligonal plana fechada* e, portanto, determina no plano duas regiões: uma limitada (chamada de *interior* do polígono, e cuja fronteira é o próprio polígono) e outra não limitada. Quando o interior de um polígono é uma região convexa do plano, dizemos que o polígono é *convexo*.

Por fim, recordemos que é comum nos textos de geometria utilizar a palavra “*polígono*” com dois sentidos: (1) de acordo com a definição acima, ou seja, polígono como reunião de segmentos e; (2) como reunião do polígono (segmentos) com seu interior (superfície). É isso que permite que se fale, por exemplo, em *área* de um polígono.



Poliedro é uma reunião $\mathcal{P}$ de um número finito de polígonos planos, chamados de **faces**, onde:

- (a) Cada lado de um desses polígonos é, também, lado de um, e apenas de um, outro polígono.
- (b) A intersecção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice comum, ou é vazia.

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado de **aresta** de $\mathcal{P}$ e cada vértice de uma face é um **vértice** de $\mathcal{P}$.

- (c) Sejam $A, B \in \mathcal{P}$ pontos distintos dos vértices de $\mathcal{P}$. É sempre possível traçar uma linha poligonal sobre $\mathcal{P}$, ligando A a B , sem passar por vértices de $\mathcal{P}$.

Observemos que as faces de um poliedro, que incidem em um determinado vértice, dão origem a pelo menos um ângulo poliédrico no espaço. Sendo assim, para que a definição de poliedro acima se cumpra, devemos ter, no mínimo, *quatro* polígonos.

Todo poliedro determina no espaço duas regiões: uma limitada, cuja fronteira é o próprio poliedro, e outra não limitada. A região limitada é chamada de **interior** desse poliedro. Dizemos que o poliedro é **convexo** quando seu interior for uma região convexa do espaço.

Assim como observamos no caso dos polígonos, é comum nos textos de geometria confundir a reunião de um poliedro e seu interior com o próprio poliedro. É isso que permite que se fale, como veremos adiante, em *volume* de um poliedro.

A definição de poliedro pode ser mais, ou menos, restritiva conforme o nível de estudos que se queira empreender. A que demos acima teve por objetivo estabelecer que um poliedro tenha sempre uma região interior *conexa*. Vejamos algumas situações que são evitadas com a definição acima:

(i) A exigência de que poliedro seja reunião de polígonos evita que a figura abaixo seja poliedro:

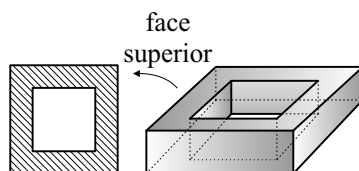


FIGURA 2.1: Não é Poliedro.

(ii) A exigência de que cada lado de um polígono seja lado de outro polígono evita que as figuras abaixo sejam poliedros:

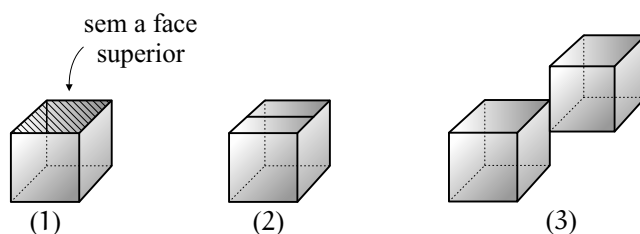


FIGURA 2.2: Não são poliedros.

(iii) A exigência de que cada lado de um polígono seja lado de apenas um outro polígono evita que a figura abaixo seja poliedro:

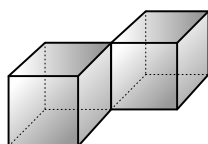


FIGURA 2.3: Não é poliedro.

(iv) A exigência de que a intersecção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice comum, ou é vazia organiza a disposição das faces e evita que as figuras abaixo sejam poliedros:

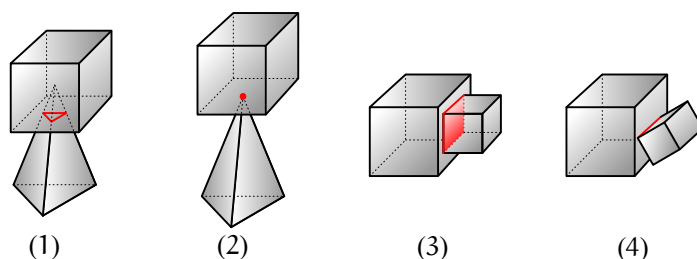


FIGURA 2.4: Não são poliedros.

A exigência (iv) também evita que os objetos (2) e (3) da FIGURA 2.1 sejam poliedros.

(v) A exigência de que seja sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice, evita que as figuras abaixo sejam poliedros:

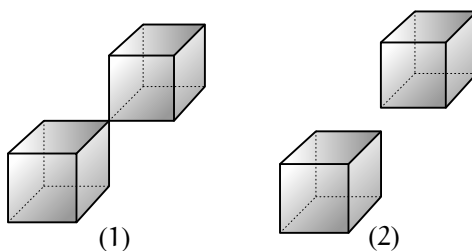


FIGURA 2.5: Não são poliedros.

A exigência (v) também evita que o objeto (2) da FIGURA 2.4 seja poliedro.

Observemos que o nível de exigência da definição acima ainda permite que alguns objetos “estranhos” sejam poliedros, como por exemplo:

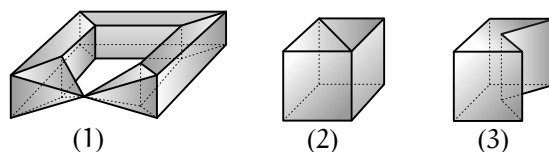


FIGURA 2.6: São poliedros.

Se quiséssemos ser mais exigentes ainda e não permitir que os objetos acima sejam poliedros, deveríamos acrescentar à definição as seguintes condições:

- Todas as faces sejam convexas (isso excluiria o objeto (3) da figura acima).
- Duas faces adjacentes não sejam coplanares (isso excluiria o objeto (2) da figura acima).
- Dado um vértice, as faces que incidem nele estejam contidas nas faces de um único ângulo poliédrico com esse vértice. (isso excluiria o objeto (1) da figura acima).

É importante destacar que em estudos mais gerais, objetos como os das FIGURAS 2.3 e 2.5 são perfeitamente considerados como poliedros.

Já a condição de que um poliedro seja convexo é bastante restritiva e evita vários dos objetos “estranhos” que ilustramos acima, inclusive o objeto (1) da FIGURA 2.6. Entretanto, podemos ter um poliedro “bem comportado” que não seja convexo, como o da figura abaixo.

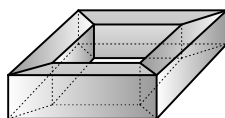


FIGURA 2.7: Poliedro não convexo.

Uma boa sugestão de leitura sobre a discussão da definição de poliedro pode ser encontrada na referência [12].

A convexidade é uma condição importante para o desenvolvimento que faremos adiante. Por isso, vamos considerar uma propriedade equivalente à condição de convexidade em poliedros que nos será muito útil na demonstração da *Relação de Euler* para poliedros convexos.

Um poliedro é convexo quando toda reta não paralela a qualquer de suas faces ⁽¹⁾ intersecta sua superfície em, no máximo, dois pontos.

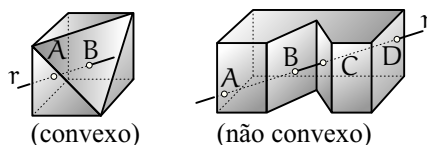


FIGURA 2.8: Um outro modo de ver a convexidade em poliedros.

¹Estamos entendendo que uma reta é paralela a uma face de poliedro quando for paralela ao plano que essa face determina.

Alguns poliedros possuem nomenclatura própria que varia de acordo com a quantidade de faces:

Número de Faces	Nome
4	tetraedro
5	pentaedro
6	hexaedro
7	heptaedro
8	octaedro
9	eneaedro
10	decaedro
11	undecaedro
12	dodecaedro
20	icosaedro

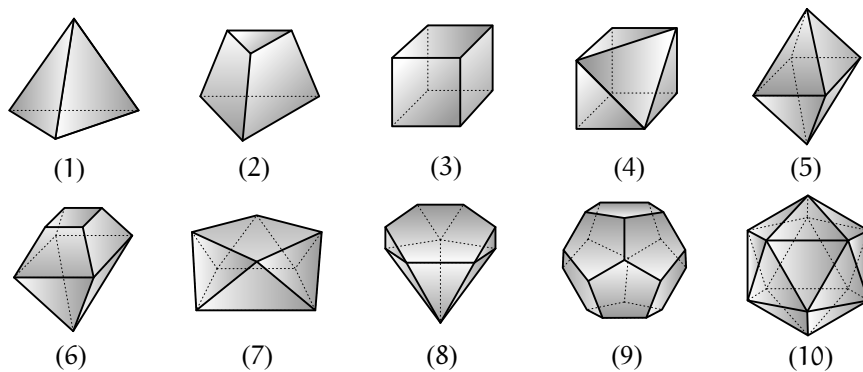


FIGURA 2.9: Poliedros.

Observemos que o procedimento de “cortar um bico” de um poliedro convexo de F faces gera um novo poliedro convexo de $F + 1$ faces. Foi esse o procedimento que empregamos para construir o poliedro (2) a partir do (1), o poliedro (4) a partir do (3) e o poliedro (6) a partir do (5) na figura acima.

O decaedro (7) da figura acima foi construído a partir de dois quadrados paralelos como sendo as faces superior e inferior. Porém, a face superior foi girada de 45° em relação a face inferior. Por fim, as faces laterais são todas triangulares, ligando os vértices do quadrado superior aos vértices do quadrado inferior. Um poliedro construído dessa maneira pertence a uma classe de poliedros chamados de *antiprismas*. Em particular, o antiprisma decaédrico (7) acima também recebe o nome de *pseudocubo*.

Outra observação interessante é que os poliedros (1), (3), (5), (9) e (10) podem ser construídos apenas com polígonos regulares. Voltaremos a falar desse tipo de poliedro mais adiante.

A RELAÇÃO DE EULER

Teorema 2.1 (relação de Euler) *Em todo poliedro convexo vale $V - A + F = 2$, sendo V , A e F seus números de vértices, arestas e faces, respectivamente.*

Demonstração.

Sejam $n_1, \dots, n_F$ o número de lados de cada uma das F faces de um poliedro convexo.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n - 2) \cdot 180^\circ$, temos que a soma S das medidas dos ângulos das faces do poliedro será:

$$\begin{aligned}
 S &= (n_1 - 2) \cdot 180^\circ + (n_2 - 2) \cdot 180^\circ + \dots + (n_F - 2) \cdot 180^\circ \\
 &= ((n_1 + n_2 + \dots + n_F) - (2 + 2 + \dots + 2)) \cdot 180^\circ \\
 &= (2A - 2F) \cdot 180^\circ \\
 &= (A - F) \cdot 360^\circ
 \end{aligned}$$

Iremos fazer a soma das medidas dos ângulos internos das faces do poliedro convexo de outro modo.

Consideremos um plano α que não intersecta o poliedro e tal que se r é uma reta perpendicular a α , então r não é paralela a qualquer face do poliedro. Isso sempre é possível de ser feito, pois a quantidade de faces do poliedro é finita.

Sendo o poliedro convexo, qualquer reta $s \nparallel r$ intersecta a superfície do poliedro em, no máximo, dois pontos.

Para facilitar o desenvolvimento do raciocínio, imaginemos o plano α na “horizontal”, com o poliedro acima de α e com o “sol brilhando verticalmente” sobre o poliedro (ou seja, os “raios do sol” seriam paralelos a r).

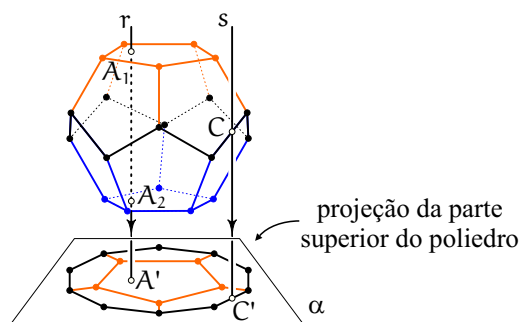


FIGURA 2.10: *Projetando ortogonalmente parte do poliedro convexo.*

Vamos chamar os vértices que estão na “parte superior” do poliedro de “vértices iluminados”. Suponhamos que estes sejam em número de V_0 (vértices de cor laranja na figura). Os vértices que estão na “parte inferior” do poliedro serão chamados de “vértices sombrios”. Suponhamos que estes sejam em número de V_1 (vértices azuis na figura). Há também os vértices que estão na fronteira da parte superior com a parte inferior, que serão chamados de “vértices de contorno”. Suponhamos que estes sejam em número de V_2 (vértices pretos na figura).

Notemos que, quando uma reta paralela a r intersecta a superfície do poliedro em dois pontos, um deles está na parte superior e o outro na parte inferior. Quando essa reta intersecta a superfície do poliedro em apenas um ponto, este ponto está na fronteira das partes superior e inferior.

Observemos que as projeções dos vértices iluminados ou dos vértices sombrios no plano α situam-se no interior da projeção da parte superior ou inferior (que são polígonos de V_2 lados em α). As projeções dos vértices de contorno estão na fronteira da projeção de cada uma das partes.

Temos, portanto, que $V = V_0 + V_1 + V_2$.

Observemos, ainda, que a projeção de um polígono (face) com n lados do poliedro em α é, também, um polígono com n lados. Essa observação decorre do fato de que o plano de uma face do poliedro não é perpendicular a α . Sendo assim, a soma das medidas dos ângulos de uma face $((n - 2) \cdot 180^\circ)$ é a mesma que a soma das medidas dos ângulos da projeção dessa face em α .

Concluimos, portanto, que a soma S das medidas dos ângulos das faces do poliedro é a mesma que a soma das medidas dos ângulos das projeções das faces em α . Façamos essa última soma:

$$\begin{aligned} S &= [V_0 \cdot 360^\circ + (V_2 - 2) \cdot 180^\circ] + [V_1 \cdot 360^\circ + (V_2 - 2) \cdot 180^\circ] \\ &= (V_0 + V_1 + V_2 - 2) \cdot 360^\circ \\ &= (V - 2) \cdot 360^\circ \end{aligned}$$

sendo que o primeiro colchete refere-se à projeção da parte superior do poliedro com sua fronteira. O segundo colchete refere-se à projeção da parte inferior do poliedro com sua fronteira.

Sendo assim, temos

$$(A - F) \cdot 360^\circ = (V - 2) \cdot 360^\circ \Rightarrow V - A + F = 2,$$

como queríamos. □

Um poliedro que satisfaz $V - A + F = 2$ é chamado de **poliedro euleriano**. Sendo assim, o teorema acima afirma que todo poliedro convexo é euleriano. A recíproca desse resultado é claramente falsa, ou seja, dados $V, A, F \in \mathbb{N}$ tais que $V - A + F = 2$ não é garantida a existência de um poliedro com essas quantidades de vértices, aresta e faces e, mesmo no caso em que existe o poliedro, não é garantido que ele seja convexo. Por exemplo, se tomarmos $V = 6$, $A = 7$ e $F = 3$ não existe tal poliedro, pois, para ser poliedro, o número mínimo de faces é 4. Já a FIGURA 2.8 acima ilustra um poliedro não convexo com $V = 14$, $A = 21$ e $F = 9$, portanto, com $V - A + F = 2$. Veremos adiante condições necessárias e suficientes para a existência de poliedros convexos dados V , A e F .

Corolário 2.1 *Em um poliedro convexo, a soma das medidas de todos os ângulos de suas faces é $(V - 2) \cdot 360^\circ$ (ou $2\pi(V - 2)$ radianos), sendo V o número de vértices do poliedro.*

Demonstração.

É a segunda parte da demonstração da Relação de Euler que fizemos acima. Mas podemos chegar nela usando a primeira parte da demonstração, onde provamos que $S = (A - F) \cdot 360^\circ$, junto com $V - A + F = 2$. □

Teorema 2.2 (condições necessárias e suficientes para existência de poliedros convexos) *Existe um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces se, e somente se:*

- (i) $V - A + F = 2$.
- (ii) $A \geq 6$.
- (iii) $A + 6 \leq 3F \leq 2A$.
- (iv) $A + 6 \leq 3V \leq 2A$.

Demonstração: Revista do Professor de Matemática n°. 47, artigo “ $V - A + F = 2$. Existe o poliedro?” do prof. Eduardo Wagner (referência [13]).

Obs. Na demonstração desse teorema há um *algoritmo* que permite a construção do poliedro, caso ele exista.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 2.1) Existe poliedro convexo com exatamente 6 faces quadriláteras e 2 faces hexagonais?
Resolução.

O número de faces é $F = 8$ (octaedro). Precisamos do número de arestas e vértices:

$$A = \frac{6 \cdot 4 + 2 \cdot 6}{2} = 18$$

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V = 12$$

Logo, precisamos saber se existe poliedro convexo tal que $F = 8$, $V = 12$ e $A = 18$.

A condição $V - A + F = 2$ já foi imposta para deduzirmos que $V = 12$.

A condição $A = 18 \geq 6$ ocorre.

A condição $A + 6 \leq 3F \leq 2A \Rightarrow 18 + 6 \leq 3 \cdot 8 \leq 2 \cdot 18$ ocorre.

A condição $A + 6 \leq 3V \leq 2A \Rightarrow 18 + 6 \leq 3 \cdot 12 \leq 2 \cdot 18$ ocorre.

Assim, pelo teorema acima, existe poliedro com as características enunciadas.

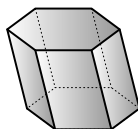


FIGURA 2.11: Um poliedro que satisfaz o enunciado.

Acima uma ilustração do poliedro. □

Para os próximos exercícios: um vértice de poliedro no qual incidem exatamente 3 arestas, chamamos de **vértice triédrico**. Se forem 4 arestas, chamamos de **vértice quadriédrico**. Se forem 5 arestas, chamamos de **vértice pentaédrico**. E assim por diante.

EXERCÍCIO 2.2) Existe poliedro convexo com exatamente 10 vértices, sendo 4 triédricos, 4 quadriédricos e 2 pentaédricos?

Resolução.

Temos $V = 10$. Precisamos do número de arestas e faces:

$$A = \frac{4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{2} = 19$$

$$V - A + F = 2 \Rightarrow F = 11$$

Logo, precisamos saber se existe poliedro convexo tal que $F = 11$ (undecaedro), $V = 10$ e $A = 19$.

A condição $V - A + F = 2$ já foi imposta para deduzirmos que $F = 11$.

A condição $A = 19 \geq 6$ ocorre.

A condição $A + 6 \leq 3F \leq 2A \Rightarrow 19 + 6 \leq 3 \cdot 11 \leq 2 \cdot 19$ ocorre.

A condição $A + 6 \leq 3V \leq 2A \Rightarrow 19 + 6 \leq 3 \cdot 10 \leq 2 \cdot 19$ ocorre.

Assim, pelo teorema acima, existe poliedro com as características enunciadas.

Um ilustração dele está na FIGURA 2.9, poliedro número (8). □

EXERCÍCIO 2.3) Existe poliedro convexo com exatamente 8 vértices, sendo todos eles quadriédricos?

Resolução.

Temos $V = 8$. Precisamos do número de arestas e faces:

$$A = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$$

$$V - A + F = 2 \Rightarrow F = 10$$

Logo, precisamos saber se existe poliedro convexo tal que $F = 10$ (decaedro), $V = 8$ e $A = 16$.

A condição $V - A + F = 2$ já foi imposta para deduzirmos que $F = 10$.

A condição $A = 16 \geq 6$ ocorre.

A condição $A + 6 \leq 3F \leq 2A \Rightarrow 16 + 6 \leq 3 \cdot 10 \leq 2 \cdot 16$ ocorre.

A condição $A + 6 \leq 3V \leq 2A \Rightarrow 16 + 6 \leq 3 \cdot 8 \leq 2 \cdot 16$ ocorre.

Assim, pelo teorema acima, existe poliedro com as características enunciadas.

Uma ilustração dele está na FIGURA 2.9, poliedro número (7). □

POLIEDROS REGULARES

Um poliedro convexo é **regular** quando todas as suas faces forem polígonos regulares congruentes e quando em todos os seus vértices incidem o mesmo número de arestas.

A segunda parte da definição significa que os vértices de um poliedro regular dão origem a ângulos poliédricos congruentes.

Teorema 2.3 *Existem apenas 5 poliedros regulares.*

Demonstração.

Seja n o número de lados de cada face de um poliedro regular. Logo,

$$n \geq 3. \tag{1}$$

Mas $nF = 2A$. Logo,

$$A = \frac{nF}{2}. \quad (2)$$

Seja m o número de arestas que incidem em cada vértice do poliedro regular. Logo,

$$m \geq 3. \quad (3)$$

Mas $mV = 2A$. Logo,

$$A = \frac{mV}{2}. \quad (4)$$

De (2) e (4) temos $\frac{nF}{2} = \frac{mV}{2}$. Logo,

$$V = \frac{nF}{m}. \quad (5)$$

Da Relação de Euler $V - A + F = 2$ temos, por (2) e (5), que

$$\frac{nF}{m} - \frac{nF}{2} + F = 2 \Rightarrow F = \frac{2}{\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1} = \frac{4m}{2n - nm + 2m}.$$

Logo,

$$F = \frac{4m}{2n + m(2 - n)}. \quad (6)$$

De (6) temos $2n + m(2 - n) > 0$ (pois $F > 0$ e $4m > 0$) $\Rightarrow 2n > m(n - 2)$. Por (1) temos $n - 2 > 0$. Logo,

$$m < \frac{2n}{n - 2}. \quad (7)$$

Mas por (3) e (7) temos $\frac{2n}{n-2} > 3 \Rightarrow 2n > 3n - 6$. Logo,

$$n < 6. \quad (8)$$

Juntando (1) e (8) temos

$$3 \leq n < 6.$$

Classificação:

1º. caso: $n = 3$ (faces triangulares). Logo, por (7), $m < \frac{2 \cdot 3}{3-2} = 6$. Mas, por (3), $m \geq 3$. Assim,

$$3 \leq m < 6.$$

(i) $(m, n) = (3, 3)$ (vértices triédricos). Por (6) temos $F = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3 + 3 \cdot (2-3)} = 4$ (tetraedro). Por (2), $A = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ e, por (4), $V = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$.

(ii) $(m, n) = (4, 3)$ (vértices quadriédricos). De modo análogo, $F = 8$ (octaedro), $A = 12$ e $V = 6$.

(iii) $(m, n) = (5, 3)$ (vértices pentaédricos). De modo análogo, $F = 20$ (icosaedro), $A = 30$ e $V = 12$.

2º. caso: $n = 4$ (faces quadrangulares). Logo, por (7), $m < \frac{2 \cdot 4}{4-2} = 4$. Mas, por (3), $m \geq 3$. Assim,

$$3 \leq m < 4.$$

Temos $(m, n) = (3, 4)$ (vértices triédricos). Por (6) temos $F = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 4 + 3 \cdot (2-4)} = 6$ (hexaedro). Por (2), $A = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$ e, por (4), $V = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8$.

3º. caso: $n = 5$ (faces pentagonais). Logo, por (7), $m < \frac{2 \cdot 5}{5-2} = \frac{10}{3}$. Mas, por (3), $m \geq 3$. Assim,

$$3 \leq m < \frac{10}{3}.$$

Temos $(m, n) = (3, 5)$ (vértices triédricos). Por (6) temos $F = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 5 + 3 \cdot (2 - 5)} = 12$ (dodecaedro). Por (2), $A = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$ e, por (4), $V = \frac{2 \cdot 30}{3} = 20$.

