

ROMES ANTONIO BORGES

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DOS
ABSORVEDORES DINÂMICOS DE VIBRAÇÕES
NÃO-LINEARES**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
2008**

ROMES ANTONIO BORGES

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DOS ABSORVEDORES DINÂMICOS
DE VIBRAÇÕES NÃO-LINEARES**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Valder Steffen Junior.

**UERLÂNDIA - MG
2008**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

B732c Borges, Romes Antonio, 1971-
Contribuição ao estudo dos absorvedores dinâmicos de
vibrações não-lineares / Romes Antonio Borges. - 2008.

128 f. : il.

Orientador: Valder Steffen Jr.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.

1. Vibração - Teses. 2. Mecânica dos sólidos - Teses. I.
Steffen Júnior, Valder. II. Universidade Federal de Uberlândia.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III.
Título.

CDU: 621:534

*Aos meus pais, **Camilo e Antonia** a minha irmã **Mércia**, a minha esposa **Kely** pelo apoio e incentivo fundamentais à realização deste trabalho, aos meus Filhos **Vinícius e Thiago** e a **Deus** que me ilumina em todos os instantes.*

AGRADECIMENTOS

Ao professor **Valder Steffen Jr.**, que, com sua amizade e muita paciência e dedicação, sempre possibilitou meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Aos **professores** que participaram da banca examinadora e pelas valiosas contribuições ao trabalho.

Ao professor **Domingos Alves Rade**, pela amizade, paciência e dedicação ao longo destes anos.

Ao colega **Antonio Marcos G. Lima**, pelo companheirismo e pela ajuda inestimável.

A todos os colegas do **LMEst** – Laboratório de Mecânica de Estruturas, pelo apoio de sempre.

Ao **CNPq** – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico– pelo apoio financeiro.

À **Faculdade de Engenharia Mecânica** e à Coordenação do Curso de Pós-Graduação, por permitir que o trabalho pudesse ser realizado.

Borges, R.A. 2008, “Contribuição ao Estudo dos Absorvedores Dinâmicos de Vibração Não-Lineares”, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Uberlândia, MG.

Resumo

Em sua forma mais simples, os absorvedores dinâmicos de vibrações são essencialmente dispositivos de parâmetros concentrados de massa-mola-amortecedor que, quando conectados a uma dada estrutura, absorvem grande parte da energia vibratória do sistema no ponto de conexão, levando assim a uma redução do nível de vibração do mesmo. Estes dispositivos podem ser usados em várias configurações e possuem grande aplicação em diversas áreas da engenharia. Infelizmente, no contexto da dinâmica não linear existem poucos trabalhos sobre absorvedores dinâmicos de vibração não lineares (ADVnl), particularmente com relação às estratégias de modelagem e aplicações destes dispositivos. A grande vantagem deste tipo de absorvedores está relacionada à banda de supressão, que é ampliada em relação à encontrada para os absorvedores lineares. Neste trabalho, o efeito da não linearidade é introduzido na rigidez do sistema e, a partir daí, verifica-se como tal efeito pode aumentar a eficiência do dispositivo estudado, em uma banda de frequência de interesse. A partir da resposta em frequência do sistema, é feita uma análise de sensibilidade, resultando os parâmetros mais importantes para fins de projeto e otimização. Finalmente, usando algoritmos genéticos, resolve-se o problema de otimização multiobjetivo, buscando uma solução que atenda tanto o aumento da banda de supressão como a máxima redução da vibração, simultaneamente. A solução ótima robusta é comparada com a solução determinística.

Palavras-chave: Vibrações não lineares, Absorvedores Dinâmicos de Vibrações não-lineares, Analise de Sensibilidade, Otimização robusta multiobjetivo.

Borges, R. A., 2008, "A contribution to the study of Nonlinear Vibration Absorbers ", Doctorate Thesis, Federal University of Uberlândia, School of Mechanical Engineering, Uberlândia, MG, Brazil.

Abstract

In their simplest form, dynamic vibration absorbers (DVAs) are essentially devices of lumped parameters of mass-stiffness-damping that once connected in a given primary structure are capable of absorbing the vibratory energy at the connecting point, providing a reduction of the vibration level. These devices can be used in various configurations and find a number of applications in several areas of engineering. Unfortunately, in the context of nonlinear dynamics, few works had been proposed in the context of the modelling strategies and applications of nonlinear dynamic vibration absorbers (nDVAs). The great advantage of this type of absorber has to do with the suppression bandwidth that is amplified with respect to the one found for the linear absorbers. In the present work, the nonlinear effect is introduced in the stiffness of the system. Then, the interest is devoted to analyzing how this effect can increase the efficiency of this device, for a given interest frequency band. By using the frequency response function of the system, a sensitivity analysis is performed, leading to the most important parameters for design purposes and optimization. Finally, by using genetic algorithms the multi-objective optimization problem is solved, aiming at obtaining a configuration that leads to the largest suppression bandwidth and the maximum vibration reduction, simultaneously. The optimal robust solution is compared with the deterministic one.

Keywords: Nonlinear vibrations, Nonlinear dynamic vibration absorbers, Sensitivity analysis, Robust multiobjective optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Não linearidades geométricas devido à grandes oscilações (a) e acoplamentos entre deslocamentos transversais e longitudinais (b, c.	09
Figura 2.2	Não linearidades devido (a) forças restauradoras e (b) amortecimento.	10
Figura 2.3	Forças não lineares devido a (a) campo magnético e (b) carregamento fluido	12
Figura 2.4	Configurações físicas não lineares devido à (a) molas bi-lineares, (b) molas batentes, (c) restrições para o pêndulo, (d) restrição para a viga engastada, e (e) deflexão com restrições.	13
Figura 2.5	Pêndulo com suporte oscilante.	14
Figura 2.6	Plano de fase e órbitas para o pêndulo livre: caso não amortecido ($\beta = 0$)	18
Figura 2.7	Plano de Fase e órbita para o pêndulo livre (caso amortecido $0 < \beta < 1$)	20
Figura 2.8	Nó Estável: autovalores reais e distintos com $\lambda_1 \lambda_2 > 0$	28
Figura 2.9	Ponto de Sela: autovalores Reais e Distintos com $\lambda_1 \lambda_2 < 0$	28
Figura 2.10	Nó Estável: para $\lambda < 0$ (autovalores Reais e iguais e autovetores distintos)	29
Figura 2.11	Nó Estável: para $\lambda < 0$ (autovalores iguais com autovetores LD)	29
Figura 2.12	Centro Marginalmente estável - Autovalores complexos	30
Figura 2.13	Foco estável para $\text{Re}(\lambda) < 0$ - Autovalores Complexos	30
Figura 2.14	Solução gráfica da eq. 4.8	34
Figura 2.15	Oscilações Harmônicas: Mola Dura	35
Figura 2.16	Oscilações Harmônicas: Mola “Mole” - softening	36
Figura 2.17:	Fenômeno do Salto: Sistema amortecido com Mola Dura	37

CAPÍTULO III

Figura 3.1	Sistema Vibratório de 2gdl.	40
Figura 3.2	Função de Resposta em frequência para a massa principal	42
Figura 3.3	Função de Resposta em Frequência para a massa principal	44
Figura 3.4	Sistema Vibratório de 2 g.d.l. Amortecido	45
Figura 3.5	Frequências relativas à massa m_1 , para diferentes valores do fator de amortecimento.	46

CAPÍTULO IV

Figura 4.1	Sistema de 2 g.d.l. não-linear	50
Figura 4.2	Força de mola não-linear	51
Figura 4.3	Sistema de 2 g.d.l – modelo do absorvedor dinâmico de vibração não linear	60
Figura 4.4	Casos linear e não-linear ($a = 0.01$) – (Amplitude da massa principal)	66
Figura 4.5	Casos linear e não-linear ($a = 0.01$) – (Amplitude da massa do absorvedor).	66
Figura 4.6	Casos linear e não-linear ($a = 20$) (Amplitude da massa principal)	67
Figura 4.7	Casos linear e não-linear ($a = 20$) (Amplitude da massa do absorvedor)	67
Figura 4.8	Deslocamento de X_1 – validação da solução analítica via Método de Perturbação	68
Figura 4.9	Deslocamento de X_2 – validação da solução analítica via Método de Perturbação	68
Figura 4.10	Efeito de ε_2 na solução do sistema (com $\varepsilon_1 = 0$)	69
Figura 4.11	Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = 0,01$; $\beta = 0,1$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,01$; $\mu = 0,05$; $\rho = 1$.	70
Figura 4.12	Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para vários valores de ε_2 e $\beta = 0,1$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,01$; $\mu = 0,05$; $\rho = 1$.	71
Figura 4.13	Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para	71

	$\varepsilon_1 = 0; \varepsilon_2 = 0,01; \beta = 0,125; \zeta_1 = 0.01; \zeta_2 = 0.01; \mu = 0,05; \rho = 1.$	
Figura 4.14	Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = 0; \varepsilon_2 = 0,01; \beta = 0,1; \zeta_1 = 0.01; \zeta_2 = 0; \mu = 0,05; \rho = 1.$	72
	Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para	73
Figura 4.15	$\varepsilon_1 = 0; \varepsilon_2 = 0,02; \beta = 0,125; \zeta_1 = 0.01; \zeta_2 = 0; \mu = 0,05; \rho = 1.$	
Figura 4.16	Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = 0; \varepsilon_2 = 0,02; \beta = 0,125; \zeta_1 = 0.01; \zeta_2 = 0; \mu = 0,1; \rho = 1.1.$	74
Figura 4.17	Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = 0; \varepsilon_2 = -0,01; \beta = 0,1; \zeta_1 = 0.01; \zeta_2 = 0,01; \mu = 0,05; \rho = 1.$	74
Figura 4.18	Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal: $\varepsilon_2 = 0; \beta = 0,1; \zeta_1 = 0.01; \zeta_2 = 0,01; \mu = 0,05; \rho = 1.$	75
Figura 4.19	Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = 0,01; \varepsilon_2 = 0,01; \beta = 0,1; \zeta_1 = 0.01; \zeta_2 = 0,01; \mu = 0,05; \rho = 1.$	76
Figura 4.20	Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = 0,01; \varepsilon_2 = -0,01; \beta = 0,1; \zeta_1 = 0.01; \zeta_2 = 0,01; \mu = 0,05; \rho = 1.$	77
Figura 4.21	Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = -0,01; \varepsilon_2 = 0,01; \beta = 0,1; \zeta_1 = 0.01; \zeta_2 = 0,01; \mu = 0,05; \rho = 1.$	77
Figura 4.22	Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = -0,01; \varepsilon_2 = -0,01; \beta = 0,1; \zeta_1 = 0.01; \zeta_2 = 0,01; \mu = 0,05; \rho = 1$	78

CAPÍTULO V

Figura 5.1	Estratégia NSGA	88
Figura 5.2	Noção de dominância	90
Figura 5.3	Espaço convexo (a) e não convexo (b).	90
Figura 5.4	Soluções ótimas robustas	94
Figura 5.5	Metodologia de otimização multiobjetivo robusta.	95
Figura 5.6	Ilustração da Banda de Supressão	99
Figura 5.7	Banda de Supressão: Configuração inicial ($B = 6,45 \text{ rad/s}$) e	100

Configuração ótima ($B^* = 8,06 \text{ rad/s}$) – Amplitude da massa principal

Figura 5.8	Sensibilidade da resposta em frequência com relação a ξ_1 (a)	101
Figura 5.9	Sensibilidade da resposta em frequência com relação a ξ_2	102
Figura 5.10	Sensibilidade da resposta em frequência com relação a ε_1	103
Figura 5.11	Sensibilidade da resposta em frequência relação a ε_2	103
Figura 5.12	Sensibilidade da resposta em frequência com relação a β	104
Figura 5.13	Sensibilidade da resposta em frequência com relação a μ	105
Figura 5.14	Sensibilidade da resposta em frequência com relação a ρ .	105
Figura 5.15	Representação das funções objetivo f_1 e f_2 .	106
Figura 5.16	Representação da função custo f_1 e sua vulnerabilidade.	108
Figura 5.17	Representação da função custo f_2 e sua vulnerabilidade.	109
Figura 5.18	Comparação entre as soluções robustas e determinísticas.	109
Figura 5.19	Envelopes das funções resposta em frequência determinística.	110
Figura 5.20	Envelopes das funções resposta em frequência robusta.	111
Figura 5.21	Resposta em Frequência: otimização determinística (a), otimização robusta (b)	111

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Valores dos parâmetros utilizados para obtenção ADV não amortecido	65
Tabela 5.1	Valores Iniciais e ótimos das variáveis de projeto	99
Tabela 5.2	Valores nominais das variáveis de projeto	100
Tabela 5.3	Variáveis de projeto e variações admissíveis correspondentes.	107
Tabela 5.4	Definição dos parâmetros do NSGA usados no processo de otimização.	107
Tabela 5.5	Soluções ótimas para os pontos Pd e Pr	110

LISTA DE SÍMBOLOS

M:	Matriz de massa
F_0	Força harmônica
Ω	Freqüência de excitação do sistema
ω_n	Freqüência natural da principal do sistema
ω_a	Freqüência natural da massa secundária do sistema
m_1	Massa principal do sistema
m_2	Massa secundária do sistema
k_1	Coeficiente de rigidez da massa principal
k_2	Coeficiente de rigidez da massa secundária
X_1	Amplitude de vibração da massa principal do sistema
X_2	Amplitude de vibração da massa secundária do sistema
x_1	Deslocamento da massa principal do sistema
x_2	Deslocamento da massa secundária do sistema
x	Deslocamento relativo do sistema
c_1	Coeficiente de Amortecimento da massa principal do sistema
c_2	Coeficiente de Amortecimento da massa secundária do sistema
a	Fator de não-linearidade
I_n	Termos da expansão das funções de Bessel
k_i^{nl}	Rigidez com características não linear
C:	Matriz de amortecimento

$\mathbf{K}$:	Matriz de rigidez
ε_1	Coeficiente de não linearidade da mola que liga a massa principal a base.
ε_2	Coeficiente de não linearidade da mola que liga a massa secundária à massa principal
β	Parâmetro de força normalizado
ξ_1	Coeficiente de amortecimento da massa principal
ξ_2	Coeficiente de amortecimento da massa secundária
μ	Razão de massas
ρ	Densidade
r_1 :	Amplitude de resposta
f :	Função custo
f^v :	Dispersão da função custo
$\mathbf{p}$:	Vetor das variáveis de projeto
μ_f :	média
σ_f ::	Desvio padrão
$S_{FRF}^N(p)$	Função de sensibilidade
x_i, x_j	Indivíduos do processo de otimização
sh	Função de nicho
$d(x_i, x_j)$	Distância euclidiana entre dois indivíduos x_i e x_j
(σ_f / μ_f)	Medida da dispersão da função custo
$f_i^v(\mathbf{x})$	Função vulnerabilidade da função objetivo
Pr	Ponto robusto
Pd	Ponto determinístico
Δ	Dispersão das variáveis de projeto

SUMÁRIO

Resumo	vii
Abstract	ix
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xv
Lista de Símbolos	xvii
CAPÍTULO I - Introdução	01
CAPÍTULO II – Introdução aos Sistemas Não-Lineares	07
2.1– Introdução	07
2.2 – Fontes de Não Linearidade	07
2.2.1 <i>Não Linearidades em Função da Geometria do Sistema</i>	08
2.2.2 <i>- Não Linearidade em Função do Material</i>	09
2.2.3 <i>– Forças Não Lineares Atuantes em um Corpo</i>	11
2.2.4 <i>- Não Linearidades em Função da Configuração do Sistema</i>	12
2.3 - Pêndulo Com Suporte Oscilante	14
2.3.1 <i>Análise Qualitativa</i>	14
2.3.2 <i>Análise Qualitativa do Sistema Livre</i>	16
2.3.3. <i>O Plano de Fase</i>	17
2.3.4 <i>Pontos Singulares</i>	20
2.3.5 <i>Estabilidade dos pontos singulares</i>	20
2.3.6 <i>Comportamento de órbitas próximas a pontos singulares</i>	24
2.3.6.1 <i>Autovalores da matriz Jacobiana para $n=2$</i>	25
2.3.6.2 <i>Transformação de Similaridade</i>	25
2.3.6.3 <i>Formas Canônicas de Jordan</i>	26
2.3.6.4 <i>Órbitas para as Formas Diagonais de Jordan</i>	27
2.3.7 <i>Órbitas para as Formas Não-Diagonais de Jordan</i>	30
2.3.8 <i>Topologia Orbital para o Caso do Pêndulo</i>	31

2.4 Vibrações Forçadas	32
2.4.1. O Fenômeno do Salto (<i>Jump Phenomenon</i>)	32
2.4.2 Sistemas sem amortecimento	33
2.4.3. Sistema Amortecido	36
Capítulo III - Introdução aos Absorvedores Dinâmicos de Vibrações	39
3.1. Introdução	39
3.2. Estudo de um Absorvedor Dinâmico de Vibração Não Amortecido – Caso Linear	40
3.3 Estudo de um Absorvedor Dinâmico de Vibração Amortecido – Caso Linear	44
Capítulo IV - Absorvedores Dinâmicos de Vibração Não Lineares	49
4.1 Estudo de um Absorvedor Dinâmico de Vibração Não Linear Não Amortecido, Utilizando Funções de Bessel.	49
4.1.1 Características da Mola Não-Linear	50
4.1.2 Equacionamento do Problema	51
4.1.3 Desenvolvimento da Força Não-Linear da Mola em Termos das Funções de Bessel	54
4.1.4 Equações do Movimento	55
4.1.5 Cálculo da Função de Resposta em Frequência da Massa Principal e do Absorvedor	57
4.2. Resposta de um absorvedor dinâmico de vibração utilização de Métodos de perturbação	58
4.2.1 Método de resolução no domínio do tempo utilizando o Método de Perturbação conhecido como Método da Expansão	58
4.3 Absorvedor Dinâmico de Vibração Amortecido, montado sobre molas com Características Não Lineares.	60
4.3.1. Resposta em Regime Permanente	63
4.3.2 Obtenção de Resultados	64
4.4 Aplicações Numéricas	65
4.4.1 Resposta em Frequência do ADV não amortecido – Equações do Movimento resolvidas através das Funções de Bessel	65
4.4.2 Resposta no tempo do ADV não amortecido – Equação do Movimento resolvida via Técnicas de Perturbação – Método da expansão	67
4.4.2. Resposta em Frequência do ADV amortecido – Equações do Movimento resolvidas através de Técnicas de Perturbação – Método da Média	69

4.4.2.1. Absorvedor montado sobre mola com características lineares	75
4.4.2.2 A Massa principal e o Absorvedor são montados sobre molas com características lineares	75
Capítulo V - Otimização Robusta e Análise de Sensibilidade para o Projeto Ótimo-Robusto de ADVs Não-Lineares	79
5.1 Otimização – Conceitos Básicos	79
5.2 Otimização Multiobjetivo Determinística	83
5.2.1 Algoritmos Evolucionários (AEs) – Implementação do NSGA	86
5.2.2 Definição do problema multiobjetivo e noção de dominância.	88
5.1.2 Escolha de um método de otimização multiobjetivo.	90
5.3 – Otimização Multiobjetivo Robusta	91
5.3.1 Critério de Robustez para a Otimização Multiobjetivo Robusta	91
5.4 Sensibilidade Paramétrica de Sistemas Incorporando ADVs Não-Lineares.	95
5.4.1 Definição da sensibilidade paramétrica – Avaliação por diferenças finitas	96
5.5 Aplicações numéricas	98
5.5.1 O Caso do ADV Não Linear Não Amortecido da seção 4.1	98
5.5.2 Sensibilidade paramétrica	100
5.5.3 Projeto ótimo-robusto do ADV não-linear	106
Capítulo VI – Conclusões e Perspectivas de trabalhos Futuros	113
6.1. Conclusões Gerais	113
6.2. Perspectivas para Trabalhos Futuros	118
Capítulo VII – Referencias Bibliográficas	119
Apêndice A	127

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Absorvedores dinâmicos de vibrações, que podem ter características lineares ou não lineares, são dispositivos mecânicos usados para atenuação de vibrações indesejadas em estruturas. Seu desenvolvimento é datado do início do século passado e continuam tendo vasto campo de aplicação na engenharia mecânica e também em outras áreas da engenharia, tais como a civil e a aeroespacial. Podem ser citadas como aplicações práticas destes dispositivos, os estabilizadores de navios, os mecanismos de absorção de vibração em linhas de transmissão de potência, os sistemas de redução de vibração em estruturas rígidas contínuas de grande porte como, por exemplo, torres de antenas de transmissão de ondas de rádio e os dispositivos de proteção de construções civis contra abalos sísmicos, dentre outras.

Diversos métodos destinados ao controle dos níveis de vibração foram desenvolvidos e vêm sendo extensivamente utilizados, abrangendo desde os métodos simples e econômicos de controle passivo (usualmente a partir de materiais com propriedades de dissipação de energia), até sofisticados e dispendiosos métodos de controle ativo com malha fechada (utilizando atuadores controlados por computadores digitais). Uma solução intermediária bastante interessante, do ponto de vista da eficiência e do custo de implementação, são os chamados Absorvedores Dinâmicos de Vibrações (ADVs). Tais dispositivos são basicamente constituídos por subsistemas – apêndices do tipo massa-mola-amortecedor que, uma vez acoplados à estrutura na qual se deseja atenuar os níveis de vibrações, absorvem parcial ou totalmente a energia vibratória no ponto de acoplamento (KORONEV; REZNIKOV, 1993).

Nos últimos anos, é crescente o interesse em se estudar os absorvedores de vibração com características não lineares, devido a sua maior robustez quando comparado com o absorvedor linear (OEINI et al 1999a), (NISSEN, 1985). Tal robustez tem a ver com o fato de o ADV tradicional funcionar satisfatoriamente apenas em sua frequência de sintonização. Vários tipos de absorvedores com diferentes tipos de não linearidade estão sendo estudados com a finalidade de desenvolver ferramentas modernas para se obter melhores resultados quanto à atenuação de vibração em estruturas. Além dos trabalhos citados anteriormente, destaca-se também o trabalho publicado por Oeini et al, (1999b) que trata de

um ADV com não linearidade cúbica, Pai, (1998), trabalha no sentido de estudar a estabilidade da resposta deste tipo de sistema. Estes aspectos, relacionados à eficiência do absorvedor não linear, podem ainda ser melhorados com o uso de técnicas de otimização, buscando encontrar a banda de frequência ótima de operação do sistema, esta denominada como “banda de supressão”, na literatura afim (JORDANOV, 1988).

Os sistemas lineares, na realidade, representam certa abstração matemática – uma visão útil, porém bastante simplificada do mundo físico – através da qual os sistemas encontrados na natureza são representados. Entretanto, pode-se dizer que os sistemas físicos encontrados no mundo real e os dispositivos e sistemas de engenharia projetados e construídos pelo homem são inerentemente não lineares.

Uma das razões pelas quais os engenheiros preferem trabalhar com sistemas lineares e suas teorias, apesar dos modelos lineares serem abstrações matemáticas, é que muitos sistemas reais operam dentro de uma faixa limitada, onde uma aproximação linear é suficiente para seu entendimento, previsão e controle de seu comportamento dinâmico. Outro ponto relevante é que os modelos lineares são matematicamente semelhantes e podem ser analisados dentro de uma metodologia cujo desenvolvimento teórico se acha quase completamente consolidado, em decorrência do enorme esforço empreendido nesta direção, ao longo de muitas décadas. Os sistemas não lineares, por outro lado, são altamente diversificados, exigindo que muitas vezes a metodologia a ser utilizada seja *ad-hoc*. E, além disso, para os sistemas não lineares, há um número de ferramentas analíticas e numéricas impressionante competindo entre si, sendo que algumas se acham somente parcialmente desenvolvidas e ainda sujeitas a controvérsias dentro da comunidade científica (THOMSEN 2003). Isso significa que, para os sistemas não lineares, o arcabouço científico de análise se acha ainda em construção.

Muitos problemas de engenharia podem ser linearizados sem grandes prejuízos. Alguns fenômenos, entretanto, não podem ser prognosticados pela teoria linear. É necessário, portanto, ter meios de estimar o efeito da linearização para se saber quando a análise não linear é exigida.

Comparando sistemas lineares com não lineares, estes últimos apresentam características próprias que os distinguem dos primeiros:

1. O princípio da superposição não é válido para sistemas não lineares. Por exemplo, se uma força aplicada em um determinado sistema é dobrada, a resposta não o será necessariamente. Em outras palavras, a resposta do sistema não linear pode ser dependente, simultaneamente, da frequência e da amplitude da excitação.

2. Os sistemas não lineares podem ter mais de uma posição de equilíbrio, dependendo das condições de operação, diferentemente dos sistemas lineares, que têm somente uma posição de equilíbrio.

As equações lineares que descrevem os sistemas físicos reais são lineares apenas em uma primeira aproximação. A literatura aponta que, como o tratamento de equações diferenciais não lineares é naturalmente mais complexo que o reservado para as equações lineares (THOMSON, 1996), procura-se trabalhar com modelos lineares, sempre que possível. Observa-se que a linearização freqüentemente resulta em uma boa representação das características físicas do sistema em análise, resultando uma descrição que satisfaz, em geral, à maioria das necessidades práticas dos engenheiros. Entretanto, há casos em que o sistema linearizado não fornece uma representação suficientemente exata como, por exemplo, no caso de sistemas elásticos com oscilações de grande amplitude.

Na engenharia moderna, com o contínuo avanço da tecnologia e o aumento da capacidade dos computadores digitais, associados à tendência de se optar por estruturas cada vez mais leves e flexíveis num contexto em que se diminuem as tolerâncias de projeto, a teoria dos sistemas não lineares ganha cada vez mais significado prático. Com poucas exceções, geralmente não é possível encontrar soluções analíticas para as equações diferenciais que representam oscilações não lineares. Naturalmente, uma solução numérica conduz ao objetivo quando se deseja determinar o movimento correspondente à vista de determinadas condições iniciais. Entretanto, tal estratégia é de pouco uso na procura dos vários tipos de soluções e da respectiva dependência das soluções em relação aos parâmetros individuais que constituem o modelo matemático do sistema.

De acordo com Thomsen (2003), algumas razões para os engenheiros e projetistas se preocuparem com o conhecimento dos fenômenos não lineares são as que seguem:

- Os sistemas reais são não lineares. Porém, sempre que possível, há a tentativa de se linearizar os sistemas, uma vez que a teoria linear é bem estabelecida e direta. Entretanto, quando se lineariza, informações essenciais podem ser perdidas. Então, é necessário reconhecer adequadamente os mecanismos não

lineares e compreender seus possíveis impactos e significância, dentro de um dado sistema.

- Não linearidades podem ocasionar desvios significativos entre observações experimentais e predições de modelos lineares. Dessa forma, é importante reconhecer a importância do fenômeno não linear, como têm mostrado simulações experimentais e computacionais.
- Utilizar modelos não lineares sem se possuir um conhecimento teórico bem fundamentado é, no mínimo, sem sentido. Não se pode, como em sistemas lineares, se obter um “sentido” geral para a dinâmica não linear simplesmente utilizando no modelo alguns conjuntos de parâmetros. Nos sistemas não lineares são observadas ramificações de soluções múltiplas, extrema sensibilidade às condições iniciais, descontinuidades nas respostas, efeitos especiais às altas frequências, e vários outros efeitos não-triviais que demandam a atenção do analista.
- Não linearidades podem alterar qualitativamente a resposta do sistema. Deve-se conhecer as bifurcações não lineares e ter familiaridade com os métodos mais comuns de análise de perturbação, além de se adquirir boa experiência na utilização dos métodos de análise.
- Estruturas mecânicas modernas são freqüentemente flexíveis, muito leves, operam em alta velocidade e são dinamicamente controladas. Essas estruturas são mais facilmente levadas a um regime não linear do que aquelas em que a rigidez elevada, o tipo de carregamento e o caráter passivo das estruturas tradicionais, permitem considerá-las como lineares.
- Problemas não lineares, atualmente, não podem mais serem considerados de difícil tratamento, razão comumente evocada no passado em favor da linearização (MONTEIRO, 2002). Agora, pode-se dizer que se dispõe de melhores condições para a análise de sistemas não lineares, usando-se métodos matemáticos avançados, recursos computacionais de alto desempenho e

considerável experiência adquirida ao longo das últimas décadas, capazes de tratar eficientemente vários tipos de não linearidades.

O grupo de Dinâmica da Faculdade de Engenharia Mecânica da UFU tem se interessado pelos problemas de controle (ativo e passivo) de vibrações. Apenas no caso de absorvedores dinâmicos de vibração, deve-se destacar os trabalhos de Marques (1998), Cunha Jr. (1999, 2004), e Kotinda (2005). Também dentro deste contexto, a dissertação de Viana (2005), dedica-se ao estudo de um tipo especial de absorvedor com características mecatrônicas. Trata-se do uso de cerâmicas piezoelétricas associadas a circuitos elétricos (Shunts) ressonantes. Os absorvedores de vibração clássicos absorvem a energia cinética da massa principal. Já este último absorvedor absorve energia de deformação que é transformada em energia elétrica que é finalmente dissipada pelo efeito Joule. Entretanto nos casos anteriormente mencionados, dedicou-se ao estudo de sistemas lineares apenas.

Neste trabalho tem-se como objetivos, estudar os absorvedores dinâmicos de vibrações não-lineares, com o objetivo de avaliar a contribuição das não linearidades diante da necessidade de melhorar a eficiência de tais dispositivos na atenuação de vibrações. Para a resolução dos sistemas de equações diferenciais não lineares serão empregadas várias técnicas visando com isto, fornecer uma quantidade maior de ferramentas para o trato com este tipo de sistema. Em um dos casos o sistema será resolvido a partir da técnica numérica denominada como Runge-Kutta de quarta ordem para fins de validação de uma das técnicas de perturbação utilizadas. Além disso, são resolvidos problemas de otimização usando técnicas heurísticas para determinação dos parâmetros ótimos dos absorvedores, objetivando aumentar a chamada “*banda de supressão*”. Para resolver o problema de otimização será empregado análise de sensibilidade por diferenças finitas para verificar quais parâmetros são importantes no processo. Além disso, através da formulação de um problema de otimização multi-objetivo, deseja-se também minimizar a amplitude de vibração do sistema. Como resultado, espera-se aumentar a faixa de operação dos absorvedores não lineares, tornando-os mais robustos. Esta última característica há de permitir que o dispositivo de dissipação seja capaz de manter sua eficiência, mesmo quando pequenas alterações ocorrem no sistema primário no qual é instalado o absorvedor não linear.

Este trabalho está dividido em 7 capítulos organizados conforme descrito abaixo:

Capítulo II: Este Capítulo traz uma revisão detalhada sobre sistemas não lineares;

Capítulo III: Neste capítulo é feita uma revisão sobre os absorvedores dinâmicos de vibração, com enfoque linear;

Capítulo IV: O Capítulo 4 traz os conceitos básicos sobre os absorvedores dinâmicos de vibração não-lineares, destacando alguns estudos de casos;

Capítulo V: Aqui é apresentada uma análise de sensibilidade dos parâmetros do ADVnl. Utiliza-se uma técnica de otimização robusta multi-objetivo, baseada na abordagem de Monte Carlo, a fim de minimizar a amplitude de vibração do sistema ao mesmo tempo em que se maximiza a banda de supressão.

