

JEAN DE CAZENOVE

**MODELAGEM NUMÉRICO-COMPUTACIONAL
E AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL DO
AUTOAQUECIMENTO DE MATERIAIS
VISCOELÁSTICOS**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2010

JEAN DE CAZENOVE

**MODELAGEM NUMÉRICO-COMPUTACIONAL E AVALIAÇÃO
EXPERIMENTAL DO AUTOAQUECIMENTO DE MATERIAIS
VISCOELÁSTICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

Orientador: Prof. Dr. Domingos Alves Rade

UBERLÂNDIA - MG

2010

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil

- C386m Cazenove, Jean de, 1986-
Modelagem numérico-computacional e avaliação experimental do
autoaquecimento de materiais viscoelásticos [manuscrito] / Jean de
Cazenove. - 2010.
106 f. : il.
- Orientador: Domingos Alves Rade.
- Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Pro-
grama de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.
1. Vibração - Teses. 2. Amortecimento (Mecânica) - Teses. 3. Visco-
elasticidade - Teses. 4. Método dos elementos finitos - Teses. I. Rade,
Domingos Alves. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDU: 621:534

JEAN DE CAZENOVE

MODELAGEM NUMÉRICO-COMPUTACIONAL E AVALIAÇÃO
EXPERIMENTAL DO AUTOAQUECIMENTO DE MATERIAIS
VISCOELÁSTICOS

Dissertação **APROVADA** pelo Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Mecâ-
nica da Universidade Federal de Uberlân-
dia

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Domingos Alves Rade
Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de
Lima
Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Solidônio Rodrigues de Carvalho
Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti
Escola de Engenharia de São Carlos -
USP

Uberlândia, 19 de março de 2010

DEDICATÓRIA

Esta dissertação é dedicada à minha esposa Yara, por seu amor, seu incentivo e sua paciência. Obrigado por ser uma pessoa tão excepcional, e sempre estar ao meu lado mesmo nas horas difíceis.

AGRADECIMENTOS

- Ao meu orientador, Domingos Alves Rade e ao meu co-orientador, Antônio Marcos Gonçalves de Lima, por ter apoiado e valorizado meu trabalho desde os tempos em que fui um aluno de intercâmbio durante a conclusão do curso de graduação;
- Ao Prof. Cleudmar Amaral de Araújo, coordenador do Laboratório de Projetos Mecânicos da FEMEC, por ter tornado possível a realização dos ensaios;
- Ao Prof. Solidônio Rodrigues de Carvalho e ao pós-doutorando Valério Luis Borges (LTCM - FEMEC), pela ajuda com os aspectos numéricos e experimentais do projeto relacionados à térmica;
- Ao CNPq pelo apoio financeiro;
- Aos coordenadores e secretárias do Programa de Pós-Graduação pela ajuda, principalmente com as formalidades administrativas;
- A minha esposa Yara, por ser uma companheira maravilhosa, dedicada e inteligente, com quem eu passei e sem dúvida ainda passarei muitos momentos inesquecíveis;

- Aos meus pais, Natalie e Bertrand, meus irmãos Simon, Pascal e Denis, e aos meus demais parentes que, apesar da distância, sempre estiveram presentes e contribuíram pelo meu sucesso;
- A minha sogra, Cida, ao meu cunhado, Ygor, e a todos seus parentes uberlandenses, francanos e cariocas, por ter me acolhido com muita generosidade em sua família, e com quem passei inúmeros bons momentos;
- Aos professores e funcionários da FEMEC, com destaque aos membros do LMEst: os professores Raquel Rade, Valder Steffen Júnior, Helder Barbieri Lacerda, os técnicos Carlão e Xico, as secretárias Lays e Karine;
- Aos ex e atuais alunos do LMEst pela colaboração e agradável convivência, durante o trabalho e as horas vagas:
 - Os alunos de Iniciação Científica Leandro "Sorriso", Wellington "Ketchup", Rodrigo Rebello, Thiago, Vergílio e os DTI Cláudio e Luciana;
 - Os alunos de Mestrado Aurélio, Edson, Heitor e Murilo;
 - Os alunos de Doutorado Adailton, Albert, Aldemir, Edson "Japonês", Karina, Lizeth, Tobias e de Pós-Doutorado, Manu e Sylvain;
- Enfim, a todos que não citei mas também não esqueci.

Resumo

Neste trabalho foi desenvolvida uma metodologia de simulação numérica do fenômeno de auto-aquecimento, tendo como objetivo a realização e a validação de um modelo a ser aplicado à predição do comportamento termomecânico de estruturas incluindo materiais viscoelásticos. O modelo de elementos finitos proposto leva em conta a dependência das propriedades mecânicas do material viscoelástico com relação à frequência e temperatura, e permite a obtenção do campo de temperatura em regime transitório. O cálculo da fonte de calor é baseado na energia de dissipação viscoelástica obtida por meio da resposta em regime harmônico da estrutura submetida a um carregamento cíclico. A validação do modelo proposto e o ajuste de dois parâmetros inicialmente desconhecidos, a saber, o coeficiente de transferência de calor por convecção natural e a razão da fonte de calor pela energia decorrente da dissipação viscoelástica, foram efetuados via confrontação com resultados experimentais, estes sendo obtidos aplicando-se cargas cíclicas sobre um corpo de prova por meio de uma máquina universal de ensaios e registrando a temperatura no material viscoelástico do dispositivo com auxílio de termopares. Um procedimento de ajuste de curvas via uma rotina de otimização foi desenvolvido para a identificação dos parâmetros. Para cada ensaio, os resultados experimentais e os correspondentes obtidos com o modelo numérico após a identificação foram comparados, permitindo avaliar a precisão e as limitações do procedimento de modelagem proposto.

Palavras-chave: amortecimento; controle passivo de vibrações; termoviscoelasticidade; elementos finitos.

Abstract

In the present work, a methodology for numerical simulation of self-heating phenomenon in viscoelastic materials has been developed, with the aim of proposing and validating finite element models that can be applied to predict the thermomechanical behaviour of structures including viscoelastic materials. The model takes into account the dependence of the mechanical characteristics of the viscoelastic material with respect to frequency and temperature and allows to obtain the transient temperature field. For this purpose, the heat source calculation is computed based on the dissipated energy obtained from the harmonic response calculation as the structure is submitted to cyclic loading. The validation of the model and the adjustment of two initially unknown parameters, namely the film coefficient for natural heat convection and the ratio of the heat source over the mechanical power dissipated through viscoelastic effects, were carried out by comparison of the model-predicted responses to experimental results counterparts, the latter being obtained by the application of a cyclic load to a sample specimen by means of a universal test machine, and measuring the temperatures within the viscoelastic material of the dispositive using thermocouples. A curve-fitting procedure was developed using an optimization routine, in order to identify optimal set of values of h and β . For each test, the experimental results were compared to those obtained from the numeric model after the identification, thus allowing the evaluation of the accuracy and limitations of the proposed model procedure.

Key-words: damping; passive vibration control; thermoviscoelasticity; finite elements.

Sumário

Lista de Símbolos	x
1 Introdução	1
1.1 Contextualização do trabalho: o controle das vibrações mecânicas	1
1.2 Sobre o uso dos materiais viscoelásticos no controle das vibrações	3
1.2.1 Configurações dos amortecedores viscoelásticos	4
1.2.2 O problema do autoaquecimento	7
1.3 Objetivos do trabalho e organização da dissertação	13
2 Fundamentos da viscoelasticidade	15
2.1 Caracterização do comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos ...	15
2.1.1 Caracterização do comportamento viscoelástico	15
2.1.2 Viscoelasticidade linear e princípio da superposição de Boltzmann	17
2.2 Modelagem do comportamento viscoelástico	18
2.2.1 Modelos reológicos	19
2.2.2 Modelos paramétricos não reológicos	22
2.2.3 Modelagem não paramétrica no domínio da frequência: módulo complexo	24
2.3 Fatores ambientais e operacionais	27

2.3.1	Efeito da temperatura	28
2.3.2	Efeito da frequência de excitação	29
2.3.3	Precarga estática	29
2.3.4	Princípio da superposição frequência-temperatura	30
3	Modelagem do problema de termoviscoelasticidade	34
3.1	Equacionamento do problema de termoviscoelasticidade linear	34
3.1.1	Condução térmica	36
3.1.2	Energia de dissipação viscoelástica	38
3.1.3	Armazenamento de calor e efeito termoelástico	44
3.2	Resolução do problema de termoviscoelasticidade linear pelo método dos elementos finitos	49
3.2.1	Modelagem do problema estrutural	50
3.2.2	Generalidades sobre o problema acoplado de termoviscoelasticidade	54
3.2.3	Cálculo da fonte de calor e implementação computacional	57
4	Simulações numéricas	60
4.1	Aplicação a um dispositivo bidimensional	60
4.1.1	Apresentação da estrutura	60
4.1.2	Determinação do comportamento estático e dinâmico da estrutura	62
4.1.3	Influência do nível de discretização espacial e temporal	63
4.1.4	Influência dos parâmetros operacionais	67
4.1.5	Parâmetros relacionados ao material viscoelástico	69
4.1.6	Resultados complementares	70
4.2	Aplicação a uma junta rotacional tridimensional	74
4.3	Discussão dos resultados	77

5	Avaliação experimental do autoaquecimento e ajuste do modelo numérico	80
5.1	Descrição dos ensaios experimentais	81
5.1.1	Dispositivo ensaiado	81
5.1.2	Sistema de aquisição da temperatura	81
5.1.3	Resultados dos ensaios	83
5.2	Ajuste do modelo numérico-computacional	87
5.2.1	Descrição do procedimento de ajuste	88
5.2.2	Descrição do modelo numérico.....	91
5.2.3	Discussão dos resultados	92
6	Conclusões e perspectivas de continuidade.....	98
	Referências Bibliográficas.....	100
	Anexo A – Resultados dos ensaios	103
	Anexo B – Parâmetros do material <i>3M VHB 9469</i>	105

Lista de Símbolos

σ_{ij}	tensor das tensões
ε_{kl}	tensor das deformações
G_{ijkl}	tensor de relaxação
E'	módulo de armazenamento
E''	módulo de perda
η	fator de perda
ω	freqüência angular
T	temperatura
α_T	fator de deslocamento
q_g	fluxo de calor gerado
q_a	fluxo de calor armazenado
q_e	fluxo de calor de entrada
q_s	fluxo de calor de saída
k_{ij}	tensor das condutividades térmicas
k	condutividade térmica
$\vec{\text{div}}$	operador divergência
$\{\nabla\}$	operador diferencial
$\vec{f}_v$	vetor dos esforços aplicados por unidade de volume
$\ddot{u}$	vetor das acelerações
ρ	densidade

β	coeficiente de rendimento térmico
$\dot{w}_m$	potência mecânica dissipada pelo efeito viscoelástico
ν	coeficiente de Poisson
$\{\varepsilon\}$	vetor das deformações
$\{\sigma\}$	vetor das tensões
$\mathcal{H}$	matriz de elasticidade
c_p	calor específico por unidade de massa
α	coeficiente de dilatação térmica à pressão constante
s	entropia
$[M]$	matriz de massa
$[K_e]$	matriz de rigidez elástica
$[K^*(\omega, T)]$	matriz de rigidez complexa
$[C_{eq}]$	matriz de amortecimento equivalente
$[\bar{K}_v]$	matriz de rigidez viscoelástica fatorada
$\{f\}$	vetor dos esforços mecânicos generalizados
$\{q\}$	vetor das cargas térmicas generalizadas
$\{u\}$	vetor dos deslocamentos nodais

CAPÍTULO I

Introdução

1.1 Contextualização do trabalho: o controle das vibrações mecânicas

O desenvolvimento das técnicas modernas de produção, de transporte e de construção leva à concepção de estruturas complexas que devem estar em conformidade com normas estritas, do ponto de vista funcional (segurança dos usuários e manutenção), econômico e ambiental (materiais utilizados e consumo energético). Estas tendências levaram à concepção de estruturas cada vez mais leves, tendo como vantagem a diminuição dos custos de fabricação e, no caso dos transportes, do consumo de combustível. Tais estruturas são sujeitas a problemas complexos quando trata-se de atender aos critérios de resistência definidos de acordo com as normas de segurança pois elas são frequentemente submetidas a cargas dinâmicas devidas às condições de uso ou ao seu ambiente de funcionamento. Seguem abaixo alguns exemplos de cargas dinâmicas atuando sobre alguns tipos de estruturas:

- Ação do vento ou dos terremotos em estruturas de construção civil (Barbosa, 2000);
- Interação entre os fluidos e estruturas aeronáuticas ou estruturas off-shore (Borges, 2009);
- Esforços transmitidos por eixos rotativos de motores em automóveis e máquinas-ferramentas, devidos ao desbalanceamento (Saldarriaga, 2007).

As respostas estruturais às cargas dinâmicas envolvem oscilações periódicas ou aleatórias durante as quais podem ser atingidos níveis de amplitude que podem causar

aparição e propagação de danos por fadiga ou, em casos extremos, ao colapso da estrutura. Também podem ser causados desconfortos ou ruídos de alta intensidade.

Os prejuízos causados pelas vibrações sobre as estruturas levam à necessidade de controlar as amplitudes das respostas dinâmicas. Dentre os métodos desenvolvidos para amenizar as amplitudes de vibração sob ação de um conjunto de esforços, destacam-se dois procedimentos:

- **Otimização estrutural:** este procedimento consiste em buscar os valores ótimos de um dado conjunto de parâmetros físicos ou geométricos para controlar a resposta da estrutura, de forma direta (minimização das amplitudes de deslocamento ou de velocidade) ou através dos parâmetros modais (controle das frequências naturais do sistema para evitar a excitação dos modos de vibrar). Os parâmetros, chamados de *variáveis de projeto* do problema de otimização são escolhidos em função da sua influência sobre o comportamento geral da estrutura (repartição de massa, rigidez e amortecimento)(Vanderplaats, 2005).
- **Controle de vibrações:** este procedimento consiste em diminuir a amplitude da resposta pela modificação do conjunto formado pela estrutura e pelo sistema de esforços, e por elementos de controle adicionais. Dependendo da estratégia utilizada, pode-se distinguir três tipos de estratégias de controle:

O controle passivo das vibrações consiste em adicionar à estrutura um material escolhido por suas propriedades dissipativas. Desta forma, aumenta-se o amortecimento da estrutura. Neste contexto, o amortecimento designa a transformação de uma parte da energia de deformação em energias de outra natureza, usualmente em calor. Pode-se ainda considerar, como estratégia de controle passivo, o uso de absorvedores dinâmicos de vibrações (ADVs) que são dispositivos mecânicos formados por elementos de massa, rigidez e amortecimento que, acoplados à estrutura cujas vibrações deseja-se controlar, permitem absorver a energia vibratória no ponto de conexão (Korennev e Resnikov, 1993).

O controle ativo das vibrações consiste em usar elementos conhecidos como *atuadores* para produzir uma excitação adicional que permita compensar o efeito da carga dinâmica. Exemplos típicos incluem o uso de atuadores piezelétricos (Fuller *et al.*, 1996).

O controle semi-ativo designa as configurações em que são utilizados dispositivos com características ajustáveis ou materiais cujo comportamento pode ser alterado devido às suas propriedades de acoplamento com outros campos físicos, como fluidos eletorreológicos ou magnetorreológicos (Hong *et al.*, 2002), ou materiais com memória de forma (Oliveira, 2008).

1.2 Sobre o uso dos materiais viscoelásticos no controle das vibrações

Alguns dos materiais mais frequentemente utilizados no controle passivo de vibrações, devido às suas propriedades dissipativas, são polímeros de baixa rigidez, que possuem propriedades específicas determinadas por sua microestrutura: após remoção da carga ou deslocamento imposto, voltam à forma inicial de forma progressiva, em um intervalo de tempo finito. Esta propriedade é chamada viscoelasticidade ou *elasticidade retardada*.

A viscoelasticidade pode ser entendida como sendo resultante da superposição de dois tipos de comportamento mecânico: a elasticidade perfeita, na qual a resposta em deformação é instantânea e diretamente proporcional à tensão, sendo regida pela lei de Hooke ($\sigma = E\varepsilon$), e o comportamento de fluidos viscosos Newtonianos, no qual a taxa de deformação de cisalhamento é diretamente proporcional à tensão aplicada ($\dot{\gamma} = G\tau$).

Sob ação de cargas cíclicas, a viscoelasticidade causa uma diferença de fase entre a tensão e a deformação. Esta diferença de fase conduz à ocorrência da histerese, que pode ser evidenciada pela forma elíptica da curva tensão-deformação, cuja área representa a energia dissipada durante um ciclo.

Em decorrência desta propriedade, os materiais viscoelásticos (MVE) têm sido usados em numerosas aplicações industriais ou civis. As propriedades amortecedoras dos polímeros viscoelásticos e suas possíveis aplicações industriais começaram a ser investigadas na década de 1950 nos Estados Unidos, e no início da década de 1960 esta tecnologia foi aplicada às aeronaves, antes de ser estendida à indústria automobilística e à construção civil (Rao, 2003). Um dos primeiros conjuntos de edifícios a ser equipado com amortecedores viscoelásticos foi o World Trade Center, em 1969 (Barbosa, 2000). No Brasil, uma equipe da UFRJ investigou a possibilidade de inserir

camadas viscoelásticas no vão central da ponte Rio-Niterói, formando assim uma estrutura sanduíche, com o objetivo de atenuar a amplitude de oscilação causada pelo vento (Barbosa, 2000).

Os MVE constituem uma boa solução para o controle passivo das vibrações, pois são ao mesmo tempo robustos e de baixo custo de produção. Podem ser confeccionados sob a forma de camadas finas, as quais podem ser transportadas e armazenadas sob forma de rolos. Durante as últimas décadas foram investigadas novas técnicas de produção e aplicação de revestimentos viscoelásticos sobre estruturas, por exemplo, sob forma de sprays.

1.2.1 Configurações dos amortecedores viscoelásticos

Dentre as configurações de dispositivos viscoelásticos utilizados para o controle passivo de vibrações, destacam-se duas configurações principais:

1. As camadas superficiais (tratamentos contínuos): são constituídas por lâminas de material viscoelástico depositadas à superfície da estrutura sujeita às vibrações. Dependendo da sua forma de aplicação e do seu funcionamento, estes tratamentos podem ser divididos em duas categorias:
 - As camadas livres: esta é a configuração em que o material viscoelástico é colado ou pulverizado por spray sobre uma parte da superfície externa da estrutura (Rao, 2003). Sob aplicação da carga dinâmica, a estrutura é fletida e o material deforma-se em tração e compressão em planos paralelos à base da estrutura, resultando na dissipação de uma parte da energia de vibração pelo efeito de histerese. Dependendo da geometria da estrutura tratada e dos esforços aplicados, a espessura da camada viscoelástica pode variar de alguns milímetros até aproximadamente 10 centímetros. A Fig. 1.1 ilustra um trabalho de otimização da forma externa de uma camada aplicada sobre um painel de aço realizado por Markowicz *et al.* (2004). As variáveis do problema de otimização são as coordenadas dos pontos-chave que definem as curvas utilizadas para a geração do volume da camada. Estas coordenadas são alteradas sequencialmente seguindo um algoritmo genético, para minimizar uma função objetivo formada pelo somatório das amplitudes de velocidade e aceleração.

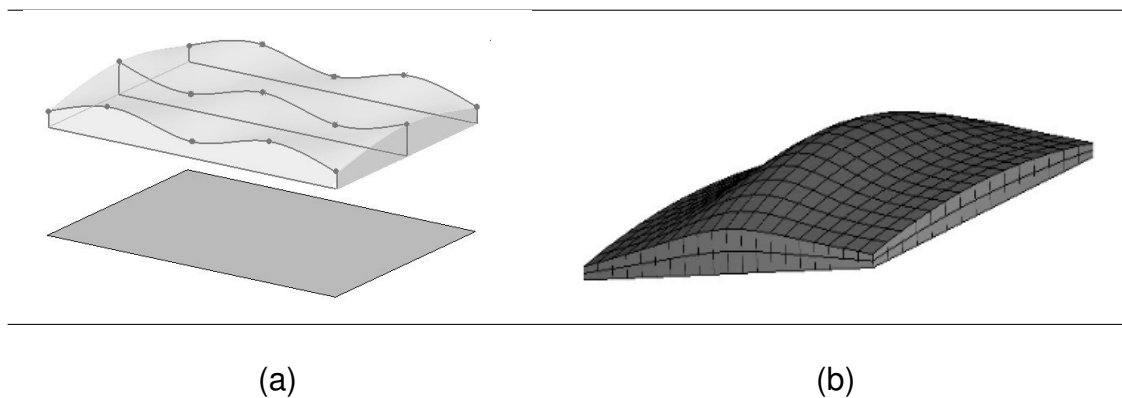


Figura 1.1: Camada viscoelástica livre aplicada sobre um painel de aço (a) e geometria otimizada através de um algoritmo genético (b) (adaptado de Markowicz *et al.*, 2004)

- As camadas restritas: encontradas em numerosas aplicações, estas camadas são inseridas entre a superfície da estrutura-base e uma placa rígida, ou inseridas entre duas paredes pertencendo à estrutura, formando assim uma estrutura tipo "sanduíche". A espessura da camada neste caso varia de 0,1 mm até 1 mm. Quando a estrutura é fletida, a camada viscoelástica deforma-se em cisalhamento, dissipando assim uma quantidade maior de energia (Rao, 2003).

A Fig. 1.2 mostra a aplicação de camadas em configuração restrita e livre sobre uma estrutura primária.

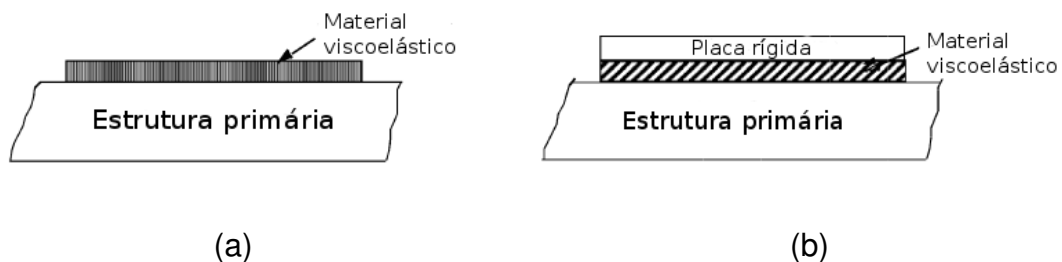


Figura 1.2: Ilustração de aplicação de camadas amortecedoras em configuração livre (a) e restrita (b) (adaptado de Rao, 2003)

2. Os dispositivos discretos. Localizados em pontos específicos das estruturas, eles podem pertencer às seguintes categorias:

- Os absorvedores dinâmicos de vibrações viscoelásticos: estes dispositivos são muitos semelhantes aos absorvedores dinâmicos de vibrações clássicos. Eles se apresentam como um componente resiliente viscoelástico sobre o qual é fixada uma massa adicional. O conjunto é colocado sobre

um dado ponto da estrutura principal onde deseja-se reduzir a amplitude da resposta. Os absorvedores dinâmicos são projetados de tal forma que sua frequência natural seja próxima da frequência de vibração ou da frequência de um modo de vibrar da estrutura principal a ser amortecido. Desta forma, a antirressonância do absorvedor coincide com a frequência de trabalho, e a amplitude de resposta da estrutura acoplada é atenuada nas vizinhanças da frequência considerada, como ilustrado pela Fig. 1.3. A Fig. 1.4 mostra a representação esquemática de um neutralizador dinâmico de vibrações viscoelásticos e a aplicação sobre a estrutura primária de um conjunto formado por vários absorvedores idênticos, em estudo realizado por Espíndola *et al.* (2005).

- As juntas translacionais ou rotacionais, são dispositivos projetados para serem inseridos entre a estrutura vibrante e uma base fixa. Dentre os exemplos encontram-se os *silent blocks*, ou isoladores de vibração, inseridos em motores, e os amortecedores translacionais presentes em estruturas de edifícios, como mostrado pela Fig. 1.5. As juntas são geralmente projetadas para que o material viscoelástico seja solicitado em cisalhamento sob ação das cargas dinâmicas.

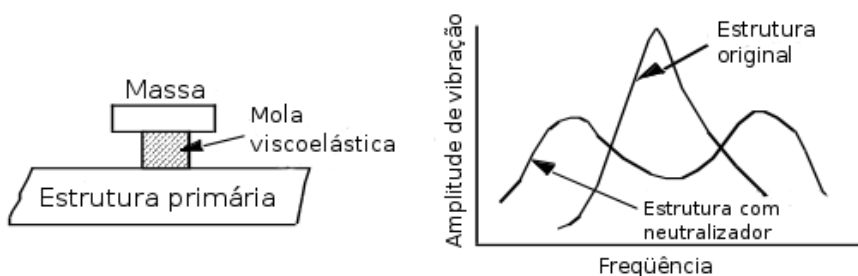


Figura 1.3: Representação de um neutralizador dinâmico de vibrações viscoelástico e do acoplamento das FRF (adaptado de Rao, 2003)

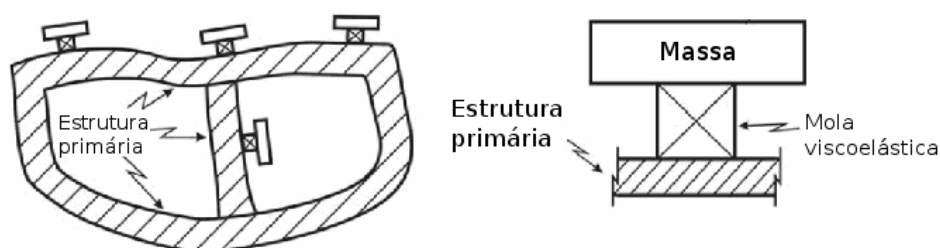


Figura 1.4: Representação de um neutralizador dinâmico de vibrações viscoelástico e aplicação sobre a estrutura primária (adaptado de Espíndola *et al.*, 2005)

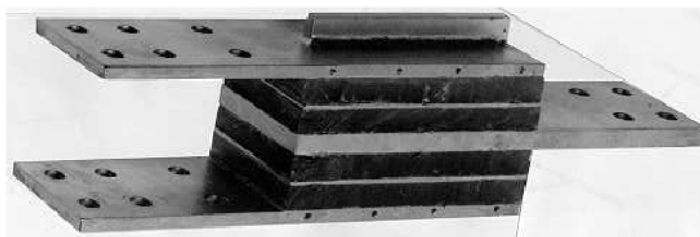


Figura 1.5: Ilustração de um amortecedor viscoelástico (adaptado de Barbosa, 2000)

1.2.2 O problema do autoaquecimento

Conforme será evidenciado no Capítulo 2, o comportamento mecânico de materiais viscoelásticos depende de vários fatores ambientais e operacionais, dentre os quais os mais importantes são a frequência e a temperatura (Nashif *et al.*, 1985). Estas dependências dificultam, sobremaneira, a modelagem e o projeto de dispositivos viscoelásticos destinados ao controle de vibrações.

A Fig. 1.6 mostra os valores do fator de perda dos polímeros Sorbothane Durometer 30, 50 e 70 para uma frequência de 50 Hz e para as temperaturas: -10°C , 23°C e 55°C . Repara-se que, dependendo do material (Durometer é uma escala de dureza utilizada para classificar os diferentes materiais produzidos por SorbothaneTM, um número mais alto caracterizando um material mais duro e rígido), com o aumento da temperatura de 65°C o fator de perda é dividido por um fator cujo valor é compreendido entre 2 e 3, indicando uma queda importante da capacidade de amortecimento do material.

Esta característica deve-se ao fato que, nas faixas de temperatura indicadas pelos construtores para um bom desempenho nas aplicações relacionadas ao isolamento e amortecimento de vibrações (-30°C a 70°C no caso dos produtos SorbothaneTM), os materiais encontram-se no estado de transição onde, sob efeito do aumento da temperatura, suas microestruturas passam progressivamente do estado vídreo para o estado de borracha, que caracteriza uma fase na qual tanto sua rigidez quanto seu amortecimento são menores.

A Fig. 1.7 mostra a evolução do módulo de armazenamento e do fator de perda, que representam respectivamente a rigidez e amortecimento de um material viscoelástico genérico, com respeito à temperatura para uma frequência fixa.

A energia dissipada pelos materiais viscoelásticos ao longo dos ciclos de vibra-

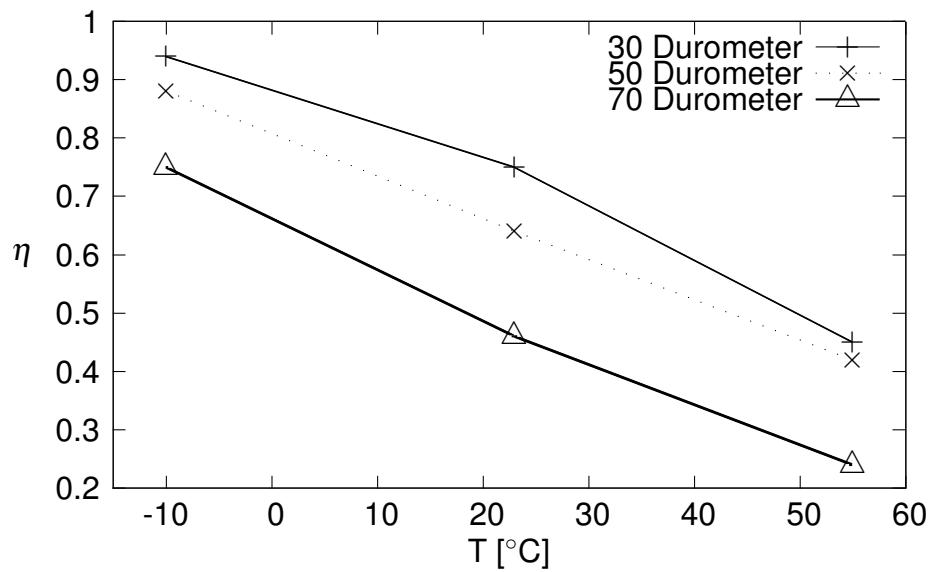


Figura 1.6: Evolução do fator de perda dos materiais Sorbothane™ Durometer 30, 50 e 70 em função da temperatura, para uma frequência de 50 Hz *Fonte: dados técnicos da Sorbothane*

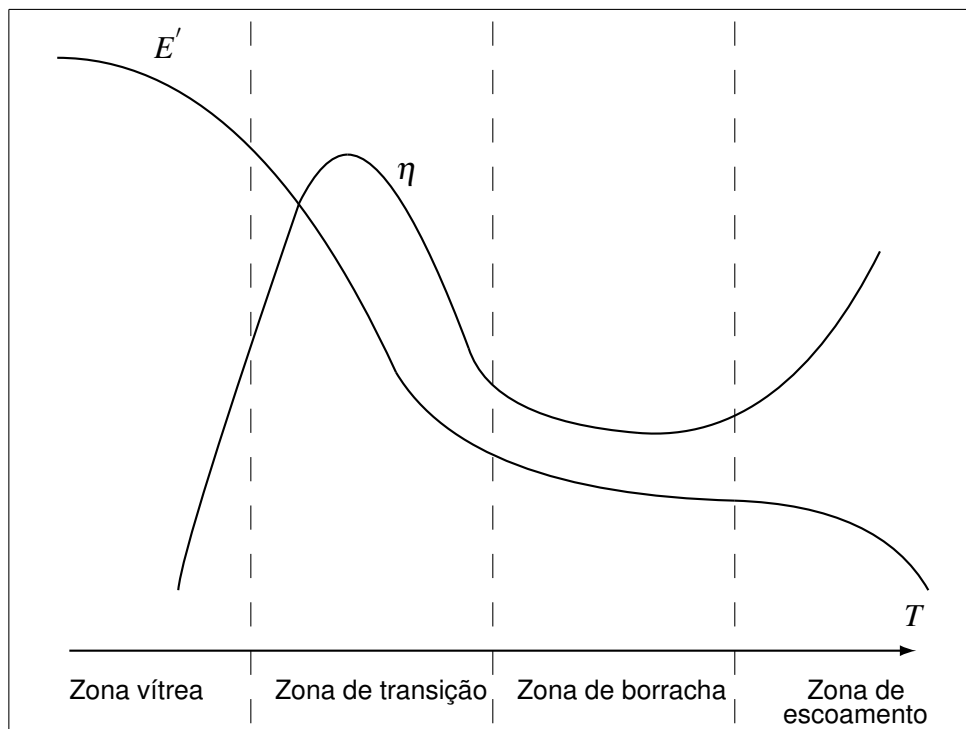


Figura 1.7: Evolução do fator de perda e do módulo de armazenamento em função da temperatura para uma frequência fixa (adaptado de Nashif *et al.*, 1985)

ção é parcialmente convertida em calor. A parte complementar é armazenada pelo material através de trocas microestruturais (Rittel, 2000). A importância relativa da geração de calor pelo efeito de dissipação viscoelástica é definida através do coeficiente β , que corresponde à razão entre o calor gerado e a energia total dissipada. Embora haja poucos dados na literatura sobre o coeficiente β , sabe-se que seus valores dependem da frequência do carregamento e da amplitude das tensões e das deformações.

A dissipação de energia dentro dos materiais viscoelásticos resulta em aumentos locais dos valores do campo da temperatura que, por sua vez, dependem dos valores dos campos de tensões e das deformações e do fator de dissipação β . A tendência natural consiste em evacuar esta energia por meio dos mecanismos de transferência e de troca de calor com o meio externo (condução, convecção natural ou forçada, e radiação). Porém, quando o material viscoelástico encontra-se em condições adiabáticas ou quando a taxa de geração de calor é superior à taxa de evacuação, a temperatura tende a aumentar de forma contínua e não uniforme sobre o volume do material. Este fenômeno, conhecido como *autoaquecimento*, é comum no caso da aplicação de cargas cíclicas sobre polímeros e chega a alterar significativamente as propriedades dos materiais pois a temperatura é considerada o fator ambiental mais influente sobre as propriedades mecânicas dos materiais poliméricos, podendo reduzir a eficiência dos dispositivos viscoelásticos de controle de vibrações.

