

SIGEO KITATANI JÚNIOR

Modelagem matemática e simulação numérica para
solução de problemas de interação fluido-estrutura
utilizando metodologia de fronteira imersa



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2009

Modelagem matemática e simulação numérica para solução de problemas de interação fluido-estrutura utilizando metodologia de fronteira imersa

*Este exemplar corresponde à proposta de dissertação a ser defendida
por Sigeo Kitatani Júnior e aprovada pela comissão julgadora.*

Uberlândia, 03 de Setembro de 2009

Banca examinadora

Prof. Dr. José Luiz Gasche	FEIS - UNESP	_____
Prof. Dr. Santos Alberto Henriquez Remigio	FAMAT - UFU	_____
Prof. Dr. Domingos Alves Rade	FEMEC-UFU	_____
Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto	FEMEC-UFU	_____

SIGEO KITATANI JÚNIOR

**Modelagem matemática e simulação numérica para
solução de problemas de interação fluido-estrutura
utilizando metodologia de fronteira imersa**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

Área de Concentração: **Transferência de Calor e
Mecânica dos Fluidos**

Orientador: **Aristeu da Silveira Neto**

*Durante a execução deste trabalho o autor
recebeu apoio financeiro da FAPEMIG.*

Uberlândia
2009

Aos meus pais, **Sigeo** e **Maria Antonieta**.

Agradecimentos

À Deus pela presença constante em meu caminhar.

Aos meus pais e minha família, pelo apoio incondicional ao longo de todo este caminho.

Ao Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto pela oportunidade, por ele acreditar, incentivar e apoiar sempre os alunos a quem ele orienta com tanta dedicação.

Ao pessoal do Laboratório de Mecânica dos Fluidos, MFLab, em especial aos estudantes Felipe Pamplona Mariano, João Marcelo Vedovoto, Leonardo de Queiroz Moreira, Márcio Ricardo Pivello, Marcos Lourenço, Millela Martins Villar Vale, Rafael Sene, Ricardo Vasconcelos Salvo e Tiago de Assis Silva, pela amizade e pelas discussões que tanto ajudaram no desenvolvimento deste trabalho.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, juntamente ao Programa de Pós-Graduação, pelo suporte e infra-estrutura dedicados para a realização de meus trabalhos.

À FAPEMIG, pelo suporte financeiro.

Em especial, à Meire, minha namorada, pelo amor, pela compreensão, pela força e confiança mas, principalmente, pelo incentivo.

Resumo

O presente trabalho tem como principal objetivo a aplicação do método multi-forçagem (MMF) para solução numérica tridimensional de problemas de interação fluido-estrutura, buscando-se garantir a condição de não-escorregamento na região da fronteira imersa. Para as simulações numéricas foi utilizado um código computacional multi-propósito em desenvolvimento no MFlab - Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia. Foram feitas modificações nesse código para que se pudesse validá-lo para solução de problemas com fronteira imersa e foi implementada uma rotina para solução de um problema de interação fluido-estrutura total. Além disso, foi desenvolvido um pacote de ferramentas computacionais que possibilitou instalar e melhorar o desempenho de um *cluster* do tipo *Beowulf* utilizado para o desenvolvimento das simulações numéricas em paralelo do presente trabalho. Utilizando o Método das Soluções Manufaturadas foram obtidas soluções sintetizadas para as equações de Navier-Stokes, o que possibilitou obter a ordem de convergência numérica do código computacional para problemas contínuos e a validação deste código para problemas envolvendo corpos imersos ao combinar a o método das soluções manufaturadas com a metodologia de fronteira imersa. Na sequência foi solucionado o problema de escoamento ao redor de uma esfera parada, cujos resultados foram comparados com referências empíricas, obtendo-se boa aproximação. Ainda para esse caso foi feita a avaliação da norma L_2 para as soluções numéricas obtidas nos pontos lagrangianos verificando a garantia da condição de não-escorregamento e feita uma análise da influência dos número de ciclos utilizados no método multi-forçagem. Foi verificado que a solução numérica obtida depende do número de ciclos o que faz com que seja necessário se estabelecer um critério de convergência para este método. Um segundo problema de interação fluido-estrutura total foi estudado. Consiste em um pêndulo simples imerso em um fluido que parte de uma dada posição angular inicial e oscila em torno da sua posição de equilíbrio, até parar. Para esse caso foram feitas análises quantitativas. Os resultados são preliminares mas coerentes com a física do problema, indicando que a metodologia é adequada para solução deste tipo de problema.

Palavras chave: *metodologia de fronteira imersa, método multi-forçagem, interação fluido-estrutura, pêndulo imerso, cluster Beowulf.*

Abstract

In this work, the combined multi-direct forcing and immersed boundary method (IBM) were presented to simulate fluid-structure interaction problems. The multi-direct forcing is used aim at satisfying the no-slip condition in the immersed boundary. For the numerical simulations was used a multi-purpose computer code that is being developed in the MFlab - Fluid Mechanics Laboratory of Federal University of Uberlândia. Tests are made to validate the numerical schemes and routines were implemented to simulate fluid-structures interaction problems. Furthermore, computational tools are developed to construct and manage and optimize the use of a Beowulf cluster where all the parallel simulations presented in this work were done. The Method of Manufactured Solutions has been used for order-of-accuracy verification in the computational fluid dynamics code. Two fluid-structure interaction problems were studied using this methodology. The first is a flow over a sphere for some Reynolds numbers. The results were compared to empirical results, obtaining satisfactory approximations. The second one is a immersed simple pendulum. For this problem the results are in agreement with physics. Indeed, these are preliminar results. New tests must be done to make progress in the methodology. Improvements are proposed in the IBM, in the fluid-structure model, in the turbulence model, in the method used to discretize the fluid domain. It is also proposed to apply the methodology to real problems as risers and valves.

Key-words: immersed boundary method, multi-direct forcing method, fluid-structure interaction, Navier-Stokes equations.

Lista de Figuras

2.1	Exemplos de topologias de malhas: (a) estruturada, Villar (2008); (b) não estruturada (MASUD; BHANABHAGVANWALA; KHURRAM, 2007).	6
2.2	Corpo qualquer imerso em fluido, representado por domínios fictícios.	8
2.3	Domínio discretizado: (a) malha adaptada ao contorno da geometria; (b) malha cartesiana.	8
2.4	Proposta de discretização do Método da Fronteira Imersa: malha euleriana e malha lagrangiana.	9
2.5	Ruína da ponte Tacoma Narrows, devido à condição de ventos constantes, em 1940, Campregher (2005).	18
2.6	Modelo em escala submetido à condição de <i>flutter</i> em ensaio de túnel de vento, Campregher (2005)	18
2.7	Modelo físico proposto por Campregher (2005): (a) vista lateral do escoamento; (b) vista transversal ao escoamento.	20
2.8	Esquema com a evolução temporal da solução do problema de interação fluido estrutura segundo a abordagem particionada (Campregher, 2005).	21
2.9	Esquema representativo do processo de solução iterativa entre os domínios de cálculo para o problema de interação fluido-estrutura (Campregher, 2005).	21
2.10	Malha não estruturada, Juaréz (2003)	23

2.11	Campo de pressão e vetores velocidade para diferentes tempos de simulação com viscosidade $\mu_f = 0,005[kg/m\ s]$, massa específica do fluido $\rho_1 = 1,1[kg/m^3]$ e massa específica do pêndulo $\rho_2 = 5[kg/m^3]$, Juarèz (2003).	24
2.12	História da posição angular dos pêndulos (superior esquerdo), velocidade angular (superior direito) e distância de separação entre os pêndulos (abaixo) com $\mu_f = 0,005[kg/m\ s]$, $\rho_1 = 1,1[kg/m^3]$ e $\rho_2 = 5[kg/m^3]$, Juarèz (2003).	24
2.13	Comparação entre resultados numéricos e experimentais, Martins; Silveira-Neto; e Steffen Jr. (2008).	26
2.14	Evolução da velocidade de processamento ao longo dos anos segundo a contribuição relativa ao desenvolvimento dos algoritmos e ao aprimoramento dos computadores - “hardwares”, U.S. Department of Energy, 2004, apud Vedovoto (2009).	27
2.15	Exemplo de arquitetura de processamento do tipo “Single Instruction / Single Data” - SISD, Campregher (2005)	28
2.16	Exemplo de arquitetura de processamento paralelo do tipo “Single Instruction / Multiple Data”, Campregher (2005).	29
2.17	Exemplo de arquitetura de processamento paralelo do tipo “Multiple Instruction / Multiple Data”, Campregher (2005).	29
2.18	Relação área x volume do processo de decomposição de domínio, Campregher (2005).	31
2.19	<i>Speedup</i> : índice de medição de performance de códigos computacionais paralelos, Marinho <i>et al.</i> (2004).	34
2.20	<i>Eficiência</i> : índice de medição de performance de códigos computacionais paralelos, (MARINHO <i>et al.</i> (2004)	35
2.21	Esquema de um cluster do tipo <i>Beowulf</i> , Campregher (2005).	37
3.1	Posição dos pontos eulerianos e lagrangianos, $\vec{x}$ e $\vec{x}_k$, Campregher (2005).	41
3.2	Representação do problema físico a ser resolvido: pêndulo imerso.	45

3.3	Representação esquemática do problema do pêndulo simples imerso em fluido: (a) representação dos esforços em que a esfera está submetida (tração, T , força peso, P , e força de contato com o fluido); (b) balanço de forças em relação ao centro de massa da esfera.	46
3.4	Representação do esforço e momento resultante sobre o pêndulo.	48
4.1	Arranjo de variáveis na malha computacional: (a) arranjo deslocado, em que as velocidades, indicadas por $\rightarrow$ e $\uparrow$, são calculadas nas faces das células, enquanto a pressão, indicada por $\circ$, no centro; (b) arranjo colocalizado, em que todas as variáveis são calculadas no centro das células.	52
4.2	Malhas lagrangianas: composta por elementos triangulares e por elementos do tipo quadriláteros (VEDOVOTO, 2009).	59
4.3	Detalhe dos parametros geométricos de um elemento de malhar do tipo triangular (VEDOVOTO, 2007).	60
4.4	Função distribuição do tipo gaussiana proposta por Unverdi e Tryggvason (1992) <i>apud</i> Campregher (2005).	61
5.1	Malha lagrangiana utilizada para simulações envolvendo soluções manufaturadas com fronteira imersa.	74
5.2	Malha $20 \times 10 \times 10$ dividida em três partições para o cálculo em paralelo. .	75
5.3	Solução manufaturada, solução em paralelo utilizando três computadores: (a) isovalores (0,3, 0, -0,3) para a componente de velocidade u , na direção x ; (b) isovalores (0,35, 0, -0,35) para a componente de velocidade v , na direção y ; (c) isovalores (0,7, 0, -0,7) para a componente de velocidade w , na direção z ; (d) isovalores (0,3, 0, -0,3) para a a pressão.	77
5.4	Erros absolutos no cálculo da solução numérica em paralelo utilizando três processadores: (a) componente de velocidade u ; (b) pressão.	80
5.5	Sinal temporal da componente u ao longo do tempo, na posição $\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, para o caso serial ($\bullet$) e paralelo ($-$)	81

5.6	Sinal temporal da pressão ao longo do tempo para o caso serial ($\square$) e paralelo ($\circ$)	81
5.7	Norma L_2 para a componente u , segundo as malhas: 20 pontos e 40 pontos -na direção x	82
5.8	Ordem de convergência da presente metodologia.	82
5.9	Norma L_2 para solução manufaturada para diferentes número de ciclos utilizados pelo método multi-forçagem: $N_{ciclos} = 1$ ($\blacktriangle$), 2 ($\blacksquare$), 4 ($\bullet$) e 8 ($\blacklozenge$).	83
5.10	Análise do efeito do número de ciclos utilizados pelo método multi-forçagem, N_{ciclos} : (a) comportamento da norma L_2 ; (b) comportamento do coeficiente de arrasto C_d	88
5.11	Coeficientes C_l e C_s para escoamento sobre esfera, para diferentes números de ciclos utilizados no método multi-forçagem.	89
5.12	Coeficiente de arrasto C_d obtido numericamente variando-se o número de Reynolds.	90
5.13	Coeficientes C_d , C_l e C_s ao longo do tempo, obtidos numericamente para a esfera imersa, $Re = 500$	90
5.14	Evolução temporal de isosuperfícies de Q (0,075), coloridos de acordo com a magnitude da componente vorticidade Wx , para os instantes: (a) 5s,(b) 10s,(c) 20s,(d) 30s,(e) 50s,(f) 70s.	91
5.15	Malhas utilizadas para as soluções preliminares do problema de fluido-estrutura: (a) malha euleriana com 1.127.850 volumes; (b) malha lagrangiana, com 864 elementos tipo quadriláteros.	98
5.16	Resultados da avaliação prévia do modelo estrutural: (a) número de Reynolds função do tempo; (b) norma L_2 função do tempo.	99
5.17	instantes de tempo escolhidos para análise do escoamento gerado a partir do movimento do pêndulo: (a) identificados sobre o gráfico da posição angular em função do tempo ; (b) respectivas posições das esferas nestes instantes.	100

5.18	Distribuição do campo de pressão no instante $t = 0,05s$	101
5.19	Distribuição da componente de velocidade u para o instante $t = 0,05s$. . .	101
5.20	Distribuição da componente de velocidade v para o instante $t = 0,05s$. . .	102
5.21	Distribuição da componente de velocidade w para o instante $t = 0,05s$. . .	102
5.22	Distribuição da componente de vorticidade em y , no instante $t = 0,05s$. . .	103
5.23	Distribuição da viscosidade turbulenta normalizada no instante $t = 0,05s$. .	103
5.24	Isosuperfície $Q = 300$ no instante $t = 0,05s$	104
5.25	Distribuição do campo da componente de velocidade u para o instante $t = 0,20s$	104
5.26	Distribuição do campo da componente de velocidade v para o instante $t =$ $0,20s$	105
5.27	Distribuição do campo da componente de velocidade w para o instante $t = 0,20s$	105
5.28	Detalhe da esteira formada à esquerda da esfera evidenciado pelos vetores velocidades traçados segundo um plano à jusante da esfera.	106
5.29	Detalhe da esteira sendo desviada para baixo da esfera à medida que ela desacelera, evidenciado pelos vetores velocidades traçados no plano perpen- dicular a y , para $x = 0,186 m$	106
5.30	Distribuição do campo de pressão para o instante $t = 0,20 s$	107
5.31	Distribuição do campo da componente da vorticidade, em y , para o instante $t = 0,20 s$	108
5.32	Distribuição do campo da viscosidade turbulenta normalizada para o in- stante $t = 0,20 s$	109
5.33	Instante de inversão do campo de pressão, $t = 0,60 s$	110
5.34	Distribuição do campo da componente de velocidade u para o instante $t = 0,60s$	111

5.35 Distribuição do campo da componente de velocidade v para o instante $t = 0,60s$	112
5.36 Distribuição do campo da componente de velocidade w para o instante $t = 0,60s$	113
5.37 Distribuição do campo da componente de vorticidade W_y para o instante $t = 0,60s$	113
5.38 Distribuição do campo da viscosidade turbulenta normalizada para o instante $t = 0,60s$	114
5.39 Distribuição do campo da variável Q , para o instante $t = 0,60s$	114
5.40 Detalhe do escoamento ao redor da esfera que compõe o pêndulo no instante $t = 0,60s$	115
5.41 Isosuperfícies de Q para o instante $t = 0,6s$, evidenciando a formação de estruturas rotativas do tipo anéis e grampo de cabelo.	115
5.42 Distribuição do campo da componente de velocidade u para o instante $t = 0,65s$	116
5.43 Distribuição do campo da componente de velocidade v para o instante $t = 0,65s$	116
5.44 Distribuição do campo da componente de velocidade w para o instante $t = 0,65s$	117
5.45 Distribuição do campo de pressão para o instante $t = 0,65s$	117
5.46 Distribuição do campo da componente de vorticidade W_y para o instante $t = 0,65s$	118
5.47 Distribuição do campo da viscosidade turbulenta normalizada para o instante $t = 0,65s$	118
5.48 Detalhe do escoamento ao redor da esfera no plano $z = 0,099m$	119
5.49 Detalhe do escoamento ao redor da esfera no plano $z = 0,11m$	119

5.50	Isosuperfícies de Q para o instante $t = 1,0 s$, evidenciando a formação de estruturas rotativas do tipo anéis e grampo de cabelo.	120
5.51	Detalhe do escoamento, representado por vetores velocidade traçados no plano $z = 0,094 m$	121
5.52	Posição angular do pêndulo pelo tempo para diferentes valores de coeficiente de viscosidade.	122

Lista de Tabelas

5.1	Coefficiente de arrasto Cd calculado numericamente e comparado com dados experimentais, equações 5.13 e 5.15.	86
5.2	Variáveis cinemáticas para o pêndulo no instante $t = 0,05s$	95
5.3	Variáveis cinemáticas para o pêndulo no instante $t = 0,20s$	97
5.4	Variáveis cinemáticas para o pêndulo no instante $t = 0,60s$	107
5.5	Variáveis cinemáticas para o pêndulo no instante $t = 0,65s$	110
5.6	Variáveis cinemáticas para o pêndulo no instante $t = 1,00s$	112

Lista de Símbolos

Letras Gregas

α	Constante de multiplicação
$\alpha_{y'}$	Aceleração angular do pêndulo
δ	Delta de Dirac
ΔV_k	Volume elementar de uma partícula lagrangiana de fluido
ϕ	Variável qualquer dependente do espaço e do tempo
γ	Interface entre um fluido e um corpo qualquer, constante de multiplicação
Γ	Contorno do domínio de fluido
μ	Coefficiente de viscosidade dinâmico
μ_t	Viscosidade turbulenta
ω	Região ocupada por um corpo qualquer
Ω	Região ocupada por um fluido
$\omega_{y'}$	Velocidade angular em torno do eixo z'
ρ	Massa específica
ρ_{esf}	Massa específica da esfera
ρ_f	Massa específica do fluido
θ	Posição angular do pêndulo
θ_0	Posição angular inicial do pêndulo
τ	Direção tangencial
τ_{ij}	Tensor de Reynolds

Letras Latinas

c	Constante de multiplicação
C_d	Coeficiente de arrasto
C_L	Coeficiente de sustentação
C_p	Coeficiente de pressão
C_s	Constante de Smagorinsky
E	Força de empuxo
f	Termo forçante, função qualquer
F	Força lagrangiana
F_f	Força fluido-dinâmica
$\vec{f}$	Força euleriana
g	Aceleração da gravidade
$h(u)$	Função predominantemente difusiva
$I_{y'}$	Momento de inércia em relação ao eixo y'
$j(u)$	Função predominantemente advectiva
k	Energia cinética turbulenta
l	Escala de comprimento
L_2	Norma L_2
m_{esf}	Massa da esfera
M_O	Momento em torno do ponto O
M_{res}	Momento resultante
N	Índice do ponto lagrangiano
p	Pressão
P	Força peso
p^*	Pressão modificada do método do passo fracionado
r	Direção radial
R	Raio de rotação
r_{esf}	Raio da esfera
Re_D	Número de Reynolds baseado no diâmetro

S_{ij}	Taxa de deformação
t	Tempo
T	Força de tração
u	Componente de velocidade na direção x
U_L	Velocidade da fronteira imersa
U_k	Velocidade de um ponto lagrangiano na direção x
$\tilde{u}$	Velocidade estimada
v	Componente de velocidade na direção y
V_{esf}	Volume da esfera
V_k	Velocidade de um ponto lagrangiano na direção y
w	Componente de velocidade na direção z
W_k	Velocidade de um ponto lagrangiano na direção z
x	Coordenada x
x'	Eixo de coordenada não inercial
$\vec{x}$	Coordenada de um volume de controle elementar
$\vec{x}_k$	Vetor posição de um ponto lagrangiano
$\vec{x}_O$	Vetor posição do centro de rotação do pêndulo
x_M	Coordenada x do centro de massa da esfera
y	Coordenada y
z	Coordenada z
z'	Eixo de coordenada não inercial
z_O	Coordenada z do centro de rotação da esfera
z_M	Coordenada z do centro de massa da esfera

Subscritos

ana	Analítico
i, j, k	Índices tensoriais
K	Pontos da malha lagrangiana
num	Numérico

Sobrescritos

t	Correspondente ao tempo t
$t + \Delta t$	Correspondente ao tempo $t + \Delta t$
x	Direção x
y	Direção y
z	Direção z
$*$	grandeza adimensional

Operadores

Δ	Variação discreta
∂	Derivada parcial
$\sum$	Somatório
$\int$	Integral
$-$	Valor médio
$'$	Termo de flutuação
$-$	Variável obtida através de processo de filtragem

Siglas

CNAB	Crank-Nicolson-Adams-Bashfort
MCNAB	Modified Crank-Nicolson-Adams-Bashfort
BDF	Backward difference Formula
CESDIS	Center of Excellence in Space Data and Information Science
CFD	Computational Fluid Dynamics
CN	Crank-Nicolson
CNLF	Crank-Nicolson-Leap Frog
FEM	Finite Element Method
FSI	Fluid Structure Interaction
GPU	Graphical Processor Unit