Resumindo:

n	Faces	m	Vértices	V	A	F	Nome
3	Triangulares	3	Triédricos	4	6	4	Tetraedro Regular
3	Triangulares	4	Quadriédricos	6	12	8	Octaedro Regular
3	Triangulares	5	Pentaédricos	12	30	20	Icosaedro Regular
4	Quadrangulares	3	Triédricos	8	12	6	Hexaedro Regular (Cubo)
5	Pentagonais	3	Triédricos	20	30	12	Dodecaedro Regular

tem-se a classificação dos poliedros regulares.

Na FIGURA 2.9 temos as ilustrações dos poliedros regulares nos objetos (1), (3), (5), (9) e (10).□

2.2 Volume

O BLOCO RETANGULAR

Desejamos fazer o estudo do conceito de volume de um poliedro e, de modo mais geral, o conceito de volume de um “sólido” no espaço.

Para tanto, vamos destacar um poliedro especial: um hexaedro de faces retangulares é chamado de **bloco retangular**.

Observemos que decorre imediatamente da definição acima que duas arestas quaisquer de um bloco retangular ou são paralelas, ou são ortogonais. Consequentemente, um bloco retangular possui apenas vértices triédricos e é formado por três pares de retângulos congruentes, cada par situado em planos paralelos.

Veremos mais adiante que um bloco retangular é um caso particular de poliedros que classificaremos como “*prismas*”.

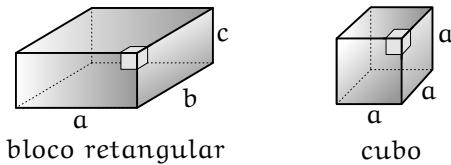


FIGURA 2.12: Blocos retangulares.

Duas faces paralelas quaisquer de um bloco retangular podem ser chamadas de **bases** do bloco. A distância entre os planos paralelos que contém as bases de um bloco retangular é chamada de **altura** do bloco.

Observemos que há três possibilidades para escolher as bases de um bloco retangular.

Quando um bloco retangular é composto por dois retângulos com lados medindo a e b , dois retângulos com lados medindo b e c , e dois retângulos com lados medindo a e c , ele é chamado de *bloco retangular de dimensões a , b e c* .

Um segmento que liga dois vértices de bloco retangular e que não está contido em qualquer de suas faces é chamado de **diagonal** desse bloco. Observemos que um bloco retangular possui exatamente quatro diagonais e elas são congruentes.

Por fim, um bloco retangular cujas faces são todas quadradas é chamado de **cubo**, portanto, um hexaedro regular.

Exercício Proposto

EXERCÍCIO 2.4) Dado um bloco retangular de dimensões a , b e c calcule:

(a) a medida de suas diagonais.

(b) a área de sua superfície.

Particularize os itens acima para o caso em que o bloco retangular é um cubo de arestas medindo a .

Respostas: Diagonal: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (bloco) e $d = a\sqrt{3}$ (cubo). Área: $A = 2(ab + ac + bc)$ (bloco) e $A = 6a^2$ (cubo). $\square$

Exercício Resolvido

EXERCÍCIO 2.5) Calcule a área da superfície de um cubo sabendo que a medida de suas diagonais excede de $\sqrt{2}$ cm a medida das diagonais das faces.

Resolução.

Seja a a medida das arestas do cubo.

Logo, as diagonais das faces medem $d = a\sqrt{2}$ e as diagonais do cubo medem $D = a\sqrt{3}$.

Do enunciado: $D = d + \sqrt{2} \Rightarrow a\sqrt{3} = a\sqrt{2} + \sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{6} + 2$.

Logo, a área pedida é $A = 6(\sqrt{6} + 2)^2 = 6(6 + 4\sqrt{6} + 4) = 60 + 24\sqrt{6} \text{ cm}^2$. $\square$

Para dar prosseguimento ao nosso estudo, precisamos do conceito de “congruência” entre duas figuras no espaço. Este, por sua vez, pode ser introduzido a partir de um conceito muito útil em geometria, que é o conceito de “semelhança” entre duas figuras no espaço.

SEMELHANÇA

Intuitivamente, dois objetos são *semelhantes* quando eles são “iguais a menos de escala”. Exemplos bem simples podem ser encontrados em brinquedos, onde miniaturas de carros, casas e pessoas (bonecos) são semelhantes aos originais.

Vamos conceituar matematicamente e de forma precisa a ideia de semelhança.

Duas figuras $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ no espaço euclidiano são ditas *semelhantes* quando existirem uma bijeção $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ e um número real positivo k tal que para quaisquer $P, Q \in \mathcal{F}$ tem-se

$$P'Q' = k.PQ$$

sendo $P' = \varphi(P)$ e $Q' = \varphi(Q)$. (em outra notação: $d(\varphi(P), \varphi(Q)) = k.d(P, Q)$)

A constante k é chamada de **razão de semelhança** (ou **fator de escala**) de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{G}$.

É fácil verificar que se k é a razão de semelhança de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{G}$, então $\frac{1}{k}$ é a razão de semelhança de $\mathcal{G}$ para $\mathcal{F}$.

Quando $k = 1$ dizemos que as figuras $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são *congruentes* e que a bijeção φ é uma *isometria* entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$.

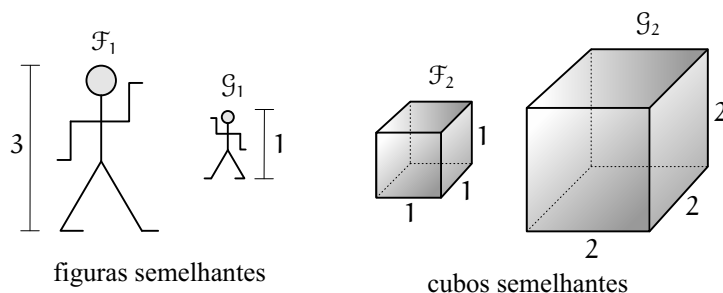


FIGURA 2.13: A razão de semelhança de $\mathcal{F}_1$ para $\mathcal{G}_1$ é $\frac{1}{3}$, enquanto que de $\mathcal{G}_1$ para $\mathcal{F}_1$ é 3.

Sejam O um ponto do espaço euclidiano E , r um número real positivo e $\sigma_{O,r} : E \rightarrow E$ uma aplicação tal que, quando $P \in E$ tem-se

$$P'O = r \cdot PO$$

sendo $P' = \sigma_{O,r}(P)$ na semirreta OP . Nessas condições, dizemos que $\sigma_{O,r}$ é uma **homotetia** de **centro** (ou **origem**) O e **razão** r .

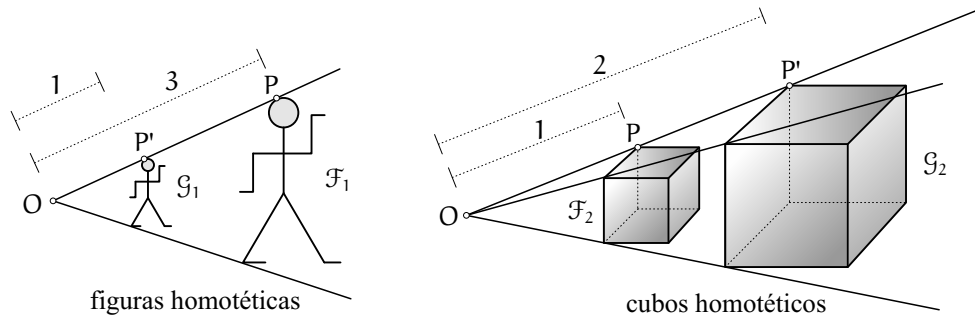


FIGURA 2.14: Homotetias de razão $\frac{1}{3}$ e 2, respectivamente.

A demonstração da proposição abaixo pode ser encontrada na referência [11].

Proposição 2.1 *Sejam $\sigma_{O,r} : E \rightarrow E$ homotetia de centro O e razão r e $\mathcal{F}$ uma figura no espaço. então $\mathcal{G} = \sigma_{O,r}(\mathcal{F})$ e $\mathcal{F}$ são figuras semelhantes e a razão de semelhança de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{G}$ é $k = r$. (neste caso a bijeção φ é a restrição de $\sigma_{O,r}$ a $\mathcal{F}$).*

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROPORCIONALIDADE

O próximo teorema é muito útil como ferramenta para vários resultados que precisaremos adiante. Sua demonstração pode ser encontrada na referência [12].

Teorema 2.4 (Fundamental da Proporcionalidade) *Se $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é função crescente e tal que $f(nx) = nf(x)$ para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}^+$, então $f(rx) = rf(x)$ para quaisquer $r, x \in \mathbb{R}^+$.*

Nas condições do teorema acima, temos que se $y = f(x)$, sendo x e y grandezas positivas relacionadas (por exemplo: comprimentos, áreas, volumes, medidas de ângulos, massa, etc), então y é *diretamente proporcional* a x . De fato, fazendo $k = f(1)$ temos $f(r) = kr$ para qualquer $r \in \mathbb{R}^+$, ou, em linguagem mais familiar, $f(x) = kx$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$, o que significa $y = kx$. A constante k é chamada de *constante de proporcionalidade*.

VOLUME DE BLOCO RETANGULAR

Medir uma grandeza significa compará-la com uma outra de mesma natureza que corresponde a *uma unidade*.

Intuitivamente, o *volume de um poliedro*, por exemplo, é um número (resultante da comparação acima) associado à região do espaço ocupada pelo interior desse poliedro.

Na Geometria Euclidiana Espacial, definimos que **uma unidade de volume** corresponde à região do espaço ocupada por um cubo de arestas unitárias, chamado de *cubo unitário*.

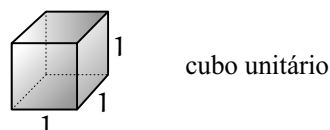


FIGURA 2.15: Estabelecendo a unidade de volume.

Sendo assim, medir o volume de um poliedro significa, de forma intuitiva, “verificar *quantas vezes* o cubo unitário cabe dentro desse poliedro”. De forma mais precisa, o conceito de volume de um poliedro é definido de modo a satisfazer:

- (i) Poliedros $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ congruentes possuem o mesmo volume, ou seja, $v(\mathcal{F}) = v(\mathcal{G})$.
- (ii) Poliedros $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ cuja intersecção de seus interiores é vazia são tais que $v(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = v(\mathcal{F}) + v(\mathcal{G})$.

Naturalmente, estabelecer o “tamanho” de uma unidade de comprimento é algo totalmente arbitrário. Por exemplo, se o comprimento 1 das arestas do cubo unitário for convencionado como sendo 1 metro (1 m), então dizemos que o volume do cubo unitário é 1 metro cúbico (1 m³).

Com o estabelecimento da unidade de volume e das condições acima podemos deduzir o volume de um bloco retangular. Este, por sua vez, será útil na conceituação precisa de volume de um sólido que faremos adiante.

Teorema 2.5 *O volume de um bloco retangular de dimensões a , b e c é $V = abc$, ou seja, produto da área de uma base por sua altura.*

Demonstração.

Para fixar as notações, tomemos a como sendo a variável positiva comprimento (uma grandeza), b a largura e c a altura do bloco retangular.

A variável positiva volume (outra grandeza) do bloco depende de a , b e c , ou seja, $V = V(a, b, c)$.

Observemos que, se fixarmos b e c , a variável volume V fica em função da variável comprimento a , ou seja, $f(a) = V(a, b, c)$, ou, em linguagem mais familiar, $f(x) = V(x, b, c)$.

Naturalmente, devido à condição (ii) acima, f é crescente, pois, com largura e altura fixadas, se aumentarmos (ou diminuirmos) o comprimento do bloco, então seu volume também aumenta (ou diminui).

Além disso, devido à condição (i) acima, com largura e altura fixadas, se duplicarmos o comprimento, o volume duplica. Se triplicarmos o comprimento, o volume triplica, e assim, por diante.

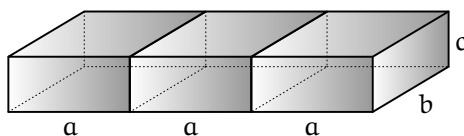


FIGURA 2.16: *Triplcando o comprimento, o volume triplica.*

Desta forma, temos $V(nx, b, c) = nV(x, b, c)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $f(nx) = nf(x)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, temos que $f(rx) = rf(x)$ para qualquer $r \in \mathbb{R}^+$, ou seja,

$$V(rx, b, c) = rV(x, b, c) \text{ para qualquer } r \in \mathbb{R}^+.$$

Naturamente, raciocínio análogo pode ser desenvolvido para a variável largura e para a variável altura, ou seja,

$$V(a, ry, c) = rV(a, y, c) \text{ para qualquer } r \in \mathbb{R}^+.$$

$$V(a, b, rz) = rV(a, b, z) \text{ para qualquer } r \in \mathbb{R}^+.$$

Com as considerações acima:

$$\begin{aligned} V &= V(a, b, c) = V(a, b, c \cdot 1) = cV(a, b, 1) = cV(a, b \cdot 1, 1) \\ &= bcV(a, 1, 1) = bcV(a \cdot 1, 1, 1) = abcV(1, 1, 1). \end{aligned}$$

Mas $V(1, 1, 1)$ é o volume do bloco unitário que, por definição, é 1.

Conclusão:

$$V = abc,$$

como queríamos. □

É importante observar que, se as dimensões de um bloco retangular a , b e c forem números naturais ou mesmo racionais positivos, não é necessário o uso do Teorema Fundamental da Proporcionalidade para demonstrar que $V = abc$.

Exercício Proposto

EXERCÍCIO 2.6) Demonstre que o volume do bloco retangular de dimensões racionais positivas a , b e c é $V = abc$ sem usar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Exercício Resolvido

EXERCÍCIO 2.7) As dimensões de um bloco retangular são proporcionais aos números 2, 3 e 5. Sabendo que seu volume é 810 cm^3 , calcule suas dimensões.

Resolução.

Sejam a, b, c as dimensões do bloco. Logo, $a = 2k$, $b = 3k$ e $c = 5k$ (k é a constante de proporcionalidade).

$$\text{Logo, } abc = 810 \Rightarrow 30k^3 = 810 \Rightarrow k^3 = 27 \Rightarrow k = 3.$$

$$\text{Logo, } a = 6 \text{ cm. } b = 9 \text{ cm e } c = 15 \text{ cm.}$$

□

O CONCEITO GERAL DE VOLUME

Vamos definir um poliedro especial, chamado de *poliedro retangular*, que nada mais é do que o poliedro proveniente de uma reunião finita de blocos retangulares justapostos pelas faces. Essa justaposição de blocos é feita de tal modo que existem três planos perpendiculares dois a dois tais que qualquer face do poliedro retangular é paralela a um desses três planos ⁽²⁾.

O volume de um poliedro retangular é, devido à condição (ii), a soma dos volumes dos blocos retangulares que o constituem.

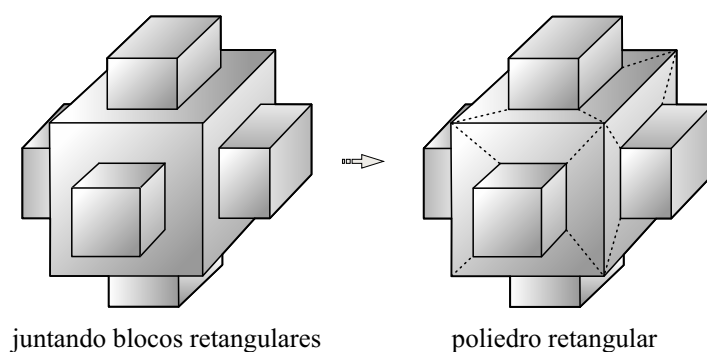


FIGURA 2.17: Construindo poliedros retangulares.

Como pretendemos conceituar volume para objetos mais gerais do que poliedros, vamos utilizar a palavra “sólido” para objetos no espaço que sejam passíveis de terem o volume não nulo univocamente estabelecido conforme definição abaixo.

²Para que respeitemos a definição de poliedro que demos no início deste capítulo, as intersecções das faces dos blocos que compõem um poliedro retangular não são consideradas como faces do mesmo. Além disso, novas arestas devem ser adicionadas para que as faces do poliedro retangular sejam, de fato, polígonos. Aqui entra uma boa justificativa para que permitamos que faces adjacentes de um poliedro sejam coplanares. Em poliedros retangulares existem faces adjacentes coplanares.

Sejam $\mathcal{S}$ conjunto limitado de pontos no espaço ⁽³⁾ e $v(\mathcal{S})$ número real tal que:

Dados $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ quaisquer com $r_1 < v(\mathcal{S}) < r_2$, existem poliedros retangulares $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{P}_2$ cujos volumes $v(\mathcal{P}_1)$ e $v(\mathcal{P}_2)$ satisfazem $r_1 < v(\mathcal{P}_1) \leq v(\mathcal{S}) \leq v(\mathcal{P}_2) < r_2$.

O número real $v(\mathcal{S})$ é definido como o **volume** de $\mathcal{S}$.

Conjuntos $\mathcal{S}$ que possuem volumes não nulos definidos conforme acima são chamados de **sólidos**.

Em palavras mais simples, o volume de um sólido $\mathcal{S}$ é o número real $v(\mathcal{S})$ cujas aproximações por falta são volumes de poliedros retangulares contidos no sólido e cujas aproximações por excesso são os volumes de poliedros retangulares que contém o sólido.

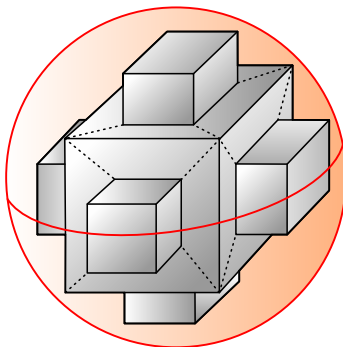


FIGURA 2.18: Poliedro retangular $\mathcal{P}_1$ contido no sólido $\mathcal{S}$.

Em cursos mais avançados (de Análise Real ou Teoria da Medida) é possível mostrar que existem conjuntos limitados de pontos no espaço que não possuem o volume estabelecido conforme a definição que demos acima. Além disso, é possível mostrar que o volume de um conjunto limitado de pontos no espaço (quando existe) é único.

A conceituação de volume que demos acima está bem definida do ponto de vista matemático, mas é bastante inconveniente para usos práticos. Uma ferramenta bastante útil para contornar essa dificuldade é o chamado *Princípio de Cavalieri*, cuja demonstração também foge ao nível deste curso (faz uso de integrais múltiplas). Tal princípio permite que tiremos conclusões sobre os volumes de dois sólidos por meio da análise de áreas de determinadas secções. Trata-se de uma ferramenta de comparação entre sólidos e é a partir dela que deduzimos algumas das fórmulas de volumes de sólidos importantes da Geometria Euclidiana Espacial.

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Teorema 2.6 (Princípio de Cavalieri) *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ dois sólidos no espaço e α um plano. Se todo plano paralelo a α determina nos sólidos secções de mesma área, então $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ possuem o mesmo volume.*

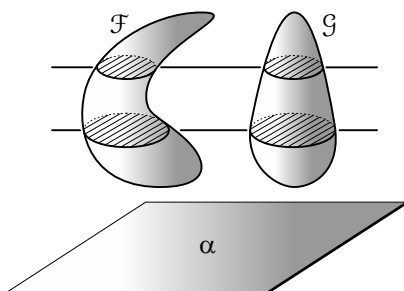


FIGURA 2.19: Princípio de Cavalieri.

³Conjunto limitado de pontos no espaço significa que existe um bloco retangular que o contém.

2.3 Prismas

Um **prisma** é um poliedro tal que duas de suas faces são polígonos congruentes situados em planos paralelos e as demais faces são paralelogramos.

Em um prisma, os dois polígonos congruentes e paralelos são chamados de **bases** do prisma, enquanto que as demais faces são chamadas de **faces laterais** do prisma. As arestas não contidas nas bases são chamadas de **arestas laterais** do prisma. Por fim, a distância entre os planos que contém as bases é chamada de **altura** do prisma.

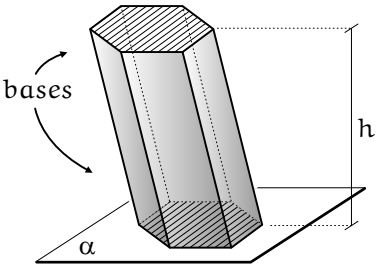


FIGURA 2.20: Prisma.

A nomenclatura dos prismas varia de acordo com suas bases ⁽⁴⁾:

Formato das bases	Nome do prisma
Bases triangulares	Prisma triangular
Bases quadrangulares	Prisma quadrangular
Bases pentagonais	Prisma pentagonal
⋮	⋮

Os prismas são classificados em **retos**, quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases, e **oblíquos**, caso contrário. Observemos que nos prismas retos, as faces laterais são retângulos.

Quando as bases de um prisma reto são polígonos regulares, ele é chamado de **prisma regular**. Observemos, também, que quando as bases de um prisma são convexas, o prisma é convexo.

Um prisma cujas bases são paralelogramos (portanto, um hexaedro) é chamado de **paralelepípedo**.

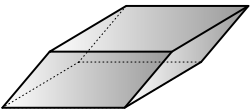


FIGURA 2.21: Paralelepípedo.

Um paralelepípedo reto com bases retangulares é chamado de **paralelepípedo retângulo**. Observemos que em um paralelepípedo retângulo, todas as faces são retângulos, portanto, conforme já definimos em seção anterior, um paralelepípedo retângulo é um **bloco retangular**.

Para a demonstração do próximo teorema precisamos do seguinte exercício:

Exercício Proposto

EXERCÍCIO 2.8) Prove que se um plano paralelo às bases de um prisma o secciona, então as bases e a secção são polígonos congruentes e, portanto, possuem mesma área.

⁴Base quadrangular não significa necessariamente que a base é um quadrado, mas sim um quadrilátero qualquer.

Teorema 2.7 (volume de prisma) *O volume de um prisma é o produto da área de uma de suas bases por sua altura.*

Demonstração.

Consideremos um plano α no espaço.

Sejam $\mathcal{P}$ um prisma e $\mathcal{B}$ um bloco retangular tais que eles possuam bases de mesma área b e mesma altura h . Suponhamos ainda que $\mathcal{P}$ possua uma de suas bases em α e o mesmo ocorra com $\mathcal{B}$. Por fim, consideremos que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$ estejam situados em um mesmo lado de α (isto é, estejam em apenas um dos dois semiespaços determinado por α).

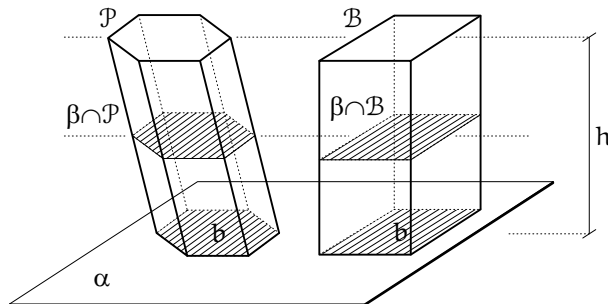


FIGURA 2.22: Seccionando por planos paralelos.

Seja β plano paralelo a α seccionando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$. Pelo EXERCÍCIO 2.8 temos que a secção $\beta \cap \mathcal{P}$ tem a mesma área das bases de $\mathcal{P}$, enquanto que $\beta \cap \mathcal{B}$ tem a mesma área das bases de $\mathcal{B}$. Mas as áreas das bases são iguais. Logo, as áreas das secções também o são. Portanto, as hipóteses do Princípio de Cavalieri formam cumpridas e, assim, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$ possuem o mesmo volume.