Como base no exposto acima, observa-se que as estruturas amortecidas por dispositivos viscoelásticos são possivelmente sujeitas a alterações de suas respostas dinâmicas sob o efeito do autoaquecimento. A queda do amortecimento pode tornar o aquecimento ainda maior pois resulta no aumento das amplitudes de deformação.

Dependendo da importância do fenômeno de autoaquecimento, relacionada tanto aos próprios parâmetros do material, da ação mecânica (frequência e amplitude da carga) e do meio ambiente (temperatura externa) quanto à configuração do dispositivo (espessura das partes viscoelásticas, tamanho das superfícies de contato para evacuação do calor produzido), duas situações bem distintas, ilustradas na Fig. 1.8 podem ocorrer (Lesieutre e Govindswamy, 1992):

Quase-equilíbrio térmico é o caso em que, após uma fase inicial de aumento contínuo da temperatura, o sistema atinge uma configuração quase estacionária na qual os valores da temperatura não sofrem mais alterações significativas. Esta

situação é caracterizada pela geração de uma quantidade de calor que, em cada instante de tempo, encontra-se exatamente compensada pela energia trocada com o meio externo e geralmente acontece quando a dissipação de energia é pequena. Neste caso se a diferença entre a temperatura inicial e a temperatura de quase-equilíbrio for importante, o aumento das amplitudes de resposta e suas conseqüências podem ser significativos mas a integridade do material viscoelástico não é comprometida.

Deriva térmica, descrita por Lesieutre e Govindswamy (1992), ocorre quando a temperatura na estrutura aumenta de forma descontrolada até causar danos irreversíveis ao material viscoelástico. Este fenômeno é geralmente causado por um acúmulo excessivo de calor devido às grandes amplitudes de deformação. É importante lembrar do que outros fatores ambientais tal como a umidade e a idade do material podem alterar suas propriedades amortecedoras e facilitar a ocorrência deste fenômeno.

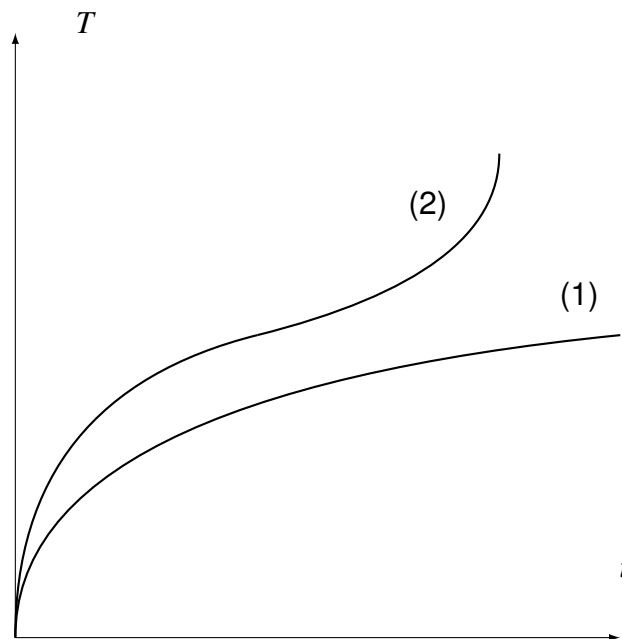


Figura 1.8: Equilíbrio térmico (1) e deriva térmica (2) (adaptado de Lesieutre e Govindswamy, 1992)

Embora não se encontrem muitos trabalhos na literatura, a avaliação experimental, analítica e numérica do fenômeno de autoaquecimento tem sido o assunto enfocado por vários estudos que propõem metodologias para a caracterização, predição e controle das elevações de temperatura em dispositivos amortecedores simples utilizando materiais viscoelásticos. Dentre eles, destacam-se os seguintes:

- Brackbill *et al.* (1996) utilizaram o método *ADF* (campos de deslocamento anelásticos) desenvolvido por Lesieutre (1989) para estabelecer um modelo termomecânico, com o intuito de prever o autoaquecimento de amostras de silicone submetidas a cargas dinâmicas cisalhantes. Este trabalho inclui uma parte experimental (identificação das funções de translação, permitindo a descrição das propriedades viscoelásticas para várias temperaturas, e monitoramento das temperaturas e do deslocamento da estrutura durante a aplicação de uma carga cíclica por meio de uma máquina universal de ensaios) e uma parte numérica (descrição do modelo *ADF* utilizado, o qual não somente leva em conta os efeitos da temperatura sobre o material, mas também a dependência das suas propriedades dinâmicas com respeito à amplitude de deformação). A coerência dos resultados numéricos obtidos é verificada através da comparação com as temperaturas medidas durante o ensaio por meio de termopares. Os autores mostraram que o aumento do número de parâmetros do modelo *ADF* utilizado reduz de forma significativa o erro relativo entre os dados experimentais e calculados, e comentaram sobre a aplicação da metodologia de simulação desenvolvida à simulação da resposta termomecânica de estruturas mais complexas, como elementos elastoméricos inseridos em mancais de rotores, com o auxílio do método dos elementos finitos.
- Gopalakrishna e Laï (1998) propuseram um método iterativo de acoplamento termomecânico que leva em conta a dependência das propriedades viscoelásticas em respeito à temperatura. O objetivo deste trabalho consiste em determinar o campo de temperatura em uma junta translacional, uma vez o quase-equilíbrio térmico atingido, sob o efeito conjunto da convecção natural e da dissipação viscoelástica, a última sendo resultante da aplicação de uma carga quase-estática. Os problemas térmico e estrutural são resolvidos seqüencialmente até ser atingida a convergência, definida de acordo com um critério baseado sobre a taxa de evolução das temperaturas nodais. O procedimento de resolução iterativa foi implementado na linguagem *APDL*, integrada ao software comercial de elementos finitos *ANSYS*TM. O material viscoelástico utilizado para a simulação foi o *ISD 110* produzido e comercializado pela companhia *3M*. Sua lei constitutiva apresenta-se sob forma exponencial, envolvendo parâmetros identificados a partir de dados experimentais. Os resultados mostraram um aquecimento máximo de 5°C na interface entre as partes estruturais e viscoelásticas do amortecedor.

- Johnson e Chen (2002) realizaram uma análise acoplada envolvendo os campos térmico e mecânico em regime transitório para avaliar o autoaquecimento de cilindros de borracha dentro dos quais são inseridos discos metálicos. A solução do problema foi implementada utilizando o software de elementos finitos *Abaqus*TM, o que possibilita o uso de elementos axisimétricos e das seguintes ferramentas para levar em conta as não-linearidades do problema:
 - Séries de Prony para representar a relaxação do material viscoelástico (não linearidade material);
 - Cálculo em grandes deformações (não-linearidade geométrica).

A principal vantagem deste procedimento de acoplamento em regime transitório é permitir evidenciar o autoaquecimento tanto de forma direta (através do campo de temperatura) quanto através do seu efeito sobre a resposta estrutural. Os autores concluíram que 20 segundos de aplicação de uma carga de alta intensidade é suficiente para resultar num aumento da temperatura de 5°C no plano médio do núcleo viscoelástico.

- A tese de doutorado de Merlette (2005) apresenta as metodologias experimentais e numéricas utilizadas para a projeção e a aplicação de camadas finas viscoelásticas em carrocerias automóveis para a redução dos desconfortos causados pelas vibrações de baixas frequências. Parte deste trabalho é dedicada ao controle do autoaquecimento que ocorre sob aplicação de carregamentos cíclicos em juntas translacionais. Um modelo termomecânico simplificado, que comporta quatro graus de liberdade, foi incluído em uma ferramenta numérica desenvolvida no ambiente *MatLab*TM para realizar seqüencialmente a integração das equações térmicas e mecânicas acopladas. Os resultados obtidos com este modelo foram comparados às temperaturas medidas durante ensaios realizados sobre dois corpos de prova, para vários valores da frequência e da amplitude de força, e o ajuste do modelo permitiu a identificação do coeficiente de rendimento térmico, cujos valores se mostraram muito sensíveis à evolução da frequência e da amplitude de deformação. De acordo com o autor do trabalho, dentre os métodos utilizáveis para a minimização do autoaquecimento destacam-se o projeto de superfícies de troca de calor (interface metal/material viscoelástico) maiores e a aplicação de fluxos de ar frio sobre o domínio (convecção forçada).

1.3 Objetivos do trabalho e organização da dissertação

O trabalho de pesquisa descrito neste memorial se insere no contexto dos estudos que vêm sendo desenvolvidos no Laboratório de Mecânica de Estruturas Prof. José Eduardo Tannús Réis (LMEst), da Faculdade de Engenharia Mecânica da UFU, voltados ao desenvolvimento de metodologias de modelagem e otimização de estruturas dotadas de amortecedores viscoelásticos dispostos na forma de dispositivos discretos e tratamentos superficiais. Estudos anteriores incluem a dissertação de mestrado de Lima (2003) e as teses de doutorado de Lima (2007) e de Saldarriaga (2007), além de numerosas publicações, dentre as quais citam-se Lima e Rade (2005) e Lima, Rade e Lé pore (2008).

O objetivo geral deste trabalho é estudar o fenômeno de autoaquecimento em dispositivos amortecedores viscoelásticos através de dois procedimentos:

- O desenvolvimento, a implementação computacional e a validação de uma ferramenta numérica dedicada à simulação do comportamento termomecânico de estruturas amortecidas por materiais viscoelásticos. O presente trabalho limita-se ao estudo do autoaquecimento sob efeito de uma carga cíclica de frequência constante e com controle da amplitude de força/deslocamento. O material viscoelástico cujo comportamento é simulado é considerado linear no sentido do princípio de superposição de Boltzmann, tornando possível a aplicação do princípio de correspondência elástica-viscoelástica para a modelagem no domínio da frequência. A implementação computacional da lei constitutiva do material e da solução do problema não-linear acoplado é feita na linguagem *APDL*, integrada ao software de elementos finitos *ANSYS*.
- A realização de ensaios destinados a evidenciar o fenômeno de autoaquecimento e a validar o modelo numérico. A análise das curvas de temperatura obtidas por meio de termopares inseridos nas camadas viscoelásticas de juntas translacionais submetidas a um carregamento cíclico aplicado e monitorado por meio de uma máquina de fadiga foi utilizada como base para a identificação do coeficiente de rendimento térmico β e do coeficiente de convecção h , com a ajuda do modelo numérico, seguindo o procedimento descrito por Merlette (2005).

Por meio dos dois procedimentos, busca-se contribuir para o aperfeiçoamento dos

procedimentos de modelagem e projeto de dispositivos viscoelásticos no contexto do controle passivo de vibrações, preconizando-se a necessidade de se considerar, em numerosos casos práticos, o fenômeno do autoaquecimento.

Além deste capítulo introdutório, a dissertação contém cinco capítulos com os seguintes conteúdos:

- O segundo capítulo contém os fundamentos teóricos necessários à caracterização e à representação física do comportamento viscoelástico do ponto de vista da mecânica dos sólidos. Os diferentes modelos matemáticos e físicos voltados à descrição da viscoelasticidade nos domínios do tempo e da frequência são apresentados e discutidos. Este capítulo também inclui uma descrição dos fatores ambientais e operacionais que mais influem o comportamento dos materiais viscoelásticos (a frequência, a temperatura e a pré-carga).
- O terceiro capítulo é dedicado à formulação analítica do procedimento de cálculo da energia dissipada pelo efeito viscoelástico, no contexto do método dos elementos finitos. A segunda parte deste capítulo descreve de forma detalhada o algoritmo empregado para a resolução do problema acoplado a ser implementado num ambiente de simulação numérica.
- O quarto capítulo descreve as simulações efetuadas utilizando a ferramenta de modelagem termomecânica baseado em elementos finitos desenvolvida, com o objetivo de simular o autoaquecimento de uma junta rotacional tridimensional, e inclui uma discussão acerca da influência de vários parâmetros relacionados ao procedimento numérico e à configuração do dispositivo viscoelástico sobre os resultados obtidos.
- O quinto capítulo é voltado aos ensaios experimentais realizados sobre uma junta translacional e à validação do modelo numérico, incluindo ainda a confrontação dos resultados numéricos e experimentais e o procedimento de ajuste de parâmetros do modelo de elementos finitos.
- O sexto capítulo contém as conclusões e indica as possíveis orientações para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

Fundamentos da viscoelasticidade

2.1 Caracterização do comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos

Este capítulo trata da caracterização do comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos. São apresentados os fundamentos da teoria da viscoelasticidade linear, descrevendo-se os principais modelos reológicos propostos para representar o comportamento viscoelástico. É também apresentada uma revisão acerca da influência de fatores operacionais e ambientais sobre o comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos.

2.1.1 Caracterização do comportamento viscoelástico

A viscoelasticidade pode ser interpretada como resultante de dois tipos fundamentais de comportamento, a saber:

1. o comportamento elástico linear de um sólido que, quando submetido a um carregamento constante (a), apresenta deformação instantânea e constante; e após cessado o carregamento, o retorno a configuração original é instantâneo e completo, como ilustrado na Fig. 2.1(b);
2. o comportamento de um fluido viscoso que, ao ser submetido a um carregamento, se deforma progressivamente, com uma taxa de deformação constante, como ilustrado na Fig. 2.1(c).

Pode-se notar através da Fig. 2.1(d) que a resposta de um material viscoelástico é uma combinação entre a resposta de um sólido elástico linear e de um fluido

viscoso, e sua característica principal é um atraso da resposta em relação à resposta elástica. De acordo com Christensen (1982), este atraso está relacionado diretamente à dependência das propriedades mecânicas dos materiais viscoelásticos em relação às histórias de deformação.

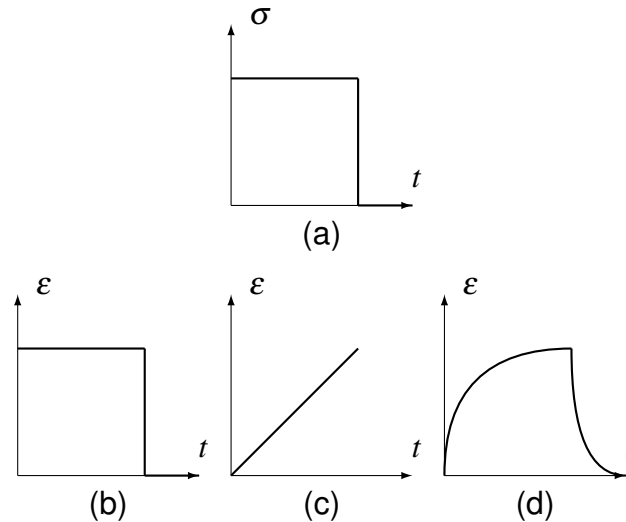


Figura 2.1: Deformação de um material submetido a um carregamento constante: (a) carregamento; (b) comportamento elástico linear de um sólido; (c) comportamento viscoso de um fluido Newtoniano; (d) comportamento viscoelástico de um sólido.

A aplicação de uma tensão constante σ_0 para $t > 0$ sobre um sólido viscoelástico resulta num aumento progressivo da deformação: este fenômeno é chamado de *fluência*. A evolução da deformação a partir de $t = 0$ pode ser representada por uma função de fluência $f(t)$, o que permite escrever:

$$\epsilon(t) = \sigma_0 f(t) \quad (2.1)$$

De maneira semelhante, a aplicação de uma deformação constante ϵ_0 tem como resultado a diminuição progressiva da tensão. Este fenômeno é chamado de *relaxação*. É possível definir uma função de relaxação $r(t)$ satisfazendo:

$$\sigma(t) = \epsilon_0 r(t) \quad (2.2)$$

As funções de fluência e de relaxação estão ilustradas na Fig. 2.2. Estas funções são utilizadas para caracterizar o comportamento de materiais viscoelásticos em ter-

mos de suas respostas no domínio do tempo, conforme mostrado na próxima seção.

2.1.2 Viscoelasticidade linear e princípio da superposição de Boltzmann

As curvas de fluência e de relaxação mostradas pela Fig. 2.2 descrevem a resposta no tempo de um material viscoelástico quando submetido a uma tensão constante ou a uma deformação constante em uma dada direção. Na prática, os dispositivos viscoelásticos são submetidos a carregamentos complexos e as funções de fluência e de relaxação devem ser generalizadas para descreverem adequadamente o comportamento dos materiais viscoelásticos.

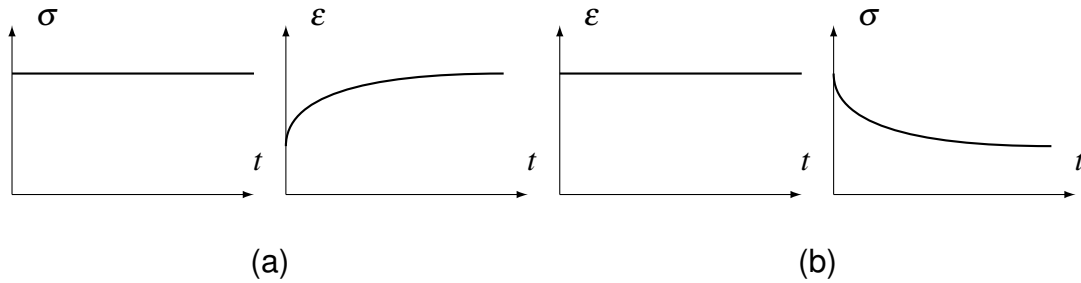


Figura 2.2: Curvas de fluência (a) e de relaxação (b) para um sólido viscoelástico

Seja um estado de deformação constante imposto no instante t_0 , representado pelo tensor das deformações $\varepsilon_{kl}(t_0)$. No instante t , após um tempo de relaxação $t_s = t - t_0$, o estado de tensão resultante pode ser definido da seguinte forma (Christensen, 1982):

$$\sigma_{ij}(t) = \varepsilon_{kl}(t_0) G_{ijkl}(t_s) \quad (2.3)$$

onde $G_{ijkl}(t_s)$ é um tensor de quarta ordem comumente chamado de *tensor de relaxação* que descreve a lei constitutiva do material, levando-se em conta sua rigidez, o efeito de Poisson, e a dissipação de energia entre os instantes t_0 e $t = t_0 + t_s$. Entretanto, no caso real, o estado de deformação pode não ser constante na faixa de tempo considerada, e neste caso, deve-se levar em conta as contribuições associadas ao estado de deformação em cada instante de tempo. O estado de tensão no instante t pode ser considerado como sendo igual à soma de todas as contribuições anteriores se o material considerado for linear, e se o histórico das deformações for contínuo (Christensen, 1982). Logo, a expressão do estado de tensão para os mate-

riais viscoelásticos pode ser escrita sob a forma de uma integral de convolução como segue:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^\infty \varepsilon_{kl}(t-s) dG_{ijkl}(t_s) \quad (2.4)$$

A expressão (2.4) decorre da aplicação do princípio da superposição de Boltzmann, que define o estado final como a soma de todas as contribuições anteriores. Os materiais viscoelásticos para os quais este princípio é aplicável são considerados *lineares no sentido de Boltzmann*. Na Eq. (2.4), o tempo de relaxação varia entre 0 e ∞ , e considerando-se $\varepsilon_{ij} = 0$ para $t < 0$ e integrando (2.4) por partes, pode-se obter a seguinte forma geral da relação tensão-deformação para um material viscoelástico linear:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t G_{ijkl}(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.5)$$

onde $\tau = t - t_s$.

2.2 Modelagem do comportamento viscoelástico

A modelagem do comportamento dos materiais viscoelásticos lineares para uma dada faixa de tensão-deformação é feita escolhendo-se um modelo para representar o efeito dissipativo do material, através de funções de fluência e de relaxação. Dependendo do tipo de resposta a ser calculada, e do tipo de carregamento aplicado sobre a estrutura viscoelástica, várias representações matemáticas do comportamento viscoelástico linear foram desenvolvidas. Os vários tipos de modelos podem ser classificados em duas grandes categorias (Salençon, 1983):

- Os modelos paramétricos: estes modelos são baseados em expressões analíticas que envolvem um conjunto de parâmetros. Os valores dos parâmetros são escolhidos para que o comportamento do material modelado seja o mais próximo possível do comportamento real observado ou medido.
- Os modelos não-paramétricos: estes modelos são obtidos a partir de medidas experimentais, de forma direta ou através de transformadas de Fourier diretas

ou inversas para passar do domínio do tempo para o domínio da frequência e vice-versa.

2.2.1 Modelos reológicos

A reologia consiste em representar o comportamento mecânico dos materiais através da combinação de elementos básicos, do tipo molas e amortecedores viscosos. Estes elementos podem ter um comportamento perfeitamente elástico (mola) ou perfeitamente viscoso (amortecedor com fluido). Para formar um componente visco-elástico básico, um elemento elástico pode ser associado a um elemento viscoso em série (modelo de Maxwell) ou em paralelo (modelo de Kelvin-Voigt) como ilustrado na Fig. 2.3(a) abaixo, onde a mola desenvolve uma tensão proporcional à deformação ($\sigma_M = k\varepsilon_M$) enquanto o amortecedor retorna uma tensão proporcional à velocidade de deformação ($\sigma_A = c\dot{\varepsilon}_A$). A combinação destas respostas leva à obtenção das leis de comportamento para cada modelo. Estas leis podem ser adaptadas à descrição de ensaios de fluência e relaxação e expressas no domínio de Laplace, descrevendo a evolução das propriedades do material em função da frequência.

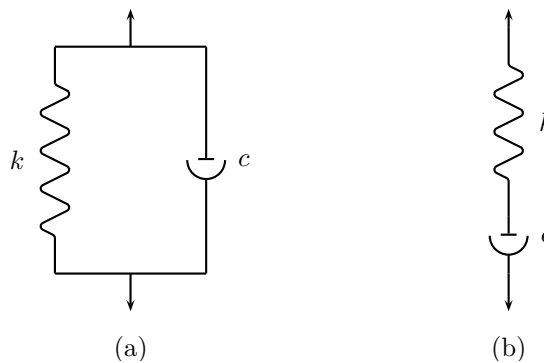


Figura 2.3: Modelos de Kelvin-Voigt (a) e de Maxwell (b)

No caso do modelo de Maxwell, os elementos elástico e viscoso associados em série são submetidos ao mesmo valor de tensão enquanto adiciona-se as deformações de cada um dos elementos para se obter a deformação total. Logo, o comportamento do modelo é descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{k} + \frac{\sigma}{c} \quad (2.6)$$

Para o modelo de Kelvin-Voigt, a lei de comportamento é obtida pela soma das tensões, considerando-se uma deformação idêntica em cada um dos ramos do modelo. Assim, obtém-se:

$$\varepsilon + \frac{c}{k}\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{k} \quad (2.7)$$

Os fenômenos de fluência e de relaxação são obtidos, respectivamente, pela aplicação de uma tensão e de uma deformação constantes, traduzidas nos modelos analíticos por derivadas nulas. Para o modelo de Maxwell, a anulação da derivada da tensão (fluência) leva a uma velocidade de deformação constante sob a aplicação de uma tensão: este modelo é bem adaptado à representação do comportamento de um fluido viscoso, mas não representa o comportamento de um sólido viscoelástico. Já o modelo de Kelvin-Voigt é bem adaptado à representação da fluência mas não é adequado para representar a relaxação decorrente da aplicação de uma deformação constante.

Para poder modelar adequadamente o comportamento de materiais viscoelásticos reais utilizando os modelos reológicos simples, precisa-se utilizar combinações mais complexas, chegando a equações diferenciais que envolvam ao mesmo tempo a tensão, a deformação e suas derivadas temporais. Dentre os modelos desenvolvidos, encontra-se o modelo de Zener, também chamado de *modelo viscoelástico padrão*, que corresponde à associação em paralelo de uma mola e de um modelo de Maxwell. Este modelo, mostrado na Fig. 2.4, envolve três parâmetros e pode ser representado da seguinte forma:

$$(E_0 + E_1)\sigma + c\dot{\sigma} = E_0E_1\varepsilon + c\dot{\varepsilon} \quad (2.8)$$

Este modelo permite uma representação mais completa da resposta do material tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Entretanto, na prática, é inadequado à modelagem de materiais viscoelásticos reais, uma vez que a rigidez complexa decorrente da expressão (2.8) no domínio de Laplace sofre uma evolução muito mais rápida que as variações realmente observadas nos materiais viscoelásticos reais (Salençon, 1983).

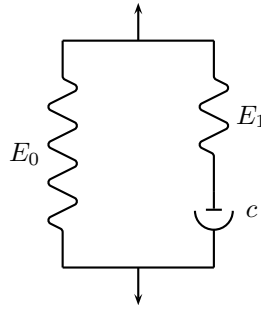


Figura 2.4: Modelo de Zener ou modelo viscoelástico padrão

O modelo de Maxwell generalizado ou *cadeia de Maxwell*, representado pela Fig. 2.5, é uma extensão do modelo de Zener, onde n modelos de Maxwell e uma mola são associados em paralelo. A função de relaxação deste modelo é representada por uma série de n termos exponenciais, cada um sendo associado à rigidez e ao amortecimento do elemento de Maxwell correspondente:

$$E(t) = E_0 + \sum_{i=1}^n E_i e^{-\frac{E_i}{c_i} t} \quad (2.9)$$

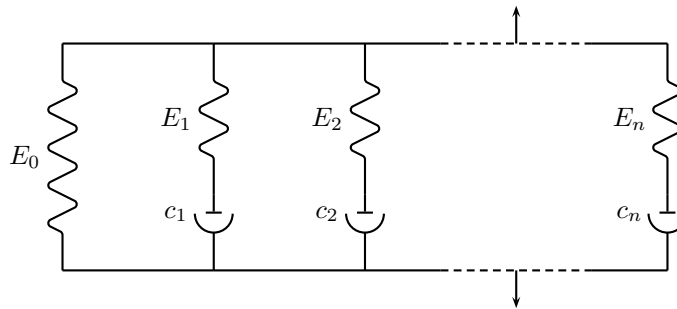


Figura 2.5: Modelo de Maxwell generalizado

A relaxação e a resposta dinâmica dos materiais viscoelásticos lineares podem ser representadas de forma satisfatória pelo uso da expressão (2.9) desde que o número n de elementos de Maxwell seja suficientemente grande. Como consequência, um grande número de parâmetros E_n e c_n a ser identificados são requeridos para representar convenientemente o comportamento viscoelástico. Com o objetivo de contornar essa dificuldade, foram propostos outros modelos viscoelásticos baseados na utilização de variáveis internas não físicas e de derivadas fracionárias, como descrito na seção seguinte.

2.2.2 Modelos paramétricos não reológicos

Dentre os modelos paramétricos mais utilizados para a modelagem da viscoelasticidade linear nos domínios do tempo e da frequência, encontram-se os modelos GHM desenvolvido por Golla, Hughes e Mac Tavish (Golla e Hughes, 1985) e o modelo *Anelastic Displacement Field* (ADF), desenvolvido por Lesieutre *et al.* (1989). A função de relaxação do modelo GHM no domínio de Laplace é expressa sob a forma de uma soma de funções de transferência de n osciladores do tipo massa-mola-amortecedor (Kergourlay, 2004):

$$E^*(\omega) = E_0 \left(1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{s^2 + 2\xi_i \omega_i s}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \right) \quad (2.10)$$

Na equação (2.10), os parâmetros α_i e ξ_i correspondem à massa e ao coeficiente de amortecimento viscoso do oscilador equivalente i , normalizados de acordo com a frequência natural ω_i .

O modelo ADF é baseado na separação da resposta em dois componentes: um componente elástico, que representa a parte instantânea da resposta, e um componente *anelástico* que representa o efeito de relaxação. A função de relaxação, no domínio da frequência, pode ser escrita sob a seguinte forma:

$$E^*(\omega) = E_0 \left(1 + \sum_{i=1}^n \Delta_i \frac{\omega^2 + i\Omega_i}{\omega^2 + \Omega_i^2} \right) \quad (2.11)$$

Os modelos GHM e ADF permitem, através das suas expressões analíticas, representar a evolução das funções de dissipação em relação à frequência. O uso destes modelos no cálculo da resposta de uma estrutura no domínio temporal requer o uso de graus de liberdade não físicos para a representação da dissipação de energia pelo amortecimento viscoelástico, relacionados aos graus de liberdade físicos pelos módulos de relaxação.

Entretanto, a inclusão de variáveis dissipativas adicionais pelos modelos GHM e ADF para representar o efeito viscoelástico tende a aumentar enormemente as dimensões das matrizes globais dos sistemas estruturais contendo amortecimento viscoelástico no contexto dos elementos finitos (Lima, 2003).

Os modelos expostos acima foram desenvolvidos com base no modelo padrão generalizado. Este modelo, como definido por Nashif (1985), é baseado sobre a expressão da lei constitutiva no domínio do tempo sob forma de uma somatória de derivadas com relação ao tempo:

$$\sigma(t) + \frac{d\sigma(t)}{dt} + \dots + \frac{d^n \sigma(t)}{dt^n} = E_0 \varepsilon(t) + E_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \dots + E_n \frac{d^n \varepsilon(t)}{dt^n} \quad (2.12)$$

O modelo apresentado pela Eq. (2.12) pode ser utilizado para a modelagem do comportamento viscoelástico no domínio do tempo e no domínio da frequência, por meio da transformada de Laplace. Os coeficientes E_i , $0 \leq i \leq n$, são identificados a partir de dados experimentais. O uso de um número alto de derivadas resulta numa descrição mais precisa dos efeitos de fluência e relaxação (domínio do tempo) e do comportamento com respeito à frequência (domínio de Laplace).

Para materiais viscoelásticos cujas propriedades mecânicas dependem fortemente da frequência, o número de derivadas requeridas para representar o comportamento pode ser grande. Como consequência, uma vez combinados com modelos de elementos finitos, obtêm-se sistemas de equações diferenciais de alta ordem, dificultando a obtenção dos autovalores complexos e dos correspondentes autovetores. Para reduzir o número de parâmetros requeridos pelo modelo padrão, Bagley (1983) propôs a introdução de derivadas de ordem fracionária na relação constitutiva:

$$\sigma(t) + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \sigma(t)}{dt^\alpha} = E_0 \varepsilon(t) + \tau^\alpha E_\infty \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha} \quad (2.13)$$

onde o parâmetro α é um número fracionário ($0 < \alpha < 1$) que corresponde à ordem das derivadas fracionárias. Na equação (2.13), estas derivadas são expressões matemáticas equivalentes à função de Riemann-Liouville (Galucio *et al.*, 2004) que define uma integral de convolução e cujos parâmetros podem ser ajustados de maneira a representar o histórico das deformações. A transformada de Laplace pode ser aplicada à relação (2.13) para se obter a expressão do módulo complexo do material viscoelástico.

2.2.3 Modelagem não paramétrica no domínio da frequência: módulo complexo

Os modelos paramétricos apresentados na seção anterior permitem a representação do comportamento dos materiais viscoelásticos através de funções de dissipação. Entretanto, o uso desses modelos leva a um aumento do custo computacional devido aos graus de liberdade adicionais. Quando o interesse está no cálculo de respostas no domínio da frequência, por exemplo, no caso de um carregamento cíclico, é possível utilizar uma representação não-paramétrica da lei constitutiva para materiais viscoelásticos lineares, que pode ser obtida através de uma transformada de Fourier do tensor de relaxação, ou diretamente via medições do campo da resposta em frequência do material.

A relação tensão-deformação para um material viscoelástico linear pode ser expressa no domínio do tempo sob a forma de uma integral de convolução como definido pela expressão (2.5). Segundo Christensen (1982), a aplicação da transformada de Fourier à relação (2.5) leva à seguinte expressão:

$$\hat{\sigma}_{ij}(\omega) = \hat{G}_{ijkl}^*(\omega) \hat{\varepsilon}_{kl}(\omega) \quad (2.14)$$

onde $\hat{\sigma}_{ij}(\omega)$ e $\hat{\varepsilon}_{kl}(\omega)$ representam, respectivamente, os tensores das tensões e das deformações expressos no domínio da frequência. De acordo com a expressão (2.14), a relação tensão-deformação no domínio spectral para um material viscoelástico linear é equivalente à relação de elasticidade linear onde o tensor de elasticidade é complexo e dependente da frequência. Esta propriedade é conhecida como *Princípio da correspondência elástico-viscoelástico* (Theisen, 2006). A relação tensão-deformação no caso unidimensional pode ser expressa da seguinte forma:

$$\sigma(\omega) = E^*(\omega) \varepsilon(\omega) \quad (2.15)$$

onde $E^*(\omega)$ é o *módulo complexo* do material. Esta grandeza representa a relação entre a tensão e a deformação de um material viscoelástico quando solicitado segundo uma dada direção, e com uma frequência e uma amplitude de excitação fixas.

Quando um material viscoelástico é submetido a um carregamento senoidal, sua resposta também apresenta-se senoidal, porém, com uma diferença de fase δ em

relação à excitação conforme ilustrado na Fig. 2.6. Este fenômeno é chamado de *acomodação viscoelástica*. Para o modelo representado pela expressão (2.15), admitindo variações harmônicas da tensão e da deformação da forma:

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \sigma_0 e^{i\omega t} \\ \hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)} \end{cases}$$

e realizando algumas manipulações algébricas, obtém-se a seguinte relação entre as amplitudes:

$$E^*(\omega) = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i\delta} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} (\cos \delta + i \sin \delta) \quad (2.16)$$

ou ainda sob a seguinte forma (Nashif *et al.*, 1985):

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) = E'(\omega) [1 + i\eta(\omega)] \quad (2.17)$$

onde a parte real $E'(\omega) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos \delta$ e a parte imaginária $E''(\omega) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin \delta$ do módulo complexo são chamadas, respectivamente, de *módulo de armazenamento* e de *módulo de perda*, enquanto a razão $\eta(\omega) = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} = \tan \delta$ corresponde ao *fator de perda*.