IBM	Immersed Boundary Method
LF	Leap Frog
LES	Large Eddy Simulation
MFI	Método da Fronteira Imersa
MFlab	Laboratório de Mecânica dos Fluidos da UFU
MFV	Modelo Físico Virtual
MIMD	Multiple Instruction/Multiple Data
MMX	Multiple Extension
MSIP	Modified Strong Implicity Procedure
PRAM	Parallel Random Acces Machine
SBDF	Semi-Backward difference formula
SIMD	Single Instruction/Multiple Data
SISD	Single Instruction/Single Data
UFU	Universidade Federal de Uberlândia
VIV	Vortex-Induced Vibration

Sumário

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	xiv
Lista de Símbolos	xvii
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	2
1.2 Metodologia	3
2 Revisão bibliográfica	5
2.1 O método da fronteira imersa	7
2.2 Interação fluido-estrutura	16
2.3 O problema do pêndulo	23
2.4 Processamento paralelo	26
2.4.1 Arquiteturas de processamento paralelo	27
2.4.2 Metodologias de paralelização	30
2.4.3 <i>Clusters</i> do tipo Beowulf	36

3	Modelagem matemática	39
3.1	Formulação para o domínio do fluido	40
3.2	O método da fronteira imersa	40
3.3	Equações globais para a turbulência	41
3.4	Modelagem da turbulência	42
3.4.1	Hipótese de Boussinesq	43
3.5	Equacionamento para o modelo estrutural	45
4	Metodologia numérica	51
4.1	Arranjo de variáveis na malha computacional	51
4.2	Discretização temporal	53
4.3	O método de projeção	55
4.4	Representação do domínio lagrangiano	57
4.4.1	Cálculo da força euleriana	60
4.4.2	Cálculo da força lagrangiana	62
4.5	O método de forçagem direta	64
4.6	Abordagem numérica do modelo estrutural	65
5	Resultados	71
5.1	Método das soluções manufaturadas	72
5.1.1	Validação da solução numérica em paralelo	75
5.1.2	Análise de ordem de convergência	76
5.1.3	Análise do método Multi-Forçagem	79
5.2	Escoamento ao redor de esferas estacionárias	84
5.3	Resultados preliminares de interação fluido-estrutura	92

5.3.1	Análise do escoamento ao redor do pêndulo	94
6	Discussão dos resultados	123
7	Conclusões	125
8	Perspectivas para próximos desenvolvimentos	127
	Referências Bibliográficas	129

CAPÍTULO I

Introdução

A Mecânica dos Fluidos experimentou grande desenvolvimento quanto à capacidade de solução de problemas, seja experimentalmente ou numericamente mas, principalmente, quanto à segunda abordagem, podendo até se dizer que houve uma mudança de paradigmas nesta área de estudos científicos. Isto foi possibilitado devido à evolução exponencial da tecnologia da informática, o que em poucos anos multiplicou a capacidade de processamento e de armazenamento dos computadores digitais. Desde então, pesquisadores da área de CFD (*Computational Fluid Dynamic*) têm investido esforços para desenvolver metodologias que são transformadas em ferramentas, a fim de solucionar problemas que envolvem movimento de fluidos, tendo como principal objetivo resolver problemas práticos da engenharia moderna. Devido aos excelentes resultados provindos das simulações numéricas, as empresas, em geral, têm se convencido da importância do desenvolvimento destas ferramentas, o que explica o aumento de investimento de recursos de empresas públicas e privadas nesta área científica, nos últimos anos.

Devido a parceria academia-indústria é cada vez mais comum o desenvolvimento e o uso de ferramentas numéricas para solução de problemas de engenharia, na área de fluidos. Em geral, trata-se de escoamentos complexos ao redor de corpos com geometrias também complexas. Para resolver estes problemas são muitas as metodologias empregadas, cada uma delas direcionada a uma classe de problemas específicos.

Problemas de interação fluido-estrutura estão frequentemente presentes na natureza e nos problemas de engenharia. Por isso, o conhecimento da dinâmica de interação entre um

fluido e uma estrutura é de grande importância para se adotar medidas visando a melhoria da performance de processos que envolvam esse tipo de interação. Modelos matemáticos baseados na imposição da presença da estrutura via condição de contorno apresentam a dificuldade de resolver as equações do fluido em um domínio complexo e variável no tempo, seja pela forma geométrica e/ou pela movimentação da estrutura. Uma alternativa que permite o uso de uma única malha cartesiana para a solução de problemas que envolvem movimento ou deformação de estrutura que interagem com fluido, sem a necessidade do processo de remalhagem, é dada pelo Método da Fronteira Imersa (MFI), proposto por Peskin (1972). No MFI: (1) considera-se um domínio retangular fixo de solução das equações do fluido que inclui a região ocupada pela estrutura imersa e, (2) modela-se um termo forçante definido no contorno da estrutura e acrescido às equações do fluido para impor a presença da estrutura.

O objetivo central deste trabalho é estudar o método *Multi-Direct Forcing*, aqui denominado método multi-forçagem, proposto por Wang; Fan; Luo (2007). Essa metodologia é baseada no método da fronteira imersa, em que o termo forçante é obtido de forma algébrica, sem o uso de um modelo físico. Em outras metodologias baseadas no Método da Fronteira Imersa, como é o caso do Modelo Físico virtual (MFV), a força de interface fluido-sólido é calculada a partir de um balanço de quantidade de movimento na fronteira. Isso torna o método “caro” do ponto de vista computacional e essa metodologia apresenta deficiência ao resolver problemas de fronteiras que se movem. Esses casos são fortemente dependentes do tempo e, sabe-se que nessas condições o MFV mostra-se deficiente ao representar a fronteira imersa, sendo necessário se utilizar passo de tempo muito pequeno, da ordem de 10^{-6} segundos, para representar com rigor a fronteira imersa. Tal deficiência é compensada quando se calcula o termo forçante de forma interativa, fazendo uso do método multi-forçagem. Além de garantir a condição de não deslizamento sobre a fronteira rígida, esse método possibilita aumentar o passo de tempo utilizado.

1.1 Objetivos

O presente trabalho trata da modelagem matemática e simulação numérica de problemas de interação fluido-estrutura. São problemas altamente dependentes do tempo, ex-

igem o acoplamento de várias metodologias para solução de um único problema, metodologias estas para a solução do problema do ponto de vista do fluido e da estrutura.

Muitos são os esforços para a compreensão dos problemas de engenharia que envolvem interação fluido-estrutura, que exigem competência tanto na área de fluido quanto de estrutura. Na maioria dos estudos de problemas desta natureza encontrados na literatura, os autores ou estão mais interessados no comportamento da estrutura, ou estão direcionados ao estudo do comportamento do fluido, de forma que simplificam sobremaneira o modelo matemático da estrutura ou o modelo matemático utilizado para modelar o comportamento do fluido. Dada a dificuldade para se obter a solução desta categoria de problemas, a presente dissertação propõe estudar o problema de interação fluido-estrutura composto por um pêndulo simples (constituído por uma esfera presa a um cabo) imerso em um fluido. Trata-se de um problema simples do ponto de vista geométrico e estrutural mas que resulta em um problema não linear, complexo, que envolve número de Reynolds variável com o tempo, altos gradientes de velocidade tanto no espaço quanto no tempo, além de inversões do campo de pressão.

De forma geral, os objetivos do presente trabalho são voltados para o desenvolvimento de habilidades para solução de problemas da mecânica dos fluidos através do uso de ferramentas computacionais. Isto envolveu o desenvolvimento de ferramentas para a montagem e administração de *clusters*, implementação de subrotinas com modelo de interação fluido-estrutura em um código computacional pré-existente, envolveu a execução de simulações com o programa computacional no cluster de computadores e a análise dos resultados obtidos.

1.2 Metodologia

A abordagem da presente dissertação é numérica. Faz-se uso de um código computacional desenvolvido no MFlab - Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia. É uma ferramenta multi-propósito, que está sendo desenvolvida para solução de problemas com fronteira imersa, interação fluido-estrutura, entre outros propósitos.

A ferramenta desenvolvida é baseada na metodologia de volumes finitos e resolve as equações de Navier-Stokes transientes e incompressíveis para um domínio cartesiano tridimensional. O código utiliza esquemas de segunda ordem para o tempo e para o espaço. O acoplamento pressão-velocidade é feito segundo o método dos passos fracionados. Para assegurar o melhor acoplamento entre o campo de velocidade e a pressão, as discretizações espaciais são feitas segundo a metodologia de malhas deslocadas. Para a solução dos sistemas de equações, tanto para a solução do campo de velocidades quanto para o campo de pressão, é utilizado o *solver* MSIP (Modified Strong Implicit Procedure). O código é processado em paralelo em um *cluster* Beowulf de 5 (cinco) microprocessadores Core-2 Quad™(2,4 GHz / 8,0 Gb RAM), foi totalmente desenvolvido com o uso da linguagem de programação Fortran 90 e a paralelização é feita pela biblioteca de paralelização Mpich2.

Para a montagem do cluster foi utilizada a distribuição do sistema operacional linux Rocks Cluster, distribuída gratuitamente por seus desenvolvedores. Foram criadas diversas ferramentas para a configuração do sistema operacional, para a instalação dos compiladores e para a administração do cluster. Foi criado também um guia rápido de instalação do cluster, disponibilizado ao final desse relatório de dissertação.

Antes de estudar o problema de interação fluido-estrutura, é feita a validação do código computacional para a solução de problemas que envolvem fronteira imersa. Para essa validação os resultados numéricos obtidos são comparados com soluções analíticas sintetizadas para as equações de Navier-Stokes, obtidas através do uso método das soluções manufaturadas.

A malhas eulerianas utilizadas nas simulações são geradas pelo próprio programa computacional, enquanto as malhas lagrangianas são geradas a partir de *softwares* comerciais. O programa lê os dados geométricos da malha lagrangiana a partir do arquivo de nós e conectividade fornecido pelo gerador de malha.

A visualização dos resultados é realizada através da plotagem de isosuperfícies tridimensionais e da distribuição dos campos de velocidade, pressão, vorticidade e outras grandezas, obtidas a partir de *softwares* comerciais.

CAPÍTULO II

Revisão bibliográfica

Devido ao rápido desenvolvimento da computação científica as técnicas e ferramentas computacionais são cada vez mais presentes na rotina de todas as pessoas, seja de forma direta ou indireta. Foi devido a esse desenvolvimento que as técnicas utilizadas para resolver problemas da mecânica dos fluidos evoluíram com a mesma velocidade, tando do ponto de vista computacional quanto experimental.

Essa evolução é observada de forma mais evidente na mecânica dos fluidos computacional, por estar intrinsecamente ligada às ferramentas e aos algoritmos computacionais. O crescimento foi tal que os desenvolvimentos atravessaram a fronteira da academia e possibilitam hoje a utilização dessas ferramentas na solução de problemas complexos de engenharia. Essa área de estudo é, por natureza, multi-disciplinar envolvendo engenheiros, matemáticos, cientistas da computação, entre outros, para a compreensão dos fenômenos físicos e estudo das características das equações matemáticas envolvidas - em geral, equações diferenciais.

Como a solução analítica geralmente não é possível de ser obtida, tais equações são discretizadas no tempo e no espaço, gerando sistemas lineares de equações algébricas a serem resolvidos numericamente. Sendo assim, toda simulação numérica prevê, na etapa de pré-processamento, a geração da malha computacional -resultado da discretização espacial das equações matemáticas. A tarefa de geração de malha não é nada trivial, sendo uma área de trabalho que envolve muitos estudiosos. No estudo de escoamentos multi-fásicos, por exemplo, é comum utilizar malhas adaptativas (*body-fitted meshes*).

Esse nome é dado às malhas que se adaptam em regiões de interesse do escoamento - geralmente regiões de interface. Deve-se entender como região de interface a região onde há o encontro de fluidos com propriedades diferentes ou de fluido com uma superfície sólida. É comum que nestas regiões os gradientes das propriedades do(s) fluido(s) ser(em) elevado(s), o que exige um refinamento local da malha, procurando manter a precisão dos cálculos nestas regiões críticas. O método dos elementos finitos, *Finite Element Method* - *FEM*, muito utilizado para resolver problemas de mecânica dos sólidos, é um exemplo de metodologia que utiliza com frequência a abordagem em que a malha se adapta às condições geométricas do problema em estudo. Por isso, as malhas computacionais podem ser classificadas quanto à sua topologia em malhas estruturadas e não estruturadas, como exemplificadas na Figura 2.1. As malhas estruturadas seguem uma lógica de discretização simples, sem levar em consideração as geometrias envolvidas no estudo ou as propriedades físicas do problema, enquanto as malhas adaptativas são criadas de forma a se adaptar à geometria ou às propriedades envolvidas no problema a ser resolvido.

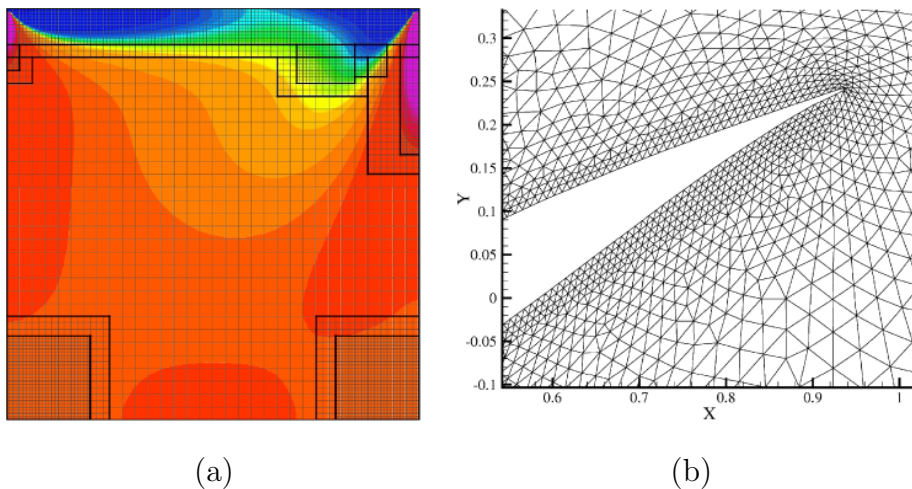


Figura 2.1: Exemplos de topologias de malhas: (a) estruturada, Villar (2008); (b) não estruturada (MASUD; BHANABHAGVANWALA; KHURRAM, 2007).

A malha computacional pode ser tão refinada, da ordem de milhares de pontos, e tão complexa do ponto de vista topológico que o tempo para se calcular e se armazenar suas propriedades é considerável se comparado com o tempo da solução das equações para o fluido. Assim, quanto mais complexas as geometrias envolvidas no problema, maior o custo computacional nesta etapa de solução do problema. O desafio se torna ainda maior

quando a geometria se move ou se deforma ao longo do tempo, interagindo com o fluido, classe de problemas também conhecidos como problemas de interação fluido-estrutura (*Fluid Structure Interaction* - FSI). Para esses problemas altamente dependentes do tempo ou se usa uma metodologia baseada em fronteira imersa ou, a cada passo do tempo computacional a malha deve ser recalculada, se adaptando à nova situação do problema, podendo ser necessário o uso de sistema de coordenadas generalizadas. Nestes casos, o método da fronteira imersa é uma ferramenta robusta já que o escoamento é sempre resolvido para uma malha cartesiana estacionária, independentemente da complexidade das geometrias envolvidas, se tais geometrias se movem e/ou se deformam ao longo do tempo.

São muitos os esforços para se realizar melhorias nas metodologias baseadas no método da fronteira imersa. O presente trabalho se empenha no sentido de estudar este tipo de metodologia e utilizá-la para resolver o problema de interação fluido-estrutura composto por um pêndulo simples imerso em um fluido. É um problema simples do ponto de vista geométrico e estrutural mas que resulta em um problema complexo, necessitando-se resolver o escoamento e a estrutura, de forma concomitante. Desta forma, nesse capítulo será feito um breve resumo do estado da arte a respeito das metodologias que usam fronteira imersa, bem como do problema de interação fluido-estrutura e processamento paralelo, com o intuito de fundamentar os assuntos discutidos no presente trabalho.

2.1 O método da fronteira imersa

Considera-se um fluido que ocupa a região Ω , da Figura 2.2, e ω a região ocupada por um corpo qualquer. Consideram-se também as fronteiras Γ e γ como sendo o contorno das respectivas regiões, Ω e ω . Para se estudar o escoamento do fluido ao redor deste corpo imerso, usualmente seria criada uma malha compreendendo a região do fluido - de tal forma a contornar a região do corpo imerso (Figura 2.3) e seriam resolvidas as equações de Navier-Stokes para cada ponto da malha.

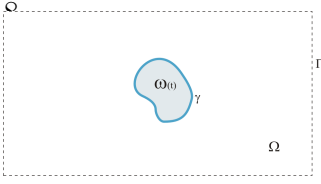


Figura 2.2: Corpo qualquer imerso em fluido, representado por domínios fictícios.

Outra opção consiste em resolver as mesmas equações de Navier-Stokes ao longo de todo o domínio, sendo que na região da interface faz-se uso de equações adicionais ou mesmo modificam-se as equações do fluido, de modo que esta região represente um corpo sólido. Trata-se da aplicação da técnica denominada domínios fictícios (*Fictitious Domain* - *FD*).

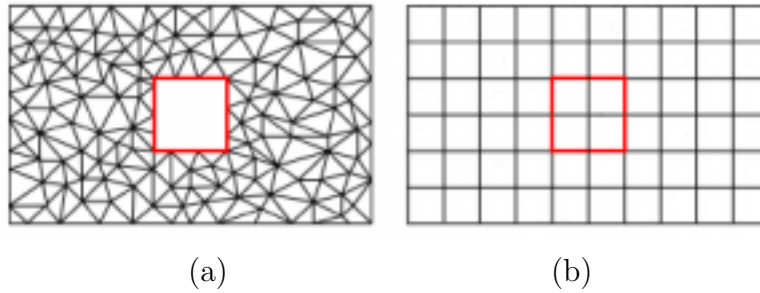


Figura 2.3: Domínio discretizado: (a) malha adaptada ao contorno da geometria; (b) malha cartesiana.

Em seu trabalho, Glowinski; Pan; Périaux (1998), dizem que essas técnicas foram inicialmente utilizadas por pesquisadores soviéticos para resolver equações diferenciais parciais, há mais de quarenta anos atrás. As primeiras metodologias baseadas em FD para solucionar problemas multi-fásicos ainda utilizavam a abordagem *body-fitted meshes* - mencionada no início deste capítulo - e geralmente utilizavam o método dos elementos finitos combinado com a aplicação de multiplicadores de Lagrange distribuídos na região de interface para simular o corpo imerso, como pode ser visto no trabalho de Glowinski et al. (1999) e discutido por Yu (2005).

Um dos trabalhos mais citados nesta área é o de Peskin (1972), no qual o pesquisador utiliza a técnica de domínios fictícios para a simulação de válvulas cardíacas. Este trabalho é pioneiro, uma vez que em sua metodologia a malha não se adapta à geometria do escoamento e a interface fluido-sólido é simulada a partir de um termo de força elástica -

é imposto ao escoamento um campo de força proporcional ao deslocamento da interface. Este trabalho é referência da origem do método da fronteira imersa. Tal metodologia faz uso de duas malhas, malha euleriana e malha lagrangiana (Figura 2.4). Nesta metodologia o autor utiliza o próprio fluido para simular o corpo imerso. Durante a solução do problema condições são impostas ao fluido na região de interface de forma que o fluido simule a presença de um corpo imerso nesta região. Desta forma, todos os cálculos para a solução do fluido são feitos utilizando a malha euleriana; a malha lagrangiana tem a única função de armazenar a posição dos pontos lagrangianos em relação às coordenadas da malha euleriana. Para o cálculo do campo de força elástica, considera-se que os N pontos discretos da malha lagrangiana estão unidos por forças elásticas, dadas por funções $f_{(X_1, \dots, X_N)}$, atuantes sobre os segmentos de retas que unem dois pontos adjacentes da malha lagrangiana. As forças elásticas são impostas através de termos forçantes nas equações de Navier Stokes. Após calcular as forças sobre os pontos da malha lagrangiana, faz-se uma distribuição da amplitude de tais forças sobre a malha euleriana nos pontos mais próximos correspondentes à malha lagrangiana - região onde foram estimadas as forças. Assim, cria-se sobre a malha euleriana um campo de força que corresponde às forças pontualmente calculadas, de forma discreta, sobre a malha lagrangiana.