Capítulo VI: Neste capítulo tem-se as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros;

Capítulo VII: Finalmente, neste capítulo, são listadas as referências bibliográficas.

CAPÍTULO II

INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS NÃO-LINEARES

2.1 Introdução

A natureza é essencialmente não linear. Assim sendo, a descrição e a análise de fenômenos naturais através de modelos ou técnicas não lineares são mais eficientes do que os modelos ou técnicas lineares. Contudo, as dificuldades inerentes ao estudo dos problemas não lineares, e o sucesso da mecânica linear numa ampla faixa de situações de interesse da engenharia, acabaram por incentivar o estudo de modelos linearizados e bem comportados.

A análise não linear tem sido tradicionalmente evitada na literatura, criando um paradigma linear. Segundo Savi (2006), Euler explicita bem a dificuldade de tratar problemas não lineares quando fala sobre o movimento de fluidos: *“Se não nos é permitido penetrar a um conhecimento completo sobre o movimento dos fluidos, não é a mecânica e à insuficiência dos princípios conhecidos do movimento que se deve atribuir a isto, mas à própria análise que aqui nos abandona”*.

A discussão que segue tem por finalidade apresentar uma abordagem introdutória aos sistemas não lineares e é fundamentada, principalmente, no trabalho anterior de Thomsen (2003).

2.2 Fontes de Não Linearidade

Não linearidades podem ser consideradas no modelo do sistema dinâmico de muitas maneiras. Sua origem pode ser devido à geometria do sistema ou do tipo de material, ou associada com a presença de forças não lineares ou com a própria configuração física do problema. Qualquer que seja sua origem, não linearidades podem entrar nas equações do sistema de maneiras similares. Todavia é muito rara a possibilidade de se deduzir a origem ou razão física da não linearidade a partir de suas representações matemáticas. Qualquer componente das equações do movimento pode ser afetado por algum tipo de não linearidade:

- Os termos inerciais;

- Os termos que descrevem forças restauradoras elásticas e inelásticas;
- Os termos dissipativos;
- Os termos que descrevem a excitação externa;
- As condições de contorno do sistema.

Os termos não lineares são reconhecidos pelas funções não lineares das variáveis dependentes das equações do movimento. Por exemplo, se $u(t)$ descreve o movimento de um sistema, com u sendo a variável dependente da variável independente t , então os termos u^3 , $u\ddot{u}$, $\text{sen } u$ e $|u|$ são não lineares, enquanto t^2u , $u \text{sen } \theta$ e $e^{-t}\ddot{u}$ são termos lineares.

2.2.1. Não Linearidades em Função da Geometria do Sistema

As não linearidades expressas em função da geometria do sistema são tipicamente importantes nos casos de grandes deflexões ou rotações, aparecendo também em função de outras características puramente cinemáticas. Por exemplo, a dinâmica do pêndulo da Fig. 2.1(a) é governada pela equação do movimento:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \text{sen } \theta = 0 \quad (2.1)$$

Utilizando a série de Taylor para expansão do termo não linear $\text{sen } \theta$, tem-se

$$\text{sen } \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots, \quad (2.2)$$

mostrando assim que a aproximação linear

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (2.3)$$

é válida somente para pequenas oscilações θ , onde apenas o primeiro termo da expansão da função $\text{sen } \theta$ é considerado.

A viga da Fig. 2.1(b) é axialmente acoplada com uma mola linear. Aqui o deslocamento horizontal w do movimento não está linearmente relacionado com a deflexão transversal u . Para o primeiro modo, com uma aproximação de terceira ordem para a equação dinâmica do movimento, esta toma a forma

$$\ddot{a} + \omega_0^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_c} \right) a + \gamma^2 a^3 = 0 \quad (2.4)$$

onde a é deflexão no ponto médio da viga, γ^2 é uma constante positiva dependente da rigidez da mola, P_0 é o pré-carregamento da mola e P_c é o carregamento crítico de flambagem. Observa-se que, para cargas pós-críticas, tem-se $(1 - P_0/P_c) < 0$, e, portanto, existem três posições de equilíbrio: $a = 0$ e $a = \pm(\omega_0/\gamma)(P_0/P_c - 1)^{1/2}$. Sistemas não lineares freqüentemente têm múltiplos estados de equilíbrio. Dessa forma, um sistema que possui mais de uma posição de equilíbrio, é certamente não linear.

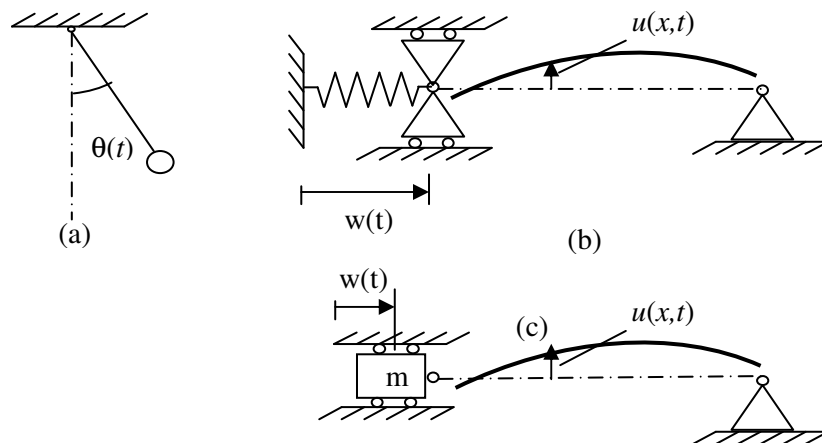


Figura 2.1 – Não linearidades geométricas devido a grandes oscilações (a) e acoplamentos entre deslocamentos transversais e longitudinais (b, c) – adaptado de Thomsen, 2003.

A Fig. 2.1(c) mostra a configuração de um sistema causando o aparecimento de termos inerciais não lineares nas equações do movimento. Oscilações transversais da viga são acompanhadas de pequenos deslocamentos horizontais w da massa móvel m , e por isso a massa exerce uma força axial $-m\ddot{w}$ na viga. Para oscilações finitas, w não é linearmente relacionado à deflexão u . Para um único modo, feita uma aproximação de terceira ordem para a equação que descreve os movimentos transversais, tem-se

$$\ddot{a} + \omega_0^2 a + \eta(a\ddot{a} + \dot{a}^2)a = 0 \quad (2.5)$$

onde a é a deflexão no ponto médio entre os dois extremos da viga, e a constante η depende da relação entre a massa m e a massa total da viga.

2.2.2. Não Linearidade em Função do Material

Para os exemplos das vigas, Fig. 2.1 (b) e 2.1 (c) do item anterior, o material estrutural foi assumido como sendo linearmente elástico. Entretanto, todos os materiais reais obedecem a uma relação não linear entre tensão e deformação (e entre força e

deformação), que deve ser considerada quando as variações de intensidade das forças são muito grandes.

No sistema da Fig. 2.2 (a), a mola é utilizada para representar a rigidez do material não linear. A equação do movimento pode ser expressa por

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \gamma x^3 = 0 \quad (2.6)$$

Se $\gamma > 0$, a rigidez aumenta com o aumento da deformação e diz-se que a não linearidade é do tipo que enriquece (*hardening spring*). A equação do movimento é idêntica à Eq. (2.4) com $P_0 < P_c$, descrevendo o carregamento subcrítico da viga da Fig. 2.1(b). Se $\gamma < 0$, a rigidez decresce com o aumento da deformação e, diz-se agora que a não linearidade é do tipo que abranda (*softening spring*). Matematicamente, este caso é similar ao da Fig. 2.1(b) e Eq. (2.4) com $P_0 > P_c$, e ao caso do pêndulo da Fig. 2.1(a) e Eq. (2.1) para o termo não linear $\sin\theta$, considerando-se apenas os dois primeiros termos de sua expansão por série de Taylor, conforme a Eq. (2.2).

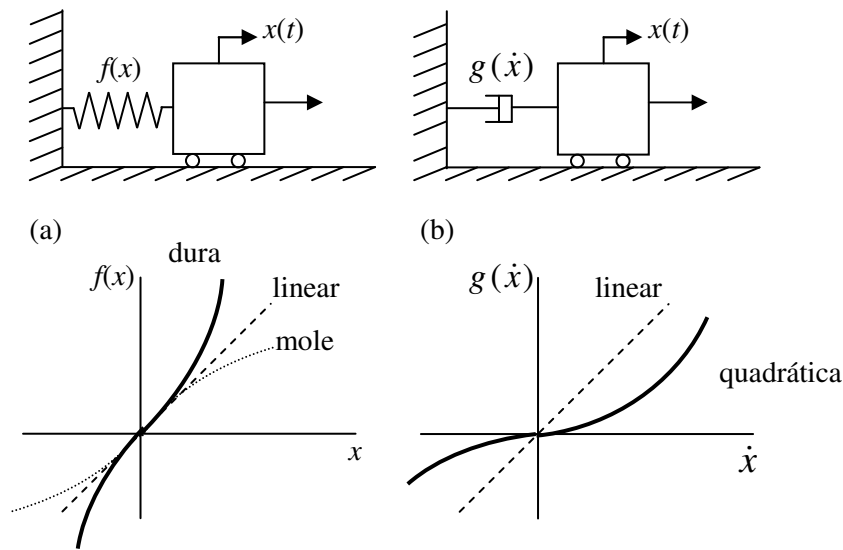


Figura 2.2 – Não linearidades devido (a) forças restauradoras e (b) amortecimento – adaptado de Thomsen, 2003.

O amortecimento não linear pode causar também o aparecimento de termos dissipativos não lineares nas equações do movimento (assim como podem certas não linearidades puramente geométricas). O sistema na Fig. 2.2(b) exibe um amortecimento quadrático. Forças de amortecimento deste tipo podem ser expressas por

$$g(\dot{x}) = \mu \dot{x} |\dot{x}| \quad (2.7)$$

que é aproximadamente a resistência ao movimento experimentada por um corpo que se move através de um fluido com número de Reynolds elevado. Forças devido ao atrito seco são tipicamente descritas pelo atrito de Coulomb, conforme a eq. (2.8)

$$g(\dot{x}) = \mu \dot{x} / |\dot{x}| \quad (2.8)$$

2.2.3. Forças Não Lineares Atuantes em um Corpo

Certos tipos de forças atuantes em um corpo podem variar não linearmente com o estado do sistema. Para a viga engastada livre sujeita ao campo magnético da Fig. 2.3(a), a energia potencial total inclui a energia potencial magnética V_m . Esta energia pode ser aproximada por meio dos primeiros termos da série de Taylor:

$$V_m = \frac{1}{2} \gamma_1 a^2 + \frac{1}{2} \gamma_1 a^4 \quad (2.9)$$

onde $a = a(t)$ é o deslocamento da extremidade livre da viga devido ao campo magnético aplicado. A presença de termos de ordem superior a dois na equação da energia potencial faz com que apareçam não linearidades na equação do movimento. Para a viga, a aproximação do primeiro modo toma uma forma similar à da Eq.(2.4), com o termo restaurador não linear tendo um coeficiente de rigidez linear negativo para intensidades pós-críticas do campo magnético.

Forças aerodinâmicas e associadas ao fluido são freqüentemente linearizadas quando da análise de sistemas dinâmicos, certamente devido aos problemas causados pela não linearidade. Entretanto, algumas situações podem requerer a consideração apropriada da não linearidade de certas forças, como por exemplo, nos problemas envolvendo estruturas sujeitas a fluxos supersônicos (Fig. 2.3(b)). Em problemas de controle estrutural, as forças de controle aplicadas podem aparecer como uma função não linear qualquer das variáveis de estado do sistema a ser controlado, merecendo atenção apropriada.

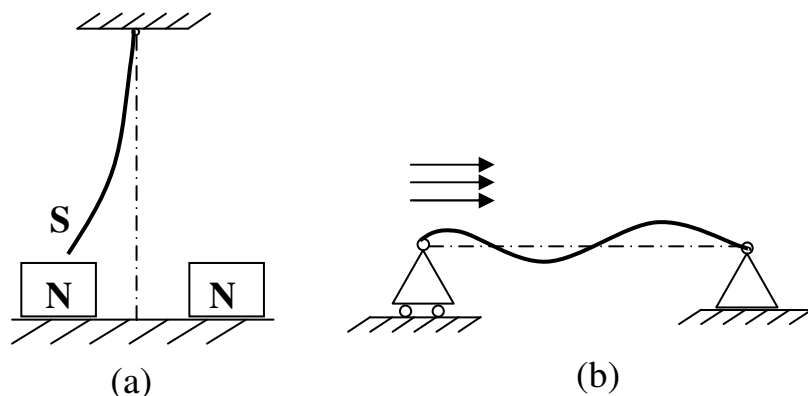


Figura 2.3 – Forças não lineares devido a (a) campo magnético e (b) carregamento fluido – adaptado de Thomsen, 2003

2.2.4. Não Linearidades em Função da Configuração do Sistema

Quando componentes individuais do sistema são lineares, ou operam em uma faixa linear, configurações físicas específicas destes componentes podem causar determinadas combinações que fazem com que o sistema resultante apresente comportamento não linear. Para os sistemas das Fig.2.4(a) e 2.4(b), a combinação da ação de duas molas lineares corresponde à ação de uma força restauradora não linear (THONSEN, 2003).

A Fig. 2.4(c) mostra um pêndulo com atuação restrita, que pode ser utilizado para introduzir amortecimento na estrutura conectada a ele. Se a oscilação é pequena, o pêndulo tem comportamento linear nos períodos de oscilação livre, enquanto que alterações não lineares na velocidade ocorrem nos momentos de colisões com a parede de restrição ao movimento. Um comportamento linear por partes caracteriza a viga engastada-livre do sistema da Fig. 2.4(d). A equação do movimento é uma equação diferencial parcial de quarta-ordem, sujeita a condições de contorno lineares na extremidade engastada da viga. Condições de contorno não lineares são impostas na outra extremidade da viga que se apresenta alternadamente livre e restrita.

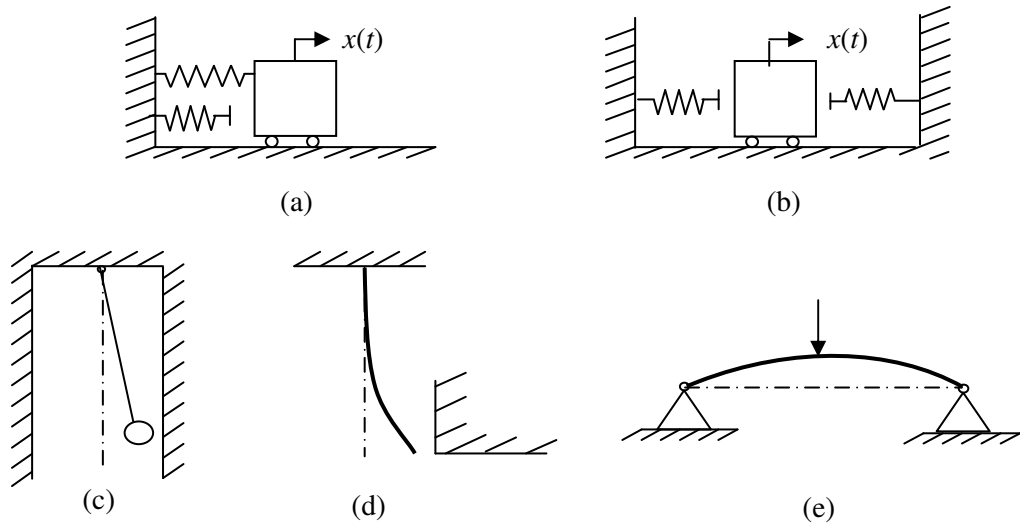


Figura 2.4 – Configurações físicas não lineares devido à (a) molas bi-lineares, (b) molas batentes, (c) restrições para o pêndulo, (d) restrição para a viga engastada, e (e) deflexão com restrições – adaptado de Thomsen, 2003.

A viga ilustrada na Fig. 2.4(e) está sujeita a uma deflexão não linear. Devido à imobilidade de suas extremidades, qualquer deflexão transversal é acompanhada de uma deflexão longitudinal, ou seja, de forças axiais que são não-linearmente relacionadas às deformações transversais. A equação do movimento se escreve

$$\rho A \ddot{u} + EI u'''' - \frac{EA}{2l} \left[\int_0^l (u')^2 dx \right] u'' = 0 \quad (2.10)$$

onde $u = u(x, t)$ é a deflexão transversal, ρA é a massa por unidade de comprimento, EI a rigidez de flexão, EA a rigidez longitudinal, e a integral expressa a força axial. Uma aproximação para um único modo para esta equação tem a forma da Eq. (2.4), com um coeficiente de rigidez linear positivo. O termo não linear desaparece se a uma das extremidades da viga é permitida over livremente na direção longitudinal. Então, apesar dessa não linearidade ter origem geométrica, ela se manifesta somente para certas configurações físicas. Deflexões não lineares proporcionam uma fonte de não linearidade para muitas estruturas curvas, como arcos e cascas, e, também, para estruturas planas, tais como vigas e placas que apresentam algum tipo de restrição para seus deslocamentos.

2.3 Pêndulo Com Suporte Oscilante

Como um primeiro exemplo para demonstração da análise não linear, seja um pêndulo cuja articulação executa uma oscilação harmônica, resultando um comportamento dinâmico interessante. Através deste, muitos dos conceitos, fenômenos e ferramentas próprias para a análise não linear serão introduzidos.

Será explorado primeiramente o caso das oscilações não-lineares livres do pêndulo. Para tanto, será estudado o conceito de *plano de fase*, *pontos singulares*, *estabilidade de pontos singulares* e *comportamento local*. Posteriormente, faz-se uma análise quantitativa partindo do método conhecido como *análise de perturbação*.

O pêndulo com suporte oscilante é conhecido por exibir comportamento caótico para certos valores assumidos por seus parâmetros físicos (Hagedorn, 1988). Todavia, como o caos é geralmente um fenômeno global, este não é caracterizado pelos métodos locais descritos abaixo.

2.3.1 Análise Qualitativa

A Fig.(2.5) mostra um pêndulo caracterizado por uma massa m , braço de comprimento l e ângulo de rotação dado por $\theta(t)$. O pêndulo é sujeito a um campo de gravidade g , e a um momento de amortecimento viscoso igual a $-cl^2\dot{\theta}$. A posição $u(t)$ do suporte articulado oscila harmonicamente com uma amplitude ql e frequência Ω

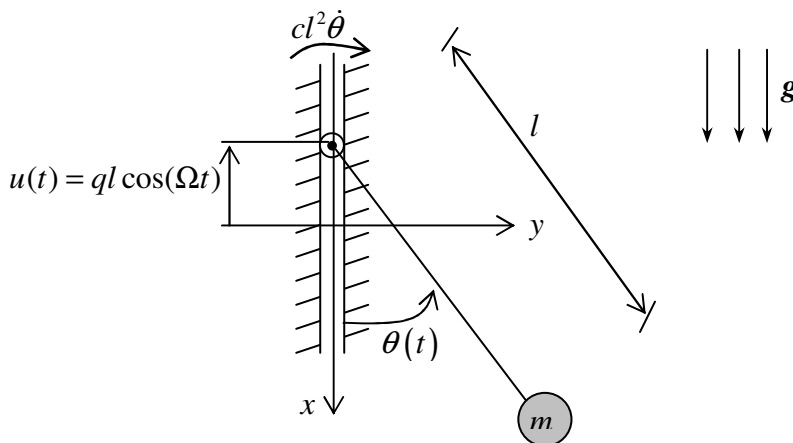


Figura 2.5: Pêndulo com suporte oscilante – adaptado de Thomsen, 2003

Para escrever a equação do movimento faz-se uso das equações de Lagrange, dadas pela eq.(2.11), para sistemas não conservativos de um grau de liberdade.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q; \quad L = T - V \quad (2.11)$$

A energia cinética T , a energia potencial V , e a força generalizada não conservativa Q são escritas, respectivamente, de acordo com as equações (2.12)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{u}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{u}\sin\theta) \\ V &= -mgx = -mg(l\cos\theta - u) \\ Q &= -cl^2\dot{\theta}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

sendo $x = l\cos\theta - u$ e $y = l\sin\theta$.

Substituindo as equações. (2.12) na eq.(2.11), obtém-se:

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + l^{-1}(g + \ddot{u})\sin\theta = 0. \quad (2.13)$$

Introduzindo $\omega_0^2 = g/l$ e $\beta = c/(2m\omega_0)$ e substituindo $u(t) = q/\cos(\Omega t)$, a equação do movimento, eq. (2.13), torna-se:

$$\ddot{\theta} + 2\beta\omega_0\dot{\theta} + (\omega_0^2 - q\Omega^2\cos\Omega t)\sin\theta = 0 \quad (2.14)$$

As condições iniciais são dadas pelas eqs.(2.15) a seguir:

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde

ω_0 é a frequência natural linear (caso em que a rotação é considerada “pequena”);

Ω é a frequência de excitação;

q é o deslocamento do suporte dado como uma fração do comprimento do pêndulo;

β é o fator de amortecimento

Evidentemente, a equação do pêndulo é não-linear devido ao termo $\sin\theta$. Para rotações finitas (porém não muito grandes), pode-se aproximar a não-linearidade pelos dois primeiros termos da serie de Taylor, $\sin\theta \approx \theta - \frac{1}{6}\theta^3$. O termo $\omega_0^2 \sin\theta$ da equação do pêndulo pode ser reconhecido como uma força restauradora do tipo “*softening*”, uma vez que o coeficiente de não linearidade cúbica é negativo.

Nota-se também que o pêndulo é parametricamente excitado, pois a excitação externa atua através de um dos parâmetros do sistema, neste caso, o parâmetro de rigidez. Isto implica que, para certas mudanças na frequência de excitação Ω , mesmo para níveis pequenos da magnitude da excitação $q\Omega^2$, podem resultar em grandes oscilações no pêndulo. Para o sistema linearizado ($\sin\theta \approx \theta$) pode-se calcular as faixas de (q, Ω) para as quais a solução $\theta(t) = 0$ torna-se instável e as oscilações começam a crescer. Esta análise pode prever as rotações $\theta(t)$ do pêndulo, que tendem para o infinito, exponencialmente. Como as amplitudes crescem, o modelo linear torna-se cada vez mais inadequado. Assim, a análise linear é capaz de prever as condições relacionadas aos valores de (q, Ω) para as quais o estado $\theta(t) = 0$ é instável. Entretanto, uma análise não linear é necessária para se prever o novo estado (pós-crítico) que substitui aquele definido por $\theta(t) = 0$.

2.3.2 Análise Qualitativa do Sistema Livre

Se o suporte do pêndulo é fixo ($\mathbf{q} = 0$), o primeiro membro da equação do movimento livre é dado por:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + 2\beta\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta &= 0; \quad \theta = \theta(t) \\ \theta(0) &= \theta_0; \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Para fazer a análise não-linear da resposta, escreve-se a equação acima usando formulação de estado, ou seja, a equação diferencial de 2ª ordem é substituída por duas equações diferenciais de primeira ordem, conforme o procedimento indicado pelas equações (2.17)

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= v \\ \dot{v} &= -2\beta\omega_0 v - \omega_0^2 \sin\theta \end{aligned} \tag{2.17}$$

com as condições iniciais:

$$\theta(0) = \theta_0; v(0) = v_0 = \dot{\theta}(0) \quad (2.18)$$

onde foi introduzida uma nova variável ($v \equiv \dot{\theta}$).

Para permitir uma discussão mais geral, pode-se também escrever o conjunto de equações diferenciais de primeira ordem autônomas com suas condições iniciais dadas conforme a eq. (2.19):

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \quad (2.19)$$

onde $x = x(t)$ é um vetor de variáveis de estado, e $f(x)$ é um vetor de funções geralmente não-lineares das variáveis de estado. Para o caso do pêndulo, tem-se

$$x = \{\theta, v\}^T \quad \text{e} \quad f = \{v, -2\beta\omega_0 v - \omega_0^2 \sin\theta\}^T$$

2.3.3 O Plano de Fase

Os movimentos de sistemas não-lineares são freqüentemente apresentados graficamente num plano conhecido como Plano de Fase. Um plano de fase é descrito por duas variáveis de estado arbitrárias. Assim, pode-se descrever os movimentos do pêndulo em um plano (θ, v) , ao invés de fazê-lo da forma tradicional (t, θ) ou $(t, \dot{\theta})$. Isso significa que, num plano de fase, o tempo é *implícito*. Considera-se somente movimentos projetados no plano (θ, v) . Fazendo variar o tempo, o ponto dado por $(\theta(t), v(t))$, descreve uma curva no plano de fase. Tal curva é geralmente chamada de órbita, trajetória ou curva integral. Um exemplo destas curvas para o pêndulo é dado pela Fig. 2.6 abaixo para o caso não-amortecido ($\beta = 0$)

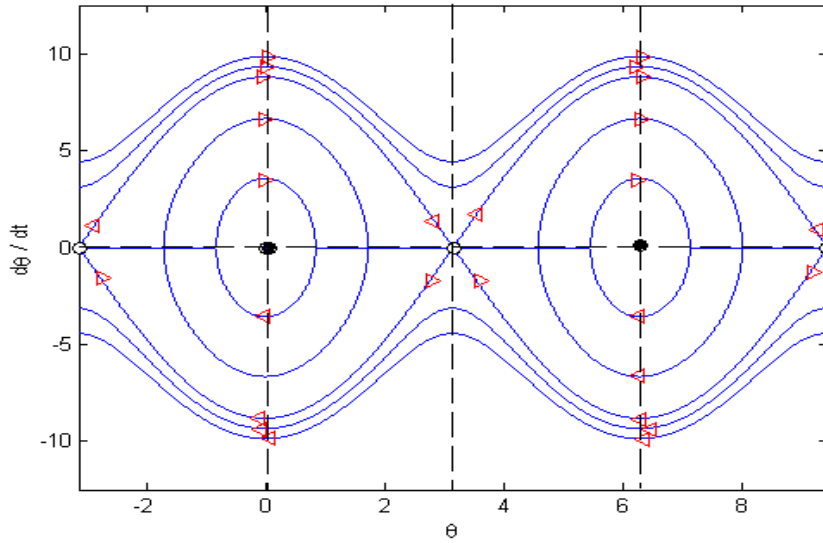


Figura 2.6: Plano de fase e órbitas para o pêndulo livre: caso não amortecido ($\beta = 0$)

Percebe-se que, quando não há nenhum amortecimento tem-se um dos casos raros em que as órbitas do plano de fase podem ser determinadas analiticamente. Assim, fazendo $\beta = 0$ na eq. (2.17) e dividindo a segunda equação pela primeira, tem-se:

$$\frac{\dot{v}}{\dot{\theta}} \equiv \frac{dv/dt}{d\theta/dt} = \frac{dv}{d\theta} = \frac{2\beta\omega_0 v - \omega_0^2 \sin \theta}{v} \quad (2.20)$$

ou

$$\frac{dv}{d\theta} = -\frac{\omega_0^2 \sin \theta}{v} \quad (2.21)$$

Separando as variáveis, tem-se:

$$v dv = -\omega_0^2 \sin \theta d\theta \quad (2.22)$$

Integrando agora ambos os lados da equação e aplicando as condições iniciais dadas pelas eq. (2.18), tem-se

$$\frac{1}{2} v_0^2 = \omega_0^2 \cos \theta + C \quad (2.23)$$

$$C = \frac{1}{2}v_0^2 - \omega_0^2 \cos \theta_0; C \geq -\omega_0^2 \quad (2.24)$$

E, quando $\theta \ll 1$, pode-se escrever

$$\cos \theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad (2.25)$$

de modo que as órbitas (v, θ) correspondem a pequenas rotações do pêndulo. Estas são elipses centradas em $(0,0)$.

Ao substituir a eq.(2.25) na eq.(2.24), obtém-se:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2\theta^2 = C + \omega_0^2 \quad (2.26)$$

Estas órbitas correspondem a pequenas amplitudes da solução linear:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= A \cos(\omega_0 t + \psi) \\ v(t) &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \psi) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Já para grandes rotações, as elipses são distorcidas não linearmente, de acordo com a eq.(2.23), podendo ser escritas como:

$$v = \pm \sqrt{2(\omega_0^2 \cos \theta + C)} \quad (2.28)$$

Se $C > \omega_0^2$, as órbitas nunca interceptam o eixo $v=0$. Isto acontece devido às condições iniciais que são dadas por:

$$\frac{v_0^2}{2} > \omega_0^2(1 + \cos \theta_0) \quad (2.29)$$

Dessa forma, o pêndulo realiza rotações completas ao longo de 2π , ao invés de movimentos em torno de $\theta=0$.

Quando se tem amortecimento, a dissipação de energia faz com que as órbitas assumam uma forma espiral que evolui para as posições de equilíbrio em $\theta = 0, 2\pi, \dots$. Este comportamento é mostrado na Fig. 2.7.

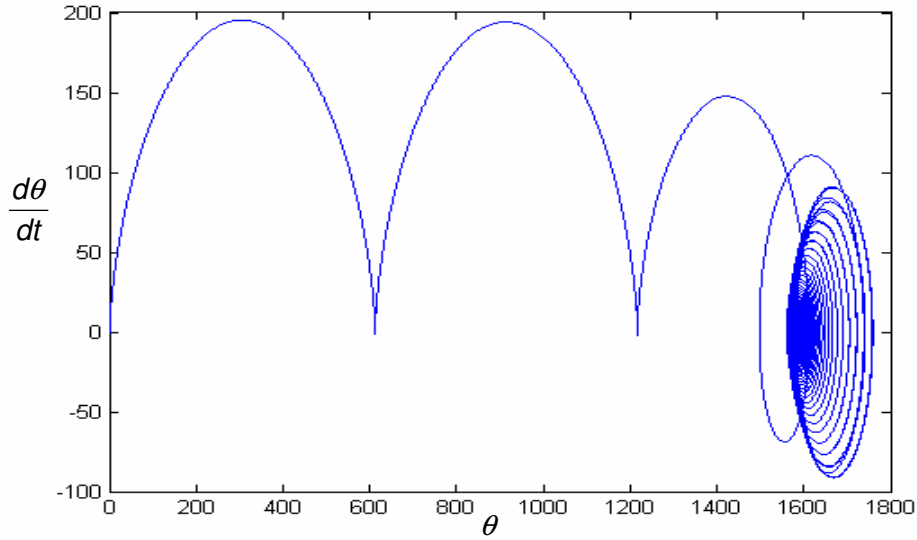


Figura 2.7: Plano de Fase e órbita para o pêndulo livre (caso amortecido $0 < \beta < 1$)

2.3.4 Pontos Singulares

Certos pontos de um plano de fase podem corresponder a estados de equilíbrio estático. Tais pontos são chamados de pontos singulares, pontos fixos, pontos de equilíbrio ou zeros. Todos os demais pontos de um plano de fase são ditos pontos regulares. Para que ocorra equilíbrio estático, deve-se ter $\dot{\mathbf{x}} = 0$ na eq. (2.19). Assim, pontos singulares são encontrados pela resolução algébrica dos conjuntos de equações de $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$. Neste trabalho, denota-se um ponto singular por $\tilde{\mathbf{x}}$, de modo que, por definição, $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$.