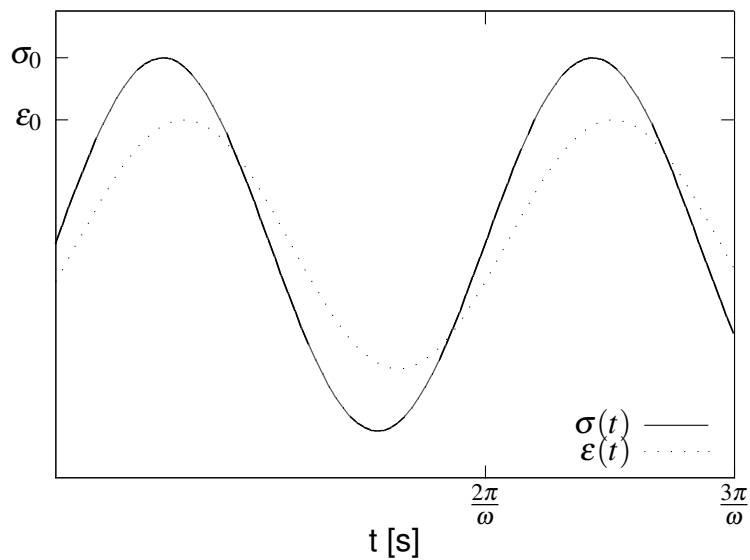


Figura 2.6: Representação dos pulsos de tensão (excitação) e de deformação (resposta) para um material viscoelástico submetido a um carregamento harmônico

As componentes do módulo complexo estão relacionadas às propriedades conservativas e dissipativas do material viscoelástico através da expressão analítica da energia dissipada durante um ciclo de deformação no caso unidimensional:

$$\begin{aligned}
 W &= \oint \sigma d\varepsilon \\
 &= \int_0^T \sigma_0 \sin(\omega t) \varepsilon_0 \omega \cos(\omega t - \delta) dt \\
 &= \sigma_0 \varepsilon_0 \omega \int_0^T \sin(\omega t) [\cos(\omega t) \cos \delta - \sin(\omega t) \sin \delta] dt
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Introduzindo as expressões dos módulos de armazenamento e de perda na expressão (2.18), obtém-se a seguinte expressão:

$$W = \omega \varepsilon_0^2 \left[E'(\omega) \underbrace{\int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt}_{=0} + E''(\omega) \underbrace{\int_0^T \sin^2(\omega t) dt}_{=\frac{\pi}{\omega}} \right] \tag{2.19}$$

A relação (2.19) mostra que o módulo de armazenamento é associado à parte elástica da resposta, sendo proporcional a um componente da energia de deformação que se anula sobre o ciclo de deformação. Esta energia é armazenada e restituída pelo sistema, enquanto que a componente proporcional ao módulo de perda representa a energia dissipada durante o ciclo de oscilação.

A curva tensão-deformação para um ciclo de vibração, ilustrada na Fig. 2.7, mostra que a resposta descreve uma elipse no plano (ε, σ) . A área da elipse corresponde à energia dissipada durante o ciclo, e sua expressão analítica é dada pela expressão (2.19), expressa como segue:

$$W = \pi E''(\omega) \varepsilon_0^2 = \pi \eta(\omega) E'(\omega) \varepsilon_0^2 \tag{2.20}$$

Quanto maior o fator de perda, maior a área da elipse e mais importante será o efeito dissipativo do material viscoelástico. No caso de uma resposta puramente

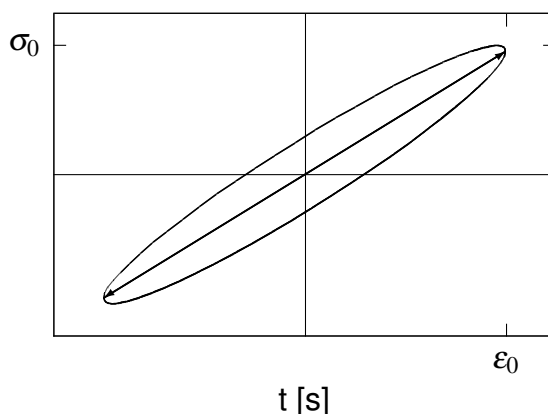


Figura 2.7: Ciclo de histerese para um material viscoelástico linear

elástica, onde $\eta(\omega) = 0$, a curva tensão-deformação se reduz a uma reta, pois a totalidade da energia de deformação é armazenada e restituída viscoelasticamente. A curva elíptica descrita pela resposta é chamada de *curva de histerese*.

2.3 Fatores ambientais e operacionais

As partes real e imaginária do módulo complexo são fortemente influenciadas por fatores operacionais e por fatores ambientais como temperatura e umidade, bem como a própria evolução do material com o tempo após a fabricação (envelhecimento), uma vez que a maioria dos polímeros viscoelásticos são caracterizados por um tempo de vida útil.

Quando um material é solicitado, o comprimento e a orientação das ligações interatômicas são alterados. Este efeito pode ser ampliado pela dilatação termoelástica sob efeito da temperatura ambiente, e alterado pelas deformações decorrentes da aplicação de uma carga externa e dos efeitos de fluência e de relaxação induzidos pela recuperação progressiva da energia dissipada. Nesta seção, serão descritos os seguintes fatores considerados de maior importância no contexto do presente trabalho:

- Solicitações externas: a frequência de vibração e a pré-carga estática. A amplitude de deformação passa a influenciar a rigidez dinâmica do material viscoelástico a partir de uma dada amplitude de solicitação. Considerando que a faixa de tensão-deformação na qual trabalham os materiais nas aplicações investigadas no presente trabalho permite considerar o comportamento como sendo linear,

os efeitos da amplitude de deformação serão desprezados (os valores máximos atingidos pelo ângulo de deformação e pela tensão cisalhante são respectivamente de 0,07 rad e 40 kPa).

- Meio ambiente: temperatura, que afeta significativamente o material viscoelástico. A influência da temperatura é discutida na seção seguinte.

2.3.1 Efeito da temperatura

A temperatura é considerada o fator mais influente sobre o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos (Nashif. *et al*, 1985). A Fig. 1.7 apresenta a evolução do fator de perda e do módulo de armazenamento de um polímero comum, para uma dada frequência ω_0 . Dependendo dos valores de $E'(\omega_0, T)$ e $\eta(\omega_0, T)$ observados e de sua evolução com relação à temperatura, pode-se identificar quatro regiões distintas:

1. A **zona vítrea** está associada às temperaturas mais baixas e corresponde a um comportamento mais rígido e pouco dissipativo do material. Os valores do módulo de armazenamento podem atingir valores da ordem de 10^8 KPa e diminuem lentamente com o aumento da temperatura. Os valores do fator de perda são baixos mas aumentam rapidamente com a temperatura.
2. A **zona de transição** corresponde a uma fase caracterizada por mudanças significativas do módulo complexo devido às alterações da sua microestrutura sob o efeito do aumento da temperatura. Nesta região, pode-se observar uma queda do módulo de armazenamento enquanto o fator de perda atinge seu valor máximo em um ponto conhecido como *temperatura de transição vítrea*, cujo valor depende da frequência.
3. A **zona de borracha** corresponde a uma faixa de temperatura cuja largura, dependendo do material, pode variar de 50°C até 300°C . Esta fase é caracterizada por valores baixos do fator de perda (de 0,1 a 0,3 para a maioria dos materiais viscoelásticos) e do módulo de armazenamento, que pode chegar à ordem de 10 KPa para alguns materiais. Tanto o módulo de armazenamento quanto o fator de perda sofrem poucas evoluções com o aumento da temperatura nesta fase.
4. A **zona de escoamento** corresponde a uma fase de transição entre o estado sólido e o estado líquido do material viscoelástico. Esta fase é marcada por uma

queda do módulo de armazenamento e por um aumento do fator de perda do material que perde toda sua rigidez, passando a se comportar como um fluido viscoso. Existem poucos dados sobre esta fase de transformação para os materiais de borracha.

2.3.2 Efeito da frequência de excitação

A dependência em relação à frequência das propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos traduz a influência das velocidades de carregamento e descarregamento sobre a relaxação do material. A Fig. 2.8 representa a evolução do fator de perda e do módulo de armazenamento para uma temperatura fixa. Pode-se notar que o comportamento em relação à frequência de excitação é o inverso do comportamento em relação à temperatura ao comparar as Fig. 2.8 e 1.7 se forem consideradas as zonas vítrea, de transição e de borracha.

Além disso, nota-se que o módulo de armazenamento aumenta de forma contínua com a frequência, apresentando um comportamento assintótico em baixas e altas frequências. Já o fator de perda atinge seu valor máximo na zona de transição.

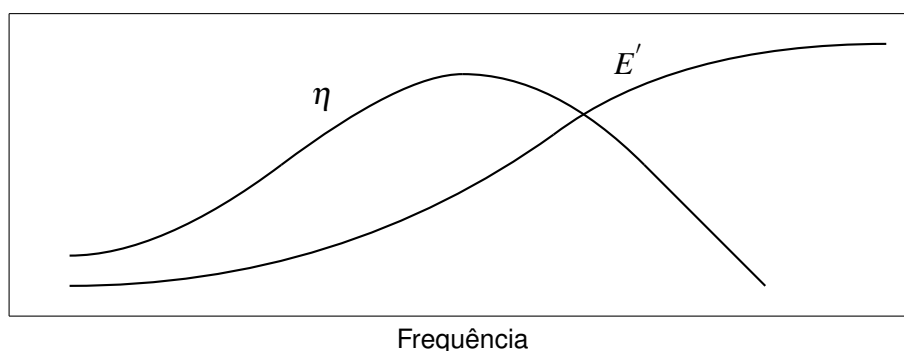


Figura 2.8: Evolução do módulo de armazenamento e do fator de perda com a frequência para um material viscoelástico genérico (adaptado de Nashif *et al.*, 1985)

2.3.3 Precarga estática

Poucos dados são disponíveis sobre a evolução do módulo complexo em função da precarga estática. Sabe-se que os efeitos da precarga são mais importantes na região de borracha, e que o aumento dela resulta numa diminuição do fator de perda e num aumento do módulo de armazenamento (Nashif, 1985).

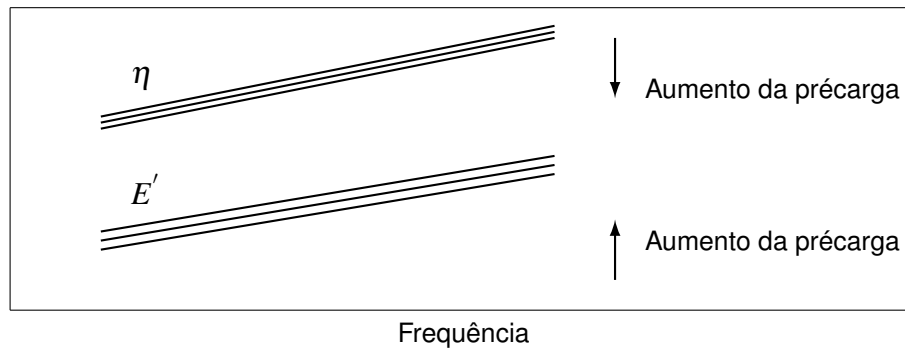


Figura 2.9: Evolução do módulo de armazenamento e do fator de perda com a pré-carga estática (adaptado de Nashif *et al.*, 1985)

2.3.4 Princípio da superposição frequência-temperatura

O *Princípio da Superposição Frequência-Temperatura* (PSFT), também conhecido como princípio de *William, Landel e Ferry* (WLF), permite estabelecer uma correspondência entre a frequência de excitação e a temperatura para a expressão do módulo complexo de materiais viscoelásticos lineares (Nashif, 1985). A identificação do módulo de armazenamento e do fator de perda para uma dada faixa de frequência e para várias temperaturas mostra que as curvas podem ser superpostas se um fator de deslocamento horizontal ao longo da escala das frequências for aplicado a cada curva, como ilustrado na Fig. 2.10.

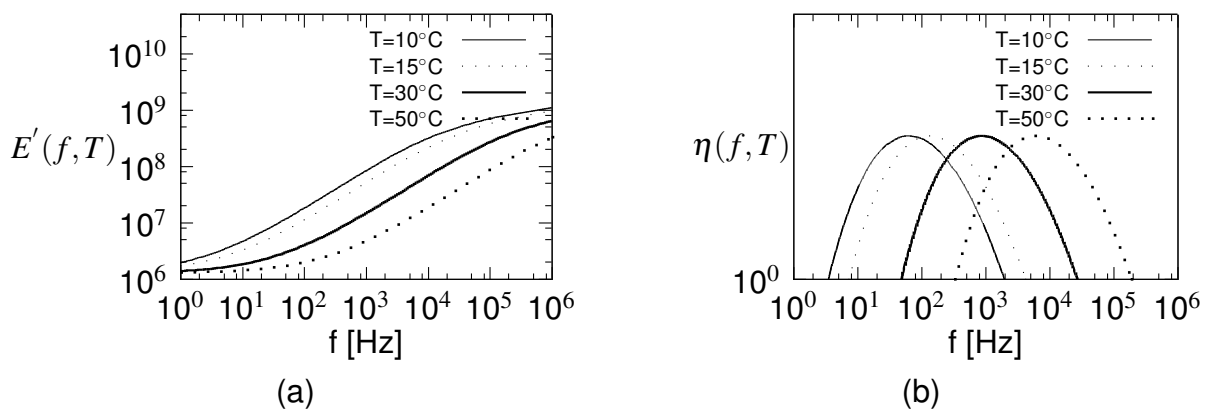


Figura 2.10: Módulo de armazenamento (a) e fator de perda (b) do material $3M^{TM}ISD$ 112

Esta propriedade levou à introdução do conceito de *curva mestre*, que corresponde às curvas do módulo de armazenamento e do fator de perda obtidas para uma temperatura de referência arbitrária T_0 , sendo as frequências associadas aos pontos da curva mestre chamadas de *frequências reduzidas* ω_r . Considera-se a curva ob-

tida para uma temperatura T_1 diferente de T_0 : pode ser superposta à curva mestre através da aplicação de um fator de deslocamento sobre as frequências, sendo este fator dependente de T_1 . O fator de deslocamento $\alpha_T(T)$, definido como uma função da temperatura, relaciona as frequências de operação à frequência reduzida da seguinte forma:

$$E'(\omega, T) = E'(\omega_r, T_0) = E'(\alpha_T(T)\omega, T_0) \quad (2.21a)$$

$$\eta(\omega, T) = \eta(\omega_r, T_0) = \eta(\alpha_T(T)\omega, T_0) \quad (2.21b)$$

A identificação do fator de deslocamento $\alpha_T(T)$ como função da temperatura pode ser feita experimentalmente, através da superposição de curvas obtidas para várias temperaturas e sobre pequenas faixas de frequência, de tal forma que a curva mestre obtida seja contínua (Kergourlay, 2004). As seguintes expressões analíticas do fator de deslocamento e do módulo de cisalhamento complexo em função da frequência reduzida foram desenvolvidas por Drake e Soovere (1984) para o material viscoelástico *3M ISD 112*™ :

$$G^*(\omega_r) = B_1 + \frac{B_2}{1 + B_5 \left(\frac{i\omega_r}{B_3}\right)^{-B_6} + \left(\frac{i\omega_r}{B_3}\right)^{-B_4}} \quad (2.22)$$

onde valores dos coeficientes B_i são apresentados na Tab.(2.1).

Tabela 2.1: Parâmetros da lei constitutiva do material *3M ISD 112* proposta por Drake e Soovere (1984)

B_1 [MPa]	B_2 [MPa]	B_3	B_4	B_5	B_6
0.4307	1200	0.1543	0.6847	3.2410	0.1800

O fator de deslocamento $\alpha_T(T)$ é definido pela seguinte relação:

$$\log(\alpha_T) = a \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) + 2.303 \left(\frac{2a}{T_0} - b \right) \log \left(\frac{T}{T_0} \right) + \left(\frac{b}{T_0} - \frac{a}{T_0^2} - S_{AZ} \right) (T - T_0) \quad (2.23)$$

onde:

- $T_0 = 290$ K é a temperatura de referência;

- $S_{AZ} = 0.05956 \text{ K}^{-1}$;
- $a = (D_B C_C - C_B D_C) / D_E$;
- $b = (D_C C_A - C_C D_A) / D_E$;

Os parâmetros envolvidos na expressão dos coeficientes a e b estão definidos na Tab.(2.2).

Tabela 2.2: Parâmetros da expressão do fator de deslocamento do material *3M ISD 112*

T_L [K]	T_H [K]	S_{AL} [K] ⁻¹	S_{AH} [K] ⁻¹
210	360	0.1474	0.009725
$C_A = (1/T_L - 1/T_0)^2$		$C_B = (1/T_L - 1/T_0)$	$C_C = S_{AL} - S_{AZ}$
$D_A = (1/T_H - 1/T_0)^2$		$D_B = (1/T_H - 1/T_0)$	$D_C = S_{AH} - S_{AZ}$
$D_E = D_B C_A - D_A C_B$			

A Fig. 2.11 representa o *nomograma* do material *3M ISD 112*™ obtido a partir das expressões (2.22) e (2.23), e a Fig. 2.12 representa as curvas referentes ao módulo de armazenamento e ao fator de perda para vários valores de temperaturas.

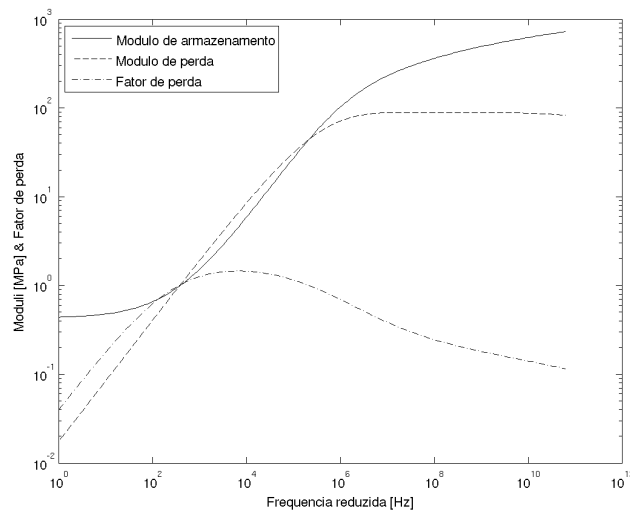
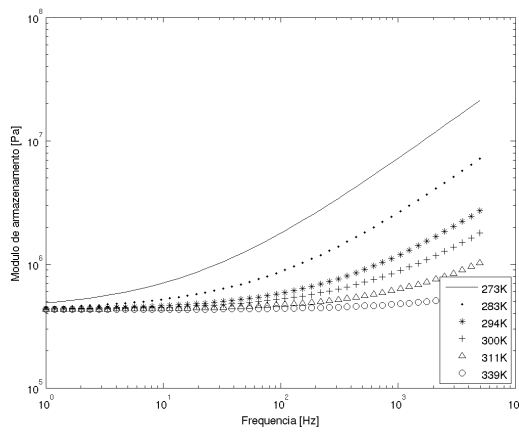
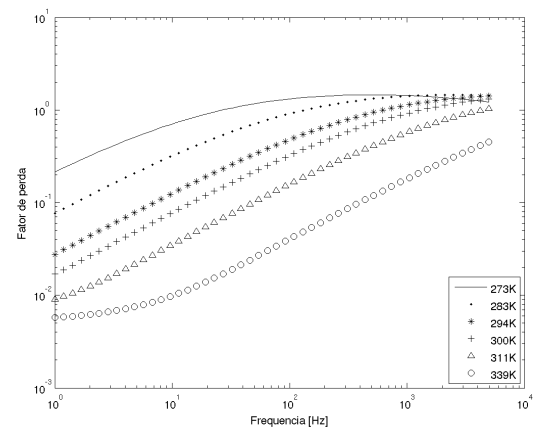


Figura 2.11: Nomograma do material *3M ISD 112*



(a)



(b)

Figura 2.12: Módulo de armazenamento (a) e fator de perda (b) do material *3M ISD 112*TM para vários valores de temperaturas

CAPÍTULO III

Modelagem do problema de termoviscoelasticidade

O autoaquecimento em materiais viscoelásticos é um fenômeno físico que pode ser descrito como o aumento da temperatura causado pela dissipação viscoelástica que resulta da aplicação de um carregamento dinâmico cíclico. A evolução temporal e a distribuição espacial do campo de temperatura dependem da intensidade da fonte de calor, das propriedades térmicas do material viscoelástico, e das condições de contorno térmicas. Neste contexto, este capítulo é dedicado à modelagem por elementos finitos do acoplamento termomecânico em viscoelasticidade linear, com o objetivo de estudar o fenômeno do autoaquecimento interno de materiais viscoelásticos devido a esforços mecânicos cíclicos. A formulação apresentada é baseada nos trabalhos de Rittel (1999, 2000) e de Merlette (2005).

3.1 Equacionamento do problema de termoviscoelasticidade linear

Seja um domínio $\mathcal{D}$ formado por um volume Ω e pela superfície $\partial\Omega$ que o delimita. O problema termoviscoelástico completo pode ser definido em cada instante de tempo, e para qualquer ponto de Ω , por duas equações, a saber:

- pela equação da transferência de calor:

$$q_g + k\nabla^2 T = q_a \quad (3.1)$$

- e pela equação do equilíbrio dinâmico:

$$\vec{\text{div}}\sigma_{ij} + \vec{f}_v = \rho\ddot{\vec{u}} \quad (3.2)$$

onde k é a condutividade térmica do material, ρ representa a densidade do material, $\vec{\text{div}}\sigma_{ij}$ é o vetor divergência do tensor das tensões, $\vec{f}_v$ representa as forças aplicadas por unidade de volume, $\vec{u}$ é o vetor das acelerações, q_g é o calor gerado pela dissipação viscoelástica, e q_a é o calor armazenado pelo material.

A relação entre as derivadas espaciais de segunda ordem do campo de temperatura T , e os fluxos do calor armazenado q_a e gerado q_g por unidade de tempo decorre da aplicação da primeira lei da termodinâmica, segundo a qual a variação da energia interna de um corpo, que representa a soma das energias cinéticas de todas as partículas que o compõem, é igual à diferença do calor armazenado pelo sistema, e do trabalho fornecido pelo mesmo ao longo da transformação. Esta relação pode ser escrita para uma alteração infinitesimal do estado do corpo da seguinte forma (Gaskell, 2003):

$$dU = \delta q - \delta w \quad (3.3)$$

onde dU é a forma diferencial da função energia interna U e δq e δw representam, respectivamente, o calor armazenado pelo sistema e o trabalho fornecido. Este último é negativo, uma vez que representa a quantidade de energia que é transferida ao meio externo. Para o caso específico em que o sistema não produz trabalho ($\delta w = 0$), a expressão (3.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$dU = \delta q \quad (3.4)$$

A variação da energia interna por unidade de tempo envolve apenas o armazenamento e a geração de calor, e pode ser considerada igual à diferença dos fluxos de calor que entram e saem do corpo. Desta forma, a primeira lei da termodinâmica permite escrever o balanço de energia do sistema da seguinte forma (Lienhard e Lienhard, 2004):

$$q_e + q_g = q_s + q_a \quad (3.5)$$

onde q_e [W.m^{-3}] é o fluxo de calor de entrada, q_g [W.m^{-3}] representa o fluxo de calor gerado, q_s [W.m^{-3}] é o fluxo de calor de saída, e q_a [W.m^{-3}] é o fluxo de calor

armazenado.

3.1.1 Condução térmica

Os fluxos de calor que entram e saem do sistema representam o calor trocado pelas superfícies que delimitam o domínio por meio da condução térmica. Segundo a lei de Fourier, o fluxo de calor resultante da condução térmica é proporcional ao gradiente de temperatura (Lienhard e Lienhard, 2004). Por exemplo, o fluxo de calor unidirecional na direção 1 do domínio ilustrado na Fig. 3.1, é dado pela seguinte expressão:

$$q_1 = -k_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} \quad (3.6)$$

onde q_1 e k_1 representam, respectivamente, o fluxo de calor trocado por condução e a condutividade térmica na direção 1. A expressão (3.6) pode ainda ser generalizada para o caso tridimensional como segue:

$$\{q\} = -[k_{ij}]\{\nabla T\} \quad (3.7)$$

onde $[k_{ij}]$ é o tensor das condutividades térmicas, definido como segue:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

e $\{\nabla T\}$ representa o vetor gradiente de temperatura, de tal forma que:

$$\{\nabla T\} = \begin{Bmatrix} \partial T / \partial x_1 \\ \partial T / \partial x_2 \\ \partial T / \partial x_3 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Para um material isotrópico em relação à condução de calor ($k_1 = k_2 = k_3$), o tensor de condutividade térmica se reduz ao parâmetro escalar k . Logo, obtém-se a

seguinte forma local da expressão do fluxo de calor decorrente da condução:

$$\{q\} = -k\{\nabla T\} \quad (3.10)$$

A Fig. 3.1 representa um volume de controle infinitesimal para o qual a aplicação da lei de Fourier permite deduzir a expressão do fluxo total de calor entrando e saindo pelas faces normais à direção 1. O fluxo total de entrada é dado por:

$$Q_{e1} = -k \, dx_2 \, dx_3 \left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_{x_1} \quad (3.11)$$

Da mesma forma, pode-se deduzir a expressão do fluxo total de saída:

$$Q_{s1} = -k \, dx_2 \, dx_3 \left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_{x_1+dx_1} \quad (3.12)$$

Logo, pode-se expressar a diferença dos fluxos, como segue:

$$Q_{s1} - Q_{e1} = -k \, dx_2 \, dx_3 \left(\left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_{x_1+dx_1} - \left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_{x_1} \right) \quad (3.13)$$

Após a aplicação da definição das derivadas, pode-se obter a seguinte expressão para a diferença dos fluxos:

$$Q_{s1} - Q_{e1} = -k \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \quad (3.14)$$

Dividindo todos os termos da Eq.(3.14) pelo volume do domínio infinitesimal $dV = dx_1 \, dx_2 \, dx_3$ obtém-se a seguinte expressão para a diferença dos fluxos de entrada e saída por unidade de volume:

$$q_{s1} - q_{e1} = -k \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} \quad (3.15)$$

Somando os fluxos de entrada e de saída nas três direções, obtém-se a seguinte

expressão:

$$q_s - q_e = \sum_{i=1}^3 q_{si} - q_{ei} = -k \nabla^2 T \quad (3.16)$$

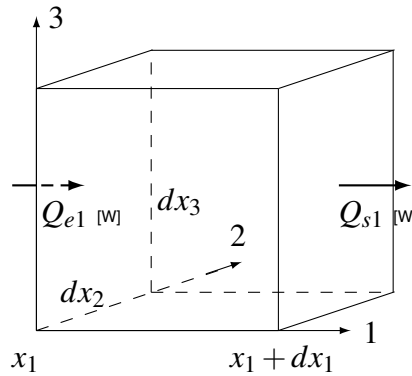


Figura 3.1: Volume de controle e fluxos de calor trocados por condução na direção 1

Combinando as expressões (3.16) e (3.5), pode-se obter a relação (3.1) como segue:

$$q_g + k \nabla^2 T = q_a \quad (3.17)$$

3.1.2 Energia de dissipação viscoelástica

A aplicação da lei de Fourier na seção anterior levou à uma formulação local da equação da transferência de calor envolvendo as derivadas espaciais de segunda ordem do campo de temperatura e os fluxos de calor armazenado pelo material q_a e gerado pela dissipação viscoelástica q_g , representados na expressão (3.17). A fonte de calor resultante da dissipação viscoelástica pode ser expressa a partir do estado de tensão e das velocidades de deformação, levando-se em conta o modelo utilizado para representar o comportamento viscoelástico do material, tanto do ponto de vista da sua resposta dinâmica, quanto da parte da energia convertida em calor (Rittel, 1999).

Fator de dissipação β

Seja o trabalho mecânico dissipado por unidade de tempo, $\dot{w}_m$, de um material viscoelástico. Parte deste trabalho é armazenado no material através de alterações

da sua microestrutura, e parte é convertida em calor. A razão entre a fonte de calor e a energia que provém da dissipação viscoelástica pode ser expressa sob forma de um coeficiente de rendimento térmico, β , da seguinte forma (Rittel, 1999):

$$q_g = \beta \dot{w}_m \quad (3.18)$$

O valor de β não depende apenas do material viscoelástico considerado, mas também da amplitude e da velocidade de deformação. Entretanto, de acordo com Rittel (2000), ele pode ser considerado constante para o caso em que as amplitudes de deformação são pequenas, enquanto a hipótese das pequenas deformações está válida, e quando os efeitos termoelásticos são desprezíveis. Geralmente, seus valores estão localizados entre 0,1 e 1,0 para a maioria dos materiais viscoelásticos. Na literatura, encontram-se poucos trabalhos que discutem os valores e a evolução deste coeficiente com relação às condições mecânicas. Merlette (2005) realizou vários ensaios experimentais com dispositivos viscoelásticos translacionais para estudar o fenômeno do autoaquecimento interno de materiais viscoelásticos quando submetidos a carregamentos dinâmicos cíclicos. O autor utilizou um modelo termomecânico de um grau de liberdade simplificado e uma metodologia de otimização paramétrica para identificar os valores de β através do procedimento de ajuste de curvas.

Expressão da energia dissipada durante um ciclo de vibração

No caso tridimensional, a potência mecânica dissipada por unidade de volume em função do tempo em um sólido pode ser expressa como o produto tensorial do tensor das tensões pelo tensor das velocidades de deformação da seguinte forma (Thionnet, 2007):

$$\dot{w}_m = \sigma_{ij} : \dot{\epsilon}_{ij} \quad (3.19)$$

onde:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \text{ é o tensor das tensões, e} \quad (3.20a)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} & \dot{\epsilon}_{12} & \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\epsilon}_{21} & \dot{\epsilon}_{22} & \dot{\epsilon}_{23} \\ \dot{\epsilon}_{31} & \dot{\epsilon}_{32} & \dot{\epsilon}_{33} \end{bmatrix} \text{ é o tensor das velocidades de deformação.} \quad (3.20b)$$

Neste trabalho, tem-se interesse em modelar o comportamento termomecânico de materiais viscoelásticos quando submetidos a carregamentos dinâmicos cíclicos. Uma vez atingido o regime permanente, a resposta a um carregamento senoidal em qualquer ponto do domínio $\mathcal{D}$ pode ser representada da seguinte forma:

$$\epsilon_{ij}(t) = \epsilon_{0,ij} e^{i\omega t + \delta} \quad (3.21)$$

Logo, obtém-se a expressão da velocidade de deformação:

$$\dot{\epsilon}_{ij}(t) = i\omega \epsilon_{0,ij} e^{i\omega t + \delta} = i\omega \epsilon_{ij}(t) \quad (3.22)$$

onde ϵ_{ij} é o tensor das deformações.

Substituindo a expressão (3.22) na relação (3.19), obtém-se a seguinte expressão para potência dissipada pelo material viscoelástico:

$$\dot{w}_m = i\omega \sigma_{ij} : \epsilon_{ij} \quad (3.23)$$

No Capítulo 2, seção (2.2) foi mostrado que a viscoelasticidade linear pode ser modelada como um caso particular da elasticidade linear, admitindo-se, num primeiro momento, que, para uma dada temperatura, o módulo longitudinal e/ou módulo de cisalhamento (segundo o estado de tensão-deformação adotado) são independentes da frequência. Em seguida, a dependência em frequência dos módulos é representada segundo um modelo viscoelástico particular adotado. Neste contexto, pode-se

estender a teoria da elasticidade clássica à expressão da relação tensão/deformação em um meio tridimensional, no caso das pequenas deformações, para um material viscoelástico isotrópico, da forma (Christensen, 1982):

$$\sigma_{ij} = \frac{E^*(\omega, T)}{1 + \nu} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E^*(\omega, T)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \mathcal{I}_{ij} \varepsilon_{kk} \quad (3.24)$$

onde $\mathcal{I}_{ij}$ é o tensor identidade de segunda ordem, e ε_{kk} é o traço do tensor das deformações ε_{ij} , ou seja, $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$. A equação (3.24) pode ser simplificada através da introdução dos *coeficientes de Lamé* λ e μ da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \mathcal{I}_{ij} \varepsilon_{kk} \quad (3.25)$$

onde:

$$\lambda = \frac{\nu E^*(\omega, T)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \mu = \frac{E^*(\omega, T)}{2(1 + \nu)} \quad (3.26)$$

A lei de comportamento expressa pela equação (3.24) ainda pode ser escrita sob a seguinte forma vetorial:

$$\{\sigma\} = \mathcal{H}^*(\omega, T) \{\varepsilon\} \quad (3.27)$$

onde $\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6 \end{bmatrix}^T$ e $\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 \end{bmatrix}^T$ correspondem, respectivamente, aos tensores das tensões e das deformações escritos sob a forma de vetores como segue:

$$\begin{cases} \sigma_i = \sigma_{ii} \text{ para } i = 1, 2, 3 \\ \varepsilon_i = \varepsilon_{ii} \text{ para } i = 1, 2, 3 \\ \sigma_4 = \sigma_{23}, \sigma_5 = \sigma_{13}, \sigma_6 = \sigma_{12} \\ \gamma_4 = 2\varepsilon_{23}, \gamma_5 = 2\varepsilon_{13}, \gamma_6 = 2\varepsilon_{12} \end{cases} \quad (3.28)$$

$\mathcal{H}^*(\omega, T)$ é a *matriz complexa de elasticidade*, dependente da frequência de ex-

citação e da temperatura. Ela relaciona os vetores das tensões e das deformações, sendo definida da seguinte forma:

$$\mathcal{H}^*(\omega, T) = \frac{E^*(\omega, T)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Para a maioria dos materiais viscoelásticos o coeficiente de Poisson ν pode ser considerado independente da temperatura e da frequência e neste caso, a dependência em frequência e temperatura da matriz de elasticidade é expressa somente pela expressão do módulo complexo $E^*(\omega, T)$. Desta forma, o módulo complexo $E^*(\omega, T)$ pode ser fatorado da matriz de elasticidade complexa $\mathcal{H}^*(\omega, T)$ da seguinte forma:

$$\mathcal{H}^*(\omega, T) = E^*(\omega, T) \tilde{\mathcal{H}} \quad (3.30)$$

onde $\tilde{\mathcal{H}}$ é a matriz de elasticidade fatorada.