Como o volume $v(\mathcal{B})$ do bloco retangular $\mathcal{B}$ é dado por $v(\mathcal{B}) = bh$ e $v(\mathcal{P}) = v(\mathcal{B})$ concluímos que $v(\mathcal{P}) = bh$, como queríamos. $\square$

Exercício Resolvido

EXERCÍCIO 2.9) Um prisma reto triangular regular tem altura igual ao dobro da medida das arestas das bases. Sabendo a soma das áreas de suas faces laterais é 18 cm^2 , calcule seu volume.

Resolução.

Seja b a medida das arestas das bases. Temos que a altura h é tal que $h = 2b$. Sendo as faces laterais retângulos de lados medindo b e h , temos que a soma das áreas das faces laterais do prisma é $A = 3 \cdot b \cdot 2b = 6b^2 = 18 \Rightarrow b = \sqrt{3}$.

Desta forma, o volume procurado é dado por $V = \left(\frac{1}{2}b \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)\right) 2b = \frac{9}{2} \text{ cm}^3$. $\square$

2.4 Pirâmides

Um poliedro de F faces tais que $F - 1$ delas são triângulos com um vértice em comum é chamado de **pirâmide**. A face restante é chamada de **base** da pirâmide, os $F - 1$ triângulos são chamados de **faces laterais** da pirâmide e o vértice no qual incidem os $F - 1$ triângulos é chamado de **vértice** da pirâmide.

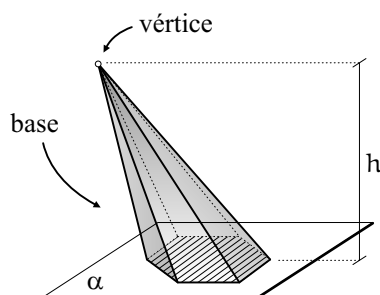


FIGURA 2.23: Pirâmide.

As arestas que incidem no vértice de uma pirâmide são chamadas de **arestas laterais** da pirâmide.

A distância do vértice de uma pirâmide ao plano que contém sua base é chamada de **altura** da pirâmide.

A nomenclatura de uma pirâmide varia de acordo com sua base ⁽⁵⁾:

Formato da base	Nome da pirâmide
Base triangular	Pirâmide triangular
Base quadrangular	Pirâmide quadrangular
Base pentagonal	Pirâmide pentagonal
$\vdots$	$\vdots$

É consequência da definição de pirâmide que, se a base é um polígono convexo, então a pirâmide é um poliedro convexo.

Uma pirâmide é **regular** quando sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice no plano da base é o centro da base. Os segmentos que ligam o vértice de uma pirâmide regular aos pontos médios das arestas de sua base são chamados de **apótemas** da pirâmide regular.

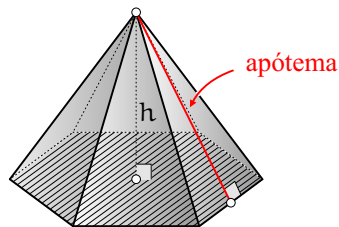


FIGURA 2.24: Pirâmide regular.

Como consequência da definição acima, as faces laterais de uma pirâmide regular são triângulos isósceles congruentes e todos os seus apótemas são, também, congruentes.

Proposição 2.2 Seccionando-se uma pirâmide triangular de vértice V por um plano paralelo à sua base tem-se ⁽⁶⁾:

- (i) A secção e a base da pirâmide são triângulos semelhantes.
- (ii) a razão entre a área da secção e a área da base é igual ao quadrado da razão de semelhança entre esses triângulos.

Demonstração.

(i) Seja $VABC$ pirâmide triangular de base ABC e vértice V . Seja $A'B'C'$ triângulo da secção do plano α paralelo a ABC com a pirâmide (nesta notação estamos considerando $A' \in VA$, $B' \in VB$ e $C' \in VC$ conforme figura abaixo). Sejam h a altura de $VABC$ e d a distância de V ao plano α (d é a altura da pirâmide $VA'B'C'$). Por fim, sejam P e P' projeções ortogonais de V no plano da base da pirâmide $VABC$ e no plano α , respectivamente. Assim, $VP = h$ e $VP' = d$.

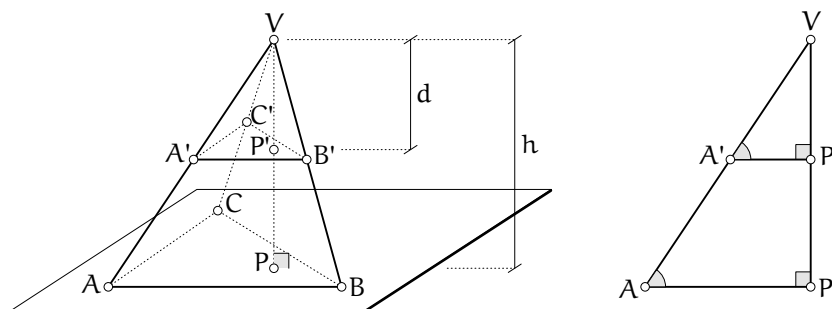


FIGURA 2.25: Destacando triângulos semelhantes.

⁵Base quadrangular não significa necessariamente que a base é um quadrado, mas sim um quadrilátero qualquer.

⁶Não estamos considerando a situação em que a intersecção do plano com a pirâmide seja apenas o seu vértice.

Temos que os triângulos $VA'P'$ e VAP são semelhantes. Logo,

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VP'}{VP} = \frac{d}{h} = k,$$

sendo k a razão de semelhança entre $VA'P'$ e VAP .

Repetindo o raciocínio para os vértices B e C temos

$$\begin{aligned} \frac{VB'}{VB} &= \frac{VP'}{VP} = \frac{d}{h} = k \text{ e} \\ \frac{VC'}{VC} &= \frac{VP'}{VP} = \frac{d}{h} = k. \end{aligned}$$

Mas os triângulos $VA'B'$ e VAB também são semelhantes. Logo,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{VA'}{VA} = k.$$

Analogamente para os triângulos das outras duas faces da pirâmide:

$$\begin{aligned} \frac{A'C'}{AC} &= \frac{VC'}{VC} = k \text{ e} \\ \frac{B'C'}{BC} &= \frac{VB'}{VB} = k, \end{aligned}$$

o que permite que concluamos que o triângulo $A'B'C'$ é semelhante ao triângulo ABC , sendo k a razão de semelhança.

(ii) Sejam $A_{A'B'C'}$ e $h_{A'B'}$ área e altura relativa ao lado $A'B'$ do triângulo $A'B'C'$. Notação análoga para o triângulo ABC .

Logo,

$$\frac{A_{A'B'C'}}{A_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A'B' \cdot h_{A'B'}}{\frac{1}{2}AB \cdot h_{AB}} = \frac{A'B'}{AB} \cdot \frac{h_{A'B'}}{h_{AB}} = kk = k^2,$$

como queríamos. □

Uma observação importante decorrente da demonstração acima é que a razão de semelhança entre a secção e a base da pirâmide em questão é igual à razão entre as distâncias do vértice V da pirâmide aos planos da secção e da base, ou seja, $k = \frac{d}{h}$ (na notação da demonstração).

A proposição acima pode ser generalizada. Sua demonstração fica como exercício.

Proposição 2.3 *Seccionando-se uma pirâmide por um plano paralelo à sua base tem-se:*

- (i) *A secção e a base da pirâmide são polígonos semelhantes.*
- (ii) *a razão entre a área da secção e a área da base é igual ao quadrado da razão de semelhança entre esses polígonos.*

Proposição 2.4 *Dadas duas pirâmides de mesma altura e bases de mesma área, então as secções paralelas às bases e à mesma distância dos vértices têm mesma área.*

Demonstração.

Sejam $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ as pirâmides de mesma altura h e bases B_1 e B_2 de mesma área b . Seja d a distância do vértice de cada pirâmide às secções S_1 e S_2 paralelas às bases.

Pela proposição acima,

$$\frac{A_{S_1}}{A_{B_1}} = k_1^2 = \left(\frac{d}{h}\right)^2 = k_2^2 = \frac{A_{S_2}}{A_{B_2}},$$

sendo k_1 a razão de semelhança entre S_1 e B_1 e k_2 a razão de semelhança entre S_2 e B_2 .

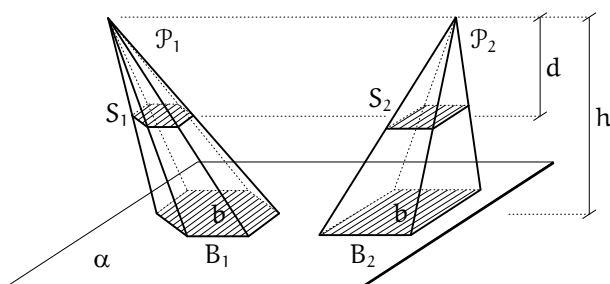


FIGURA 2.26: Destacando seções de mesma área.

Mas, por hipótese, $A_{B_1} = A_{B_2} = b$, de onde concluímos que $A_{S_1} = A_{S_2}$, como queríamos. $\square$

Proposição 2.5 Se duas pirâmides têm a mesma altura e bases de mesma área, então elas têm o mesmo volume.

Demonstração.

Considerando α um plano que contenha as bases das pirâmides, e que estas estejam situadas de um mesmo lado de α , a proposição anterior garante que as seções produzidas por planos paralelos às bases das pirâmides terão mesma área. Logo, as hipóteses do Princípio de Cavalieri estão cumpridas e, portanto, as pirâmides possuirão o mesmo volume. $\square$

Proposição 2.6 O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área de sua base por sua altura.

Demonstração.

Seja $ABCD$ pirâmide de base triangular ABC , cuja área denotaremos por b , e altura h . Consideremos um prisma triangular $ABCDEF$ com bases ABC e DEF congruentes. Logo, as bases desse prisma tem área b e sua altura é a mesma da pirâmide, ou seja, altura h . Como já vimos o volume desse prisma é dado por bh .

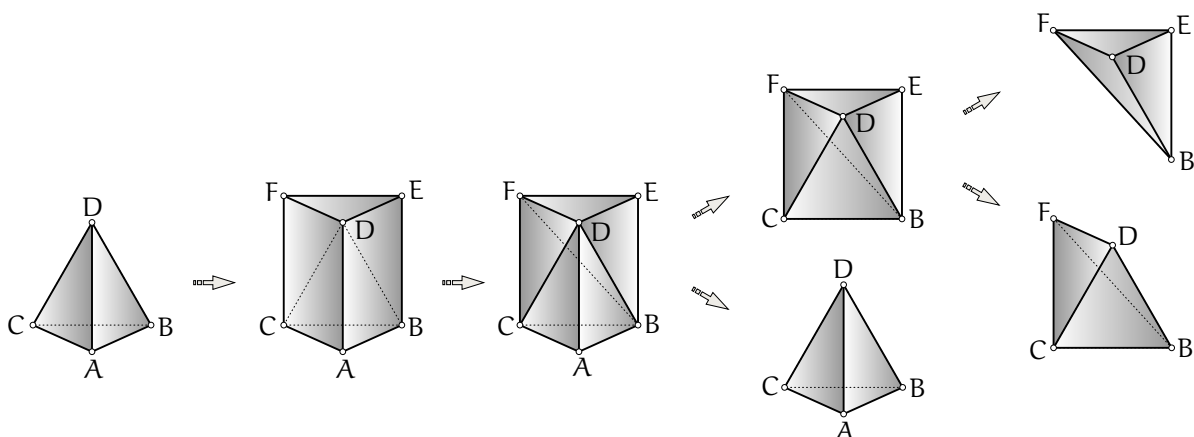


FIGURA 2.27: Decompondo um prisma em pirâmides.

Como em uma pirâmide triangular (tetraedro) qualquer face pode ser considerada como base, vamos estabelecer a notação $ABC-D$ para designar ABC como base e D como vértice da pirâmide $ABCD$.

Vamos decompor o prisma $ABCDEF$ em três pirâmides: $ABC-D$, $DEF-B$ e $BCF-D$ como indicado na figura acima.

Temos que $v(ABC-D) = v(DEF-B)$ pela proposição anterior, pois $ABC-D$ e $DEF-B$ possuem a mesma altura h e bases ABC e DEF que são congruentes (logo, possuem mesma área).

De modo análogo, $v(BEF-D) = v(BCF-D)$, pois as bases BEF e BCF são congruentes e a altura dessas pirâmides é a distância do vértice D ao plano que passa pelos pontos $CBEF$.

Como $\text{DEF-B} = \text{BEF-D}$ temos $v(\text{DEF-B}) = v(\text{BEF-D})$.

Conclusão: $v(\text{ABC-D}) = v(\text{DEF-B}) = v(\text{BCF-D})$.

Sendo a soma dos volumes das 3 pirâmides acima o volume do prisma, temos $3.v(\text{ABC-D}) = bh$, ou seja, $v(\text{ABC-D}) = \frac{1}{3}bh$, como queríamos. $\square$

Teorema 2.8 *O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área de sua base por sua altura.*

Demonstração.

Seja n o número de lados da base da pirâmide $\mathcal{P}$ de área b . Essa base pode ser dividida em $n - 2$ triângulos de áreas $b_1, \dots, b_{n-2}$ que podem ser considerados como bases de $n - 2$ pirâmides triangulares $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{n-2}$, todas com o mesmo vértice da pirâmide original. Portanto, todas com a mesma altura h da pirâmide original.

Logo, $v(\mathcal{P}) = v(\mathcal{P}_1) + \dots + v(\mathcal{P}_{n-2})$.

Pela proposição anterior temos $v(\mathcal{P}_i) = \frac{1}{3}b_i h$ para $i = 1, \dots, n - 2$.

Logo, $v(\mathcal{P}) = \frac{1}{3}b_1 h + \dots + \frac{1}{3}b_{n-2} h = \frac{1}{3}(b_1 + \dots + b_{n-2}) h = \frac{1}{3}bh$, como queríamos. $\square$

A demonstração da proposição abaixo é deixada para o leitor.

Proposição 2.7 *Seccionando-se uma pirâmide $\mathcal{P}$ de vértice V por um plano paralelo à sua base tem-se:*

- (i) *a pirâmide $\mathcal{P}'$ de vértice V e base na secção é semelhante à pirâmide original.*
- (ii) *a razão entre os volumes de $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}$ é o cubo da razão de semelhança entre essas pirâmides.*

Dica: para a parte (i) crie uma homotetia de centro V e razão $\frac{h}{d}$ sendo h a altura de $\mathcal{P}$ e d a altura de $\mathcal{P}'$.

Exercício Proposto

EXERCÍCIO 2.10) Em uma pirâmide regular hexagonal, as arestas da base medem $4\sqrt{3}$ cm e sua altura é 8 cm. Calcule:

- (a) O comprimento dos apótemas da base.
- (b) O comprimento dos apótemas da pirâmide.
- (c) O comprimento das arestas laterais.
- (d) A área da base.
- (e) A área da superfície da pirâmide.
- (f) O volume da pirâmide.

Respostas: (a) 6 cm (o apótema da base tem comprimento igual ao da altura de um triângulo equilátero de lado medindo $4\sqrt{3}$ cm). (b) 10 cm. (c) $4\sqrt{7}$ cm. (d) $72\sqrt{3}$ cm². (e) $192\sqrt{3}$ cm². (f) $192\sqrt{3}$ cm³. $\square$

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 2.11) A área da superfície lateral de uma pirâmide regular quadrangular é 150 cm² e o perímetro da base é 20 cm. Calcule seu volume.

Resolução.

O quadrado da base tem perímetro 20. Logo, cada lado tem comprimento 5. Considere a figura.

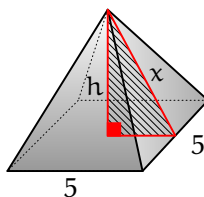


FIGURA 2.28: Encontrando apótema e altura.

Como cada triângulo lateral tem área $\frac{150}{4}$ temos $\frac{1}{2}5x = \frac{150}{4} \Rightarrow x = 15$.

Pitágoras: $h^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 15^2 \Rightarrow h = \frac{5\sqrt{35}}{2}$. Portanto, $V = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot \frac{5\sqrt{35}}{2} = \frac{125\sqrt{35}}{6} \text{ cm}^3$. $\square$

EXERCÍCIO 2.12) As arestas da base de uma pirâmide regular triangular medem $10\sqrt{3} \text{ cm}$ e sua altura é 12 cm . Calcule a área da superfície da pirâmide e seu volume.

Resolução.

A base é um triângulo equilátero cujos lados medem $10\sqrt{3}$. Logo, na figura, m é um terço do comprimento de uma mediana.

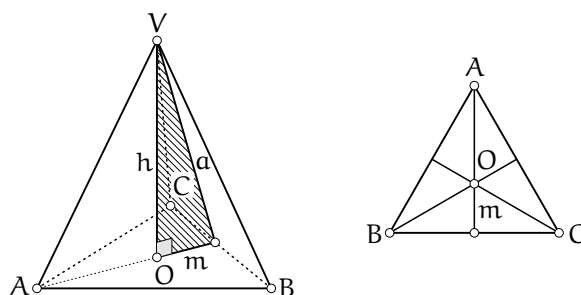


FIGURA 2.29: Medianas na base da pirâmide.

Logo, $m = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10\sqrt{3} \right) = 5$. Como $h = 12$, pelo Teorema de Pitágoras, $12^2 + 5^2 = a^2 \Rightarrow a = 13$.

Assim, $A = 3 \left(\frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 13 \right) + \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 15 = 195\sqrt{3} + 75\sqrt{3} = 270\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

E $V = \frac{1}{3} \cdot 75\sqrt{3} \cdot 12 = 300\sqrt{3} \text{ cm}^3$. $\square$

EXERCÍCIO 2.13) Uma pirâmide regular triangular tem 12 cm de altura e as arestas da base medem 6 cm . A que distância de vértice deve passar um plano paralelo a sua base para que a área da secção determinada por esse plano na pirâmide seja $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$?

Resolução.

Considere a figura.

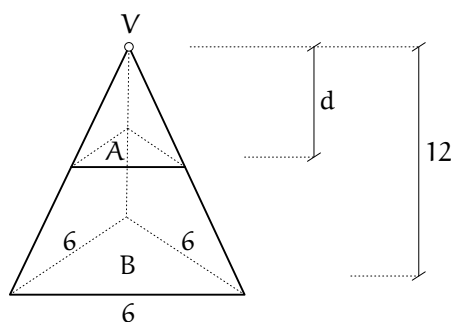


FIGURA 2.30: Pirâmide seccionada.

Temos $\frac{A}{B} = \left(\frac{d}{12}\right)^2 \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6\right)} = \left(\frac{d}{12}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{d}{12}\right)^2 \Rightarrow d = 8 \text{ cm}$. $\square$

EXERCÍCIO 2.14) Calcule a altura de uma pirâmide sabendo-se que uma secção paralela à base, feita a 4 cm desta, tem área igual a $\frac{1}{9}$ da área da base.

Resolução.

Considere a figura.

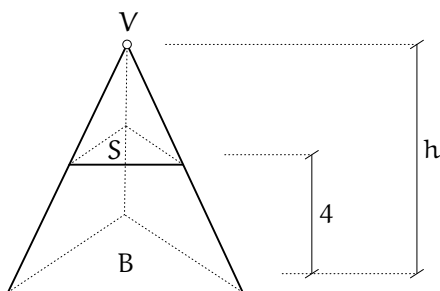


FIGURA 2.31: Pirâmide seccionada.

Temos $S = \frac{1}{9}B$.

Mas $\frac{S}{B} = \left(\frac{h-4}{h}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{h-4}{h}\right)^2 \Rightarrow h = 6 \text{ cm.}$

□

EXERCÍCIO 2.15) Dado um tetraedro regular de arestas medindo a , calcule:

- (a) sua altura.
- (b) a área de sua superfície.
- (c) seu volume.

Resolução.

Consideremos a figura.

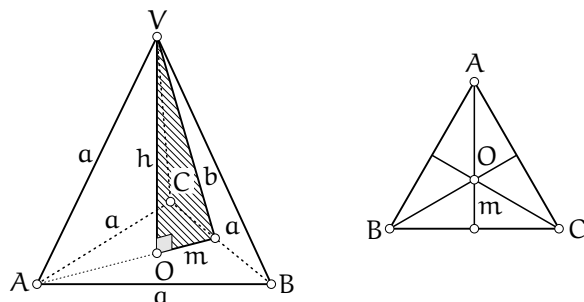


FIGURA 2.32: Elementos do tetraedro regular.

Temos $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ e $m = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \right)$.

Logo, a altura é $h = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.

A área é $A = 4 \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \right) = \sqrt{3}a^2$.

O volume é $V = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \right) \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

□

EXERCÍCIO 2.16) Um octaedro regular tem arestas medindo a . Calcule em função de a :

- (a) a área de sua superfície.
- (b) seu volume.

Resolução.

Área: $A = 8 \left(\frac{1}{2}a \frac{\sqrt{3}}{2}a \right) = 2\sqrt{3}a^2$.

Dividamos o octaedro em duas pirâmides regulares quadrangulares. Logo, a altura de cada pirâmide é a metade da diagonal de um quadrado, ou seja, $h = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Logo, $V = 2 \left(\frac{1}{3}a^2 \frac{\sqrt{2}a}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

□

EXERCÍCIO 2.17) Em um tetraedro tri-retangular (existe um vértice que origina um triedro tri-retangular), uma das arestas que originam o triedro tri-retangular mede a , enquanto que as outras duas medem $a\sqrt{2}$. Calcule em função de a :

- (a) a área da superfície do tetraedro.

(b) seu volume.

Resolução.

Considere a figura.

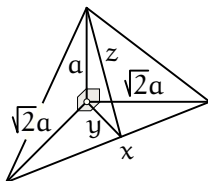


FIGURA 2.33: Elementos no tetraedro tri-retangular.

Temos $x = \sqrt{(\sqrt{2}a)^2 + (\sqrt{2}a)^2} = 2a$. Como $y = \frac{x}{2}$ temos $y = a$.

Logo, $z = \sqrt{a^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Assim, $A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}a + \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a\sqrt{2} = (2\sqrt{2} + 1)a^2$.

E $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}a\right) a = \frac{a^3}{3}$. □

EXERCÍCIO 2.18) A que distância do vértice de uma pirâmide de altura h devemos passar um plano paralelo à base, de modo que a razão entre as áreas laterais da nova pirâmide e da pirâmide dada seja $\frac{1}{2}$?

Resolução.

Sejam h_2 e h_1 as alturas das pirâmides seccionada (menor) e original (maior). Seja k a razão de semelhança entre essas duas pirâmides. Logo, $k = \frac{h_2}{h_1}$.

Sejam A_2 e A_1 as áreas laterais das pirâmides seccionada (menor) e original (maior). Não é difícil provar (faça) que $k^2 = \frac{A_2}{A_1}$. Logo, $k^2 = \frac{1}{2}$ e, portanto, $k = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h_2}{h_1}$. Assim, $h_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}h_1$ e devemos seccionar a pirâmide à distância $\frac{\sqrt{2}}{2}$ de sua altura para que tenhamos as condições do enunciado satisfeitas. □

2.5 Troncos de Prisma e de Pirâmide

TRONCOS DE PRISMA

Consideremos um prisma e um plano α , não paralelo às bases, que intersecta todas as arestas laterais do prisma. O plano α divide o prisma em dois poliedros, cada qual chamado de **tronco de prisma**.