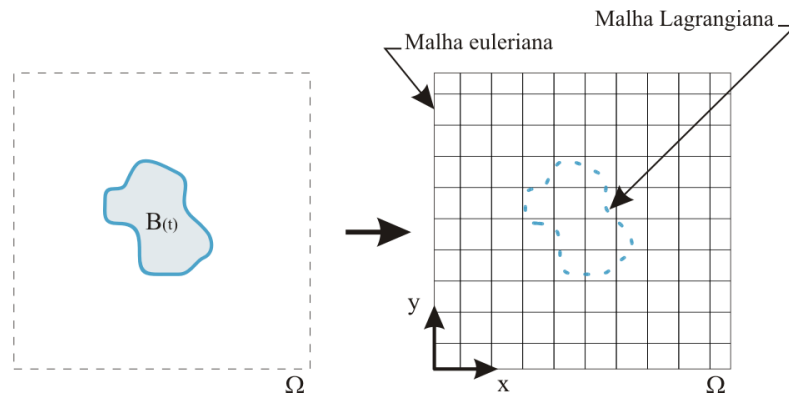


Figura 2.4: Proposta de discretização do Método da Fronteira Imersa: malha euleriana e malha lagrangiana.

São tantas as metodologias que utilizam a idéia do método da fronteira imersa que fica difícil enumerar os trabalhos em uma ordem cronológica, ou até mesmo citar todos os trabalhos desenvolvidos durante os últimos anos. O mais fácil seria organizá-los pela classe de problemas com os quais estão envolvidos como, por exemplo, problemas de inter-

ação fluido-estrutura, escoamentos multifásicos, etc. O Método da Fronteira Imersa pode também ser visto como um método de imposição da presença de um corpo ou interface por intermédio de um termo forçante para representar uma fronteira através do uso de malha “simples” como as malhas cartesianas.

É importante notar que, com a mesma facilidade com que se impõe a presença de um corpo imerso em um fluido, pode-se simular um conjunto de corpos imersos ou partículas (Glowinski *et al.*, 1999). Glowinski é autor de vários trabalhos nesta área, geralmente utiliza o método dos elementos finitos para a discretização espacial e faz uso de multiplicadores de Lagrange para a simulação da interface sólido-fluido, como já mencionado.

Ao invés de simular um corpo imerso pode-se simular também escoamentos multifásicos, como no trabalho de Unverdi e Tryggvason (1992). Neste trabalho os autores simulam o comportamento de bolhas, onde o termo de força é imposto com base na tensão interfacial calculada na interface dos fluidos, discretizado com diferenças finitas e fazendo uso de malhas deslocadas (ver seção 4.1). O método de discretização é de segunda ordem no espaço (diferenças finitas centradas) e primeira ordem no tempo (Euler). A principal contribuição deste trabalho é a proposta do uso de função indicadora para localizar a fronteira entre os fluidos. Um trabalho mais recente nesta mesma linha de estudo é proposto por Villar (2008). A proposta deste trabalho é desenvolver uma nova metodologia para tratamento de escoamentos bifásicos. Neste tipo de problema, em geral, a discretização espacial e temporal são muito restritivas. Desta forma, a autora faz uso de malha adaptativa. As regiões de refinamento são identificadas através da função indicadora, a qual estabelece a posição da fronteira - proposta por Unverdi e Tryggvason (1992), citado anteriormente - ou pela análise do campo de vorticidade, identificando as regiões propensas à formação de estruturas ligadas à turbulência. Além da malha se adaptar localmente, a autora faz uso de uma outra metodologia denominada *multi-grid*. Nesta metodologia a malha como um todo é “refinada” ou “engrossada” durante a solução do sistema de equações para correção da pressão, de modo a acelerar o processo de convergência do *solver* utilizado. A metodologia proposta também utiliza modelo de turbulência do tipo sub-malha para simulação de grandes escalas (*Large Eddy Simulation - LES*). Com essa metodologia a autora consegue segunda ordem de convergência para a velocidade e, no mínimo, primeira ordem para

a pressão, diminuindo consideravelmente o tempo de processamento se comparado com metodologias que fazem uso de discretizações espaciais convencionais - malha cartesiana, uniforme.

Goldstein *et al.* (1993) propuseram uma função capaz de relacionar a velocidade do fluido na interface com a velocidade da própria interface, sendo necessário o uso de duas constantes *ad hoc*, sendo uma para ajustar a frequência natural e a outra o fator de amortecimento. Tal método foi denominado *feedback forcing method*. Os autores não utilizam nenhuma função de distribuição para distribuir a força - que simula o corpo imerso - na malha do escoamento. Por isto, nesta metodologia, os pontos de aplicação da força imposta pelo corpo ao fluido deve ser coincidentes com os pontos da malha computacional utilizada para solução do problema do fluido. Melhorias ao método *feedback forcing* foram propostas por Saiki e Biringen (1996). Foram utilizadas discretizações de ordem mais elevada, garantindo o ganho em estabilidade do código numérico.

Mohd-Yusof (1997) propõe que a força imposta pela fronteira seja calculada com base na equação da quantidade de movimento do fluido na interface, sem a interferência de parâmetros ajustáveis. Este método foi batizado de *direct forcing method*. Esta metodologia requer algoritmos complexos para definir a posição da interface, além de interpolar as propriedades físicas das partículas de fluido vizinhas fazendo uso de *B-splines*. Naturalmente, os cálculos adicionais devidos à fronteira-imersa “encarecem” o código do ponto de vista computacional, ou seja, demanda maiores tempos de processamento. Entretanto, para a metodologia proposta pelo autor, este problema é atenuado devido ao fato que o autor faz uso da metodologia pseudo-spectral para solução do problema do fluido. Tais metodologias trabalham com transformações do tipo Fourier aplicada ao espaço físico e são muito mais baratas se comparadas com as metodologias que trabalham aplicando as equações diferenciais no espaço físico. Em outro trabalho Mohd-Yusof (1998) mostra a aplicabilidade da sua proposta para problemas que envolvem geometrias complexas.

Fadlun *et al.* (2000) fazem um breve histórico das metodologias mais conhecidas e que se baseiam no método da fronteira imersa, comparando-as. Ele compara, por exemplo, as metodologias propostas por Goldstein *et al.* (1993) e Mohd-Yusof (1998) e chega à conclusão de que a metodologia de Mohd-Yusof apresenta vantagem em relação a metodologia

de Goldstein devido ao menor custo computacional.

A metodologia de Mohd-Yusof foi empregada por Kim; Kim; Choi (2001) utilizando o método dos volumes finitos para a discretização do domínio computacional. A forma de interpolar os valores da velocidade na região da interface é modificada para minimizar os custos computacionais. A equação da continuidade bem como termos fonte e sumidouro são incorporados para tornar a metodologia mais consistente do ponto de vista físico. A grande vantagem da metodologia apontada pelos pesquisadores é a maior independência do número de pontos para a representação da geometria do corpo imerso.

Gilmanov *et al.* (2003) propõem a solução de escoamentos tridimensionais sobre esferas utilizando uma malha de elementos finitos triangulares para a representação da esfera e uma malha caresiana para o fluido. O termo forçante é avaliado segundo a normal à superfície da esfera.

Assim como Mohd-Yusof, Lima e Silva (2003) propuseram metodologias nas quais as forças envolvidas na fronteira imersa também são calculadas a partir do balanço de quantidade de movimento, denominado pelo autor Modelo Físico Virtual - MFV. No entanto este balanço é feito sobre uma partícula de fluido na superfície do corpo enquanto que na proposta de Mohd-Yusof (1998) o balanço é feito sobre a célula vizinha. Além disso, a interpolação da velocidade e a distribuição da força na interface são simplificadas a fim de minimizar os custos computacionais. Desta forma, a condição de não-escorregamento é imposta de forma indireta e não há a necessidade do uso de constantes *ad hoc* - a força na interface é calibrada por si só a partir dos parâmetros físicos do escoamento naquela região. O estudo é feito para bolhas e cilindros circulares imersos, em diversos regimes. Campregher (2005) estende a metodologia para três dimensões. Neste trabalho, propõe-se um modelo numérico que permite simular escoamentos ao redor de uma esfera tridimensional ancorada por molas, capaz de se movimentar sob a ação de forças induzidas pelo próprio escoamento. Vedovoto (2007) acrescentou ao código computacional a capacidade de simular escoamentos ao redor de geometrias arbitrárias tridimensionais e não deformáveis.

Enriquez-Remigio (2005) faz um resumo sobre as metodologias baseadas no método da fronteira imersa e que são utilizadas para o estudo de problemas envolvendo corpos rígidos

ou elásticos imersos em fluido, interesse do presente trabalho. As metodologias analisadas, bem como os resultados de suas investigações sobre as mesmas estão sumarizadas abaixo.

1. Termo forçante de Peskin (1972)

Desvantagens:

- Requer uso de constantes a serem ajustadas para representar a rigidez do corpo, o que implica o uso de pequenos passos de tempo.
- Uso de uma função de distribuição suave para o delta de Dirac e isto implica na representação alarguecida da fronteira imersa.
- Convergência de primeira ordem

Vantagens:

- Independência do termo forçante com a discretização espacial
- Os cálculos das forças fluidodinâmicas e torque são diretos.

2. Termo forçante de Goldstein *et al.* (1993)

Desvantagens:

- Requer o uso de constantes a serem ajustadas para representar a rigidez do corpo e a sua implicação no uso de pequenos passos de tempo.
- Uso de uma função de distribuição suave para o delta de Dirac e a implicação na representação alarguecida da fronteira imersa.

Vantagens:

- Independência do termo forçante com a discretização espacial.
- O cálculo das forças fluidodinâmicas e do torque é direto.

3. Termo forçante de Mohd-Yusof (1997)

Desvantagens:

- Necessidade da escolha dos pontos de aplicação do termo forçante.

- Necessidade de esquemas de interpolação para determinar a velocidade a ser usada nos pontos de aplicação do termo forçante.
- O cálculo da força fluidodinâmica e torque não é direto, pois depende da condição do movimento e geometria da fronteira.

Vantagens:

- Não requer constantes a serem ajustadas para impor a rigidez do corpo. Passo de tempo restrito pelo método utilizado.
- Independência do termo forçante com a discretização espacial.

4. Termo foçante de Lima e Silva (2003)

Desvantagens:

- Uso de uma função de distribuição suave para o delta de Dirac e a implicação na representação alarguecida da fronteira imersa.
- Convergência de primeira ordem

Vantagens:

- Não requer uso de constantes a serem ajustadas para a representar a rigidez do corpo. A princípio, o passo do tempo está restrito pelo método usado para resolvê-las.
- Independência do termo forçante com a discretização espacial.
- Os cálculos das forças fluidodinâmicas e torque são diretos.

5. Imposição da presença da interface através de células fantasmas

Desvantagens:

- Necessidade de processos de interpolação para determinar o estêncil associado aos pontos fantasmas que conservem a ordem de convergência do método.
- Aplicação de métodos eficientes para a resolução dos sistemas lineares pode sofrer baixa na ordem de convergência, quando aplicados para as novas equações modificadas.

Vantagens:

- Não requer um termo forçante e sim de uma modificação do estêcil para os pontos fantasmas.
- Representação da interface não é modificada.

6. Imposição da presença da interface através da reconstrução das células cortadas pela interface

Desvantagens:

- Necessidade de processos de modificação das células computacionais cortadas pela interface em células trapezoidais. Dependendo da localização e orientação local da interface, células trapezoidais de diferentes dimensões podem ser formadas.
- Problemas de generalização para simulações em três dimensões, devido à dificuldade da determinação das células interceptadas pela interface.
- Necessidade de processo de interpolação para a determinação das funções a serem usadas no cálculo do fluxo.
- Necessidade da condição de contorno para a pressão na interface.

Vantagens:

- Representação da interface não é modificada.
- Melhor representação da condição de contorno, por considerar células ao redor da interface que contorna o corpo.
- Melhores propriedades de conservação da massa e quantidade de movimento ao redor do contorno.

Um trabalho recente e de grande contribuição para a metodologia do tipo fronteira imersa é o trabalho de Wang; Fan; Luo (2008). Neste trabalho os autores propõem o uso de imposição direta da força de Mohd-Yusof (1997), de forma iterativa, denominando *multi-direct-forcing*. Este método é apresentado na seção 4.4.2. Neste trabalho a discretização do domínio é feita utilizando diferenças finitas de alta ordem e o autor prova a

robustez da metodologia proposta para garantir a condição de não-escorregamento através da simulação numérica direta de um problema de interação fluido-estrutura com múltiplas partículas. A metodologia utilizada no presente trabalho se baseia no método multi forçagem proposto pelos autores, por se tratar de um problema de fluido-estrutura, que é altamente dependente do tempo. Neste tipo de problema a geometria deve ser bem caracterizada em todos os passos de tempo, garantindo as características físicas do modelo numérico. Por este motivo esta metodologia se mostra bastante eficiente ao tratar problemas transientes, garantindo sua vantagem em relação a outros métodos como o MFV, uma metodologia muito bem colocada do ponto de vista físico mas que, no entanto, tem a desvantagem de trabalhar com passos de tempo muito pequenos e precisar de múltiplas interações no tempo para caracterizar a geometria imersa no fluido.

2.2 Interação fluido-estrutura

Interação fluido-estrutura (Fluid-Structure Interaction - FSI) pode ser entendida como sendo a influência mútua, entre o fluido e um corpo, ações estas que ocorrem de forma concomitante e fortemente acoplada. Fisicamente pode ser interpretada como sendo esforços de ação e reação entre a estrutura e o fluido devido à interação de um com o outro. Pode-se também dizer que a interação fluido-estrutura propicia transferência de energia entre a estrutura e o escoamento fazendo com que o sistema composto por eles encontre o estado de menor energia livre. Por isso, os modelos matemáticos utilizados para se resolver este tipo de problema devem considerar as equações para o movimento do fluido, as equações que descrevem o movimento e/ou deformação da estrutura e as relações de acoplamento entre elas. Estas relações de acoplamento são dadas pelas forças de ação e reação existente entre a estrutura e o fluido. A ação que a estrutura exerce sobre o fluido pode ser traduzida em condições de contorno ao se resolver as equações do fluido. Na seção anterior foram apresentadas metodologias que representam a ação do corpo sobre o fluido como sendo um campo de força imposto ao domínio de cálculo do fluido, na região de interface entre o fluido e a estrutura. A ação do fluido sobre a estrutura é dada pelas forças fluidodinâmicas que este exerce sobre a estrutura, as quais são responsáveis pelo

movimento e/ou deformação de tal estrutura.

Na natureza, muitos são os exemplos de interação fluido-estrutura como, por exemplo, o balançar das folhas das árvores sob os efeitos do vento, o sacolejo de uma embarcação em meio a ondas, a propulsão oferecida pelas pás dos hélices de um navio, etc. Da mesma maneira, há uma enormidade de problemas de engenharia que podem ser classificados como problemas de interação fluido-estrutura.

A engenharia civil da atualidade encontra grandes desafios para resolver os problemas de interação fluido-estrutura de projetos dos arranha-céu modernos. Em tais projetos existe uma enorme preocupação em se prever as oscilações sofridas pelas estruturas projetadas, quando submetidas às condições de ventos presentes na região onde se pretende construir tal estrutura. Desta forma, o levantamento das condições climáticas a que a estrutura será submetida bem como um projeto aerodinâmico detalhado são exigidos para o sucesso do projeto. Um exemplo comumente lembrado de projeto de construção civil fracassado é a ponte de Tacoma nos Estados Unidos (Figura 2.5). Tal ponte veio à ruína pois era submetida a uma condição de ventos a certa velocidade que provocava o desprendimento de vórtices na mesma frequência que uma das frequências naturais da estrutura da ponte. Tais vórtices podem ser observados em escoamentos a jusante de corpos imersos; são formados devido a origem de altas tensões no fluido, na região de contato entre os mesmos, tensões estas provenientes das deformações sofridas pelo fluido ao escoar sobre a estrutura imersa.

Na engenharia mecânica são muitos os exemplos que podem ser citados. Um exemplo de problema estudado mundo a fora recentemente é a oscilação das estruturas *off-shore*. Tais oscilações se dão devido às correntes marinhas sobre as estruturas submersas o que, assim como no problema da ponte em Tacoma, causa o desprendimento de vórtices.

Durante a segunda guerra mundial, muitos foram os esforços empenhados por engenheiros aeronáuticos para estudar problemas encontrados para projetar aviões cuja velocidade de cruzeiro eram cada vez maiores. Ao passar do regime transônico para o regime super-sônico a estrutura dos jatos eram submetidas a situação de vibrações tão intensas e severas que avariavam ou mesmo arruinavam a estrutura dos mesmos. A Figura 2.6 mostra um ensaio em túnel de vento de uma aeronave em escala submetida à condição de



Figura 2.5: Ruína da ponte Tacoma Narrows, devido à condição de ventos constantes, em 1940, Campregher (2005).

flutter, condição esta em que a estrutura da aeronave trabalha submetida a carregamentos que fazem com que a estrutura opere em regime instável. Além deste exemplo, existem várias situações em que o estudo do problema de fluido-estrutura é imperativo para a solução de problemas desta área da engenharia.



Figura 2.6: Modelo em escala submetido à condição de *flutter* em ensaio de túnel de vento, Campregher (2005)

Problemas de bio-engenharia também são comumente encontrados nesta área de pesquisa. Estudo do comportamento do sangue em veias, artérias e estruturas que compõem o sis-

tema circulatório, com a finalidade de desenvolvimento ou aprimoramento de válvulas, corações artificiais, etc, são encontrados em uma grande quantidade de trabalhos nos meios de divulgação.

O que se nota é que uma grande parte dos problemas de interação fluido-estrutura de engenharia listados acima são casos que envolvem a excitação de uma estrutura imersa em fluido, excitação esta provocada pela variação de quantidade de movimento do fluido ao interagir com a estrutura, a qual se movimenta de forma periódica, com a mesma frequência de desprendimento dos vórtices. Tal classe problemas é denominada problemas de vibração induzida por vórtices (*Vibration Induced by Vortex - VIV*) e, de fato, têm recebido grandes investimentos a nível mundial. Tal problema é complexo pois é altamente não linear - devido à interdependência entre o comportamento do fluido e da estrutura.

Como exposto por Campregher (2005), numericamente as metodologias utilizadas para solução deste tipo de problemas podem assumir duas abordagens: a simultânea ou monolítica (*Monolithic*) e a Particionada (*Partitioned*). A Monolítica resolve o problema do fluido e da estrutura, de forma implícita, ou seja, simultaneamente (Farhat; Lesoinne; LeTallec, 1998). Para isto as equações matemáticas que modelam o fluido, a estrutura e a interação entre eles devem ser resolvidas concomitantemente. Isto incorre em um grande sistema linear e grandes esforços computacionais. No entanto, os resultados são fidedignos. Uma segunda abordagem, também denominadas de Métodos Diretos ou Métodos Iterativos, é mais simples do ponto de vista numérico e computacional, trata o problema de fluido e da estrutura em separado e faz-se um acoplamento entre eles. Como mencionado no início desta seção, este acoplamento pode se dar na forma de condições de contorno, para o fluido, ou um campo de forças externas, para a estrutura. Esta metodologia é vantajosa quanto a sua implementação mas o fato de não resolver as equações de forma acoplada incorre em alguns prejuízos: menor estabilidade do código numérico e menor acurácia dos resultados obtidos. O problema de estabilidade é devido aos prováveis erros inseridos no processo de cálculo ao se transitar entre um domínio e outro, gerando o que se denomina de acumulação de energia. Em seu trabalho, Campregher (2005) propõe uma metodologia baseada no Modelo Físico Virtual para resolver o problema tridimensional composto por uma esfera ancorada por três molas, imersa em um escoamento (Figura

2.7).

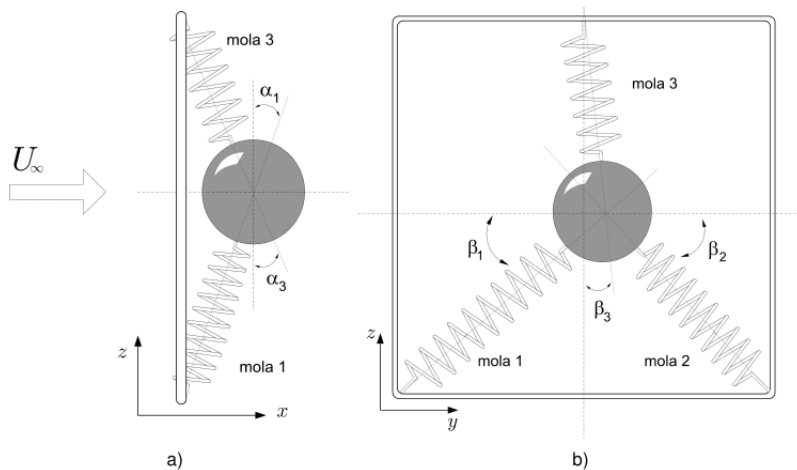


Figura 2.7: Modelo físico proposto por Campregher (2005): (a) vista lateral do escoamento; (b) vista transversal ao escoamento.

Para a solução deste problema, o autor utiliza o método dos volumes finitos para a discretização espacial, com aproximação de segunda ordem para os operadores diferenciais temporais e espaciais. O acoplamento entre as formulações para o fluido e para o corpo imerso se dá de forma a representar a interação entre eles. Este acoplamento é avaliado pela adição de um termo de força às equações para o domínio do fluido. O acoplamento é feito usando a abordagem particionada. Embora seja uma aproximação, traz maior liberdade de manuseio do código e possibilita o uso de malhas diferentes para discretizar os diferentes domínios, cada um com as suas devidas características. A Figura 2.8 mostra um esquema com a evolução temporal da solução do problema de interação fluido estrutura segundo a abordagem particionada.