Considerando as expressões (3.27), (3.30), e a definição em (3.23), onde o termo $E^*(\omega, T)$ é substituído pela definição do módulo complexo (2.17), pode-se obter a seguinte expressão para a potência mecânica dissipada de um material viscoelástico:

$$\begin{aligned} \dot{w}_m &= \{\sigma(t)\}^T \{\dot{\epsilon}(t)\} \\ &= \underbrace{i\omega\{\epsilon(t)\}^T \tilde{\mathcal{H}}\{\epsilon(t)\} E'(\omega, T)}_{\dot{w}_{mi}} - \underbrace{\omega\{\epsilon(t)\}^T \tilde{\mathcal{H}}\{\epsilon(t)\} E''(\omega, T)}_{\dot{w}_{mr}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde $\dot{w}_{mi}$ representa a parte imaginária, proporcional ao módulo de armazenamento, e $\dot{w}_{mr}$ a parte real, proporcional ao módulo de perda.

Em (3.31), o termo $i\omega\{\epsilon(t)\}^T$ na expressão de $\dot{w}_{mi}$ pode ser substituído por $\{\dot{\epsilon}(t)\}$

como segue:

$$\dot{w}_{mi} = \{\dot{\varepsilon}(t)\}^T \bar{\mathcal{H}}\{\varepsilon(t)\} E'(\omega, T) \quad (3.32)$$

No caso de uma resposta harmônica, todos os componentes do tensor das deformações variam de forma senoidal em relação ao tempo, e $\{\varepsilon(t)\}$ pode ser escrito da forma:

$$\{\varepsilon(t)\} = \{\varepsilon_0\} \text{sen}(\omega t + \delta) \quad (3.33)$$

onde $\{\varepsilon_0\}$ representa as amplitudes de deformação. Integrando $\dot{w}_{mi}$ sobre um ciclo de vibração, obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+2\pi/\omega} \dot{w}_{mi} dt &= \int_t^{t+2\pi/\omega} \{\dot{\varepsilon}(t)\}^T \bar{\mathcal{H}}\{\varepsilon(t)\} E'(\omega, T) dt \\ &= \omega \{\varepsilon_0\}^T \bar{\mathcal{H}}\{\varepsilon_0\} E'(\omega, T) \underbrace{\int_t^{t+2\pi/\omega} \text{sen}(\omega t + \delta) \cos(\omega t + \delta) dt}_{=0} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Através da Eq.(3.34), pode-se notar que a potência elástica armazenada pelo material anula-se sobre um ciclo de vibração. Desta forma, a potência de dissipação viscoelástica $\dot{w}_m$ é devida somente à parte real $\dot{w}_{mr}$:

$$\dot{w}_m = \dot{w}_{mr} = -\omega \{\varepsilon(t)\}^T \bar{\mathcal{H}}\{\varepsilon(t)\} E''(\omega, T) \quad (3.35)$$

Nota-se que $\dot{w}_m$ é negativo pois corresponde à parcela da energia mecânica dissipada. Do ponto de vista do balanço de energia térmica, a fonte de calor decorrente da dissipação viscoelástica corresponde a uma parcela da energia recebida pelo sistema, e deve então ser representada por uma quantidade positiva. Desta forma, introduzindo a expressão (3.35) na relação (3.18), pode-se deduzir a expressão da fonte de calor q_g :

$$q_g = |\beta \dot{w}_m| = \beta \omega \{\varepsilon(t)\}^T \bar{\mathcal{H}} \{\varepsilon(t)\} E''(\omega, T) \quad (3.36)$$

Substituindo $\{\varepsilon(t)\}$ por $\{\varepsilon_0\} \sin(\omega t + \delta)$ na expressão (3.36), obtém-se a seguinte expressão para a quantidade de calor gerado:

$$q_g = \beta \omega \{\varepsilon_0\}^T \bar{\mathcal{H}} \{\varepsilon_0\} E''(\omega, T) \sin^2(\omega t + \delta) \quad (3.37)$$

Como pode ser observado pela Eq. (3.37), o calor gerado não é constante e sua variação sobre um ciclo de vibração é descrita pela função $\sin^2(\omega t + \delta)$. Na prática, o período correspondente a um ciclo de vibração é pequeno quando comparado ao tempo necessário para que os fenômenos de troca e armazenamento de calor levem a um aquecimento significativo, uma vez que as velocidades dos fenômenos térmicos e estruturais são muito diferentes (Merlette, 2005). É possível, então, reescrever a expressão (3.37) substituindo o termo $\sin(\omega t + \delta)$ pelo valor médio da função seno quadrático, como segue:

$$q_g = \frac{1}{2} \beta \omega \{\varepsilon_0\}^T \bar{\mathcal{H}} \{\varepsilon_0\} E''(\omega, T) \quad (3.38)$$

Finalmente, combinando a Eq.(3.38) com a Eq.(3.1) tem-se:

$$\frac{1}{2} \beta \omega \{\varepsilon_0\}^T \bar{\mathcal{H}} \{\varepsilon_0\} E''(\omega, T) + k \nabla^2 T = q_a \quad (3.39)$$

3.1.3 Armazenamento de calor e efeito termoelástico

Conforme apresentado pela expressão (3.39), o calor armazenado pelo sistema depende ao mesmo tempo da capacidade do material de se aquecer sob ação do calor recebido, e da energia induzida pela variação do volume devida ao efeito termoelástico. Para estabelecer a expressão do calor armazenado de acordo com as propriedades do material é necessário introduzir a função *entropia*, S , que depende das variáveis de estado pressão, P , volume, V , e temperatura, T , de acordo com a relação (Gaskell, 2003):

$$dS = \frac{C_P}{T_0} dT - \alpha V dP \quad (3.40)$$

onde dS , α e C_P são, respectivamente, a forma diferencial da entropia, o coeficiente de dilatação a pressão constante (o qual representa a variação relativa do volume em relação à evolução da temperatura), e o calor específico do material, que corresponde à energia necessária para aquecer de 1°C uma unidade de volume do mesmo. Dividindo todos os termos da expressão (3.40) pelo volume do material, pode-se obter a seguinte forma diferencial da densidade de entropia:

$$ds = \frac{\rho C_P}{T_0} dT - \alpha dP \quad (3.41)$$

onde ρ e c_P representam, respectivamente a densidade do material e seu calor específico por unidade de massa.

O campo de pressão é adaptado à descrição do estado de gases e fluidos. E no caso dos sólidos, a força normal exercida sobre cada face de um volume de controle, normalmente assume valores diferentes dependendo da face considerada. Neste caso, é necessário considerar as componentes normais do tensor das tensões para descrever a pressão aplicada em cada direção. A *contribuição termoelástica* (sendo este, um termo utilizado para designar os efeitos da dissipação térmica dos materiais dentro do domínio da elasticidade), αdP , pode ser escrita sob a seguinte forma tensorial:

$$\alpha dP = \alpha_{ij} d\sigma_{ij} \quad (3.42)$$

Os termos tangenciais da forma diferencial do tensor das tensões $d\sigma_{ij}$ não têm influência sobre a contribuição termoelástica à entropia, uma vez que o *tensor de dilatação térmica* α_{ij} é diagonal e traduz o fato de que a dilatação térmica gera apenas variações de volume nas direções normais às faces do corpo. Assim, escreve-se:

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

A diferença de sinal entre as duas formas de escrever a contribuição termoe-lástica decorre das convenções utilizadas na mecânica dos sólidos: as tensões são definidas positivas de acordo com o vetor normal orientado para o exterior do domínio, enquanto o campo de pressão é descrito como uma força aplicada no sentido contrário, orientada para o interior do domínio.

Para um material isotrópico, o tensor de dilatação térmica pode ser substituído pelo parâmetro escalar, α , pois $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Desta forma, pode-se reescrever a expressão (3.41) como segue:

$$ds = \frac{\rho c_P}{T_0} dT + \alpha d\sigma_{kk} \quad (3.44)$$

De acordo com Gaskell (2003), o calor armazenado é relacionado à entropia para transformações reversíveis através da seguinte expressão:

$$ds = \frac{\delta q}{T_0} \quad (3.45)$$

Logo, associando as expressões (3.45) e (3.41), obtém-se:

$$\frac{\delta q}{T_0} = \frac{\rho c_P}{T_0} dT + \alpha d\sigma_{kk} \quad (3.46)$$

Derivando (3.46) em relação ao tempo, e multiplicando todos os termos por T_0 , chega-se à seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta q) = q_a = \rho c_P \dot{T} + \alpha T_0 \dot{\sigma}_{kk} \quad (3.47)$$

O termo $\dot{\sigma}_{kk}$ pode ser obtido pela expressão do tensor das tensões em função do tensor das deformações obtida pela teoria da elasticidade e apresentada na Seção

3.1.2. Utilizando os coeficientes de Lamé de acordo com a expressão (3.25), pode-se obter a seguinte expressão para σ_{kk} :

$$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = (3\lambda + 2\mu)\epsilon_{kk} \quad (3.48)$$

onde:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2\mu\epsilon_{11} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \\ \sigma_{22} = 2\mu\epsilon_{22} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \\ \sigma_{33} = 2\mu\epsilon_{33} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \end{cases} \quad (3.49)$$

λ e μ sendo independentes do tempo, pode-se obter:

$$\dot{\sigma}_{kk} = (3\lambda + 2\mu)\dot{\epsilon}_{kk} \quad (3.50)$$

Chega-se à seguinte expressão para o calor armazenado por unidade de tempo, levando em conta a contribuição termoelástica e o aquecimento do material:

$$q_a = \rho c_P \dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0 \dot{\epsilon}_{kk} \quad (3.51)$$

Introduzindo a expressão de (3.51) na equação (3.39), chega-se à seguinte expressão para o autoaquecimento interno de materiais viscoelásticos:

$$\frac{1}{2}\beta\omega\{\epsilon_0\}^T \mathcal{H}\{\epsilon_0\}E''(\omega, T) + k\nabla^2 T = \rho c_P \dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0 \dot{\epsilon}_{kk} \quad (3.52)$$

A maioria dos dispositivos viscoelásticos utilizados no controle passivo de vibrações e ruído são projetados de tal forma que durante o funcionamento, o material viscoelástico está sujeito apenas a estados de tensão-deformação cisalhantes. No caso do cisalhamento puro, as componentes normais do tensor das deformações são nulas. Como consequência, as velocidades de deformação normais também são nulas e a contribuição termoelástica se anula, uma vez que $\dot{\epsilon}_{kk} = 0$. Em alguns casos, devido à geometria complexa dos amortecedores, o estado de tensão-deformação en-

volve também as componentes normais, além dos componentes tangenciais, mas sua influência sobre o autoaquecimento interno dos materiais viscoelásticos é limitada, uma vez que o calor gerado pela dissipação viscoelástica permanece maior.

Desprezando o efeito termoelástico, pode-se reescrever a expressão (3.52) como segue:

$$\frac{1}{2}\beta\omega\{\varepsilon_0\}^T\mathcal{H}\{\varepsilon_0\}E''(\omega,T)+k\nabla^2T=\rho c_P\dot{T} \quad (3.53)$$

Os termos do lado esquerdo da Eq.(3.53) representam a energia recebida em um ponto qualquer do interior do domínio Ω por meio da dissipação viscoelástica, enquanto o lado direito representa o aquecimento do material.

A equação diferencial (3.53) deve ser resolvida sob a imposição de um conjunto de condições de contorno. Dentre as possíveis condições de contorno térmicas, encontram-se a temperatura imposta (condição de Dirichlet) e o fluxo imposto (condição de Neuman). Além disso, quando parte da fronteira $\partial\Omega$ do domínio $\mathcal{D}$ está em contato com o meio ambiente, pode haver troca de calor por meio da convecção natural. Neste caso, o fluxo de calor é proporcional à diferença de temperatura entre o meio ambiente e a fronteira, sendo denotadas por $\partial\Omega_D$, $\partial\Omega_N$ e $\partial\Omega_C$ as partes de $\partial\Omega$ sobre as quais são impostas, respectivamente, as condições de Dirichlet, Neuman e a condição de convecção natural. As condições de contorno térmicas podem ser assim descritas como segue:

$$\begin{cases} T = T_0 \text{ para } \partial\Omega_D \\ \vec{q} = \vec{q}_0 \text{ para } \partial\Omega_N \\ \vec{q} = h(T - T_\infty).\vec{n} \text{ para } \partial\Omega_C \end{cases} \quad (3.54)$$

onde T_0 , $\vec{q}_0$, h e T_∞ representam, respectivamente, a temperatura imposta, o fluxo imposto, o coeficiente de transferência de calor por convecção, e a temperatura do meio ambiente. Sendo $\partial\Omega_L$ a parte de $\partial\Omega$ livre de condições de contorno térmicas, tem-se $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_C \cup \partial\Omega_L$.

De forma resumida, o problema de termoviscoelasticidade linear pode ser definido em qualquer ponto de Ω pelo seguinte sistema de equações acopladas:

$$\frac{1}{2}\beta\omega\{\varepsilon_0\}^T\mathcal{H}\{\varepsilon_0\}E''(\omega,T)+k\nabla^2T = \rho c_P\dot{T} \quad (3.55a)$$

$$\text{div}\sigma_{ij}+\vec{f}_v = \rho\ddot{\vec{u}} \quad (3.55b)$$

pelas condições de contorno térmicas,

$$T = T_0 \text{ para } \partial\Omega_D \quad (3.56a)$$

$$\vec{q} = \vec{q}_0 \text{ para } \partial\Omega_N \quad (3.56b)$$

$$\vec{q} = h(T - T_\infty).\vec{n} \text{ para } \partial\Omega_C \quad (3.56c)$$

e pelas seguintes condições de contorno dinâmicas:

$$\sigma_{ij}.\vec{n} = \vec{F}_0 \text{ para } \partial\Omega_F \quad (3.57a)$$

$$\vec{u} = \vec{\bar{u}} \text{ para } \partial\Omega_U \quad (3.57b)$$

onde $\partial\Omega_F$ e $\partial\Omega_U$ são as partes de $\partial\Omega$ sobre as quais são aplicados, respectivamente, os esforços externos F_0 , e os deslocamentos impostos $\bar{u}$.

3.2 Resolução do problema de termoviscoelasticidade linear pelo método dos elementos finitos

Dentre os métodos numéricos desenvolvidos para a modelagem de problemas físicos, um dos mais utilizados é o método dos elementos finitos, pois tem sido utilizado para a resolução de inúmeros problemas de engenharia e com diferentes graus de complexidade. Em uma ampla categoria de problemas, a finalidade da modelagem por elementos finitos é a obtenção de um sistema de equações lineares do tipo $[A]\{x\} = \{b\}$ cujas incógnitas x_i , $i = 1, \dots, n$ são os valores aproximados do campo físico *discretizado* em n nós. Os coeficientes da matriz $[A]$ e do vetor $\{b\}$ são obtidos através da interpolação das variáveis de campo, e das condições de contorno sobre um dado número de partições do domínio chamadas de *elementos* e delimitadas pelos nós. O sistema geral é obtido pela montagem das matrizes e dos vetores *elementares* associados a cada elemento finito. Na prática, a resolução de um único sistema linear

permite apenas a determinação de um campo em regime permanente para problemas de transferência de calor e de massa, e de uma resposta à aplicação de uma carga estática ou cíclica uma vez estabelecido o regime permanente (resposta harmônica) para problemas estruturais. As soluções da maioria dos problemas reais envolvem a resolução sucessiva de vários sistemas lineares, resultantes da integração temporal da solução das equações do movimento (problemas transientes), a detecção de contatos entre várias superfícies, a resolução de problemas de auto-valores (modos de vibração, flambagem), o acoplamento entre vários campos físicos, ou o tratamento das não-linearidades relacionadas às solicitações aplicadas (grandes deformações, grandes deslocamentos).

No capítulo anterior foram apresentados os conceitos fundamentais relacionados à teoria da viscoelasticidade linear, bem como os principais modelos reológicos utilizados para a representação do comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos. Nas seções anteriores foi detalhada a formulação completa do problema termoviscoelástico acoplado, e nesta seção, ênfase é dada à resolução de um problema térmico transitório, e à determinação da resposta estrutural a uma carga cíclica no domínio da frequência para o caso particular da termoviscoelasticidade. Em seguida, é mostrada a técnica utilizada para a implementação numérico-computacional da metodologia de modelagem do problema de termoviscoelasticidade.

3.2.1 Modelagem do problema estrutural

A resolução do problema estrutural definido pelas expressões (3.55) e (3.57) consiste em determinar o campo de deslocamento $u(x, y, z, t)$ que minimiza a energia potencial total $\Pi_U(u)$ (Dhatt e Touzot, 1986):

$$\Pi_U(u) = \Pi_{int}(u) - \Pi_{ext}(u) \quad (3.58)$$

onde $\Pi_{int}(u)$ e $\Pi_{ext}(u)$ são, respectivamente, a energia interna de deformação e a energia associada às forças de volume e de superfície. $\Pi_{int}(u)$ e $\Pi_{ext}(u)$ são definidas como *funcionais*, ou seja, como quantidades definidas em função de um conjunto formado por variáveis de campo e suas derivadas espaciais, respectivamente, como segue:

- A energia interna de deformação é definida a partir da integração do produto tensorial dos tensores das tensões e das deformações sobre o interior Ω do domínio $\mathcal{D}$:

$$\Pi_{int}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(t) : \varepsilon_{ij}(t) dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon(t)\}^T \mathcal{H}^*(\omega, T) \{\varepsilon(t)\} dV \quad (3.59)$$

- A energia $\Pi_{ext}(u)$ é definida em função dos esforços externos $\vec{F}_0$ aplicados sobre $\partial\Omega_F$, dos esforços resultantes $\vec{R}$ da aplicação dos deslocamentos impostos sobre $\partial\Omega_U$, e dos esforços de inércia $\vec{f}_i = \rho \omega^2 \vec{u}$ se não houver aplicação de esforços repartidos no volume ($\vec{f}_v = \vec{0}$ em (3.2)):

$$\begin{aligned} \Pi_{ext}(u) &= \int_{\partial\Omega_F} \vec{u} \cdot \vec{F}_0 dS + \int_{\partial\Omega_U} \vec{u} \cdot \vec{R} dS + \int_{\Omega} \rho \omega^2 \vec{u} \cdot \vec{u} dV \\ &= \int_{\partial\Omega_F} \{u\}^T \cdot \{\sigma\} dS + \int_{\partial\Omega_U} \{u - \bar{u}\}^T \cdot \{\sigma\} dS \\ &\quad + \omega^2 \int_{\Omega} \rho \{u\}^T \cdot \{u\} dV \end{aligned} \quad (3.60)$$

O método dos elementos finitos consiste em dividir o domínio $\mathcal{D}$ em n_e *elementos*, sendo a soma das energias associadas a cada elemento igual à energia total do sistema:

$$\Pi_U(u) = \sum_{i=1}^{n_e} \Pi_U^i(u) \quad (3.61)$$

onde $\Pi_U^i(u)$ é obtido a partir das expressões (3.59) e (3.60), cujo domínio de integração corresponde ao volume e à superfície externa do elemento i . Para o caso em que são consideradas pequenas deformações, o vetor $\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T$ pode ser expresso em função do vetor dos deslocamentos $\{u\} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T$ da seguinte forma (Christensen, 1982):

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2} (\nabla(\{u\}) + \nabla(\{u\}^T)) \quad (3.62)$$

No método dos elementos finitos, os valores do campo de deslocamentos em todo o domínio são interpolados a partir dos valores assumidos nos nós que delimitam os elementos através da utilização de funções de interpolação. Estas funções são, na maioria dos casos, polinômios cujo grau depende do tipo de elemento e do número

de nós. Cada polinômio de interpolação, definido em função das variáveis ξ , ζ e χ (variáveis espaciais no sistema de coordenadas do elemento), é associado ao nó k do elemento, e satisfaz as seguintes condições

$$\begin{aligned} N_k(\xi, \zeta, \chi) &= 1 \text{ no nó } k \\ N_k(\xi, \zeta, \chi) &= 0 \text{ nos demais nós} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Neste caso, o campo de deslocamento em um ponto qualquer do elemento é definido como o somatório dos campos nodais ponderado pelas funções de interpolação:

$$\{u(\xi, \zeta, \chi)\} = \sum_{k=1}^{n_n} N_k(\xi, \zeta, \chi) \{u\}^k \quad (3.64)$$

onde n_n é o número de nós do elemento, e $\{u\}^k$ é o vetor dos deslocamentos no nó k . O campo de deformações pode ser expresso de acordo com a definição (3.62). Derivando os polinômios de interpolação em relação às variáveis ξ , ζ e χ , obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & \dots & N_{n_n,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & \dots & 0 & N_{n_n,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z} & \dots & 0 & 0 & N_{n_n,z} \\ 0 & \frac{1}{2}N_{1,z} & \frac{1}{2}N_{1,y} & \dots & 0 & \frac{1}{2}N_{n_n,z} & \frac{1}{2}N_{n_n,y} \\ \frac{1}{2}N_{1,z} & 0 & \frac{1}{2}N_{1,x} & \dots & \frac{1}{2}N_{n_n,z} & 0 & \frac{1}{2}N_{n_n,x} \\ \frac{1}{2}N_{1,y} & \frac{1}{2}N_{1,x} & 0 & \dots & \frac{1}{2}N_{n_n,y} & \frac{1}{2}N_{n_n,x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ u_z^1 \\ \vdots \\ u_x^{n_n} \\ u_y^{n_n} \\ u_z^{n_n} \end{Bmatrix} \quad (3.65)$$

Considerando-se $[B]$ como sendo a *matriz das deformações*, e substituindo $\{\varepsilon\}$ por $B\{u\}$ em (3.59) e assumindo que $\delta\Pi_U = 0$ como condição de equilíbrio, chega-se ao modelo de elementos finitos representado pela seguinte equação do movimento no domínio da frequência e ao nível elementar de uma estrutura dinâmica tratada com material viscoelástico:

$$\left([K^*(\omega, T)]^{(e)} - \omega^2 [M]^{(e)} \right) \{u\}^{(e)} = \{f\}^{(e)} \quad (3.66)$$

onde as matrizes de rigidez e massa, e o vetor dos esforços aplicados são definidos, respectivamente, como segue:

$$l[K^*(\omega, T)]^{(e)} = \int_{V(e)} [B]^T \mathcal{H}^*(\omega, T) [B] dV \quad (3.67a)$$

$$[M]^{(e)} = \int_{V(e)} \{N\}^T \rho \{N\} dV \quad (3.67b)$$

$$\{f\}^{(e)} = \oint_{\partial\Omega_F(e)} \{N\}^T \{f_s\} dS \quad (3.67c)$$

onde $N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix}^T$ é o vetor contendo as funções de interpolação.

A montagem das n_e matrizes elementares leva ao seguinte sistema de equações do movimento ao nível global:

$$([K^*(\omega, T)] - \omega^2[M]) \{u\} = \{f\} \quad (3.68)$$

onde $[K^*(\omega, T)]$ representa a matriz de rigidez complexa da estrutura contendo amortecimento viscoelástico, dependente da temperatura e da frequência de excitação. Admitindo que a estrutura seja formada pela composição de duas subestruturas, uma elástica e outra viscoelástica, a matriz de rigidez complexa total $[K^*(\omega, T)]$ pode ser decomposta da seguinte forma (de Lima *et al.*, 2005):

$$[K^*(\omega, T)] = [K_e] + [K_v^*(\omega, T)] \quad (3.69)$$

onde $[K_e]$ representa a matriz de rigidez associada à parte puramente elástica da estrutura, e $[K_v^*(\omega, T)]$ é a matriz de rigidez viscoelástica formada a partir dos elementos viscoelásticos. Utilizando o Princípio da Correspondência Elástico-Viscoelástico apresentado na Seção (2.3.4), Capítulo (2), a inclusão da dependência em frequência do material viscoelástico pode ser feita gerando-se $[K_v^*(\omega, T)]$ para tipos específicos de elementos (barras, vigas, cascas, etc.) considerando-se inicialmente o módulo constante. O módulo pode então ser fatorado da matriz de rigidez e considerado dependente da frequência de acordo com um modelo viscoelástico adotado (ver Seção 2.3.4, capítulo 2):

$$[K_v^*(\omega, T)] = E^*(\omega, T)[\bar{K}_v] \quad (3.70)$$

onde $[\bar{K}_v] = \int_{V(e)} [B]^T \mathcal{H}[B] dV$ representa a matriz de rigidez fatorada da subestrutura viscoelástica.

O problema estrutural pode então ser reescrito da seguinte forma:

$$\left([K_e] + E'(\omega, T)[\bar{K}_v] + iE''(\omega, T)[\bar{K}_v] - \omega^2[M] \right) \{u\} = \{f\} \quad (3.71)$$

A parte imaginária da matriz de rigidez viscoelástica representada por $E''(\omega, T)[\bar{K}_v]$ corresponde ao amortecimento do sistema. Em vários códigos comerciais de elementos finitos como *ANSYS*™ por exemplo, é conveniente definir uma matriz de amortecimento viscoso equivalente para que o modelo de elementos finitos implementado possa descrever o comportamento dissipativo do sistema viscoelástico. Neste caso, a matriz de amortecimento viscoso é definida da seguinte forma (Lima e Rade, 2005):

$$[C_{eq}(\omega, T)] = \frac{\eta(\omega, T)E'(\omega, T)}{\omega} [\bar{K}_v] \quad (3.72)$$

Assim, obtém-se a seguinte formulação para o problema estrutural:

$$\left([K_e] + E'(\omega, T)[\bar{K}_v] + i\omega[C_{eq}(\omega, T)] - \omega^2[M] \right) \{u\} = \{f\} \quad (3.73)$$

3.2.2 Generalidades sobre o problema acoplado de termoviscoelasticidade

O fenômeno do autoaquecimento dos materiais viscoelásticos constitui um exemplo particular que demonstra as fortes elevações de temperaturas constatadas em amostras desses materiais quando submetidos a solicitações mecânicas cíclicas. Os problema mecânico e térmico são acoplados e, fala-se então no acoplamento termo-mecânico.

Entretanto, do ponto de vista da modelagem numérica, distingue-se frequentemente o acoplamento forte (influência dos efeitos térmicos sobre os mecânicos e in-

versamente) do acoplamento fraco (influência em um sentido único) (Merlette, 2005). O acoplamento termomecânico forte é frequentemente mais difícil de ser realizado devido ao elevado custo computacional envolvido associado à convergência (Gopalakrishna e Lai, 1998). Neste sentido, sempre que possível, tenta-se levar o problema a um acoplamento termomecânico fraco negligenciando certos efeitos como a dilatação térmica (Johnson e Chen, 2002).

De acordo com Merlette (2005), existem dois tipos principais de acoplamento fraco, a saber:

- quando a lei do comportamento do material depende pouco da temperatura. Neste caso, o problema mecânico é independente do problema térmico, o que permite resolver o problema dinâmico, e em seguida, determinar o campo de temperatura pela resolução do problema térmico;
- quando as fontes de calor associadas às deformações do material são negligenciáveis diante das fontes externas de calor. Neste caso, o problema térmico independe do mecânico.

Pelo fato do problema estrutural descrito na Seção 3.2.1, que tem como base a expressão (3.2), não incluir os esforços proporcionais ao campo de temperatura, ou às suas derivadas temporais, uma vez que o efeito da temperatura sobre a resposta dinâmica é consequência apenas da dependência da rigidez complexa do material viscoelástico com relação à temperatura, neste trabalho será utilizado o procedimento de acoplamento termomecânico fraco ou sequencial, uma vez que não há interesse em calcular a resposta transiente estrutural, pois o carregamento dinâmico é cíclico, tornando possível uma análise harmônica. Este procedimento pressupõe que a resposta transiente é rapidamente atenuada. Além disso, o calor gerado pela dissipação viscoelástica é proporcional ao quadrado do deslocamento estrutural, e só pode ser expresso na equação do problema discretizado como um carregamento térmico adicional, cuja intensidade depende da energia de deformação viscoelástica, como apresentado na Seção 3.1 deste capítulo.

O problema térmico descrito pela equação (3.53) é discretizado seguindo um procedimento semelhante ao que foi utilizado para o problema estrutural. A integração do termo de condução $k\nabla^2 T$, com o uso das funções de interpolação para expressar as derivadas espaciais do campo de temperatura, leva à obtenção da matriz de rigidez

térmica $[W]$. Da mesma forma obtém-se a matriz de amortecimento térmico $[A]$ a partir da integração do calor armazenado. Desta forma, o problema de termoviscoelasticidade pode ser representado pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}(\omega)\} \\ \{\dot{T}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K^*(\omega, T)] - \omega^2 [M] & [0] \\ [0] & [W] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u(\omega)\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f(\omega)\} \\ \{q\} + \{q_g\} \end{Bmatrix} \quad (3.74)$$

com:

$$\begin{aligned} [A]^{(e)} &= \int_{V(e)} \rho c_P \{N\} \{N\}^T dV \\ [W]^{(e)} &= \int_{V(e)} [B]^T \mathcal{K} [B] dV + h \int_{\partial\Omega_C(e)} \{N\} \{N\}^T dS \end{aligned} \quad (3.75)$$

onde $[A]$ e $[W]$ são, respectivamente, as matrizes de amortecimento térmico e de condutividade térmica obtidas pela montagem das matrizes elementares, e $\mathcal{K}$ a matriz das condutividades térmicas, definida como segue:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

$\{q\}$ e $\{q_g\}$ são os carregamentos térmicos que decorrem, respectivamente, da convecção externa e da dissipação viscoelástica. A ausência de blocos extradiagonais no sistema matricial expressado em (3.74) caracteriza a modelagem por acoplamento fraco do problema físico. Se o termo $(3\lambda + 2\mu)\alpha T_0 \dot{\epsilon}_{kk}$, que representa os efeitos termoelásticos em (3.52), tivesse sido levado em conta para a discretização, o problema teria sido modelado por um acoplamento forte.

O problema termomecânico definido por (3.74) será resolvido de forma sequencial conforme o seguinte procedimento iterativo:

1. Inicialização do problema ($t = t_0$): formulação das matrizes de rigidez e de amortecimento de acordo com a frequência da excitação ω_0 e a temperatura inicial T_0 ;
2. Resolução do problema estrutural e obtenção das respostas dinâmicas $\{u(\omega_0)\}$

de acordo com a definição (3.73);

3. Cálculo de $\{q_g\}$ a partir da resposta estrutural obtida no item 2;
4. Resolução do problema térmico transitório pela integração numérica do problema $[A]\{\dot{T}\} + [W]\{T\} = \{q\}$ entre os instantes de tempo t e $t + \Delta t$;
5. Atualização das matrizes de rigidez e de amortecimento equivalente de acordo com o campo de temperatura $\{T_{t+\Delta t}\}$ e do tempo ($t = t + \Delta t$);
6. Se t for inferior a t_{max} , repetição dos itens 2 a 5. Caso contrário, integração do problema térmico entre t_{max} e t_{fim} , sendo t_{fim} o tempo final da análise do resfriamento.

O cálculo de $\{q_g\}$ e a implementação da solução iterativa serão discutidos na próxima seção.

3.2.3 Cálculo da fonte de calor e implementação computacional

Na Seção 3.1 foi apresentada a expressão da fonte de calor decorrente da dissipação viscoelástica q_g . Esta quantidade escalar corresponde a uma potência por unidade de volume, enquanto o vetor dos carregamentos $\{q_g\}$ é obtido a partir da montagem dos vetores elementares $\{q_g\}_i$ para $1 \leq i \leq n_e$. A expressão para o elemento finito designado por (e) da fonte de calor equivalente pode ser obtida através da integração sobre o volume do elemento da fonte de calor q_g da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \int_{V(e)} q_g dV &= \frac{1}{2} \omega \beta \int_{V(e)} E''(\omega, T) \{\epsilon\}^T \tilde{\mathcal{H}} \{\epsilon\} dV \\
 &= \frac{1}{2} \omega \beta \int_{V(e)} E''(\omega, T) \{u\}^{(e)T} B^T \tilde{\mathcal{H}} B \{u\}^{(e)} dV \\
 &= \frac{1}{2} \omega \beta \{u\}^{(e)T} [H(\omega, T)]^{(e)} \{u\}^{(e)}
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

A fonte de calor total recebida por um elemento pode ser aproximada pela seguinte expressão, considerando um fator de perda $\eta(\omega, T)$ definido de acordo com a temperatura no centro do elemento sobre o domínio de integração:

$$\int_{V^{(e)}} q_g dV \approx \frac{1}{2} \omega \beta \eta(\omega, T) \{u\}^{(e)T} [K_v(\omega, T)]^{(e)} \{u\}^{(e)} \quad (3.78)$$

Esta expressão, embora não seja exata, pois está condicionada ao fato que o valor do fator de perda é considerado como uniforme, apresenta a vantagem de definir um valor aproximado da fonte de calor em função da energia de deformação do elemento viscoelástico, a qual é uma grandeza facilmente acessível nos pós-processadores de códigos comerciais de elementos finitos. A fonte de calor por elemento a ser implementada como carregamento na análise térmica transiente para cada iteração, pode então ser calculada de acordo com os resultados da análise estrutural.