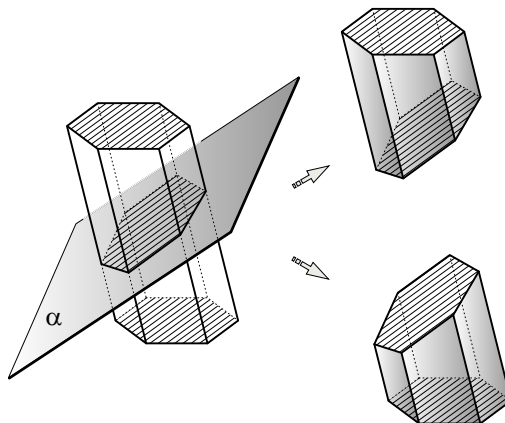


FIGURA 2.34: Troncos de prisma.

A base original do prisma que originou um tronco de prisma será chamada de **base do tronco de prisma**.

Sejam $A_1, \dots, A_n$ os vértices da face oposta à base de um tronco de prisma. Sejam $d_1, \dots, d_n$ as distâncias de $A_1, \dots, A_n$ ao plano que contém a base do tronco. O número

$$h = \frac{d_1 + \dots + d_n}{n}$$

é chamado de **altura média** do tronco de prisma.

Teorema 2.9 *O volume de um tronco de prisma é o produto da área de sua base por sua altura média.*

Exercício Proposto

EXERCÍCIO 2.19) Demonstre o teorema acima para o caso do tronco de prisma triangular.

TRONCOS DE PIRÂMIDES

Consideremos uma pirâmide e um plano α que intersecta todas as suas arestas laterais. Excluamos o caso em que α intersecta a pirâmide apenas em seu vértice.

O plano α divide a pirâmide em dois sólidos. Um deles é uma nova pirâmide (com o mesmo vértice da pirâmide original). O outro sólido é chamado de **tronco de pirâmide**.

O caso interessante de ser estudado é quando o plano α é paralelo à base da pirâmide original. Neste caso, dizemos que o tronco de pirâmide possui **bases paralelas**, sendo a base da pirâmide original chamada de **base maior** do tronco e sendo a secção determinada por α chamada de **base menor** do tronco. A distância entre os planos que passam pelas bases maior e menor de um tronco de pirâmide de bases paralelas é chamada de **altura** do tronco.

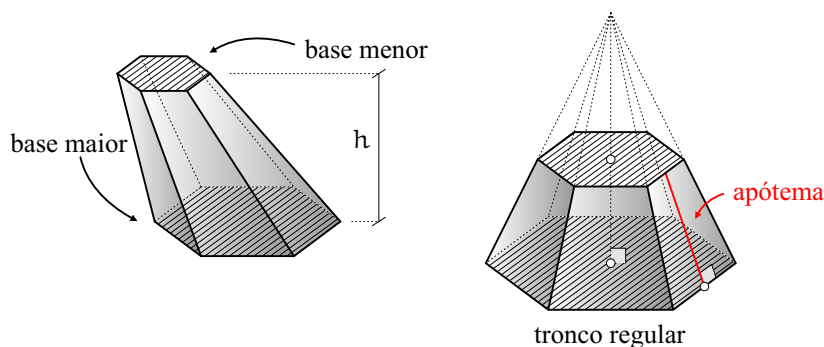


FIGURA 2.35: Troncos de pirâmides de bases paralelas.

Um tronco de pirâmide de bases paralelas é dito **regular** quando a pirâmide que o originou for regular. Neste caso, as faces laterais desse tronco são trapézios isósceles congruentes. Os segmentos que ligam os pontos médios dos lados da base menor aos respectivos pontos médios da base maior são chamados de **apótemas** do tronco. Os apótemas são todos congruentes e seu comprimento é a altura das faces laterais do tronco.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 2.20) Deduza a fórmula do volume do tronco de pirâmide de bases paralelas em função das áreas das bases maior e menor e de sua altura.

Resolução.

Considere a figura abaixo.

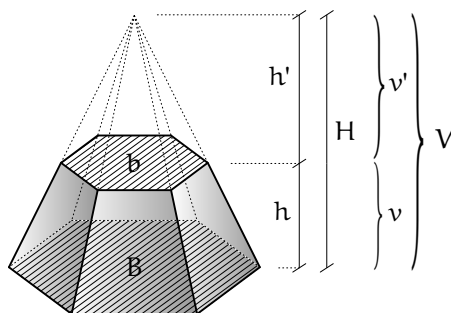


FIGURA 2.36: Elementos para dedução da fórmula do volume do tronco.

Sejam:

B área da base maior do tronco.

b área da base menor do tronco.

h altura do tronco.

h' altura da pirâmide superior (semelhante à pirâmide da qual o tronco foi retirado).

v volume do tronco.

v' volume da pirâmide superior.

$H = h + h'$.

$V = v + v'$.

Temos

$$v = V - v' = \frac{1}{3}BH - \frac{1}{3}bh' = \frac{1}{3}B(h + h') - \frac{1}{3}bh' = \frac{1}{3}(Bh + (B - b)h').$$

Como

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{h'}{H}\right)^2 \Rightarrow \frac{h'}{h + h'} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} \Rightarrow h'\sqrt{B} - h'\sqrt{b} = h\sqrt{b} \Rightarrow h' = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}.$$

Logo,

$$v = \frac{1}{3} \left(Bh + (B - b) \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \right) = \frac{1}{3} \left(Bh + (\sqrt{B} + \sqrt{b}) h\sqrt{b} \right) = \frac{h}{3} (B + \sqrt{Bb} + b),$$

como queríamos. □

EXERCÍCIO 2.21) Em um tronco regular de pirâmide quadrangular as arestas da base menor medem 20 cm, as arestas da base maior medem 30 cm e os apótemas medem 13 cm. Calcule:

(a) a área do tronco.

(b) o volume do tronco.

Resolução.

Considere a figura.

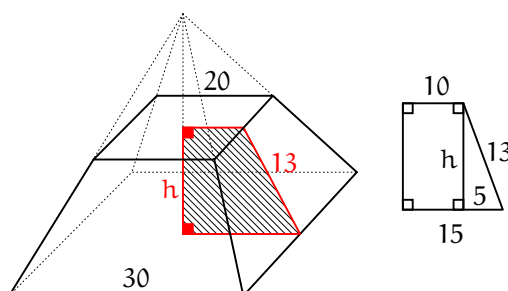


FIGURA 2.37: Encontrando a altura do prisma.

Temos $h = \sqrt{13^2 - 5^2} \Rightarrow h = 12$.

Área: $A = 4 \cdot \frac{(20+30) \cdot 13}{2} + 20^2 + 30^2 = 2600 \text{ cm}^2$.

Volume: $V = \frac{12}{3} \left(30^2 + \sqrt{30^2 \cdot 20^2} + 20^2 \right) = 7600 \text{ cm}^3$. □

EXERCÍCIO 2.22) A que distância do vértice de uma pirâmide de altura h devemos passar um plano paralelo à base, de modo que a razão entre os volumes da nova pirâmide e do tronco obtidos seja $\frac{1}{4}$?

Resolução.

Seja k a razão de semelhança entre a pirâmide seccionada (menor) P_2 e a pirâmide original (maior) P_1 . Sendo h_1 e h_2 as alturas das pirâmides em questão, podemos expressar $k = \frac{h_2}{h_1}$. Além disso, $k^3 = \frac{V_2}{V_1}$, sendo V_1 e V_2 os volumes de tais pirâmides (proposição).

Pelo enunciado, $\frac{1}{4} = \frac{V_2}{V_1 - V_2}$, pois $V_1 - V_2$ é o volume do tronco de pirâmide.

Assim,

$$\frac{1}{4} = \frac{k^3 V_1}{V_1 - k^3 V_1} = \frac{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3}{1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3} = \frac{h_2^3}{h_1^3 - h_2^3} \Rightarrow h_1^3 = 5h_2^3 \Rightarrow h_2 = \frac{h_1}{\sqrt[3]{5}},$$

ou seja, devemos seccionar a pirâmide original a $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ de sua altura para que tenhamos as condições do enunciado satisfeitas. □

Capítulo 3

Cilindros, Cones e Esferas

3.1 Cilindros de Revolução

A definição geral de *cilindro* é bem ampla e não será objeto de estudos neste texto. Entretanto, há um caso especial que queremos abordar com detalhes: o ***cilindro de revolução***, que é o sólido gerado por um retângulo quando o giramos 360° em torno de um de seus lados.

Para fixar os conceitos, seja $ABCD$ o retângulo da definição acima.

Consideremos o cilindro como sendo gerado pela rotação do retângulo $ABCD$ em torno do lado CD . Os lados AD e BC , perpendiculares ao lado CD , geram no cilindro dois discos congruentes e paralelos de raios $r = BC = AD$, com centros em C e D . Tais discos são chamados de ***bases*** do cilindro e a distância entre os planos que os contém é a ***altura*** do cilindro (portanto, a altura é o comprimento do lado CD do retângulo). O lado CD do retângulo é chamado de ***eixo*** do cilindro enquanto que qualquer segmento paralelo ao lado AB e contido na superfície do cilindro é chamado de ***geratriz*** do cilindro.

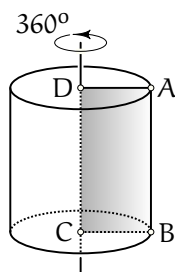


FIGURA 3.1: *Cilindro de revolução.*

Como o eixo de um cilindro de revolução é perpendicular a suas bases, também é comum utilizarmos a expressão “***cilindro circular reto***” para designar um cilindro de revolução.

A superfície de um cilindro de revolução divide o espaço em duas regiões: uma limitada e outra não limitada. A região limitada é chamada de ***interior*** do cilindro.

Observações:

(1) Assim como já ocorre com poliedros, às vezes, o emprego da palavra “cilindro” refere-se a sua superfície como, por exemplo, quando falamos em cálculo da área de um cilindro. Às vezes “cilindro” significa a reunião da superfície com seu interior como, por exemplo, quando falamos em cálculo do volume de um cilindro. A definição que demos acima não é pontual quanto a isto, uma vez que a palavra “retângulo” também pode ser utilizada em dois contextos.

(2) Quando seccionamos um cilindro de revolução por um plano paralelo a suas bases, a secção é um disco congruente às bases. Tais secções são, às vezes, chamadas de *secções transversais* do cilindro de revolução.

Uma **secção meridiana** de um cilindro de revolução é a intersecção do cilindro com um plano que contém seu eixo. Desta forma, todas as secções meridianas de um cilindro de revolução são retângulos congruentes.

Quando as secções meridianas são quadrados, dizemos que o cilindro de revolução é um **cilindro equilátero**. Portanto, em cilindros equiláteros temos a altura igual ao diâmetro das bases ($h = 2r$).

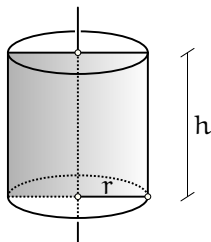


FIGURA 3.2: Secção meridiana.

Proposição 3.1 A área de um cilindro de revolução de altura h e bases de raio r é $A = 2\pi r (h + r)$.

Demonstração.

A superfície de um cilindro de revolução pode ser planificada sem distorções. As bases são discos de raio r , enquanto que a parte lateral pode ser planificada em um retângulo de lados medindo $2\pi r$ e h .

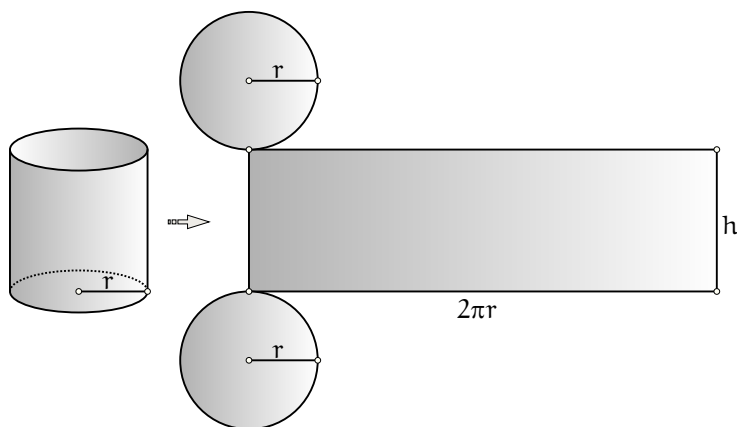


FIGURA 3.3: Decomposição da superfície de um cilindro de revolução.

$$\text{Logo, } A = 2(\pi r^2) + (2\pi r)h \Rightarrow A = 2\pi r(r + h).$$

□

Proposição 3.2 O volume de um cilindro de revolução de altura h e bases de raio r é $V = \pi r^2 h$ (ou seja, produto da área de uma das bases pela altura).

Demonstração.

Tomemos um prisma de altura h e área de uma das bases $b = \pi r^2$. Posicionemos o cilindro e o prisma apoiados (pelas bases) sobre um mesmo plano α e situados de um mesmo lado de α , conforme a figura abaixo.

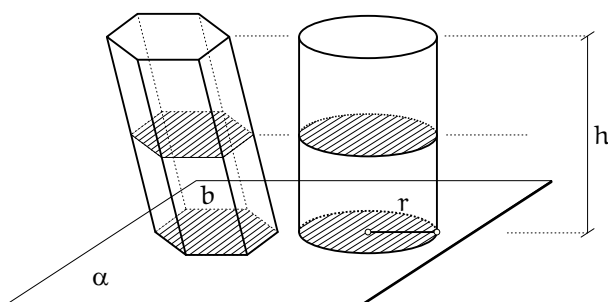


FIGURA 3.4: Comparando os volumes do prisma e do cilindro por meio do Princípio de Cavalieri.

Temos que planos paralelos a α que seccionam os dois sólidos determinam secções (um disco e um polígono) de mesma área.

Pelo Princípio de Cavalieri, os sólidos possuem mesmo volume. Como o volume do prisma é $V = bh$, concluímos que o volume do cilindro é $V = \pi r^2 h$. $\square$

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 3.1) Dado um cilindro de revolução equilátero com bases de raio r , encontre as expressões de sua área e de seu volume em função de r .

Resolução.

Em um cilindro equilátero temos $h = 2r$. Logo, $A = 2\pi r(r + h) = 2\pi r(r + 2r) = 6\pi r^2$ é a área e $V = \pi r^2 h = \pi r^2 2r = 2\pi r^3$. $\square$

EXERCÍCIO 3.2) Um cilindro de revolução tem bases de raio 4 cm. Calcule seu volume sabendo que a área de sua superfície lateral é igual ao dobro da área de uma de suas bases.

Resolução.

Chamemos de A_l a área lateral e de A_b a área de uma das bases do cilindro de revolução. Logo, $A_l = 2A_b$, ou seja, $2\pi r h = 2\pi r^2$. Portanto, $h = r = 4$ cm.

Desta forma, $V = \pi r^2 h = \pi 4^2 4 = 64\pi$ cm³ é o volume pedido (aproximadamente 201 mililitros). $\square$

EXERCÍCIO 3.3) As bases de um cilindro de revolução tem raio 2 cm e as áreas das secções meridianas são iguais à área de uma de suas bases. Calcule a área do cilindro.

Resolução.

Chamemos de A_m a área de uma secção meridiana do cilindro de revolução e A_b a área de uma de suas bases. Logo, $A_m = A_b$, ou seja, $2rh = \pi r^2$. Sendo $r = 2$ cm temos $h = \frac{\pi r^2}{2} = \pi$ cm. Logo, $A = 2\pi r(r + h) = 2\pi 2(2 + \pi) = 8\pi + 4\pi^2$ cm² é a área procurada. $\square$

EXERCÍCIO 3.4) A altura de um cilindro de revolução é igual ao triplo do raio de suas bases. Exprima a área da superfície lateral do cilindro em função da área (total).

Resolução.

Chamemos de A_l a área lateral do cilindro de revolução. Temos $A_l = 2\pi r h$ e $A = 2\pi r(r + h)$ como área total. Sendo $h = 3r$, temos $A_l = 2\pi r 3r$ e $A = 2\pi r(r + 3r)$, ou seja, $A_l = 6\pi r^2$ e $A = 8\pi r^2$, de onde concluímos que $\frac{A_l}{A} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2}$, resultando $A_l = \frac{3}{4}A$. $\square$

EXERCÍCIO 3.5) Mostre que o volume de um cilindro de revolução é igual ao produto da área da superfície lateral pela metade do raio das bases.

Resolução.

Lembrando que $A_l = 2\pi r h$ é a área lateral do cilindro de revolução, temos

$$V = \pi r^2 h = (2\pi r h) \frac{r}{2} = A_l \frac{r}{2}.$$

$\square$

EXERCÍCIO 3.6) Um cilindro de revolução está inscrito em um prisma regular quadrangular ⁽¹⁾. Estabeleça a razão entre os volumes do prisma e do cilindro.

Resolução.

Considere a figura abaixo, na qual o cilindro de revolução está inscrito no prisma regular.

¹De um modo geral, e dito de forma não muito precisa, um sólido S_1 **inscrito** em um sólido S_2 significa que S_1 é, dentre todos os sólidos do mesmo “tipo” de S_1 , o que possui o maior volume e está contido em S_2 . No caso específico de S_1 ser cilindro de revolução e S_2 ser prisma regular, temos que S_1 é o maior cilindro de revolução (isto é, o de maior volume) contido no prisma S_2 . É possível mostrar que, neste caso, as bases do cilindro de revolução devem estar contidas nas bases do prisma.

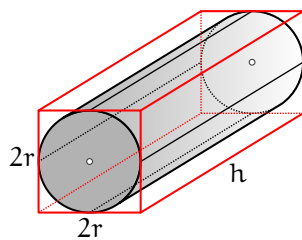


FIGURA 3.5: Cilindro inscrito em prisma.

Seja r o raio das bases do cilindro e h sua altura. Temos o volume do prisma é dado por $V_p = (2r)^2 h$ enquanto que o volume do cilindro é dado por $V_c = \pi r^2 h$. Logo, $\frac{V_p}{V_c} = \frac{4r^2 h}{\pi r^2 h} = \frac{4}{\pi}$, ou seja, $V_p = \frac{4}{\pi} V_c$. $\square$

EXERCÍCIO 3.7) Mostre, utilizando Cálculo Diferencial, que fixado um volume V , dentre todos os cilindros de revolução, o de menor área é o equilátero.

Resolução.

Seja um cilindro de revolução de raio das bases r e altura h . Temos que $V = \pi r^2 h$, sendo V o volume fixado (portanto V é uma constante positiva), e $A = 2\pi r(r + h)$ sua área. De $V = \pi r^2 h$ temos $h = \frac{V}{\pi r^2}$ que, substituindo em $A = 2\pi r(r + h)$, fornece $A = 2\pi r\left(r + \frac{V}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$, ou seja, a área do cilindro está em função do raio r e escreveremos

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r},$$

que é uma função real de uma variável real com domínio $\mathbb{R}^+$.

A função A é derivável em $\mathbb{R}^+$ (veja que podemos escrevê-la como uma função racional). Logo,

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$

Seus pontos críticos podem ser encontrados fazendo $A'(r) = 0$, ou seja, $4\pi r = \frac{2V}{r^2}$, que fornece

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Trata-se de um ponto crítico de mínimo local de A , pois $A''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0$ para qualquer r (ou seja, o gráfico de A possui concavidade para cima).

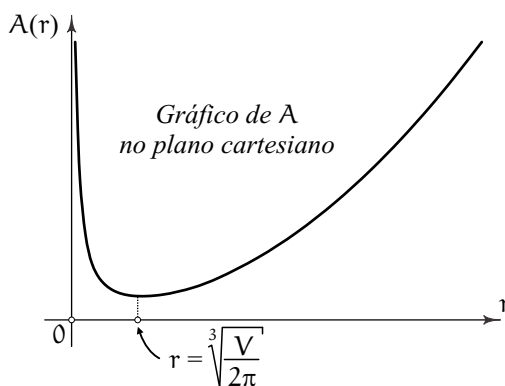


FIGURA 3.6: Gráfico da função área do cilindro.

De $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ temos $r = \sqrt[3]{\frac{\pi r^2 h}{2\pi}}$, ou seja, $r = \frac{h}{2}$. Portanto, o valor de r que minimiza a área do cilindro é tal que $h = 2r$ e, desta forma, o cilindro “ótimo” é um cilindro equilátero. $\square$

Exercício Proposto

EXERCÍCIO 3.8) Um “caminhão pipa” transporta álcool em um tanque de formato cilíndrico com 2 metros de diâmetro e 12 metros de comprimento. Sabendo-se que a altura do nível do álcool é de 1,5 metros, conforme esboçado na figura abaixo.

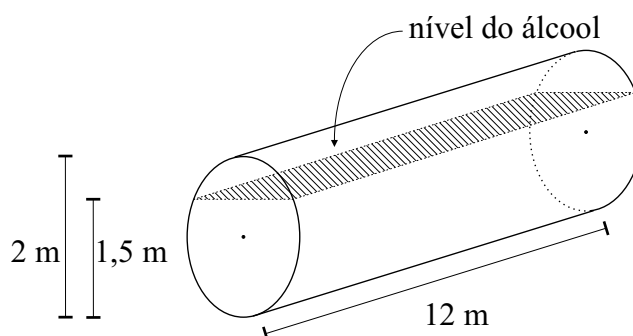


FIGURA 3.7: Tanque em formato de cilindro.

Determine o volume, em litros, do álcool existente no tanque.

Resposta: $\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) 12.000$ litros $\cong 30.329$ litros.

3.2 Cones de Revolução

DEFINIÇÕES

Assim como no caso do cilindro, a definição geral de *cone* é bem ampla e não será nosso objeto de estudos. O caso especial que nos interessa é o do **cone de revolução**, que é o sólido gerado por um triângulo retângulo quando o giramos 360° em torno de um de seus catetos.

Para fixar os conceitos, seja ABC o triângulo retângulo da definição acima. Consideremos o cone como sendo gerado pela rotação do triângulo retângulo ABC em torno do cateto BC . O cateto AB , perpendicular ao cateto BC , gera no cone um disco de raio $r = AB$, com centro em B . Tal disco é chamado de **base** do cone e o ponto C é seu **vértice**. A distância do vértice de um cone ao plano que contém sua base é a **altura** do cone (portanto, a altura é o comprimento do cateto BC do triângulo retângulo). O lado BC do triângulo retângulo é chamado de **eixo** do cone enquanto que qualquer segmento com extremo em seu vértice, congruente à hipotenusa AB , e contido na superfície do cone, é chamado de **geratriz** do cone.

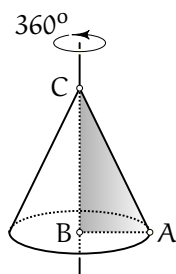


FIGURA 3.8: Cone de revolução.

Como o eixo de um cone de revolução é perpendicular a sua base, também é comum dizermos “**cone circular reto**” para designar um cone de revolução.

A superfície de um cone de revolução divide o espaço em duas regiões: uma limitada e outra não limitada. A região limitada é chamada de **interior** do cone.

Observações:

(1) De forma análoga ao que já ocorre com poliedros e cilindros de revolução, às vezes, o emprego da palavra “cone” refere-se a sua superfície como, por exemplo, quando falamos em cálculo da área de um cone. Às vezes “cone” significa a reunião da superfície com seu interior como, por exemplo, quando falamos em cálculo do volume de um cone. A definição que demos acima não é pontual quanto a isto, uma vez que a palavra “triângulo” também pode ser utilizada em dois contextos.

(2) Quando seccionamos um cone de revolução por um plano paralelo a sua base, a secção é um disco. Tais secções são, às vezes, chamadas de *secções transversais* do cone de revolução.