Entretanto, o esquema particionado possui, em geral, problemas com estabilidade e acurácia da solução, como mencionado. Uma maneira de minimizar os efeitos de instabilidade é diminuir o passo de tempo. A acurácia pode ser melhorada impondo-se um processo iterativo entre os domínios até que a precisão seja atendida. Por outro lado, este processo pode encarecer bastante a solução do problema. A Figura 2.9 mostra um esquema representativo do processo de solução iterativa do problema de interação entre os domínios de cálculo, onde as iterações entre os domínios são indicadas pela letra I .

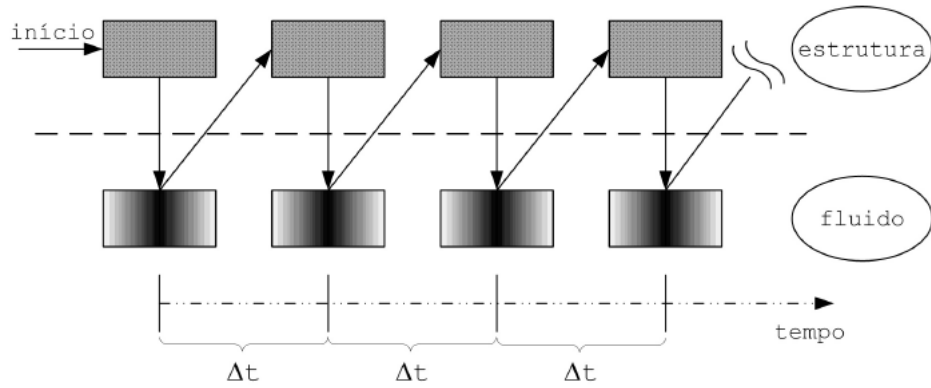


Figura 2.8: Esquema com a evolução temporal da solução do problema de interação fluido estrutura segundo a abordagem particionada (Campregher, 2005).

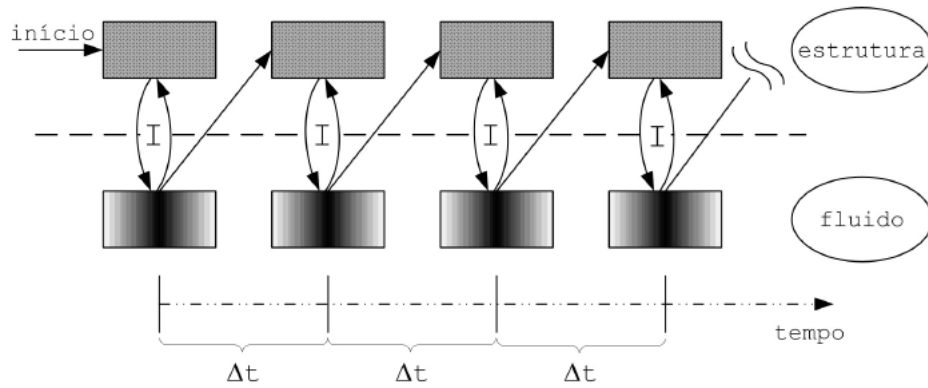


Figura 2.9: Esquema representativo do processo de solução iterativa entre os domínios de cálculo para o problema de interação fluido-estrutura (Campregher, 2005).

Do ponto de vista físico, segundo Soares Júnior (2004), quando dois ou mais sistemas físicos interagem entre si, a solução independente de qualquer um deles se torna impossível. Estes sistemas são denominados acoplados e a intensidade do acoplamento é função do grau de interação entre os sistemas componentes. Segundo Zienkiewicz e Taylor (2002) *apud* Soares Júnior (2004), formulações e sistemas acoplados são aqueles que podem ser aplicados a variáveis dependentes e domínios múltiplos, que usualmente descrevem fenômenos físicos nos quais: (a) nenhum dos domínios pode ser resolvido de forma separada dos demais; (b) nenhum conjunto de variáveis pode ser explicitamente eliminado ao nível de equações diferenciais. Além disso, segundo os autores os sistemas acoplados podem ser classificados segundo duas categorias:

- a. Problemas nos quais o acoplamento ocorre nas interfaces dos domínios, via condições de contorno. Geralmente estes domínios são representados por modelos matemáticos diferentes sendo, contudo, possível a hipótese de acoplamento entre eles e podem também ser discretizados por diferentes métodos.
- b. Problemas em que os domínios se sobrepõem, total ou parcialmente. Nestes casos, o acoplamento se dá no nível das equações matemáticas que modelam o fenômeno.

Os fenômenos físicos que envolvem problemas de interação fluido-estrutura são problemas, via de regra, acoplados e cujo acoplamento se dá através de uma interface. Desta forma, a rigor, devem ser resolvidos de forma acoplada e implícita, ou seja, do ponto de vista numérico, devem ser resolvidos utilizando a abordagem monolítica. No entanto, historicamente estes problemas têm sido resolvidos de forma explícita, utilizando abordagens particionadas. Isto se deve ao fato que os recursos computacionais até pouco tempo atrás tornavam a solução implícita destes problemas inviável. Com o avanço tecnológico e o aprimoramento das técnicas e dos algoritmos computacionais os modelos matemáticos propostos para a solução destes problemas tem sido cada vez mais representativos, mais fiéis aos problemas físicos os quais eles representam. Mesmo assim, ainda são muito simples do ponto de vista da engenharia. Segundo esta idéia, a maioria dos pesquisadores da parte de estrutura, por exemplo, simplificam ao máximo possível o modelo matemático do fluido. O contrário também acontece: os estudiosos da área de fluidos simplificam ao máximo o modelo estrutural, procurando simplificar o modelo como um todo. A despeito da redução do domínio computacional, o custo computacional é muito elevado para se resolver problemas de interação fluido-estrutura, pois o tempo característico da parte da estrutura é muito pequeno, e o número de equações envolvidas no problema do fluido é extremamente elevado. O resultado é a necessidade de se resolver sistemas de equações com milhares ou até milhões de equações para também milhares ou milhões de passos de tempo, resultando em semanas ou meses de cálculo. Por isso, simplificações que não infrinjam os critérios de acurácia são desejáveis, a fim de diminuir o tempo computacional. À medida que se busca melhorar a acurácia da solução dos problemas novas metodologias, novos algoritmos são propostos e desenvolvidos.

2.3 O problema do pêndulo

O pêndulo simples é um problema de interação fluido-estrutura clássico, muito utilizado por matemáticos e estudiosos da teoria do CAOS para desenvolvimento de teorias e métodos matemáticos. No entanto poucos são os trabalhos na área de CFD que resolvem este problema em específico.

Uma proposta para solução do problema do pêndulo imerso é o trabalho de Juarèz (2003). Este trabalho propõe resolver o problema de interação fluido-estrutura utilizando o método dos Elementos Finitos, com uma malha não estruturada (Figura 2.10) e para representação do corpo imerso faz uso do método dos domínios fictícios (com uso de multiplicadores de Lagrange na região da interface). Em seus resultados o autor mostra o resultado da interação entre dois pêndulos imersos com massas específicas diferentes interagindo entre si e com o fluido (Figura 2.11). O histórico com as posições angulares dos pêndulos, as velocidades angulares dos mesmos e a distância de separação dos pêndulos podem ser observados na Figura 2.12.

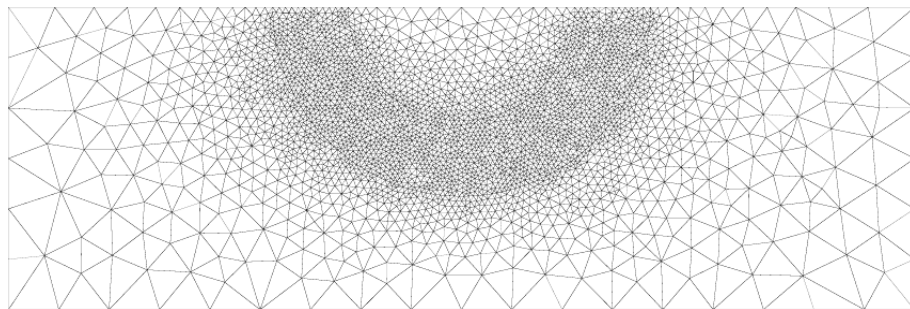


Figura 2.10: Malha não estruturada, Juarèz (2003)

No trabalho de Martins; Silveira-Neto; e Steffen Jr. (2008) os autores propõem resolver o problema do pêndulo através de dois modelos. Em um primeiro regime, para grandes deslocamentos angulares, o problema do pêndulo é tratado como um problema viscoso a baixos números de Reynolds, para o qual a força de arrasto é importante. Para deslocamentos angulares abaixo de $2,5^\circ$, é tratado como um sistema em amortecimento, onde o deslocamento da massa de fluido pela esfera será o amortecimento. Para o primeiro estágio, os autores utilizam o seguinte modelo:

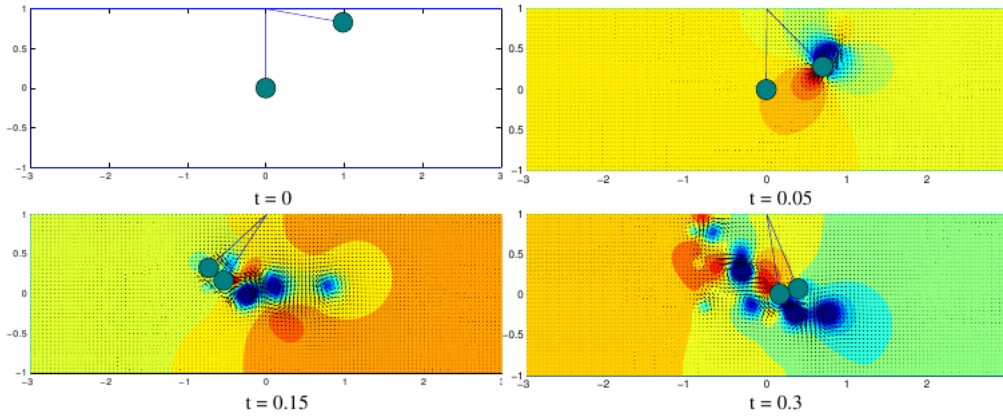


Figura 2.11: Campo de pressão e vetores velocidade para diferentes tempos de simulação com viscosidade $\mu_f = 0,005[kg/m\ s]$, massa específica do fluido $\rho_1 = 1,1[kg/m^3]$ e massa específica do pêndulo $\rho_2 = 5[kg/m^3]$, Juarèz (2003).

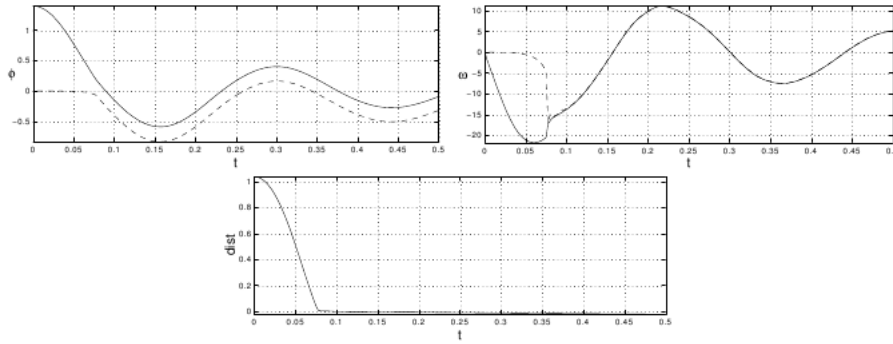


Figura 2.12: História da posição angular dos pêndulos (superior esquerdo), velocidade angular (superior direito) e distância de separação entre os pêndulos (abaixo) com $\mu_f = 0,005[kg/m\ s]$, $\rho_1 = 1,1[kg/m^3]$ e $\rho_2 = 5[kg/m^3]$, Juarèz (2003).

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha \sin \theta + \beta = 0, \quad (2.1)$$

em que

$$\alpha = \frac{g}{l} \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_e} \right), \quad (2.2)$$

$$\beta = \pm \frac{C_d \omega_e^2 l A_p}{2V_e l}, \quad (2.3)$$

em que g é a aceleração gravitacional, l o raio de rotação do pêndulo, ρ_f é a massa específica do fluido, ρ_e a massa específica da esfera, C_d é o coeficiente de arrasto, ω_e é a

velocidade angular do pêndulo, A_p é a área da esfera projetada no plano normal à direção do deslocamento da esfera e V_e é o volume da esfera. O coeficiente de arrasto é obtido através da correlação empírica:

$$C_d = \frac{24\mu_f}{\omega_e l D_e} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re_D}} + 0,4, \quad (2.4)$$

em que μ_f é a viscosidade dinâmica do fluido, D_e corresponde ao diâmetro da esfera e Re_D é o número de Reynolds, dado pela equação:

$$Re_D = \frac{\rho_f \omega_e l D_e}{\mu_f}. \quad (2.5)$$

Para o segundo estágio ($\theta < 2,5^\circ$), o modelo utilizado é:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta^* \frac{d\theta}{dt} + \alpha \sin \theta = 0, \quad (2.6)$$

em que

$$\beta^* = \pm \frac{C}{m_e l}, \quad (2.7)$$

em que m_e é a massa da esfera.

O problema é resolvido utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Os resultados numéricos são comparados com dados experimentais, apresentando boa concordância, como apresentado na Figura 2.13.

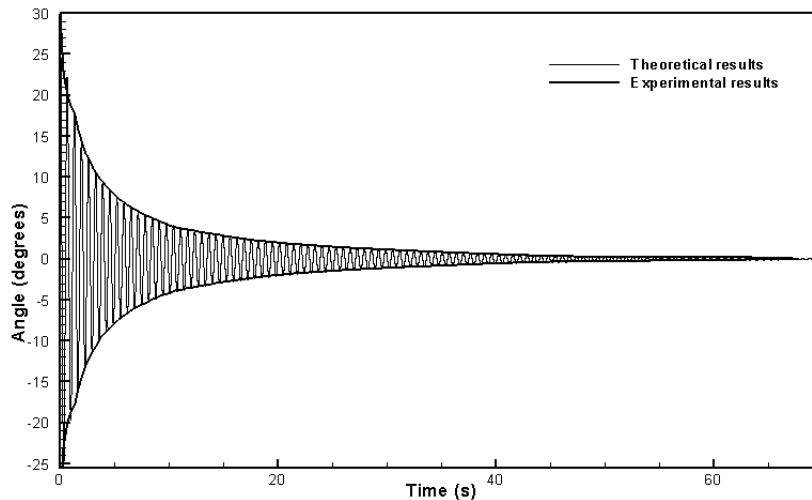


Figura 2.13: Comparação entre resultados numéricos e experimentais, Martins; Silveira-Neto; e Steffen Jr. (2008).

2.4 Processamento paralelo

São cada vez maiores os investimentos em novas arquiteturas de computadores, devido à crescente demanda de máquinas capazes de processar volumes cada vez maiores de informações, e menores tempos de CPU. Tal evolução dos computadores digitais tem superado todas as expectativas. Durante todo este processo de evolução das máquinas muitos paradigmas foram quebrados e muitos atalhos neste crescimento foram criados. Inicialmente, havia um consenso de que os grandes problemas só poderiam ser resolvidos com super computadores. No entanto, a evolução dos computadores pessoais tem ocorrido a taxas muito maiores do que os computadores de grande porte, o que incentivou o investimento em metodologias que utilizam processamento via computadores pessoais para a solução de problemas científicos. São cada vez maiores os incentivos em metodologias de processamento. Se for feita uma análise do poder computacional dos processadores desenvolvidos observa-se que a velocidade de processamento destes componentes continuam aumentando mas com uma taxa cada vez menor. Em oposição a este fato, recentemente estes processadores tiveram grande aumento no que se diz respeito a capacidade de processamento, pois estão sendo desenvolvidos com a filosofia de multi-processamento. No momento, os esforços estão sendo empenhados em resolver os problemas de comunicação entre os diversos núcleos de processamentos existentes em uma unidade de processamento.

“Moore’s Law” for MHD simulations

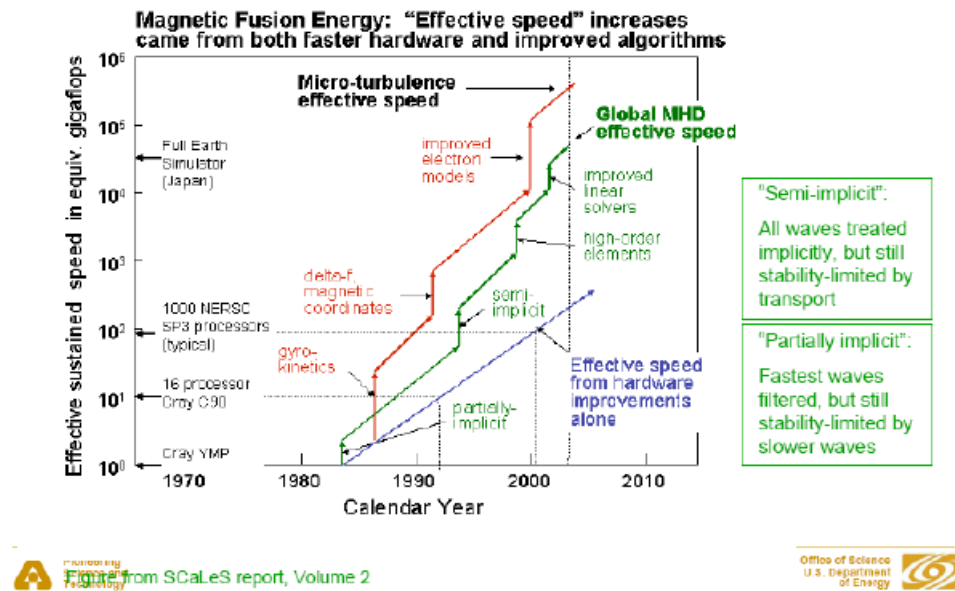


Figura 2.14: Evolução da velocidade de processamento ao longo dos anos segundo a contribuição relativa ao desenvolvimento dos algoritmos e ao aprimoramento dos computadores - “hardwares”, U.S. Department of Energy, 2004, apud Vedovoto (2009).

É importante observar que este processo ocorre não somente pelo desenvolvimento das máquinas. A renovação dos métodos computacionais contribui muito para a evolução dos resultados conseguidos através dos cálculos computacionais. Com o aumento do volume de dados envolvidos nos cálculos, por exemplo, técnicas de armazenamento e de transferência tiveram que ser desenvolvidas. A Figura 2.14 (U.S. Department of Energy, 2004, apud Vedovoto (2009)) mostra a contribuição da evolução dos métodos numéricos para o avanço na velocidade de cálculo dos computadores.

2.4.1 Arquiteturas de processamento paralelo

Segundo Michael Flynn (1972) apud Campregher (2005), a teoria de processamento paralelo teve início muito antes da efetiva construção dos supercomputadores e *clusters*. Em seu artigo, Flynn (1966) classifica os tipos de arquiteturas de processamento, ficando essa classificação conhecida como *Taxonomia de Flynn*.

A arquitetura mais simples é a conhecida como “Single Instruction / Single Data”, SISD, na qual uma única instrução, referenciada por “Single Instruction”, é realizada é realizada pelo processador por ciclo de *clock*, com uma única entrada de dados, “Single Data”. Na prática trata-se de um processamento serial convencional, ilustrado na Figura 2.15.

Já a arquitetura de processamento “Single Instruction / Multiple Data” - SIMD, Figura 2.16 é uma arquitetura do tipo paralela, quando uma única instrução é realizada utilizando dados diferentes. Segundo Campregher (2005), esta classificação abrange a tecnologia MMX (“MultiMedia eXtension”) de alguns processadores modernos e também os processadores vetoriais do tipo CRAY.

A terceira classificação feita por Flynn é a “Multiple Instruction / Single Data - MISD”, processamento quando se realiza múltiplas instruções sobre um único dado.

Por último, a arquitetura paralela, em todos os âmbitos, nomeada como “Multiple Instruction / Multiple Data” - MIMD, ocorre quando todos os processadores agem de forma independente, sobre os diferentes dados. De maneira lógica, estes processadores necessitam estar interligados por uma rede, compartilhando os dados e sincronizando o processo de cálculo, Figura 2.17.

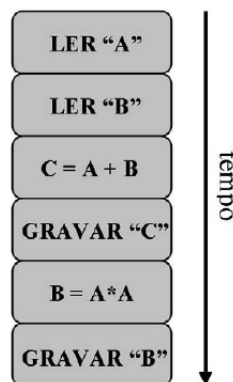


Figura 2.15: Exemplo de arquitetura de processamento do tipo “Single Instruction / Single Data” - SISD, Campregher (2005)

Os algoritmos evoluíram de tal forma que não mais se pode classificar de forma simples os tipos de processamento de dados, como proposto pela Taxonomia de Flynn, ficando esta classificação apenas para exemplificar os tipos básicos de processamento.