No código de elementos finitos *ANSYS*™ por exemplo, há a necessidade de se definir a fonte de calor por unidade de volume. Ela pode ser obtida dividindo-se (3.78) pelo volume do elemento da seguinte forma:

$$q_g^{(e)} = \frac{1}{2} \frac{\beta \omega \eta(\omega, T)}{V^{(e)}} \{u\}^{(e)T} [K_v(\omega, T)]^{(e)} \{u\}^{(e)} \quad (3.79)$$

O caráter não estacionário do problema de termoviscoelasticidade exige sua resolução no domínio temporal. Os problemas mecânico e térmico regidos pelas equações (3.2) e (3.1), respectivamente, devem ser resolvidos de maneira sequencial, de acordo com a Fig. 3.2 que descreve a seqüência das etapas de resolução numérica do problema termomecânico acoplado entre os instantes de tempo t_0 e t_{max} que definem o início e o fim da aplicação do carregamento cíclico sobre a estrutura viscoelástica, com um passo de tempo fixo. Os parâmetros do modelo térmico são considerados constantes com respeito à temperatura. O problema foi implementado na linguagem *APDL (ANSYS Parametric Design Language)*, a qual é integrada ao software de elementos finitos *ANSYS*™. No próximo capítulo serão apresentados os resultados obtidos e discutida a influência de cada um dos parâmetros ambientais e operacionais no autoaquecimento interno de materiais viscoelásticos.

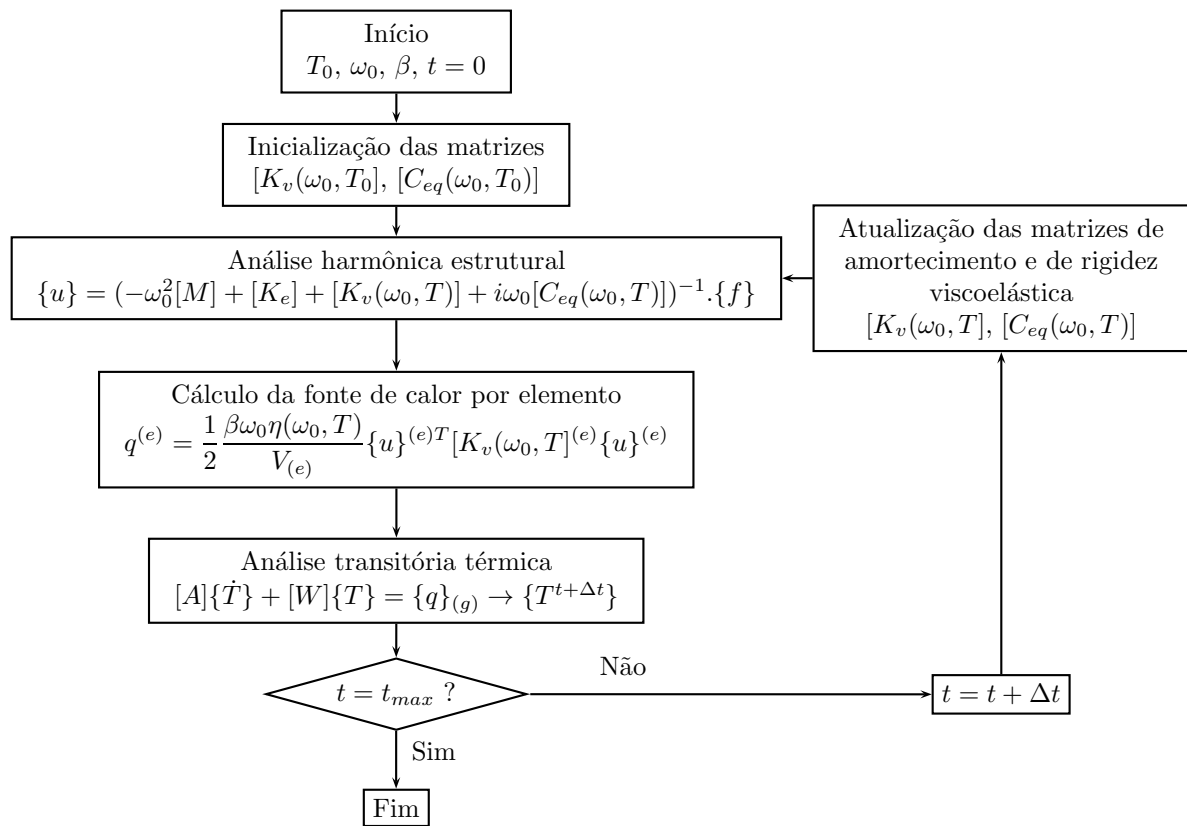


Figura 3.2: Fluxograma descrevendo o procedimento de resolução iterativa do problema acoplado

CAPÍTULO IV

Simulações numéricas

Este capítulo trata das simulações numéricas realizadas com o objetivo de ilustrar o procedimento de modelagem do autoaquecimento de materiais viscoelásticos associado a excitações mecânicas cíclicas. Nas simulações que seguem serão considerados dois tipos de tratamentos viscoelásticos, a saber:

- Um apoio viscoelástico translacional, modelado com elementos bidimensionais;
- Uma junta rotacional de geometria complexa, modelada com elementos tridimensionais.

4.1 Aplicação a um dispositivo bidimensional

Esta seção apresenta os resultados da simulação do autoaquecimento de uma junta translacional bidimensional, e a influência dos seguintes parâmetros sobre os resultados obtidos:

- O nível de discretização temporal e espacial do problema;
- Os parâmetros operacionais (frequência e amplitude da excitação externa);
- O fator de dissipação β .

4.1.1 Apresentação da estrutura

O primeiro modelo consiste em uma junta translacional semelhante aos amortecedores utilizados nas estruturas de prédios, tendo como base a configuração do

amortecedor proposto por Barbosa (2000). Este amortecedor, cuja geometria é bastante simples, está ilustrado na Fig. 4.1, que mostra as vistas planas e em perspectiva da junta projetada por Barbosa (2000). Neste trabalho, foi modelada apenas a parte central do dispositivo, considerando-se que as duas chapas de aço localizadas em volta do amortecedor foram engastadas, enquanto uma carga cíclica é aplicada sobre a chapa central de tal forma que as camadas viscoelásticas encontram-se em estado de cisalhamento puro.

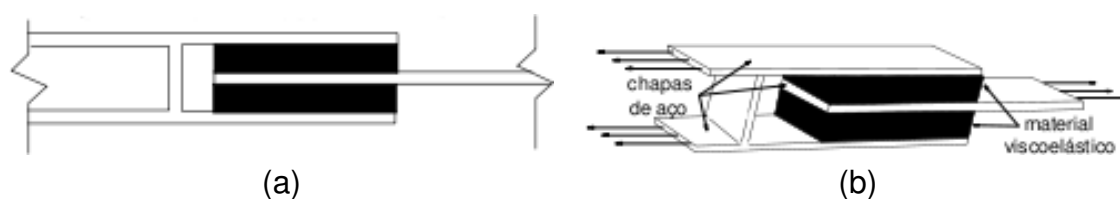


Figura 4.1: Vista plana (a) e em perspectiva (b) da junta translacional (adaptado de Barbosa, 2000)

A Fig. 4.2 mostra as características geométricas da junta translacional, cujos valores, são apresentados na Tab. 4.1.

Tabela 4.1: Dimensões da junta translacional

Parâmetro	e	C_v	C_m	L
Valor	10 mm	200 mm	230 mm	100 mm

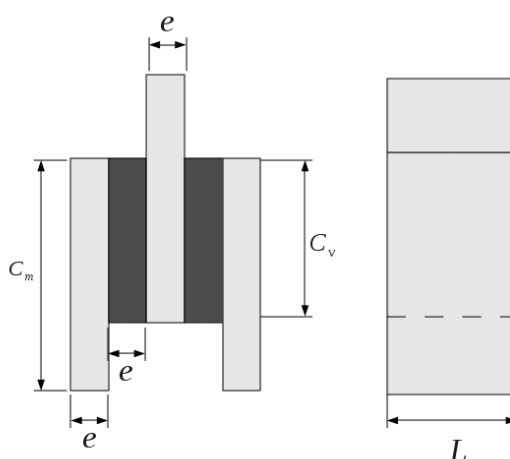


Figura 4.2: Dimensões da junta translacional

A junta representada pela Fig. 4.3 é simétrica em relação ao plano longitudinal que corta a chapa central ao meio, e desta forma, apenas a metade dela será modelada para reduzir o custo computacional. Além disso, as condições de contorno associadas à simetria são um fluxo de calor nulo e deslocamentos nodais nulos sobre

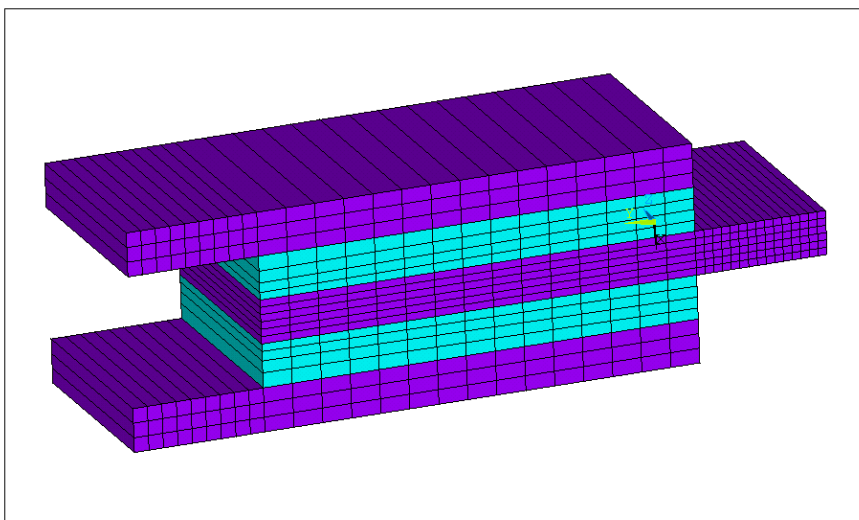


Figura 4.3: Visualização 3D da junta modelada com elementos bidimensionais

a linha de simetria, uma vez que o esforço dinâmico é aplicado na direção longitudinal sobre a chapa central.

4.1.2 Determinação do comportamento estático e dinâmico da estrutura

Será considerado que as camadas viscoelásticas são constituídas pelo material viscoelástico *ISD 112™* da *3M*, cujo módulo de cisalhamento $G^*(\omega, T)$ é definido como uma função da temperatura e da frequência de excitação. Além disso, será admitido que o valor máximo da força aplicada sobre o amortecedor é de 600 N. Tem-se o interesse em verificar se a deformação estática resultante é suficientemente pequena para que a hipótese das pequenas deformações é verificada.

Considerando uma área uniforme de cisalhamento $A = 20.000 \text{ mm}^2$, a tensão cisalhante pode ser calculada pela relação $\tau = F/A = 600/20.000$. Desta forma, pode-se obter o ângulo de cisalhamento estático $\gamma = \frac{\tau}{G_0}$. Para o material viscoelástico considerado, sendo $G_0 = 430,7 \text{ KPa}$, o que corresponde a uma temperatura de 25°C , obtém-se um γ da ordem de $0,0697 \text{ rad}$.

Como $\sin(\gamma) = 0,0696 \approx \gamma$, conclui-se que o ângulo de cisalhamento resultante da aplicação de uma carga estática da ordem de 600 N é suficientemente pequeno para que a hipótese das pequenas deformações seja respeitada.

A Fig. 4.4 apresenta as funções de resposta em frequência (FRFs) decorrentes da aplicação de uma força de amplitude unitária na direção longitudinal sobre a parte

superior da chapa central para três valores diferentes de temperatura aplicadas uniformemente sobre o material viscoelástico: 30 °C , 35 °C e 40 °C , respectivamente. Pode-se notar uma grande influência da temperatura na resposta dinâmica da estrutura. Em particular, observa-se que o aumento da temperatura faz com que o material seja menos rígido, diminuindo também a capacidade de amortecimento do material na região de ressonância. A Fig. 4.5 ilustra a geometria da estrutura deformada.

A junta foi modelada utilizando o código de elementos finitos *ANSYS*TM, com os seguintes elementos:

- Para o problema estrutural: elemento *PLANE42*, elemento bidimensional com 8 nós tendo três graus de liberdade por nó (deslocamentos em x , y e z), na configuração de tensão plana;
- Para o problema térmico: elemento *PLANE55*, elemento bidimensional com 8 nós tendo um grau de liberdade por nó (temperatura).

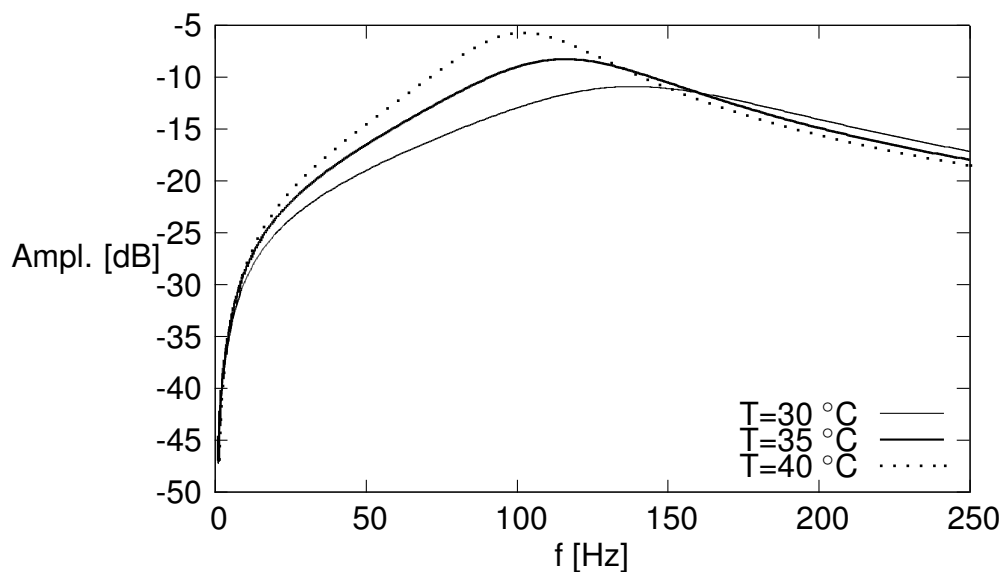
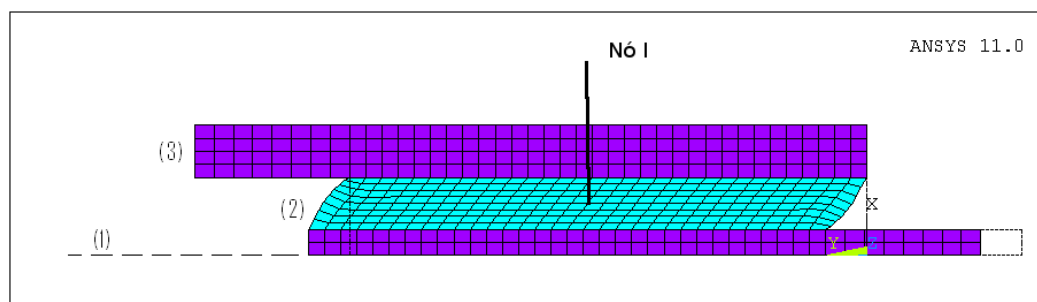


Figura 4.4: FRFs da junta translacional para diferentes valores de temperatura

4.1.3 Influência do nível de discretização espacial e temporal

Como será apresentado no decorrer deste capítulo e no capítulo seguinte, os resultados das simulações numéricas e dos ensaios experimentais para evidenciar o fenômeno de autoaquecimento de materiais viscoelásticos quando submetidos a



- (1) Plano de simetria
(2) Camada viscoelástica
(3) Chapa de aço

Figura 4.5: Visualização da configuração deformada

carregamentos cíclicos mostraram que na maioria dos casos, a evolução da temperatura no material segue um padrão típico, ou seja, apresentam duas fases distintas, a saber: a primeira sendo caracterizada por um aumento rápido da temperatura que ocorre imediatamente após o início da aplicação da carga, mencionado por Brackbill *et al.* (1996); e a segunda, por uma estabilização, mostrada por Merlette (2005) ou uma queda como constatado por Rittel (1999) progressiva das temperaturas, durante a qual o sistema evolui lentamente para uma configuração de quase-equilíbrio térmico. Nesta fase, a energia trocada com o meio ambiente é compensada pela energia gerada através da dissipação viscoelástica. A importância relativa destas duas fases depende tanto dos mecanismos de troca de calor (condução, convecção natural ou calor imposto) quanto dos parâmetros operacionais e relacionados ao material, cuja a influência é decisiva nos mecanismos de dissipação viscoelástica. Com isto, e devido ao fato das propriedades mecânicas dos materiais viscoelásticos serem altamente dependentes da temperatura, é importante estudar a convergência do modelo estudado em função de dois parâmetros:

1. O número de elementos (discretização espacial);
2. O número de passos de tempo (discretização temporal).

O parâmetro n_p , utilizado para a análise da discretização temporal, corresponde ao número de passos de tempo para a fase de carregamento. Para o estudo do resfriamento do material após a remoção do carregamento, uma simples análise térmica transitória é realizada, para a qual a solução é integrada utilizando 40 passos

de tempo. Foi constatado que este valor é suficiente para obter a convergência do modelo durante esta fase do cálculo.

A versão do programa que foi desenvolvida neste trabalho não permite o ajuste automático do passo de tempo para o cálculo da fonte de calor, e a atualização das propriedades mecânicas do material. O uso de um passo de tempo constante não é aconselhável, uma vez que as duas fases observadas ao longo da aplicação do carregamento cíclico são de naturezas diferentes: um passo de tempo pequeno é bastante adequado para a primeira fase, pois permite atualizar frequentemente as matrizes de rigidez e de amortecimento estruturais, mas resulta num alto custo computacional, além de não ser desejável para a segunda fase, marcada por uma evolução mais lenta das temperaturas. Entretanto, o uso de um passo de tempo maior permite uma redução significativa dos custos computacionais, mas resultará numa diminuição da precisão da solução obtida para a primeira fase do autoaquecimento.

Para resolver este problema, propõe-se, neste trabalho, o uso de uma escala logarítmica para a definição dos incrementos de tempo: uma vez escolhido o número de passos n_p , gera-se através da função *logspace* do *MATLAB*™ um vetor de n_p pontos logaritmicamente espaçados entre os instantes de tempo inicial t_i e final t_f . Assim, pode-se ajustar o parâmetro n_p até chegar a um valor no qual o aumento do número de pontos não gera mais diferença sensível entre as respostas obtidas. Da mesma forma, a convergência da malha é investigada através do parâmetro n_x que corresponde ao número de elementos presentes ao longo da espessura da camada viscoelástica. A malha do domínio é parametrizada de tal forma que o número de elementos nas direções x (transversal) e y (longitudinal) do domínio, seja definido em função de n_x , da seguinte forma: $n_y = 4n_x$.

Nesta aplicação, o comportamento transiente do sistema acoplado foi simulado considerando a aplicação, durante 12.000 segundos, de uma carga cíclica da forma $f(t) = f_0 \sin(2\pi ft)$ com $f_0 = 400$ N e $f = 10$ Hz. Após a remoção da carga, a queda das temperaturas foi simulada através de uma simples análise térmica transiente, considerando 60 passos de tempo para a integração numérica. As propriedades térmicas do material viscoelástico *ISD 112* e do aço 1020 são apresentadas na Tab. 4.2.

O valor de β (0.8) foi escolhido de acordo com Merlette (2005) que ajustou um modelo termomecânico simplificado com 4 graus-de-liberdade com dados experimentais obtidos com o material *VHB 9460* da *3M*. Nas áreas do modelo, e nas linhas que separam o domínio do meio externo foi aplicada uma condição de convecção natural

Tabela 4.2: Propriedades térmicas dos materiais utilizados na modelagem do autoaquecimento

Material	ρ [kg.m ⁻³]	C_P [J.kg ⁻¹ .K ⁻¹]	k [W.m ⁻¹ .K ⁻¹]	β
ISD 112	1100	2000	0,16	0,8
Aço	7850	476	35	×

com um coeficiente $h = 15 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ e uma temperatura ambiente $T_\infty = 24 \text{ }^\circ\text{C}$.

A Fig. 4.6 mostra a temperatura atingida pelo nó localizado no meio da camada viscoelástica (indicado por I na Fig. 4.5) para três malhas diferentes, considerando sucessivamente 4, 8 e 12 elementos ao longo da espessura da camada viscoelástica. Pode-se observar um aumento da temperatura de aproximadamente $3,5 \text{ }^\circ\text{C}$ e, embora o tempo de carregamento não seja suficiente para a estabilização das temperaturas, as fases 1 e 2 estão presentes. Além disso, a comparação das curvas demonstra que o refinamento da malha não influi significativamente sobre as temperaturas atingidas, e que as respostas obtidas com $n_x = 8$ e $n_x = 12$ são praticamente idênticas. Neste sentido, pode-se considerar que o grau de refinamento da malha obtido com $n_x = 12$ é suficiente para obter a convergência espacial da malha.

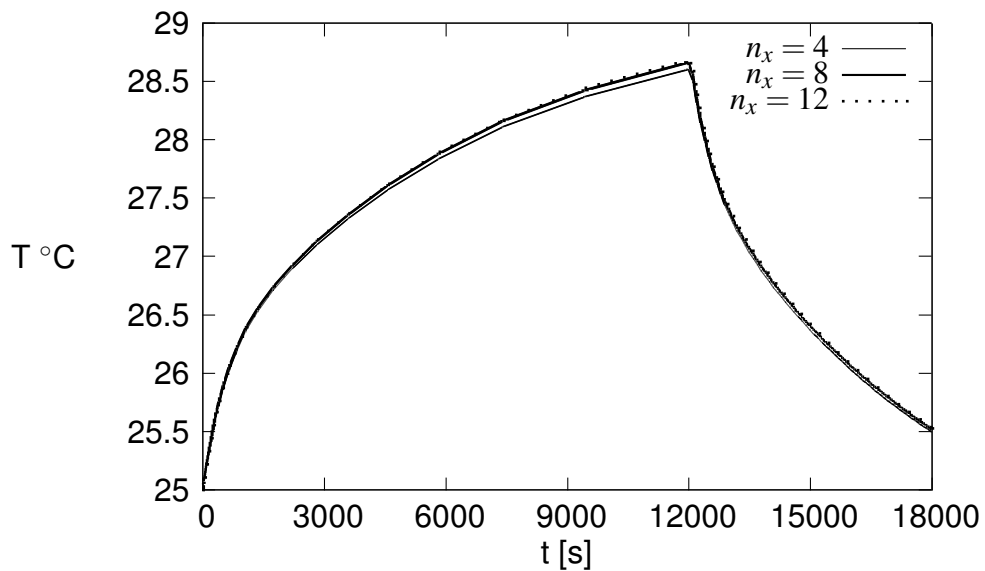


Figura 4.6: Influência do refinamento da malha no autoaquecimento para $n_p = 20$

A Fig. 4.7 mostra as respostas obtidas com $n_p = 5, 10, 20$ e 40 . Pode-se notar que a discretização temporal com 5 pontos não permite obter mais do que uma solução aproximada, e uma vez que as soluções obtidas com $n_p = 20$ e $n_p = 40$ são muito próximas, o valor de $n_p = 40$ será utilizado nas simulações que seguem.

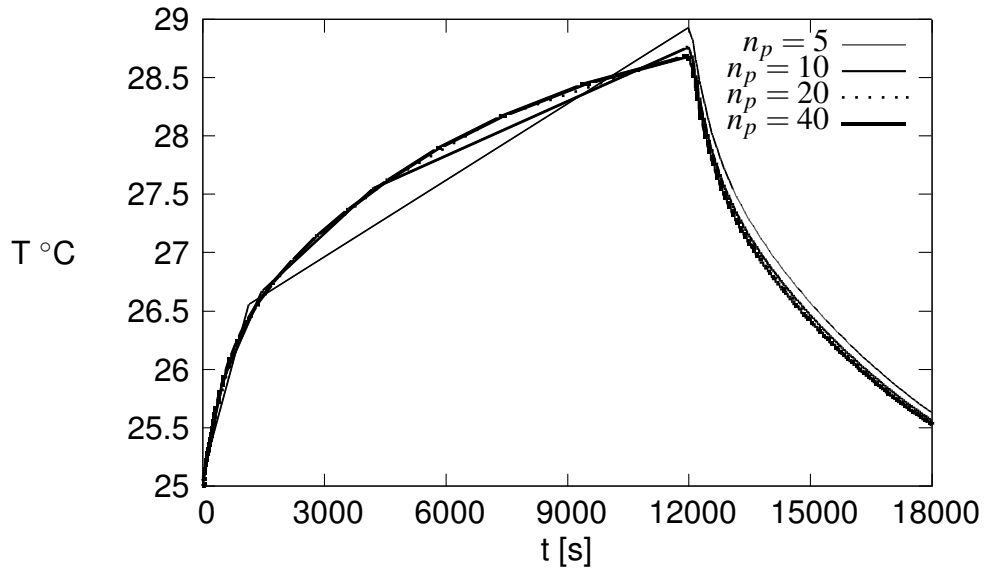


Figura 4.7: Influência do número de passos no autoaquecimento para $n_x = 12$

4.1.4 Influência dos parâmetros operacionais

O comportamento termomecânico do apoio viscoelástico translacional submetido a uma carga senoidal de amplitude constante $f_0 = 400$ N, foi simulado para três frequências diferentes, a saber: 10 Hz, 40 Hz e 250 Hz.

Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 4.8, a qual mostra a evolução das temperaturas observadas no plano médio da camada viscoelástica para cada frequência. Nota-se que o aumento da frequência resulta num aumento do aquecimento, sendo as temperaturas máximas obtidas com 40 Hz e 250 Hz, respectivamente, 31,6 °C e 35,4 °C.

A Fig. 4.10 representa as temperaturas obtidas no nó I com uma frequência de 10 Hz, e para três valores diferentes da amplitude da força: 300, 400 e 600 N. Observa-se que a amplitude da força tem uma forte influência sobre o autoaquecimento do material. Os valores máximos da temperatura no ponto I são apresentados na Tab. 4.3.

Tabela 4.3: Temperaturas máximas atingidas pelo nó I para $f_0 = 300$ N, $f_0 = 400$ N e $f_0 = 600$ N

f_0 [N]	300	400	600
T_{max} °C	26,705	28,668	34,276

A influência significativa da amplitude da força sobre o autoaquecimento de materiais viscoelásticos, evidenciada pela Fig. 4.11, pode ser explicada pelo fato da fonte

de calor ser proporcional ao quadrado da amplitude do deslocamento, como definido pela equação (3.78). Além disso, pode-se notar que quanto menor o esforço aplicado, mais rápido é atingida a fase de quase-equilíbrio térmico.

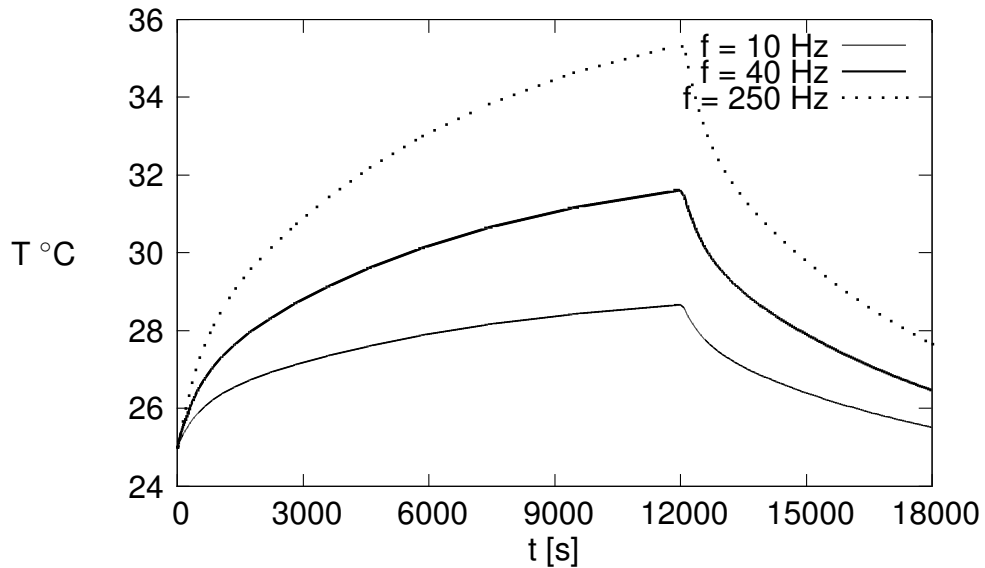


Figura 4.8: Temperatura observada no plano médio da camada viscoelástica para $f = 10$ Hz, $f = 40$ Hz e $f = 250$ Hz

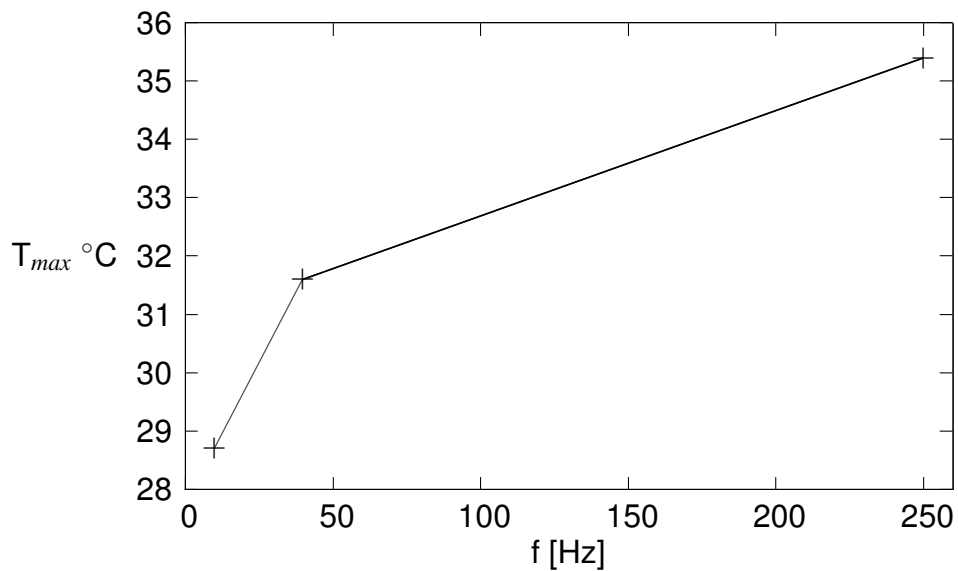


Figura 4.9: Temperaturas máximas atingidas no plano médio da camada viscoelástica para $f = 10$ Hz, $f = 40$ Hz e $f = 250$ Hz

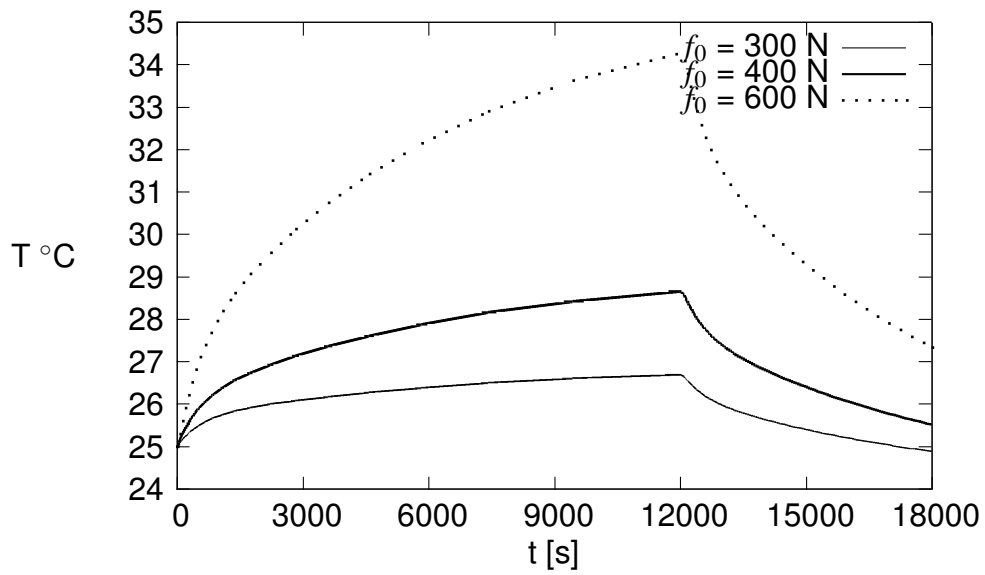


Figura 4.10: Temperatura observada no plano médio da camada viscoelástica para $f_0 = 300$ N, $f_0 = 400$ N e $f_0 = 600$ N

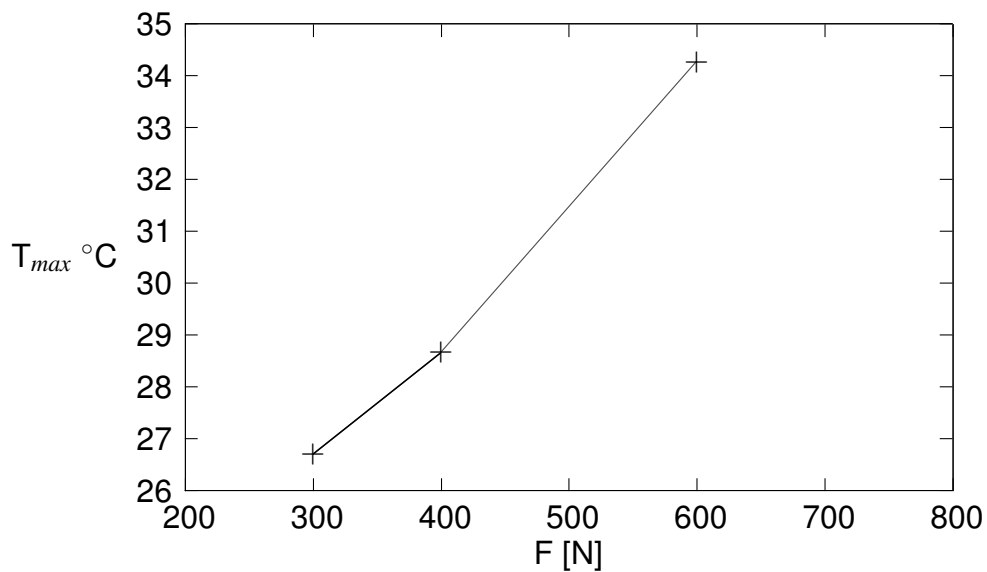


Figura 4.11: Temperaturas máximas atingidas no plano médio da camada viscoelástica para $f_0 = 300$ N, $f_0 = 400$ N e $f_0 = 600$ N

4.1.5 Parâmetros relacionados ao material viscoelástico

A Fig. 4.12 mostra as curvas de autoaquecimento resultantes da aplicação de uma carga senoidal de amplitude constante $f_0 = 400$ N e frequência $f = 10$ Hz para três valores diferentes de β , a saber: 0,3, 0,6 e 0,9. Pela análise da Fig. 4.12, pode-se notar que o aumento da temperatura é proporcional ao valor de β , como indicado pela Fig. 4.13.