Uma **secção meridiana** de um cone de revolução é a intersecção do cone com um plano que contém seu eixo. Desta forma, todas as secções meridianas de um cone de revolução são triângulos isósceles congruentes.

Quando as secções meridianas são triângulos equiláteros, dizemos que o cone de revolução é um **cone equilátero**.

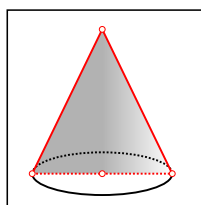


FIGURA 3.9: *Secção meridiana do cone.*

Observemos que em um cone de revolução com altura h , raio da base r e geratrizes medindo g temos

$$g^2 = h^2 + r^2.$$

Essa relação é decorrência imediata do Teorema de Pitágoras pois h , r e g são medidas dos lados do triângulo retângulo utilizado para gerar o cone.

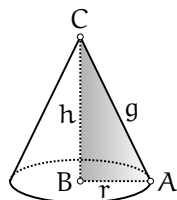


FIGURA 3.10: *Elementos métricos do cone de revolução.*

Proposição 3.3 *Seccionando-se um cone de revolução de altura h por um plano paralelo a sua base e à distância d do vértice, tem-se que a razão entre a área da secção e a área da base é $\left(\frac{d}{h}\right)^2$.*

Demonstração

Consideremos a figura abaixo.

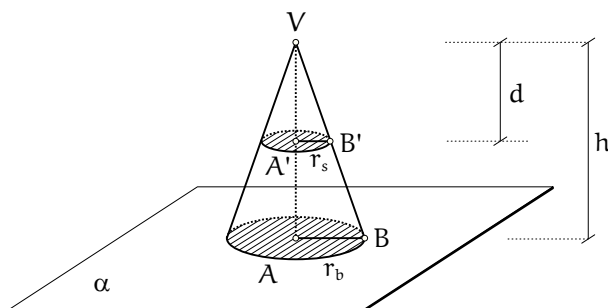


FIGURA 3.11: *Seccionando o cone de revolução.*

Temos que os triângulos VAB e $VA'B'$ são semelhantes. Seja r_s o raio da secção e r_b o raio da base. Logo,

$$\frac{d}{h} = \frac{r_s}{r_b} \Rightarrow \frac{A_s}{A_b} = \frac{\pi r_s^2}{\pi r_b^2} = \left(\frac{d}{h}\right)^2,$$

como queríamos. □

ÁREA DE SETOR CIRCULAR

Consideremos uma função f que associa os ângulos de medida θ dos setores circulares de raio r (fixo) às suas áreas, ou seja, $A_\theta = f(\theta)$ é a área do setor circular de raio r e ângulo de medida θ .

A função f é, obviamente, crescente (decorre das propriedades de área, cujo conceito pode ser conferido na disciplina de geometria plana) e, além disso, se duplicarmos o ângulo do setor, a área duplica. Se triplicarmos o ângulo do setor, a área triplica, e assim por diante. Logo, estamos nas hipóteses do *Teorema Fundamental da Proporcionalidade*. Isso significa que a medida do ângulo de um setor circular é diretamente proporcional a sua área. Assim, $A_\theta = f(\theta) = k\theta$, sendo $k = f(1)$ a área do setor circular de ângulo 1. Se adotarmos a unidade de medida radianos, a área de um setor circular de ângulo medindo 1 radiano é $\frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{r^2}{2}$.

Assim,

$$A_\theta = \frac{r^2}{2} \theta$$

é a área de um setor circular de raio r e ângulo de medida θ radianos.

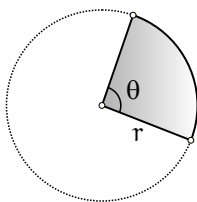


FIGURA 3.12: Setor circular de ângulo θ e raio r .

Se utilizarmos a unidade de medida graus temos $k = f(1) = \frac{\pi r^2}{360^\circ}$, ou seja, $A_\theta = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \theta$ sendo θ dado em graus.

O racicínio desenvolvido acima pode ser colocado em um dispositivo prático bastante interessante, conhecido como “regra de três”:

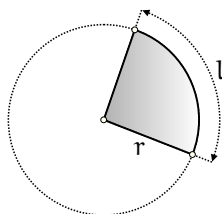
$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \text{Ângulo (rad)} & & \text{Área Setor} & \uparrow \\ & 2\pi & \text{—} & \pi r^2 & \\ & \theta & \text{—} & A_\theta & \end{array} \implies 2\pi A_\theta = \theta \pi r^2 \implies A_\theta = \frac{r^2}{2} \theta.$$

O mesmo desenvolvimento acima pode ser feito relacionando as grandezas comprimento de arco l do setor circular de raio r e sua área A_l , chegando a

$$A_l = \frac{r}{2} l.$$

O dispositivo prático, neste caso, fica do seguinte modo:

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \text{Comprimento Arco} & & \text{Área Setor} & \uparrow \\ & 2\pi r & \text{—} & \pi r^2 & \\ & l & \text{—} & A_l & \end{array} \implies 2\pi r A_l = l \pi r^2 \implies A_l = \frac{r}{2} l.$$

FIGURA 3.13: Setor circular de arco l e raio r .

Essa mesma fórmula pode ser obtida de $A_\theta = \frac{r^2}{2}\theta$ apenas lembrando da definição de radiano: $\theta = \frac{l}{r}$.

ÁREA DE CONE DE REVOLUÇÃO

A superfície de um cone de revolução pode ser planificada em um setor circular (superfície lateral) e um disco (base).

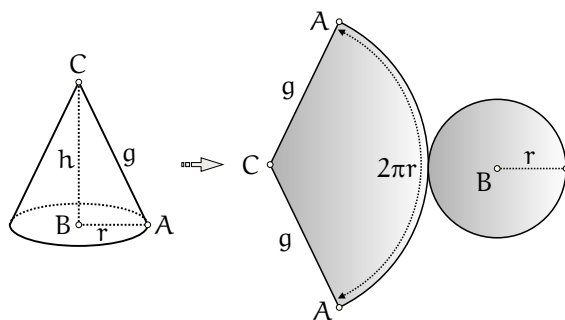


FIGURA 3.14: Decompondo a superfície de um cone de revolução.

Supondo que as geratrizes do cone medem g e o raio da base é r , a área da superfície lateral desse cone é a área de um setor circular de raio g e comprimento de arco $2\pi r$. Logo, sua área lateral A_l é dada por

$$A_l = \frac{g}{2} 2\pi r = \pi r g.$$

O dispositivo prático, neste caso, é dado por

$$\begin{array}{ccccc} \text{Comprimento Arco} & & \text{Área Setor} & & \\ \uparrow & 2\pi g & \text{---} & \pi g^2 & \uparrow \\ & 2\pi r & \text{---} & A_l & \end{array} \implies 2\pi g A_l = 2\pi r \pi g^2 \Rightarrow A_l = \pi r g.$$

O ângulo de medida θ radianos do setor circular, que é a planificação da superfície lateral do cone de revolução, é tal que $\theta = \frac{2\pi r}{g}$ radianos.

A área (total) de um cone de revolução de geratrizes medindo g e raio da base r será dada, portanto, por

$$A = \pi r g + \pi r^2 = \pi r (g + r).$$

VOLUME DE CONE DE REVOLUÇÃO

Proposição 3.4 O volume de um cone de revolução de altura h e raio da base r é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Demonstração.

Tomemos uma pirâmide de altura h e área da base $b = \pi r^2$ (mesma área da base do cone). Posicionemos o cone e a pirâmide apoiados (pelas bases) sobre um mesmo plano α e situados de um mesmo lado de α , conforme a figura abaixo.

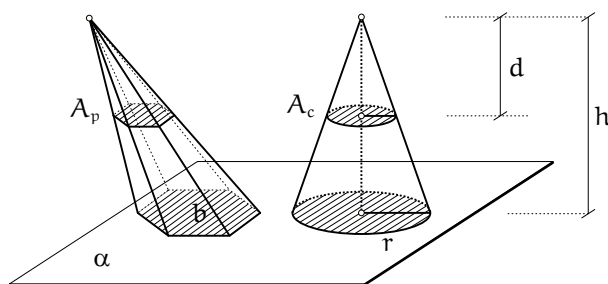


FIGURA 3.15: Comparando volumes de prisma e cone pelo Princípio de Cavalieri.

Temos que planos β paralelos a α que seccionam os dois sólidos determinam seções (um disco e um polígono) de mesma área.

De fato, suponhamos que a distância dos vértices do cone e da pirâmide ao plano β seja d , que as áreas das seções que β produz no cone e na pirâmide sejam A_c e A_p , respectivamente.

Temos (proposições já vistas) que

$$\frac{A_c}{b} = \left(\frac{d}{h}\right)^2 = \frac{A_p}{b} \Rightarrow A_c = A_p.$$

Pelo Princípio de Cavalieri, os sólidos possuem mesmo volume. Como o volume da pirâmide é $V = \frac{1}{3}bh$, concluímos que o volume do cone é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. $\square$

A demonstração da proposição abaixo é deixada para o leitor.

Proposição 3.5 Seccionando-se um cone de revolução $\mathcal{C}$ de vértice V por um plano paralelo à sua base tem-se:

- (i) o cone $\mathcal{C}'$ de vértice V a base na seção é semelhante ao cone original.
- (ii) a razão entre os volumes de $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}$ é o cubo da razão de semelhança entre esses cones.

Dica: para a parte (i) crie uma homotetia de centro V e razão $\frac{h}{d}$ sendo h a altura de $\mathcal{C}$ e d a altura de $\mathcal{C}'$.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 3.9) Dado um cone de revolução equilátero de raio da base r , calcule (em função de r apenas):

- (a) Sua área (total).
- (b) Seu volume.
- (c) A medida, em radianos, do ângulo do setor circular obtido pela planificação da superfície lateral do cone.

Resolução.

(a) Sendo um cone equilátero temos $h = \frac{\sqrt{3}}{2}2r$ e $g = 2r$ (seções meridianas são triângulos equiláteros). Sua área é dada por $A = \pi r(g + r) = \pi r(2r + r) = 3\pi r^2$.

(b) Seu volume é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{\sqrt{3}}{2}2r = \frac{\sqrt{3}\pi r^3}{3}$.

(c) Pela definição de radiano temos $\alpha = \frac{2\pi r}{g} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi$. Portanto a superfície planificada de um cone equilátero é um semidisco. $\square$

EXERCÍCIO 3.10) O raio da base de um cone de revolução é 5 cm e as geratrizes medem 13 cm. Calcule o volume e a área desse cone.

Resolução.

Sendo o raio $r = 5$ cm e as geratrizes $g = 12$ cm, pelo Teorema de Pitágoras, $h^2 + r^2 = g^2$, e temos $h = 12$ cm.

Assim, o volume é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 5^2 12 = 100\pi \text{ cm}^3$.

A área é dada por $A = \pi r (g + r) = \pi 5 (13 + 5) = 90\pi \text{ cm}^2$. $\square$

EXERCÍCIO 3.11) As geratrizes de um cone de revolução tem por medida o triplo do raio da base. Qual é a medida, em radianos, do ângulo do setor circular que se obtém planificando a superfície lateral do cone?

Resolução.

Temos $g = 3r$.

Como o ângulo do setor circular em questão é dado por $\alpha = \frac{2\pi r}{g} = \frac{2\pi r}{3r} = \frac{2\pi}{3}$ radianos. $\square$

EXERCÍCIO 3.12) A superfície lateral de um cone de revolução, quando planificada, é um setor circular de ângulo que mede 288° e sua área é $20\pi \text{ cm}^2$. Calcule o volume desse cone.

Resolução.

Em radianos, o ângulo do setor central é dado por $\frac{\pi}{180^\circ} 288^\circ = \frac{8\pi}{5}$ radianos. Além disso, pela definição de radiano, $\frac{8\pi}{5} = \frac{2\pi r}{g}$, ou seja, $r = \frac{4g}{5}$.

A área da superfície lateral do cone é dada por $A_l = \pi r g$, ou seja, $20\pi = \pi r g$. Substituindo $r = \frac{4g}{5}$ temos $20 = \frac{4g}{5} g$, portanto, $g = 5 \text{ cm}$. Por conseguinte, $r = 4 \text{ cm}$ e podemos calcular a altura do cone por meio do Teorema de Pitágoras, $h^2 + r^2 = g^2$, ou seja, $h = 3 \text{ cm}$.

Conclusão, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 4^2 3 = 16\pi \text{ cm}^3$. $\square$

EXERCÍCIO 3.13) A que distância do vértice devemos cortar um cone de revolução de altura h por um plano paralelo à base, para que a base do cone menor obtido tenha área igual a $\frac{1}{9}$ da área da base do cone original?

Resolução.

Seja d a distância do vértice do cone até a secção do corte (é a altura do cone menor em questão). Sejam h e r a altura e raio da base do cone original. Por fim, seja r' o raio da base do cone menor de altura d .

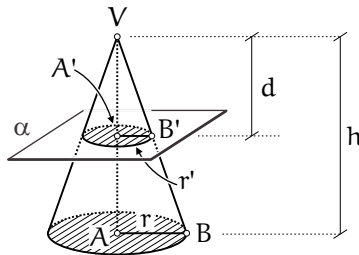


FIGURA 3.16: Seccionando um cone de revolução.

Os triângulos retângulos $VA'B'$ e VAB são semelhantes. Logo, $\frac{d}{h} = \frac{r'}{r}$.

Além disso, de acordo com o enunciado, a razão entre as áreas das bases dos cones, $\frac{A'_b}{A_b}$ é $\frac{1}{9}$, ou seja, $\frac{\pi(r')^2}{\pi r^2} = \frac{1}{9}$. Logo, $\frac{d}{h} = \frac{1}{3}$, ou seja, $d = \frac{1}{3}h$. $\square$

3.3 Troncos de Cilindro e de Cone

TRONCOS DE CILINDRO

Consideremos um cilindro de revolução e um plano α , não paralelo às bases, que intersecta sua superfície lateral mas não intersecta suas bases. O plano α divide o cilindro em dois sólidos, cada qual chamado de **tronco de cilindro de revolução**.

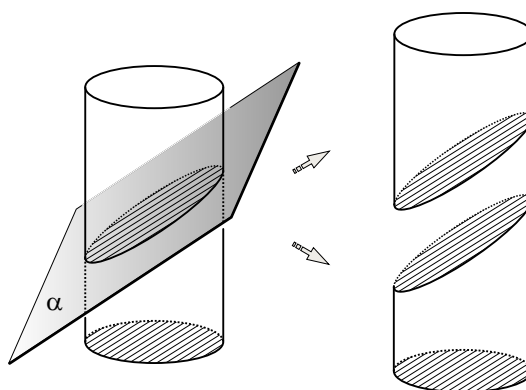


FIGURA 3.17: Troncos de cilindro.

A base original do cilindro que originou um tronco de cilindro será chamada de **base do tronco de cilindro de revolução**.

A secção que o plano α produz no cilindro delimita uma “face” no tronco de cilindro que tem formato elíptico. Chamemos esta secção de **face elíptica** do tronco.

Sejam h_1 e h_2 a menor e a maior distância, respectivamente, entre pontos da face elíptica de um tronco de cilindro e o plano que contém sua base. O número

$$h = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

é chamado de **altura média** do tronco de cilindro.

Teorema 3.1 *O volume de um tronco de cilindro de revolução é o produto da área de sua base por sua altura média.*

Exercício Proposto

EXERCÍCIO 3.14) Demonstre o teorema acima.

TRONCOS DE CONE

Consideremos um cone de revolução e um plano α que intersecta sua superfície lateral mas não intersecta sua base. Excluamos o caso em que α intersecta o cone apenas em seu vértice.

O plano α divide o cone em dois sólidos. Um deles é um novo cone com o mesmo vértice do cone original (que pode não ser cone de revolução, conforme figura abaixo à esquerda). O outro sólido é chamado de **tronco de cone de revolução**.

O caso interessante de ser estudado é quando o plano α é paralelo à base do cone original. Neste caso, dizemos que o tronco de cone possui **bases paralelas**, sendo a base do cone original chamada de **base maior** do tronco e sendo a secção determinada por α (que é um disco nesse caso) chamada de **base menor** do tronco (figura abaixo à direita). A distância entre os planos que passam pelas bases maior e menor de um tronco de cone de bases paralelas é chamada de **altura** do tronco.

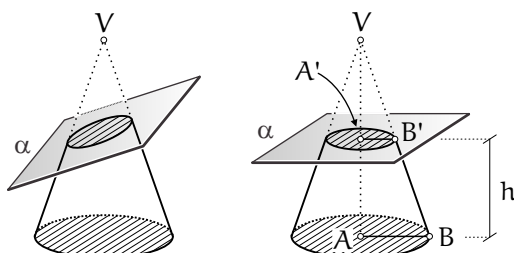


FIGURA 3.18: Obtendo troncos de cones.

O segmento que é parte do eixo do cone de revolução original e que permanece no tronco de cone é chamado de **eixo do tronco** de cone de revolução de bases paralelas. O mesmo ocorre com os segmentos que são partes das geratrizes do cone de revolução original e que permanecem na superfície lateral do tronco. Tais segmentos são chamados de **geratrizes** do tronco de cone de revolução de bases paralelas (note que essas geratrizes são todas congruentes).

A intersecção de um tronco de cone com um plano que contém seu eixo é chamada de **secção meridiana** do tronco de cone de revolução de bases paralelas. Notemos que todas as secções meridianas de um tronco de cone são trapézios isósceles congruentes.

Teorema 3.2 *O volume de um tronco de cone de revolução de bases paralelas é dado por $V = \frac{h\pi}{3} (r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$, sendo h a altura do tronco, r_1 e r_2 raios das bases maior e menor do tronco.*

Demonstração.

A demonstração desta fórmula pode ser feita de duas maneiras distintas: (i) seguindo o mesmo procedimento que adotamos quando deduzimos o volume do tronco de pirâmide de bases paralelas ou (ii) utilizando o Princípio de Cavalieri e comparando o tronco de cone com um tronco de pirâmide de mesma altura e áreas das bases.

Vamos repetir o procedimento (i).

Consideremos o cone de revolução de altura H e base de área πr_1^2 do qual o tronco de cone de bases paralelas (de altura h e bases maior de área πr_1^2 e menor de área πr_2^2) foi extraído.

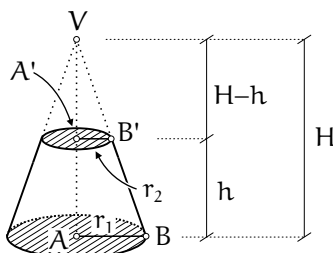


FIGURA 3.19: Deduzindo o volume do tronco de cone.

Logo, o volume do tronco de cone é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r_1^2 H - \frac{1}{3}\pi r_2^2 (H - h)$, que é a diferença entre os volumes do cone original e do cone menor semelhante a este, situado sobre o tronco de cone.

Mas devido à semelhança entre os triângulos retângulos $VA'B'$ e VAB temos $\frac{H-h}{H} = \frac{r_2}{r_1}$. Isolando nesta última igualdade temos $H = \frac{hr_1}{r_1 - r_2}$. Logo,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi r_1^2 H - \frac{1}{3}\pi r_2^2 (H - h) \\ &= \frac{\pi}{3} (r_1^2 - r_2^2) H + \frac{\pi}{3} r_2^2 h \\ &= \frac{\pi}{3} \left((r_1^2 - r_2^2) \frac{hr_1}{r_1 - r_2} + r_2^2 h \right) \\ &= \frac{h\pi}{3} ((r_1 + r_2) r_1 + r_2^2) \\ &= \frac{h\pi}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2), \end{aligned}$$

como queríamos. □

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 3.15) Um tronco de cone de revolução de bases paralelas possui geratrizes medindo g e raios das bases maior e menor r_1 e r_2 , respectivamente. Calcule a área e o volume desse tronco em função de g , r_1 e r_2 .

Resolução.

Consideremos a figura abaixo.

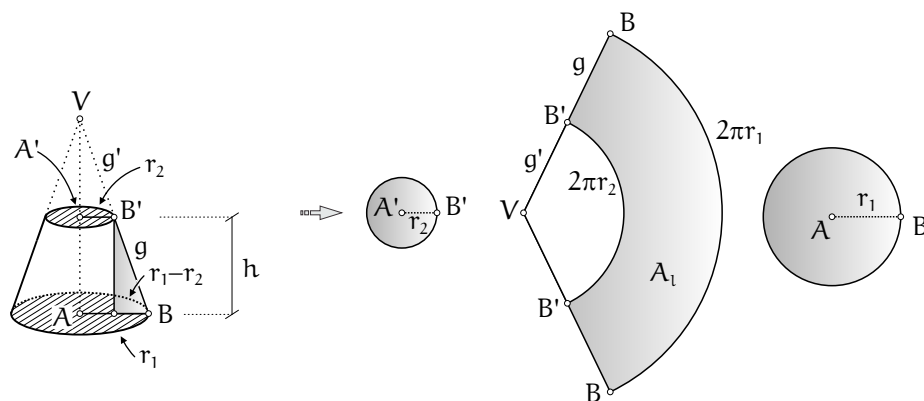


FIGURA 3.20: Decompondo a superfície de um tronco de cone.

Devido à semelhança entre os triângulos $VA'B'$ e VAB temos $\frac{g'}{r_2} = \frac{g'+g}{r_1}$. Isolando g' nesta última igualdade temos $g' = \frac{r_2 g}{r_1 - r_2}$.

A área da superfície lateral A_l do tronco de cone é dada pela diferença entre as áreas laterais do cone original (setor circular maior na figura acima) e do cone semelhante menor (setor circular menor na figura acima), ou seja, $A_l = \pi r_1 (g + g') - \pi r_2 g'$. Assim, a área (total) do tronco de cone é dada por:

$$\begin{aligned} A &= \pi r_1 (g + g') - \pi r_2 g' + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 \\ &= \pi (r_1 g + (r_1 - r_2) g' + r_1^2 + r_2^2) \\ &= \pi \left(r_1 g + (r_1 - r_2) \frac{r_2 g}{r_1 - r_2} + r_1^2 + r_2^2 \right) \\ &= \pi (r_1^2 + (r_1 + r_2) g + r_2^2). \end{aligned}$$

Quanto ao volume, observemos que a altura h do tronco de cone é, pelo Teorema de Pitágoras, tal que $h^2 + (r_1 - r_2)^2 = g^2$ (veja a figura acima). Logo, $h = \sqrt{g^2 - (r_1 - r_2)^2}$ e temos:

$$V = \frac{\sqrt{g^2 - (r_1 - r_2)^2} \pi}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2),$$

como queríamos. □

EXERCÍCIO 3.16) Um cone de revolução tem altura h . Um plano paralelo a sua base o secciona, separando-o em um cone de revolução menor e em um tronco de cone. Determine a distância deste plano ao vértice do cone original para que o volume do cone menor seja igual a $\frac{1}{8}$ o volume do cone dado.

Resolução.

Sejam V_1 e V_2 os volumes dos cones original e seccionado. Pelo enunciado, $V_2 = \frac{1}{8} V_1$. Sejam r_1, r_2, h_1 e h_2 os raios das bases e as alturas dos cones original e seccionado.

Logo, $\frac{1}{3} \pi r_2^2 h_2 = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1 \right)$, ou seja, $\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{8}$.

Mas os triângulos $VA'B'$ e VAB são semelhantes.

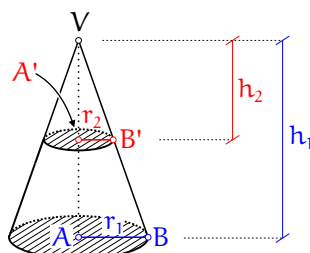


FIGURA 3.21: Seccionando o cone.