Os pontos singulares da equação do pêndulo (eq. 2.17) são obtidos resolvendo o sistema $\dot{\theta} = \dot{v} = 0$. Então, resulta que $v = 0$ e $\sin \theta = 0$, isto é

$$(\tilde{\theta}, \tilde{v}) = (k\pi, 0); \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (2.30)$$

2.3.5 Estabilidade dos pontos singulares

Um ponto singular estável atrai órbitas próximas e pontos singulares instáveis repelem as órbitas. Já um ponto singular marginalmente estável atua como um centro, nem repelindo nem atraindo órbitas. Determinados pontos singulares têm estabilidade indefinida, atraindo

órbitas de algumas direções e repelindo órbitas de outras direções, (ver o caso de $(\pi, 0)$ na Fig. 2.6) - estes são chamados instáveis.

Será considerada somente a estabilidade local de um ponto singular. O aspecto importante a ser definido é se as órbitas numa vizinhança intermediária de um ponto singular permanecem próximas ou divergem. Para analisar a estabilidade local, um estudo do sistema linearizado é suficiente. Para os casos regulares, as propriedades referentes à estabilidade dos pontos singulares para o sistema linearizado se mantêm para o caso não-linear. Isso significa que, se um ponto singular de um sistema linearizado é estável ou instável, esta situação se mantém para o mesmo ponto singular do sistema não linear.

Seja o caso geral de um sistema não linear escrito como o conjunto de n equações diferenciais autônomas de primeira ordem:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in R^n \quad (2.31)$$

para o qual se deseja determinar a estabilidade local de um dado ponto singular $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$. Expandindo por série de Taylor o lado direito da eq. (2.31) na vizinhança de $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$, tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}} (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) + O((\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})) \quad (2.32)$$

onde o último termo representa os termos quadrático e os de alta ordem. O primeiro termo da expansão desaparece, pois, por definição, $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. Para indicar a proximidade das órbitas $\mathbf{x}(t)$ em relação ao ponto singular $\tilde{\mathbf{x}}$, introduz-se uma nova variável dependente $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}$. Para órbitas próximas do ponto singular $|\boldsymbol{\varepsilon}| \ll 1$, os termos de alta ordem da expansão de Taylor podem ser truncados. Fazendo uma transformação da variável $\mathbf{x}$ para $\boldsymbol{\varepsilon}$, na eq. (2.32), e truncando os termos de alta ordem, verifica-se que pequenas distâncias entre as órbitas e o ponto singular $\tilde{\mathbf{x}}$ são governadas por um conjunto de equações lineares

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{x}})\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.33)$$

onde $\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{x}})$ representa o *Jacobiano* do sistema não linear, avaliado no ponto singular. O Jacobiano $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ do sistema (2.31) é definido por

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Para a aproximação (2.33) ser válida, $\tilde{\mathbf{x}}$ terá que ser um ponto singular isolado, ou seja, $\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$. Assim, a solução do sistema linearizado (2.33) tem a forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a} e^{\lambda t} \quad (2.35)$$

Ao substituir (2.35) em (2.33), obtém-se um problema de autovalor:

$$(\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{x}}) - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (2.36)$$

que envolve a determinação do conjunto de autovalores λ_j e dos correspondentes autovetores $\mathbf{a}_j$, $j = 1, n$. Inspeccionando a eq. (2.35), verifica-se que alguns autovalores λ possuem parte real positiva, fazendo com que órbitas do sistema linear (2.33) se afastem do ponto singular. Uma órbita correspondente ao sistema não-linear (2.31) também se afastará do ponto singular do sistema não linear (já foi mencionado que, na vizinhança do ponto singular, o sistema não linear pode ser aproximado pelo sistema linear a ele associado).

Assim, a estabilidade do ponto singular do sistema não-linear é determinada examinando os autovalores da matriz Jacobiana avaliada neste ponto. São aplicadas as seguintes condições:

- $\text{Re}(\lambda_j) < 0$ para todo $j = 1, n$: $\tilde{\mathbf{x}}$ é estável
- $\text{Re}(\lambda_j) > 0$ para ao menos um $j = 1, n$: $\tilde{\mathbf{x}}$ é instável
- $\max[\text{Re}(\lambda_j)] = 0$ para $j = 1, n$: $\tilde{\mathbf{x}}$ pode ser estável ou instável

No terceiro caso, há pelo menos um autovalor com parte real nula, mas nenhum autovalor com parte real positiva. Este é um caso crítico para qual a estabilidade do ponto singular

não pode ser deduzida pela linearização do sistema; os termos não lineares de alta ordem podem tornar o ponto estável ou instável.

O pêndulo livre é governado pela eq.(2.31) com $\mathbf{x} = \{\theta, v\}^T$ e $f = \{v, -2\beta\omega_0 v - \omega_0^2 \sin \theta\}^T$.

Os pontos singulares são:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k\pi \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots, \quad (2.37)$$

e o Jacobiano do sistema é

$$\mathbf{J} \left(\begin{Bmatrix} \theta \\ v \end{Bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 \cos \theta & -2\beta\omega_0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Nos pontos singulares, o Jacobiano torna-se

$$\mathbf{J} \left(\begin{Bmatrix} \theta \\ v \end{Bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 (-1)^k & -2\beta\omega_0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

com os autovalores:

$$\lambda_{1,2} = \left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - (-1)^k} \right) \omega_0 \quad (2.40)$$

Para o caso não amortecido ($\beta = 0$), os autovalores ficam:

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 & \text{para } k \text{ par} \\ \lambda_{1,2} = \pm \omega_0 & \text{para } k \text{ ímpar} \end{cases} \quad (2.41)$$

Para pontos singulares correspondendo a valores pares de k ($\theta = \dots, -2\pi, 0, 2\pi, \dots$), ambos os autovalores são imaginários, que representa o caso crítico descrito acima ($\max[\operatorname{Re}(\lambda_j)] = 0$). Observando a Fig. 2.6, mostrada anteriormente, vê-se que estes pontos singulares não são estáveis nem instáveis: as órbitas da vizinhança permanecem próximas,

mas não são atraídas nem repelidas para os pontos singulares correspondentes (ponto onde o pêndulo “aponta para baixo”). Pontos singulares para valores ímpares de k ($\theta = \dots, -\pi, \pi, 3\pi, \dots$) são instáveis, bastando que um autovalor tenha parte real positiva ($\lambda = +\omega_0$).

Para o *amortecimento subcrítico* ($0 < \beta < 1$), pode-se escrever os autovalores Jacobianos (2.38) na forma:

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \left(-\beta \pm \sqrt{1 - \beta^2} \right) \omega_0 & \text{para } k \text{ par} \\ \left(-\beta \pm \sqrt{1 + \beta^2} \right) \omega_0 & \text{para } k \text{ ímpar} \end{cases} \quad (2.42)$$

Assim, pontos singulares para valores pares de k são estáveis, uma vez que ambos os autovalores têm parte real negativa. Os pontos singulares para valores ímpares de k são instáveis, pois $(1 + \beta)^{1/2} > \beta$ quando $0 < \beta < 1$, implicando que um dos autovalores possui parte real positiva, o que basta para estabilizar o sistema.

2.3.6 Comportamento de órbitas próximas a pontos singulares

A análise de estabilidade descrita acima é baseada nos autovalores da matriz Jacobiana. Estes autovalores revelam que os pontos singulares atraem ou repelem órbitas próximas (FERRARA, 1994). Para obter mais detalhes de como as órbitas são perturbadas na vizinhança de um ponto singular, é necessário considerar também o autovetor associado. Os autovetores do sistema linearizado fornecem também uma informação localizada sobre as órbitas do sistema não-linear, pois na proximidade dos pontos singulares as órbitas do sistema não linear são aproximadas por aquelas do sistema linearizado. Salienta-se que apenas o comportamento localizado (na vizinhança dos pontos singulares) pode ser estudado desta forma. Obter um quadro global das órbitas é tarefa mais complicada, exigindo que os quadros localizados sejam considerados em conjunto.

Observando a eq.(2.35), verifica-se que o comportamento das soluções linearizadas depende dos autovalores λ serem reais ou complexos, e se os autovalores são distintos. Autovalores reais tornam o movimento crescente ou decrescente exponencialmente com o tempo; autovalores complexos introduzem componentes oscilatórios no movimento ($\gamma, \omega \in \mathbf{R} : \lambda = \gamma + i\omega \Rightarrow e^{\lambda t} = e^{\gamma t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$). Autovalores iguais implicam soluções da forma $\varepsilon = \mathbf{a}_0 e^{\lambda t} + \mathbf{a}_1 t e^{\lambda t} + \dots + \mathbf{a}_m t^m e^{\lambda t}$, onde m é a multiplicidade dos autovalores iguais.

2.3.6.1 Autovalores da matriz Jacobiana para $n=2$

Com duas equações do movimento de primeira ordem, há dois autovalores do Jacobiano a serem examinados. Pode-se demonstrar que estes podem ser escritos em termos do traço e do determinante do Jacobiano:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(p \pm \sqrt{p^2 - 4q} \right), \quad p = \text{tr}(J(\tilde{x})), \quad q = \det(J(\tilde{x})) \quad (2.43)$$

Daí, se $p^2 > 4q$ os dois autovalores são reais e distintos; se $p^2 = 4q$, tem-se duas raízes reais e iguais e se $p^2 < 4q$ tem-se raízes complexas conjugadas.

2.3.6.2 Transformação de Similaridade

Para caracterizar o comportamento das órbitas próximas aos pontos singulares é necessário considerar o autovetor $\mathbf{a}$ da matriz Jacobiana, eq.(2.35). Deseja-se obter somente a topologia das órbitas, ou seja, seu aspecto qualitativo. Para facilitar a interpretação dos resultados, será feita primeiramente uma transformação de similaridade do sistema linearizado dado pela eq. (2.33). Para tanto, introduz-se um novo vetor de estado $\mathbf{u}$, relacionado ao vetor de estado original ε pela relação:

$$\varepsilon = P\mathbf{u} \quad (2.44)$$

onde P é uma matriz constante, não singular. Esta transformação linear preserva todas as características topológicas do sistema original. Assim, substituindo (2.44) em (2.33), obtém-se um sistema topologicamente idêntico

$$\dot{\mathbf{u}} = \hat{J}(\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{u} \quad (2.45)$$

onde

$$\hat{J}(\tilde{\mathbf{x}}) = P^{-1}J(\tilde{\mathbf{x}})P \quad (2.46)$$

as matrizes J e $\hat{J}$ são chamadas *matrizes de similaridade*. Estas matrizes possuem autovalores iguais, qualquer que seja a escolha feita da matriz de transformação (não-singular) P . Assim, tem-se liberdade para escolher P , de forma a construir $\hat{J}$ da forma mais simples possível, preferencialmente uma matriz diagonal.

2.3.6.3 Formas Canônicas de Jordan

A forma mais simples possível da matriz de similaridade $\hat{\mathbf{J}}$ é chamada *forma Canônica de Jordan*. Para obter uma forma canônica de Jordan, escreve-se uma matriz de transformação $\mathbf{P}$, utilizando os autovetores de (2.36), ou seja

$$\mathbf{P} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] \quad (2.47)$$

Devido à ortogonalidade dos autovetores, a matriz $\hat{\mathbf{J}}$ será próxima de uma matriz diagonal. Isso pode ser observado notando-se que os autovetores de (2.36) satisfazem

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{a}_1 &= \lambda_1\mathbf{a}_1 \\ \text{e} \\ \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{a}_2 &= \lambda_2\mathbf{a}_2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

ou, escritas na forma matricial:

$$\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{x}})[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Daí tem-se:

$$\hat{\mathbf{J}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{P} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2]^{-1}\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{x}})[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] \quad (2.50)$$

$$[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2]^{-1}[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] \neq 0$$

Assim, para $n=2$, a forma de Jordan é uma matriz diagonal com elementos formados pelos autovalores do sistema. Isto se aplica também quando os autovalores são iguais, porém com autovetores linearmente independentes (a matriz identidade tem esta propriedade), desde que, como anteriormente, $[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] \neq 0$.

Todavia, no caso dos autovalores serem iguais com autovetores linearmente dependentes, tem-se que $[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] = 0$ e $\mathbf{J}$ não é totalmente diagonalizável. Neste caso, pode-se escolher $\mathbf{P}$ de modo que $\mathbf{J}$ seja diagonal, ou seja

$$P = \begin{bmatrix} a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ J_{1,2}^{-1} & 1 \end{bmatrix} a_1 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

onde a_1 é o (único) autovetor de J , e $J_{1,2}$ representa o elemento superior-direito de J . A forma de Jordan, então, é dada por

$$\hat{J}(\tilde{x}) = P^{-1} J(\tilde{x}) P \quad (2.52)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ J_{1,2}^{-1} & 1 \end{bmatrix} a_1 \end{bmatrix}^{-1} J(\tilde{x}) \begin{bmatrix} a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ J_{1,2}^{-1} & 1 \end{bmatrix} a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

para $\lambda_1 = \lambda_2$ e $\| [a_1 \ a_2] \| = 0$.

2.3.6.4 Órbitas para as Formas Diagonais de Jordan

Devido à transformação de similaridade empregada, as órbitas das formas de Jordan assemelham-se àsquelas do sistema linearizado (2.33), que por sua vez se aproximam daquelas do sistema não linear original (2.31) na vizinhança do ponto singular $\tilde{x}$. Assim, a forma de Jordan fornece informação sobre o fluxo das órbitas na proximidade dos pontos singulares para um sistema não linear complexo.

A forma diagonal de Jordan (2.49) se aplica quando $\| [a_1 \ a_2] \| \neq 0$. O sistema (2.45) é escrito como:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1 u_1 \\ \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2 \end{cases} \quad (2.53)$$

cujas soluções são dadas por:

$$\begin{cases} u_1(t) = u_{10} e^{\lambda_1 t} \\ u_2(t) = u_{20} e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (2.54)$$

que pode ser escrita, eliminando a variável independente t , como:

$$u_2 = u_{20} \left(\frac{u_1}{u_{10}} \right)^{\lambda_2 / \lambda_1} \quad (2.55)$$

onde $u_{10} = u_1(0)$ e $u_{20} = u_2(0)$ definem as condições iniciais.

São mostrados a seguir, para cada caso, os autovalores (λ_1, λ_2) , a forma de Jordan $(\hat{\mathbf{J}}(\tilde{\mathbf{x}}))$ e órbitas próximas, no plano de fase ($\mathbf{u}=0$ para $\dot{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{J}}(\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{u}$).

Para o caso em que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, e se esses autovalores $\lambda_{1,2}$ são reais com sinais iguais e ambos forem negativos, fica caracterizado um nó estável. As órbitas $(u_1(t), u_2(t))$ são descritas como na Fig. 2.8

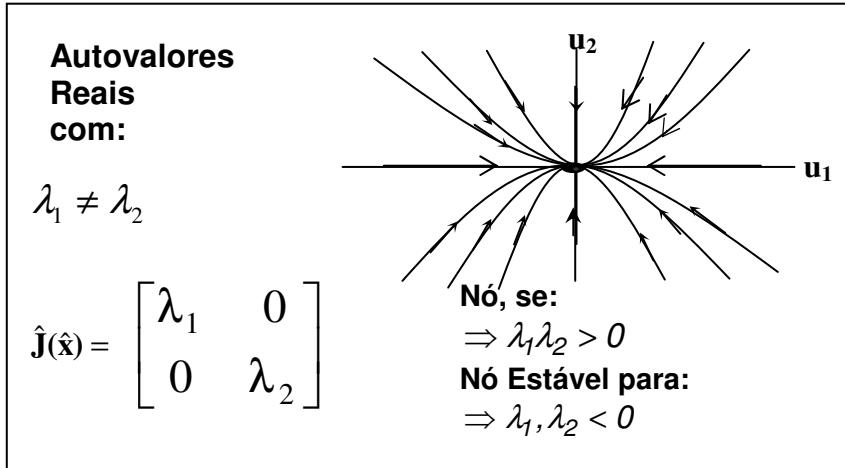


Figura 2.8: Nó Estável: autovalores reais e distintos com $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

Na Fig. 2.9, é mostrado um ponto de *sela* que, assim como o nó, ocorre para autovalores distintos, mas, nesse caso, quando $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Um ponto de sela é sempre instável.

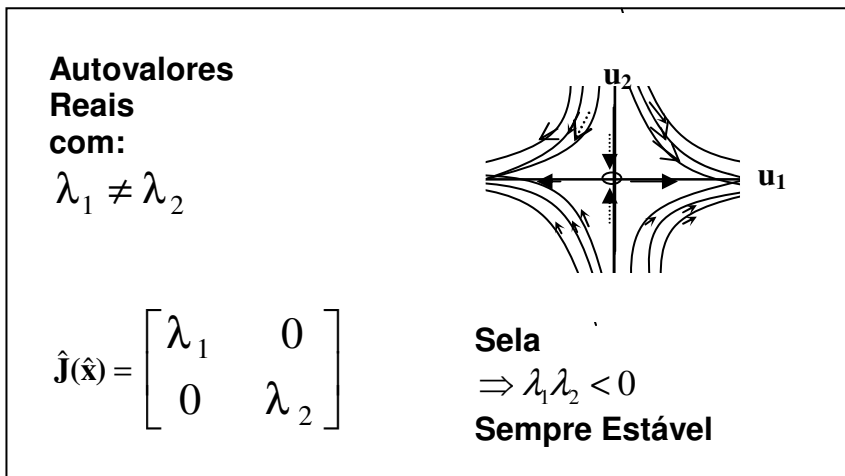


Figura 2.9: Ponto de Sela: autovalores Reais e Distintos com $\lambda_1 \lambda_2 < 0$

Na Fig. 2.10, é mostrado o caso onde se tem autovalores iguais ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) e autovetores linearmente Independentes (LI). Neste caso tem-se um nó, que, por sua vez, será estável se $\lambda < 0$

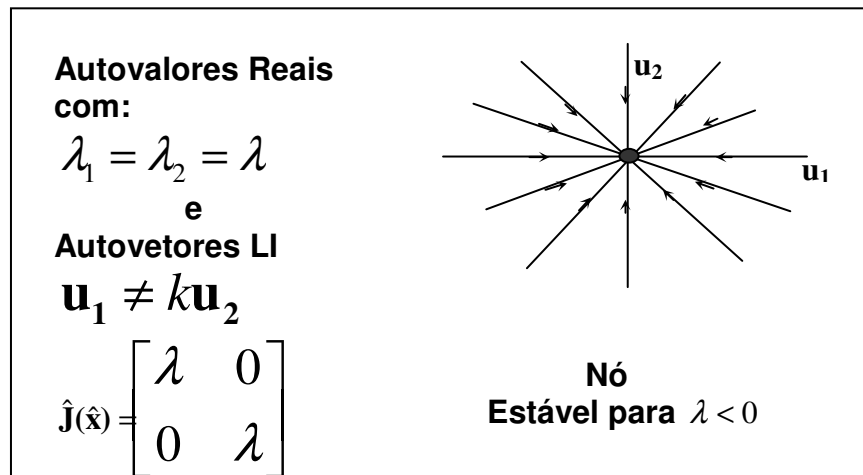


Figura 2.10: Nó Estável: para $\lambda < 0$ (autovalores reais e iguais e autovetores distintos)

A seguir, na Figura 2.11, tem-se novamente um nó com autovalores iguais. Porém, os autovetores são agora linearmente dependentes (LD).

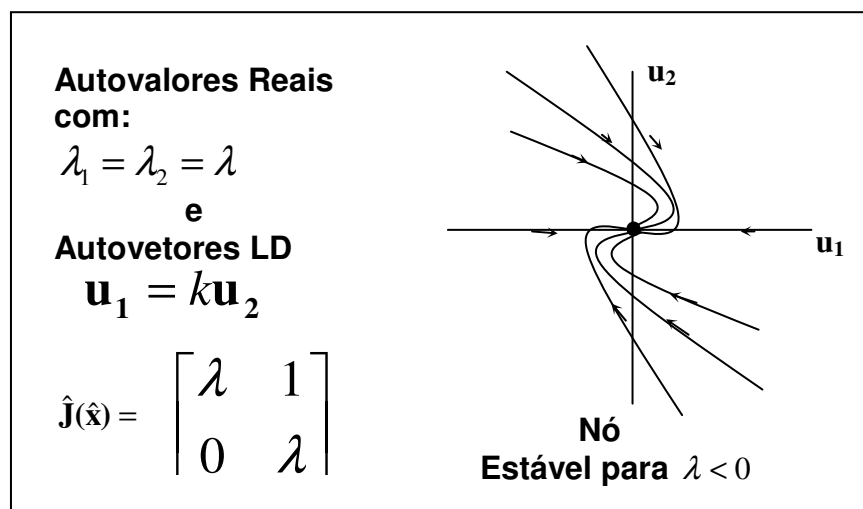


Figura 2.11: Nó Estável: para $\lambda < 0$ (autovalores iguais com autovetores LD)

A seguir tem-se uma situação em que os dois autovalores são complexos conjugados, ou seja, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda$. Quando a parte real dos autovalores é nula ($\text{Re}(\lambda)=0$), trata-se de um centro marginalmente estável, como mostrado na Fig. (2.12)

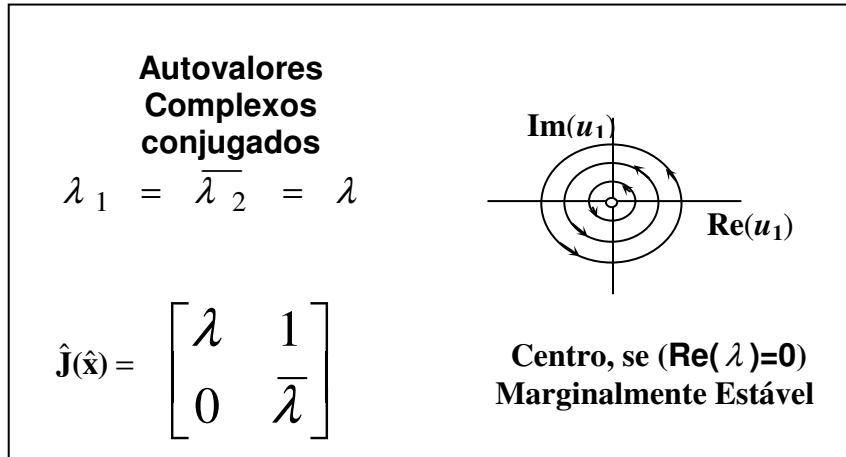


Figura 2.12: Centro Marginalmente estável - Autovalores complexos conjugados

Por outro lado, quando se têm autovalores complexos com a parte real destes autovalores sendo diferente de zero, as órbitas assumem a forma de uma espiral em torno do ponto singular, sendo este denominado de Foco. Para $\text{Re}(\lambda) < 0$, as órbitas se aproximam do ponto singular e o foco é *estável*.

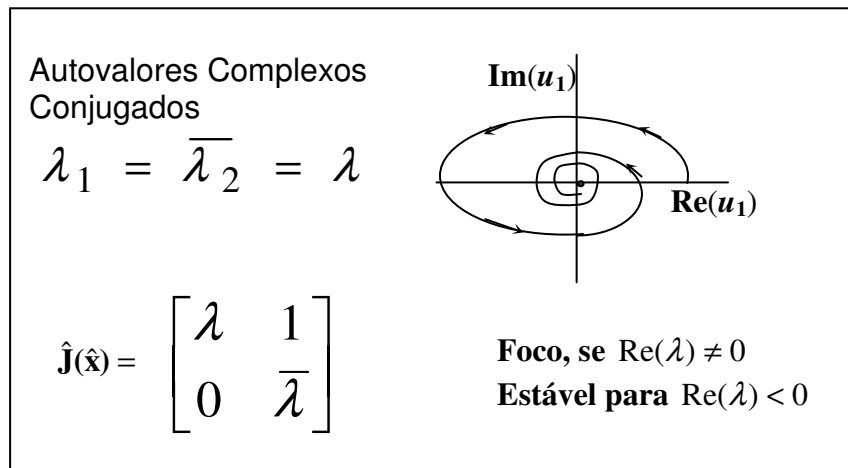


Figura 2.13: Foco estável para $\text{Re}(\lambda) < 0$ - Autovalores complexos conjugados

2.3.7 Órbitas para as Formas Não-Diagonais de Jordan

As formas de Jordan não diagonais (eq.(2.53)) se aplicam quando $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = 0$, ou seja, quando os autovalores de $J(\tilde{x})$ são reais e iguais e os autovetores são linearmente dependentes. O sistema (2.45) pode ser escrito como:

$$\dot{u}_1 = \lambda u_1 + u_2, \quad \dot{u}_2 = \lambda u_2 \quad (2.56)$$

cuja solução é dada por:

$$u_1(t) = (u_{10} + u_{20}t)e^{\lambda t}, \quad u_2(t) = u_{20}e^{\lambda t} \quad (2.57)$$

ou, eliminando a variável t , resulta:

$$u_1(t) = \left(\frac{u_{10}}{u_{20}} + \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{u_2}{u_{20}} \right| \right) u_2 \quad (2.58)$$

Observa-se, da eq.(2.53), que duas meias-órbitas ($u_2(t) = 0, t \neq 0$) coincidem com o eixo u_1 , enquanto não há órbitas ao longo do eixo u_2 . O ponto singular é um nó, sendo estável para $\lambda < 0$.

2.3.8 Topologia Orbital para o Caso do Pêndulo

Retorna-se aos pontos singulares $(\theta, \nu) = (k\pi, 0)$ do pêndulo livre de excitação externa. No caso não amortecido, de acordo com a eq. (2.41), os dois autovalores são imaginários puros para valores pares de k , e reais e distintos com sinais diferentes para valores ímpares de k . Então, de acordo com a Fig. (2.10), os pontos singulares correspondentes para k -par são *Centros*, enquanto aqueles relacionados a k -ímpar são *Selas*. Esta análise é suficiente para esquematizar as órbitas no plano de fase, conforme mostradas na Fig 2.6. Primeiramente, constroem-se as órbitas próximas aos *centros* e *selas*. Depois, observando que as órbitas devem ser suaves e não se interceptam, pode-se conectar as selas estáveis e instáveis dentro de órbitas heteroclínicas, e, finalmente, constroem-se as órbitas externas (fora das curvas heteroclínicas).

No caso amortecido, de acordo com a eq. (2.42), os autovalores são complexos com partes reais negativas para valores pares de k , e reais e distintos com sinais diferentes para valores ímpares de k . De acordo com o observado no estudo acima, os pontos singulares correspondentes a valores pares de k são *Focos* estáveis, e os correspondentes a valores ímpares de k são *Selas*. Assim, pode-se esboçar as órbitas do plano de fase da Fig. 2.7 a partir destes resultados.

2.4 Vibrações Forçadas

Descrevem-se aqui alguns dos comportamentos não lineares, não encontrados nos sistemas lineares (TSE, 1978). Examina-se a resposta periódica devida às excitações harmônicas.

2.4.1. O Fenômeno do Salto (*Jump Phenomenon*)

Considere o sistema descrito pela equação de Duffing:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x + \alpha x^3) = F \cos(\omega t) \quad (2.59)$$

onde $k(x + \alpha x^3)$ é a força de mola não linear. Considere uma mola “dura” (*hardening*), onde α é positivo, para ilustrar o fenômeno do salto. Utilizando o método do balanço harmônico (THOMSEM, 2003) e considerando somente as componentes fundamentais, a solução de regime permanente (*steady-state*) é dada por:

$$x = A \cos(\omega t - \theta) \quad (2.60)$$

É conveniente associar o ângulo de fase θ com a excitação. A equação do movimento é dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x + \alpha x^3) = F \cos(\omega t + \theta) \quad (2.61)$$

ou

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x + hx^3 = F_c \cos(\omega t) + F_s \sin(\omega t) \quad (2.62)$$

onde F_c e F_s têm unidade de força por unidade de massa, e hx^3 é o termo não linear.

A resposta se escreve como:

$$x = A \cos(\omega t) \quad (2.63)$$

Estudam-se a seguir dois casos: primeiro as vibrações dos sistemas não amortecidos e, posteriormente, os sistemas amortecidos.

2.4.2 Sistemas sem amortecimento

Se um sistema de um grau de liberdade não tem amortecimento, sua resposta em regime permanente está em fase, ou defasada de 180° em relação à excitação. O ângulo de fase pode ser observado pela mudança do sinal de A na eq.(2.63). Daí, a segunda força, $F_s \sin \omega t$, pode ser desprezada. A equação do movimento se torna simplesmente:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + hx^3 = F_c \cos(\omega t) \quad (2.64)$$

Substituindo a eq.(2.63) na eq.(2.64), obtém-se após simplificações

$$-\omega^2 A + \omega_0^2 A + \frac{3}{4} h A^3 = F_c \quad (2.65)$$

Os valores de A versus ω da equação podem ser obtidos para valores dados a ω_0, h e F_c .

Para resolver a eq. (2.65) graficamente, seja:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{3}{4} h A^3 \\ y_2 = (\omega^2 - \omega_0^2) A + F_c \end{cases} \quad (2.66)$$

onde ω_0, h e F_c são considerados conhecidos.

Na Fig. (2.14) abaixo, a curva de y_1 é obtida para um valor dado de h . Constrói-se a curva de y_2 para um valor atribuído a ω , resultando uma reta. A interseção das curvas y_1 e y_2 corresponde ao valor de A para tal valor de ω

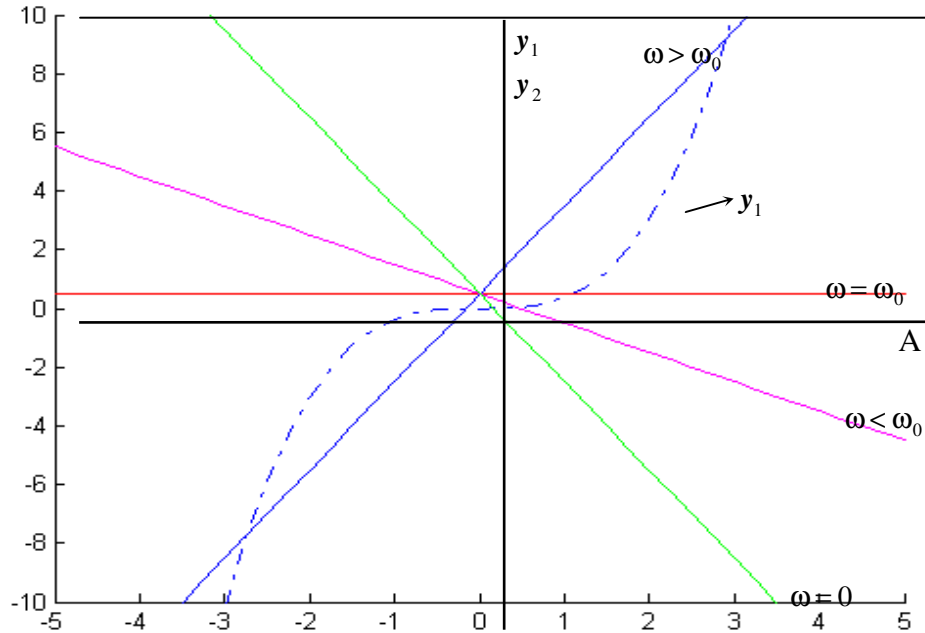


Figura 2.14 : Solução gráfica da Eq. 4.8

É possível notar que:

- O valor de A pode ser positivo ou negativo, correspondendo ao ângulo de fase de 0 ou 180° da resposta de regime permanente em relação à excitação.
- Pode-se ter apenas um ou três valores de A . As curvas de y_2 para $\omega = 0$ e $\omega = \omega_0$ e, também, para $\omega > \omega_0$ e $\omega < \omega_0$ são mostradas na própria Fig. 2.14.