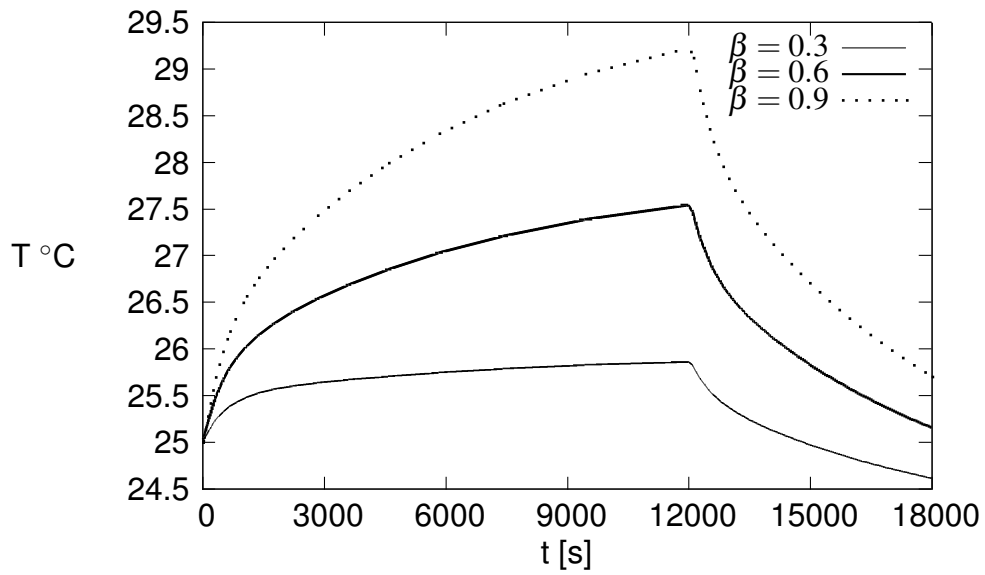


Figura 4.12: Temperaturas observadas no plano médio da camada viscoelástica para $\beta = 0.3$, $\beta = 0.6$ e $\beta = 0.9$ N

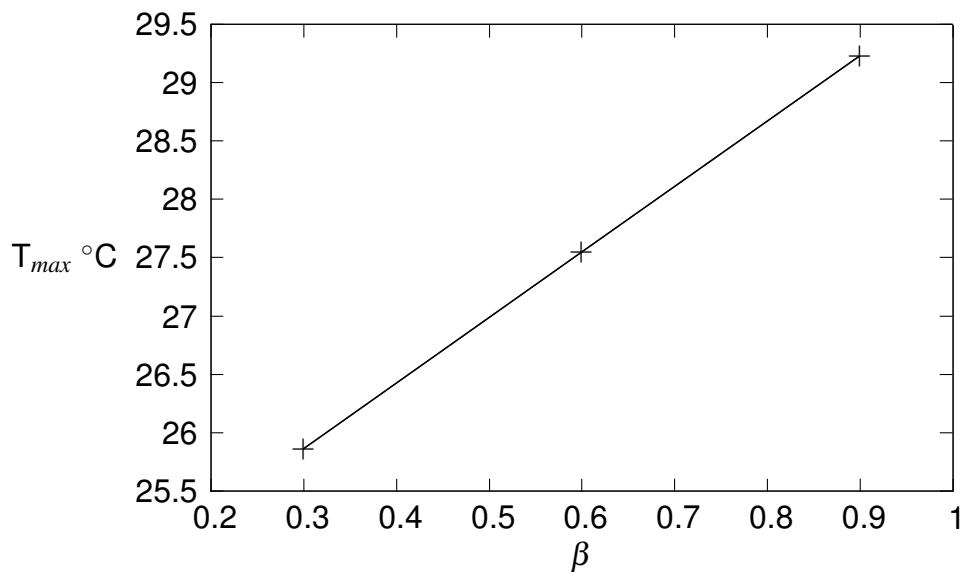


Figura 4.13: Temperaturas máximas atingidas no plano médio da camada viscoelástica para $\beta = 0.3$, $\beta = 0.6$ e $\beta = 0.9$ N

4.1.6 Resultados complementares

A Fig. 4.14 mostra o campo de temperatura da estrutura para um tempo de 1080 segundos após o início da aplicação da carga de 600 N com uma frequência de 10 Hz. Ao observar a distribuição das temperaturas na camada viscoelástica, nota-se que as isotérmicas são paralelas às interfaces entre a camada viscoelástica e as chapas de aço. Além disso, o gradiente de temperatura é orientado para o centro

da camada viscoelástica. O espaçamento maior observado entre as isotérmicas nas regiões próximas às áreas de contato da camada com o meio externo corresponde a valores menores do gradiente de temperatura, e traduz o efeito da convecção natural. Nesta fase do carregamento, a quantidade de calor transferida às chapas de aço ainda é limitada.

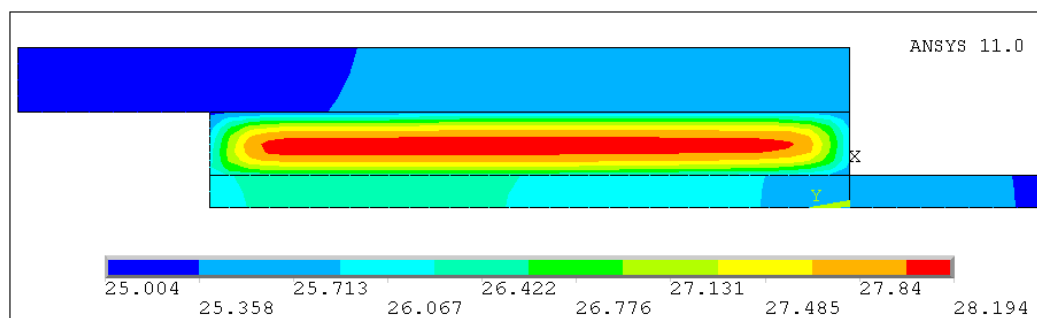


Figura 4.14: Campo de temperatura após 1080 segundos e carregamento com $F_0 = 600$ N e $f = 10$ Hz

A Fig. 4.15 representa o campo de temperatura em uma parte do dispositivo no instante final do carregamento ($t = 12000$ s). A comparação dessas isotérmicas com as mostradas na Fig. 4.14 mostra que a dissipação viscoelástica causada pela ação do carregamento não resultou apenas no aumento das temperaturas da estrutura, mas também na translação da área de máxima temperatura, inicialmente localizada no centro da camada viscoelástica, em direção à chapa de aço localizada no centro do dispositivo. Este fenômeno pode ser interpretado como consequência do resfriamento causado pela convecção natural em volta das chapas periféricas, que resulta numa acumulação do calor gerado para o centro do dispositivo, explicando assim, os valores altos do campo de temperatura na chapa central. Também pode-se reparar que, após mais de 3 horas de carregamento, a temperatura ainda não estabilizou. Isso é principalmente devido ao fato do material viscoelástico não ser um bom condutor de calor.

Para analisar a evolução temporal do perfil de temperatura na camada viscoelástica, foram escolhidos 4 pontos distintos, a saber:

- Ponto A: localizado no centro da camada;
- Ponto B: localizado na linha de simetria transversal da camada viscoelástica, próximo à chapa de aço periférica;

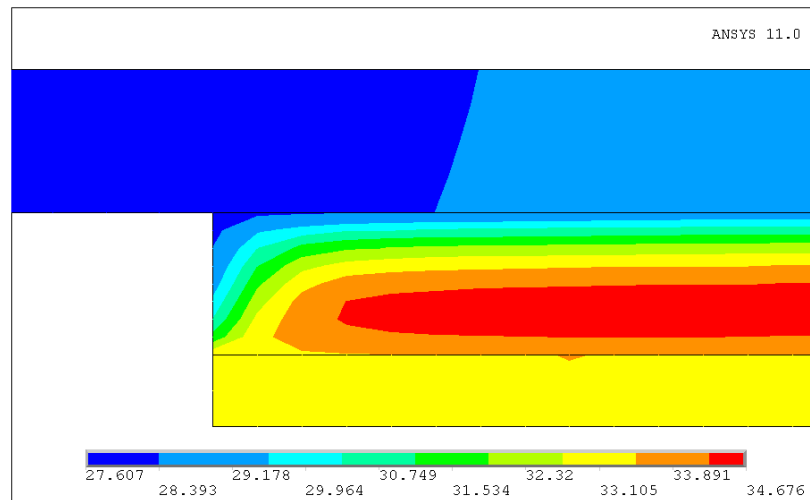


Figura 4.15: Detalhe do campo de temperatura após 12.000 segundos e carregamento com $F_0 = 600$ N e $f = 10$ Hz

- Ponto C: localizado na linha de simetria transversal da camada viscoelástica, próximo à chapa de aço central;
- Ponto D: localizado próximo à chapa de aço central e à interface entre a camada viscoelástica e o meio externo.

As localizações dos pontos A, B, C e D, e o sistema de coordenadas associado são detalhados na Fig. 4.16 e suas coordenadas são discriminadas na Tab. 4.4.

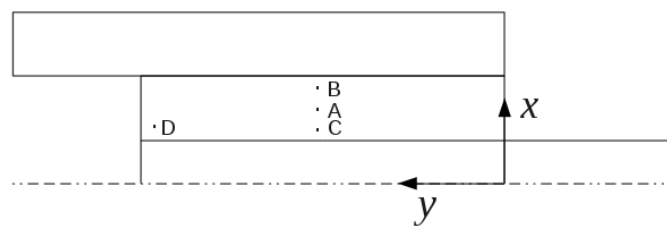


Figura 4.16: Localização dos pontos escolhidos para a observação do campo de temperatura

Tabela 4.4: Coordenadas dos pontos escolhidos para a observação do campo de temperatura

Ponto	A	B	C	D
x [mm]	20	27,5	12,5	15
y [mm]	100	100	100	187,5

A Fig. 4.17 representa a evolução da temperatura nos pontos A, B e C, evidenciando a repartição da temperatura na direção transversal. Pode-se notar que a razão

do aumento da temperatura $\Delta T = T - T_0$ entre os pontos B e A é aproximadamente de 55% durante a fase de carregamento, devido à influência das condições de contorno. Além disso, a temperatura no ponto C cresce mais lentamente que a temperatura no ponto A, mas a diferença entre T_A e T_C diminui até atingir um valor desprezível ao fim do carregamento, o que confirma a translação da zona de máxima temperatura para o centro do dispositivo. Durante a fase de resfriamento do material, após a remoção da carga, T_C decresce mais lentamente, uma vez que ele está mais afastado do meio externo.

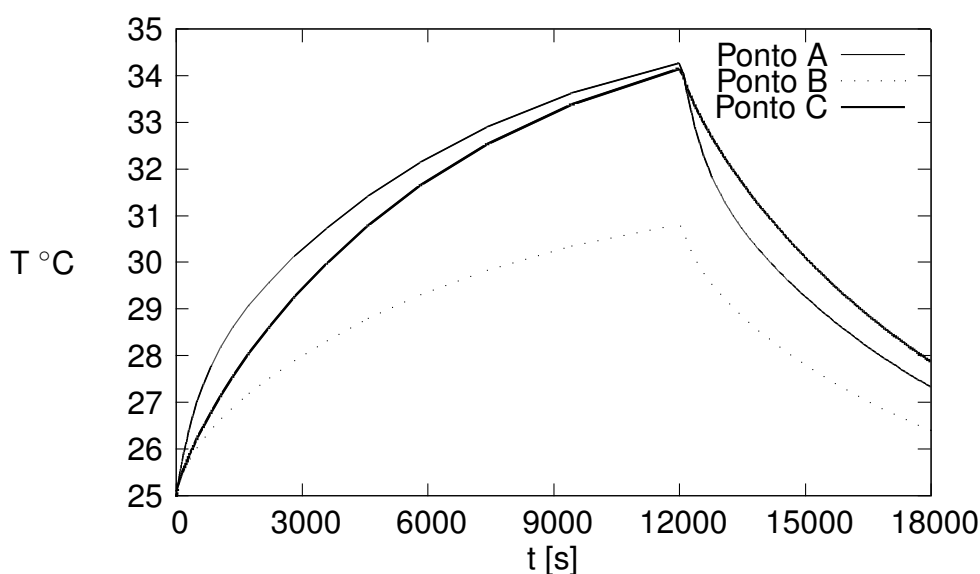


Figura 4.17: Evolução da temperatura nos pontos A, B e C

A Fig. 4.18 permite comparar as temperaturas nos pontos A, C e D. Nota-se que a temperatura em A permanece mais alta durante toda a fase de carregamento mesmo sendo esta diferença mínima imediatamente antes da remoção da carga. A temperatura no ponto D assume valores muito próximos aos encontrados em C, sendo levemente superiores na fase inicial do carregamento, pois o ponto D encontra-se mais próximo ao plano longitudinal médio da camada viscoelástica, e levemente inferiores durante a fase final do carregamento e durante o descarregamento. Isto é devido principalmente à influência da convecção externa nesta parte do domínio.

A aplicação da metodologia de modelagem numérico-computacional do autoaquecimento de um dispositivo viscoelástico translacional simples, modelado em 2D com elementos viscoelásticos submetidos ao estado plano de tensão, permitiu determinar o campo de temperatura da estrutura viscoelástica em regime transitório decorrente da aplicação de um carregamento dinâmico cíclico e analisar as fases de aque-

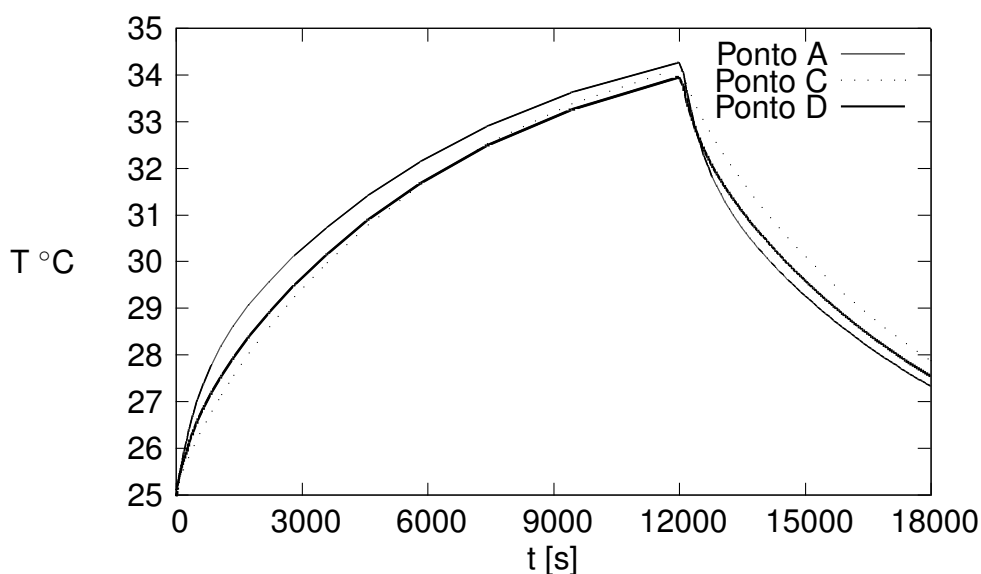


Figura 4.18: Evolução da temperatura nos pontos A, C e D

cimento e resfriamento do material viscoelástico. Os resultados numéricos obtidos confirmaram as tendências observadas nas referências bibliográficas: um aumento rápido da temperatura do material viscoelástico seguido por uma fase de estabilização progressiva, e queda rápida imediatamente após a remoção do carregamento externo. Entretanto, deve-se destacar que ao modelar o problema termomecânico utilizando elementos bidimensionais assume-se que a temperatura seja uniforme na direção normal ao plano do modelo, o que evidentemente não representa o caso real.

Para obter uma representação mais realista do fenômeno de autoaquecimento, propõe-se aplicar a metodologia desenvolvida a uma junta viscoelástica rotacional de geometria mais complexa.

4.2 Aplicação a uma junta rotacional tridimensional

O amortecedor viscoelástico modelado nesta seção é uma junta rotacional de pequenas dimensões utilizada em aplicações automotivas. Suas dimensões, e o modelo de elementos finitos tridimensional modelado no *ANSYS*™, são apresentados na Fig. 4.19. Nesta aplicação, será considerada a aplicação de um torque na direção vertical, resultando num estado de torção pura.

Foram utilizados os seguintes elementos:

- Para o problema estrutural: elemento *SOLID45*, elemento de volume com 8 nós

tendo três graus de liberdade por nó (deslocamentos em x , y e z);

- Para o problema térmico: elemento *SOLID70*, elemento de volume com 8 nós tendo um grau de liberdade por nó (temperatura).

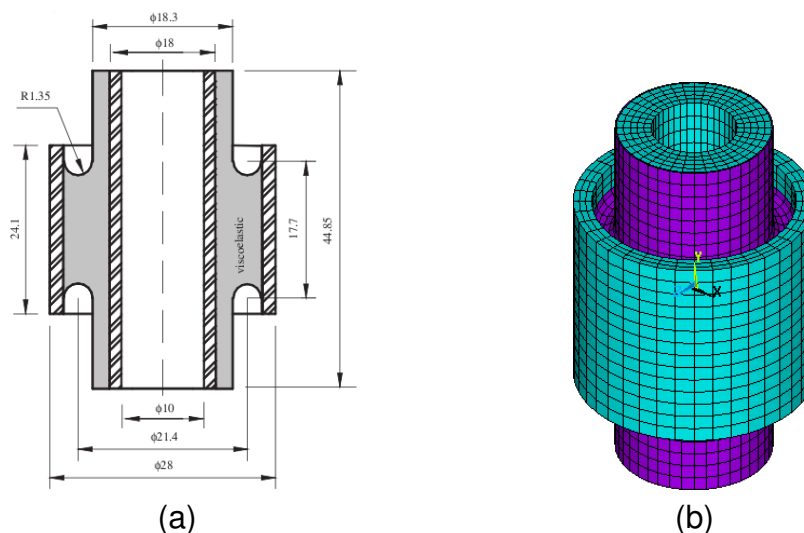


Figura 4.19: Características geométricas (a) e de modelo elementos finitos (b) da junta rotacional (adaptado de Lima e Rade, 2005)

Uma condição de deslocamento nulo é aplicada sobre os nós da superfície interior do tubo de aço, para modelar a condição de engastamento perfeito, enquanto um par de forças tangenciais de sentidos opostos é aplicado sobre a superfície externa para simular a aplicação do torque. O domínio modelado apresenta uma simetria axial e uma simetria em relação ao plano médio horizontal. Porém, a utilização de elementos axissimétricos bidimensionais não é possível uma vez que o estado de tensão decorre da aplicação de esforços normais ao plano que corta a estrutura na direção longitudinal. Para reduzir o custo computacional, foi modelado somente um oitavo do domínio original: os volumes e a malha associada, foram gerados por uma revolução de 90° a partir do desenho da figura plana apresentada na Fig. 4.19 cortado em dois, seguindo o plano médio horizontal.

As condições de contorno térmicas se resumem à aplicação de fluxos de calor nulos sobre as áreas localizadas nos planos de simetria, e a aplicação da convecção externa nas áreas em contato com o exterior do domínio. Os valores do coeficiente de transferência de calor por convecção h , da temperatura do meio externo T_∞ , do torque imposto $M(t)$, e da frequência f , são apresentados na Tab. 4.5. O torque foi aplicado sob forma de um par de esforços perpendiculares nos nós que correspondem

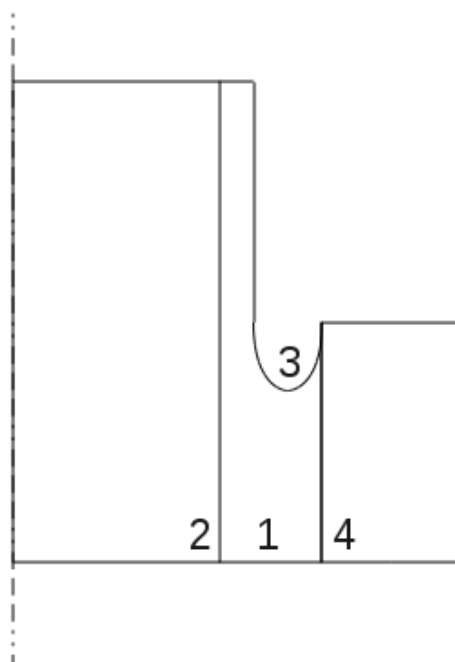


Figura 4.20: Localização dos pontos de observação da temperatura

à intersecção do plano superior do tubo de aço externo com os planos de simetria. O valor de h ($15 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$) foi utilizado no procedimento de modelagem termomecânica realizado por Merlette (2005).

Tabela 4.5: Definição das condições de contorno térmicas e dos esforços mecânicos aplicados na junta rotacional

h [$\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$]	T_{∞} [$^{\circ}\text{C}$]	M_0 [N.mm]	f [Hz]
15	25	280	10

O torque $M(t) = M_0 \sin(2\pi ft)$ foi aplicado durante 4000 segundos. A Fig. 4.21 apresenta o campo de temperatura no instante final do carregamento. Pode-se notar que a área de maiores temperaturas está localizada no plano de simetria horizontal, mais próxima ao tubo de aço interno, pois o tubo externo é mais fino, o que resulta em perdas de calor mais significativas para o lado exterior da junta.

A Fig. 4.22 mostra as curvas de temperatura em quatro pontos cujas localizações são indicadas na Fig. 4.20. Pode-se notar que durante toda a fase de carregamento, a temperatura é mais alta no ponto 1, localizado no plano médio da camada viscoelástica, sobre o plano de simetria horizontal. A temperatura menor é atingida no ponto 3, localizado no limite superior da camada viscoelástica e, conseqüentemente, diretamente sujeito às trocas de calor com o meio externo por convecção natural. Ao

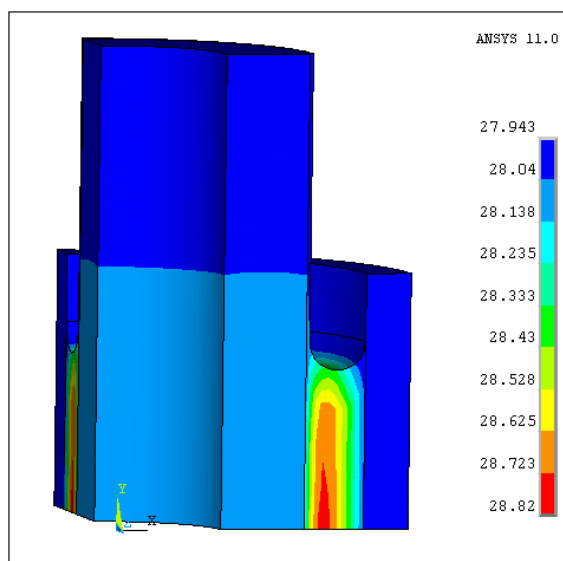


Figura 4.21: Campo de temperatura na junta rotacional para $t = 4000$ segundos

mesmo tempo, as temperaturas intermediárias correspondem aos pontos 2 e 4, que estão localizados no plano médio, respectivamente, nos limites interior e exterior da camada viscoelástica.

Observando a Fig. 4.22, pode-se identificar com facilidade as fases de aumento e de estabilização da temperatura. Após aproximadamente 2000 segundos de carregamento, as temperaturas não sofrem mais alterações significativas, e pode-se considerar que o sistema atingiu o equilíbrio térmico. Em comparação com o exemplo apresentado na seção anterior, a estabilização das temperaturas é muito mais nítida e rápida. Isto é devido à menor espessura da camada viscoelástica, a qual está sujeita a um aquecimento mais rápido, e também, à ação mais influente do meio externo sobre as trocas de calor, o que pode ser verificado ao observar a fase de descarregamento.

4.3 Discussão dos resultados

Neste capítulo foram apresentados dois exemplos de aplicação da metodologia iterativa desenvolvida para a simulação do autoaquecimento de materiais viscoelásticos. Destacam-se dois aspetos importantes:

- Os parâmetros operacionais (frequência e amplitude da força) têm uma grande influência sobre o aquecimento do material viscoelástico submetido ao estado de tensão-deformação cíclico. Em particular, o aumento da temperatura é pro-

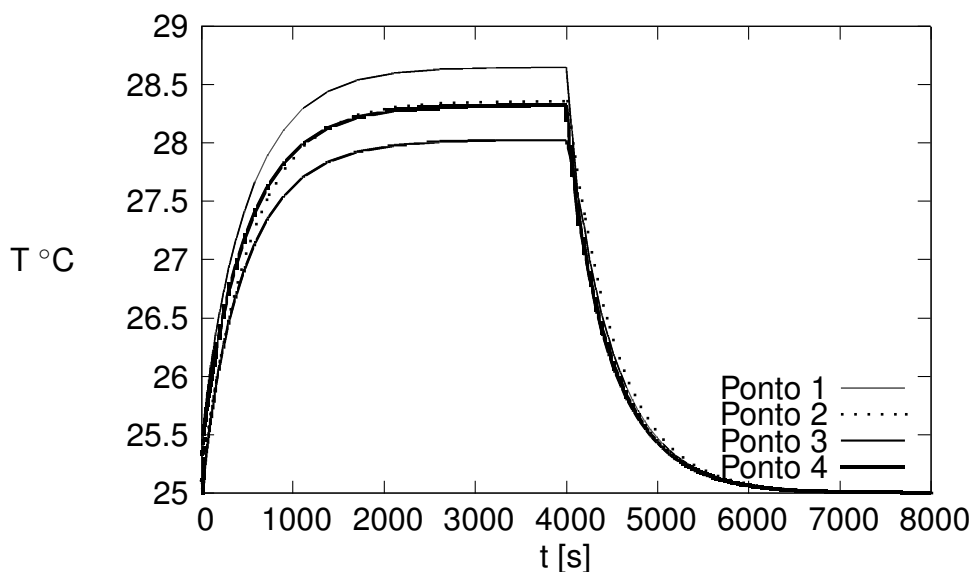


Figura 4.22: Evolução da temperatura nos quatro pontos de observação

porcional ao quadrado da amplitude da força, explicando o fato do aumento da amplitude da sollicitação mecânica ter como consequência imediata, um aumento importante do aquecimento. A frequência da excitação influi no autoaquecimento através de dois efeitos:

1. O efeito direto consiste em um aumento da temperatura proporcional à frequência, pois a pulsação $\omega = 2\pi f$ aparece como coeficiente multiplicador da fonte de calor definida na equação 3.78;
2. O efeito indireto ocorre quando o sistema está sujeito a um carregamento cuja frequência localiza-se próxima à frequência natural do amortecedor. A resposta dinâmica à carga aplicada encontra-se ampliada, e conseqüentemente a fonte de energia, definida a partir da energia de deformação, atinge valores maiores, e o aquecimento torna-se mais importante.

Sendo mantidas suficientemente baixas a amplitude e a frequência da carga, o aquecimento permanece limitado a valores contidos entre 1 °C e 5 °C, mas pequenas alterações de um destes parâmetros pode gerar um aquecimento cujo valor ultrapassará os 10 °C. Isto é suficiente para que o valor do fator de perda do material viscoelástico seja reduzido pela metade. Além disso, isto pode levar a um comprometimento do dispositivo viscoelástico em termos da sua capacidade de atenuação dos níveis de vibração e ruído.

- O parâmetro de rendimento térmico β , relacionado ao material viscoelástico, de-

pende entre outros, da frequência e da amplitude de deformação. Entretanto, não há dados explícitos sobre seus valores para os polímeros utilizados no controle passivo das vibrações. Foi mostrado na seção 4.1.5 que ele tem uma influência significativa sobre o autoaquecimento, pois é um coeficiente multiplicador da fonte de calor. Neste contexto, torna-se necessário identificar este parâmetro através do ajuste do modelo numérico com dados experimentais, o que também permitirá a validação do modelo desenvolvido. Este aspecto será abordado no próximo capítulo.

CAPÍTULO V

Avaliação experimental do autoaquecimento e ajuste do modelo numérico

O presente capítulo descreve o procedimento operacional, os resultados e a interpretação dos testes realizados com os seguintes objetivos:

1. Avaliar, com medidas de temperatura, o autoaquecimento causado pela aplicação de um deslocamento senoidal sobre um corpo de prova constituído por uma junta translacional, na qual o material viscoelástico trabalha em cisalhamento puro.
2. Validar o procedimento de modelagem numérico-computacional do autoaquecimento de materiais viscoelásticos, confrontando os resultados da simulação com as curvas experimentais, e identificar, através de um procedimento de otimização e de ajuste de curvas, o valor do coeficiente de rendimento térmico β associado ao material, e o coeficiente de convecção h .

A primeira seção é dedicada à descrição dos ensaios experimentais e dos dispositivos utilizados para a aplicação da carga e a medição das temperaturas nos pontos da estrutura escolhidos para a medição. Nesta seção, são ainda apresentados os resultados, evidenciando a influência dos parâmetros operacionais sobre o autoaquecimento. Na segunda seção é apresentada de forma detalhada a metodologia utilizada para ajustar o modelo numérico e identificar os dois únicos parâmetros que não são explicitamente associados ao material, a saber: o coeficiente de transferência de calor por convecção, h , e o coeficiente de rendimento térmico, β .

Estes coeficientes, que influenciam significativamente as variações de temperatura devidas ao autoaquecimento, são geralmente difíceis de serem avaliados diretamente, o que requereria ensaios específicos.

5.1 Descrição dos ensaios experimentais

Os testes foram realizados no Laboratório de Projetos Mecânicos da Faculdade de Engenharia Mecânica da UFU, utilizando uma máquina universal de ensaios *MTS 800*™ para a aplicação da carga cíclica e um sistema de aquisição da temperatura *Agilent*™ 34970 A disponibilizado pelo Laboratório de Transferência de Calor e Massa (LTCM). As partes metálicas do corpo de prova, assim como o sistema que permitiu sua fixação à máquina de ensaios foram realizadas com a ajuda dos técnicos do LMEst e do Laboratório de Estudos e Pesquisas em Usinagem (LEPU) da FEMEC.

5.1.1 Dispositivo ensaiado

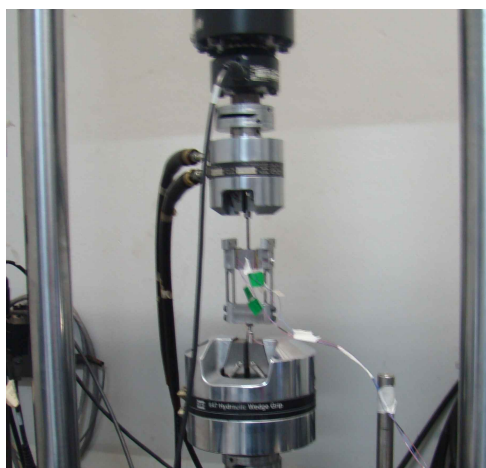
O amortecedor utilizado para os ensaios é uma junta viscoelástica translacional simples constituída por duas camadas viscoelásticas de 5 mm de espessura inseridas entre três blocos de aço 1020, conforme ilustrado na Fig. 5.1. O material viscoelástico *3M VHB 9469*™ é disponível apenas sob a forma de fitas adesivas cuja espessura varia de 0,25 mm até 1 mm. Nesta aplicação, foi utilizado um rolo de fita dupla face, cuja espessura e largura são, respectivamente, de 1 e 26 mm. As fitas foram cortadas e coladas sucessivamente até se atingir as dimensões desejadas de 5×30×26 mm, como mostrado na Fig. 5.2.

A cola presente sobre as duas faces das fitas permite unir as camadas viscoelásticas aos blocos e, com isso, obter o corpo de prova mostrado na Fig. 5.3a. Este corpo de prova é parafusado, por meio de furos rosqueados perfurados, em um dispositivo de fixação rígido formado por placas de aço usinadas paralelas, representadas na Fig. 5.3b. A parte inferior da fixação serve como base para a fixação de um cilindro preso à máquina MTS, enquanto o corpo de prova é parafusado na parte superior da máquina.