Logo, $\frac{r_2}{r_1} = \frac{h_2}{h_1}$. Assim, $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 = \frac{1}{8}$, ou seja, $h_2 = \frac{1}{2}h_1$. Logo, devemos seccionar o cone original à distância de “meia altura” de seu vértice para que tenhamos as condições do enunciado satisfeitas. $\square$

EXERCÍCIO 3.17) Em um tronco de cone de revolução de geratrizes medindo 10 cm e raios das bases 2 cm e 8 cm, calcule a área (total) e o volume do tronco.

Resolução.

Aproveitando o EXERCÍCIO 3.15,

$$\begin{aligned} A &= \pi (r_1^2 + (r_1 + r_2) g + r_2^2) \\ &= \pi (8^2 + (8 + 2) 10 + 2^2) \\ &= 168\pi \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{g^2 - (r_1 - r_2)^2} \pi}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \\ &= \frac{\sqrt{10^2 - (8 - 2)^2} \pi}{3} (8^2 + 8 \cdot 2 + 2^2) \\ &= 224\pi \text{ cm}^3, \end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

3.4 Esferas e Sólidos Esféricos

DEFINIÇÕES

Dado um ponto C no espaço e um número real positivo r , o lugar geométrico (conjunto) dos pontos do espaço que estão à distância menor do que ou igual a r do ponto C é chamado de **esfera de centro C e raio r** .

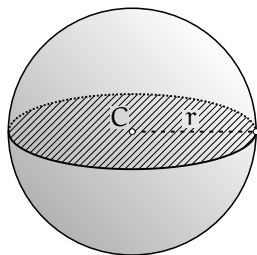


FIGURA 3.22: Esfera.

A *superfície* de uma esfera é constituída dos pontos que estão à distância r do ponto C . Tal superfície divide o espaço em dois conjuntos: um limitado e outro não limitado. O conjunto limitado é chamado de **interior** da esfera. É fácil mostrar que uma esfera é um conjunto convexo.

É importante registrar que, assim como nos poliedros, a palavra “esfera” pode ser utilizada em dois contextos: tanto para a *superfície* da esfera quanto para a *reunião* da superfície da esfera com seu interior. Assim, quando falamos da área de uma esfera, estamos nos referindo a sua superfície e, quando falamos em volume de uma esfera, estamos nos reportando ao seu interior. Em textos mais avançados, uma esfera considerada com seu interior recebe o nome de “bola”.

Outra forma de definir uma esfera é considerar o sólido gerado pela rotação de “meia volta” (isto é, 180°) de um disco em torno de uma reta que passa pelo seu centro.

É fácil provar que uma secção de uma esfera por um plano α à distância $d < r$ de seu centro é um disco de raio $\rho = \sqrt{r^2 - d^2}$. Quando $d = 0$, a secção produzida por α possui o mesmo raio da esfera,

pois α passa pelo centro da mesma. Tal secção é chamada de **disco máximo** ou **círculo máximo** ⁽²⁾ da esfera. Quando $d = r$, o plano α possui em comum com a superfície da esfera apenas um único ponto T . Neste caso, dizemos que o plano α é **tangente** à esfera no ponto T .

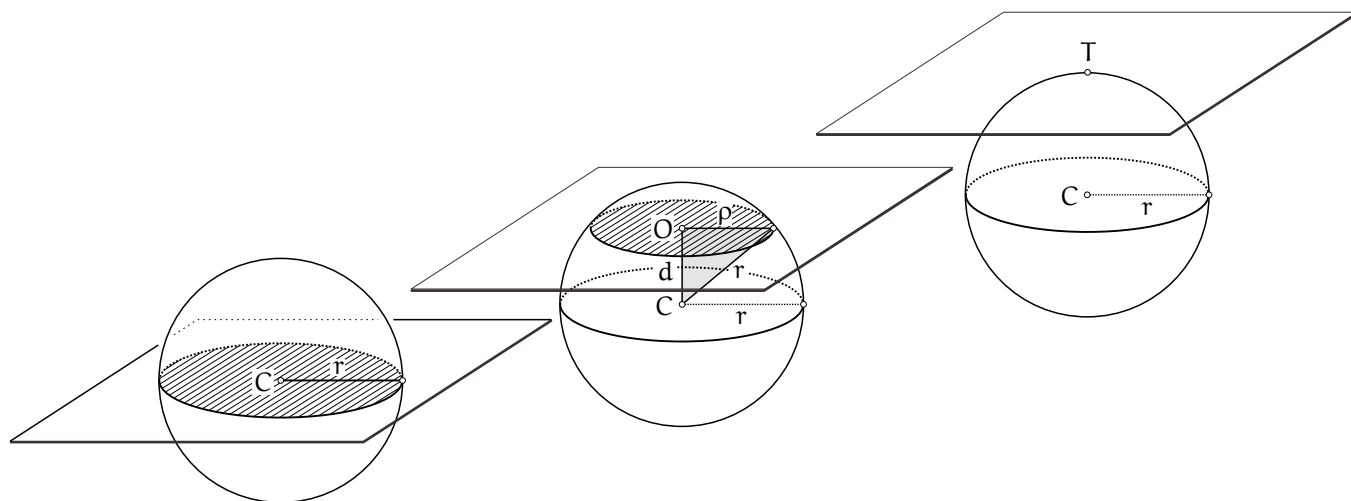


FIGURA 3.23: Secções e tangência na esfera.

Em uma esfera de raio r podemos escolher dois pontos P_1 e P_2 sobre sua superfície de tal modo que sejam simétricos em relação ao centro C da esfera (isto é, P_1 , C e P_2 estão alinhados e $CP_1 = CP_2 = r$). Tais pontos são ditos *diametralmente opostos* na esfera. Convencionando chamar P_1 e P_2 de **pólos**, há várias curvas sobre a esfera que merecem destaque e possuem nomes especiais:

(1) Planos perpendiculares ao segmento P_1P_2 que estejam à distância $d < r$ do centro C da esfera intersectam a superfície da esfera em circunferências chamada de **paralelos da esfera**.

(2) Em particular, o paralelo de raio r é chamado de **equador da esfera**.

(3) Planos que contêm o segmento P_1P_2 produzem na superfície da esfera circunferências de raio r (portanto, *circunferências máximas*) chamadas de **meridianos da esfera**.

A nomenclatura acima é, naturalmente, inspirada na geografia de nosso planeta que, devido ao seu movimento de rotação, produz dois pólos de forma natural: os pólos norte e sul. Por esse motivo, o segmento P_1P_2 é também chamado de **eixo da esfera**.

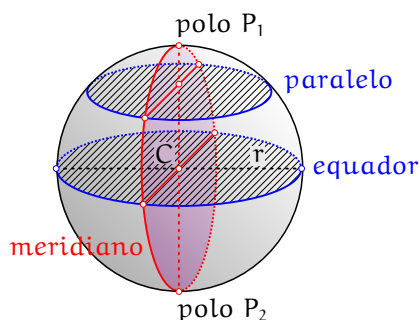


FIGURA 3.24: Elementos da esfera.

Exercício Resolvido

EXERCÍCIO 3.18) Uma esfera tem raio 13 cm. Calcule a área da secção feita por um plano nessa esfera situada a 5 cm do centro.

Resolução.

Pelo Teorema de Pitágoras, o raio ρ da secção é tal que $13^2 = 5^2 + \rho^2$, ou seja, $\rho = 12$ cm. Logo, a área em questão é $A = \pi 12^2 = 144\pi \text{ cm}^2$.

²Lembrando que a palavra “círculo” também pode ser utilizada em dois contextos: como circunferência (linha apenas) ou como disco (linha + interior).

Teorema 3.3 O volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Demonstração

Vamos usar o Princípio de Cavalieri e comparar o volume da esfera E de raio r com o volume de um sólido S obtido do seguinte modo.

Tomemos um cilindro de revolução de raios das bases r e altura $2r$. Retiremos do interior desse cilindro o volume de dois cones de revolução congruentes, opostos pelo vértice, de raios das bases r e alturas também r de tal modo que as bases dos cones coincidam com as bases do cilindro.

A FIGURA 3.25 abaixo ilustra esse sólido S , que se parece com um cilindro menos uma “ampulheta” retirada de seu interior e cujo volume sabemos calcular.

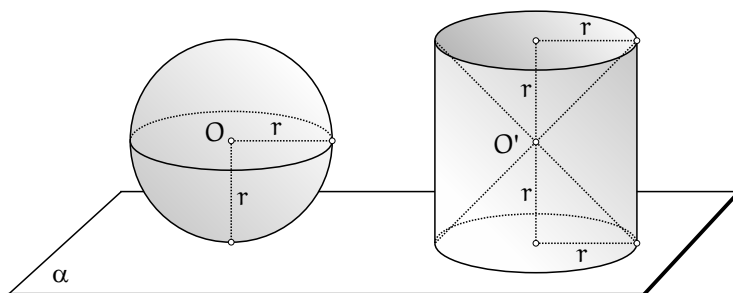


FIGURA 3.25: Comparando os volumes pelo Princípio de Cavalieri.

Posicionemos a esfera e o cilindro de um mesmo lado de um plano α tangente à esfera e contendo uma das bases do cilindro (veja a FIGURA 3.25).

Planos β paralelos a α e à distância $h < r$ do centro da esfera E a seccionam segundo discos de raio r' . Esses planos seccionam o sólido S segundo uma coroa circular de raio externo r (fixo) e raio interno h . Para verificar que o raio interno da coroa circular é, de fato, h , basta observar que cada um dos cones que foram retirados do cilindro que forma S é um cone de raio da base r e altura também r . Logo, utilizando semelhança de triângulos, uma secção de um desses cones por um plano paralelo a sua base, à distância h de seu vértice, é um disco de raio h . A FIGURA 3.26 abaixo ilustra esse procedimento.

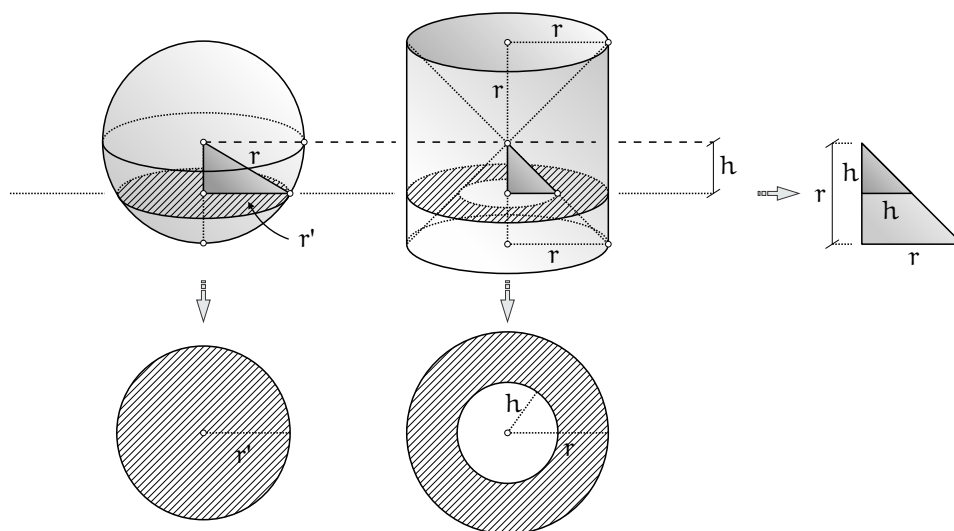


FIGURA 3.26: Seccionando os sólidos.

É claro que se $h = 0$, as secções na esfera E e no sólido S pelo plano β paralelo a α são discos de raios r .

As áreas das secções produzidas por β em E e em S são dadas por $A_E = \pi(r')^2$ (disco de raio r') e $A_S = \pi r^2 - \pi h^2$ (coroa circular de raios r e h). Mas na esfera E temos, pelo Teorema de Pitágoras, $r^2 = h^2 + (r')^2$, ou seja, $(r')^2 = r^2 - h^2$ e concluímos facilmente que $A_E = A_S$ e, portanto,

as hipóteses do Princípio de Cavalieri estão satisfeitas. Logo, os volumes de E e de S são iguais, ou seja, $V_E = V_S = \pi r^2 (2r) - 2 \left(\frac{1}{3} \pi r^2 r \right) = 2\pi r^3 - \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$. $\square$

Teorema 3.4 A área de uma esfera de raio r é $A = 4\pi r^2$.

Demonstração

Esta demonstração faz uso explícito da noção de limite.

Considere duas esferas concêntricas de centros O e raios r e $r + \varepsilon$ com $\varepsilon > 0$. O sólido S situado entre as esferas é chamado de *concha esférica*. O volume V_S desta concha esférica é, aproximadamente, $V_S \cong A \cdot \varepsilon$ para valores pequenos de ε , sendo A a área da esfera de raio r .

Para convencermos-nos dessa aproximação, observemos que se particionarmos a concha esférica por meio de muitas secções feitas por planos que passam pelo centro O das esferas, cada pequeno “sólido curvado de altura ε e base de área B ” oriundo da partição da concha esférica (FIGURA 3.27 abaixo) possui volume aproximadamente igual ao volume de um prisma reto de bases de área B e altura ε , para valores pequenos de ε .

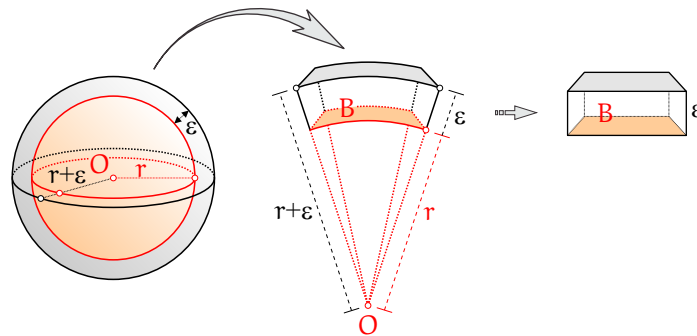


FIGURA 3.27: Concha esférica.

Desta forma, $A \cong \frac{V_S}{\varepsilon}$ sendo tanto melhor a aproximação quanto menor for o ε e, assim, podemos definir a área da esfera como sendo

$$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V_S}{\varepsilon}.$$

Mas sabemos calcular o volume da concha esférica, que é $V_S = \frac{4}{3} \pi (r + \varepsilon)^3 - \frac{4}{3} \pi r^3$. Assim,

$$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3} \pi (r + \varepsilon)^3 - \frac{4}{3} \pi r^3}{\varepsilon} = \frac{4}{3} \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r^3 + 3r^2\varepsilon + 3r\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - r^3}{\varepsilon} = \frac{4}{3} \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (3r^2 + 3r\varepsilon + \varepsilon^2) = 4\pi r^2,$$

como queríamos. $\square$

Observação interessante: na demonstração do teorema acima pode-se ver que a derivada da função volume da esfera é a área da esfera, ou seja, se $V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3$ é o volume de uma esfera em função de seu raio, então sua área em função de seu raio é dada por

$$A(r) = V'(r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(r + \varepsilon) - V(r)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3} \pi (r + \varepsilon)^3 - \frac{4}{3} \pi r^3}{\varepsilon} = 4\pi r^2.$$

O mesmo ocorre com a área e o comprimento de um círculo de raio r , ou seja, se $A(r) = \pi r^2$, então $C(r) = A'(r) = 2\pi r$.

SEGMENTOS, CALOTAS E ZONAS ESFÉRICAS

Um plano α à distância d do centro de uma esfera de raio r a secciona em duas partes, cada qual chamada de **segmento esférico de uma base**. O raio r da esfera é também o raio do segmento esférico. A base do segmento esférico é a secção produzida por α na esfera e, conforme já vimos, é um disco de raio $\rho = \sqrt{r^2 - d^2}$.

Quando $d > 0$, dizemos que o segmento esférico que não contém o centro da esfera que o originou possui **altura** $h = r - d$, enquanto que o segmento esférico que contém o centro de tal esfera possui altura $h = r + d$. Quando a secção produzida por α na esfera é um círculo máximo (portanto, $d = 0$), cada segmento esférico é chamado de **semiesfera** e sua altura h é igual ao raio r da esfera.

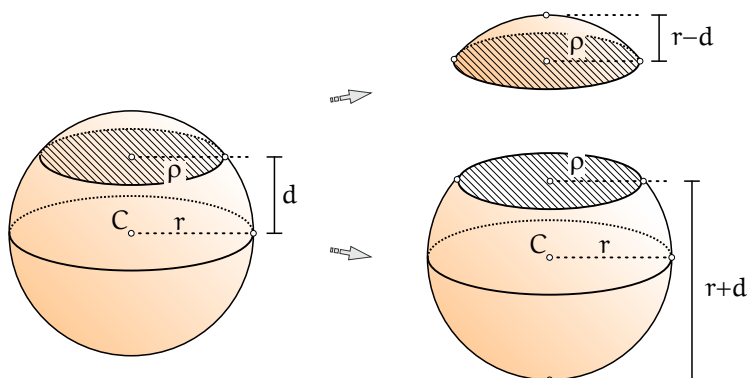


FIGURA 3.28: Segmentos esféricos de uma base.

Consideremos dois planos paralelos que seccionam uma esfera de raio r em dois discos. Tais planos dividem a esfera em três sólidos, sendo dois deles segmentos esféricos de uma base. O terceiro sólido é chamado de **segmento esférico de duas bases paralelas**. O raio r da esfera é também o raio do segmento esférico de duas bases. As bases deste terceiro sólido são as secções produzidas pelos planos na esfera.

A **altura** de um segmento esférico de duas bases paralelas é a distância entre os planos que contém suas bases.

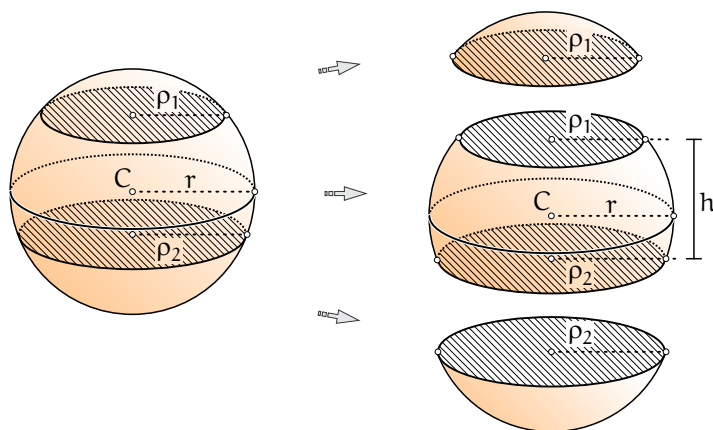


FIGURA 3.29: Construindo um segmento esférico de duas bases paralelas.

Um segmento esférico de uma base e raio r possui superfície composta por duas partes que chamamos de **faces**. Uma das faces é a base, portanto, um disco. A outra face, proveniente da superfície da esfera que originou o segmento, é chamada de **calota esférica** de raio r .

Um segmento esférico de duas bases paralelas e raio r possui superfície composta por três partes que chamamos de **faces**. Duas das faces são as bases, portanto, discos. A outra face, proveniente da superfície da esfera que originou o segmento, é chamada de **zona esférica** de raio r .

A **altura** de uma calota esférica ou zona esférica é a altura do segmento esférico que a possui como face.

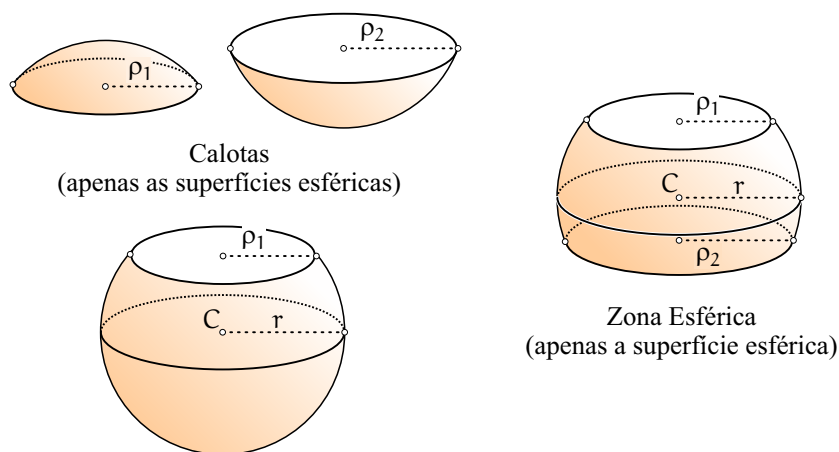


FIGURA 3.30: Calotas e zonas esféricas.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 3.19) Calcule o volume V de um segmento esférico de uma base, altura h e raio (da esfera que o originou) r .

Resolução:

Temos 3 casos:

(i) Se $h < r$, aproveitemos a figura da demonstração do volume da esfera que fizemos acima e utilizemos o Princípio de Cavalieri.

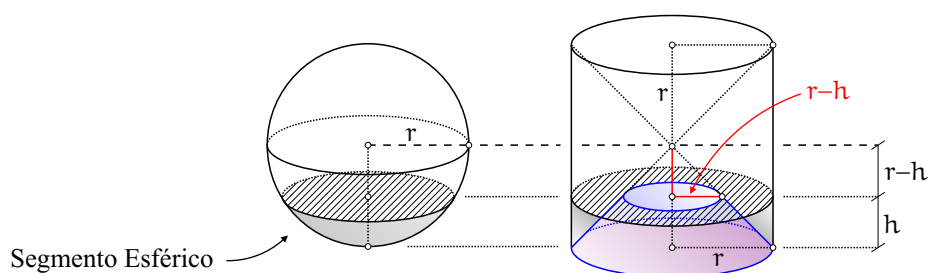


FIGURA 3.31: Deduzindo o volume de um segmento esférico de uma base.

A fórmula procurada é dada pelo volume de um cilindro de raio r menos um tronco de cone de bases com raios r e $r - h$, ambos de altura h . Logo,

$$\begin{aligned}
 V &= \pi r^2 h - \frac{h}{3} \left(\pi r^2 + \sqrt{\pi r^2 \pi (r-h)^2} + \pi (r-h)^2 \right) \\
 &= \pi r^2 h - \frac{\pi r^2 h}{3} - \frac{\pi r h}{3} (r-h) - \frac{\pi h}{3} (r-h)^2 \\
 &= \frac{2\pi r^2 h}{3} - \frac{\pi h}{3} (r^2 - 2rh + h^2) - \frac{\pi r^2 h}{3} + \frac{\pi r h^2}{3} \\
 &= \frac{2\pi r^2 h}{3} - \frac{\pi r^2 h}{3} + \frac{2\pi r h^2}{3} - \frac{\pi h^3}{3} - \frac{\pi r^2 h}{3} + \frac{\pi r h^2}{3} \\
 &= \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} \\
 &= \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right).
 \end{aligned}$$

(ii) se $h = r$ temos que o segmento esférico é uma semiesfera. Logo,

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \frac{2}{3} \pi r^3 = \pi r^2 \left(r - \frac{r}{3} \right) = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right).$$

(iii) se $h > r$ temos que a fórmula procurada é dada pelo volume de uma esfera de raio r menos um segmento esférico de raio r e altura $2r - h$.

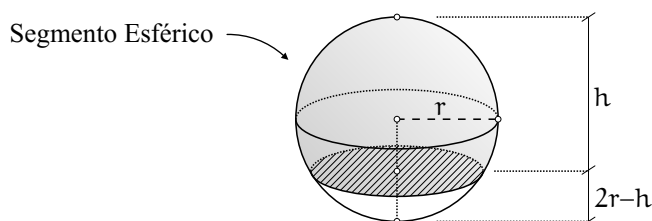


FIGURA 3.32: Segmento esférico com altura maior do que o raio.