Na Fig. (2.15), são mostrados os valores de $\omega \times |A|$. Esta figura descreve o sistema caracterizado pela eq.(2.64) e a curva de resposta é obtida em regime permanente para os valores dados abaixo

$$\omega_0 = 1, \quad h = \frac{1}{2}, \quad F_c = \frac{1}{2} \quad (2.67)$$

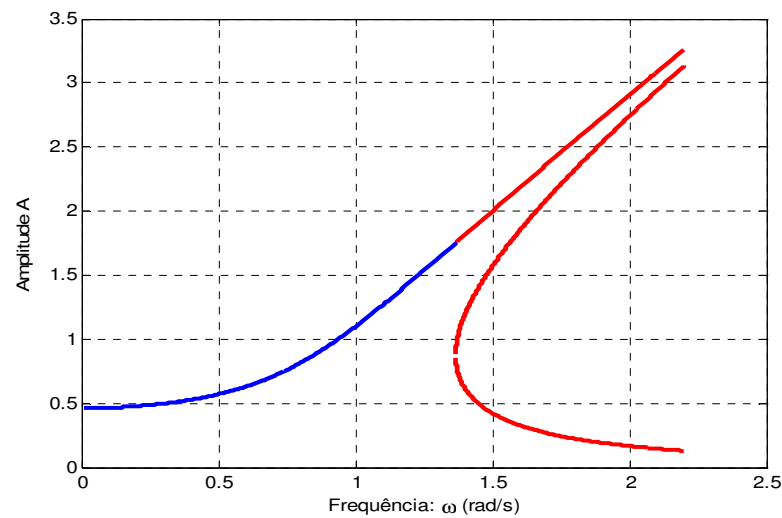


Figura 2.15: Oscilações Harmônicas: Mola que enrijece

Ao se comparar este comportamento com a resposta harmônica do sistema linear, nota-se que a resposta não-linear inclina-se para altas frequências, no caso da mola que enrijece (*hardening*). Fisicamente, enquanto o valor da frequência cresce para a ressonância, $|A|$ também cresce e, deste modo, faz também crescer a rigidez da mola. O resultado é que o valor da frequência de ressonância do sistema é aumentado. O gráfico de $|A| \times \omega$ é uma curva de onde resultam vários valores para $|A|$, o que está relacionado ao fenômeno do salto.

Caso o comportamento da mola não linear seja o oposto do anterior (mola que abrande – *softening*), o resultado é mostrado na Fig. 2.16, onde se tem o gráfico de $|A| \times \omega$ para os seguintes valores dos parâmetros: $\omega_0 = 1$, $h = -1/2$, $F_c = 1/2$

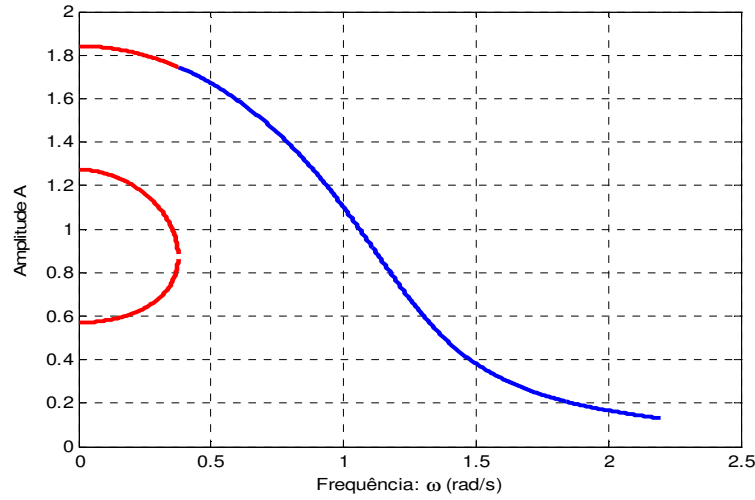


Figura 2.16: Oscilações Harmônicas: Mola que abrande - *softening*

2.4.3. Sistema Amortecido

Sistemas com amortecimento podem ser analisados pelo método do balanço harmônico (MEIROVITCH, 1978). Substituindo a eq.(2.63) na eq.(2.62), desprezando o terceiro harmônico e somando os coeficientes dos termos em seno e cosseno, obtém-se:

$$\cos \omega t : -\omega^2 A + \omega_0^2 A + \frac{3}{4} h A^3 = F_c \quad (2.68)$$

$$\sin \omega t : -2\beta \omega A = F_s$$

Os valores de A e F podem ser relacionados através das duas eq. (2.68). Assim,

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2) A + \frac{3}{4} h A^3 \right]^2 + (2\beta \omega A)^2 = F^2 \quad (2.69)$$

onde $F^2 = F_c^2 + F_s^2$. A equação pode ser resolvida de forma a se obter $|A| \times \omega$, dados os parâmetros ω_0, h, β e F . Se o amortecimento é pequeno, a curva de resposta se assemelha bastante àquela do sistema livre. Um gráfico típico de $|A| \times \omega$ para um sistema com pouco amortecimento é mostrado na Fig. 2.17

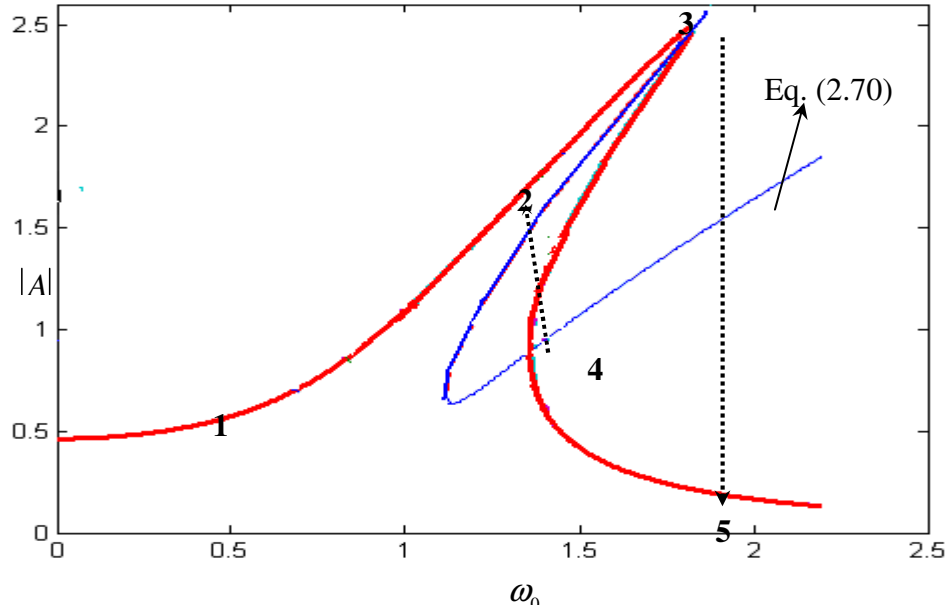


Figura 2.17: Fenômeno do Salto: Sistema amortecido com Mola Dura

Para descrever o fenômeno do salto, pode-se acompanhar $|A|$ na Fig. 2.17 ao longo da curva, através dos trechos denominados como 1 – 2 – 3 , à medida que a frequência aumenta. No ponto 3, um aumento infinitesimal na frequência fará com que $|A|$ salte para o ponto 5, ou seja, existe uma mudança em degrau nos valores da magnitude e da fase de A . Por outro lado, diminuindo o valor da frequência, a resposta acompanha a curva ao longo dos trechos 6 – 5 – 4 – 2 – 1, com um salto ocorrendo no ponto 4. A resposta entre os pontos 3 e 4 é instável.

O fenômeno do salto ocorre quando $dA/d\omega = \infty$ ou $d\omega^2/dA = 0$ (TSE, 1978). Diferenciando a eq.(2.69) para obter $d\omega^2/dA = 0$ e para $A \neq 0$, a condição encontrada é expressa pela eq. (2.70):

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2)A + \frac{3}{4}hA^2 \right] \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{9}{4}hA^2 \right] + (2\beta\omega)^2 = 0 \quad (2.70)$$

Esta equação é obtida graficamente, conforme representada pela curva também mostrada na Fig. 2.17. Salienta-se que o fenômeno do salto pode não ocorrer se o sistema for fortemente amortecido. Sua ocorrência tem a ver com a resposta de regime permanente com excitação de amplitude constante e frequência variável. Semelhantemente, o salto poderia também ocorrer no caso da excitação ser de amplitude variável com frequência constante.

CAPÍTULO III

INTRODUÇÃO AOS ABSORVEDORES DINÂMICOS DE VIBRAÇÕES

3.1 – Introdução

Os sistemas mecânicos (máquinas e estruturas complexas em geral), quando sujeitos a forças externas variáveis com o tempo e/ou a um conjunto de condições iniciais, respondem com alguma forma de movimento, geralmente oscilatório, em torno de uma configuração de equilíbrio. Este movimento é chamado “vibração”, que é resultante de um processo continuado de transformação entre energias cinética e potencial (de deformação) do sistema em questão (DIMARAGONAS, 1996).

O amortecimento em uma dada estrutura é todo e qualquer mecanismo de dissipação de energia dos sistemas mecânicos, destacando-se o atrito seco (de Coulomb) e a resistência a meios fluidos viscosos. No caso de haver amortecimento, a energia mecânica do sistema não é conservada, mas diminui continuamente com o tempo.

É preciso lembrar que o amortecimento está sempre presente nos sistemas mecânicos. O que ocorre com frequência é que, sendo o amortecimento pequeno, pode ser desprezado.

Dá-se o nome de vibrações livres aos movimentos que surgem quando o sistema mecânico é retirado de sua condição de repouso por um conjunto de condições iniciais (deslocamentos ou velocidades aplicadas ao sistema), livre de forças externas. O tipo de vibração causada por movimentos que resultam da aplicação de forças externas ao sistema mecânico é denominado vibração forçada. Tais forças externas podem exibir quaisquer naturezas: harmônicas, periódicas, transitórias ou aleatórias. Existem formas de se atenuar vibrações indesejadas em uma dada estrutura, sendo que uma das mais eficazes é através dos chamados Absorvedores Dinâmicos de Vibração (STEFFEN; RADE, 2001).

O absorvedor dinâmico de vibração clássico consiste numa massa acoplada com uma mola e um amortecedor, adicionando ao sistema ao qual está conectado um novo grau de liberdade. Este sistema é então sintonizado para vibrar com amplitudes mais elevadas, absorvendo, assim, parte da energia vibratória do sistema.

3.2. Estudo de um Absorvedor Dinâmico de Vibração Não Amortecido – Caso Linear

A Fig.3.1 descreve um sistema de dois graus de liberdade (MARQUES, 2000). Este sistema vibratório é composto por molas com características lineares e não possui amortecimento. Deseja-se, a partir do subsistema formado por (m_2, k_2) , atenuar os níveis de vibração da massa principal, esta representada na figura por m_1 . A este subsistema composto pela massa m_2 e pela mola k_2 , dá-se o nome de Absorvedor Dinâmico de Vibração (A.D.V.) não amortecido.

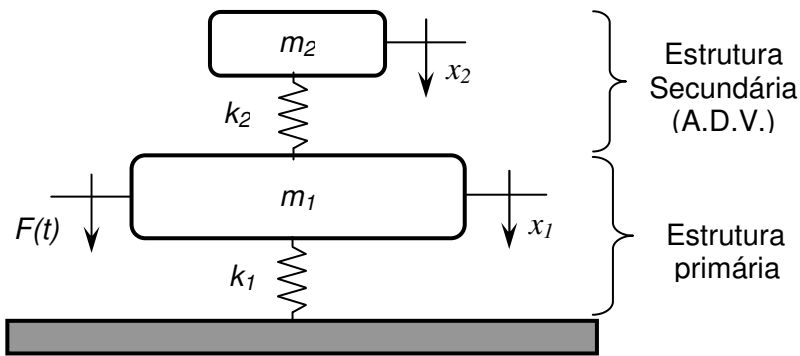


Figura 3.1 – Sistema Vibratório de 2g.d.l. não amortecido

A massa principal é excitada por uma força harmônica de amplitude F_0 e frequência de excitação dada por Ω .

$$F(t) = F_0 e^{i\Omega t} \quad (3.1)$$

Para que o absorvedor seja efetivo é necessário que seus parâmetros característicos, m_2 e k_2 , sejam tais que $\Omega = \sqrt{k_2/m_2}$. As equações do movimento deste sistema podem ser escritas como nas equações (3.2) e (3.3) dadas abaixo

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = F(t) \quad (3.2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + k_2 [x_2(t) - x_1(t)] = 0 \quad (3.3)$$

As equações (3.4) e (3.5) caracterizam as respostas em regime permanente para o problema dado

$$x_1 = X_1 e^{i\Omega t} \quad (3.4)$$

$$x_2 = X_2 e^{i\Omega t} \quad (3.5)$$

Substituindo as equações (3.4) e (3.5) nas equações (3.2) e (3.3), tem-se

$$(-m_1 \Omega^2 + k_1 + k_2)X_1 - k_2 X_2 = F_0 \quad (3.6)$$

$$-k_2 X_1 + (-m_2 \Omega^2 + k_2)X_2 = 0 \quad (3.7)$$

Após manipulações algébricas, é possível obter as expressões para as amplitudes de vibração da massa principal e do absorvedor

$$\frac{X_1}{F_0 k_1^{-1}} = \frac{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_a}\right)^2\right]}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_a}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}} \quad (3.8)$$

$$\frac{X_2}{F_0 k_1^{-1}} = \frac{-1}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_a}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}} \quad (3.9)$$

onde $\omega_n = \sqrt{k_1/m_1}$ e $\omega_a = \sqrt{k_2/m_2}$ são, respectivamente, a frequência natural da massa principal e da massa secundária, ambas consideradas isoladamente.

Se o numerador da eq.(3.8) é igual a zero, então a amplitude da resposta do sistema primário anula-se. Ou seja, a frequência de excitação Ω coincide com a frequência natural do absorvedor. Diz-se que nesta configuração o absorvedor está sintonizado.

A Fig.3.2 mostra a função de resposta em frequência para o sistema primário dada pela eq.(3.8).

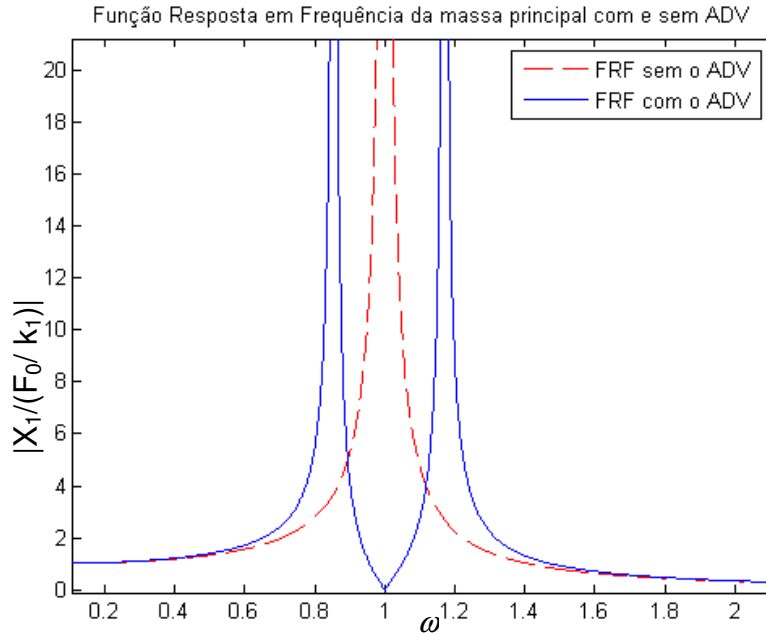


Figura 3.2 – Função de Resposta em frequência para a massa principal

Outro fato a ser observado é que o sistema acoplado possui agora duas frequências naturais, que são obtidas calculando-se as raízes do denominador (polinômio característico) das equações (3.8) e (3.9), resultando:

$$\Omega_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + f^2(1 + \mu) \pm \sqrt{[1 + f^2(1 + \mu)]^2 - 4f^2} \right\} \quad (3.10)$$

onde $f = \omega_a / \omega_n$ e $\mu = m_2 / m_1$. Observa-se ainda que estes valores de frequências naturais são diferentes dos valores das frequências naturais do sistema primário (ω_n) e do absorvedor (ω_a), considerados isoladamente.

Assim, o absorvedor deve ser projetado de tal maneira que sua frequência natural coincida com a frequência natural do sistema, como mostra a eq.(3.11)

$$\omega_n = \omega_a \quad (3.11)$$

Conseqüentemente, para $\Omega = \omega_n$, onde anteriormente havia uma única frequência natural do sistema isolado, com a introdução do absorvedor sintonizado para esta frequência ocorre uma anti-ressonância do sistema primário, isto é, aparece um ponto ao longo do espectro de

freqüência onde a amplitude de vibração do sistema primário se anula.

A partir das equações (3.8) e (3.9), escreve-se X_1 e X_2 , em termos de parâmetros adimensionais

$$\frac{X_1}{F_0 k_1^{-1}} = \frac{(1 - g^2)}{(1 - g^2)(1 - g^2 + \mu) - \mu} \quad (3.12)$$

$$\frac{X_2}{F_0 k_1^{-1}} = \frac{1}{(1 - g^2)(1 - g^2 + \mu) - \mu} \quad (3.13)$$

sendo

$$g = \Omega / \omega_n \quad e \quad \mu = m_2 / m_1$$

A freqüência de excitação (Ω) será igual à freqüência natural do sistema primário se o numerador da eq.(3.12) for igual a zero, Assim, a amplitude da resposta será nula. A eq.(3.12) é ilustrada através da Fig.3.3, de onde se observa que a freqüência natural do sistema primário é substituída por uma anti-ressonância, surgindo duas novas freqüências de ressonância. Estas freqüências são calculadas ao se igualar a zero o denominador das equações (3.12) e (3.13). Tem-se então que obter as raízes de uma equação quadrática em g , sendo que tais raízes são as freqüências naturais do sistema acoplado, estas dadas pela eq.(3.14):

$$g = \sqrt{1 + \frac{\mu}{2} \pm \left(\mu + \frac{\mu^2}{4} \right)^{1/2}} \quad (3.14)$$

Os valores das raízes fazem com que as amplitudes da massa principal e do absorvedor se tornem infinitamente grandes, na ausência de amortecimento.

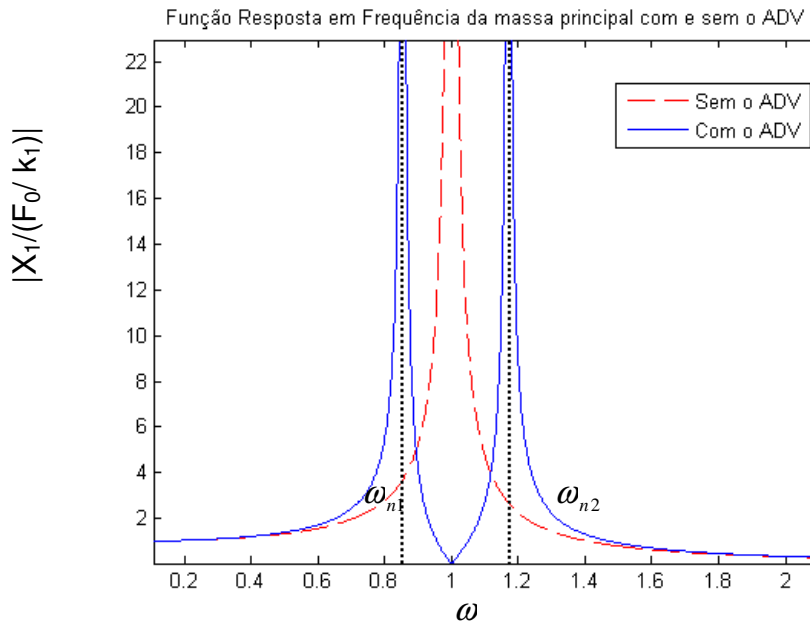


Figura 3.3 – Função de Resposta em Frequência para a massa principal

O projeto ótimo do absorvedor dado consiste na busca de parâmetros que permitam seu funcionamento efetivo, ou seja, busca-se encontrar parâmetros ótimos para o absorvedor de tal forma que sua frequência seja igual à frequência de excitação externa da massa principal.

3.3. Estudo de um Absorvedor Dinâmico de Vibração Amortecido – Caso Linear

Apresenta-se na Fig.3.4 o esquema de um ADV com amortecimento viscoso (DEN HARTOG,1985) acoplado ao sistema primário não amortecido (m_1, k_1). As equações do movimento no domínio do tempo escrevem-se:

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + k_1 x_1(t) + k_2 [x_1(t) - x_2(t)] + c_2 [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] = F_0 e^{i\Omega t} \quad (3.15)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + k_2 [x_2(t) - x_1(t)] + c_2 [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] = 0 \quad (3.16)$$

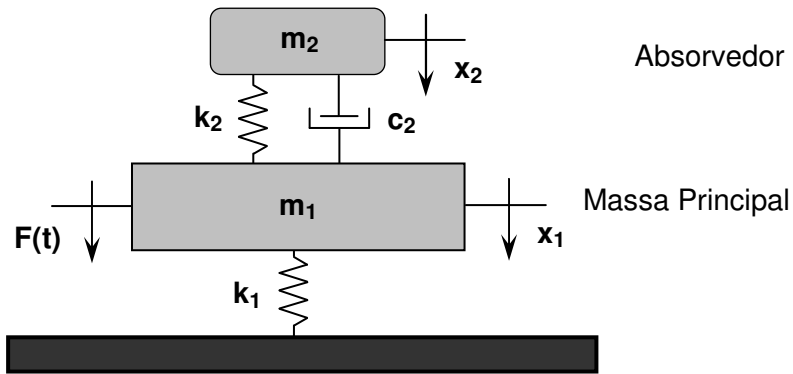


Figura 3.4 – Sistema Vibratório de 2 g.d.l. Amortecido

São mostradas abaixo as equações do movimento em regime permanente:

$$-m_1\Omega^2 X_1 + k_1 X_1 + k_2(X_1 - X_2) + j\Omega c_2(X_1 - X_2) = F_0 \quad (3.17)$$

$$-m_2\Omega^2 X_2 + k_2(X_2 - X_1) + j\Omega c_2(X_2 - X_1) = 0 \quad (3.18)$$

A partir daí obtém-se as amplitudes da massa principal, dadas pela eq.(3.19)

$$X_1 = F_0 \frac{(k_1 - m_2\Omega^2) + j\Omega c_2}{[(-m_1\Omega^2 + k_1)(-m_2\Omega^2 + k_2) - m_2\Omega^2 k_1] + j\Omega c_2(-m_1\Omega^2 + k_1 - m_2\Omega^2)} \quad (3.19)$$

onde X_1 é complexo. A eq. (3.19) acima será rescrita como:

$$X_1 = F_0(A_1 + jB_1) \quad (3.20)$$

sendo $j = \sqrt{-1}$ o imaginário puro e A_1 e B_1 são funções reais. Introduzindo notação adimensional, sejam:

$$\mu = m_2/m_1; \omega_a = (k_2/m_2)^{1/2}, \quad \omega_n = (k_1/m_1)^{1/2}, \quad f = \omega_a/\omega_n,$$

$$g = \Omega/\omega_n, \quad c_c = 2m_2\omega_n, \quad \eta = c/c_c, \quad X_{est} = F_0/k_1 \quad (3.21)$$

Substituindo os parâmetros adimensionais dados pela eq.(3.21) na eq.(3.19), obtém-se:

$$\frac{|X_1|}{X_{est}} = \sqrt{\frac{(2\eta g)^2 + (g^2 - f^2)^2}{(2\eta g)^2 (g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + [\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2}} \quad (3.22)$$

Mostra-se na Fig.3.5 a função de resposta em freqüência da massa principal obtida para $\mu = 0.1$ e $f = 1$, considerando diferentes valores do fator de amortecimento η .

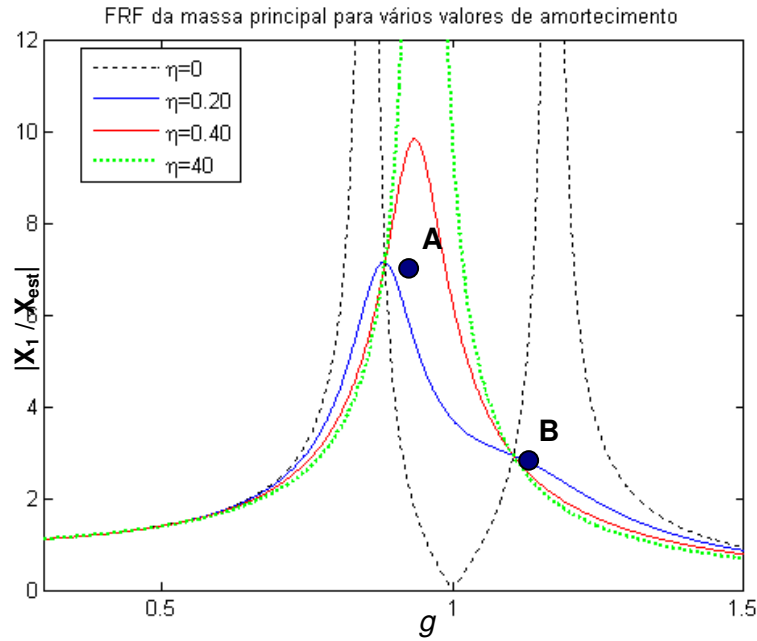


Figura 3.5 – Freqüências relativas à massa m_1 , para diferentes valores do fator de amortecimento

Observando a Figura 3.5, mostrada acima, conclui-se que, para $\eta = 0$, tem-se novamente o caso sem amortecimento (correspondente ao da Figura 3.3, mostrada na seção anterior) e se η tende ao infinito tem-se que as duas massas resultam ligadas, formando assim um sistema de um único grau de liberdade, cuja massa total é a soma da massa principal com a do absorvedor. Neste caso, a amplitude do deslocamento será infinitamente grande para a única ressonância do sistema de 1 g.d.l. resultante.

Para valores de η intermediários, tem-se a resposta de um sistema de dois graus de liberdade amortecido. Observa-se que todas as curvas se interceptam nos chamados pontos invariantes pelos quais a curva de resposta necessariamente passa, independentemente do fator de amortecimento, estes pontos estão destacados na figura por A e B.

É possível que se obtenha um ADV com os parâmetros otimizados que conduzam a menores amplitudes da função resposta em freqüência (FRF), explorando a existência

destes pontos invariantes. Neste caso, o conjunto ótimo é aquele que leva aos dois pontos invariantes posicionados a uma mesma altura, com a curva de resposta que possui inclinação nula em ambos os pontos.

O projeto ótimo deste tipo de absorvedor tem como objetivo encontrar valores de f e de η que minimizem a máxima amplitude da função de resposta em frequência. Sobre o estudo da atenuação de vibrações de sistemas de vários graus de liberdade usando ADVs acoplados à estrutura, pode-se encontrar informações detalhadas em (RADE , STEFFEN,2000)

CAPÍTULO IV

ABSORVEDORES DINÂMICOS DE VIBRAÇÃO NÃO LINEARES

Neste capítulo, pretende-se estudar os absorvedores dinâmicos de vibração não-lineares, visando determinar a contribuição das não linearidades no sentido de melhorar a eficiência da atenuação das vibrações. Busca-se aqui mostrar várias formas de resolução das equações do movimento deste tipo de absorvedor. Primeiramente, será mostrado como encontrar a resposta em frequência de um absorvedor dinâmico de vibração não-linear não amortecido, através das funções de Bessel. Em seguida, com o objetivo de diversificar as estratégias de resolução, procura-se a resposta no tempo para o sistema, utilizando o Método de Perturbação conhecido como Método da Expansão “*straightforward*”. Finalmente, mostra-se um absorvedor dinâmico de vibração não-linear amortecido para o qual se busca resolver suas equações do movimento, utilizando outra técnica de perturbação, conhecida como Método da Média.

4.1 Estudo de um Absorvedor Dinâmico de Vibração Não Linear Não Amortecido, Utilizando Funções de Bessel.

É apresentado a seguir um sistema vibratório de dois graus de liberdade (PIPES, 1953), que consiste de uma massa principal ligada por uma mola linear a um ponto fixo estacionário e uma massa secundária, conectada ao sistema primário através de uma mola com características não-lineares (PAI; SCHULZ 1998). As oscilações são impostas ao sistema principal através de uma excitação harmônica $F(t)$. Obtêm-se as expressões para as amplitudes de vibração das duas massas em função da frequência de excitação ditada pela força $F(t)$. O modelo do sistema é mostrado na Fig.4.1.

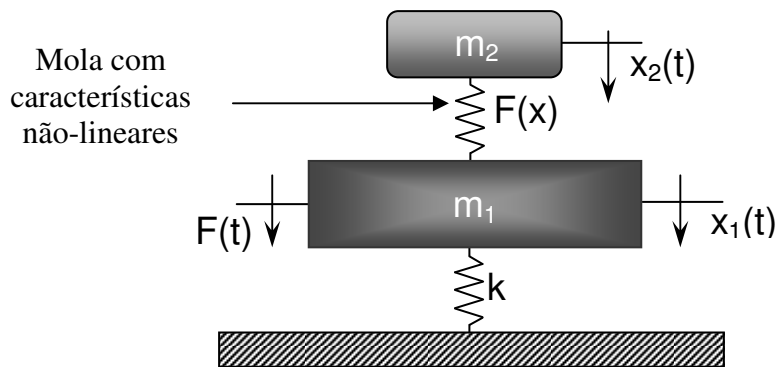


Figura 4.1- Sistema de 2 g.d.l. não-linear

Para reduzir as amplitudes das vibrações forçadas impostas à massa principal, pode-se escolher adequadamente a constante de rigidez do sistema de forma a afastá-lo da condição de ressonância, ou ainda realizar o balanceamento da força perturbadora que atua neste sistema. Quando por alguma razão não se pode aplicar nenhum destes procedimentos, as vibrações indesejadas podem então ser reduzidas através do acréscimo de um Absorvedor Dinâmico de Vibração. No caso linear (clássico) esta atenuação de vibração é conseguida pela sintonização do absorvedor na frequência da força perturbadora harmônica (RADE; STEFFEN JR., 1999), conforme visto anteriormente. Se esta frequência varia durante a operação normal do sistema, o absorvedor pode se tornar inoperante ou até mesmo piorar o desempenho do conjunto, caso este atinja uma das duas condições de ressonância do sistema de dois graus de liberdade resultante da associação entre o sistema principal e o absorvedor (CUNHA JR, 1999). Assim, procura-se dotar o absorvedor dinâmico clássico de maior flexibilidade, tornando-o eficiente ao longo de uma faixa de frequência ampliada, pela introdução de uma mola com características não-lineares.