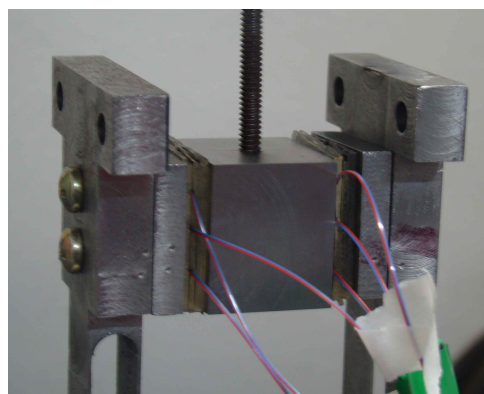
5.1.2 Sistema de aquisição da temperatura

Ao longo dos ensaios, utilizaram-se 7 termopares de cobre-constantan (tipo T) para o monitoramento e aquisição das temperaturas do material viscoelástico, sendo:

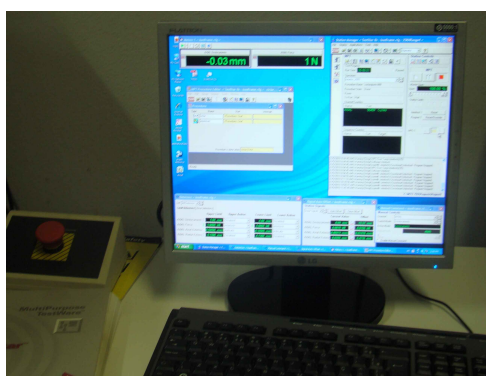
1. Os termopares 1 a 6 localizados no interior do dispositivo, inseridos em dois planos *A* e *B* distintos nas camadas viscoelásticas como indicado na Fig. 5.4a;



(a)



(b)



(c)

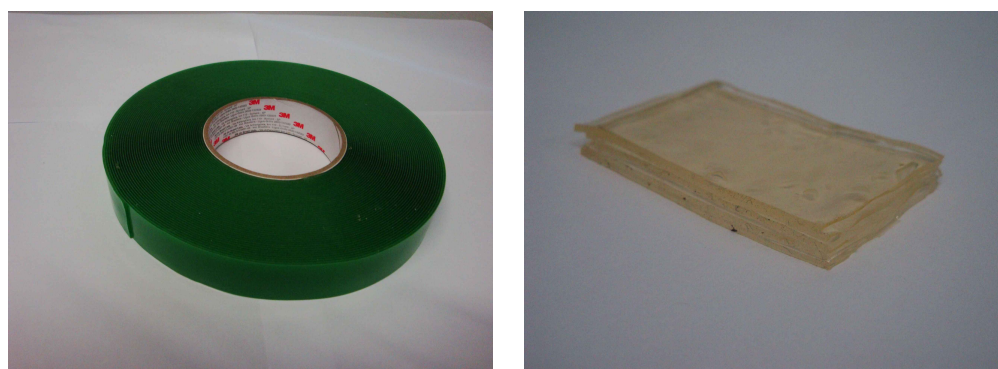


(d)



(e)

Figura 5.1: Vista completa (a) e detalhe (b) do corpo de prova na máquina *MTS*™, janelas de monitoramento da amplitude do deslocamento (c) e da temperatura (d) e sistema de aquisição da temperatura *AGILENT*™ 34970 A (e)



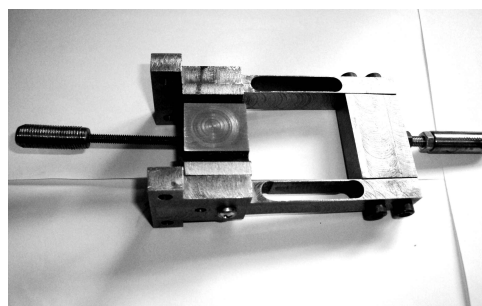
(a)

(b)

Figura 5.2: Rolo de fita *3M VHB 9469* TM (a) e camada viscoelástica de dimensões desejadas (b)



(a)



(b)

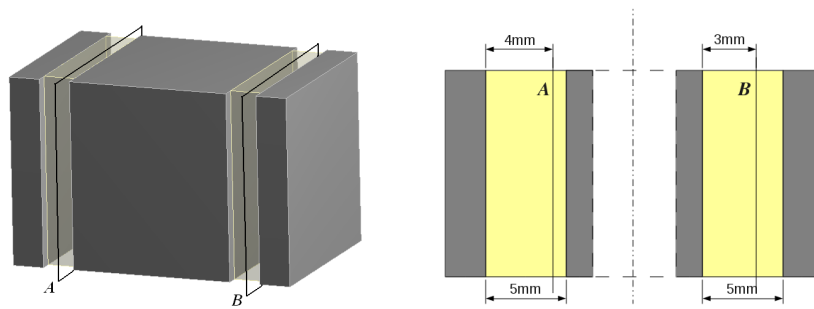
Figura 5.3: Corpo de prova (a) e sistema de fixação do corpo de prova (b)

2. O termopar 7 está localizado fora do dispositivo com a função de monitorar as mudanças da temperatura ambiente durante os testes.

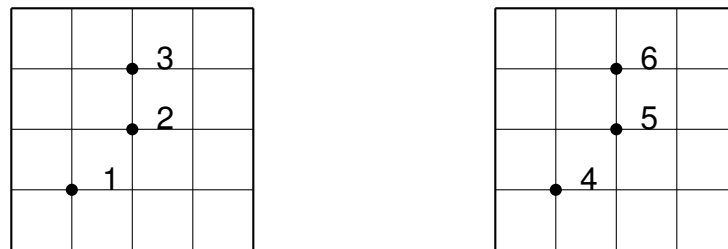
A Fig. 5.4b indica o posicionamento da ponta de cada termopar dentro dos planos de observação. A distribuição espacial dos termopares têm como objetivo evidenciar o fenômeno de condução térmica nas três direções, e a influencia relativa da convecção natural. Os termopares foram conectados em uma placa de aquisição *AGILENT* TM 34970 A , e a aquisição das temperaturas foi feita através do software *AGILENT* TM Bench Data Logger, com resolução de dois segundos.

5.1.3 Resultados dos ensaios

Para evidenciar a influência dos parâmetros operacionais e ambientais - frequência e temperatura - foram realizados seis ensaios, cada um constituído por duas fases, a saber:



(a)



Plano A

Plano B

(b)

Figura 5.4: Localização dos planos A e B (a), localização dos termopares 1 a 6 nos planos A e B (b)

1. A aplicação de um carregamento cíclico durante 3360 segundos;
2. O resfriamento, sob efeito da convecção natural, da estrutura após a remoção da carga. Não foi adotado um tempo padrão para a medida das temperaturas durante o resfriamento, sendo a aquisição dos sinais dos termopares interrompida após ter sido verificado que as temperaturas registradas voltaram aos seus valores originais, observados antes da aplicação do carregamento.

Foram escolhidas as seguintes frequências da excitação:

1. $f = 10$ Hz que corresponde a 33 600 ciclos;
2. $f = 15$ Hz que corresponde a 50 400 ciclos.

e as seguintes amplitudes:

1. $u_0 = 0.5$ mm pico, que corresponde a 1 mm pico a pico;

2. $u_0 = 1$ mm pico, que corresponde a 2 mm pico a pico;
3. $u_0 = 1,5$ mm pico, que corresponde a 3 mm pico a pico.

Cada ensaio está referenciado por uma letra minúscula como indicado na tabela abaixo.

Tabela 5.1: Descrição dos ensaios experimentais

Ensaio	a	b	c	d	e	f
f [Hz]	10			15		
u_0 [mm]	0,5	1	1,5	0,5	1	1,5

A Fig. 5.5 mostra as temperaturas medidas pelos termopares 2, 4, 5 e 6 para o ensaio *b* sobre o corpo de prova. Pode-se distinguir três fases distintas:

1. Imediatamente após o início da aplicação do carregamento, nota-se uma rápida elevação das temperaturas nos pontos de medição. Esta fase dura aproximadamente 120 segundos e corresponde a um aquecimento cujo valor, dependendo do ponto considerado, varia de 2 °C até 2,5 °C ;
2. A primeira fase é seguida por uma fase de estabilização progressiva das temperaturas durante a qual a taxa de aumento da temperatura em relação ao tempo diminui de forma gradativa;
3. Após a remoção da carga, todas as temperaturas diminuem de forma instantânea de aproximadamente 2 °C . Em seguida, elas diminuem mais lentamente.

Os sinais obtidos com os termopares 1 e 3 não foram utilizados pois apresentam valores aberrantes e oscilações de grande amplitude, provavelmente devidos à rupturas parciais dos termopares, nas pontas de medição ou na conexão com o equipamento de medição.

Tabela 5.2: Temperaturas máximas observadas nos pontos de medição para o ensaio *b*

Ponto	2	4	5	6
T_{max} °C	30,63	30,40	30,31	30,62

Os valores atingidos no instante final da aplicação do carregamento são apresentados na Tab. 5.2. A temperatura máxima é atingida no ponto 2, localizado no centro do plano mais próximo à chapa central do amortecedor, como ilustrado pela Fig. 5.4b,

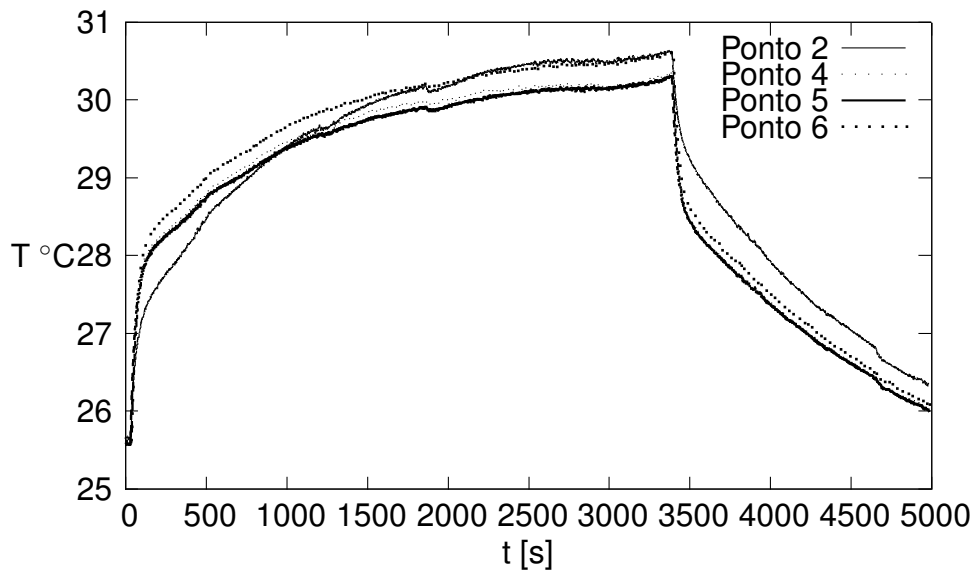


Figura 5.5: Curvas de temperatura obtidas para o ensaio *b*

embora este ponto seja caracterizado por um aquecimento menor durante a fase inicial da aplicação do carregamento. A temperatura no ponto 2 passa a ser mais elevada que as temperaturas medidas nos pontos 4, 5 e 6, mais próximos ao plano médio da camada viscoelástica, após 2000 segundos de carregamento. Isto ilustra o fenômeno de acumulação do calor na parte central do domínio que ocorre, uma vez que as temperaturas começam a se estabilizar, como constatado nos resultados de simulações numéricas apresentadas no capítulo 4.

A Fig. 5.6 mostra as temperaturas medidas no ponto 2 para os ensaios *a*, *b* e *c*. Ela permite destacar a influência da amplitude do deslocamento sobre o autoaquecimento. A comparação dos valores da temperatura atingidas com $u_0 = 0,5$, 1 e 1,5 mm confirma a tendência observada no Capítulo 4, ou seja, quanto maior a amplitude de deslocamento, maior é o autoaquecimento.

As temperaturas medidas durante todos os ensaios são disponíveis no anexo A.

Tabela 5.3: Diferença de temperatura $\Delta T = T_{max} - T_0$ medida no ponto 2 para os ensaios *a*, *b* e *c*

Ensaio	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
ΔT °C	1,14	4,93	8,43
$\Delta T/u_0^2$ [°C .mm ⁻²]	4,56	4,93	3,7467

A Tab. 5.3 representa os valores das temperaturas medidas entre o instante inicial e o instante final do carregamento para os ensaios *a*, *b* e *c* e a razão do aquecimento e do quadrado das amplitudes de deslocamento. A evolução da razão $\Delta T/u_0^2$ pode ser

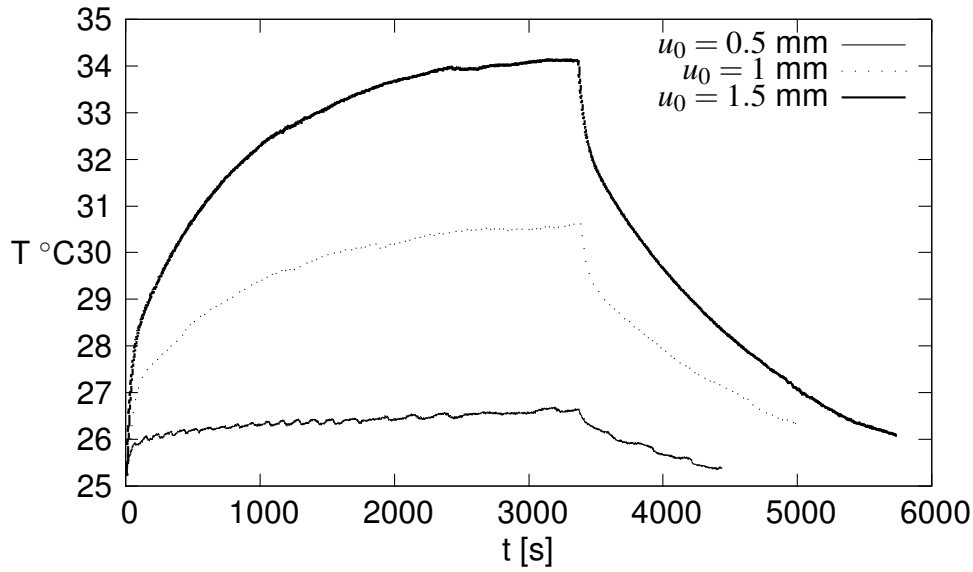


Figura 5.6: Curvas de temperatura obtidas para $f = 10$ Hz no ponto 2

interpretada como um indicador da não-linearidade do problema, pois a fonte de calor proveniente da dissipação viscoelástica é calculada a partir da energia de deformação elástica, a qual é proporcional ao quadrado das amplitudes de deslocamento, como mostrado no Capítulo 3.

Porém, a evolução do campo de temperatura altera o valor da rigidez complexa do sistema, fazendo com que a fonte de calor evolua de forma diferente para cada valor da amplitude da força ou do deslocamento imposto. O valor do coeficiente de rendimento térmico β também varia em função da amplitude e da velocidade de deformação. Portanto, é necessário identificar os valores de β para um dado conjunto de valores da deformação imposta para que se possa caracterizar, com a ajuda do modelo numérico, o comportamento termomecânico do sistema sujeito ao autoaquecimento. Este aspecto é abordado a seguir.

5.2 Ajuste do modelo numérico-computacional

A comparação dos resultados experimentais com as simulações numéricas apresentadas no Capítulo 4 mostra uma semelhança entre os perfis de temperatura obtidos, tanto na fase de aquecimento quanto na fase de resfriamento após a remoção da carga cíclica. Porém, não é possível comparar diretamente os perfis medidos e os simulados em termos quantitativos pois não se dispõe de valores de dois parâmetros físicos significativos do problema, que são:

- O coeficiente de rendimento térmico β . Nas simulações realizadas no Capítulo 4, seus valores foram escolhidos de forma arbitrária dentro da faixa $[0, 1; 1]$, tendo como referência o trabalho de ajuste de curvas realizado por Merlette (2005), segundo quem o valor de β é altamente dependente da amplitude de deformação.
- O coeficiente de transferência de calor por convecção natural h , para o qual não há valor padrão mas sim valores que dependem dos materiais, da faixa de temperatura, e da orientação das superfícies nas quais a transferência de calor ocorre. Geralmente, os valores escolhidos para as simulações numéricas estão abaixo de $20 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

5.2.1 Descrição do procedimento de ajuste

Neste trabalho, foi desenvolvido um procedimento de ajuste do modelo numérico-computacional, tendo como objetivo a identificação de β e de h para as condições existentes nos ensaios experimentais. Os seis experimentos foram realizados em condições semelhantes, o ar condicionado tendo permanecido ligado na mesma temperatura durante todos os ensaios. Neste procedimento de ajuste, considera-se que o valor de h é o mesmo para todos os ensaios efetuados. Esta hipótese não descreve a convecção de forma exata, mas permite tornar mais simples a identificação dos parâmetros do modelo. Já o valor de β depende ao mesmo tempo da frequência e da amplitude da carga aplicada. Neste sentido, optou-se por realizar um procedimento de ajuste do modelo em duas etapas:

1. Identificação dos valores de h e de β utilizando um programa de otimização com duas variáveis, seguindo o critério dos mínimos quadrados (Vanderplaats, 2005). O resultado incluirá o valor do coeficiente de transferência de calor por convecção para todos os ensaios, e o valor de β para o ensaio utilizado como referência nesta etapa.
2. Identificação dos valores de β para os cinco ensaios restantes, através de um procedimento de busca unidimensional.

Para cada ensaio, a otimização tem como objetivo minimizar a diferença entre as temperaturas medidas e calculadas pela simulação. A função objetivo apropriada para este problema é a soma dos quadrados da diferença entre os valores experimentais e numéricos da temperatura para cada ponto de medição:

$$F_{obj} = \sum_{i=1}^n (T_{exp}^i - T_{sim}^i)^2 \quad (5.1)$$

onde:

- n : número de pontos experimentais (correspondentes a n instantes de tempo);
- T_{exp}^i : temperatura medida no tempo t_i ;
- T_{sim}^i : temperatura calculada no tempo t_i .

Foi desenvolvido um programa de otimização no ambiente *MATLAB*™, utilizando uma função de otimização pelo método de evolução diferencial desenvolvida por Storn (1996) e Van Zandt. O método de evolução diferencial, originalmente baseado sobre os algoritmos genéticos, consiste na determinação dos valores das variáveis do problema para os quais o valor de F_{obj} será o menor possível, através das seguintes etapas:

1. Escolha de uma população inicial, formada por n_p conjuntos de valores das variáveis de projeto, determinados aleatoriamente dentro de uma faixa pré-escolhida;
2. Avaliação da função objetivo para cada indivíduo da população formada;
3. Geração de uma nova população através do cruzamento dos indivíduos que apresentaram o melhor desempenho na etapa 2. Uma perturbação pode ser introduzida, dependendo das condições aleatórias;
4. Repetição das etapas 2 e 3 n_{max} vezes.

Uma vez determinado o conjunto (β_{opt}, h_{opt}) para o qual a função objetivo atinge o menor dos valores observados, falta determinar os coeficientes β_{opt} associados aos outros ensaios. Como só há um parâmetro a ser identificado, pode-se utilizar um procedimento mais simples de otimização. Os valores de β ótimos podem ser identificados por um processo de busca unidimensional. O método escolhido é o da seção áurea, que consiste em reduzir em cada iteração o intervalo de busca da solução como mostrado na Fig. 5.7. O número de ouro $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é utilizado como taxa de redução do intervalo.

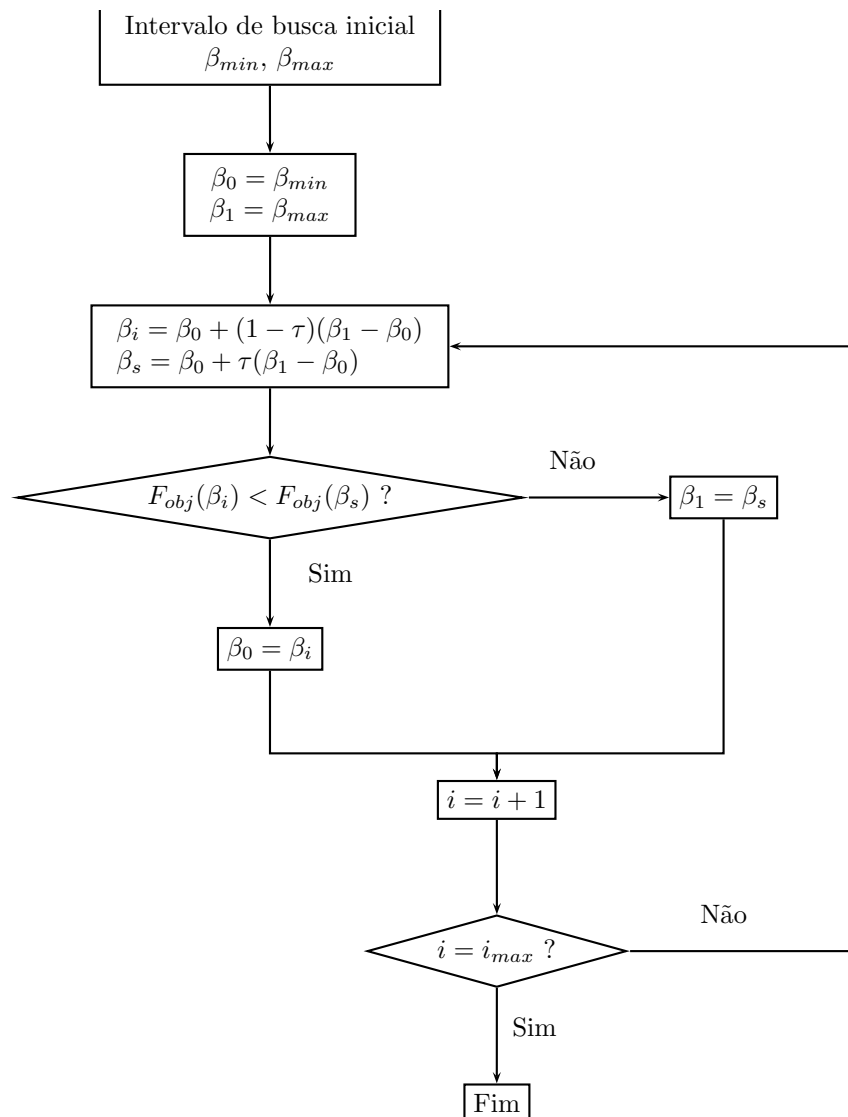


Figura 5.7: Redução do intervalo de busca de β pelo método da seção áurea

5.2.2 Descrição do modelo numérico

O corpo de prova foi modelado utilizando o código de elementos finitos *ANSYS*TM, com os seguintes elementos:

- Para o problema estrutural: elemento *SOLID45*, elemento de volume com 8 nós tendo três graus de liberdade por nó (deslocamentos em x , y e z);
- Para o problema térmico: elemento *SOLID70*, elemento de volume com 8 nós tendo um grau de liberdade por nó (temperatura).

Devido à simetria do corpo de prova e do carregamento externo, apenas a metade do corpo de prova foi modelada como indicado na Fig. 5.8.

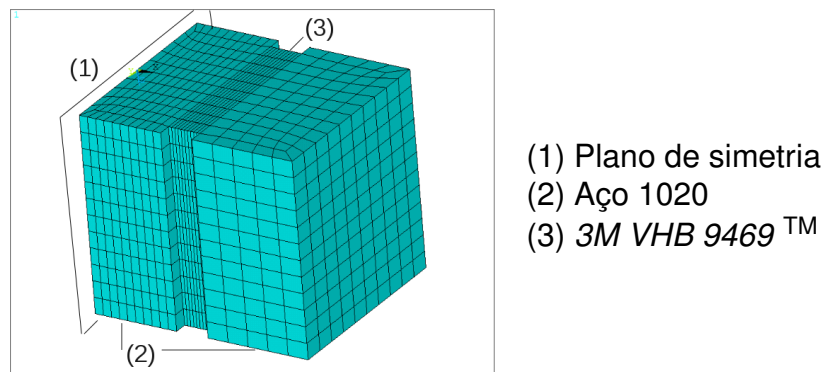


Figura 5.8: Modelo elementos finitos do corpo de prova modelado no em *ANSYS*TM

A superfície externa do domínio $\partial\Omega$ pode ser particionada em três de acordo com as condições de contorno estruturais e térmicas aplicadas:

- $\partial\Omega_S$: plano de simetria $x = 0$;
- $\partial\Omega_E$: plano paralelo ao plano de simetria marcando a extremidade do domínio;
- $\partial\Omega_R = \partial\Omega \cap (\overline{\partial\Omega_S \cup \partial\Omega_E})$

Para respeitar a condição de simetria em $\partial\Omega_S$ os deslocamentos segundo a direção normal ao plano de simetria são bloqueados ao mesmo tempo em que um fluxo de calor nulo é imposto. O restante de $\partial\Omega$ está submetido a um fluxo de calor por convecção natural, e a face $\partial\Omega_E$ é considerada engastada. Estas condições de contorno estão resumidas na Tab. 5.4.

Tabela 5.4: Condições de contorno aplicadas ao domínio $\partial\Omega$

	Mecânicas	Térmicas
$\partial\Omega_S$	$u_x = 0$	$\vec{q} = \vec{0}$
$\partial\Omega_E$	$u_x = u_y = u_z = 0$	$\vec{q} = h(T - T_\infty)\vec{n}$
$\partial\Omega_R$	$\times$	$\vec{q} = h(T - T_\infty)\vec{n}$

A Fig. 5.9 mostra a estrutura deformada e o campo de temperatura após 1533 segundos de aquecimento decorrentes da aplicação de um deslocamento de 1 mm pico a uma frequência de 15 Hz (ensaio e). Como pode ser observado, a visualização do campo de temperatura permite identificar a acumulação do calor na parte central do dispositivo.

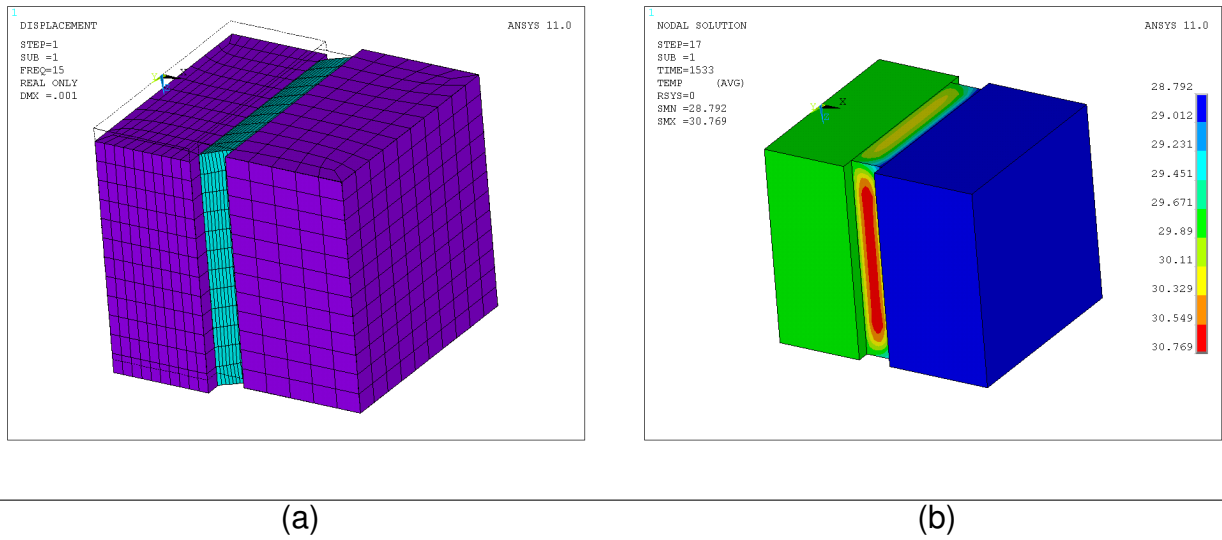


Figura 5.9: Visualização da estrutura deformada sob a aplicação do carregamento externo (a) e do campo de temperatura após 1533 segundos de aquecimento (b)

5.2.3 Discussão dos resultados

O programa de otimização foi utilizado para a identificação de h e β para o ensaio b ($u_0 = 1$ mm e $f = 10$ Hz). Um pré-ajuste realizado de forma empírica para avaliar a sensibilidade do modelo aos parâmetros β e h foi efetuado, após o qual, foram escolhidas as seguintes faixas de busca da solução:

$$\begin{cases} 0,14 \leq \beta \leq 0,19 \\ 10 \leq h \leq 15 \end{cases} \quad (5.2)$$

Após 50 avaliações da função objetivo, realizadas através de 10 gerações com

5 indivíduos, empregando o método de evolução diferencial, o conjunto de valores ótimos ($h = 13,016, \beta = 0,1755$) foi obtido. Os valores de β para os ensaios *a*, *c*, *d*, *e* e *f* foram identificados através do processo descrito no fluxograma da Fig. 5.7, fixando o valor do coeficiente de transferência de calor por convecção natural igual a $h_0 = 13,016 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$, que corresponde ao valor determinado pela otimização.

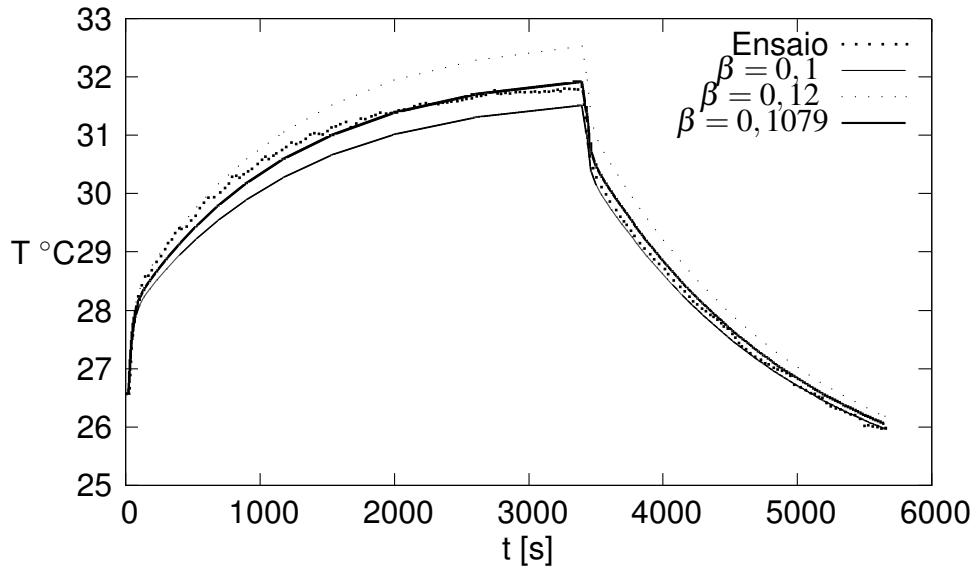


Figura 5.10: Temperatura simulada a partir do ensaio *e* ($u_0 = 1 \text{ mm}$ e $f = 15 \text{ Hz}$) para $\beta_{min} = 0,1$, $\beta_{max} = 0,12$ e $\beta_{opt} = 0,1079$

A Fig. 5.10 compara as curvas de temperatura obtidas no ponto 2 pelo ensaio e pelas simulações realizadas com os valores β_{min} e β_{max} (os quais correspondem aos valores limites da faixa de busca do valor ótimo de β) e com o valor ótimo β_{opt} . A determinação empírica de β_{min} e β_{max} , cujo objetivo é reduzir a amplitude do intervalo de busca da solução, permite diminuir o número de avaliações da função objetivo e, conseqüentemente, reduzir o custo computacional na identificação de β .

Tabela 5.5: Valores de β_{opt} identificados através do ajuste do modelo numérico-computacional

f [Hz]	10			15		
u_0 [mm]	0.5	1	1.5	0.5	1	1.5
β_{opt}	0.2055	0.1755	0.15	0.1324	0.1079	0.0771
F_{obj}	10.8141	15.5463	65.2724	7.5945	35.1145	137.6865

A Tab. 5.5 apresenta o resultado da identificação de β obtidos para todos os ensaios, utilizando o método da seção áurea, bem como os valores de F_{obj} correspondentes aos valores ótimos.

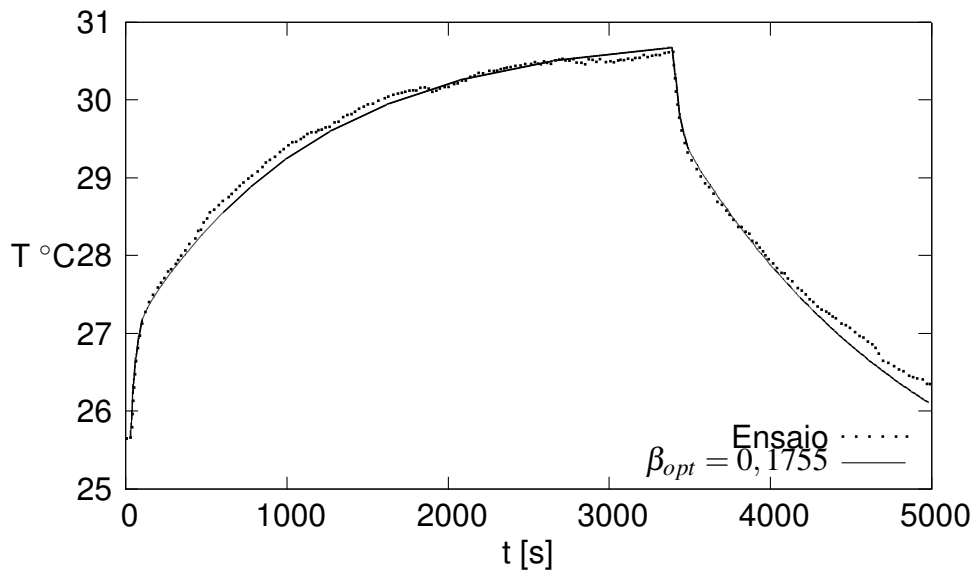


Figura 5.11: Temperaturas medida e simulada no ponto 2 para o ensaio b

A Fig. 5.11 permite comparar as temperaturas medidas e simuladas para o ensaio b . Nota-se uma boa concordância entre as curvas experimental e numérica durante a fase inicial do carregamento, e que as pequenas diferenças observadas após esta fase inicial não ultrapassam os 0,1 °C. Durante uma faixa de tempo aproximadamente igual à metade do descarregamento, não se nota diferença apreciável entre as curvas, mas a temperatura medida durante a parte final do descarregamento está sujeita a pequenas discontinuidades e afasta-se da curva numérica. Este fenômeno pode ser devido às evoluções locais da temperatura ambiente e ao próprio sistema de aquisição.