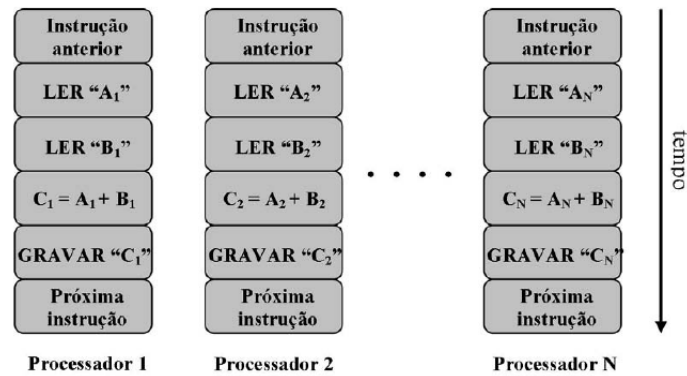


Figura 2.16: Exemplo de arquitetura de processamento paralelo do tipo “Single Instruction / Multiple Data”, Campregher (2005).

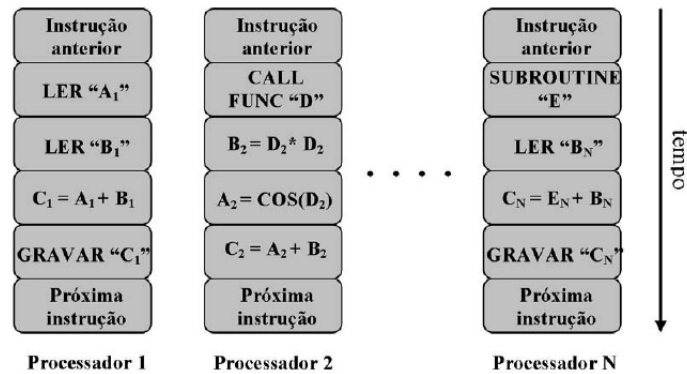


Figura 2.17: Exemplo de arquitetura de processamento paralelo do tipo “Multiple Instruction / Multiple Data”, Campregher (2005).

Ainda dentro da classe de problemas que lidam com processos do tipo MIMD, pode-se utilizar a memória do computador de duas formas: memória distribuída, onde cada processador possui sua própria memória e realiza operações sobre ela e memória compartilhada, onde vários computadores compartilham a mesma memória.

A forma mais rudimentar de processamento paralelo existe quando se divide um problema de tamanho N em N computadores. Este raciocínio é lógico, no entanto, equivocado. Este conceito só funciona em máquinas ideais, onde se desconsidera o uso de memória PRAM (Parallel Random Access Machine), ou seja, o caso em que os computadores têm acesso ilimitado à memória, ignorando o tempo de acesso às mesmas. Na prática, o custo de acesso a memória remota é milhares de vezes maior que o acesso a uma memória local. A este efeito de custo de acesso à memória é que inviabiliza o processo de paralelização

quando ocorre o denominado *overhead* e é o que limita o número de processadores utilizados para resolver um problema de forma paralela. Partindo da mesma idéia, ao se distribuir uniformemente o volume de dados a ser processado entre os computadores não significa que estes computadores gastarão o mesmo tempo para processar as suas respectivas informações. Além destes fatos, deve-se levar em consideração o poder computacional individual de cada unidade de processamento pois ao se montar um *cluster* de computadores o mesmo pode ser feito com computadores de mesma capacidade de processamento, ou seja um *cluster* homogêneo, ou com computadores de capacidade computacional diferente, *clusters* não homogêneos. A distribuição de carga em problemas paralelos não é uma tarefa trivial, principalmente quando se utiliza *clusters* não-homogêneos.

2.4.2 Metodologias de paralelização

Como mencionado, a forma como se dividem as tarefas entre os diversos processadores é o fator que determina o desempenho de um programa paralelo; a forma em que os computadores se comunicam, a quantidade de informações transmitidas, a forma em que se divide o domínio computacional são todos fatores que irão determinar o nível de sincronismo entre os computadores e, por fim, o tempo computacional. O ideal seria que todos os problemas de programação paralela recaíssem em problemas em que os processos executados entre os diversos computadores fossem totalmente independentes e a comunicação se desse apenas no início e no final de todo o processo de cálculo, problemas conhecidos como *embarrassingly parallel*. Entretanto, estes casos são muito particulares. Em geral, independentemente do conceito ou dos padrões de paralelização, ou bibliotecas utilizadas, a solução dos problemas reais exige muita troca de informação durante o processo de cálculo. Por isto, cada tipo de problema exige a proposta de uma metodologia de paralelização. Assim, deve-se avaliar todos os efeitos físicos, geométricos e numéricos e recursos computacionais disponíveis antes de se propor uma metodologia de paralelização e, enfim, a estrutura de dados de um código computacional para resolver um problema numérico de forma paralela. Via de regra, paralelizar um código serial sem que se tenha planejado a versão paralela incorre em ter que refazer toda a estrutura de dados do código e reescrever grande parte deste.

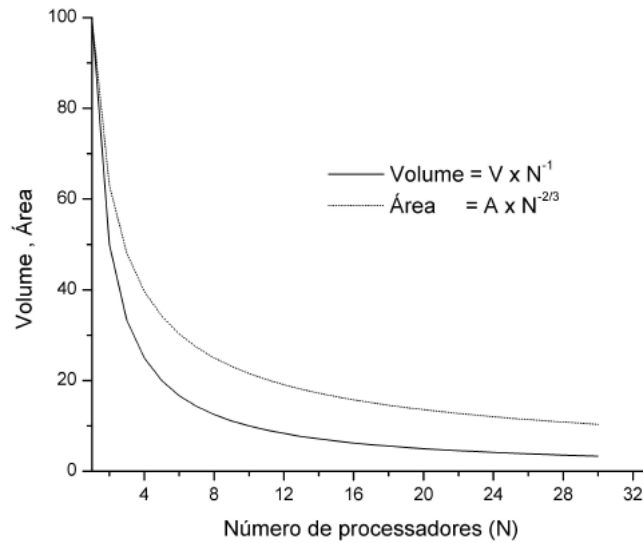


Figura 2.18: Relação área x volume do processo de decomposição de domínio, Campregher (2005).

Uma possível forma de paralelização é dividir (particionar) o domínio entre os diversos processadores. Esta técnica é conhecida como “*domain decomposition*” (decomposição de domínio). Outra opção é dividir as funções a ser executadas sobre este domínio, chamada “*functional decomposition*” (*decomposição de tarefas ou funções*). A primeira abordagem é a mais utilizada em sistemas de memória compartilhada enquanto a segunda em máquinas de memória compartilhada, a fim de minimizar o problema de acesso a memória.

Considere um problema físico definido por um volume, discretizado em x volumes de controle, o volume e a área superficial deste domínio resultam em, respectivamente, $V = x^3$ e $A = 6x^2$. Ao se dividir este domínio em N subdomínios menores os mesmos possuirão volume $V_N = x^3/N$ e área $A_N = 6x^2/N^{2/3}$. A grosso modo, a carga de processamento atribuída a cada processador é proporcional ao volume de cada subdomínio enquanto que a troca de informações é proporcional às novas áreas superficiais inerentes ao processo de subdivisão. À medida que mais processadores são adicionados, o volume decresce mais rapidamente que a área. Isto significa que para cada unidade de processamento que se adiciona, o tempo gasto com troca de informações é cada vez mais substancial em relação ao tempo de processamento efetivo. A Figura 2.18 mostra duas curvas, a do volume e a da área superficial, em função do número de divisões do domínio, evidenciando o efeito mencionado acima.

A troca de informações entre os sub-domínios pode ser classificada segundo os tipos de comunicação:

- local ou global,
- estruturada ou não estruturada,
- estática ou dinâmica,
- sincronizada ou não sincronizada.

Na comunicação local cada processo¹/processador se comunica apenas com os seus respectivos processos/processadores enquanto que na comunicação global exige-se a comunicação com vários processos/processadores que não sejam exatamente seus vizinhos. Um exemplo de problema que exige comunicação global é o processo de cálculo de uma integral de convolução, caso em que cada termo é calculado utilizando valores de todo o domínio de cálculo. No entanto, existem técnicas para minimizar o problema de comunicação.

Na forma estruturada, os dados a serem transmitidos seguem uma lógica simples, um padrão de fácil entendimento, como uma grade ou uma árvore (Campregher, 2005), enquanto que no modelo não estruturado os dados podem seguir padrões arbitrários, quase que aleatórios.

A comunicação estática se dá quando as identidades dos dados a serem trocados não variam ao longo da simulação. Por outro lado, quando estas variam, utiliza-se a nomenclatura “comunicação dinâmica”. Em uma comunicação sincronizada as operações de troca de informações entre os processadores são executadas de uma maneira coordenada entre as partes envolvidas, onde cada uma das partes não realiza sua operação sem a contrapartida da outra. No modo não sincronizado, um processador recebe ou envia informações a outros processadores, sem que haja a cooperação do outro (CAMPREGHER, 2005).

¹Quando se deseja paralelizar uma série de instruções, geram-se *processos*, para os quais especificam-se suas instruções e especificam-se qual(is) processo(s) cada processador irá receber. Desta forma, um mesmo processador pode executar um ou mais processos e cada um destes processos tem os seus respectivos vizinhos, que podem não ser os mesmos.

Como exposto, a eficiência de um código computacional paralelo depende, de forma direta, do tempo gasto nas trocas de informações entre os computadores envolvidos no cálculo. Sendo assim, utilizam-se alguns índices de medição de eficiência de um código computacional. O primeiro, denominado **speedup** (Figura 2.19) trata da razão entre o tempo computacional demandado por um processador para realizar um conjunto de instruções e o tempo computacional utilizado por N processadores para a realização das mesmas instruções. Pode-se obter então o *speedup* através da Equação 2.8. Todo programa computacional que utiliza metodologia paralela possui trechos onde as instruções são realizadas de forma serial. Segundo a lei de Amhdal, se um programa possui uma parte serial que apresenta $1/S$ do tempo total de execução, diz-se que o speedup máximo que pode ser atingido é de S . Por exemplo, um programa que possui 20% das instruções do seu código em serial poderá atingir o speedup máximo de 5.

$$S(N) = \frac{T_S}{T_N}, \quad (2.8)$$

em que T_S é o tempo gasto pelo programa quando utilizado apenas um processador e T_N o tempo gasto por N computadores/processadores.

O segundo indicador, a **eficiência**, Figura 2.20, é conseguido variando o tempo computacional à medida que se varia o número de processadores, dado pela equação 2.9. Através da curva de eficiência fica evidente a perda da eficiência computacional à medida que se acrescenta computadores envolvidos no cômputo.

$$E(N) = \frac{S(N)}{N}. \quad (2.9)$$

Quando em escala de percentagem, este índice também é chamado de **desempenho**.

O termo **escalabilidade** é utilizado para se referir quando um código computacional tem a capacidade de aumentar o seu *speedup* à medida que mais processadores são adicionados ao processo de cálculo. Esta característica é muito importante, principalmente para os códigos utilizados para resolver problemas que lidam com volume de dados muito grandes, como é o caso em que se deseja executar uma simulação com a metodologia DNS

(Direct Numerical Simulation - Simulação Numérica Direta²). Caso contrário, o tempo computacional é inviável.

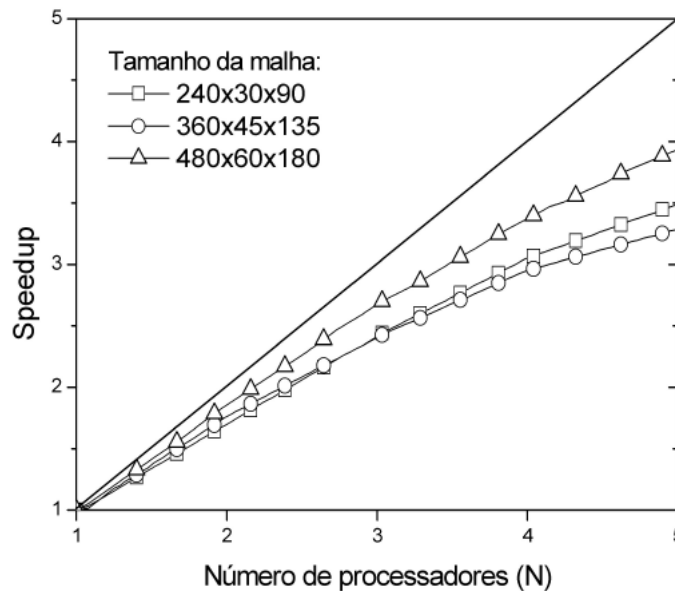
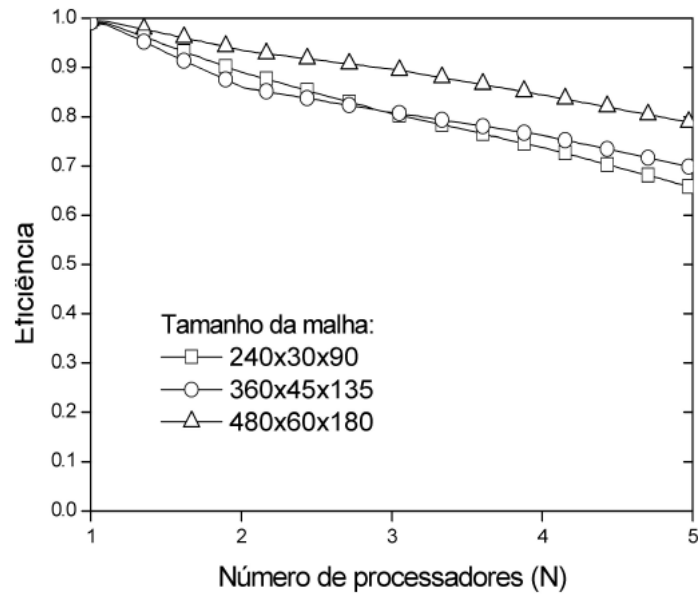


Figura 2.19: *Speedup*: índice de medição de performance de códigos computacionais paralelos, Marinho *et al.* (2004).

Vale lembrar que estes são apenas alguns exemplos clássicos da literatura de metodologias de paralelização. Um tipo de paralelização que está em voga, sendo explorada no momento, é a programação do tipo CUDATM/GPU. CUDA é um tipo de linguagem de programação utilizado para gerar programas computacionais a serem executados em unidades de processamento gráficos (GPU), ou seja, a serem executadas nos processadores presentes nas placas de vídeo dos computadores. As unidades de processamento existentes nas placas de vídeo modernas tem performance extremamente elevadas se comparadas ao processador principal do computador. Além disso, estes *hardwares* são multi-processados, chegam a possuir 240 núcleos de processamento, enquanto os processadores comuns possuem até 4 núcleos. Em termos de velocidade real de processamento, uma placa de vídeo chega a ter o poder de 1 *TF* (um teraflop), ou seja, um bilhão de operações matemáticas em um único segundo. Outra característica importante deste tipo de *hardware* é a arquitetura

²DNS é a metodologia utilizada para resolver problemas que envolvem turbulência e que a malha e o passo de tempo são tão pequenos que se calcula todos as freqüências/escalas do escoamento - não é necessário o emprego de modelo de turbulência.



).

Figura 2.20: *Eficiência*: índice de medição de performance de códigos computacionais paralelos, (MARINHO *et al.* (2004))

das memórias utilizadas. Diferentemente da memória RAM (Random Access Memory - memória de acesso aleatório), a memória principal de um computador, as placas de vídeo possuem vários níveis de memória, memórias estas de alta velocidade. Esses componentes são máquinas de cálculo multi-processadas e otimizadas. A evolução deste componente se deu devido à grande demanda de jogos com efeitos tridimensionais, o que fizeram com que a corrida internacional das indústrias de entretenimento substituíssem os simples componentes de renderização de imagem por máquinas de criação de realidade virtual - dado que estes *hardwares* fazem renderização de imagens em tempo real. A principal deficiência desta metodologia está na quantidade de memória disponíveis nestes equipamentos. Os equipamentos com maior capacidade de memória tem 2 GB, dois gigabytes, de memória compartilhada para os 240 núcleos enquanto um computador pessoal pode ter 8 GB de memória. A segunda deficiência é a exigência de um nível técnico elevado para se criar programas para estes equipamentos. Como se trata de equipamentos altamente otimizados, dedicados para executar renderização de imagens e criados por poucas empresas no mercado, a linguagem de programação bem como os interpretadores destas linguagens são específicos para cada empresa. Apesar disto, vendo a demanda por computação de alto

desempenho, estas empresas estão adequando as arquiteturas destes equipamentos a fim de resolver problemas genéricos de forma que já é possível se comercializar *clusters* que utilizam processadores do tipo GPU para processamento paralelo.

2.4.3 *Clusters* do tipo Beowulf

O primeiro projeto de um *cluster* Beowulf teve início ao final de 1993 nos CESDIS (*Center of Excellence in Space Data and Information Science*), Maryland, EUA. Foi financiado em parte pela NASA. Foi projetado por Donald Becker e Tomas Sterling, para ser um *cluster* de baixo custo e com componentes comuns. O primeiro protótipo foi construído em 1994 com 16 processadores DX4, conectados a uma rede Ethernet de 10MBits/s, a um custo de U\$ 40.000, atingindo a velocidade de processamento de 70 megaflops, algo substancial em relação ao poder de cálculo dos computadores de alto desempenho da época. Beowulf representa uma filosofia de *clusters*, atendendo as seguintes características:

- Nenhum de seus componentes deve ser feito sob encomenda, todos devem ser adquiridos no comércio convencional;
- independência de fornecedores de *hardware* e *software*
- periféricos de fácil atualização, de forma que, para aumentar a capacidade do *cluster*, basta acrescentar mais processadores e/ou fazer um upgrade³;
- *software* livre e de código aberto;
- o uso de ferramentas distribuídas livremente com nenhuma ou mínimas alterações;
- retorno à comunidade do projeto, onde as melhorias obtidas por um determinado grupo possam ser compartilhadas por todos.

A Figura 2.21 mostra um esquema de montagem de um *cluster* do tipo Beowulf composto por computadores pessoais. O *cluster* é composto por um *Switch* (equipamento que possibilita interligar os computadores em rede), um KVM (componente que conecta todos

³Ato de trocar componentes por modelos atualizados.

os computadores a um mesmo teclado, mouse e monitor, permitindo que se faça o chaveamento entre estes dispositivos de interface e um dado computador), e os dispositivos de interface propriamente ditos (mouse, teclado e monitor).

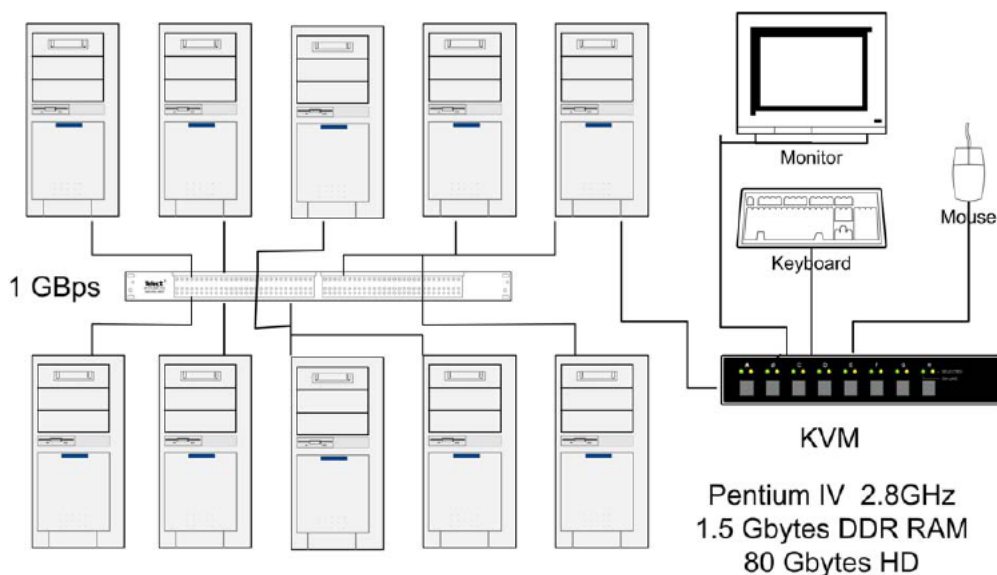


Figura 2.21: Esquema de um cluster do tipo *Beowulf*, Campregher (2005).