Logo, aproveitando o Item (i):

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi(2r - h)^2 \left(r - \frac{2r - h}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{\pi}{3}(4r^2 - 4rh + h^2)(r + h) \\ &= \frac{\pi}{3}(4r^3 - (4r^3 - 4r^2h + rh^2 + 4r^2h - 4rh^2 + h^3)) \\ &= \frac{\pi}{3}(3rh^2 - h^3) \\ &= \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right). \end{aligned}$$

Em qualquer situação, o volume de um segmento esférico de uma base, de altura h e raio r , é dado por:

$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right).$$

□

EXERCÍCIO 3.20) Consideremos um segmento esférico de duas bases paralelas de volume V , de altura h e raio (da esfera que o originou) r . Consideremos as alturas h_1 e h_2 dos segmentos esféricos de uma base que, juntamente com o segmento esférico de duas bases considerado, completam uma esfera de raio r . Coloque V em função de r , h_1 e h_2 .

Observação importante: um segmento esférico de duas bases paralelas, de altura h e raio r , não fica univocamente determinado com apenas esses dois parâmetros.

Resolução:

Aproveitando o EXERCÍCIO 3.19, temos que o volume V procurado é dado pelo volume de uma esfera menos o volume de dois segmentos esféricos de uma base.

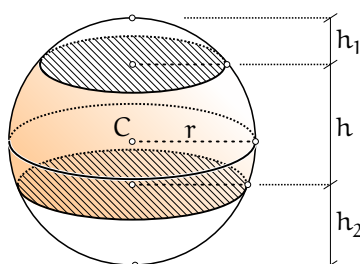


FIGURA 3.33: Deduzindo o volume de um segmento esférico de duas bases.

Logo,

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi h_1^2 \left(r - \frac{h_1}{3}\right) - \pi h_2^2 \left(r - \frac{h_2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi r (h_1^2 + h_2^2) + \frac{\pi}{3} (h_1^3 + h_2^3)}.$$

□

Observemos que, se no EXERCÍCIO 3.20, interpretássemos um segmento esférico de uma base como tendo $h_2 = 0$, teríamos $h_1 = 2r - h$ e a fórmula ficaria

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi r (h_1^2 + h_2^2) + \frac{\pi}{3} (h_1^3 + h_2^3) \\ &= \pi \left(\frac{4}{3}r^3 - r(2r - h)^2 + \frac{1}{3}(2r - h)^3 \right) \\ &= \pi \left(\frac{4}{3}r^3 - r(4r^2 - 4rh + h^2) + \frac{1}{3}(8r^3 - 12r^2h + 6rh^2 - h^3) \right) \\ &= \pi \left(\frac{4}{3}r^3 - 4r^3 + 4r^2h - rh^2 + \frac{8}{3}r^3 - 4r^2h + 2rh^2 - \frac{1}{3}h^3 \right) \\ &= \pi \left(rh^2 - \frac{1}{3}h^3 \right) \\ &= \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right), \end{aligned}$$

como era de se esperar.

EXERCÍCIO 3.21) Calcule o volume V , em função de r, h, d_1 e d_2 , de um segmento esférico de duas bases paralelas, de altura $h = d_1 + d_2$ e raio (da esfera que o originou) r , de tal modo que $r - d_1$ e $r - d_2$ sejam alturas de segmentos esféricos de uma base que completam a esfera de raio r juntamente com o segmento esférico de duas bases.

Observação importante: conforme já dito acima, um segmento esférico de duas bases, de altura h e raio, r não fica univocamente determinado com apenas esses dois parâmetros. Neste caso, d_1 e d_2 não precisam ser necessariamente positivos. Este exercício será útil para o cálculo da área de uma zona esférica logo abaixo.

Resolução:

Temos duas situações possíveis, conforme figura abaixo.

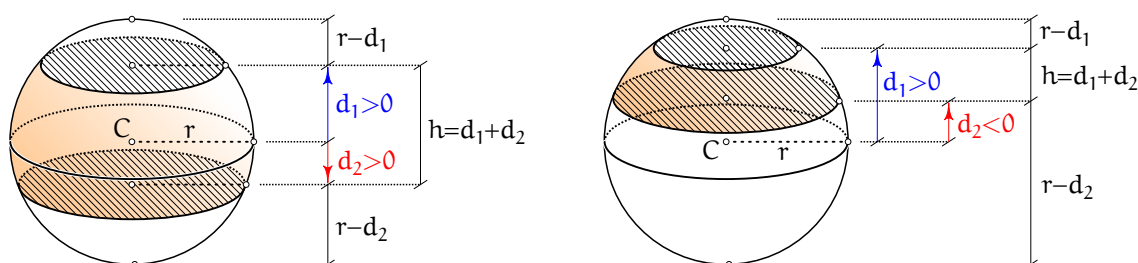


FIGURA 3.34: Situações para d_1 e d_2 do enunciado.

Novamente, aproveitando o EXERCÍCIO 3.19 temos:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi (r - d_1)^2 \left(r - \frac{r - d_1}{3}\right) - \pi (r - d_2)^2 \left(r - \frac{r - d_2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{V = \pi r^2 h - \frac{\pi}{3} (d_1^3 + d_2^3)}.$$

Novamente, se no EXERCÍCIO 3.21 interpretássemos um segmento esférico de uma base como tendo $d_2 = r$ teríamos $d_1 = h - r$ e a fórmula ficaria

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h - \frac{\pi}{3} \left((h - r)^3 + r^3 \right) \\ &= \pi \left(r^2 h - \frac{1}{3} (h^3 - 3h^2 r + 3hr^2 - r^3 + r^3) \right) \\ &= \pi \left(r^2 h - \frac{h^3}{3} + h^2 r - hr^2 \right) \\ &= \pi \left(-\frac{h^3}{3} + h^2 r \right) \\ &= \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right). \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 3.22) Calcule o volume de um segmento esférico de uma base em função de sua altura h e do raio ρ de sua base.

Resolução.

Seja r o raio da esfera que originou o segmento esférico de uma base de altura h .

Aproveitemos a fórmula $V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)$ já deduzida no EXERCÍCIO 3.19.

(i) Se $h < r$ temos, pelo Teorema de Pitágoras, $\rho^2 + (r - h)^2 = r^2$. Logo, $r = \frac{\rho^2}{2h} + \frac{h}{2}$.

Substituindo:

$$V = \pi h^2 \left(\frac{\rho^2}{2h} + \frac{h}{2} - \frac{h}{3} \right) = \pi h \left(\frac{\rho^2}{2} + \frac{h^2}{6} \right) = \frac{\pi h}{6} (3\rho^2 + h^2).$$

(ii) Se $h = r$ temos, uma semiesfera no qual $h = r = \rho$. Logo,

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \frac{\pi r}{6} (3r^2 + r^2) = \frac{\pi h}{6} (3\rho^2 + h^2).$$

(iii) Se $h > r$ temos, pelo Teorema de Pitágoras, $\rho^2 + (h - r)^2 = r^2$, ou seja, $\rho^2 + (r - h)^2 = r^2$ e recaímos no Item (i).

Resumindo, em qualquer caso:

$$V = \frac{\pi h}{6} (3\rho^2 + h^2).$$

□

EXERCÍCIO 3.23) Calcule o volume de um segmento esférico de duas bases paralelas em função de sua altura h e dos raios ρ_1 e ρ_2 de suas bases.

Resolução.

Princípio de Cavalieri, aproveitando a demonstração do volume da esfera.

(i) Se $h \geq r$ temos $h = h_1 + h_2$ sendo h_1 a distância do centro da esfera à base de raio ρ_1 e h_2 a distância do centro da esfera à base de raio ρ_2 .

Logo,

$$\begin{aligned}
 V &= \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi h_1^2 h_1 - \frac{1}{3} \pi h_2^2 h_2 \text{ (cilindro menos dois cones)} \\
 &= \pi \left(\frac{1}{2} r^2 h + \frac{1}{2} r^2 h - \frac{1}{3} h_1^3 - \frac{1}{3} h_2^3 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{1}{2} (h_1^2 + \rho_1^2) (h_1 + h_2) + \frac{1}{2} (h_2^2 + \rho_2^2) (h_1 + h_2) - \frac{1}{3} h_1^3 - \frac{1}{3} h_2^3 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{1}{2} (h_1^3 + \rho_1^2 h_1 + h_1^2 h_2 + \rho_1^2 h_2) + \frac{1}{2} (h_2^3 h_1 + \rho_2^2 h_1 + h_2^3 + \rho_2^2 h_2) - \frac{1}{3} h_1^3 - \frac{1}{3} h_2^3 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{1}{6} h_1^3 + \frac{1}{2} \rho_1^2 h_1 + \frac{1}{2} h_1^2 h_2 + \frac{1}{2} \rho_1^2 h_2 + \frac{1}{2} h_2^3 h_1 + \frac{1}{2} \rho_2^2 h_1 + \frac{1}{6} h_2^3 + \frac{1}{2} \rho_2^2 h_2 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{1}{6} h_1^3 + \frac{1}{2} \rho_1^2 (h_1 + h_2) + \frac{1}{6} 3 h_1^2 h_2 + \frac{1}{6} 3 h_2^2 h_1 + \frac{1}{2} \rho_2^2 (h_1 + h_2) + \frac{1}{6} h_2^3 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{h}{2} (\rho_1^2 + \rho_2^2) + \frac{1}{6} h_1^3 + \frac{1}{6} 3 h_1^2 h_2 + \frac{1}{6} 3 h_2^2 h_1 + \frac{1}{6} h_2^3 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{h}{2} (\rho_1^2 + \rho_2^2) + \frac{1}{6} (h_1 + h_2)^3 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{h}{6} 3 (\rho_1^2 + \rho_2^2) + \frac{1}{6} h^3 \right) \\
 &= \frac{\pi h}{6} (3 (\rho_1^2 + \rho_2^2) + h^2).
 \end{aligned}$$

(ii) Se $h < r$ temos duas situações: quando o centro da esfera está no segmento esférico (e a demonstração da fórmula do volume é exatamente igual à feita acima) e quando o centro da esfera não está no segmento esférico. Neste caso, suponhamos que $\rho_1 < \rho_2$ e sejam d_1 e d_2 as distâncias do centro da esfera às bases de raios ρ_1 e ρ_2 , respectivamente. Logo, $h = d_1 - d_2$.

Novamente pelo Princípio de Cavalieri e aproveitando a demonstração do volume da esfera temos

$$\begin{aligned}
 V &= \pi r^2 h - \left(\frac{1}{3} \pi d_1^2 d_1 - \frac{1}{3} \pi d_2^2 d_2 \right) \text{ (cilindro menos tronco de cone)} \\
 &= \pi \left(\frac{1}{2} r^2 h + \frac{1}{2} r^2 h - \frac{1}{3} d_1^3 + \frac{1}{3} d_2^3 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{1}{2} (d_1^2 + \rho_1^2) (d_1 - d_2) + \frac{1}{2} (d_2^2 + \rho_2^2) (d_1 - d_2) - \frac{1}{3} d_1^3 + \frac{1}{3} d_2^3 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{1}{2} (d_1^3 + \rho_1^2 d_1 - d_1^2 d_2 - \rho_1^2 d_2) + \frac{1}{2} (d_2^2 d_1 + \rho_2^2 d_1 - d_2^3 - \rho_2^2 d_2) - \frac{1}{3} d_1^3 + \frac{1}{3} d_2^3 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{1}{6} d_1^3 + \frac{1}{2} \rho_1^2 d_1 - \frac{1}{2} d_1^2 d_2 - \frac{1}{2} \rho_1^2 d_2 + \frac{1}{2} d_2^2 d_1 + \frac{1}{2} \rho_2^2 d_1 - \frac{1}{6} d_2^3 - \frac{1}{2} \rho_2^2 d_2 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{1}{6} d_1^3 + \frac{1}{2} \rho_1^2 (d_1 - d_2) - \frac{1}{6} 3 d_1^2 d_2 + \frac{1}{6} 3 d_2^2 d_1 + \frac{1}{2} \rho_2^2 (d_1 - d_2) - \frac{1}{6} d_2^3 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{h}{2} (\rho_1^2 + \rho_2^2) + \frac{1}{6} d_1^3 - \frac{1}{6} 3 d_1^2 d_2 + \frac{1}{6} 3 d_2^2 d_1 - \frac{1}{6} d_2^3 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{h}{2} (\rho_1^2 + \rho_2^2) + \frac{1}{6} (d_1 - d_2)^3 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \left(\frac{h}{6} 3 (\rho_1^2 + \rho_2^2) + \frac{1}{6} h^3 \right) \\
&= \frac{\pi h}{6} (3 (\rho_1^2 + \rho_2^2) + h^2).
\end{aligned}$$

Conclusão: em qualquer situação, temos

$$V = \frac{\pi h}{6} (3 (\rho_1^2 + \rho_2^2) + h^2).$$

□

Observemos que se no EXERCÍCIO 3.23 interpretássemos um segmento esférico de uma base como tendo $\rho_2 = 0$ teríamos $\rho = \rho_1$ e a fórmula ficaria, obviamente, igual àquela que já deduzimos.

EXERCÍCIO 3.24) Calcule a área de uma calota esférica e de uma zona esférica de raio r e altura h .
Resolução.

Neste exercício vamos utilizar a mesma idéia que empregamos para o cálculo da área da esfera.

(i) Calota esférica.

Sejam duas calotas esféricas concêntricas de raios r e $r + \varepsilon$ a alturas h e $h + \varepsilon$ com $\varepsilon > 0$ “pequeno”.

O volume V da região do espaço entre as calotas é conhecido: é o volume do segmento esférico de altura $h + \varepsilon$ e raio $r + \varepsilon$ menos o volume do segmento esférico de altura h e raio r , ou seja, $V = \pi (h + \varepsilon)^2 \left(r + \varepsilon - \frac{h + \varepsilon}{3} \right) - \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)$.

Mas o volume V acima é aproximadamente dado pelo produto da área A da calota menor por ε , ou seja, $V \cong A \cdot \varepsilon$ sendo a aproximação tanto melhor quanto menor for o ε . Portanto,

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi (h + \varepsilon)^2 \left(r + \varepsilon - \frac{h + \varepsilon}{3} \right) - \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)}{\varepsilon} \\
&= \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 2h\varepsilon + \varepsilon^2) \left(r + \frac{2\varepsilon}{3} - \frac{h}{3} \right) - h^2 r + \frac{h^3}{3}}{\varepsilon} \\
&= \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h^2 r + \frac{2h^2\varepsilon}{3} - \frac{h^3}{3} + (2h\varepsilon + \varepsilon^2) \left(r + \frac{2\varepsilon}{3} - \frac{h}{3} \right) - h^2 r + \frac{h^3}{3}}{\varepsilon} \\
&= \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{2h^2\varepsilon}{3} + (2h\varepsilon + \varepsilon^2) \left(r + \frac{2\varepsilon}{3} - \frac{h}{3} \right)}{\varepsilon} \\
&= \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2h^2}{3} + (2h + \varepsilon) \left(r + \frac{2\varepsilon}{3} - \frac{h}{3} \right) \right) \\
&= \pi \left(\frac{2h^2}{3} + 2hr - \frac{2h^2}{3} \right) \\
&= 2\pi rh.
\end{aligned}$$

(ii) Zona Esférica.

Sejam duas zonas esféricas concêntricas de raios r e $r + \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$ “pequeno”, e mesma altura h .

O volume V da região do espaço entre as zonas esféricas é conhecido: é o volume do segmento esférico (de duas bases) de altura h e raio $r + \varepsilon$ menos o volume do segmento esférico (de duas bases) de altura h e raio r , ou seja, $V = \pi(r + \varepsilon)^2 h - \frac{\pi}{3}(d_1^3 + d_2^3) - (\pi r^2 h - \frac{\pi}{3}(d_1^3 + d_2^3))$, sendo d_1 e d_2 conforme Exercício acima.

Mas o volume V acima é aproximadamente dado produto da área A da zona esférica menor por ε , ou seja, $V \cong A \cdot \varepsilon$ sendo a aproximação tanto melhor quanto menor for o ε . Portanto,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi(r + \varepsilon)^2 h - \frac{\pi}{3}(d_1^3 + d_2^3) - (\pi r^2 h - \frac{\pi}{3}(d_1^3 + d_2^3))}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi(r^2 + 2r\varepsilon + \varepsilon^2)h - \pi r^2 h}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi(2r\varepsilon + \varepsilon^2)h}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi(2r + \varepsilon)h \\ &= 2\pi rh. \end{aligned}$$

FUSOS E CUNHAS ESFÉRICAS

Consideremos uma esfera de centro C e raio r e um diedro de medida θ cuja aresta passa por C . Tal diedro determina na esfera dois sólidos, cada qual chamado de **cunha esférica** de raio r . Dizemos que a cunha esférica situada nas faces e interior do diedro possui ângulo de medida θ , enquanto que a outra cunha, situada nas faces e exterior do diedro, possui ângulo de medida $2\pi - \theta$ radianos (se θ for dado em radianos) ou $360^\circ - \theta$ (se θ for dado em graus).

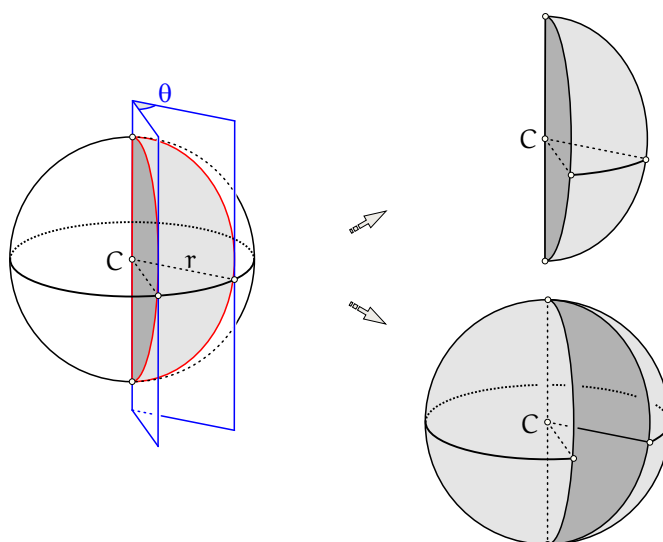
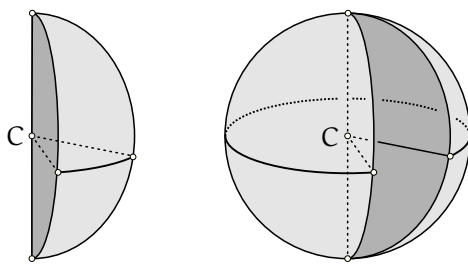


FIGURA 3.35: *Cunhas esféricas.*

Uma cunha esférica de raio r possui superfície que pode ser decomposta em três partes, que chamamos de *faces* da cunha: dois semidiscos de raio r e uma face proveniente da superfície da esfera que originou a cunha que chamamos de **fuso esférico** de raio r . A medida do ângulo de um fuso esférico é, naturalmente, definida como sendo a medida do ângulo da cunha esférica a ele associada.



Fusos Esféricos
(somente as superfícies esféricas)

FIGURA 3.36: *Fusos esféricos.*

Para deduzir o volume de uma cunha esférica ou a área de um fuso esférico, lançamos mão do Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Conforme raciocínio análogo ao que fizemos na *Seção dos Cones*, consideremos uma função g que associa as medidas θ dos ângulos das cunhas esféricas de raio r (fixo) aos seus volumes, ou seja, $V_\theta = g(\theta)$ é o volume da cunha esférica de raio r e ângulo de medida θ .

A função g é crescente (veja as propriedades de volume) e, além disso, se duplicarmos o ângulo da cunha, o volume duplica. Se triplicarmos o ângulo da cunha, o volume triplica, e assim por diante. Logo, estamos nas hipóteses do *Teorema Fundamental da Proporcionalidade*. Isso significa que a medida do ângulo de uma cunha esférica é diretamente proporcional ao seu volume. Assim, $V_\theta = g(\theta) = k\theta$, sendo $k = g(1)$ o volume da cunha esférica de ângulo 1. Se adotarmos a unidade de medida radianos, o volume da cunha esférica de ângulo medindo 1 radiano é $\frac{4}{3}\frac{\pi r^3}{2\pi} = \frac{2}{3}r^3$.

Assim

$$V_\theta = \frac{2}{3}r^3\theta$$

é o volume de uma cunha esférica de raio r e ângulo de medida θ radianos.

Se utilizarmos a unidade de medida graus temos $k = g(1) = \frac{4}{3}\frac{\pi r^3}{360^\circ}$, ou seja, $V_\theta = \frac{\pi r^3}{270^\circ}\theta$ sendo θ dado em graus.

O raciocínio desenvolvido acima colocado sobre a forma de do dispositivo da “regra de três” fica:

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \text{Ângulo (rad)} & & \text{Volume da Cunha} & \uparrow \\ & \frac{2\pi}{\theta} & \text{—} & \frac{4}{3}\pi r^3 & \\ & & \text{—} & V_\theta & \end{array} \implies 2\pi V_\theta = \theta \frac{4}{3}\pi r^3 \implies V_\theta = \frac{2}{3}r^3\theta.$$

De forma totalmente análoga temos a área do fuso:

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \text{Ângulo (rad)} & & \text{Área do Fuso} & \uparrow \\ & \frac{2\pi}{\theta} & \text{—} & 4\pi r^2 & \\ & & \text{—} & A_\theta & \end{array} \implies 2\pi A_\theta = \theta 4\pi r^2 \implies A_\theta = 2r^2\theta.$$

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 3.25) Um fuso esférico de raio 1 m tem área $3\pi \text{ m}^2$. Calcule a medida de seu ângulo.
Resolução.

Vamos relacionar ângulo e área do fuso, conforme exposto acima:

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \text{Ângulo (rad)} & & \text{Área do Fuso} & \uparrow \\ & \frac{2\pi}{\theta} & \text{—} & 4\pi 1^2 \text{ m}^2 & \\ & & \text{—} & 3\pi \text{ m}^2 & \end{array} \implies 6\pi^2 = 4\pi\theta \implies \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ rad.}$$

EXERCÍCIO 3.26) Uma cunha esférica de raio 3 m tem volume $\frac{9\pi}{4} \text{ m}^3$. Calcule a medida de seu ângulo.

Resolução.

Vamos relacionar ângulo e volume da cunha, conforme exposto acima:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ângulo (rad)} & \text{Volume da Cunha} & \\ \uparrow & & \uparrow \\ 2\pi & \frac{4}{3}\pi 3^3 \text{ m}^3 & \Rightarrow \frac{9\pi^2}{2} = 36\pi\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8} \text{ rad.} \\ \theta & \frac{9\pi}{4} \text{ m}^3 & \end{array}$$

SETORES ESFÉRICOS

Consideremos um setor circular S de raio r e ângulo menor do que um ângulo raso. Consideremos também uma reta e coplanar a S que passa pelo seu vértice mas não pelo seu interior. O sólido gerado pela rotação de 360° de S em torno de e é chamado de **setor esférico** de raio r .

Há duas classes de setores esféricos:

- (1) quando a intersecção de e com S é constituída por um lado de S .
- (2) quando a intersecção de e com S é constituída apenas pelo vértice de S .