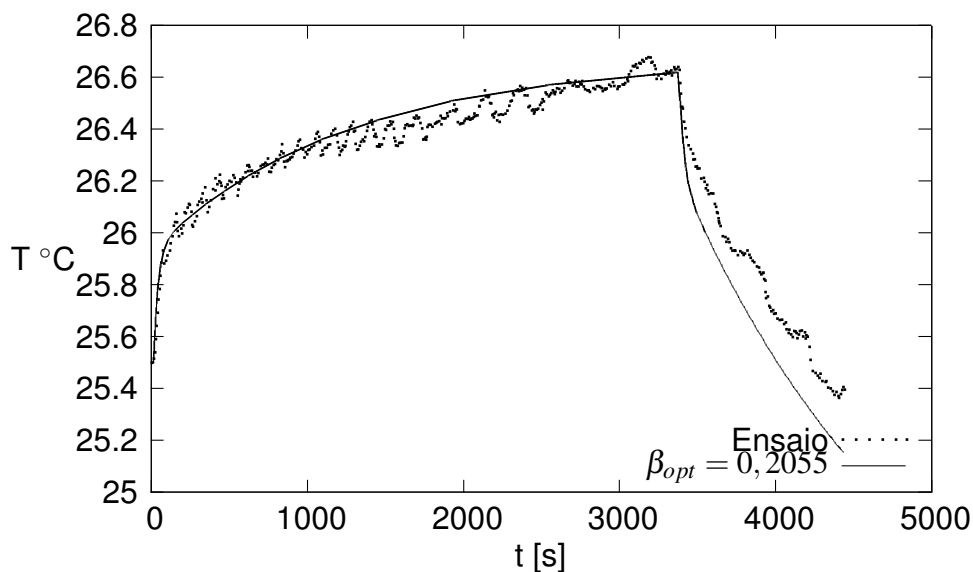


Figura 5.12: Temperaturas medida e simulada no ponto 2 para o ensaio a

A Fig. 5.12 mostra um ruído de frequência variável e de amplitude de $0,1^{\circ}\text{C}$ ao longo da fase de estabilização da temperatura para o ensaio *a*. Este ruído também pode ser identificado na fase de descarregamento, embora seja menos visível, pois a alta velocidade de resfriamento ameniza sua influência durante a aquisição. Mesmo assim, observa-se uma razoável concordância entre as curvas numéricas e experimental. Ruídos devidos ao sistema de aquisição foram observados nos outros ensaios, porém com amplitudes menores. Dentre as hipóteses que podem explicar a presença deste ruído, destaca-se a possibilidade do movimento de vibração imposto ao corpo de prova ter sido parcialmente transmitido aos termopares, e assim influenciado na medição.

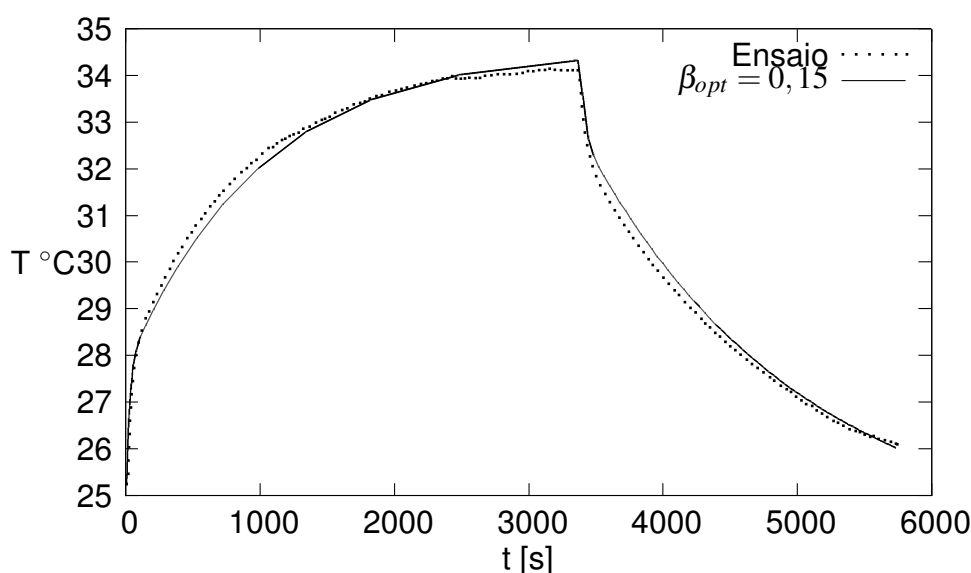


Figura 5.13: Temperaturas medida e simulada no ponto 2 para o ensaio *c*

Através da análise da Fig.5.13 pode-se notar que a curva experimental do ensaio *c* é mais suave, com menor influência do ruído no aquecimento. As curvas numérica e experimental são muito próximas, com exceção do início da fase de estabilização das temperaturas, onde os valores simulados estão localizados levemente abaixo dos valores medidos. Uma tendência inversa é observada na fase de descarregamento, porém, a diferença absoluta entre as curvas não ultrapassa os $0,4^{\circ}\text{C}$.

A Fig. 5.14 mostra que os valores da temperatura obtidos com $f = 15$ Hz e $u_0 = 0,5$ mm são levemente superiores aos obtidos com $f = 10$ Hz e $u_0 = 0,5$ mm. Embora o ruído devido ao sistema de medição da temperatura esteja presente, permanece menor do que o observado para o ensaio *a*, com $f = 10$ Hz. A curva numérica obtida com $\beta_{opt} = 0,1324$ permanece relativamente próxima à curva experimental, com

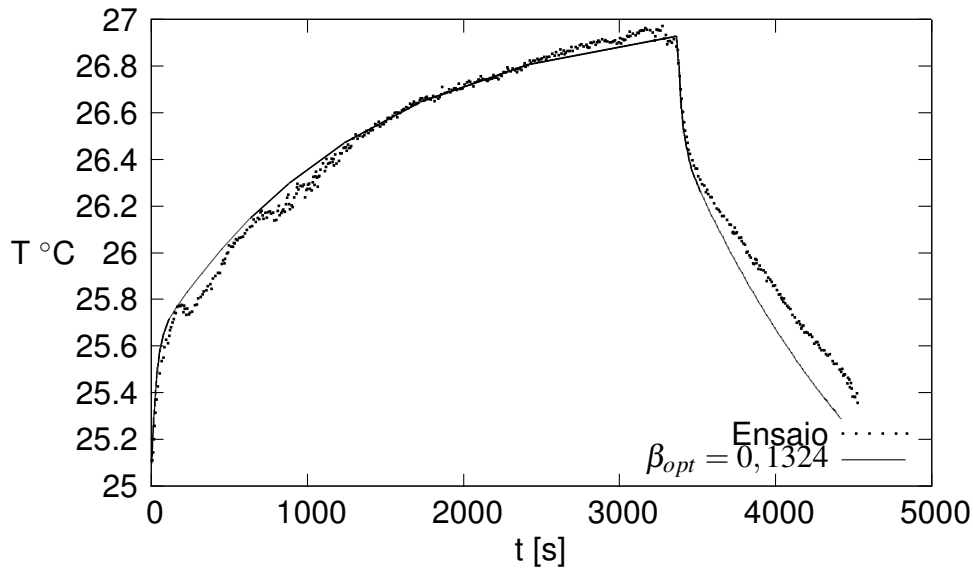


Figura 5.14: Temperaturas medida e simulada no ponto 2 para o ensaio d

exceção das fases correspondentes ao início da estabilização da temperatura e ao fim do resfriamento onde a diferença numérica-experimental atinge seu valor máximo de aproximadamente $0,2^{\circ}\text{C}$.

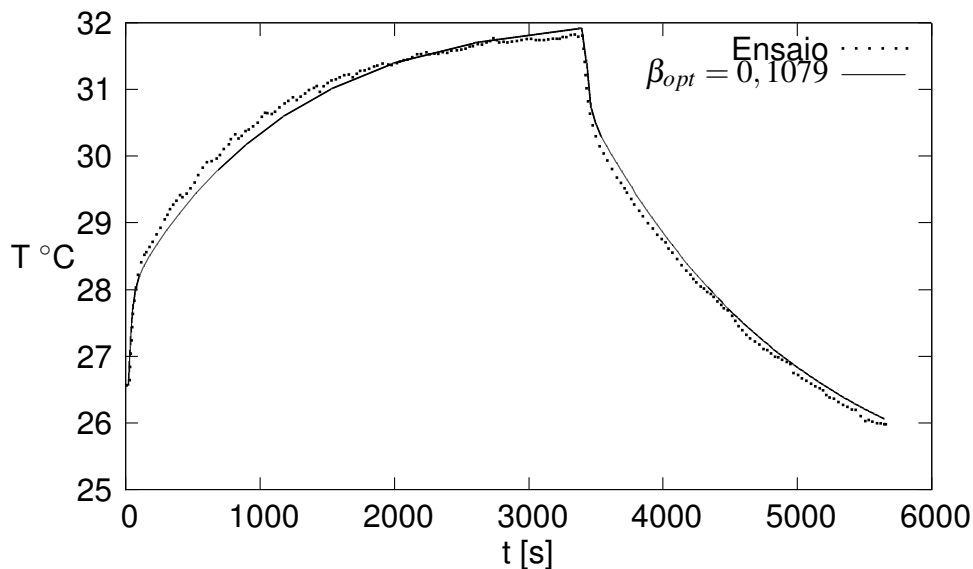


Figura 5.15: Temperaturas medida e simulada no ponto 2 para o ensaio e

As Fig. 5.15 e 5.16 mostram, respectivamente, as comparações entre as curvas experimentais e simuladas com β_{opt} para os ensaios e e f . Pode-se notar que o ajuste de curvas permite aproximar as temperaturas experimentais com uma diferença que não ultrapassa os $0,5^{\circ}\text{C}$ ou seja, com uma diferença relativa de 8,3% (ensaio e) e 5,6% (ensaio f).

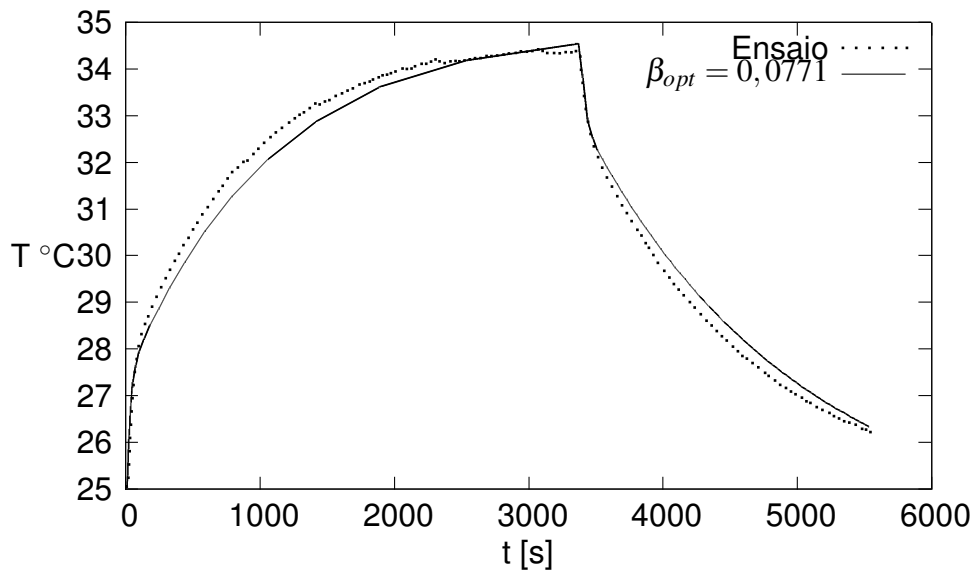


Figura 5.16: Temperaturas medida e simulada no ponto 2 para o ensaio f

Observa-se que o valor de β decresce de forma significativa com a amplitude de deslocamento e com a frequência, passando a ter um valor de 0.0771 para o ensaio f ($f = 15$ Hz e $u_0 = 1.5$ mm), o que localiza-se fora da faixa indicada por Merlette ($0.1 \leq \beta \leq 1$). A queda do coeficiente β com a amplitude de deformação é uma tendência já observada por Merlette (2005) e Rittel (1999) que pode ser explicada qualitativamente pela natureza da parte complementar da energia de dissipação viscoelástica proporcional ao fator $(1 - \beta)$. Esta energia, de acordo com Rittel (2000), é armazenada pelo material sob forma de modificações da microestrutura: assim, uma amplitude de deformação maior, que resulta em mais ligações intramoleculares alteradas, terá como consequência uma reorganização microestrutural mais importante.

Os valores baixos de β_{opt} podem ser sujeitos a um erro proveniente do experimento: sendo as camadas viscoelásticas formadas por fitas coladas, ao aplicar a deformação senoidal pode ocorrer um movimento relativo nas divisões entre as fitas que compõem as camadas, pois é difícil realizar uma colagem uniforme. Assim, o campo de deformação cisalhante real observado dentro das fitas viscoelásticas pode ser menor do que o campo de deformação teórico que poderia ser observado se as camadas fossem formadas por um material perfeitamente uniforme e homogêneo. O método de simulação utilizado neste trabalho não permite levar em conta as possíveis irregularidades nas ligações entre as fitas, o que pode explicar a ocorrência de um erro na comparação dos resultados numéricos e experimentais cuja importância relativa é dificilmente mensurável.

CAPÍTULO VI

Conclusões e perspectivas de continuidade

Neste trabalho foi desenvolvida uma metodologia de simulação numérica do fenômeno de autoaquecimento em materiais viscoelásticos. A formulação do problema acoplado é baseada nas leis da termodinâmica e considera a conversão em fonte de calor de uma parte da energia dissipada pelo amortecimento interno do material viscoelástico.

A implementação da resolução sequencial do problema termomecânico na linguagem *APDL*, integrada ao software de elementos finitos *ANSYS*™ permitiu sua aplicação ao cálculo do autoaquecimento em estruturas modeladas em *2D* e em *3D*. Os resultados obtidos confirmaram as tendências observadas experimentalmente, a saber, um aumento rápido da temperatura dentro do material viscoelástico imediatamente após o início da aplicação da carga, seguido por uma estabilização progressiva e uma queda rápida da temperatura uma vez que a carga foi removida. Também verificou-se que a amplitude de força é um dos parâmetros mais influentes sobre o autoaquecimento.

A validação do modelo numérico proposto foi efetuada pela comparação com os experimentos realizados em laboratório. Um procedimento de identificação por ajuste de curvas permitiu determinar o valor do coeficiente de transferência de calor por convecção natural e os valores do coeficiente de rendimento térmico associados a cada ensaio, de tal forma que a diferença entre as curvas numérica e experimental fosse minimizada. Os valores do coeficiente de rendimento térmico β identificados encontram-se dentro da faixa definida pelas principais referências, com exceção do valor associado ao ensaio efetuado com a frequência e a amplitude de deslocamento mais altas.

Do ponto de vista do projeto de dispositivos viscoelásticos para fins de controle

passivo de vibrações, a principal conclusão a que se chega é que o autoaquecimento pode comprometer, significativamente, o desempenho de tais dispositivos, em decorrência da diminuição da rigidez e do fator de perda, ocasionada pela elevação da temperatura. Desta forma, a hipótese atual de se considerar temperaturas uniformes pode não ser adequada em numerosas situações.

O modelo numérico apresenta diversas simplificações que associadas às incertezas experimentais contribuem para o desvio entre os valores numéricos e aqueles obtidos em laboratório. Da mesma forma e dependendo das condições ambientais e operacionais, o módulo complexo identificado para uma certa faixa de temperatura e para a frequência do ensaio a partir do nomograma fornecido pelo fabricante pode ser diferente do módulo que descreve a resposta da camada formada por fitas coladas. Propõe-se, então, como procedimento complementar, a realização de medidas experimentais das propriedades térmicas das fitas viscoelásticas a serem utilizadas para ensaios futuros, e a identificação do seu módulo complexo através da aquisição de funções de resposta em frequência.

Também sugere-se projetar dispositivos amortecedores com geometria otimizada para que a influência do autoaquecimento seja minimizada, de acordo com as propriedades do material viscoelástico utilizado. Uma solução possível consiste em aumentar o tamanho e o número de superfícies de contato com o meio ambiente, de tal forma que as trocas de calor por meio da convecção natural sejam maximizadas. Da mesma forma, a inclusão nas partes viscoelásticas do amortecedor de insertos metálicos ou de elementos hipercondutores como por exemplo microcanais ou nanotubos de carbono, permitiria evacuar uma parte do calor gerado e assim limitar a acumulação de calor no meio do dispositivo.

VI

Referências Bibliográficas

BAGLEY, R.L., 1983. A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity, *Journal of Rheology* 27, 3:201-210

BARBOSA, F. 2000. Modelagem Computacional de Estruturas com Camadas Viscoelásticas Amortecedoras, Tese de Doutorado (Engenharia Civil) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

BORGES, A. S., LUZIANO, W. P., RADE, D. A., SILVEIRA NETO, A., 2009. A Numerical Study of Cosserat Beam Theory Applied to the Modeling of Subsea Risers. 20th International Congress of Mechanical Engineering, 2009, Gramado-RS. Proceedings of COBEM 2009.

BRACKBILL, C.R., LESIEUTRE, G.A., SMITH, E.C., GOVINDSWAMY, K, 1996. Thermomechanical modeling of elastomeric materials, *Journal of Smart Materials and Structures* 5, 529-539

CHRISTENSEN, R.M., 1982. Theory of viscoelasticity: an introduction, Second Edition, Academic Press, ISBN 978-0121742522

DHATT, G., TOUZOT, G., 1986. Une présentation de la méthode des éléments finis, Éditions des Universités de Laval, Québec, deuxième édition.

DRAKE, M.L., SOOVERE J., 1984. A design guide for damping of aerospace structures, AFWAL Workshop Proceedings 3.

ESPÍNDOLA, J.J., LOPES, E.M., BAVASTRI, C.A., 2005. A Generalized Fractional Derivative Approach to Viscoelastic Materials Properties Measurements, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 64, n°2, 473-506

FULLER, C., ELLIOT, S.J., NELSON, P.A., 1996. Active Control of Vibration, Academic Press, 332p., ISBN 978-0122694417

GASKELL, D.R., 2003. Introduction to the Thermodynamics of Materials - Fourth Edition, Taylor & Francis, 640p., ISBN 978-1591690139

GALUCIO, A.D., DEÜ, J.-F., OHAYON, R., 2004 Finite element formulation of viscoelastic sandwiche beams using fractional derivative operators, *Computational Mechanics* 33, 282-291

- GOLLA, D.F., HUGHES, P.C., 1985. Dynamics of viscoelastic structures: a time-domain, finite element formulation, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 52:897 - 906
- GOPALAKRISHNA, H.S, LAI, M.L., 1998. Finite element heat transfer analysis of viscoelastic damper for wind applications, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 77&78 283—295
- HONG, S.R., CHOI, S.B., HAN, M.S., 1992. Vibration control of a frame structure using electro-rheological fluid mounts, *International Journal of Mechanical Sciences* 44, 2027 – 2045
- JOHNSON, A.R., CHEN, T.K, 2002. Thermo-mechanical analyses of dynamically loaded rubber cylinders, presented at a meeting of the Rubber Division, American Chemical Society, Pittsburg, E.U.A.
- KERGOURLAY, G. 2004. Mesure et prédiction vibroacoustique de structures viscoélastiques, Thèse de doctorat (Mécanique) - Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux, Ecole Centrale Paris, Paris, France, 152p.
- KORENEV, B.G., REZNIKOV, L.M., 1993. Dynamic Vibration Absorbers: Theory and Technical Applications, John Wiley and Sons.
- LESIEUTRE, G.A., MINGORI, D.L., 1989. Direct time-domain, finite element modelling of frequency-dependent material damping using augmenting thermodynamic fields, *Structural Dynamics and Materials Conference*, AIAA paper 89-1380-CP
- LESIEUTRE, G.A., AND GOVINDSWAMY, K.M., 1995 Finite Element Modeling of Frequency-Dependent and Temperature-Dependent Dynamic Behavior of Viscoelastic Materials in Simple Shear, *International Journal of Solids and Structures* , Vol. 33, No. 3, pp. 419-432.
- LIENHARD, J.H. IV, LIENHARD, J.H. V. 2004. A heat transfer textbook - Third edition, Phlogiston Press, Cambridge - MA, E.U.A.
- LIMA, A M. G., 2003. Procedimentos de Modelagem Numérica e Avaliação Experimental de Sistemas Estruturais Dotados de Absorvedores de Vibrações Viscoelásticas, Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia.
- LIMA, A.M.G., RADE, D.A., 2005. Modeling of structures supported on viscoelastic mounts using FRF substructuring, *Twelfth International Congress on Sound and Vibration*, Lisbon, Portugal.
- LIMA, A.M.G. 2007. Modélisation et optimisation robuste de l'amortissement viscoélastique de systèmes mécaniques, Tese de doutorado - Universidade de Franche-Comté, Besançon, France - Universidade Federal de Uberlândia.
- LIMA, A.M.G., RADE, D.A., LÉPORE NETO, F.P., 2009. An efficient modeling methodology of structural systems containing viscoelastic dampers based on frequency response function substructuring, *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing* 23, 1272—1281

MARKOWICZ, A., BOURMISTROVA, A., SUBIC, A. 2005. Shape Optimization of Damping Liners on Vibrating Panels, Proceedings of the International Congress on Modelling and Simulation - Advances and Applications for Management and Decision Making.

MERLETTE, N. 2005. Amortissement des caisses automobiles par des films minces viscoélastiques pour l'amélioration du confort vibratoire, Thèse de doctorat - Ecole Centrale de Lyon, Lyon, France, 219 p.

NASHIF, A.D., JONES, D.I.G., HENDERSON, J.P. 1985. Vibration Damping, John Wiley & Sons, New York, E.U.A., ISBN 978-0471867722

OLIVEIRA, B.A., 2008. Desenvolvimento de um isolador de vibração pseudoelástico, Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas - Universidade de Brasília.

RAO, M.D., 2003. Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes, Journal of Sound and Vibration 262, 457-474

RITTEL, D, 1999. On the conversion of plastic work to heat during high strain rate deformation of glassy polymers, Journal of Mechanics of Materials 31, 131-139

RITTEL, D. 2000. An investigation of the heat generated during cyclic loading of two glassy polymers. Part I: Experimental, Journal of Mechanics of Materials 32, 131-147

RITTEL, D. 2000. An investigation of the heat generated during cyclic loading of two glassy polymers. Part II: Thermal Analysis, Journal of Mechanics of Materials 32, 149-159

SALDARRIAGA, M.R.V., 2007. Atenuação de Vibrações em Máquinas Rotativas Flexíveis Usando Materiais Viscoelásticos nos Suportes, Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Uberlândia.

SALENÇON, J., 1983. Viscoélasticité, Presse des Ponts et Chaussées, Paris.

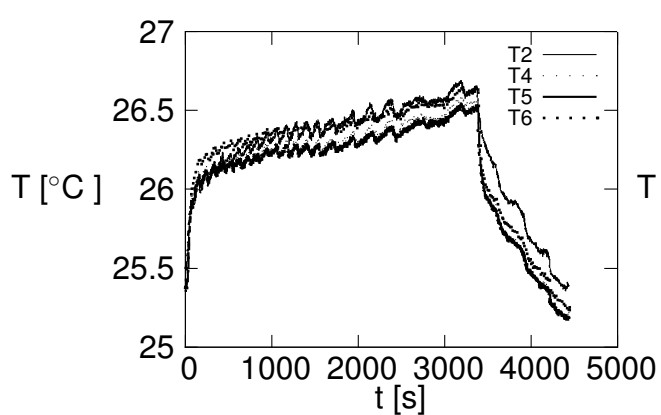
STORN, R., 1996. System Design by Constraint Adaptation and Differential Evolution, Technical Report TR-96-039, ICSI.

THEISEN, K.M. 2006. Aplicação do Princípio da Correspondência Elasto-viscoelástica para previsão de Deformabilidade de Misturas Asfálticas, Dissertação de Mestrado (Engenharia Civil) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

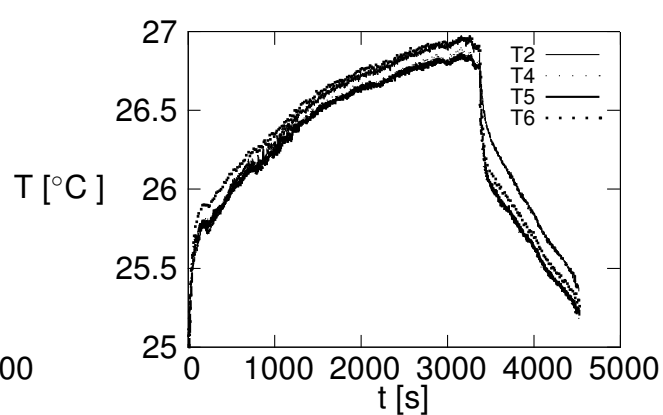
THIONNET, A. 2007. Calcul de l'élévation de température due à la dissipation plastique au sein d'une éprouvette de traction, Gazette du club ZéBuLoN 22, Ecole des Mines de Paris, 2-11.

VANDERPLAATS, G.N. 2005. Numerical Optimization Techniques for Engineering Design, Fourth Edition Vanderplaats Research and Development, Inc., Colorado Springs, E.U.A., 465p., ISBN 0 944956 03 3

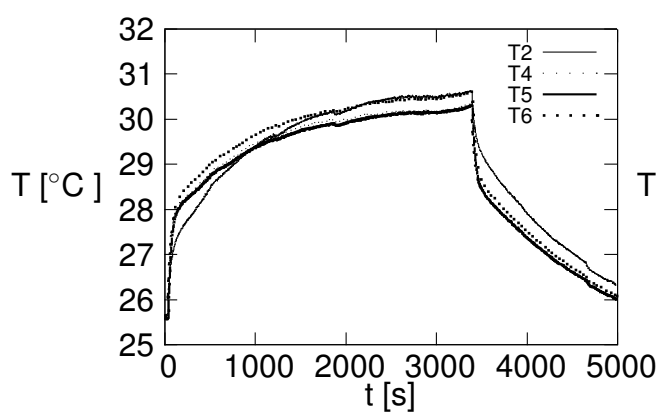
ANEXO A – Resultados dos ensaios



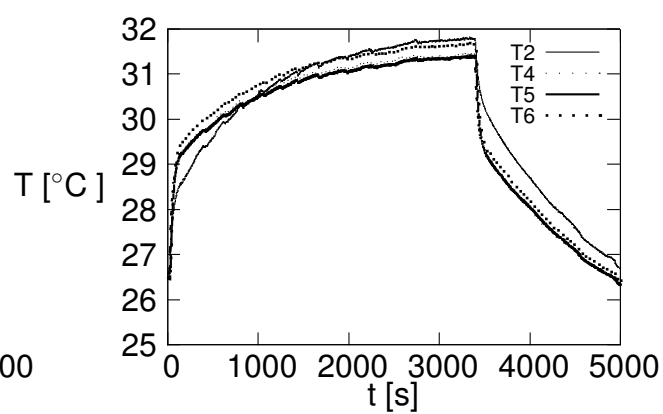
Ensaio a - $f = 10$ Hz, $u_0 = 0.5$ mm



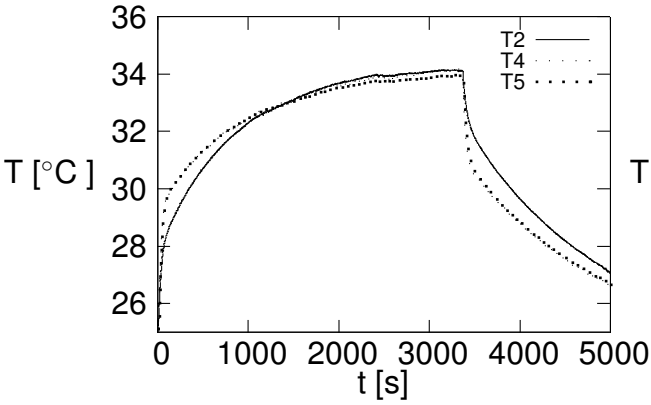
Ensaio d - $f = 15$ Hz, $u_0 = 0.5$ mm



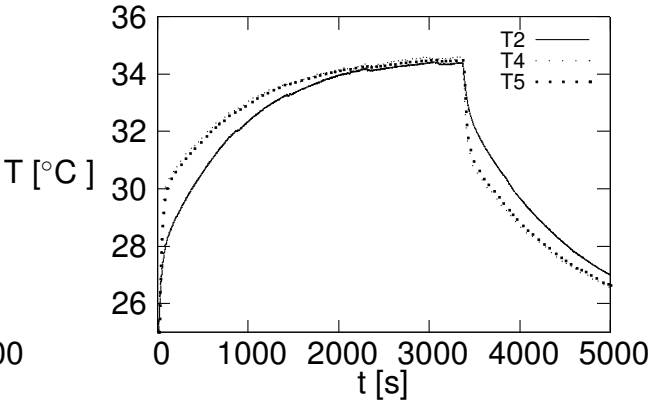
Ensaio b - $f = 10$ Hz, $u_0 = 1$ mm



Ensaio e - $f = 15$ Hz, $u_0 = 1$ mm



Ensaio c - $f = 10$ Hz, $u_0 = 1.5$ mm



Ensaio f - $f = 15$ Hz, $u_0 = 1.5$ mm

ANEXO B – Parâmetros do material *3M VHB 9469*

Este anexo inclui as curvas representativas do módulo de armazenamento e do fator de perda do material *VHB 9469*TM, que foi utilizado para a realização do corpo de prova. Os dados apresentados foram obtidos a partir do boletim técnico da *3M* referente aos materiais *VHB 9460*, *9469* e *9473* e utilizados no procedimento de simulação numérica e de ajuste dos parâmetros do modelo.

A Fig. B.1 mostra o nomograma do material *VHB 9469*. Para cada frequência de teste (10 e 15 Hz) foram lidos no nomograma os valores de G' (MPa) e de η correspondentes às seguintes temperaturas: 0, 10, 20, 30, 40 e 50 °C. Em seguida foi utilizada a função `spline` do *MATLAB* para realizar uma interpolação polinomial a partir destes dados, assim permitindo a implementação no *ANSYS* da lei constitutiva do material sob forma tabulada e com um número de pontos suficiente para descrever de forma satisfatória a evolução dos parâmetros do material com respeito à temperatura.

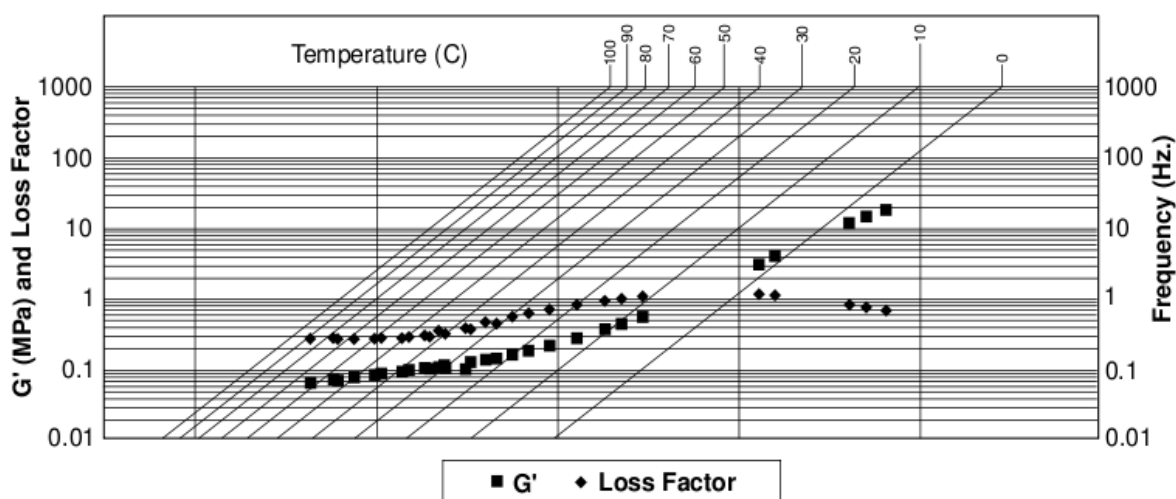


Figura B.1: Nomograma do material *VHB 9469*TM (adaptado do boletim técnico da *3M* (2003))

A Fig. B.2 mostra as curvas do módulo complexo e do fator de perda em função da temperatura obtidas por interpolação polinomial a partir dos dados experimentais

e a Tab. B.1 apresenta os valores das propriedades térmicas e da densidade do material.

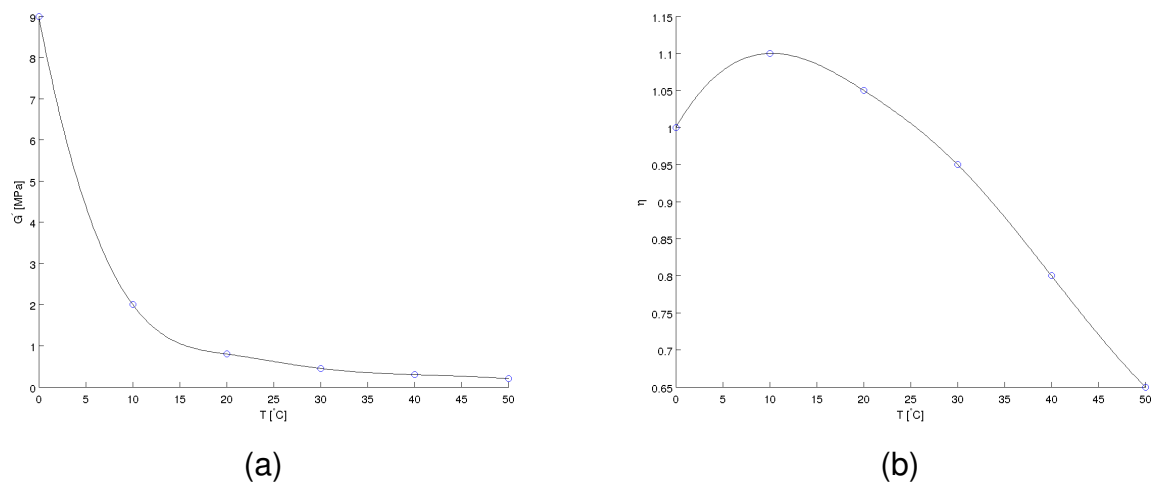


Figura B.2: Módulo de armazenamento (a) e fator de perda (b) do material *VHB 9469*TM para $f = 10$ Hz

Tabela B.1: Propriedades do material *VHB 9469*TM (fonte: boletim técnico da 3M, 2003)

ρ [kg.m ⁻³]	C_P [J.kg ⁻¹ .K ⁻¹]	k [W.m ⁻¹ .K ⁻¹]
1000	2000	0.16