Devido ao baixo custo e ao rápido crescimento da performance dos computadores pessoais, é cada vez mais comum o uso de *clusters* de computadores pessoais, como também são muitos os “*softwares*” desenvolvidos e disponibilizados na internet para facilitar a montagem deste tipo de equipamento. Ao final do presente trabalho, na seção ??, se encontra um guia rápido com todas as instruções necessárias para se montar um *cluster*, baseado nos *clusters* do tipo Beowulf. Para a instalação do sistema operacional, bem como dos softwares de gerenciamento das atividades do *cluster* é utilizado um pacote de softwares gratuitos, denominado (*Rocks Clusters*) e um pacote de *scripts*⁴ desenvolvidos no MFlab. Estes pacotes de *scripts* foram criados para automatizar o processo de criação dos usuários do MFlab, configuração das contas destes usuários, indicar em qual máquina os usuários devem hospedar os seus arquivos; auxilia na instalação dos compiladores e das bibliotecas, além de fazer algumas alterações na configuração do sistema operacional, adequando-o às necessidades do laboratório. Estas ferramentas foram utilizadas para montar um *cluster* composto por 5 (cinco) computadores com processadores do tipo Quad-Core™, clock de

⁴Scripts: arquivo com lista ou conjunto de instruções computacionais.

2.4GHz, capacidade de armazenamento de 480GB e 40GB de memória RAM distribuídas entre os cinco computadores.

CAPÍTULO III

Modelagem matemática

Neste capítulo, apresentam-se as equações do modelo matemático envolvidas na metodologia para simulação numérica tridimensional de escoamentos e que utiliza o método da fronteira imersa para modelar a presença de corpos imersos nos escoamentos. Desta forma, será apresentada a discretização das equações de transporte de quantidade de movimento e de conservação da massa, fazendo uso do método dos volumes finitos e malha deslocada. Também é apresentada a modelagem matemática submalha de Smagorinsky (1963) para a turbulência e a modelagem matemática do método de fronteira imersa. Tais equacionamentos foram utilizados para desenvolver um código computacional escrito em linguagem Fortran, um dos requisitos para desenvolvimento da dissertação; maiores detalhes são fornecidos em Vedovoto (2009).

Como mencionado na Seção 2.1 o método da fronteira imersa consiste em representar o fluido por uma malha euleriana fixa e em representar a interface por um conjunto de pontos que formam uma malha lagrangiana (LIMA e SILVA *et al.*, 2003). Sendo assim, todas as equações utilizadas para a modelagem do fluido devem ser discretizadas levando-se em consideração tanto o domínio euleriano quanto o lagrangiano. Equações adicionais são utilizadas para a modelagem do problema de interação fluido-estrutura, objeto do presente trabalho. Estas equações modelam as forças presentes na interface fluido-sólido, equações estas que acoplam o modelo do fluido com o modelo da estrutura, no caso o pêndulo imerso. Como resultado das equações de acoplamento tem-se o cômputo do deslocamento da estrutura.

3.1 Formulação para o domínio do fluido

Na presente metodologia as equações de Navier-Stokes são resolvidas em todo o domínio computacional. As equações são apresentadas na forma tensorial de Einstein, equações 3.1 e 3.2:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}) + f_i + \rho g_i, \quad (3.2)$$

em que, para fluidos newtonianos, o tensor é calculado utilizando:

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.3)$$

3.2 O método da fronteira imersa

No método da fronteira imersa o termo, f_i , também conhecido como termo forçante, é responsável por provocar um desvio das linhas de corrente do escoamento. Calculado o campo de velocidades (escoamento), o termo de força é então embutido na equação de quantidade de movimento (na forma de um termo fonte), nos pontos eulerianos coincidentes com a região de interface, ou seja, na região dos pontos da malha lagrangiana. Isso é conseguido com a utilização da função Delta de Dirac (δ), como mostrado na equação 3.4.

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = \int_{\Omega} \vec{F}(\vec{x}, t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_k) d\vec{x}_k, \quad (3.4)$$

em que $\vec{F}(\vec{x}, t)$ é a força lagrangiana calculada sobre os pontos lagrangianos. O índice k denota uma variável lagrangiana, $\vec{x}$ e $\vec{x}_k$ são respectivamente, as coordenadas de um volume de controle elementar de fluido e as coordenadas de um ponto lagrangiano, conforme ilustrado na figura 3.1. Fora desta região este termo tem valor nulo. O modelo para cálculo de $\vec{F}(\vec{x}, t)$ será apresentado posteriormente.

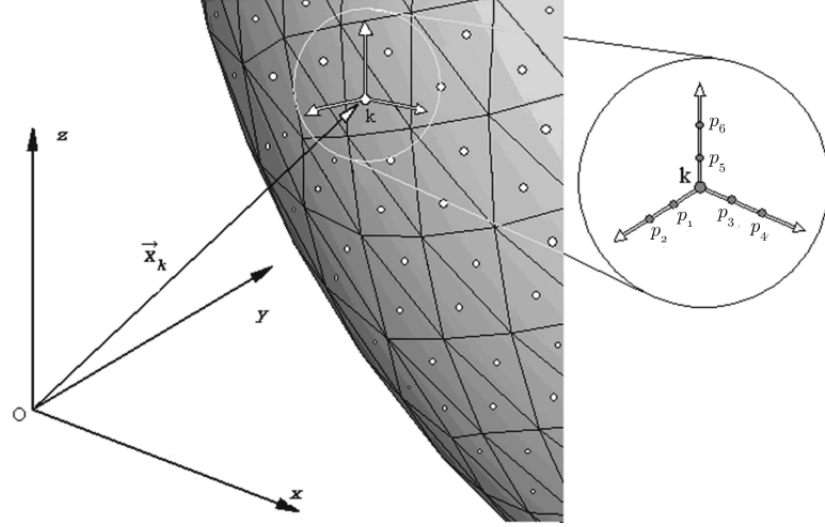


Figura 3.1: Posição dos pontos eulerianos e lagrangianos, $\vec{x}$ e $\vec{x}_k$, Campregher (2005).

3.3 Equações globais para a turbulência

Todo processo de filtragem se dá com a decomposição de uma variável em seu valor médio e sua flutuação:

$$\phi(x, y, z, t) = \bar{\phi}(x, y, z, t) + \phi'(x, y, z, t). \quad (3.5)$$

Uma simplificação matemática bastante útil para o processo de filtragem de escoamentos turbulentos com massa específica variável é proposta por Favre (Anderson *et al.* *apud* Leal, 2006). Tal simplificação pode ser entendida como sendo um filtro ponderado pela massa específica, conforme a equação,

$$\underline{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}}. \quad (3.6)$$

A partir da aplicação das equações 3.5 e 3.6 em 3.2 pode-se obter um sistema de equações de Navier-Stokes filtradas para a turbulência, utilizando-se as definições de filtragem e filtragem ponderada pela massa específica, resultando nas equações filtradas,

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \underline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\rho} \underline{u}_i \underline{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \alpha \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + f_i + \bar{\rho} g_i. \quad (3.8)$$

Nota-se que a equação de Navier-Stokes filtrada (3.8) é uma equação de transporte para as variáveis filtradas $\bar{\rho} \underline{u}_i$. No entanto, o termo de transporte advectivo aparece como um produto filtrado $\bar{\rho} \underline{u}_i \underline{u}_j$ ao invés do produto das variáveis dependentes filtradas. Desta forma, deseja-se reescrever a equação de maneira a obter o produto $\bar{\rho} \underline{u}_i \underline{u}_j$, o que é feito definindo-se o tensor global da turbulência, como $\tau_{ij} = -\bar{\rho} \left(\underline{u}_i \underline{u}_j - \underline{u}_i \underline{u}_j \right)$. Nota-se que essa definição leva ao aparecimento de um novo termo, o tensor τ_{ij} , como detalhado em Silveira-Neto (2002) e Leal (2006). A expressão resultante após a substituição das variáveis decompostas é,

$$\frac{\partial \bar{\rho} \underline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \underline{u}_i \underline{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \alpha \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \tau_{ij} \right) + f_i + \bar{\rho} g_i. \quad (3.9)$$

Cabe notar que para que se possa revolver as equações filtradas necessita-se de um modelo para o tensor τ_{ij} , ou seja, deve-se resolver o clássico problema de fechamento da turbulência. De uma forma geral os métodos utilizados para o fechamento da turbulência podem seguir duas abordagens: aqueles baseados na hipótese de Boussinesq e aqueles baseados em equações de transporte para as componentes do tensor de Reynolds. As formulações utilizadas para desenvolvimento deste trabalho são formulações baseadas no conceito de viscosidade turbulenta, ou seja, modelos derivados da hipótese de Boussinesq.

3.4 Modelagem da turbulência

Via de regra, é possível resolver de forma numérica todas as escalas de um escoamento turbulento, desde que a malha seja refinada o bastante, o que é conhecido como DNS. Entretanto esta metodologia é quase sempre impraticável quando o número de Reynolds é elevado pois incorre em escalas extremamente pequenas, inviabilizando o cálculo devido à falta de recursos computacionais. Desta forma, procura-se modelar o efeito da turbulência.

3.4.1 Hipótese de Boussinesq

Uma proposta de modelagem do tensor de Reynolds foi formulada por Boussinesq (Silveira Neto, 2002). Tal modelo presuppõe que as tensões turbulentas de Reynolds sejam proporcionais às taxas de deformação gerada pelo campo de velocidades filtrado e a energia cinética turbulenta:

$$\tau_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\rho} k, \quad (3.10)$$

em que

$$k \equiv \frac{1}{2} (\overline{u'_i u'_i}) = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}). \quad (3.11)$$

O termo μ_t da equação 3.10 é denominado de viscosidade turbulenta e age como um coeficiente de proporcionalidade entre as tensões turbulentas sub-malha e a taxa de deformação filtrada. A viscosidade turbulenta é uma função do escoamento e deve ser calculada por algum modelo. Substituindo o modelo de Boussinesq (Equação 3.10) na equação filtrada 3.8, resolve-se o problema de fechamento usando a hipótese de viscosidade turbulenta. Nota-se que o termo de pressão é substituído por um termo de pressão modificado, p^* , o que dá origem à equação:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + f_i + \bar{\rho} g_i, \quad (3.12)$$

O termo que envolve a energia cinética turbulenta, durante a transformação, resulta em gradiente e este é incorporado ao termo de pressão, da forma:

$$\bar{p}^* = \bar{p} + \frac{2}{3} \bar{\rho} k. \quad (3.13)$$

Falta ainda, para completar a modelagem, a escolha de um modelo de turbulência para avaliar a viscosidade turbulenta. Neste trabalho o modelo submalha de Smagorinsky é utilizado, que serve à prática da metodologia de simulação das grandes escalas.

O modelo submalha escolhido para LES foi proposto por Smagorinsky (1963) e foi o primeiro modelo para o tensor de Reynolds submalha. É um modelo de implementação

simples, porém é exigente quanto ao refinamento de malha, uma vez que ele se presta à modelagem apenas das menores escalas da turbulência. O modelo de Smagorinsky é um modelo submalha algébrico, baseado na hipótese de equilíbrio local para as pequenas escalas, ou seja, que a produção de tensões turbulentas sub-malha seja igual à taxa de dissipação da energia turbulenta. A viscosidade é calculada em função da taxa de deformação, S_{ij} , e da escala de comprimento l :

$$\mu_t = (C_s l)^2 \sqrt{2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}}}, \quad (3.14)$$

em que $l = (\delta x \delta y \delta z)^{\frac{1}{3}}$ é a escala sub-malha, função da malha de discretização. C_s é a constante de Smagorinsky, relacionada à transferência de energia das grandes para as pequenas escalas. Por fim, a taxa de deformação S_{ij} é calculada com base no campo de velocidade filtrado:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right). \quad (3.15)$$

Quanto à constante de Smagorinsky, C_s , neste trabalho foi utilizado o valor analítico de 0,18, sendo que esta constante pode ser ajustada para cada tipo de escoamento ou código computacional utilizado.

Segundo Oliveira (2006) o modelo de Smagorinsky, apesar de simples, possui pontos interessantes que justificam a sua utilização. Dentre eles podem-se citar:

- Modelo de fácil implementação computacional;
- Apesar da necessidade do ajuste de uma constante, o modelo ainda assim guarda um caráter mais universal quanto à modelagem da turbulência;
- O processo de transferência da energia cinética turbulenta entre as diferentes escalas é bem modelado, para escoamentos completamente turbulentos.

Como desvantagens pode-se citar:

- Necessidade de ajuste da constante C_s para cada tipo de programa computacional;

- Não consegue modelar efeitos do tipo “backscatter” (transferência de energia das menores para as maiores escalas);
- Apresenta deficiência no cálculo da viscosidade junto às paredes, necessitando do uso de um modelo adicional através de funções de amortecimento.

3.5 Equacionamento para o modelo estrutural

O presente trabalho propõe estudar problemas de interação fluido-estrutural, em que o problema proposto é um pêndulo simples imerso em um fluido, como esquematizado na figura 3.2. O pêndulo é composto por uma esfera rígida imersa em um meio contínuo de fluido e suportada por um fio. Parte do repouso de uma dada posição inicial e oscila em torno do seu ponto de equilíbrio, o ponto inferior (menor altura que o pêndulo assume na direção z).

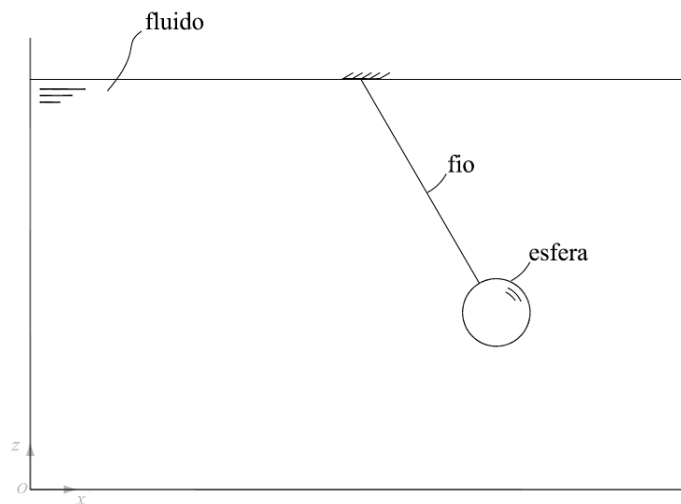


Figura 3.2: Representação do problema físico a ser resolvido: pêndulo imerso.

Para modelar o problema estrutural, figura 3.3(a), são feitas algumas considerações. A esfera parte do repouso, de uma posição angular qualquer θ , medida a partir da referência vertical, como mostrado na figura 3.3(b). O fio que sustenta a esfera é considerado como inextensível, ou seja, a distância R entre o centro de rotação O e o centro de massa da esfera M é sempre constante (não há deslocamento na direção r). Os esforços externos aos quais a esfera é submetida são: a força de contato T devido á tração no fio, a força de

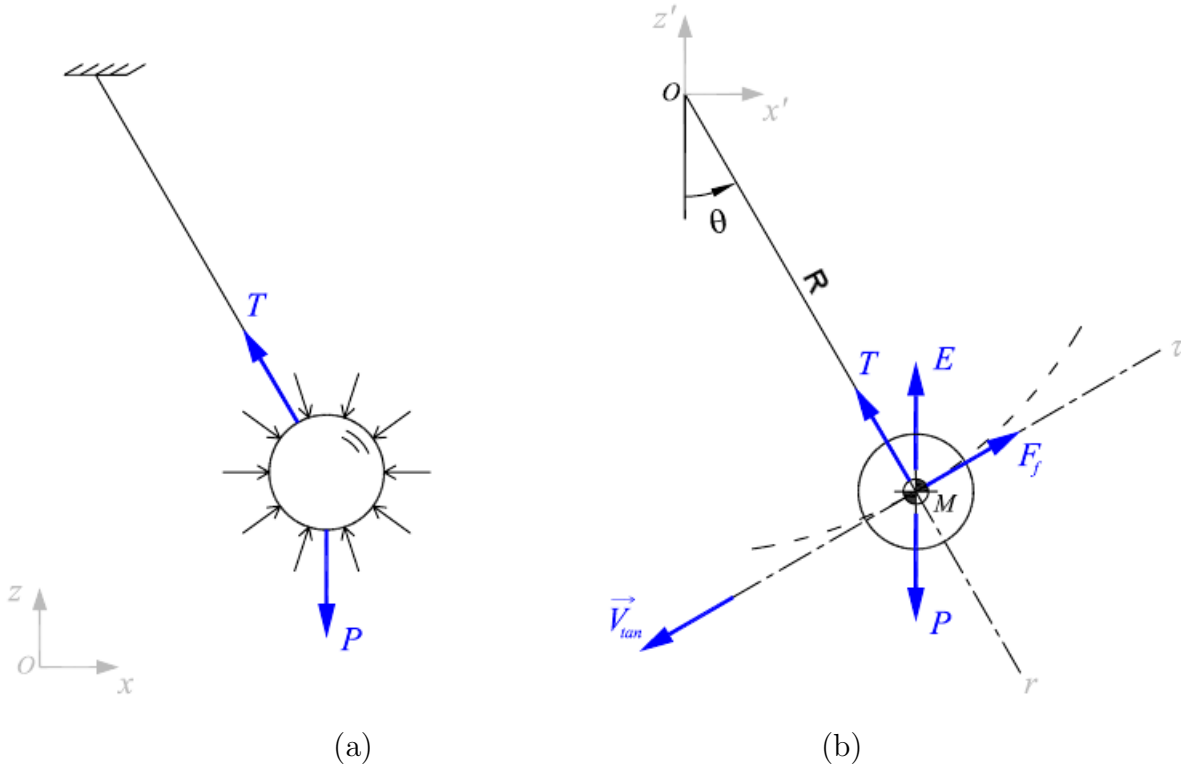


Figura 3.3: Representação esquemática do problema do pêndulo simples imerso em fluido: (a) representação dos esforços em que a esfera está submetida (tração, T , força peso, P , e força de contato com o fluido); (b) balanço de forças em relação ao centro de massa da esfera.

campo P que é a força peso devido ao efeito do campo gravitacional da terra e as forças de superfície E e F_f que são respectivamente a força de empuxo e a força fluidodinâmica.

A força peso pode ser calculada resolvendo-se:

$$P = -m_{esf} g \vec{k}, \quad (3.16)$$

em que g é a aceleração da gravidade, $\vec{k}$ é o vetor unitário na direção vertical (direção do eixo de coordenadas z') e m_{esf} é a massa da esfera.

Da teoria da hidrostática pode-se estimar a força de empuxo, calculando-se o peso da massa de fluido deslocada pela esfera, dado por

$$E = V_{esf} \rho_f g, \vec{k}, \quad (3.17)$$

em que V_{esf} é o volume da esfera e ρ_f a massa específica do fluido.

A força fluidodinâmica, que representa todos os esforços dinâmicos de interação fluido-estrutura é calculada com base na força lagrangiana, resolvendo-se:

$$\vec{F}_f = \sum_{k=1}^N -\vec{F}_k \Delta V_k, \quad (3.18)$$

em que N é o número total de pontos lagrangianos indentificados por k , V_k é o volume elementar da partícula de fluido na região da fronteira imersa que está submetido à parcela da força lagrangiana $\vec{F}_k$.

Da teoria da dinâmica dos corpos rígidos pode-se obter as relações entre as forças e momentos aplicados a um corpo rígido e o movimento resultante (expresso em termos da aceleração do centro de massa e da aceleração angular do corpo). Visando esses resultados, aplica-se a segunda lei de Newton sobre a esfera. Para isso, o somatório das forças exercidas sobre a esfera é aplicado sobre o seu centro de massa, decompondo-as segundo as direções radial r e tangencial τ , conforme mostrado na figura 3.3(b).

Conforme mostrado na figura 3.4, as componentes da força peso $(P)^r$, da força fluidodinâmica $(F_f)^r$ e da força de empuxo $(E)^r$ decompostas segundo a direção r são responsáveis por equilibrar a força de tração exercida pelo fio, enquanto o somatório das componentes dessas forças decompostas segundo a direção τ , representado por $(F_{res})^\tau$, são responsáveis pelo momento resultante em torno do eixo perpendicular ao plano $x'z'$ e que passa pelo ponto O . Esse momento resultante é calculado da seguinte maneira:

$$M_{res} = (F_{res})^\tau R, \quad (3.19)$$

em que a força resultante na direção tangencial $(F_{res})^\tau$ é dada por:

$$(F_{res})^\tau = (F_f)^\tau + (P)^\tau + (E)^\tau, \quad (3.20)$$

em que $(F_f)^\tau$, $(P)^\tau$ e $(E)^\tau$ são respectivamente as componentes das forças fluido-dinâmica, da força peso e da força de empuxo na direção tangencial τ .