4.1.1 Características da Mola Não-Linear

Tem-se, portanto, uma mola com características não lineares que liga o absorvedor à estrutura primária, como visto na Fig. 4.1. A mola é do tipo *hardening spring* que tem a relação força – deformação dada pela eq. (4.1) a seguir:

$$F(x) = \frac{k_0}{a} \sinh(ax) \quad (4.1)$$

onde

K_0 : Constante inicial da mola não-linear

a : Fator de não-linearidade

sendo

$$x = x_1 - x_2 \quad (4.2)$$

O fator de não-linearidade não poderá ser exatamente nulo, mas verifica-se que, quando este tende para zero, tem-se, no limite, que a mola linear é reencontrada, conforme mostra a eq.(4.3):

$$\lim_{a \rightarrow 0} F(x) = k_0 \frac{\sinh(ax)}{a} = k_0 x \quad (4.3)$$

A Fig. 4.2 ilustra o ponto acima comentado, ou seja, ao tender o fator de não linearidade para zero, a mola não linear passa a ter um comportamento linear. Isso significa que os parâmetros ótimos da mola não-linear para valores muito pequenos de a (pequena não-linearidade) serão iguais ou muito próximos daqueles do absorvedor dinâmico de vibração linear.

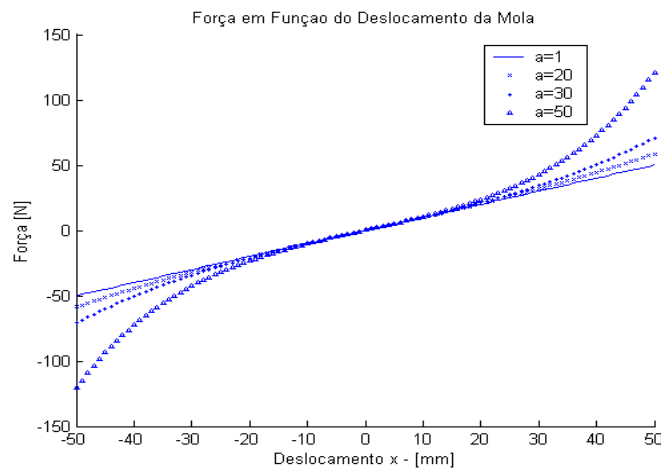


Figura 4.2 - Força de mola não-linear

4.1.2 Equacionamento do Problema

Admite-se que a força aplicada à massa principal é dada por:

$$F(t) = P_0 \sin(\omega t) \quad (4.4)$$

Considerando $x_1 > x_2$ e aplicando a segunda lei de Newton, a equação diferencial do movimento para a massa principal (m_1) do sistema dinâmico mostrado na Fig. 4.1 é dada por:

$$\begin{aligned}\sum F &= m_1 \ddot{x}_1 \\ P_0 \sin(\omega t) - F(x) - k_1 x_1 &= m_1 \ddot{x}_1 \\ m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + F(x) &= P_0 \sin(\omega t)\end{aligned}\tag{4.5}$$

e, semelhantemente, para a massa secundária (m_2):

$$\begin{aligned}\sum F &= m_2 \ddot{x}_2 \\ F(x) &= m_2 \ddot{x}_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 - F(x) &= 0\end{aligned}\tag{4.6}$$

que descreve o movimento da massa do absorvedor.

Para que a massa principal permaneça “parada”, ou seja, sem deslocamento nem aceleração, faz-se:

$$x_1 = \dot{x}_1 = \ddot{x}_1 = 0\tag{4.7}$$

assim, a eq.(4.5) torna-se

$$F(x) = P_0 \sin(\omega t)\tag{4.8}$$

e a eq.(4.2) será dada por

$$x = -x_2\tag{4.9}$$

Inserindo agora o valor da força encontrado na eq.(4.8) na eq.(4.6), tem-se:

$$\begin{aligned}m_2 \ddot{x}_2 - P_0 \sin(\omega t) &= 0 \\ \text{ou} \\ m_2 \ddot{x}_2 &= P_0 \sin(\omega t)\end{aligned}\tag{4.10}$$

Admitindo agora que a mola tenha característica restauradora, isto é, a força é igual em módulo, mas com sentido contrário quando alongada ou comprimida, ou seja:

$$F(x) = F(-x)\tag{4.11}$$

e considerando que a resposta no absorvedor seja da forma

$$\begin{aligned}x_2(t) &= X_2 e^{i\omega t} \\ \dot{x}_2(t) &= i\omega X_2 e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_2(t) &= -\omega^2 X_2 e^{i\omega t}\end{aligned}\tag{4.12}$$

obté-m-se:

$$F(x) = -m_2 \omega^2 X_2 \tag{4.13}$$

e ainda, pela eq.(4.11), tem-se

$$\begin{aligned}F(x_2) &= F(-x_2) = -m_2 \omega^2 (-x_2) = P_0 \text{sen}(\omega t) \\ F(x) &= m_2 \omega^2 x_2 = P_0 \text{sen}(\omega t)\end{aligned}\tag{4.14}$$

Conclui-se, portanto, que a força da mola do absorvedor, para anular as vibrações do sistema principal tem que obedecer a eq.(4.15) abaixo:

$$\begin{aligned}F(x) &= k_0 x \\ \text{onde} \\ k_0 &= \omega^2 m_2\end{aligned}\tag{4.15}$$

Isto mostra que o absorvedor dinâmico deve ter uma mola linear para fazer parar totalmente a vibração da massa principal, e mais, que a constante da mola deve ser fixada em função da frequência de excitação, uma vez escolhida a massa do absorvedor. Isso demonstra que um absorvedor deste tipo só é efetivo em uma determinada frequência da força harmônica de excitação. Assim, este estudo dedica-se à situação em que a mola não-linear contribui no sentido de atenuar consideravelmente (sem anular completamente) as vibrações (pois foi provado que, para anular completamente a vibração da massa principal, as características da mola têm que ser lineares). Porém, tal atenuação deve ocorrer numa faixa de frequência mais compatível do ponto de vista da aplicação, sem introduzir nenhum elemento ativo no sistema.

4.1.3 Desenvolvimento da Força Não-Linear da Mola em Termos das Funções de Bessel

Seja a força da mola não-linear dada como na eq.(4.16):

$$F(x) = \frac{k_0}{a} \sinh(B \sin(\omega t)) \quad (4.16)$$

sendo que $B = aX$.

Para desenvolver a expressão acima, serão utilizadas as funções de Bessel.

Pode-se ainda escrever

$$g(t) = \frac{k_0}{a} \sinh(B \sin(\omega t)) \quad (4.17)$$

como sendo

$$g(t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{(2n+1)}(B) \sin[(2n+1)\omega t] \quad (4.18)$$

onde I_n denota o termo da expansão de Bessel de ordem n .

Assim, a função que descreve a força da mola não-linear em função da deformação, pode ser escrita como:

$$F(x) = \frac{2k_2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{(2n+1)}(B) \sin[(2n+1)\omega t] \quad (4.19)$$

Desenvolvendo a série, tem-se:

$$F(x) = \frac{2k_2}{a} [I_1(B) \sin(\omega t) - I_3(B) \sin(3\omega t) + I_5(B) \sin(5\omega t) \dots] \quad (4.20)$$

4.1.4 Equações do Movimento

Será apresentada a equação diferencial geral do movimento do sistema não-linear em termos dos deslocamentos da massa principal e da massa do absorvedor, bem como sua solução em termos das funções de Bessel.

Da eq. (4.2) pode-se escrever:

$$X = x_1 - x_2 \quad (4.21)$$

Ao derivar a eq. (4.21) duas vezes em relação ao tempo tem-se:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{X} + \ddot{x}_2 \quad (4.22)$$

Inserindo agora as equações (4.8), (4.21) e (4.22) nas eqs.(4.5) e (4.6) e fazendo algumas manipulações algébricas, chega-se a:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 \frac{\sinh[a(x_1 - x_2)]}{a} &= P_0 \sin(\omega t) \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 \frac{\sinh[a(x_1 - x_2)]}{a} &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Será utilizado o método de Duffing para visualizar os fenômenos mais importantes deste sistema (ver Anexo A). Neste sentido, uma primeira aproximação para a solução pode ser dada por:

$$\begin{aligned} x &= X \sin(\omega t) \Rightarrow \ddot{x} = -X \omega^2 \sin(\omega t) \\ \text{e} \\ x_1 &= (X + X_2) \sin(\omega t) \Rightarrow \ddot{x}_1 = -(X + X_2) \omega^2 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (4.24)$$

pode-se então reescrever as eq.(4.23) como sendo:

$$\begin{aligned} -m_1 (X + X_2) \omega^2 \sin(\omega t) + k_1 (X + X_2) \sin(\omega t) + k_2 \frac{\sinh[aX \sin(\omega t)]}{a} &= P_0 \sin(\omega t) \\ -m_2 X_2 \omega^2 \sin(\omega t) - k_2 \frac{\sinh[aX \sin(\omega t)]}{a} &= 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

ou

$$\begin{aligned}
& -m_1(X + X_2)\omega^2 \text{sen}(\omega t) + k_1(X + X_2)\text{sen}(\omega t) + \frac{k_2}{a}F(x) = P_0 \text{sen}(\omega t) \\
& -m_2 X_2 \omega^2 \text{sen}(\omega t) - \frac{k_2}{a}F(x) = 0
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Substituindo $F(x)$ nas equações acima por sua expansão segundo as funções de Bessel e coletando os termos em $\text{sen}(\omega t)$, chega-se a:

$$\begin{aligned}
& (k_1 - \omega^2 m_1)(X + X_2) + \frac{2k_2 I_1(B)}{a} = P_0 \\
& -\omega^2 m_2 X_2 - \frac{2k_2 I_1(B)}{a} = 0
\end{aligned} \tag{4.27}$$

A expansão da função de Bessel dada anteriormente em série de potências é escrita como:

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{(k!) \Gamma(n+k+1)} \tag{4.28}$$

onde Γ é a função gama, definida por:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \tag{4.29}$$

Assim, para $n=1$ tem-se:

$$I_1(B) = \frac{B/2}{\Gamma_2} + \frac{(B/2)^3}{\Gamma_3} + \frac{(B/2)^5}{\Gamma_4} + \dots \tag{4.30}$$

Desenvolvendo Γ chega-se a:

$$I_n(B) = \frac{B}{2} + \frac{B^3}{16} + \frac{B^5}{384} + \dots \tag{4.31}$$

Logo, as eq.(4.27) podem ser rescritas como:

$$\begin{aligned}
(k_1 - \omega^2 m_1)(X + X_2) + \frac{2k_2}{a} \left(\frac{B}{2} + \frac{B^3}{16} + \frac{B^5}{384} + \dots \right) &= P_0 \\
-\omega^2 m_2 X_2 - \frac{2k_2}{a} \left(\frac{B}{2} + \frac{B^3}{16} + \frac{B^5}{384} + \dots \right) &= 0
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Após manipulações algébricas nas equações acima e somando uma à outra, obtém-se:

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{k_2 [\omega^2 (m_1 + m_2) - k_1]}{192} \right\} B^5 + \left\{ \frac{k_2 [\omega^2 (m_1 + m_2) - k_1]}{8} \right\} B^3 + \\
&+ \left\{ k_2 [\omega^2 (m_1 + m_2) - k_1] + (k_1 - \omega^2 m_1)(\omega^2 m_2) \right\} B - \omega^2 m_2 a P_0 = 0
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Ao fazer variar a freqüência da força de excitação ω , são determinadas as amplitudes de vibração, através da conhecida Função de Resposta em Freqüência (FRF) do movimento relativo entre a massa principal e o absorvedor.

4.1.5 Cálculo da Função de Resposta em Freqüência da Massa Principal e do Absorvedor

Retomando novamente a primeira aproximação do método de Duffing,

$$x = X \sin(\omega t) \tag{4.34}$$

obtém-se:

$$\begin{aligned}
x_1 &= X_1 \sin(\omega t) \Rightarrow \ddot{x}_1 = -X_1 \omega^2 \sin(\omega t) \\
x_2 &= X_2 \sin(\omega t) \Rightarrow \ddot{x}_2 = -X_2 \omega^2 \sin(\omega t)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Voltando à equação (4.23) e substituindo nela as duas expressões da eq.(4.35), utilizando novamente a expansão de Bessel, obtém-se as expressões para as amplitudes X_1 e X_2 , ou seja, as amplitudes das massas principal e secundária do sistema de dois graus de liberdade não linear, respectivamente.

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{P_0 a - 2k_2 I_1(B)}{a(k_1 - \omega^2 m_1)} \\
 X_2 &= \frac{-2k_2 I_1(B)}{m_2 a \omega^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$

4.2. Resposta de um absorvedor dinâmico de vibração utilizando de Métodos de Perturbação

Métodos de perturbação (NAYFEH, 1981) são técnicas utilizadas para se encontrar a solução de uma equação, ou sistema de equações diferenciais não lineares. O método da expansão “straightforward”, o balanço harmônico e o método da média são três técnicas de perturbação bastante utilizadas. Neste trabalho será utilizado o método da expansão “straightforward” e, posteriormente, será empregado o método da média a fim de resolver os sistemas não-lineares considerados.

4.2.1 Método de resolução no domínio do tempo utilizando o Método de Perturbação conhecido como Método da Expansão “straightforward”.

Os métodos de perturbação, trabalham com a aplicação de pequenas perturbações nos termos não lineares para obtenção das soluções (HAGEDORN, 1988). Com o objetivo de desenvolver ferramentas para trabalhar com sistemas não lineares, procurou-se resolver a equação dada em (4.23) utilizando uma das técnicas de perturbação que será posteriormente comparada com a solução numérica do sistema.

Assim, para encontrar a solução das equações do movimento dadas pelas Eq. (4.23), faz-se a expansão do termo não linear em serie de Taylor, obtendo assim:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 \left[(x_1 - x_2) + \frac{(x_1 - x_2)^3}{6} a^2 \right] &= P_0 \sin(\omega t) \\
 m_2 \ddot{x}_2 - k_2 \left[(x_1 - x_2) + \frac{(x_1 - x_2)^3}{6} a^2 \right] &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.37}$$

Fazendo uma expansão polinomial das variáveis x_1 e x_2 em função do termo não linear a , até o terceiro termo, tem-se:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_{10} + x_{11}a + x_{12}a^2 + \dots \\x_2 &= x_{20} + x_{21}a + x_{22}a^2 + \dots\end{aligned}\tag{4.38}$$

Substituindo os valores das expansões de x_1 e x_2 nas equações do movimento (4.37) e fazendo algumas manipulações algébricas, obtêm-se três sistemas de equações diferenciais lineares dados pelas eq. (4.39), (4.40), (4.41):

$$\begin{aligned}m_1\ddot{x}_{10} + k_1x_{10} + k_2(x_{10} - x_{20}) &= P_0\text{sen}(\omega t) \\m_2\ddot{x}_{20} - k_2(x_{10} - x_{20}) &= 0\end{aligned}\tag{4.39}$$

com as condições iniciais :

$$\begin{Bmatrix} x_{10}(0) = 0 \\ \dot{x}_{10}(0) = A \end{Bmatrix} \text{ e } \begin{Bmatrix} x_{20}(0) = 0 \\ \dot{x}_{20}(0) = B \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}m_1\ddot{x}_{11} + k_1x_{11} + k_2(x_{11} - x_{21}) &= 0 \\m_2\ddot{x}_{21} - k_2(x_{11} - x_{21}) &= 0\end{aligned}\tag{4.40}$$

Com as condições iniciais

$$\begin{Bmatrix} x_{11}(0) = 0 \\ \dot{x}_{11}(0) = 0 \end{Bmatrix} \text{ e } \begin{Bmatrix} x_{21}(0) = 0 \\ \dot{x}_{21}(0) = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}m_1\ddot{x}_{12} + k_1x_{12} + k_2(x_{12} - x_{22}) + \frac{k_2}{6}(x_{10} - x_{20})^3 &= P_0\text{sen}(\omega t) \\m_2\ddot{x}_{22} - k_2(x_{12} - x_{22}) - \frac{k_2}{6}(x_{10} - x_{20})^3 &= 0\end{aligned}\tag{4.41}$$

Com as condições iniciais

$$\begin{Bmatrix} x_{12}(0) = 0 \\ \dot{x}_{12}(0) = 0 \end{Bmatrix} \text{ e } \begin{Bmatrix} x_{22}(0) = 0 \\ \dot{x}_{22}(0) = 0 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo estes sistemas separadamente a partir de técnicas de resolução analíticas e substituindo as soluções em (4.38), obtêm-se a resposta no tempo do sistema dinâmico proposto. Os movimentos de x_1 e x_2 são expressos por:

$$\begin{aligned}
x_1 = & P_0 \frac{\omega(-k_2 + \omega^2 m_2)}{-k_1 k_2 + k_1 \omega^2 m_2 + \omega^2 k_2 m_1 + \omega^2 k_2 m_2 - \omega^4 m_1 m_2} \sin(\omega t) + \\
& + \left(\frac{(-2S_1 k_2 - \omega^2 S_1 m_2)}{k_1 k_2 + k_1 \omega^2 m_2 + \omega^2 k_2 m_1 + \omega^2 k_2 m_2 - \omega^4 m_1 m_2} \right) \sin(\omega t) +
\end{aligned} \tag{4.42}$$

$$+ \frac{-2S_2 k_2 - 9\omega^2 S_2 m_2}{9\omega^2 k_2 m_1 - 9k_1 \omega^2 m_2 - k_1 k_2 - 9\omega^2 k_2 m_1 + 81\omega^4 m_1 m_2} \sin(3\omega t)$$

$$\begin{aligned}
x_2 = & \left(-P_0 \frac{\omega k_2}{-k_1 k_2 + k_1 \omega^2 m_2 + \omega^2 k_2 m_1 + \omega^2 k_2 m_2 - \omega^4 m_1 m_2} \right) \sin(\omega t) + \\
& + a^2 \left(\frac{k_1 S_1 + 2S_1 k_2 - \omega^2 S_1 m_1}{\omega^2 k_2 m_1 - k_1 \omega^2 m_2 - k_1 k_2 - \omega^2 k_2 m_2 + \omega^4 m_1 m_2} \right) \sin(\omega t) +
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$+ \frac{-2S_2 k_2 + 9\omega^2 S_2 m_1 - k_1 S_2}{9\omega^2 k_2 m_1 - 9k_1 \omega^2 m_2 - k_1 k_2 - 9\omega^2 k_2 m_2 + 81\omega^4 m_1 m_2} \sin(3\omega t)$$

onde

$$\begin{cases}
S_1 = \frac{k_2}{8} (A-B)^3 \text{ e } S_2 = \frac{k_2}{24} (A-B) \\
A = \frac{P_0(-k_2 + \omega^2 m_2)}{-k_1 k_2 + k_1 \omega^2 m_2 + \omega^2 k_2 m_1 + \omega^2 k_2 m_2 - \omega^4 m_1 m_2} \\
B = \frac{-P_0 \omega k_2}{-k_1 k_2 + k_1 \omega^2 m_2 + \omega^2 k_2 m_1 + \omega^2 k_2 m_2 - \omega^4 m_1 m_2}
\end{cases}$$

4.3 Absorvedor Dinâmico de Vibração Amortecido, montado sobre molas com características Não Lineares

O sistema a ser examinado é modelado como um sistema de 2gdl, cujo modelo é mostrado na Fig.4.3

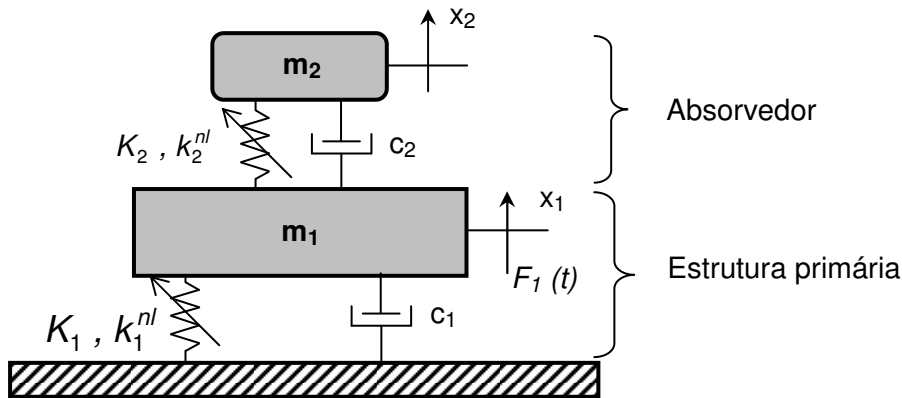


Figura 4.3 – Sistema de 2 g.d.l. – modelo do absorvedor dinâmico de vibração não linear

Neste sistema, a coordenada x_1 representa o deslocamento da massa principal (massa m_1) com relação à base, a coordenada x_2 representa o deslocamento da massa secundária (absorvedor – massa m_2) com relação à massa principal. A massa principal está sujeita a uma força harmônica do tipo

$$F_1(t) = p \cos(\omega t) \quad (4.44)$$

No sistema em questão, os amortecimentos são considerados lineares enquanto que ambas as molas possuem características não lineares, com forças restauradoras dadas por:

$$r_i(x_i) = k_i x_i + k_i^{nl} x_i^3, \quad i = 1, 2. \quad (4.45)$$

Os deslocamentos são normalizados segundo o comprimento do vetor x_c , ou seja

$$y_i = \frac{x_i}{x_c} \quad (4.46)$$

O tempo será normalizado por

$$\tau = \omega t \quad (4.47)$$

A partir daí, introduzem os seguintes parâmetros (BORGES, 2007):

$$\begin{aligned} \omega_{ni}^2 &= \frac{k_i}{m_i}, \quad \omega_i = \frac{\bar{\omega}_i}{\omega}, \quad \zeta_i = \frac{c_i}{2\sqrt{k_i m_i}}, \quad \delta_i = 2\zeta_i \omega_i, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1}, \quad \eta_i = \omega_i^2, \\ \varepsilon_i &= \frac{k_i^{nl} x_c^2}{m_i \omega^2}, \quad \rho = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad P = \frac{p}{m_1 \omega_{n1}^2 x_c}, \quad \beta = \frac{P}{\eta_1}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_{n1}}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Utilizando-se da segunda lei de Newton e fazendo algumas manipulações matemáticas, escrevem-se as equações do movimento do sistema na forma matricial, como sendo:

$$M\ddot{\mathbf{y}} + C\dot{\mathbf{y}} + K\mathbf{y} = \mathbf{f} \quad (4.49)$$

sendo que M é a matriz de massa, C a matriz de amortecimento e K a matriz de rigidez, dadas respectivamente por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1+\mu & \mu \\ \mu & \mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \mu\delta_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \mu\eta_2 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

onde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} P \cos \tau - \varepsilon_1 y_1^3 \\ -\mu \varepsilon_2 y_2^3 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

4.3.1. Resposta em Regime Permanente

Existem alguns métodos de perturbação utilizados para a resolução de equações diferenciais não lineares, cujo princípio básico consiste em transformar as variáveis dependentes do sistema. Esses métodos são normalmente classificados como métodos de média (*averaging methods*), (THOMSEM, 2003) e incluem técnicas como: método de Krylov-Bogoliubov, método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky, método da média generalizada, dentre outros. Será empregado na busca da solução da equação do movimento dada acima, o método de Krylov-Bogoliubov, que é bastante usado na resolução de equações diferenciais não lineares.

Esse método será utilizado fazendo com que a frequência se aproxime de $\Omega = 1$. Estas soluções podem ser descritas na forma

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{u}(\tau) \cos \tau + \mathbf{v}(\tau) \sin \tau \quad (4.50)$$

onde a dependência do tempo com respeito a $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2)^T$ e $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2)^T$ é considerada “pequena”, ou seja os $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são de alta ordem.

Ao realizar a transformação de variáveis, uma equação adicional e independente será necessária para garantir a unicidade da transformação. Para esta equação adicional é comum a prática de usar a condição que estabelece a velocidade como tendo forma funcional similar à do caso linear.

$$\dot{\mathbf{y}}(\tau) = -\mathbf{u}(\tau) \sin \tau + \mathbf{v}(\tau) \cos \tau \quad (4.51)$$

Essa transformação de variáveis dada pela eq.(4.50) e pela eq.(4.51) é denominada de *transformação de Van der Pol* (HAGEDORN, 1988)

Derivando a eq.(4.50) em relação a τ , tem-se:

$$\dot{\mathbf{y}}(\tau) = -\dot{u}(\tau)\cos\tau - u(\tau)\sin\tau + \dot{v}(\tau)\sin\tau + v(\tau)\cos\tau \quad (4.52)$$

Ao substituir a eq.(4.51) na eq.(4.52) tem-se

$$\dot{u}(\tau)\cos\tau + \dot{v}(\tau)\sin\tau = 0 \quad (4.53)$$

Derivando a eq.(4.51) obtém-se

$$\ddot{\mathbf{y}}(\tau) = -\ddot{u}(\tau)\sin\tau - u(\tau)\cos\tau + \ddot{v}(\tau)\cos\tau + v(\tau)\sin\tau \quad (4.54)$$

Ao substituir y , $\dot{y}$, $\ddot{y}$ das equações (4.50), (4.52), (4.53) na equação do movimento dada pela eq.(4.49), obtém-se a seguinte expressão

$$(\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{u})\cos\tau - (\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{M}\mathbf{v} + \mathbf{C}\mathbf{u} + \mathbf{K}\mathbf{v})\sin\tau = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \tau) \quad (4.55)$$

Em seguida, multiplica-se a eq.(4.53) por $\mathbf{M}\cos\tau$ e a eq.(4.55) por $-\sin\tau$ e, a partir daí, somam-se estas duas equações. A equação resultante é então integrada sobre um período (0 a 2π), assumindo que u e v são essencialmente constantes sobre este período de tempo. Após manipulações matemáticas, tem-se:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2}(\mathbf{K} - \mathbf{M})\mathbf{v} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \delta_1 u_1 - e_1 v_1 \\ \mu(\delta_2 u_2 - e_2 v_2) \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

Da mesma forma, ao multiplicar a eq.(4.53) e a eq.(4.55) respectivamente por $\mathbf{M}\sin\tau$ e $\cos\tau$, e, em seguida, integrar a equação resultante ao longo do período de 0 a 2π , tem-se:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}(\mathbf{M} - \mathbf{K})\mathbf{u} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \delta_1 v_1 - e_1 u_1 - P \\ \mu(\delta_2 v_2 - e_2 u_2) \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

sendo e_i dado por

$$e_i = \frac{3\varepsilon_i(u_i^2 + v_i^2)}{4}, \quad i = 1, 2. \quad (4.58)$$

As equações (4.56) e (4.57) representam um sistema de equações diferenciais ordinário, autônomo, de primeira ordem com quatro variáveis. A solução do sistema avaliado pelo Método da Média, dada pelas equações mencionadas acima, corresponde a movimentos de período 2π do sistema original representado pela eq.(4.49). Para vibração periódica em regime permanente tem-se a condição:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (4.59)$$

Aplicando a eq.(4.59) nas equações (4.56) e (4.57), tem-se um sistema algébrico, não linear, com quatro equações nas quatro variáveis u_1, u_2, v_1, v_2 , como segue:

$$\begin{aligned} (1 + \mu - \omega_1^2)u_1 + \mu u_2 - 2\zeta_1\omega_1 v_1 - \frac{3\varepsilon_1(u_1^2 + v_1^2)u_1}{4} + \beta\omega_1^2 &= 0 \\ \mu u_1 + (\mu - \mu\rho^2\omega_1^2)u_2 - \mu\left(2\zeta_2\rho\omega_1^2 v_2 + \frac{3\varepsilon_2(u_2^2 + v_2^2)u_2}{4}\right) &= 0 \\ (\omega_1^2 - 1 - \mu)v_1 - \mu v_2 - 2\zeta_1\omega_1 u_1 + \frac{3\varepsilon_1(u_1^2 + v_1^2)v_1}{4} &= 0 \\ -\mu v_1 + (\mu\rho^2\omega_1^2 - \mu)v_2 - \mu\left(2\zeta_2\rho\omega_1^2 u_2 - \frac{3\varepsilon_2(u_2^2 + v_2^2)v_2}{4}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

4.3.2 Obtenção de Resultados

O sistema dado pela eq.(4.60) é agora resolvido numericamente. Então são obtidos os valores de u_1, u_2, v_1, v_2 e, com isso, são encontradas as amplitudes de vibração da massa principal e do absorvedor, dadas por r_1 e r_2 nas equações (4.61) e (4.62), respectivamente:

$$r_1 = \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \quad (4.61)$$

$$r_2 = \sqrt{u_2^2 + v_2^2} \quad (4.62)$$

Com a finalidade de observar graficamente e validar os resultados obtidos anteriormente, serão mostrados alguns estudos de casos envolvendo diferentes situações de interesse,

particularmente aquelas que envolvem parâmetros que inserem não linearidades ao sistema.

4.4 Aplicações Numéricas

Visando inicialmente mostrar a influência da não linearidade na resposta do sistema, são mostrados a seguir vários casos onde se tem a comparação entre o caso totalmente linear e o caso em que se utilizou da teoria não-linear, fazendo-se variações do termo não linear do sistema. Este procedimento de comparação de soluções foi realizado para os dois casos estudados, ou seja, sem e com amortecimento.

4.4.1 Resposta em Freqüência do ADV não amortecido – Equações do Movimento resolvidas através das Funções de Bessel

Considera-se aqui o sistema dado na Seção 4.1, onde se tem o caso não amortecido de 2 graus de liberdade e a resposta em freqüência foi encontrada através das funções de Bessel. Os valores dos parâmetros utilizados para obtenção das respostas que seguem são dados na Tab. (4.1):

Tabela 4.1: Valores dos parâmetros utilizados para obtenção da resposta do ADV não amortecido

Parâmetros	$\mu (m_2/m_1)$	k_1	k_2
Valores	0,2	1000	250

Nas Figuras (4.4) e (4.5) são mostradas as FRFs do sistema apresentado na Fig. 4.1, para a massa principal e para o absorvedor, para os casos linear e não-linear, usando, porém, um coeficiente de não-linearidade pequeno ($\alpha = 0,01$). Evidentemente, espera-se aqui um comportamento bastante semelhante ao caso linear.