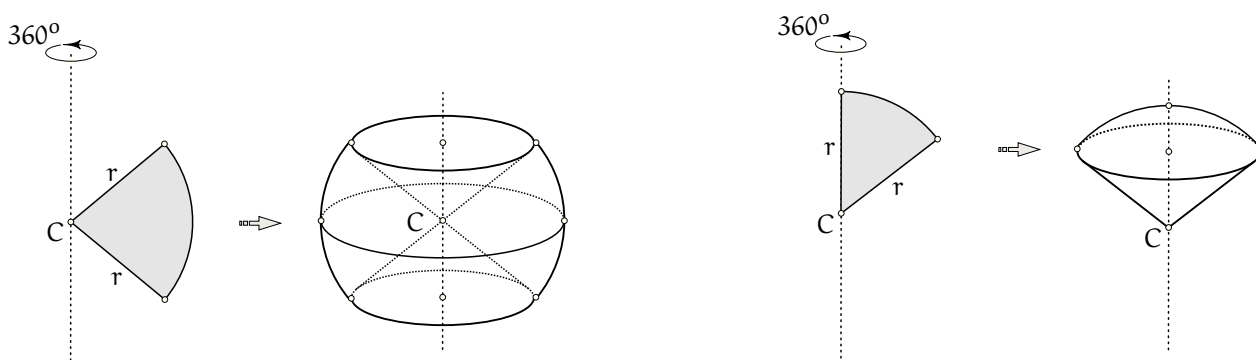


FIGURA 3.37: Setores esféricos.

O comprimento do segmento que é a projeção ortogonal do arco do setor circular S sobre a reta e é chamado de **altura** do setor esférico.

Exercício Proposto

EXERCÍCIO 3.27) Mostre que o volume de um setor esférico de raio r e altura h é $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$.

ANÉIS ESFÉRICOS

Consideremos um segmento circular S de uma base e e de raio r . Consideremos também uma reta e coplanar a S que passa pelo centro da circunferência de raio r que define o segmento circular S mas não passa pelo seu interior. O sólido gerado pela rotação de 360° de S em torno de e é chamado de **anel esférico** de raio r .

Há duas classes de anéis esféricos:

- (1) quando a intersecção de e com S é constituída por um ponto S (que é um dos extremos do arco do segmento circular).
- (2) quando a intersecção de e com S é vazia.

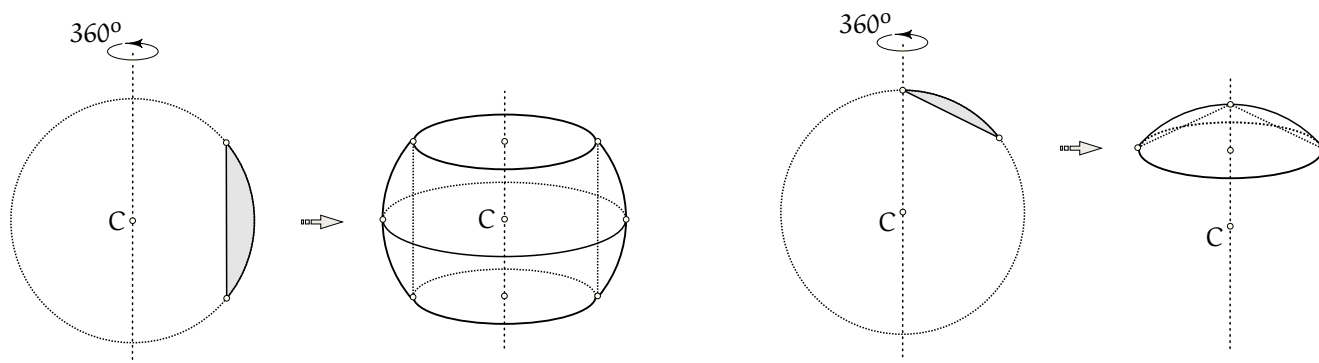


FIGURA 3.38: Anéis esféricos.

O comprimento h do segmento que é a projeção ortogonal do arco do segmento circular S sobre a reta e é chamado de **altura** do setor esférico.

A corda que define o segmento circular que origina um anel esférico é uma corda desse anel. Chamemos de l o comprimento das cordas de um anel esférico.

Exercício Proposto

EXERCÍCIO 3.28) Mostre que o volume de um anel esférico de altura h e cordas de comprimento l é $V = \frac{\pi h}{6} l^2$.

3.5 Inscrição e Circunscrição de Esferas em Poliedros Regulares e em Cones de Revolução

INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE ESFERAS EM POLIEDROS REGULARES

Uma esfera está **inscrita** em um poliedro regular quando for a esfera de maior raio possível contida no poliedro. Nesta situação também é comum dizermos que o poliedro regular está **circunscrito** à esfera.

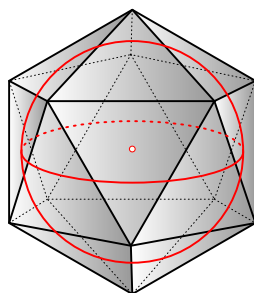


FIGURA 3.39: Esfera inscrita em poliedro regular.

Uma esfera está **circunscrita** a um poliedro regular quando for a esfera de menor raio possível que contém o poliedro. Nesta situação também é comum dizermos que o poliedro regular está **inscrito** à esfera.

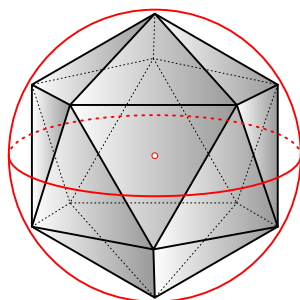


FIGURA 3.40: Esfera circunscrita a poliedro regular.

Observações:

- (i) A superfície de uma esfera inscrita em um poliedro regular tangencia todas as faces do poliedro em seus centros.
- (ii) A superfície de uma esfera circunscrita a um poliedro regular contém todos os vértices do poliedro.

Também é útil, para não confundir os conceitos, a ideia intuitiva de que “estar inscrito” significa “estar por dentro” e de que “estar circunscrito” significa “estar por fora”.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 3.29) Considere uma esfera de raio r inscrita em um tetraedro regular de arestas medindo a . Estabeleça uma relação entre r e a .

Qual é o percentual de volume do tetraedro regular ocupado pela esfera?

Resolução.

Sejam h a altura do tetraedro regular de arestas medindo a e O o centro da esfera de raio r inscrita neste tetraedro. Chamemos de A, B, C e D os quatro vértices do tetraedro e passemos a chamá-lo de tetraedro $ABCD$.

Podemos decompor o tetraedro $ABCD$ em quatro tetraedros congruentes de altura r e bases nas faces do tetraedro $ABCD$. Chamemos esses quatro tetraedros de $OABC, OABD, OACD$ e $OBCD$.

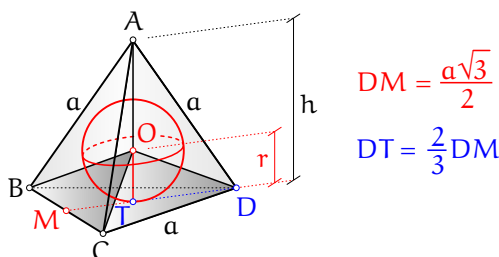


FIGURA 3.41: Esfera inscrita a tetraedro e elementos associados.

Cada face do tetraedro original possui área $S = \frac{1}{2}a \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \right)$ (triângulo equilátero de lado a).

Cada um dos quatro tetraedros com vértice em O possui volume $v = \frac{1}{3}Sr$.

A altura h do tetraedro original é, pelo Teorema de Pitágoras, tal que $h^2 + \left(\frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \right) \right)^2 = a^2$ (para justificar o segundo cateto, é bom lembrar que as medianas de um triângulo se intersectam na razão 2 para 1 a partir dos vértices e, num triângulo equilátero, as medianas coincidem com as alturas). Assim, $h = a \frac{\sqrt{6}}{3}$. Logo, o volume do tetraedro original é dado por $V = \frac{1}{3}S \left(a \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$.

Portanto,

$$V = 4v \Rightarrow \frac{1}{3}S \left(a \frac{\sqrt{6}}{3} \right) = 4 \left(\frac{1}{3}Sr \right) \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{12}a.$$

O percentual pedido é dado por

$$\frac{V_{\text{esfera}}}{V_{\text{tetraedro}}} \cdot 100\% = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}a \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \right) \right) \left(a \frac{\sqrt{6}}{3} \right)} \cdot 100\% = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{12}a \right)^3}{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3} \cdot 100\% = \frac{\sqrt{3}\pi}{18} \cdot 100\% \cong 30,23\%$$

EXERCÍCIO 3.30) Considere uma esfera de raio R circunscrita a um tetraedro regular de arestas medindo a . Estabeleça uma relação entre R e a .

Qual é o percentual de volume da esfera ocupado pelo tetraedro regular?

Qual é a relação entre R e r do EXERCÍCIO 3.29?

Resolução.

Para resolver esse exercício, basta observar que o centro das esferas inscrita e circunscrita a um tetraedro regular coincidem. Assim, sendo h a altura do tetraedro, temos $h = R + r$.

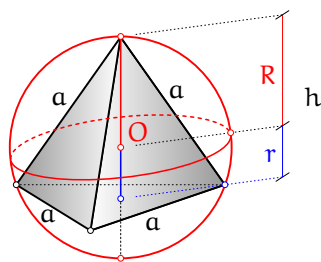


FIGURA 3.42: Esfera circunscrita a tetraedro regular e elementos associados.

Mas, do exercício anterior, temos $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ e $r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$. Logo, $R = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{12}\right)a$, ou seja,

$$R = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

Quanto ao percentual:

$$\frac{V_{\text{tetraedro}}}{V_{\text{esfera}}} \cdot 100\% = \frac{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot 100\% = \frac{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3}{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)^3} \cdot 100\% = \frac{2\sqrt{3}}{9\pi} \cdot 100\% = 12,25\%$$

Por fim, de $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ e $r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ temos $R = 3r$.

EXERCÍCIO 3.31) Considere uma esfera de raio r inscrita em um cubo de arestas medindo a . Estabeleça uma relação entre r e a .

Qual é o percentual de volume do cubo ocupado pela esfera?

Resolução.

Facilmente vê-se que

$$r = \frac{1}{2}a.$$

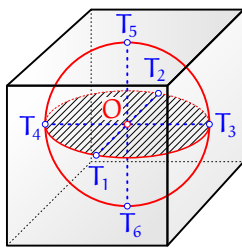


FIGURA 3.43: Esfera inscrita no cubo e elementos associados.

Quanto ao percentual:

$$\frac{V_{\text{esfera}}}{V_{\text{cubo}}} \cdot 100\% = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} \cdot 100\% = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{2}a\right)^3}{a^3} \cdot 100\% = \frac{\pi}{6} \cdot 100\% \cong 52,36\%$$

EXERCÍCIO 3.32) Considere uma esfera de raio R circunscrita a um cubo de arestas medindo a . Estabeleça uma relação entre R e a .

Qual é o percentual de volume da esfera ocupado pelo cubo?

Qual é a relação entre R e r do EXERCÍCIO 3.31?

Resolução.

Facilmente vê-se que uma diagonal de comprimento d do cubo é diâmetro $2R$ da esfera circunscrita.

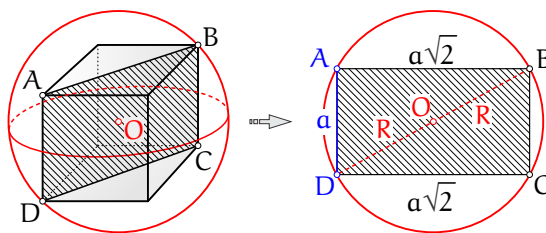


FIGURA 3.44: Esfera circunscrita ao cubo e elementos associados.

Mas $d^2 = a^2 + (\sqrt{a^2 + a^2})^2$, ou seja, $d = \sqrt{3}a$. Logo, $2R = \sqrt{3}a$, resultando em

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Quanto ao percentual:

$$\frac{V_{\text{cubo}}}{V_{\text{esfera}}} \cdot 100\% = \frac{a^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot 100\% = \frac{a^3}{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3} \cdot 100\% = \frac{2}{\sqrt{3}\pi} \cdot 100\% \cong 36,75\%$$

Por fim, de $r = \frac{1}{2}a$ e $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ temos $R = \sqrt{3}r$.

EXERCÍCIO 3.33) Considere uma esfera de raio r inscrita em um octaedro regular de arestas medindo a . Estabeleça uma relação entre r e a .

Qual é o percentual de volume do octaedro regular ocupado pela esfera?

Resolução.

Consideremos dois vértices opostos (não ligados por uma aresta) A e B do octaedro. Sejam C e D pontos médios de duas arestas paralelas do octaedro que não incidem em A ou B (FIGURA abaixo). Sejam O centro da esfera inscrita no octaedro e E ponto de tangência desta esfera com a face triangular que contém os pontos A e C .

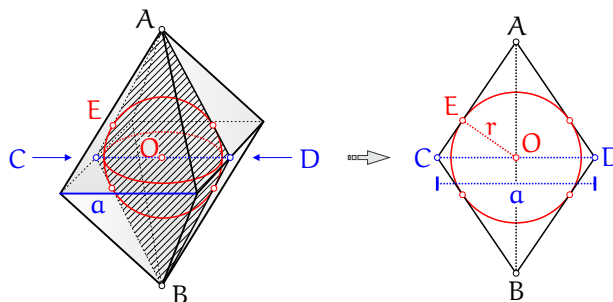


FIGURA 3.45: Esfera inscrita a octaedro regular e elementos associados.

Temos que existe um plano que passa por A, B, C, D, E e O . O ponto E pode ser visto como o pé da perpendicular baixada de O sobre o segmento AC , sendo o segmento EO de comprimento r .

Nas condições descritas acima, temos $CD = a$ e, portanto, $CO = \frac{a}{2}$. Sendo AC altura de um triângulo equilátero de lado a temos $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Pelo Teorema de Pitágoras temos $AO = \sqrt{AC^2 - CO^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Mas os triângulos CEO e COA são semelhantes e temos $\frac{EO}{CO} = \frac{AO}{AC}$, ou seja, $\frac{r}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$. Portanto,

$$r = \frac{\sqrt{6}}{6}a.$$

O volume do octaedro é dado por $V_{\text{octaedro}} = 2 \left(\frac{1}{3}a^2 \cdot AO \right) = 2 \left(\frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \right) = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

Quanto ao percentual:

$$\frac{V_{\text{esfera}}}{V_{\text{octaedro}}} \cdot 100\% = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{\sqrt{2}}{3}a^3} \cdot 100\% = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)^3}{\frac{\sqrt{2}}{3}a^3} \cdot 100\% = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi \cdot 100\% \cong 60,46\%$$

EXERCÍCIO 3.34) Considere uma esfera de raio R circunscrita a um octaedro regular de arestas medindo a . Estabeleça uma relação entre R e a .

Qual é o percentual de volume da esfera ocupado pelo octaedro regular?

Qual é a relação entre R e r do EXERCÍCIO 3.33?

Resolução.

Vê-se facilmente que o comprimento da diagonal de um quadrado de lado a é o diâmetro da esfera circunscrita ao octaedro (FIGURA abaixo).

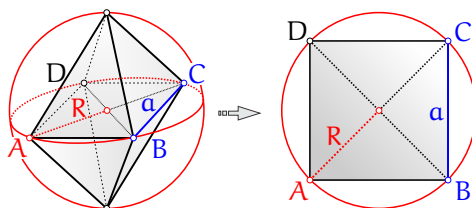


FIGURA 3.46: Esfera circunscrita a octaedro regular e elementos associados.

Assim, $2R = a\sqrt{2}$, ou seja, $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Quanto ao percentual:

$$\frac{V_{\text{octaedro}}}{V_{\text{esfera}}} \cdot 100\% = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}a^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot 100\% = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}a^3}{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3} \cdot 100\% = \frac{1}{\pi} \cdot 100\% \cong 31,83\%$$

Por fim, de $r = \frac{\sqrt{6}}{6}a$ e $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ temos $R = \sqrt{3}r$.

Exercícios Propostos

EXERCÍCIO 3.35) Considere uma esfera de raio r inscrita em um dodecaedro regular de arestas medindo a . Estabeleça uma relação entre r e a .

Qual é o percentual de volume do dodecaedro regular ocupado pela esfera?

EXERCÍCIO 3.36) Considere uma esfera de raio R circunscrita a um dodecaedro regular de arestas medindo a . Estabeleça uma relação entre R e a .

Qual é o percentual de volume da esfera ocupado pelo dodecaedro regular?

Qual é a relação entre R e r do EXERCÍCIO 3.35?

EXERCÍCIO 3.37) Considere uma esfera de raio r inscrita em um icosaedro regular de arestas medindo a . Estabeleça uma relação entre r e a .

Qual é o percentual de volume do icosaedro regular ocupado pela esfera?

EXERCÍCIO 3.38) Considere uma esfera de raio R circunscrita a um icosaedro regular de arestas medindo a . Estabeleça uma relação entre R e a .

Qual é o percentual de volume da esfera ocupado pelo icosaedro regular?

Qual é a relação entre R e r do EXERCÍCIO 3.37?

INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE ESFERAS EM CONES DE REVOLUÇÃO

De modo análogo às definições da seção anterior, uma esfera está **inscrita** em um cone de revolução quando for a esfera de maior raio possível contida no cone. Nesta situação também é comum dizermos que o cone de revolução está **circunscrito** à esfera.

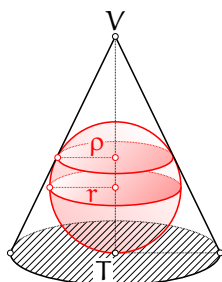


FIGURA 3.47: Esfera inscrita a cone de revolução.

Observemos que se uma esfera de raio r está inscrita em um cone de revolução, sua superfície tangencia o centro da base do cone e a intersecção da superfície da esfera com a superfície lateral do cone é uma circunferência de raio ρ menor do que r .

Uma esfera está **circunscrita** a um cone de revolução quando for a esfera de menor raio possível que contém o cone. Nesta situação também é comum dizermos que o cone de revolução está **inscrito** à esfera.

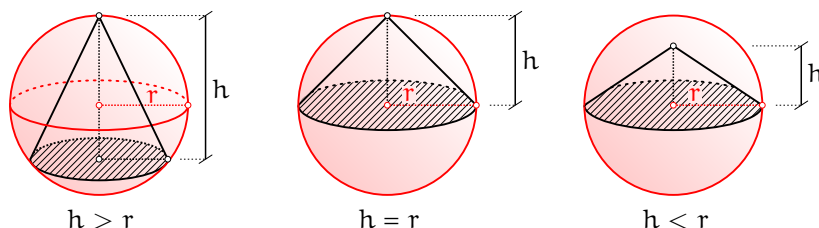


FIGURA 3.48: Três casos e esferas circunscritas a cones de revolução.

Observemos que se uma esfera de raio r está circunscrita a um cone de revolução de altura h , há três situações interessantes a serem consideradas:

(i) se $h > r$, então o vértice do cone está na superfície da esfera e sua base é menor do que um círculo máximo da esfera.

(ii) se $h = r$, então o vértice do cone está na superfície da esfera e sua base é um círculo máximo da esfera.

(iii) se $h < r$, então o vértice do cone não está sobre a superfície da esfera e sua base é um círculo máximo da esfera.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 3.39) Considere uma esfera de raio r inscrita em um cone de revolução de raio da base R e altura H . Coloque r em função de R e H .

Resolução.

Consideremos a figura abaixo:

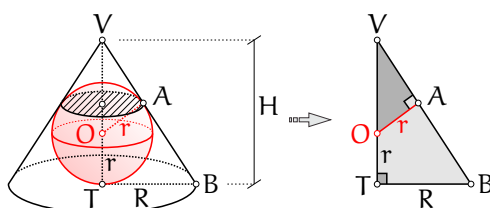


FIGURA 3.49: Elementos associados a esfera inscrita em cone de revolução.

Temos que os triângulos VOA e VBT são semelhantes. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{VO}{VB} &= \frac{OA}{TB} \Rightarrow \frac{H-r}{\sqrt{H^2+R^2}} = \frac{r}{R} \Rightarrow HR - rR = r\sqrt{H^2+R^2} \Rightarrow \\ r &= \frac{HR}{\sqrt{H^2+R^2}+R} = \frac{HR(\sqrt{H^2+R^2}-R)}{(\sqrt{H^2+R^2})^2 - R^2} \Rightarrow \\ r &= \frac{R(\sqrt{H^2+R^2}-R)}{H}.\end{aligned}$$

EXERCÍCIO 3.40) Considere uma esfera de raio R circunscrita a um cone de revolução de raio da base r e altura h . Coloque R em função de r e h .

Resolução.

É claro que se $h \leq R$ temos $R = r$, pois a base do cone será um disco máximo da esfera circunscrita. Logo, o caso interessante é quando $h > R$ (e $h < 2R$, naturalmente).

Consideremos a figura abaixo:

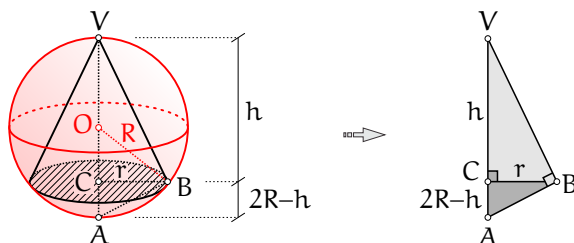


FIGURA 3.50: *Elementos associados a esfera circunscrita a cone de revolução.*

Observemos que o triângulo VAB é retângulo em B e sua hipotenusa mede $2R$.

Os triângulos VCB e BCA são semelhantes. Logo,

$$\frac{CB}{CA} = \frac{VC}{CB} \Rightarrow \frac{r}{2R-h} = \frac{h}{r} \Rightarrow r^2 = 2Rh - h^2 \Rightarrow R = \frac{r^2 + h^2}{2h}.$$

Referências Bibliográficas

- [1] AGUSTINI, E. & RODRIGUES, L. B. *Um curso de Geometria Euclidiana Plana* (material EaD UFU para Licenciatura em Matemática). Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia. 2013
- [2] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 10^a. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 2006.
- [3] CARVALHO, P. C. P. *Introdução à Geometria Espacial*. 4^a. ed. Rio de Janeiro: SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 2005.
- [4] DOLCE, O & POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar* (coleção de 11 volumes - **vol. 9**: geometria plana). 6^a. ed. Atual Editora. 2005.
- [5] DOLCE, O & POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar* (coleção de 11 volumes - **vol. 10**: geometria espacial). 6^a. ed. Atual Editora. 2005.
- [6] FIGUEIREDO, D. G. *Números Irracionais e Transcendentes*. SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 1985.
- [7] HEATH, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Vol 1 (Books I and II), Vol. 2 (Books III-IX), Vol. 3 (Books X-XIII). 2nd. ed. Dover Publications. 1956.
- [8] JACOBS, H. *Geometry*. W. H. Freeman. 1974.
- [9] LIMA, E. L. *Análise Real*. Vol. 1. 5^a. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 2001.
- [10] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E. & MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio* (coleção de 4 volumes - **vols. 1, 2 e 4**). 6^a. ed. SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 2006.
- [11] LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria*. 4^a. ed. SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 2009.
- [12] LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática*. 4^a. ed. SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 2004.
- [13] REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMATICA. Publicação quadrimestral da SBM Sociedade Brasileira de Matemática. (84 números publicados até o primeiro quadrimestre de 2014).
- [14] REZENDE, E. Q. F, & QUEIROZ, M. L. B. *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas*. 2^a. ed. Editora Unicamp. 2008.
- [15] WWW-HISTORY.MCS.ST-AND.AC.UK - The MacTutor History of Mathematics archive - Site de história da matemática da University of Saint Andrews - Scotland.