Baseado no 2º Princípio de Newton-Euler, pode-se ainda escrever:

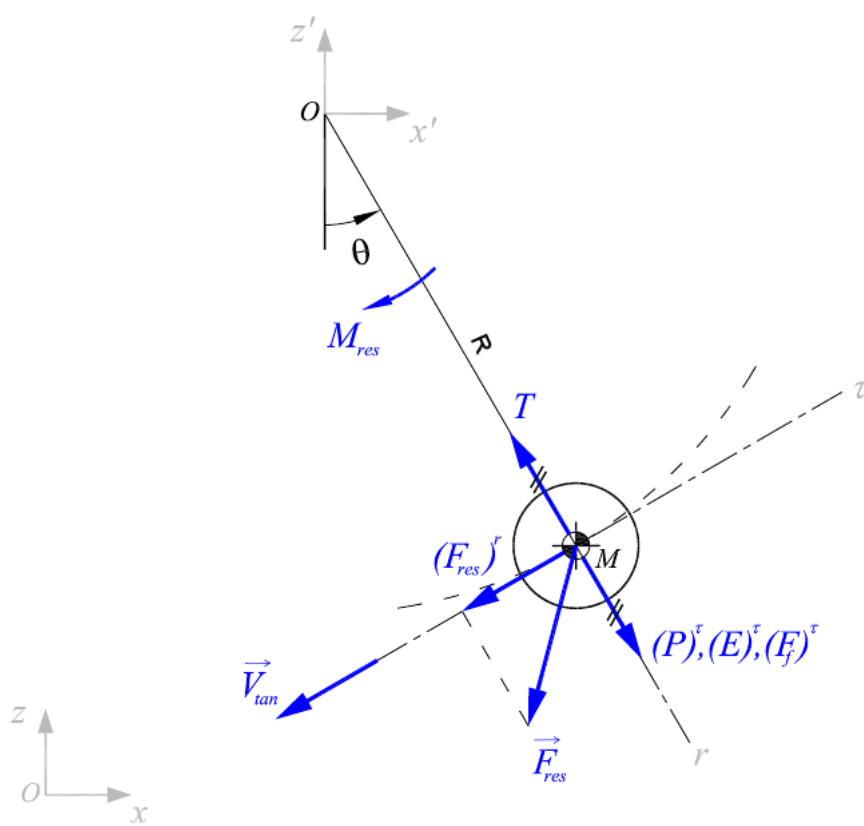


Figura 3.4: Representação do esforço e momento resultante sobre o pêndulo.

$$M_{res} = I_{y'} \alpha_{y'}, \quad (3.21)$$

em que $I_{y'}$ é o momento de inércia da esfera, calculado em relação ao centro de rotação O e $\alpha_{y'}$ é a aceleração angular do pêndulo em relação ao eixo y' (perpendicular ao plano $x'z'$ passando pelo ponto O).

O momento de inércia da esfera calculado em relação a um eixo perpendicular ao plano $x'z'$ e que passa pelo centro de rotação O é obtido da seguinte forma:

$$I_{y'} = m_{esf} \left(\frac{2}{5} r_{esf}^2 + R^2 \right), \quad (3.22)$$

em que r_{esf} é o raio da esfera.

A velocidade angular do pêndulo $\omega_{y'}$ é obtida resolvendo-se:

$$\frac{d\omega_{y'}}{dt} = \alpha_{y'}. \quad (3.23)$$

A posição angular do pêndulo θ pode então ser obtida através da equação:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_{y'}. \quad (3.24)$$

Finalmente, a velocidade do centro de massa da esfera V_{tan} é calculada da forma:

$$V_{tan} = \omega_{y'} R. \quad (3.25)$$

Desta forma, o estado cinemático do pêndulo é determinado.

CAPÍTULO IV

Metodologia numérica

Apresentadas as equações do modelo matemático, neste capítulo serão descritos os procedimentos numéricos empregados para a soluções das equações matemáticas envolvidas, fazendo uso do método dos volumes finitos. Todo processo de discretização recai em um sistema de equações discretizadas que representam um sistema contínuo. A solução deste sistema incorre em erros devidos às aproximações assumidas. Por este motivo muitos são os esforços para desenvolvimento de técnicas que minimizem estes erros e o custo computacional. De forma geral, aos algoritmos utilizados para a solução de sistema de equações discretizadas se dá o nome de *solvers*.

De forma sucinta, o código computacional utilizado para a solução numérica do problema analisado nessa dissertação é descrito como: totalmente implícito, de segunda ordem no tempo e no espaço, utilizando o arranjo deslocado de variáveis (faz uso de malhas deslocadas).

4.1 Arranjo de variáveis na malha computacional

Nas discretizações em volumes finitos, quando é necessário o cálculo de campos vetoriais acoplados a campos escalares, o posicionamento das variáveis primárias na malha computacional é algo que deve ser levado em conta, de forma cuidadosa. Neste sentido existem duas abordagens: arranjo deslocado, no qual os campos vetoriais e escalares são armazenados, de forma estratégica, em pontos diferentes, e o arranjo co-localizado, onde

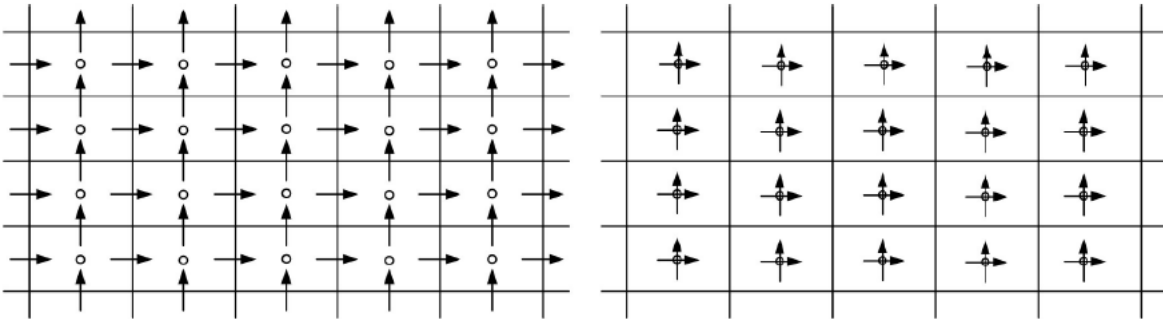


Figura 4.1: Arranjo de variáveis na malha computacional: (a) arranjo deslocado, em que as velocidades, indicadas por $\rightarrow$ e $\uparrow$, são calculadas nas faces das células, enquanto a pressão, indicada por $\circ$, no centro; (b) arranjo colocalizado, em que todas as variáveis são calculadas no centro das células.

tanto as variáveis vetoriais quanto as escalares são armazenadas na mesma posição. Na figura 4.1 são mostrados exemplos destas malhas. No caso da malha deslocada as variáveis vetoriais (velocidades) são calculadas nas faces das células enquanto que a pressão e as outras variáveis escalares são calculadas no centro das células. Para o segundo caso, colocalizado, todas as variáveis são calculadas no centro das células.

A escolha mais simples a ser feita é o arranjo colocalizado, uma vez que a implementação computacional é simplificada, especialmente no caso de malhas não ortogonais (FERZIGER E PERIC, 2002), e nos casos de processamento distribuído (VEDOVOTO, 2007). No entanto, se as componentes da velocidade e a pressão forem calculadas na mesma posição, devido a dificuldades com o acoplamento-pressão velocidade, pode-se ter oscilações no campo de pressão. Estas oscilações são conhecidas como tabuleiro de xadrez ou “checkerboard”.

A escolha do arranjo não incorre em modificações nas equações discretizadas. Entretanto, para o arranjo colocalizado, as velocidades que são necessárias nas faces devem ser interpoladas a partir do centro dos volumes de controle. A função de interpolação mais comumente usada para estes casos é a interpolação de Rhie-Chow (RHIE e CHOW, 1983).

Dentre as vantagens de se empregar o arranjo deslocado, pode ser citada como mais importante o forte acoplamento entre pressão e velocidade, pois os gradientes da primeira propriedade coincidem com a posição da segunda, sendo que estas já estão armazenadas

nas faces do volume de controle (VEDOVOTO, 2009). Outra importante qualidade apontada por alguns pesquisadores é a capacidade de conservação total da energia cinética, tanto em malhas uniformes quanto em não-uniformes, (PILLER e STALIO, 2004, *apud* CAMPREGHER, 2005).

4.2 Discretização temporal

Quando se deseja garantir a acurácia de um método de discretização procura-se utilizar métodos de segunda ordem ou superior. Seguindo esta idéia, Ascher; Ruuth; Wetton (1995) propõem uma equação diferencial que, ao ser discretizada em termos temporais e utilizando esquemas semi-implícitos de segunda ordem, resulta em:

$$\frac{1}{k} \left[\left(\gamma + \frac{1}{2} \right) u^{n+1} - 2\gamma u^n + \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) u^{n-1} \right] = (\gamma + 1)f_{(u^n)} - \gamma f_{(u^{n-1})} + \nu \left[\left(\gamma + \frac{c}{2} \right) g_{(u^{n+1})} + (1 - \gamma - c)g_{(u^n)} + \frac{c}{2}g_{(u^{n-1})} \right], \quad (4.1)$$

em que $g_{(u)}$ e $f_{(u)}$ representam respectivamente parcelas difusivas e advectivas de uma equação diferencial qualquer, n representa o estágio atual da iteração no tempo, k é o tamanho do passo de tempo e ν é um coeficiente de difusão.

Atribuindo valores às constantes γ e c , tem-se os seguintes métodos de discretização temporal:

- Crank-Nicolson - Adams-Bashfort (CNAB), $(\gamma, c) = (\frac{1}{2}, 0)$;
- Modified Crank-Nicolson - Adams-Bashfort (MCNAB), $(\gamma, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$;
- Crank-Nicolson - Leap-Frog (CNLF), $(\gamma, c) = (0, 1)$;
- Semi-Backward difference Formula (SBDF), $(\gamma, c) = (1, 0)$.

Na presente metodologia optou-se por utilizar uma aproximação temporal totalmente implícita para as equações de transporte de quantidade de movimento. No entanto, a abordagem proposta por Ascher e seus colaboradores é atrativa uma vez que, desta maneira,

cria-se a possibilidade de se testar qual o método de integração mais adequado para cada problema a ser resolvido.

Utilizando esta abordagem totalmente implícita, a equação diferencial de Ascher tem a forma,

$$\frac{1}{k} \left[\left(\gamma + \frac{1}{2} \right) u^{n+1} - 2\gamma u^n + \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) u^{n-1} \right] = \left(\gamma + \frac{c}{2} \right) (h_{(u^{n+1})} + j_{(u^{n+1})}) + (1 - \gamma - c)(h_{(u^n)} + j_{(u^n)}) + \frac{c}{2}(h_{(u^{n-1})} + j_{(u^{n-1})}), \quad (4.2)$$

em que $h(u)$ é uma função predominantemente difusiva e $j(u)$ é predominantemente advectiva.

Aplicando a equação totalmente implícita de Ascher (Equação 4.2) na equação de balanço de quantidade de movimento, (Equação 3.2) e rearranjando os termos, resulta na equação:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \rho^{n+1} u^{n+1} + 2\gamma \rho^n u^n + \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \rho^{n-1} u^{n-1} \right)}{\Delta t} = - \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \\ & + (\gamma - c/2) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{ef}^{n+1} \left(\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_I^{n+1}}{\partial x_i} \delta_{ij} \right) - \frac{\partial \rho^{n+1} u_i^{n+1} u_j^{n+1}}{\partial x_j} \right) \\ & + (1 - \gamma - c) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{ef}^n \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_I^n}{\partial x_i} \delta_{ij} \right) - \frac{\partial \rho^{n-1} u_i^{n-1} u_j^{n-1}}{\partial x_j} \right) \\ & + f_i^{n+1} + \rho^{n+1} g_i. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Assumindo

$$h_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{ef}^{n+1} \left(\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_I^{n+1}}{\partial x_i} \delta_{ij} \right) - \frac{\partial \rho^{n+1} u_i^{n+1} u_j^{n+1}}{\partial x_j} \right), \quad (4.4)$$

$$h_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{ef}^n \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_I^n}{\partial x_i} \delta_{ij} \right) - \frac{\partial \rho^n u_i^n u_j^n}{\partial x_j} \right), \quad (4.5)$$

e

$$h_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{ef}^{n-1} \left(\frac{\partial u_i^{n-1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{n-1}}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_I^{n-1}}{\partial x_i} \delta_{ij} \right) - \frac{\partial \rho^{n-1} u_i^{n-1} u_j^{n+1}}{\partial x_j} \right). \quad (4.6)$$

A equação final pode ser escrita da forma,

$$\frac{\left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \rho^{n+1} u^{n+1} + 2\gamma \rho^n u^n + \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \rho^{n-1} u^{n-1}}{\Delta t} = - \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + (\gamma - c/2)g_2 + (1 - \gamma - c)g_1 + (c/2)g_0 + f_i^{n+1} + \rho^{n+1}g_i. \quad (4.7)$$

Variando os termos γ e c , chega-se aos seguintes métodos de discretização temporal:

- Crank-Nicolson (CN), para $(\gamma, c) = (\frac{1}{2}, 0)$;
- Leap-Frog (LF), para $(\gamma, c) = (0, 1)$;
- Backward difference Formula (BDF), para $(\gamma, c) = (1, 0)$.

4.3 O método de projeção

O método de projeção utilizado nesta metodologia é baseado nos trabalhos de Choi e Moin (1994), onde os autores propõem um método preditor-corretor totalmente implícito, e no trabalho de Lessani e Papalexandris (2006), onde os autores utilizam um método preditor-corretor aplicado a escoamentos com massa específica variável. A seguir é apresentado, de forma sucinta, tal algoritmo de acoplamento de pressão-velocidade.

Muitas são as formas de se propor um campo de velocidades estimada. Nos trabalhos de Nós (2007) e Villar (2008), o campo de velocidade preditor é proposto da forma,

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho^{n+1}} \frac{\partial}{\partial x_i} (q^{n+1}), \quad (4.8)$$

em que o termo q^{n+1} surge devido à estimativa da pressão no tempo preditor,

$$q^{n+1} = p^{n+1} - p^n. \quad (4.9)$$

Adaptando a equação da velocidade estimada (Equação 4.8) para a concepção de massa específica variável resulta em,

$$\rho^{n+1}\tilde{u}_i^{n+1} = \rho^{n+1}u_i^{n+1} + \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i}(q). \quad (4.10)$$

Reescrevendo a equação do transporte discretizada no tempo (Equação 4.7) com a pressão no tempo n e utilizando a Equação 4.10, resulta em,

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\rho^{n+1}\tilde{u}_i^{n+1} + 2\gamma\rho^n u^n + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\rho^{n-1}u^{n-1}}{\Delta t} = \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \\ & + (\gamma - c/2)g_2 + (1 - \gamma - c)g_1 + (c/2)g_0 + f_i^{n+1} + \rho^{n+1}g_i. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Subtraindo, uma da outra, as equações de transporte (Equações 4.7 e 4.11) resulta na equação

$$\frac{\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\rho^{n+1}\tilde{u}_i^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\rho^{n+1}u_i^{n+1}}{\Delta t} = \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial p^n}{\partial x_i}. \quad (4.12)$$

Rearranjando os termos desta equação obtém-se:

$$\frac{\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)}{\Delta t} (\rho^{n+1}\tilde{u}_i^{n+1} - \rho^{n+1}u_i^{n+1}) = \frac{\partial q}{\partial x_i}. \quad (4.13)$$

Aplicando o operador divergente na equação acima obtem-se uma equação para a correção da pressão,

$$\frac{\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)}{\Delta t} \left(\frac{\partial(\rho^{n+1}\tilde{u}_i^{n+1})}{\partial x_i} - \frac{\partial(\rho^{n+1}u_i^{n+1})}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial q}{\partial x_i} \right). \quad (4.14)$$

Nota-se que devido a hipótese de incompressibilidade o termo $\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho^{n+1}u_i^{n+1})$ não é desconsiderado, levando-se em consideração a variações de massa específica. A proposta para a equação da conservação da massa é dada por:

$$\frac{\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)}{\Delta t} \left(\frac{\partial(\rho^{n+1}\tilde{u}^{n+1})}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial q}{\partial x_i} \right), \quad (4.15)$$

podendo ser reescrita da forma,

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2} = \frac{\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)}{\Delta t} \left(\frac{\partial(\rho^{n+1}\tilde{u}^{n+1})}{\partial x_i} \right). \quad (4.16)$$

Discretizando o termo temporal da equação acima com uma aproximação de segunda ordem tem-se:

$$\frac{\partial^2 q^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{\gamma + \frac{1}{2}}{\Delta t} \left(\frac{\partial(\rho^{n+1}\tilde{u}_i^{n+1})}{\partial x_i} \right). \quad (4.17)$$

Pode-se então resumir o procedimento utilizado pelo método de projeção através da seguinte sequência de cálculo:

1. estima-se o campo de velocidades (Equação 4.11);
2. com o campo de pressão estimado, resolve-se o sistema linear para a pressão estimada (Equação 4.17);
3. corrige-se o campo de velocidades (Equação 4.10) e o campo de pressão, (Equação 4.9);
4. verifica-se se a conservação da massa está de acordo com a tolerância permitida, $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon$;
5. avança-se o passo de tempo, $t = t + \Delta t$.

4.4 Representação do domínio lagrangiano

Há dois pontos de vista diferentes na análise de problemas em mecânica dos fluidos: a abordagem lagrangiana e a euleriana. No método euleriano calcula-se o campo de pressão

$p(x, y, z, t)$, e não as variações de pressão $p(t)$ que uma partícula individual experimenta quando ela se move pelo espaço. O segundo método, que segue a partícula individual movendo-se no fluido, é a chamada descrição *lagrangiana*. Toda formulação baseada no método da fronteira imersa utiliza a abordagem lagrangiana. Portanto, todas as informações de acoplamento entre o fluido e a estrutura imersa são calculadas sobre pontos discretos dispersos no domínio computacional euleriano, na região de fronteira entre o fluido e a estrutura. Para caracterização geométrica da estrutura imersa o código computacional faz uso de uma malha, chamada malha lagrangiana. Esta malha pode ser gerada a partir de *softwares* geradores de malha e exportados para um arquivo texto que é lido na inicialização do programa (VEDOVOTO, 2007).

A malha pode ser composta por elementos triangulares ou por quadriláteros, como mostrdo na figura 4.2. Uma vista detalhada de um elemento triangular pode ser vista na figura 4.3. Os lados dos elementos são formados por segmentos designados por S_1 , S_2 e S_3 entre os vértices P_1 , P_2 e P_3 . Desta forma, os lados do triângulos são definidos por $S_1 = \overline{P_1P_2}$, $S_2 = \overline{P_3P_2}$ e $S_3 = \overline{P_3P_1}$. No caso de elementos do tipo quadrilátero segue-se a mesma lógica, tendo o acréscimo do vértice P_4 , logo os segmentos serão: $S_1 = \overline{P_1P_2}$, $S_2 = \overline{P_3P_2}$, $S_3 = \overline{P_3P_4}$ e $S_4 = \overline{P_4P_1}$.

Sabe-se que a área definida pelos elementos triangulares é dada por,

$$\Delta A_K = \sqrt{S_k(S_k - S_1)(S_k - S_2)(S_k - S_3)}, \quad (4.18)$$

em que

$$S_k = \frac{1}{2}(S_1 + S_2 + S_3) \quad (4.19)$$

é o comprimento médio dos lados do triângulo. Para o caso de elementos quadriláteros divide-se este elemento em dois, através da criação de um seguimento ligando os vértice P_1 e P_3 , definindo o seguimento $S_5 = \overline{P_3P_1}$. Desta forma, a área do quadrilátero é dada pela soma da área dos dois triângulos resultantes:

$$\Delta A_{k1} = \sqrt{(S_{k1}(S_{k1} - S_1)(S_{k1} - S_2)(S_{k1} - S_5))} \quad (4.20)$$

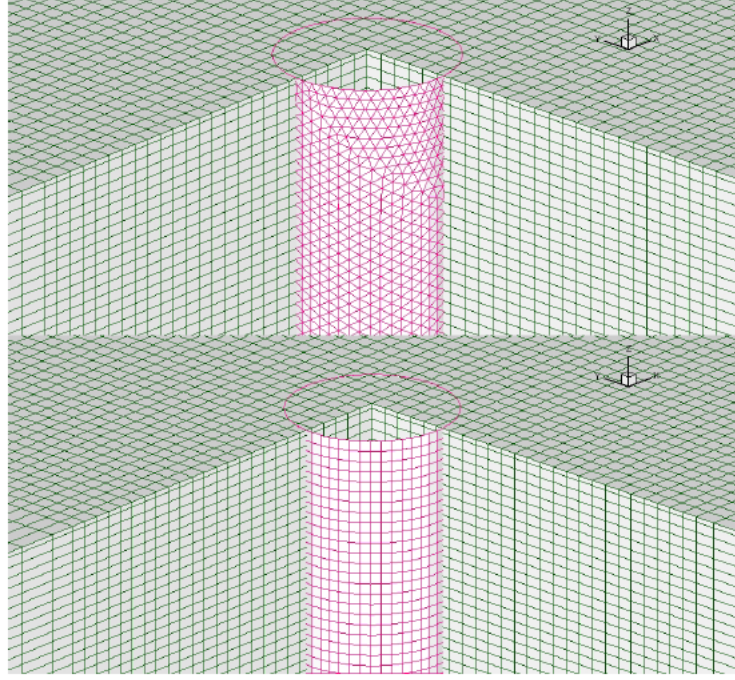


Figura 4.2: Malhas lagrangianas: composta por elementos triangulares e por elementos do tipo quadriláteros (VEDOVOTO, 2009).

e

$$\Delta A_{k2} = \sqrt{(S_{k2}(S_{k2} - S_5)(S_{k2} - S_3)(S_{k2} - S_4))}. \quad (4.21)$$

Os semiperímetros S_{k1} e S_{k2} são dados por:

$$S_{k1} = \frac{1}{2}(S_1 + S_2 + S_5) \quad (4.22)$$

e

$$S_{k2} = \frac{1}{2}(S_3 + S_4 + S_5). \quad (4.23)$$

Nota-se que todos os parâmetros geométricos estão associados a um ponto lagrangiano, k , localizado no centro de cada elemento da malha, como mostra a figura 4.3.