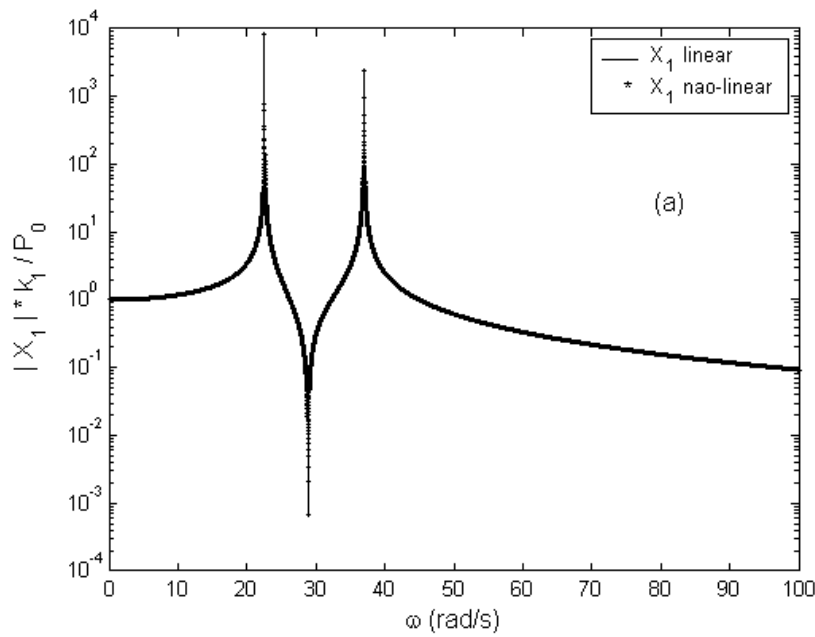


Figura 4.4 - Casos linear e não-linear ($a = 0.01$) – (Amplitude da massa principal)

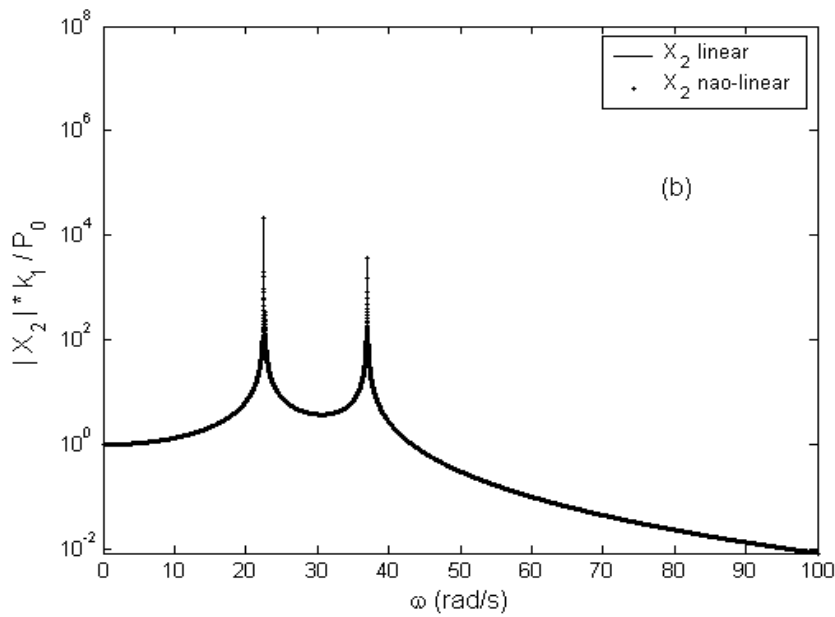


Figura 4.5 - Casos linear e não-linear ($a = 0.01$) – (Amplitude da massa do absorvedor).

A seguir, nas Figuras (4.6) e (4.7), são mostradas as FRFs para a massa principal e para o absorvedor, respectivamente, com a formulação da mola não-linear, porém para o caso de um coeficiente de não-linearidade relativamente mais elevado ($a = 20$) do que o adotado anteriormente.

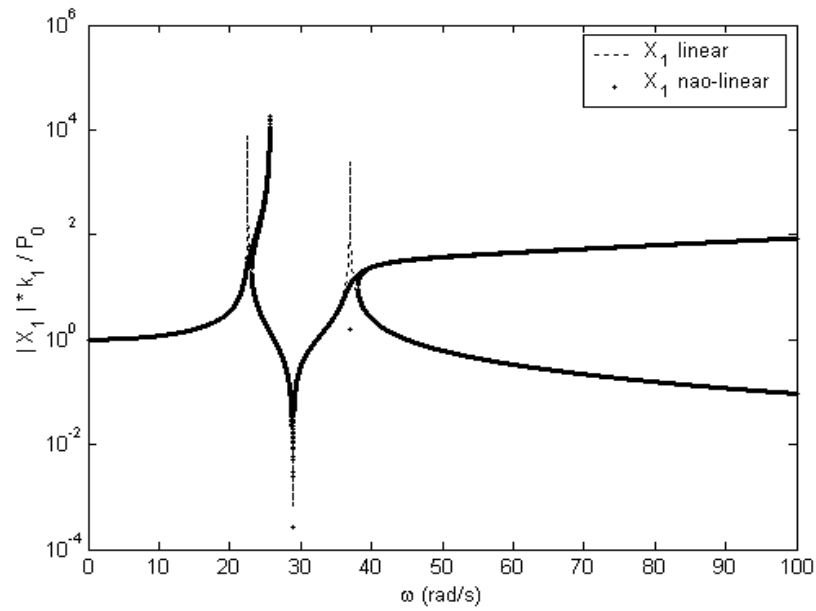


Figura 4.6 - Casos linear e não-linear ($a = 20$) (Amplitude da massa principal)

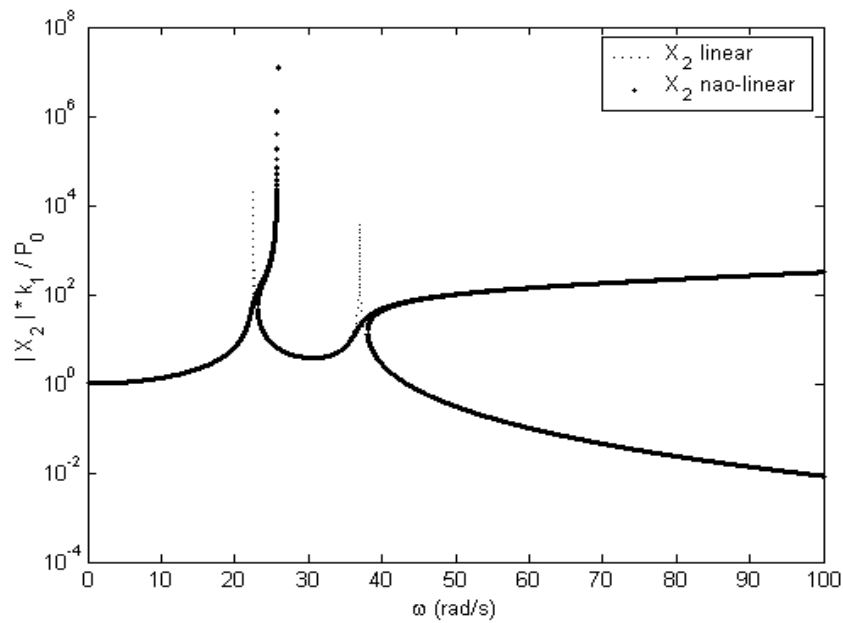


Figura 4.7 - Casos linear e não-linear ($a = 20$) (Amplitude da massa do absorvedor)

4.4.2 Resposta no tempo do ADV não amortecido – Equação do Movimento resolvida via Técnicas de Perturbação – Método da expansão “straightforward”

São mostrados a seguir os resultados obtidos pelas equações (4.42) e (4.43). Para validação dos resultados obtidos utilizando o método da expansão “straightforward”, o

sistema foi também resolvido numericamente utilizando o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem, cujos resultados se encontram também abaixo:

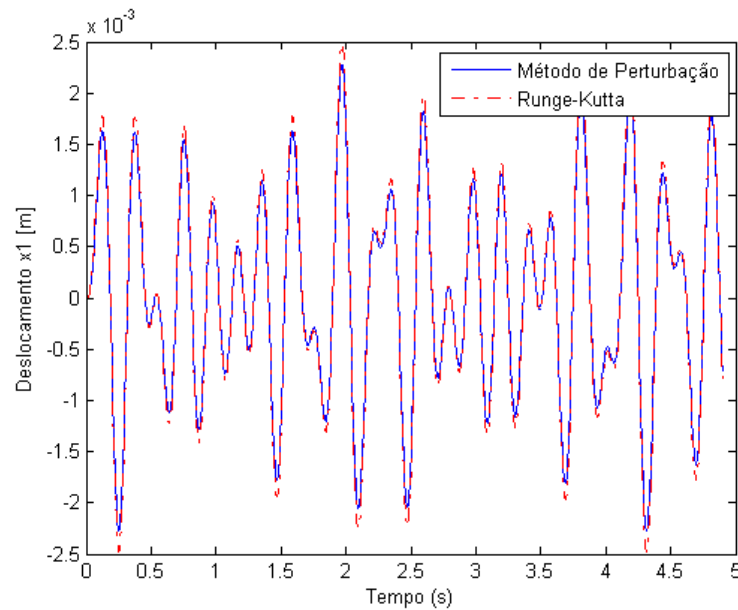


Figura 4.8: Deslocamento de X_1 – validação da solução analítica via Método de Perturbação

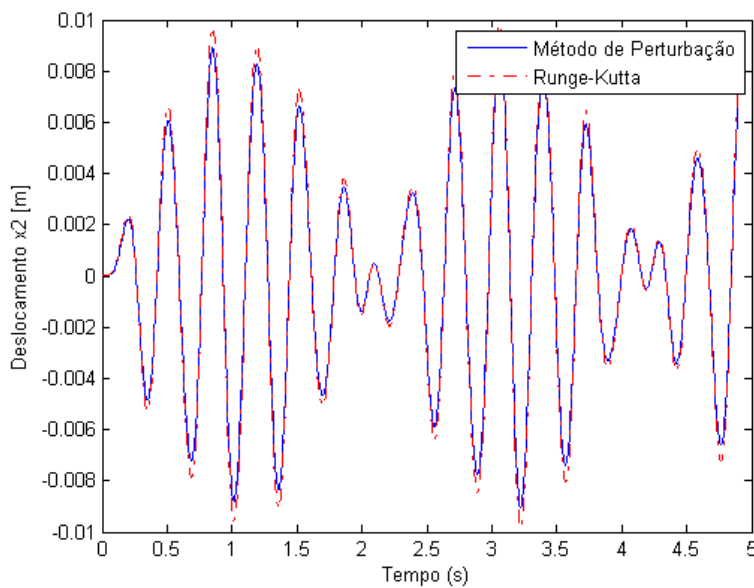


Figura 4.9: Deslocamento de X_2 – validação da solução analítica via Método de Perturbação

Observando as figuras acima, pode-se afirmar que o método de perturbação utilizado mostrou-se bastante eficiente na resolução das equações do movimento, ou seja, este é uma ferramenta plenamente viável para o tratamento de sistemas não lineares, principalmente para o caso onde se tem não linearidade cúbica ou do tipo *senh* na rigidez ou no amortecimento.

4.4.3. Resposta em Frequência do ADV amortecido – Equações do Movimento resolvidas através de Técnicas de Perturbação – Método da Média

Considera-se agora o sistema ilustrado pela Fig.(4.3) que se refere à equação do movimento (4.49), que por sua vez teve sua solução calculada através do método da média, levando ao resultado expresso pela eq.(4.60). Novamente, de início se pretende verificar a influência da não linearidade na resposta dinâmica do sistema.

Apresenta-se a Fig. 4.10, construída para diferentes valores do coeficiente de não linearidade da mola que liga a massa primária na massa secundária (ε_2):

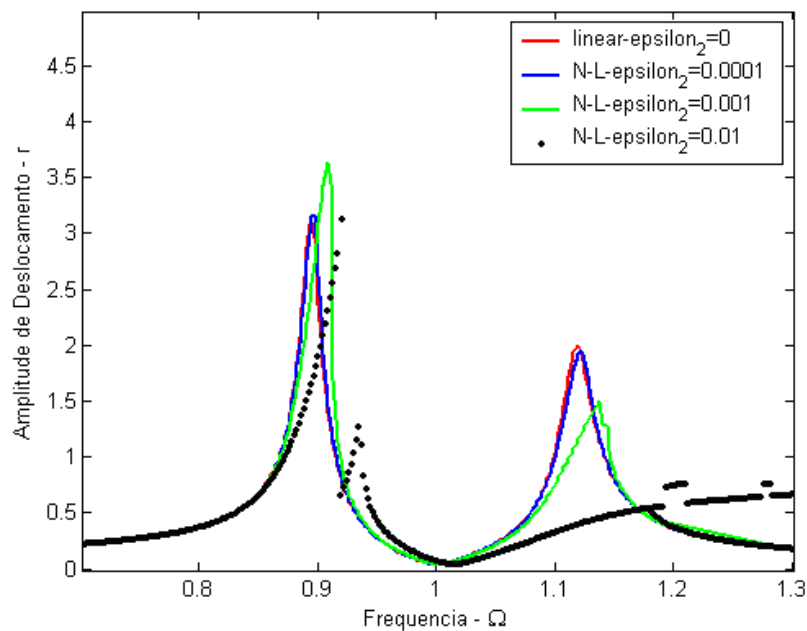


Figura 4.10 – Efeito de ε_2 na solução do sistema (com $\varepsilon_1 = 0$)

Nos casos que seguem, o absorvedor é montado sobre molas do tipo “mola que enrijece” (*hardening spring*). Mostra-se na Fig.4.11 o diagrama de resposta em frequência em regime permanente da amplitude da massa principal em função da frequência normalizada Ω , considerando nesse caso que a mola que liga a massa principal ao absorvedor (k_2) tem característica não linear. Esta figura é construída inicialmente considerando a mola (k_1) como tendo comportamento linear. Já o absorvedor, este é montado sobre uma mola com característica não linear ($\varepsilon_2 \neq 0$), e os demais parâmetros são dados por $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = 0,01$; $\beta = 0,1$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,01$; $\mu = 0,05$; $\rho = 1$. Nesta mesma figura, é mostrado o caso em que ambas as molas têm características lineares (caso linear clássico, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$), porém mantidos os valores dos demais parâmetros utilizados no caso não linear.

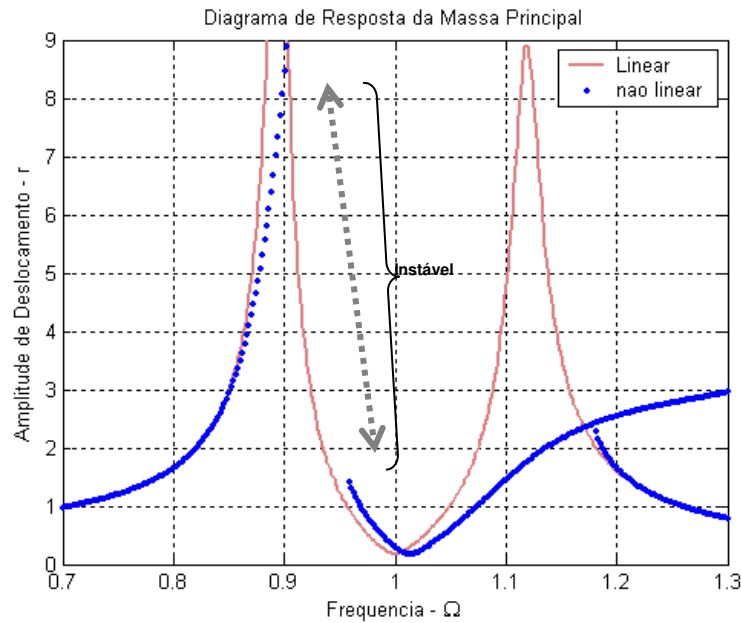


Figura 4.11 - Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = 0,01$; $\beta = 0,1$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,01$; $\mu = 0,05$; $\rho = 1$.

Uma instabilidade (de $\Omega = 0,91$ a $\Omega = 0,94$) é gerada através de uma bifurcação do tipo sela-nó. Pode ser observado que o uso do absorvedor com mola não linear com características de rigidez elevada é vantajosa na escala de frequência $\Omega > 1$, à vista da atenuação obtida.

Na Fig.4.12 é mostrado novamente o diagrama de resposta do deslocamento da massa principal, com os mesmos parâmetros utilizados na figura anterior, porém para valores diferentes do coeficiente de não linearidade ε_2 , a saber: primeiramente com $\varepsilon_2 = 0,01$ (mesmo valor usado na figura anterior) e, posteriormente, com os valores $\varepsilon_2 = 0,0015$ e $\varepsilon_2 = 0,02$.

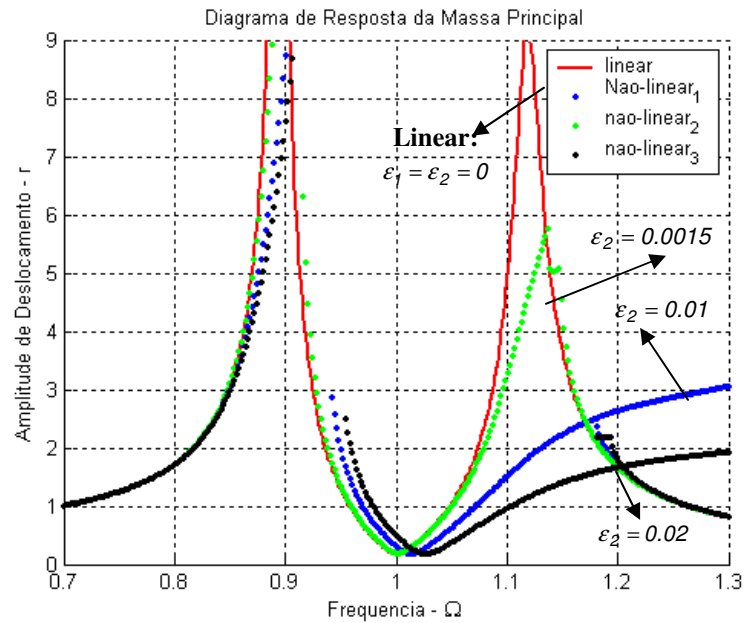


Figura 4.12 - Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para vários valores de ϵ_2 e $\beta = 0,1$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,01$; $\mu = 0,05$; $\rho = 1$.

Um tipo parecido de instabilidade ocorre quando se aumenta a amplitude da força ou se diminui a taxa de amortecimento do absorvedor, como mostrado da Fig.4.13 a seguir.

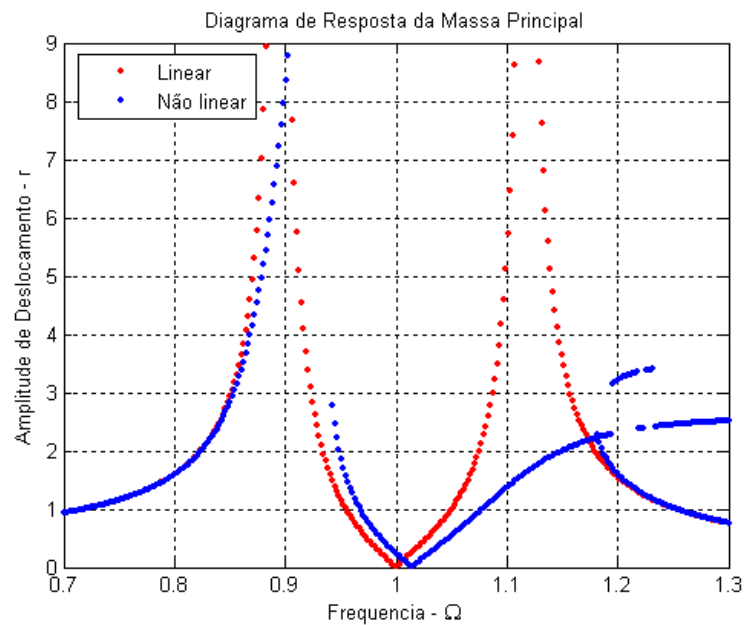


Figura 4.13- Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\epsilon_1 = 0$; $\epsilon_2 = 0,01$; $\beta = 0,125$; $\zeta_1 = 0,01$; $\zeta_2 = 0,01$; $\mu = 0,05$; $\rho = 1$.

Na figura 4.12, mostrada acima, percebe-se que, ao aumentar o valor de ϵ_2 , aumentam-se as vantagens de se utilizar um absorvedor dinâmico de vibração com

características não lineares, visto que se tem reduzida a amplitude na região que corresponde a $\Omega > 1$. Todavia as não linearidades aumentam para um nível crítico, resultando conseqüências indesejáveis. Por exemplo, para o caso em que $\varepsilon_2 = 0,02$, surge uma nova solução instável na área da ressonância (próximo de $\Omega = 1$).

Com relação à Fig. 4.13, tem-se o diagrama de resposta em frequência para a massa principal para o caso em que $\beta = 0,125$, sendo que os demais parâmetros são os mesmos dados anteriormente. Percebe-se nesta figura algo parecido ao que ocorreu na figura anterior, ou seja, tem-se a vantagem da redução das amplitudes, mas surge um número maior de soluções instáveis. O mesmo pode ser observado na Fig. 4.14 abaixo.

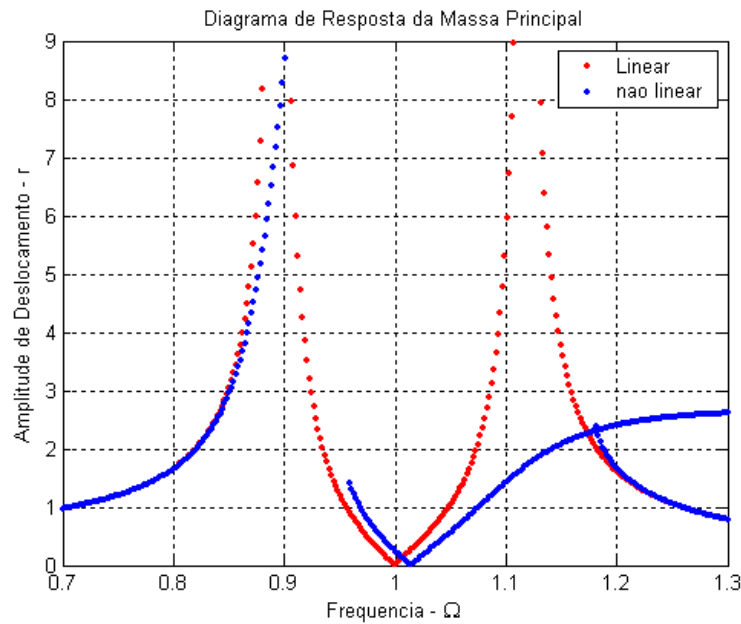


Figura 4.14: Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = 0,01$; $\beta = 0,1$; $\zeta_1 = 0,01$; $\zeta_2 = 0$; $\mu = 0,05$; $\rho = 1$.

O intervalo de frequência possui regiões instáveis, que aparecem onde o absorvedor não linear se mostra mais eficiente (melhores resultados). Deve ser observado que, ao se mudar um ou mais parâmetros do sistema, pode-se obter uma atenuação nos níveis de vibração do mesmo, mas deve-se estar atento, pois aumenta a possibilidade de aparecer um número maior de soluções instáveis. Isto pode ser visto na Fig. 4.15 abaixo.

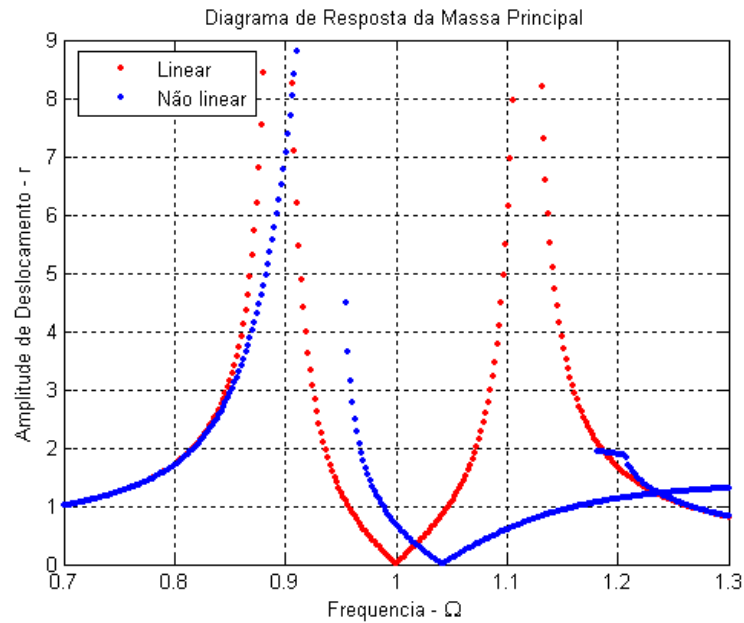


Figura 4.15: Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = 0,02$; $\beta = 0,125$; $\zeta_1 = 0,01$; $\zeta_2 = 0$; $\mu = 0,05$; $\rho = 1$.

Para esta figura, tem-se na ressonância uma instabilidade muito maior, envolvendo a faixa entre $\Omega = 1,038$ a $\Omega = 1,117$.

Em muitos casos da análise feita até aqui, as instabilidades encontradas podem ser evitadas sem perder as vantagens obtidas pela presença das não linearidades. Para isto tem-se que trabalhar com os valores de outros parâmetros do sistema. Para exemplificar, mostra-se abaixo a Fig.4.16, onde o sistema é resolvido com o mesmo coeficiente de não-linearidade dado na Fig.5.15, porém fazendo uma pequena alteração nos parâmetros μ e ρ :

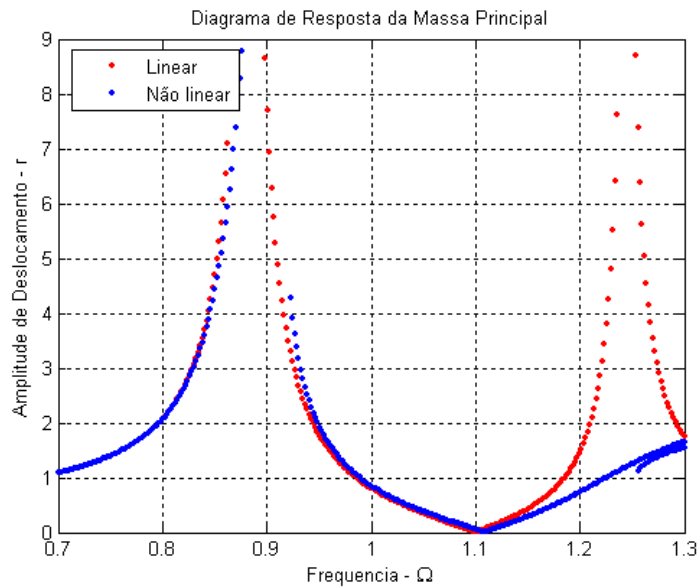


Figura 4.16- Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = 0,02$; $\beta = 0,125$; $\zeta_1 = 0,01$; $\zeta_2 = 0$; $\mu = 0,1$; $\rho = 1,1$.

Será agora examinado o caso onde o absorvedor é montado sobre molas do tipo “mola que abranda”, (*softening spring*). Na Fig.4.17, tem-se o mesmo caso daquele mostrado na Fig.4.11, porém, ao invés de $\varepsilon_2 = 0,01$, faz-se $\varepsilon_2 = -0,01$.

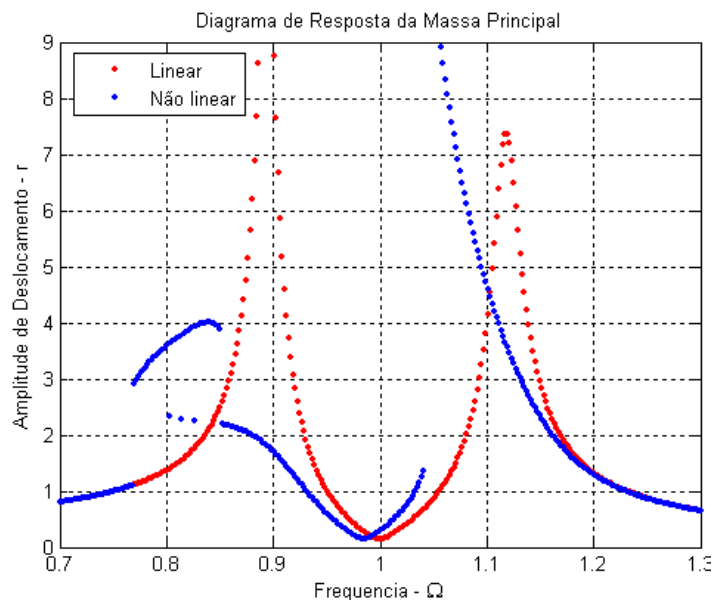


Figura 4.17 - Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = -0,01$; $\beta = 0,1$; $\zeta_1 = 0,01$; $\zeta_2 = 0,01$; $\mu = 0,05$; $\rho = 1$.

Percebe-se ao analisar o caso apresentado na figura acima que, com relação ao absorvedor linear, o absorvedor não linear com as características apresentadas torna-se

mais eficiente (do ponto de vista da atenuação das vibrações) para as frequências que correspondem a $\Omega < 1$.

4.4.2.1. Absorvedor montado sobre mola com características lineares

Estuda-se nesse momento o caso em que somente a massa principal é montada sobre molas com características não lineares, ou seja, $\varepsilon_2 = 0$. Mostra-se a seguir, na Fig.4.18(a), o diagrama de resposta em frequência para $\varepsilon_1 = 0,01$ e, na Fig.4.18(b), este mesmo diagrama, porém agora para $\varepsilon_1 = -0,01$.

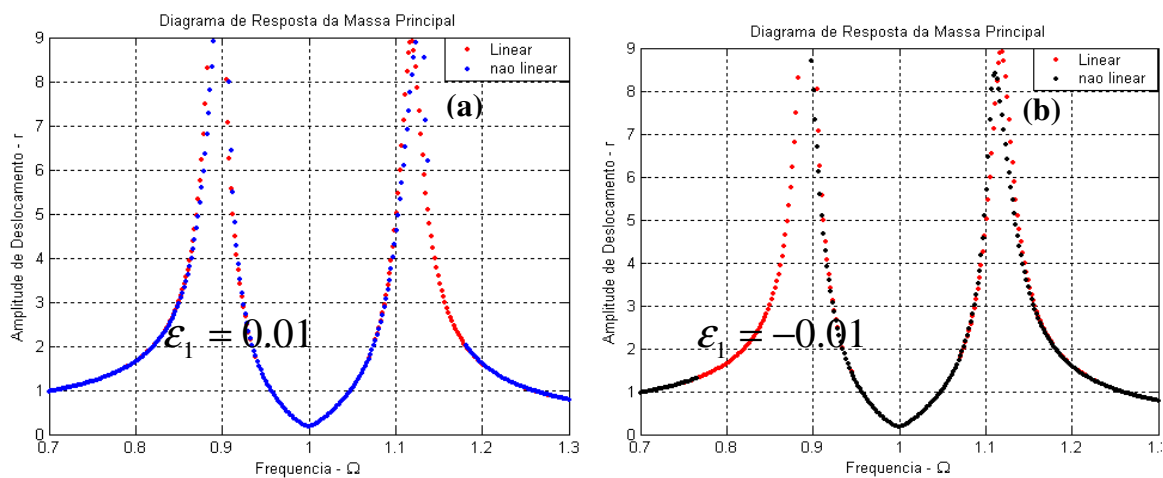


Figura 4.18: Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal:

$$\varepsilon_2 = 0; \beta = 0,1; \zeta_1 = 0,01; \zeta_2 = 0,01; \mu = 0,05; \rho = 1.$$

Comparando este caso com o da Fig. 4.13, vê-se que na situação anterior os efeitos não lineares não são como os encontrados para o caso atual. Isto ocorre pelo fato que as pequenas amplitudes de vibração a que a massa principal se submete relativamente à amplitude do absorvedor, resultam em uma pequena deformação da mola não linear. Como consequência disto, a diferença observada na resposta em torno de $\Omega = 1$ entre o sistema linear e o não linear é muito pequena. Esta mesma conclusão é também verdadeira no caso em que se aumenta o parâmetro de força β .

4.4.2.2 A Massa principal e o Absorvedor são montados sobre molas com características Não-lineares

Primeiramente, na Fig.4.19, admite-se que tanto a massa principal quanto o absorvedor estejam montados sobre molas do tipo “mola que enrijece”, e com ambos os

coeficientes de não linearidade iguais a $0,01$ ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,01$), sendo que os demais parâmetros são os mencionados na Fig. 4.17, vista anteriormente.

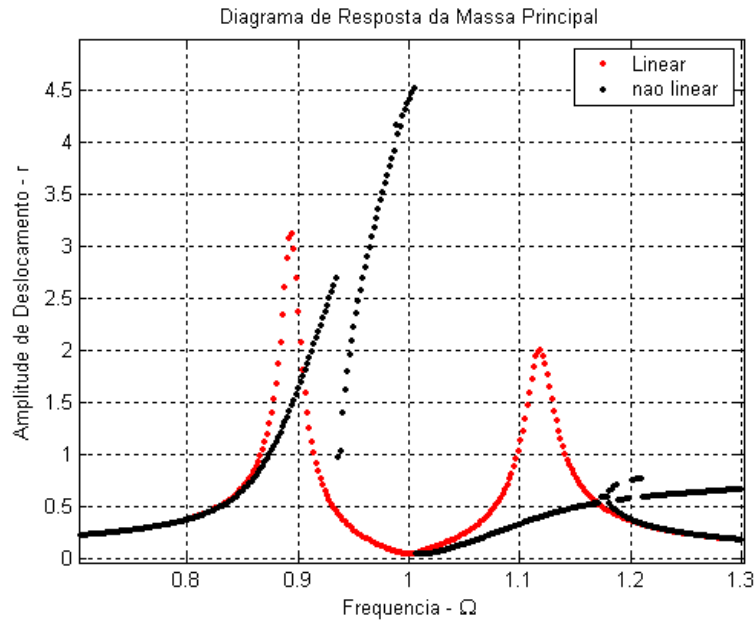


Figura 4.19 - Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = 0,01$; $\varepsilon_2 = 0,01$; $\beta = 0,1$; $\zeta_1 = 0,01$; $\zeta_2 = 0,01$; $\mu = 0,05$; $\rho = 1$.

Nesta figura, comparando com o caso linear, vê-se que os resultados obtidos para $\Omega > 1$ são muito bons, pois os valores da amplitude diminuem de maneira significativa quando $\Omega > 1$. Por outro lado, se for utilizado o absorvedor com “mola que abrande”, obtém-se melhores resultados para $\Omega < 1$, como mostra a Fig. 4.20. Este diagrama de resposta foi obtido para os coeficientes de não linearidades $\varepsilon_1 = 0,01$ e $\varepsilon_2 = -0,01$.

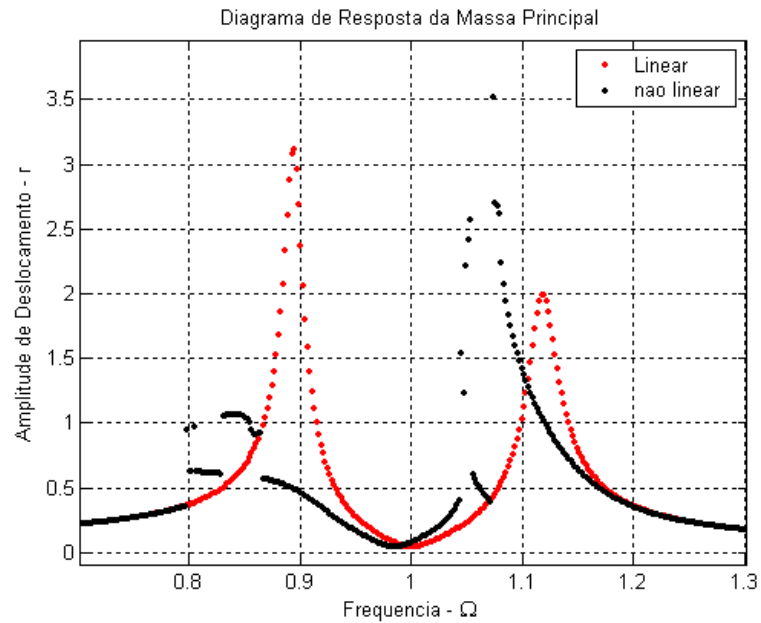


Figura 4.20 - Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = 0,01$; $\varepsilon_2 = -0,01$; $\beta = 0,1$; $\zeta_1 = 0,01$; $\zeta_2 = 0,01$; $\mu = 0,05$; $\rho = 1$.

Na Fig. 4.21, tem-se o diagrama de resposta da massa principal para os coeficientes de não linearidade $\varepsilon_1 = -0,01$ e $\varepsilon_2 = 0,01$:

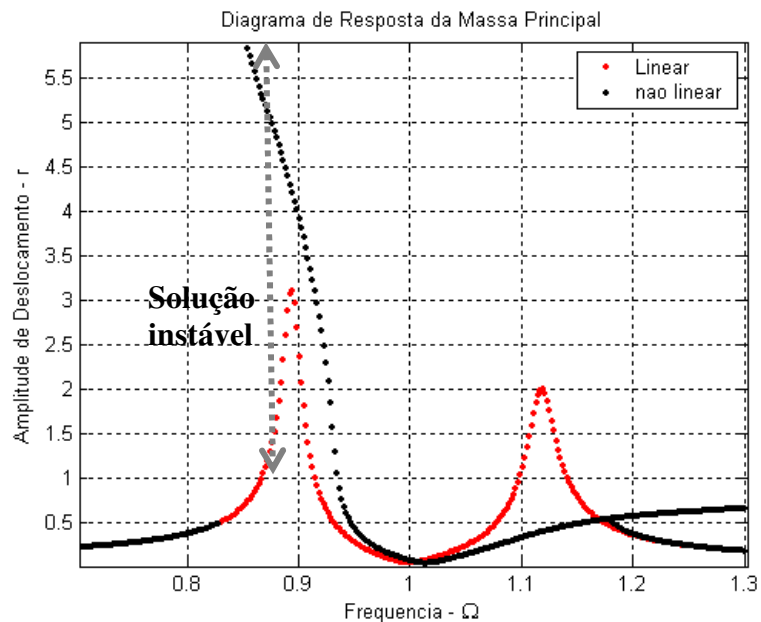


Figura 4.21: Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = -0,01$; $\varepsilon_2 = 0,01$; $\beta = 0,1$; $\zeta_1 = 0,01$; $\zeta_2 = 0,01$; $\mu = 0,05$; $\rho = 1$.

Observa-se, na Fig. 4.21 acima, que para a massa principal montada sobre uma mola do tipo “mola que abranda”, obtêm-se resultados semelhantes aos já obtidos em casos anteriores quando a mola do absorvedor possui características não lineares.

Finalmente, na Fig.4.22, mostra-se o diagrama de resposta para $\varepsilon_1 = -0,01$ e $\varepsilon_2 = -0,01$.

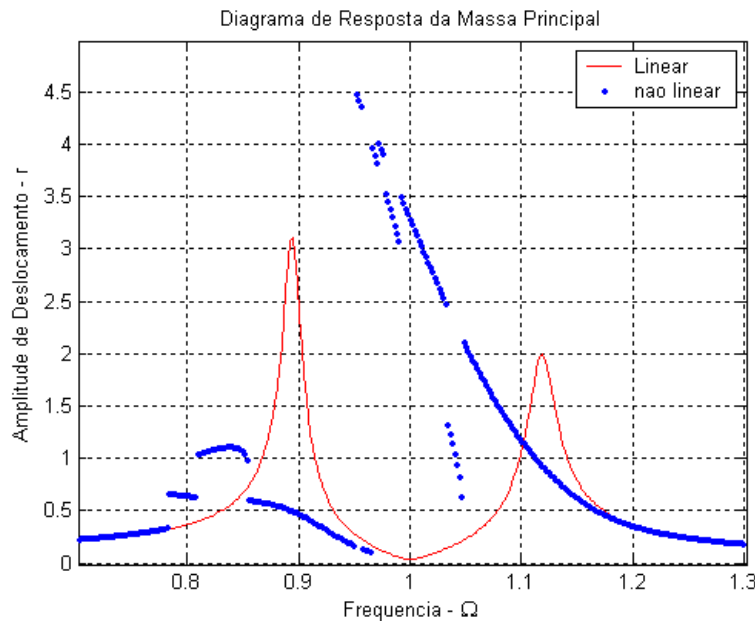


Figura 4.22 - Diagrama de resposta do deslocamento da massa principal para $\varepsilon_1 = -0,01$; $\varepsilon_2 = -0,01$; $\beta = 0,1$; $\zeta_1 = 0,01$; $\zeta_2 = 0,01$; $\mu = 0,05$; $\rho = 1$.

As Figuras 4.19 e 4.22 fornecem um bom exemplo sobre outra dificuldade associada ao uso de um absorvedor dinâmico de vibração com características não lineares. Trata-se da inclinação do primeiro (Fig.4.19) e segundo (Fig.4.22) picos de ressonância em relação ao pico de solução estável com pequenas amplitudes. Isto resulta na coexistência de soluções estáveis com baixas e altas amplitudes, que a princípio dependem das condições iniciais. Este último risco citado a pouco não ocorre no sistema resolvido para as figuras 4.20 e 4.21, de onde se percebe que os picos de ressonância inclinam-se para fora da área de interesse. Se as não linearidades forem aumentadas, podem resultar instabilidades indesejadas.

No próximo capítulo será feito um estudo sobre o projeto ótimo e robusto deste absorvedor utilizando análise de sensibilidade por diferenças finitas.

CAPÍTULO V

OTIMIZAÇÃO ROBUSTA E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE PARA O PROJETO ÓTIMO-ROBUSTO DE ADVS NÃO-LINEARES

O projeto ótimo de absorvedores dinâmicos de vibrações vem sendo objeto de grande interesse nos vários ramos da engenharia, destacando-se os setores espacial, aeronáutico, automobilístico, e de construção civil. Na realidade, elaborar o projeto ótimo e/ou robusto de um sistema com ADVs tem sua importância evidenciada à vista de aspectos como confiabilidade, robustez e versatilidade de funcionamento, visando seu máximo desempenho. Neste contexto, a otimização constitui-se numa ferramenta fundamental, passando a fazer parte integrante da modelagem matemático-computacional do problema.

Conforme anteriormente comentado, otimização tem a ver com a determinação da melhor configuração de projeto para um dado sistema, sem que seja necessário, entretanto, testar todas as configurações possíveis. Além disso, com tal ferramenta, consegue-se reestruturar o desempenho global de um projeto, atendendo satisfatoriamente a especificações técnicas previamente estabelecidas.

5.1 Otimização – Conceitos Básicos

Em um problema de otimização pode-se ter várias soluções diferentes. Por isso, o conceito de projeto "melhor", depende do problema, do método de solução e da tolerância adotada. Com isso, pode-se dizer então que otimização é o processo de ajuste de entradas ou características de um dado processo, visando encontrar o máximo ou mínimo de uma função objetivo associada ao referido processo, que represente convenientemente seu desempenho. Para a formulação de um problema de otimização são necessários alguns conceitos e definições que são imprescindíveis para sua adequada compreensão (BORGES,2003), tais como:

Variável de projeto ou de decisão: São variáveis que têm seus valores modificados durante o processo de otimização, podendo ser discretas ou contínuas, dependendo do tipo de problema. Exemplificando, tais variáveis podem representar as dimensões de seções

transversais, propriedades físicas ou mecânicas de um dado material, ganhos de um controlador, posição de um atuador numa dada estrutura, torques aplicados em motores que acionam um robô manipulador, dentre inúmeras outras possibilidades, conforme o tipo de problema a ser resolvido.

Função Objetivo: É a função a ser otimizada: se esta função representar apenas um critério escalar a ser minimizado (ou maximizado), diz-se tratar-se de uma função mono-objetivo e, havendo mais de um critério a ser considerado, tem-se um vetor de funções objetivo, ou seja, resulta um problema denominado como multi-objetivo. É também conhecida como função custo ou de critério de desempenho.

Espaço de busca: É a região onde estão as possíveis soluções do problema de otimização. Quando se procura delimitar o espaço de soluções utilizam-se as chamadas restrições laterais. É também chamado de espaço de projeto.

Restrições: São funções (lineares ou não lineares) que delimitam o espaço de busca através de igualdades ou desigualdades matemáticas que caracterizam exigências para a solução ótima. Podem ser representativas de restrições tecnológicas, geométricas ou até mesmo de custos financeiros associados ao projeto.

Restrições laterais: Conforme já explicado acima, servem para delimitar as faixas de valores que podem ser assumidos pelas variáveis de projeto, configurando o espaço de busca.

Ponto ótimo: É o ponto caracterizado pelo vetor X^* , que é o vetor ótimo das variáveis de projeto. Tal ponto satisfaz as restrições, além de corresponder a um extremo da função objetivo.

Valor Ótimo: É o valor da função objetivo no ponto ótimo.

Solução Ótima: É o conjunto formado pelo ponto ótimo e pelo valor ótimo $([X^*, f(X^*)])$, podendo ser local ou global.

Problemas de otimização com ou sem restrições: a maioria das rotinas de otimização numérica opera melhor em problemas sem restrições. Alguns algoritmos procuram minimizar o custo a partir de um conjunto inicial de valores atribuídos às variáveis de projeto

(configuração inicial). Ocorre de a função convergir facilmente para mínimos locais, sendo tal convergência muitas vezes prematura. Os métodos clássicos de otimização quase sempre são baseados em técnicas do cálculo diferencial. Os métodos randômicos trabalham com probabilidades estatísticas para selecionar um conjunto de parâmetros que fornece o máximo ou o mínimo de uma dada função objetivo em um espaço de busca anteriormente definido. Tanto os métodos clássicos como os heurísticos servem-se de funções de penalidade para tratar os problemas com restrição. Neste sentido, escreve-se uma função pseudo-objetivo que incorpora as restrições. Daí, a função pseudo-objetivo é minimizada sem restrições. Os algoritmos de otimização se apresentam de diferentes maneiras, sendo abaixo listados alguns dentre os mais utilizados para o projeto ótimo em engenharia:

Otimização Clássica: É caracterizada por um conjunto de métodos baseados na teoria do cálculo diferencial, sendo que a maioria se serve do cálculo do gradiente para orientar o processo iterativo e dependem de um ponto inicial para começar a busca. Partindo desta solução inicial, calculando as derivadas, é possível determinar a direção de busca que conduz a um novo candidato a solução. Assim, por exemplo, o método do gradiente conjugado é um método de otimização de primeira ordem, já o método de Newton utiliza derivadas de segunda ordem, e por isso, é classificado como um método de segunda ordem. Os métodos Quase-Newton não chegam a ser de segunda ordem, uma vez que calculam a matriz de derivadas segundas (matriz hessiana) de maneira apenas aproximada (VANDERPLAATS, 1998). A otimização clássica nem sempre consegue encontrar o mínimo global. Com frequência o método converge para um ótimo local e não é capaz de prosseguir na direção do ótimo global. Diz-se que a convergência foi prematura. No entanto, a otimização clássica é comprovadamente eficiente em grande número de aplicações de engenharia e equipa vários códigos comerciais dedicados ao projeto (BUTKEWITSCH, 2002), com larga aplicação na indústria.

Recozimento Simulado: O algoritmo conhecido como Recozimento Simulado (*simulated annealing*), assim como os algoritmos genéticos, são métodos de otimização baseados em processos naturais. Foi introduzido por Metropolis (1953), através de um método numérico para representar o estado de um conjunto de átomos em equilíbrio a uma dada temperatura. Assim, este processo é baseado no recozimento dos metais utilizado na metalurgia. Quando se alinham átomos em um metal, este fica frágil e sofre fratura facilmente. No processo de *annealing*, o metal é aquecido a uma alta temperatura, forçando os átomos a vibrar violentamente. Se fosse resfriado repentinamente, a microestrutura tenderia a um estado

randômico instável. Ao invés disto, resfria-se lentamente. Com isso, os átomos tendem a configurar padrões relativamente estáveis para uma dada temperatura.

Busca Tabu: A Otimização Combinatória consiste em um conjunto de problemas que criam as disciplinas centrais da ciência da computação. Pesquisas nesta área apontam para o desenvolvimento de técnicas eficientes para achar o mínimo ou o máximo e estimar o valor de uma função de muitas variáveis independentes. Esta função geralmente é chamada de função custo. A função custo depende da configuração detalhada das várias partes do sistema. O número de variáveis envolvidas pode atingir dezenas de milhares. Neste sentido, o algoritmo conhecido como busca tabu foi desenvolvido por Glover e Hansen, (1989/1990) para resolver problemas de otimização combinatória. É um tipo de busca iterativa que se caracteriza pelo uso de uma memória flexível. Pode eliminar mínimos locais e procurar áreas além deste, ou seja, tem a habilidade para achar o mínimo global no espaço de busca multimodal. O processo através do qual a Busca Tabu supera o problema de ótimo local é baseado em uma função de avaliação que escolhe a solução, sempre com melhor resultado a cada iteração. A função de avaliação seleciona o movimento que produz melhoria ou, ao menos, uma perturbação na função objetivo. Uma lista tabu é empregada para armazenar as características de movimentos aceitos de forma que este conjunto de características seja usado para classificar certos movimentos como tabu (a ser evitado) nas próximas iterações. Em outras palavras, a lista de tabu determina quais soluções podem ser alcançadas por um movimento a partir da solução atual. Considerando que são aceitos movimentos que não conduzem a melhorias em buscas tabu, é possível voltar a soluções já visitadas (GLOVER, 1990). Isto poderia causar um problema conhecido como ciclagem (*cycling*). A lista tabu é usada para superar este problema. Uma estratégia chamada de estratégia de proibição é usada para controlar e atualizar a lista de tabu. A estratégia de proibição evita um caminho previamente visitado e são exploradas regiões novas do espaço de busca.

Algoritmos Genéticos: Os algoritmos genéticos (HOLLAND, 1975) constituem-se num método versátil e robusto, bastante usado para se resolver problemas de otimização. Este algoritmo dispensa o uso do gradiente da função objetivo para encontrar uma direção de busca, isto é, atua diretamente no espaço de projeto em busca do ótimo global e, por essa razão, trata-se de um método direto ou método de ordem zero. Os algoritmos genéticos combinam o natural com o artificial utilizando conceitos da seleção natural de Charles Darwin (1859) para obter soluções de problemas matemáticos complicados, especialmente os problemas de otimização, podendo ser enquadrados como inteligentes (PHAN; KARABOGA, 2000). Pode-se entender que a variável de projeto de um sistema genético

artificial é análoga a um cromossomo de um sistema biológico. Em um sistema natural, um ou mais cromossomos são combinados para dar a prescrição genética necessária para a formação de um ou mais organismos (DAVIS, 1987). O projeto de um sistema genético artificial possui uma variedade de alternativas para codificar parâmetros numéricos e não numéricos. No meio natural diz-se que os cromossomos são compostos por genes, os quais podem ser classificados através de valores numéricos. Na genética, a posição de um gene é identificada separadamente para cada função. Na genética artificial, diz-se que as variáveis são compostas de características, as quais são tomadas em diferentes valores (HAUPT, HAUPT, 2004). Na seção 5.2.1 será feita uma breve apresentação sobre outros algoritmos evolucionários que são variantes desta técnica, principalmente sobre o NSGA (*Non dominated Sorting Genetic Algorithm*) que é o método utilizado neste trabalho.

Maiores detalhes sobre métodos de otimização e algoritmos podem ser encontrados em Viana (2008).

Os algoritmos evolucionários são largamente utilizados para resolver problemas de otimização multiobjetivo nos diferentes domínios da engenharia, onde o interesse é o de reduzir custos e prazos de projeto, desenvolvimento e fabricação. Com o objetivo de se chegar a um projeto eficaz de sistemas dinâmicos incorporando absorvedores dinâmicos não lineares, a otimização robusta revela-se uma ferramenta apropriada, uma vez que considera as incertezas associadas às variáveis de projeto e às funções custo. Antes de passar ao problema multiobjetivo robusto, é importante definir o problema multiobjetivo determinístico, que opera somente com os valores nominais das variáveis de projeto, desconsiderando a incerteza.

Para quantificar a influência das variáveis de concepção dos ADVs não-lineares sobre o comportamento dinâmico do sistema, é proposta uma metodologia numérica para avaliação da sensibilidade das funções de resposta em frequência da estrutura contendo ADVs, com relação aos parâmetros físicos e geométricos que caracterizam o desempenho dos absorvedores.

5.2 Otimização multiobjetivo determinística

Os problemas de otimização, de uma maneira geral, são freqüentemente multiobjetivos, sendo caracterizados pela presença de diferentes funções custo que são muitas vezes conflituosas entre si. Além disso, dado que a solução não é única, é de fundamental importância escolher uma estratégia de otimização multiobjetivo que seja capaz

de propor, dentre várias, as melhores alternativas de projeto. Algumas técnicas evolucionárias são citadas abaixo:

VEGA: Esta técnica é conhecida como tendo sido a primeira a ser implementada no que diz respeito a algoritmos evolucionários, para solução de problemas multiobjetivos. O VEGA (*Vector Evaluated Genetic Algorithms*) (SCHAFER, 1985) foi criado a partir da modificação do software de domínio público GENESIS pela inclusão de um laço no procedimento de seleção original que faz com que este seja repetido para cada objetivo separadamente até atingir-se um determinado número pré-definido de indivíduos para cada objetivo, para reprodução. Logo em seguida sorteiam-se randomicamente estes indivíduos para as etapas de recombinação e mutação. Schaffer implementou este método em combinação com um procedimento de seleção proporcional à aptidão dos indivíduos. Este algoritmo foi eficiente para algumas gerações, mas, em alguns casos, deixou de explorar alguns indivíduos ou regiões. A seleção independente dos indivíduos provoca a especialização da população, o que resulta no fato de a população inteira convergir na direção da região das soluções ótimas locais, após um grande número de gerações. Esta característica de especialização não é interessante, já que não é vantajoso que uma solução apresente alta qualidade em um objetivo se conseguida a partir de valores ruins ou inaceitáveis para algum (uns) outro(s) objetivo(s). Por esta razão, é de grande importância destacar o compromisso entre os objetivos. Tentou-se então minimizar os efeitos da especialização através do desenvolvimento de dois procedimentos heurísticos de seleção que foram denominados como seleção não-dominada e seleção cruzada ou de companheiro. Na seleção heurística não-dominada os indivíduos dominados são penalizados pela subtração de uma pequena penalidade fixa sobre o número esperado de cópias durante a seleção. A penalidade total sobre estes indivíduos é então dividida entre os não-dominados por uma adição ao número esperado de cópias na seleção. Contudo, este algoritmo não funciona adequadamente quando a população tem poucos indivíduos não-dominados, resultando num grande valor de aptidão para os mesmos, tendo como consequência uma alta pressão na seleção. A seleção heurística cruzada promove o cruzamento de indivíduos especializados de diferentes subgrupos. Este procedimento foi implementado pela seleção aleatória de um indivíduo para reproduzir com seu companheiro, isto é, o indivíduo que tem a máxima distância Euclidiana em relação ao indivíduo anteriormente selecionado. Este procedimento também não funciona satisfatoriamente por não prevenir a participação de indivíduos piores na primeira seleção randômica e pela possibilidade de haver uma grande distância Euclidiana entre um indivíduo melhor e um indivíduo muito ruim.

MOGA: Fonseca e Fleming (1993) utilizaram as sugestões de Goldberg (1989) de um modo diferente, ou seja, o MOGA (*Multi-objective Optimization Genetic Algorithm*) se utiliza de um procedimento de ordenamento não-dominado. Toda a população é verificada e todos os indivíduos não-dominados recebem uma posição ou ordem “um”. Outros indivíduos são posicionados segundo a não dominância deles em relação ao restante da população de modo que, para cada indivíduo, o número de soluções que o dominam estritamente é primeiramente determinado na população, logo, a posição no ordenamento deste indivíduo será este número mais “um”. Assim sendo, no final deste procedimento de ordenamento poderão existir muitos indivíduos compartilhando a mesma posição no ordenamento. A rotina de seleção usa este ordenamento para selecionar ou remover blocos de pontos até escolher os indivíduos para reprodução. Esta atribuição de aptidão implica uma grande pressão de seleção, o que pode causar convergência prematura. Tal procedimento também usa o método de formação de nichos para distribuir a população através da região ótima de Pareto, além de compartilhar os valores da função. Este procedimento mantém a diversidade nos valores da função de aptidão, porém ele pode não manter a diversidade no conjunto das variáveis, ou seja, o MOGA pode não conseguir encontrar as várias soluções em problemas onde diferentes pontos ótimos de Pareto correspondem aos mesmos valores de aptidão.

nPGA: A Técnica conhecida por nPGA (*Niched Pareto Genetic Algorithm*) (HORN; NAFPLIOTIS, 1993) é um algoritmo genético geracional com sobreposição, isto é, nem todos os indivíduos são substituídos de uma geração para outra. Um conjunto composto de um número específico de indivíduos é escolhido randomicamente da população no início de cada processo de seleção. No próximo passo, dois indivíduos são retirados da população para a seleção de um “melhor”. Para esta seleção, ambas as soluções são comparadas com os membros deste conjunto de comparação para assim determinar a dominância de acordo com as funções objetivo. Caso um desses indivíduos seja não-dominado e o outro seja dominado, então o não-dominado é selecionado, porém, se ambos forem não-dominados ou dominados, é criado um contador de “nicho” para cada indivíduo na população inteira. O contador é baseado no número de soluções na população a certa distância do indivíduo. A partir daí, a solução que apresenta o menor contador de nicho é selecionada.

NSGA: O *Nondominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGA)(SRINIVAS, 1994), como foi mencionado anteriormente, é a técnica adotada neste capítulo para tratar do projeto ótimo do absorvedor dinâmico de vibração não linear. Este é mais um dos algoritmos baseados no trabalho fundamental de Goldberg (1989). O algoritmo serve-se de um procedimento de

seleção por ordenamento para realçar as soluções não-dominadas, juntamente com um método voltado para a criação de nichos para manter a diversidade da população. A diferença desta implementação em relação a um algoritmo genético simples está apenas na forma pela qual o operador de seleção é empregado. Tanto o operador de recombinação quanto o operador de mutação são os usuais da técnica. Antes do procedimento de seleção ser aplicado, a população é ordenada segundo o nível de não-dominância dos indivíduos, ou seja, todas as soluções não-dominadas da população corrente recebem valores de aptidão altos. Esta aptidão é a mesma para todos os indivíduos não-dominados, o que garante que todos possuam um mesmo potencial reprodutivo. A diversidade é garantida pelo fato de as soluções não-dominadas compartilharem seus valores de aptidão segundo as distâncias Euclidianas entre as soluções não dominadas. Finalmente, divide-se o valor da aptidão de cada indivíduo pelo contador de nichos que é proporcional ao número de vizinhos. Este procedimento proporciona a co-existência de múltiplos pontos ótimos na população. Agora, o pior valor de aptidão compartilhada na solução da primeira fronteira não-dominada é então guardado para uso posterior. Depois que o compartilhamento é executado e que as aptidões são modificadas, os indivíduos não-dominados são ignorados temporariamente para processar o restante dos membros da população. O procedimento para determinar novas soluções não-dominadas é executado novamente, recebendo agora um valor de aptidão um pouco menor que o pior valor de aptidão compartilhada no nível anterior. Uma vez mais o procedimento de compartilhamento é executado entre as soluções não-dominadas deste nível e as novas aptidões são calculadas como descrito acima. Este processo é continuado até que todos os membros da população tenham um valor de aptidão compartilhada, ou seja, garante-se que todas as soluções tenham participado do processo evolutivo. A reprodução da população é efetuada utilizando-se a aptidão compartilhada. Isso significa que, como o primeiro nível de soluções não-dominadas possui as mais altas aptidões, um maior número de cópias dos seus indivíduos será realizado e levará o processo de busca para a fronteira ótima de Pareto.

5.2.1 Algoritmos Evolucionários (AEs) – Implementação do NSGA

Como mencionado anteriormente, os algoritmos genéticos tentam maximizar uma função custo, gerando aleatoriamente uma população inicial de soluções potenciais, para fazê-la evoluir através da aplicação dos chamados operadores genéticos. Como citado na seção 5.1, existem inúmeras variantes dos algoritmos evolucionários para resolução de um problema multiobjetivo, dentre eles, pode-se citar, por exemplo: o VEGA, o MOGA, nPGA; e o método escolhido neste trabalho que é o *Non dominated Sorting Genetic Algorithm*, ou

NSGA. É descrito a seguir, de maneira simples, o procedimento realizado para a implementação desta técnica.

O NSGA é baseado no conceito de dominância de Pareto e as soluções são classificadas usando um procedimento de ordenamento chamado “*ranking*”, onde os indivíduos que não são dominados são posicionados no *Front* (frente de Pareto) nº 1, e em seguida, eliminados da população. O conjunto seguinte de indivíduos não dominados é identificado como nº 2, e assim por diante. Este procedimento é repetido até que todos os indivíduos da população tenham um *Front*.

O objetivo da resolução de um problema com vários critérios não é somente encontrar o conjunto de soluções de Pareto, mas também as soluções que são uniformemente distribuídas neste conjunto. Neste caso, é necessário introduzir a técnica de formação de nichos (*niching*). Os valores da função de adaptação são assim distribuídos pela função de nicho (*sharing*) como segue:

$$sh(d(x_i, x_j)) = \begin{cases} 1 - d(x_i, x_j)/\sigma & \text{if } d(x_i, x_j) < \sigma \\ 0 & \text{if } d(x_i, x_j) \geq \sigma \end{cases} \quad (5.1)$$

onde x_i e x_j são os indivíduos ; sh é a função de nicho ; σ é uma constante fixada *a priori* que define o intervalo de nicho ; $d(x_i, x_j)$ é a distância euclidiana entre dois indivíduos x_i e x_j .

Após a definição da função de adaptação, utilizam-se as operações padrão de um algoritmo genético, ou seja, as operações de seleção, cruzamento e mutação, como ilustrado na Fig. 5.1.