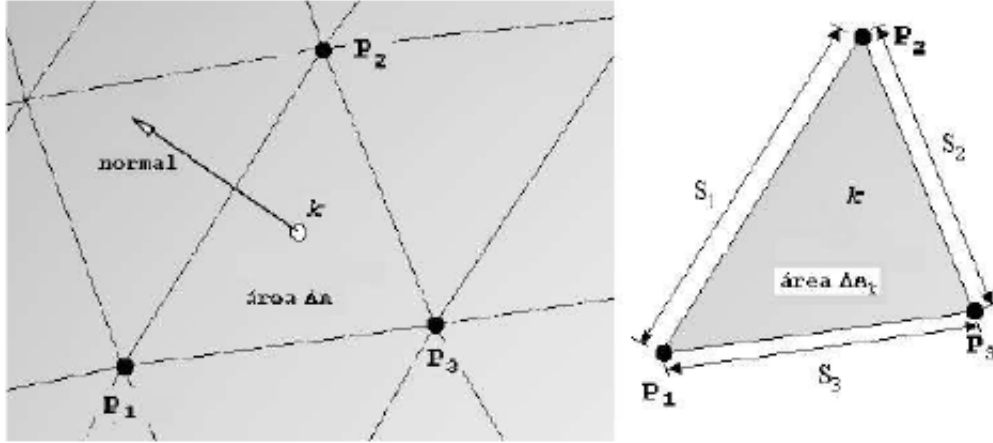


Figura 4.3: Detalhe dos parametros geométricos de um elemento de malha do tipo triangular (VEDOVOTO, 2007).

4.4.1 Cálculo da força euleriana

A forma como o termo forçante, $\vec{F}$, é calculado determina as diferentes metodologias baseadas no método da fronteira imersa. Este termo é obtido no domínio lagrangiano, Ω_k , deve ser distribuído para o domínio euleriano, Ω , com o auxílio da função delta de Dirac. Para um espaço N-dimensional esta função é definida como:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \int_{R^n} \delta(\vec{x} - \vec{x}_k) \vec{F}(\vec{x}_k) d\vec{x}_k. \quad (4.24)$$

Aplicando a Equação 4.26 para um volume Ω_k do domínio lagrangiano, tem-se:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \int_{\Omega_k} \vec{F}(\vec{x}_k) \delta(\vec{x} - \vec{x}_k) d\vec{x}_k, \quad (4.25)$$

em que a função δ é definida como

$$\int_{R^n} \delta(\vec{x} - \vec{x}_k) d\vec{x} = \begin{cases} 1, & \text{se } \vec{x}_k \in \Omega_k \\ 0, & \text{se } \vec{x}_k \notin \Omega_k \end{cases}.$$

Esta função age como o núcleo de uma transformada integral (centrada em $\vec{x}_k$), que promove a transposição entre os domínios lagrangiano e euleriano (GRIFFITH e PESKIN, 2005 *apud* CAMPREGHER, 2005). A transferência de informações entre as malhas é feita

através da função distribuição D_i , ponderando o valor da força lagrangiana em função da sua distância ao volume euleriano.

Para domínios tridimensionais, o campo de força lagrangiano, F_{ik} é distribuído sobre a malha euleriana, da forma,

$$f_i = \sum_k F_{ik} D_i \Delta A_k \Delta S_k. \quad (4.26)$$

Neste trabalho a função distribuição D_i é avaliada da forma:

$$D(X_k) = \prod_{i=1}^3 \left\{ \frac{\varphi[(X_k - x_i)/\Delta x_i]}{\Delta x_i} \right\}, \quad (4.27)$$

em que φ é uma função peso, definida como:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(r) & \text{se } \|r\| < 1 \\ \frac{1}{2} - \tilde{\varphi}(2-r) & \text{se } 1 < \|r\| < 2 \\ 0 & \text{se } \|r\| > 2 \end{cases}, \quad (4.28)$$

$$\tilde{\varphi}(r) = \frac{3 - 2 \|r\| + \sqrt{1 - 4 \|r\| + 4 \|r\|^2}}{8}. \quad (4.29)$$

A função $\varphi(r)$ é exemplificada na figura 4.4. Tem a forma similar de uma gaussiana e atende à propriedade de integral unitária quando integrada no intervalo $[-\infty, \infty]$.

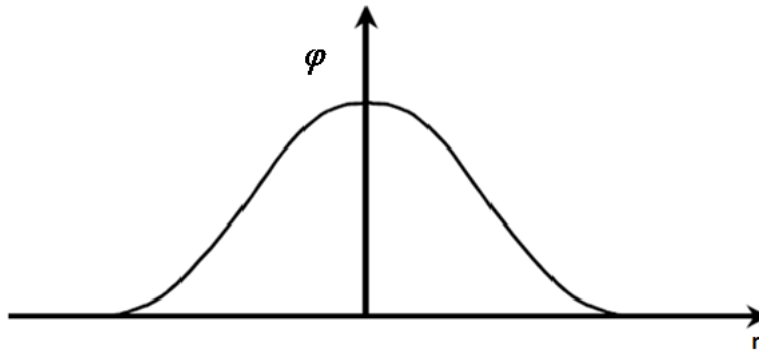


Figura 4.4: Função distribuição do tipo gaussiana proposta por Unverdi e Tryggvason (1992) *apud* Campregher (2005).

Outras funções distribuição são propostas neste trabalho. São diferenciadas segundo a forma de propor a função peso. A função denominada cúbica, é proposta por Tornberg e Engquist (2005) *apud* Griffith e Peskin (2005) da seguinte forma:

$$\varphi_c(r) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|r| - |r|^2 + \frac{1}{2}|r|^3 & \text{se } 0 \leq |r| < 1 \\ 1 - \frac{11}{6}|r| - |r|^2 + \frac{1}{6}|r|^3 & \text{se } 1 \leq |r| < 2 \\ 0 & \text{se } 2 \leq |r| \end{cases} \quad (4.30)$$

4.4.2 Cálculo da força lagrangiana

As equações aqui apresentadas são resultado da proposta de Wang; Fan; Luo (2008), uma metodologia baseada no método de imposição direta de forças para representação de um corpo imerso em um escoamento, metodologia exposta com maiores detalhes em seção posterior.

Partindo das equações que modelam o fluido (Equação 3.2) e isolando o termo de forças externas atuantes sobre esse domínio, resulta em:

$$f_i = \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}) - \rho g_i. \quad (4.31)$$

Como a Equação 4.31 foi desenvolvida a partir da hipótese do contínuo e que o domínio da fronteira imersa está contido no domínio do fluido ($\Omega_k \subset \Omega$), pode-se definir a força lagrangiana através da Equação 4.32.

$$F_{i(\vec{X},t)} = \frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_k U_i U_j}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}) - \rho_k g_i, \quad (4.32)$$

onde ρ_k corresponde à massa específica no ponto lagrangiano e U e P são as componentes de velocidade e à pressão nos pontos da malha lagrangiana.

Discretizando a derivada temporal da Equação 4.32 através de um esquema de Euler explícito (WANG; FAN; LUO, 2007), obtém-se;

$$F_{i(\vec{X},t)} = \frac{\rho_k U_i^{t+\Delta t} - \rho_k U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t, \quad (4.33)$$

onde o termo RHS , “Right Hand Side”, chamado lado direito da equação, é dado por:

$$RHS^l = \frac{\partial(\rho_k U_i U_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}) - \rho_k g_i, \quad (4.34)$$

e Δt é o intervalo discreto do tempo.

Wang; Fan; Luo (2007) propõem somar e subtrair um parâmetro temporário, U_i^* ao termo forçante (Equação 4.33) resultando em,

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^* + U_i^* - U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t. \quad (4.35)$$

Tal equação é resolvida em duas etapas, de forma a resultar,

$$\frac{U_i^* - U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t = 0, \quad (4.36)$$

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^*}{\Delta t} = \frac{U_L^{n+1} - U_i^*}{\Delta t}, \quad (4.37)$$

em que $U_i^{t+\Delta t}$, também denominado U_L^{n+1} , é a velocidade da fronteira imersa, calculada pelo modelo estrutural.

Sobre os efeitos da força lagrangiana, a velocidade dos pontos lagrangianos $U_l^{t+\Delta t}$ é alterada, de modo a assumir o valor da velocidade da fronteira U_L^{n+1} . Isto é feito de forma direta no contorno. Tal método é conhecido como “Direct-Forcing” ou Método de Forçagem direta, proposto por Uhlmann (2005).

A força lagrangiana é dada pela Equação 4.37 e a velocidade no domínio lagrangiano é calculada a partir de uma função de interpolação,

$$U^* = \sum_{\Omega} u_l^* D_h(X_i - x_i) h^2. \quad (4.38)$$

Esta operação pode ser interpretada como a operação inversa à operação de distribuição. Enquanto no processo de distribuição a informação de um ponto lagrangiano é transmitida para os vizinhos eulerianos, na função interpolação transfere-se a informação

dos pontos eulerianos vizinhos para um ponto lagrangiano. Estas transferências de informações são ponderadas pela distância entre o ponto lagrangiano e os respectivos pontos eulerianos vizinhos envolvidos no cálculo, através da função peso D_i . Esta função pode ser calculada pelas equações 4.28 e 4.30.

4.5 O método de forçagem direta

Nesta seção é descrita a metodologia proposta por Wang; Fan e Luo (2007), uma modificação da metodologia de imposição direta de forças através de um termo temporal, proposto por Uhlmann (2005), e cuja força é modelada tendo como base o modelo de Silva; Silveira-Neto; Damasceno(2003). O método proposto pelos autores, denominado *Multi-Direct Forcing*, propõem resolver o termo forçante de forma iterativa com o intuito de garantir a condição de não escorregamento na região da fronteira imersa. Foi escolhido para a aplicação em problemas de interação fluido-estrutura pois ao mesmo tempo que leva em consideração os efeitos físicos que ocorrem sobre a fronteira sólido-fluido ao utilizar o modelo proposto por Silva; Silveira-Neto; Damasceno(2003), utiliza a idéia da imposição direta da força através de um termo temporal, proposto por Uhlmann (2005), e inclui um processo iterativo para o cálculo da força lagrangiana com o intuito de garantir a condição de não escorregamento na interface. Tem vantagem sobre a metodologia de Uhlmann por modelar o termo forçante com maior rigor físico e tem vantagem em relação à metodologia de Silva; Silveira-Neto; Damasceno(2003) pois garante com maior rigor a condição de não escorregamento em todo passo de tempo, enquanto a metodologia de Silva; Silveira-Neto; Damasceno(2003) necessita de alguns passos de tempo para representar o corpo imerso no escoamento e utiliza para isso passos de tempo muito pequenos, da ordem de 10^{-6} s.

Para resolver as equações governantes a través do método de forçagem direta utiliza-se o seguinte algoritmo:

1. calcula-se o campo de velocidades estimadas, u_i^* ;
2. interpolam-se as velocidades para o domínio lagrangiano, (Equação 4.38);
3. calcula-se a força lagrangiana (Equação 4.37);

4. faz-se o espalhamento da força lagrangiana, obtendo a força euleriana (Equação 4.26);
5. calcula-se o novo campo do escoamento.

Quase sempre, ao final deste processo, $U_l^{t+\Delta t} \neq U_L^{n+1}$, ou seja a condição de não escorregamento não é satisfeita. Por este motivo, Wang; Fan; Luo (2007) propõem utilizar de forma iterativa o algoritmo do método de forçagem direta, fazendo com que a velocidade nos pontos lagrangianos convirjam para a velocidade da fronteira imersa. Para isso, com o novo valor da velocidade obtida pelo método da forçagem direta ($U_l^{t+\Delta t}$), calcula-se uma nova força lagrangiana e, por fim, estima-se novamente a velocidade na fronteira, $U_l^{t+\Delta t}$. Como a nova força é calculada com base na diferença entre a velocidade obtida ao final da iteração corrente e a velocidade real da fronteira, sua magnitude é menor que a obtida na primeira iteração, pois a velocidade é mais próxima da velocidade da fronteira. Assim, ao longo das iterações a magnitude da força decai, tendendo a 0 (zero) quando a velocidade estimada se aproxima da velocidade da fronteira calculada pelo modelo estrutural U_L^{n+1} . Ao final do processo iterativo, assume-se o valor da força lagrangiana, como sendo o somatório das parcelas de forças obtidas ao longo das iterações.

4.6 Abordagem numérica do modelo estrutural

Neste capítulo serão apresentados os procedimentos numéricos utilizados para calcular as variáveis cinemática do pêndulo. A partir da leitura dos dados de entrada, são obtidos os dados geométricos do pêndulo: o comprimento do fio, R , e o raio da esfera, r_{esf} . Da mesma forma, obtém-se as massas específicas do fluido ρ_f e da esfera ρ_{esf} e o valor da aceleração da gravidade g . Através desses valores, pode-se obter a massa da esfera,

$$m_{esf} = V_{esf} \rho_{esf} = \frac{4}{3} \pi r_{esf}^3 \rho_{esf}, \quad (4.39)$$

em que V_{esf} é o volume da esfera. Consequentemente, pode-se determinar a força peso da esfera, através da Equação 3.16, e o valor da força de empuxo (Equação 3.17).

Da mesma forma, com os valores dos dados de entrada, aplicando-os na Equação 3.22, obtém-se o valor do momento de inércia.

Como a força lagrangiana é obtida através das equações de Navier-Stokes para as direções x , y , z , a força fluido-dinâmica $\vec{F}_f^{n+1}$ também é calculada segundo as três componentes x , y , e z , da seguinte forma:

$$(F_f^{n+1})^x = \sum_{k=1}^N (F_k^{n+1})^x \Delta V_k, \quad (4.40)$$

$$(F_f^{n+1})^y = \sum_{k=1}^N (F_k^{n+1})^y \Delta V_k, \quad (4.41)$$

$$(F_f^{n+1})^z = \sum_{k=1}^N (F_k^{n+1})^z \Delta V_k, \quad (4.42)$$

em que $(F_k^{n+1})^x$ é a parcela de força lagrangiana, em N , que atua sobre uma dada partícula de fluido k , na direção x , ΔV_k é o volume elementar dessa partícula de fluido, em m^3 , e, conseqüentemente, $(F_f^{n+1})^x$ é a força total na direção x que atua sobre toda a superfície da esfera. Analogamente, $(F_k^{n+1})^y$ é a parcela de força lagrangiana que atua sobre uma partícula de fluido k na direção y , $(F_f^{n+1})^y$ é a força total em y que atua sobre a esfera, $(F_k^{n+1})^z$ é a força sobre uma partícula de fluido k na direção z e $(F_f^{n+1})^z$ a força total em z que atua sobre a superfície da esfera. Todas estas forças são calculadas no tempo $n + 1$.

No presente trabalho admiti-se que o movimento é plano, ou seja, a esfera não possui deslocamento na direção y . Para isso, admite-se que:

$$(F_f^{n+1})^y = 0. \quad (4.43)$$

Para se estimar o momento resultante, calcula-se as parcelas dos momentos devido a todos os esforços que atuam sobre a esfera (figura 3.4) e em seguida faz-se o somatório desses momentos. É importante lembrar que a força lagrangiana utilizada para estes cálculos está no instante de tempo $n + 1$.

Desta forma, o momento devido à força peso no tempo $n + 1$ é calculado através da equação:

$$M_P^{n+1} = (P)^\tau R = P \sin(\theta) R = P(x_M^{n+1} - x_O), \quad (4.44)$$

em que $(P)^\tau$ é a componente da força peso na direção τ , x_M é coordenada x do centro de massa no tempo $n + 1$ (ponto M representado na figura 3.4) e x_O é a coordenada x do centro de rotação O , que não varia com o tempo. Desta forma, conhecendo o valor da força peso, da posição do centro de massa e do centro de rotação da esfera no tempo $n + 1$, calcula-se o momento devido a força peso.

Da mesma forma, o momento causado pela força de empuxo no tempo $n + 1$ é calculado da seguinte forma:

$$M_E^{n+1} = (E)^\tau R = E \sin(\theta) R = E(x_M^{n+1} - x_O). \quad (4.45)$$

De forma análoga, os momentos causados pelas componentes da força fluido-dinâmica nas direções x e z são calculadas, respectivamente, através das equações:

$$M_{(F_f)^x}^{n+1} = (F_f^{n+1})^x \cos(\theta) R = (F_f^{n+1})^x (z_M^{n+1} - z_O), \quad (4.46)$$

$$M_{(F_f)^z}^{n+1} = (F_f^{n+1})^z \sin(\theta) R = (F_f^{n+1})^z (x_M^{n+1} - x_O), \quad (4.47)$$

em que z_M^{n+1} é a coordenada z do centro de massa da esfera M e z_O é a coordenada z do centro de rotação do pêndulo, ponto O mostrado na figura 3.4.

Fazendo-se o somatório dos momentos em torno do eixo y' obtém-se:

$$M_{res}^{n+1} = \sum M_O = M_{(F_f)^x}^{n+1} + M_{(F_f)^z}^{n+1} + M_P^{n+1} + M_E^{n+1}. \quad (4.48)$$

Com o valor do somatório dos momentos em torno de 0, através da Equação 3.21 pode-se estimar a aceleração angular $\alpha_{y'}$:

$$\alpha_{y'} = \frac{M_{res}^{n+1}}{I_{y'}}. \quad (4.49)$$

Discretizando a Equação 3.23 permite se estimar a velocidade angular do pêndulo para o tempo $n + 1$:

$$\omega_{y'}^{n+1} = \omega_{y'}^n + \alpha_{y'}^{n+1} \Delta t, \quad (4.50)$$

em que Δt é o incremento de tempo.

Para obter a nova posição angular da esfera discretiza-se a Equação 3.24. Para melhor se estimar a posição angular em $t = n + 1$ admite-se que uma velocidade angular média $\bar{\omega}_{y'}$ ao longo do passo de tempo entre $t = n$ e $t = n + 1$, dada por:

$$\bar{\omega}_{y'} = \frac{\omega_{y'}^n + \omega_{y'}^{n+1}}{2}. \quad (4.51)$$

Desta forma, a nova posição angular pode ser calculada da forma:

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta t \frac{\omega_{y'}^n + \omega_{y'}^{n+1}}{2}. \quad (4.52)$$

Calculado deslocamento angular sofrido pelo pêndulo, pode-se calcular a nova posição para cada ponto lagrangiano, da seguinte forma:

$$x_k^{n+1} = x_k^n + \Delta x = x_k^n + [(x_k^n - x_O) \cos(\Delta\theta) - (z_k^n - z_c^n) \sin(\Delta\theta)], \quad (4.53)$$

$$z_k^{n+1} = z_k^n + \Delta z = z_k^n + [(z_k^n - z_O) \cos(\Delta\theta) - (x_k^n - x_c^n) \sin(\Delta\theta)], \quad (4.54)$$

em que Δx é a translação na direção x , x_k^n e z_k^n são as coordenadas do ponto lagrangiano, x_O e z_O são as coordenadas do centro de rotação, ambas no tempo $t = n$ e $\Delta\theta$ é a variação angular,

$$\Delta\theta = \theta^{n+1} - \theta^n. \quad (4.55)$$

Nota-se que os pontos sofreram translação somente segundo as direções x e z . Isto se deve pois a esfera não possui deslocamento na direção y .

Finalmente, estimada a nova posição dos pontos lagrangianos, estima-se a velocidade desses pontos. Admitindo o fio rígido, a velocidade tangencial em cada ponto lagrangiano k pode ser calculada a partir da velocidade angular da esfera e do raio de rotação para

cada ponto lagrangiano, da mesma forma como calculado para o centro de massa da esfera, Equação 3.25. Desta forma, a velocidade para um determinado ponto lagrangiano é dada por:

$$U_k^{n+1} = (|\vec{x}_k - \vec{x}_O| \bar{\omega}_{y'}) \cos(\theta^{n+1}), \quad (4.56)$$

$$V_k^{n+1} = 0, \quad (4.57)$$

$$W_k^{n+1} = (|\vec{x}_k - \vec{x}_O| \bar{\omega}_{y'}) \sin(\theta^{n+1}), \quad (4.58)$$

em que $\vec{x}_k$ é o vetor posição do ponto lagrangiano em relação ao eixo de coordenadas não inercial e $\vec{x}_O$ é o vetor posição do centro do eixo de coordenadas inerciais, coincidente com o centro de rotação do pêndulo.

Vale observar que a interação do fluido com o fio é desprezada.