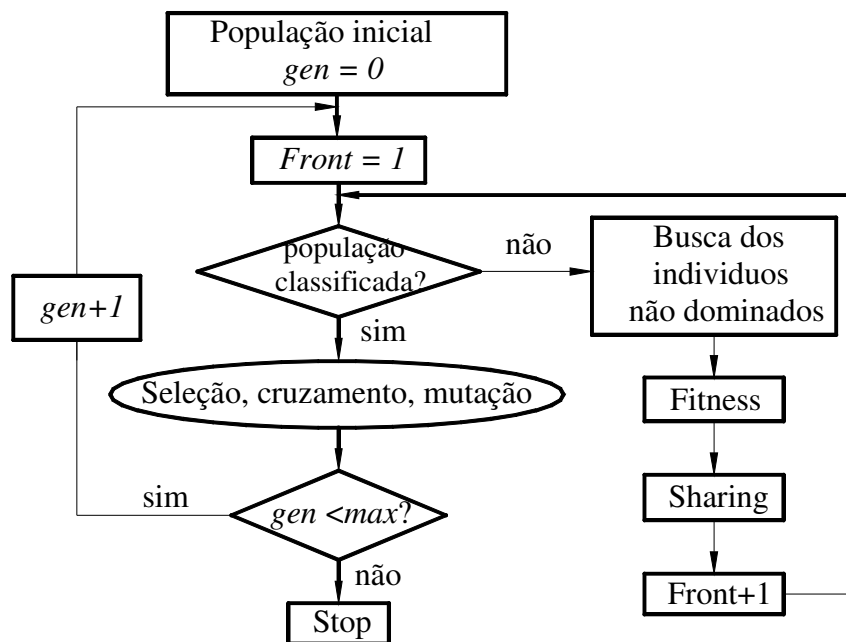


Figura 5.1 – Estratégia NSGA (figura adaptada de Lima (2007)).

Vários autores demonstram que este método de otimização multiobjetivo parece menos eficaz em termos de tempo de cálculo que os outros propostos nas referências, mas a utilização da técnica de *sharing* sobre o espaço de soluções apresenta a vantagem de manter uma grande diversidade na população, permitindo uma partição mais eficaz das soluções colocadas na frente de Pareto. Além disso, o método NSGA é aplicável a problemas com um número qualquer de objetivos (SRINIVAS; DEB, 1993).

5.2.2 Definição do problema multiobjetivo e noção de dominância.

A otimização multiobjetivo busca otimizar simultaneamente vários componentes de um vetor de funções custo. Contrariamente à otimização com um único objetivo, a solução de um problema multiobjetivo (PMO) não é única, mas é constituída de um conjunto de soluções, conhecidas como soluções ótimas de Pareto (ESCHENAUER; KOSKI; OSYCZKA, 1990). Toda solução deste conjunto é ótima desde que qualquer melhoria sobre um componente do vetor somente seja considerada caso não implique degradação de ao menos algum outro componente do vetor. A primeira tarefa na resolução de um problema multiobjetivo é a de obter o conjunto das soluções ótimas de Pareto ou amostrar as soluções diversificadas deste conjunto. A determinação do conjunto de soluções é apenas uma primeira fase na resolução prática de um PMO que necessita, num segundo momento, da escolha de uma solução ótima (a partir do conjunto de soluções), de acordo com as “preferências” do projetista. A escolha de uma solução em relação às outras necessita do conhecimento prévio do problema e dos inúmeros fatores que influenciam o próprio problema. Assim, uma solução escolhida por um critério de decisão pode não ser aceitável

por outro. Faz-se então necessário ter várias alternativas na escolha de uma solução de Pareto.

Classicamente, um PMO é definido pela seguinte expressão (LIMA, 2007):

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) \\ g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \quad \mathbf{x} \in C \end{cases} \quad (5.2)$$

onde $n \geq 2$ é o número de funções objetivo, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ é o vetor que representa as variáveis de projeto; $C \subset R^k$ representa o conjunto realizável (espaço de projeto) associado às restrições de igualdade ou desigualdade, $g_j(\mathbf{x})$, e aos limites explícitos (restrições laterais); $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é o vetor de critérios ou funções objetivo a serem otimizadas.

De acordo com o princípio estabelecido por Vilfredo Pareto, *num problema multiobjetivo existe um equilíbrio tal que não se pode melhorar um critério sem deteriorar pelo menos um dos outros critérios*, conforme anteriormente comentado. Esta definição para as soluções de Pareto decorre diretamente da *noção de dominância*, significando que é impossível encontrar uma solução que melhore os desempenhos sobre um critério sem que isto provoque uma degradação dos desempenhos de um ou mais critérios, dentre os vários existentes. As soluções de Pareto são conhecidas sob o nome de *soluções admissíveis, não dominadas e inferiores* (ZITZLER; THIELE, 1999).

A Figura 5.1 ilustra o conceito de dominância, onde os pontos 1, 3 e 5 não são dominados pelos outros pontos. Por outro lado, o ponto 2 é dominado pelo ponto 3, e o ponto 4 é dominado pelos pontos 3 e 5.

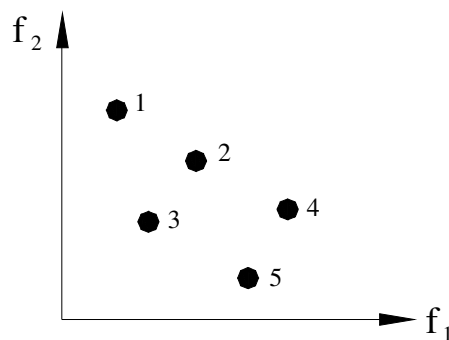


Figura 5.2 – Noção de dominância (figura adaptada de Lima (2007)).

5.1.2 Escolha de um método de otimização multiobjetivo.

A principal dificuldade de um problema multiobjetivo não consiste necessariamente em buscar a solução ótima, mas o conjunto das soluções satisfatórias, que devem, em seguida, ser classificadas. Os métodos de resolução dos problemas multiobjetivo são considerados como métodos de auxílio à decisão, porque a escolha final será deixada a critério do projetista. Neste contexto, existem duas abordagens distintas de um problema multiobjetivo. A primeira adota o ponto de vista do utilizador, e consiste em transformar um problema multiobjetivo num problema simples mono-objetivo onde as funções custo são ponderadas e a resolução do problema acompanha uma metodologia clássica. Neste caso, a solução é ótima no contexto de uma função mono-objetivo. O problema é que esta solução não satisfaz necessariamente a todos os critérios multiobjetivo, e desconsidera o significado físico do problema de partida. Além disso, ela não cobre o conjunto das soluções quando o domínio das funções custo é não convexo (DAS et al., 1997). A segunda abordagem procura responder ao problema multiobjetivo, levando-se em conta o conjunto de critérios estabelecidos, de acordo com o conceito de otimização de Pareto. Na primeira abordagem o projetista intervém desde o começo da definição do problema, exprimindo suas preferências, a fim de transformar o problema multiobjetivo num problema mono-objetivo. Na segunda, a escolha é feita a partir do conjunto das soluções propostas pelo otimizador.

Na maioria dos casos, o projetista não pode exprimir claramente as suas preferências, seja porque lhe faltam experiência ou informações, seja porque as funções objetivo são de naturezas diferentes. O inconveniente é que, quando o espaço de projeto não é convexo, o método de ponderação ignora parte do conjunto de soluções de Pareto, como ilustrado na Fig. 5.3 abaixo.

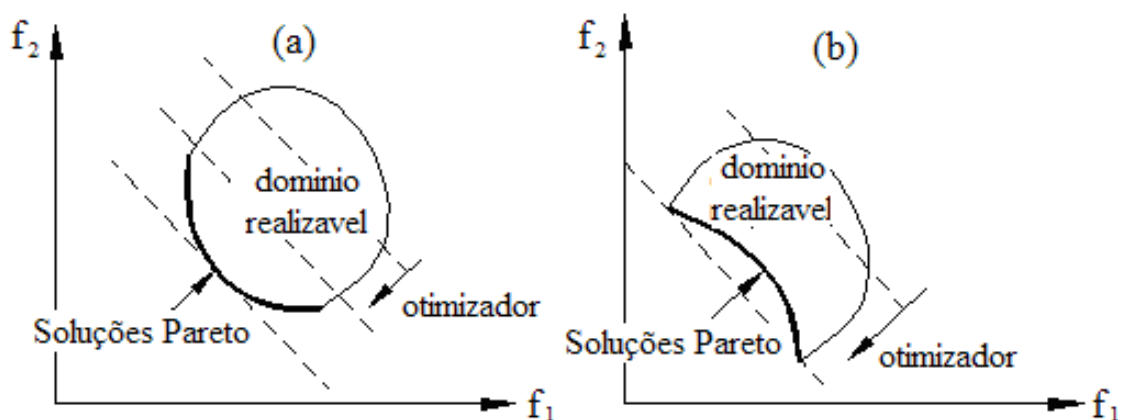


Figura 5.3 – Espaço convexo (a) e não convexo (b).

(figura adaptada de (Das et al., 1997)).

Existe certo número de técnicas que permitem encontrar o conjunto das soluções ótimas de Pareto (DAST al., 1997), (STEUER, 1986). As principais vantagens destes métodos são: a) as soluções ótimas são independentes das preferências do projetista; b) a análise pode ser executada somente uma vez, pois o conjunto de Pareto não sofrerá mudanças significativas desde que a descrição do problema seja mantida. Uma dificuldade normalmente encontrada é que, geralmente, o número de soluções no primeiro *Front* de Pareto é muito grande, implicando um problema suplementar para o projetista referente à escolha final da solução a ser implementada. Contudo, existem métodos que podem resolver este problema. Uma alternativa seria a de agrupar as soluções em famílias que têm propriedades estatísticas semelhantes (ROSENMAN; GERO, 1985),(MORSE, 1980).

5.3 – Otimização Multiobjetivo Robusta

A otimização robusta tem as mesmas características da otimização determinística quanto ao tratamento dos dados, mas leva em conta as incertezas sobre as variáveis de projeto e sobre as funções objetivo, assim como no tratamento das restrições (LEE; PARK, 2001). Em engenharia, as incertezas são inerentes aos defeitos de modelagem, às variações das propriedades mecânicas dos materiais, tolerâncias dos processos de fabricação e de montagem (espessuras de chapas, juntas, etc.), dentre outros. Numa fase de desenvolvimento avançado do projeto, incertezas são introduzidas para se considerar a falta de informações sobre determinadas variáveis de projeto, com destaque para os métodos de otimização estocásticos. No trabalho de Lima (2007) são definidas as principais origens das incertezas e a abordagem freqüentemente empregada em dinâmica de estruturas para tratar sistemas dinâmicos estocásticos.

5.3.1 Critério de Robustez para a Otimização Multiobjetivo Robusta

Na otimização de absorvedores dinâmicos não-lineares aplicados a sistemas dinâmicos, a consideração da robustez das soluções é essencial para o projeto dos ADVs, uma vez que uma solução teoricamente ótima pode revelar-se catastrófica na prática, caso os erros associados ao processo de fabricação e/ou montagem dos absorvedores dinâmicos não permitam obter os valores ótimos das variáveis de projeto com a precisão desejada (BORGES et al., 2005). Assim, mesmo um pequeno desvio em relação ao valor teórico ótimo de uma variável poderá traduzir-se num comportamento muito diferente daquele previsto pela otimização numérica (restrições não satisfeitas, por exemplo). Neste contexto, uma solução sub-ótima estável, no que diz respeito às tolerâncias de fabricação e/ou montagem, será muito mais interessante do ponto de vista do projeto de engenharia.

A abordagem mais utilizada consiste primeiramente em tomar os limites sobre as restrições impostas, e depois verificar *a posteriori* se a solução encontrada pela otimização determinística permanece estável quando as diferentes variáveis descrevem os intervalos de tolerância considerados. Esta verificação pode ser feita através de métodos probabilísticos, como a simulação de Monte Carlo (MC) (BIELAJEW, 2001), ou ainda pelo método de Hiper-Cubo-Latino (HCL) (VIANA, 2007).

O método de Monte Carlo é um método estatístico utilizado em simulações estocásticas com diversas aplicações em diferentes áreas do conhecimento, que vem sendo utilizado com sucesso para obter aproximações numéricas de funções complexas. O método é baseado na observação de uma distribuição de probabilidades e no uso da amostra obtida para aproximar a função de interesse. O nome "Monte Carlo" surgiu durante o projeto Manhattan na Segunda Guerra Mundial (HAMMERSELEY, 1964). Durante o projeto de construção da bomba atômica, Ulam & Metropolis (1949) publicaram "*The Monte Carlo Method*", onde consideraram a possibilidade de utilizá-lo na simulação direta de problemas de natureza probabilística relacionados com o coeficiente de difusão do neutron em certos materiais. Apesar de ter despertado a atenção desses cientistas naquela época, a lógica do método já era conhecida há bastante tempo.

Este método pode ser interpretado como sendo uma tentativa de representar a natureza com a simulação direta da dinâmica essencial do sistema em questão. Neste sentido o método de Monte Carlo é bastante simples na busca da solução de um determinado problema.

Uma solução é determinada pela avaliação resultante de uma amostragem aleatória. São feitas pequenas iterações em torno da configuração inicial de projeto, até obter convergência, caracterizando a solução do problema. Visto que o processo de busca é intensivo, exigindo a realização de muitas iterações, sua utilização efetiva depende de computação digital com bom desempenho. O método é aplicado tanto em problemas determinísticos quanto em problemas probabilísticos. Sua estrutura é muito simples e flexível, o que faz com que a Simulação de Monte Carlo possa ser aplicada em problemas de qualquer nível de complexidade. Entretanto, a maior inconveniência do método é o elevado custo computacional, pois, conforme comentado acima, se necessita de um número elevado de simulações para fazer reduzir o erro da estimativa da solução procurada, necessitando assim de computadores com capacidade de processamento compatível.

De maneira geral o método de Monte Carlo consiste na amostragem de números aleatórios, que pode ser realizada de diferentes maneiras, fazendo-se uso de conceitos de redução de variância que são aplicadas de forma a diminuir o tempo de processamento da simulação bem como garantir a precisão das estimativas. O método de Monte Carlo torna-se superior a

outros métodos numéricos principalmente se o problema tem dimensões elevadas. Uma discussão mais detalhada sobre precisão e tempo de processamento pode ser encontrada em (BOYLE,1977). Uma proposta para obter maior eficiência no método é a chamada técnica de redução de variância, que pode ser descrita como um conjunto de alternativas para a geração dos números aleatórios utilizados na simulação. Assim, funcionam no sentido de aumentar a precisão e reduzir o tempo de processamento. Entretanto, existem problemas muito complexos onde o método de Monte Carlo pode se tornar até mesmo inviável do ponto de vista prático devido ao tempo de processamento. Nesses casos, o método de amostragem por hipercubo latino é uma técnica que reduz o número de simulações necessárias para a obtenção de resultados aceitáveis. Nessa técnica, o intervalo de possíveis valores de cada variável é dividido em faixas, e um valor representativo é extraído de cada faixa. Os valores representativos são então combinados de maneira que cada valor representativo seja considerado apenas uma vez no processo de simulação. Assim, todos os possíveis valores das variáveis aleatórias participam da estimativa.

Além destes, outros métodos chamados de métodos “possibilistas”, baseados na aritmética dos intervalos, foram desenvolvidos para avaliar a variação das respostas quando os parâmetros considerados descrevem valores dados por intervalos (BRAIBANT et al., 1998), (DESSOMBZ et al., 2001). Alguns autores propuseram a avaliação da robustez das soluções ótimas apenas ao final do processo de otimização (BENNET, 1990). Os principais inconvenientes desta estratégia são: necessidade sistemática das expressões analíticas da função objetivo; utilização de ponderação destas funções, que exclui a busca de eventuais soluções nas regiões não convexas do espaço das soluções robustas. Desta forma, encontram-se zonas de robustez e não soluções ótimas e robustas propriamente ditas (LIMA, 2006).

Para definir a robustez de uma função objetivo, considera-se como exemplo uma função custo com um único parâmetro, como ilustrado na Fig. 5.4, contendo duas soluções ótimas, A e B, respectivamente. A solução A é o ótimo determinístico, e a solução B é o ótimo robusto. O desempenho do ótimo determinístico é melhor que o do ótimo robusto. Contudo, sua distribuição é menos confiável que a do ótimo robusto já que uma pequena mudança em seus parâmetros de projeto tem como consequência uma deterioração muito maior na resposta do sistema.

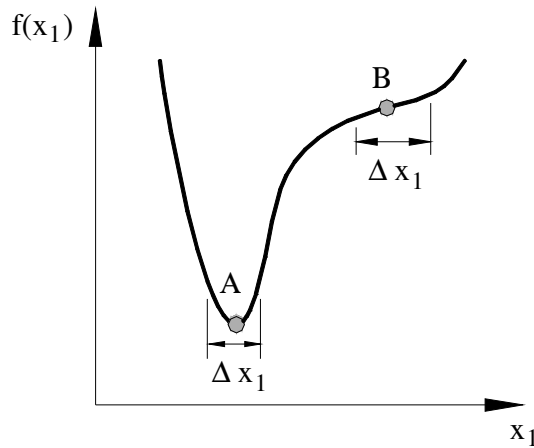


Figura 5.4 – Soluções ótimas robustas (figura adaptada de Lee e Park (2001)).

Uma função de robustez é um estimador que permite avaliar o impacto das variações dos parâmetros de projeto sobre a função custo. Normalmente, a construção da função de robustez é baseada na *média* (μ) e no desvio padrão (σ) das funções custo. Neste trabalho, utiliza-se a abordagem robusta proposta por Lima (2006), onde a função robustez f^r de uma função objetivo $f(x)$ é definida pela relação entre a média e o desvio padrão, expressa como segue:

$$f^r = (\sigma_f / \mu_f)^{-1} \quad (5.3)$$

onde (σ_f / μ_f) é a medida da dispersão, ou vulnerabilidade de $f(x)$, denotada por $f^v(x)$.

A Figura 5.5 ilustra o método utilizado neste trabalho, com o objetivo de encontrar as soluções do problema proposto ao projetista, levando-se em conta as incertezas dos parâmetros de projeto durante a otimização da estrutura, incorporando absorvedores dinâmicos de vibrações não-lineares. Para isto, define-se um novo problema de otimização multiobjetivo robusto (POMR), capaz de encontrar os ótimos estáveis para os parâmetros de projeto aleatórios. Neste novo problema, otimiza-se simultaneamente as funções custo iniciais e as funções de robustez. O PMO inicial é definido pela expressão (5.1), enquanto o POMR é expresso como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{F}^*(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_1^v(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_2^v(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}), f_n^v(\mathbf{x})) \\ g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \quad \mathbf{x} \in C \end{array} \right. \quad (5.4)$$

onde $f_i^v(\mathbf{x})$ é a função vulnerabilidade da função objetivo $f_i(\mathbf{x})$ e $i = 1, \dots, N$.

As soluções robustas, no que diz respeito às incertezas, são aquelas que permitem minimizar simultaneamente as funções custo iniciais e maximizar sua robustez (ou minimizar eventuais vulnerabilidades).

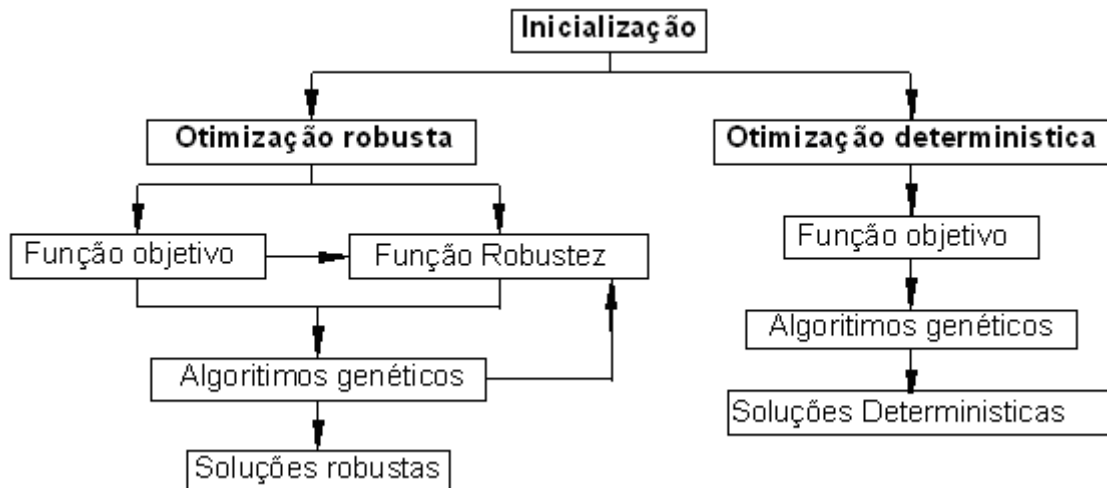


Figura 5.5 – Metodologia de otimização multiobjetivo robusta.

Uma vez definido o problema de otimização robusto, o problema consiste em avaliar numericamente a função de robustez de maneira simples e com um número de amostras reduzido, uma vez que não se trata apenas de se caracterizar um ótimo, mas de integrar um critério de robustez ao algoritmo de busca. Uma solução econômica consiste na substituição de uma tiragem clássica de Monte Carlo (PAPADRAKAKIS; KOTSOPULOS, 1999) pelo método Hyper-Cube-Latino (HCL) (FLORIAN, 1992). Outros métodos podem ser utilizados para resolver o problema do tempo de cálculo como os metamodelos baseados em superfícies de resposta ou em redes neurais artificiais.

5.4 Sensibilidade Paramétrica de Sistemas Incorporando ADVs Não-Lineares.

Nesta seção, é proposta uma estratégia numérica para caracterizar a influência dos parâmetros físicos e geométricos que caracterizam os ADVs não-lineares. Uma vez que se interessa pela otimização robusta dos absorvedores dinâmicos e pela introdução de incertezas nos parâmetros de concepção, esta estratégia constitui-se numa ferramenta eficiente para a análise de sistemas mecânicos incorporando ADVs não-lineares na fase de concepção do sistema (pré-projeto), conforme se verá a seguir. No contexto da concepção

robusta de estruturas dinâmicas, a análise de sensibilidade, otimização e propagação de incertezas são três fases indispensáveis para se chegar a uma concepção orientada à qualidade.

5.4.1 Definição da sensibilidade paramétrica – Avaliação por diferenças finitas

A análise de sensibilidade é geralmente baseada na avaliação das derivadas (freqüentemente limitadas à primeira ordem) das respostas dos sistemas com relação a um conjunto de parâmetros de interesse. O interesse em fazê-la pode estar associado a diferentes tipos de respostas mecânicas: deslocamentos estáticos, restrições dinâmicas, soluções próprias (valores e vetores próprios), respostas no domínio da freqüência e respostas temporais (HUANG et al, 1996). Segundo Murthy e Haftka (1988), a concepção ótima de sistemas mecânicos nas fases de pré-projeto possui uma relação estreita com a análise de sensibilidade paramétrica, uma vez que os algoritmos de otimização executam geralmente um grande número de avaliações de respostas de sistemas para diferentes valores de variáveis de projeto. As derivadas podem ser empregadas para aproximar a resposta dos sistemas modificados, o que reduz o custo de re-análise do problema exato, particularmente para os sistemas industriais, nos quais os modelos de elementos finitos são de ordem elevada. Neste mesmo contexto, durante o cálculo da variabilidade das estruturas na presença de incertezas, torna-se igualmente necessário proceder ao cálculo prévio das sensibilidades das variáveis de projeto, a fim de considerar somente aquelas mais influentes ou mais sensíveis, e dessa forma, reduzir o espaço de concepção.

Uma das maneiras mais simples de calcular aproximadamente a derivada de uma função qualquer é utilizar o Método das Diferenças Finitas (MDF). Este método faz uma aproximação da derivada através da expressão:

$$f'(x) \cong \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (5.5)$$

sendo que Δx é uma pequena perturbação, suficiente para influir no valor da função $f(x)$. Pode-se definir esta perturbação por:

$$\Delta x = \eta x \quad (5.6)$$

Sendo η o valor da perturbação relativa.

A precisão do MDF está fortemente ligada ao tamanho da perturbação utilizada. Um valor muito pequeno leva a erros de arredondamento, causados pela forma como os

números são representados. Por outro lado, um valor muito grande leva a erros de truncamento, pois a derivada só é exata no limite, ou seja, quando $\Delta x \rightarrow 0$.

A grande vantagem do MDF é a facilidade de implementação, pois a utilização da expressão dada acima não requer nenhum conhecimento sobre a forma pela qual a função é calculada. Assim, a implementação do método é totalmente independente do elemento finito utilizado e nenhuma alteração significativa precisa ser feita no programa de análise. Isto permite, inclusive, a utilização de programas comerciais, nos quais o código fonte não é conhecido. Tais características fazem com que o método seja bastante utilizado na validação de métodos mais complexos.

Nesta seção, a formulação da sensibilidade das respostas frequenciais (FRFs) com relação aos parâmetros físicos e geométricos e com relação ao parâmetro de não-linearidade, para sistemas incorporando absorvedores dinâmicos não-lineares é desenvolvida. Para isto, faz-se referência aos desenvolvimentos feitos no capítulo 4, seção 4.3, sobre a modelagem numérica de sistemas dinâmicos incorporando ADVs não-lineares.

As matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$, de um sistema mecânico incorporando ADVs não-lineares, de acordo com a expressão dada na Eq.(4.49), conduz a uma dependência das respostas dinâmicas do sistema com relação a um conjunto de parâmetros de concepção (características físicas e geométricas, e não-linearidade do absorvedor dinâmico). Esta dependência pode ser expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{M}(\mathbf{p}), \mathbf{C}(\mathbf{p}), \mathbf{K}(\mathbf{p})) \quad (5.7)$$

onde $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$ representam, respectivamente, os vetores das respostas (estáticas, frequenciais, temporais, etc) e os parâmetros de concepção. A sensibilidade das respostas estruturais com relação a um parâmetro de concepção dado, p_i , avaliada para um conjunto de valores dados do parâmetro $\mathbf{p}^0$, é definida pela seguinte derivada parcial:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_i} \right|_{\mathbf{p}^0} = \lim_{\Delta p_i \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{r}(\mathbf{M}(p_i^0 + \Delta p_i), \mathbf{C}(p_i^0 + \Delta p_i), \mathbf{K}(p_i^0 + \Delta p_i)) - \mathbf{r}(\mathbf{M}(p_i^0), \mathbf{C}(p_i^0), \mathbf{K}(p_i^0))}{\Delta p_i} \right] \quad (5.8)$$

onde Δp_i representa uma variação arbitrária aplicada ao valor atual do parâmetro p_i^0 , mantendo-se constantes todos os demais parâmetros.

A sensibilidade da resposta com relação à p_i pode ser estimada através do método clássico de diferenças finitas, onde se calcula sucessivamente as respostas do sistema mecânico correspondentes a $p_i = p_i^0$ e $p_i = p_i^0 + \Delta p_i$, respectivamente, através da seguinte relação:

$$\left. \frac{\partial r}{\partial p_i} \right|_{p^0} \approx \left[\frac{r(M(p_i^0 + \Delta p_i), C(p_i^0 + \Delta p_i), K(p_i^0 + \Delta p_i))}{\Delta p_i} - \frac{r(M(p_i^0), C(p_i^0), K(p_i^0))}{\Delta p_i} \right] \quad (5.9)$$

Tal aproximação é em geral eficiente do ponto de vista do cálculo se os incrementos dados nos parâmetros são suficientemente pequenos.

Nas aplicações que seguem, as funções de sensibilidade denotadas por $S_{FRF}^N(p)$, são normalizadas segundo a expressão seguinte:

$$S_{FRF}^N(p) = \frac{\partial H_H(p^0)}{\partial p} \bigg|_{(\omega, T, p^0)} \frac{p_0}{H(p^0)} \quad (5.10)$$

onde H é a resposta em frequência do sistema.

5.5 Aplicações numéricas

Serão mostradas a seguir aplicações numéricas, dedicadas aos absorvedores dinâmicos de vibração não lineares. A primeira delas tem a ver com o caso apresentado na Fig.4.1, onde se tem um sistema sem amortecimento. Neste caso chegou-se ao projeto ótimo utilizando apenas algoritmos genéticos clássicos e o objetivo proposto foi o de maximizar a banda de supressão, ou seja, trata-se de um problema com apenas um objetivo.

Posteriormente, analisa-se o caso do sistema apresentado na Fig. 4.3. Aqui, o objetivo é analisar a sensibilidade de todos os parâmetros do sistema para, em seguida, partir para o objetivo principal desta aplicação, que é o de resolver um problema de otimização robusta multiobjetivo.

5.5.1 O Caso do ADV Não Linear Não Amortecido da seção 4.1

O processo de otimização considerou como variáveis de projeto o coeficiente de não linearidade representado por a , o coeficiente de rigidez da mola não linear dado por k_2 e a massa do absorvedor dada por m_2 (massa secundária). O processo foi implementado

utilizando os algoritmos genéticos clássicos, servindo-se de uma função que visa maximizar a “*banda de supressão*” da curva de resposta em frequência da massa principal (HUNT, 1982). Define-se como *banda de supressão* a região do espectro para a qual o deslocamento estático adimensional é igual ou inferior à unidade (RICE, 1985), como mostra a Fig. 5.6

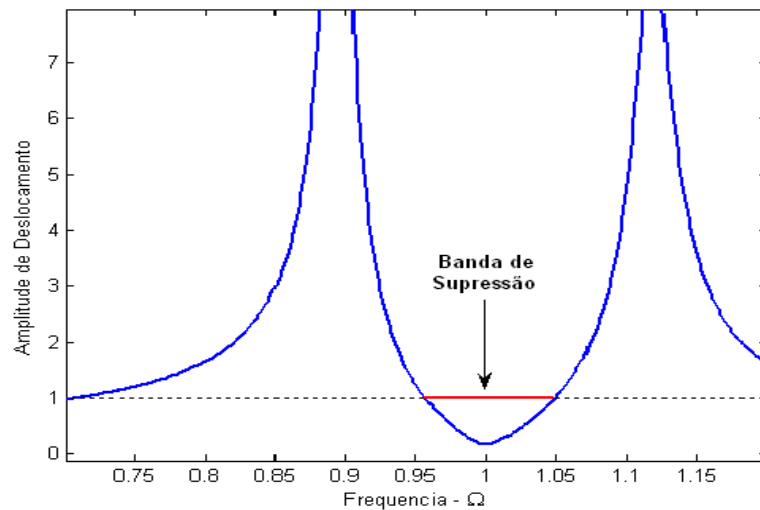


Figura 5.6: Ilustração da Banda de Supressão

O projeto contou com uma população de 100 indivíduos e com 30 gerações. Na Tab. 5.1, abaixo, mostram-se os valores das variáveis de projeto iniciais e ótimas encontradas:

Tabela 5.1 – Valores Iniciais e ótimos das variáveis de projeto

Variáveis de Projeto	A	k_2	m_2
Valores iniciais	20	250	0,25
Valores ótimos	22,15	275,05	0,26

Mostram-se na Fig.5.7 as curvas da amplitude da massa principal. Nesta figura há uma comparação entre as bandas de supressão do sistema inicial e do sistema já otimizado. É possível perceber que para a configuração inicial tem-se uma banda de supressão dada por $B = 6,45$ rad/seg. já em sua configuração ótima, tem-se $B^*=8,06$ rad/seg. Nota-se que a banda de supressão foi maximizada com relação à configuração inicial, levando a um aumento de aproximadamente 25%.

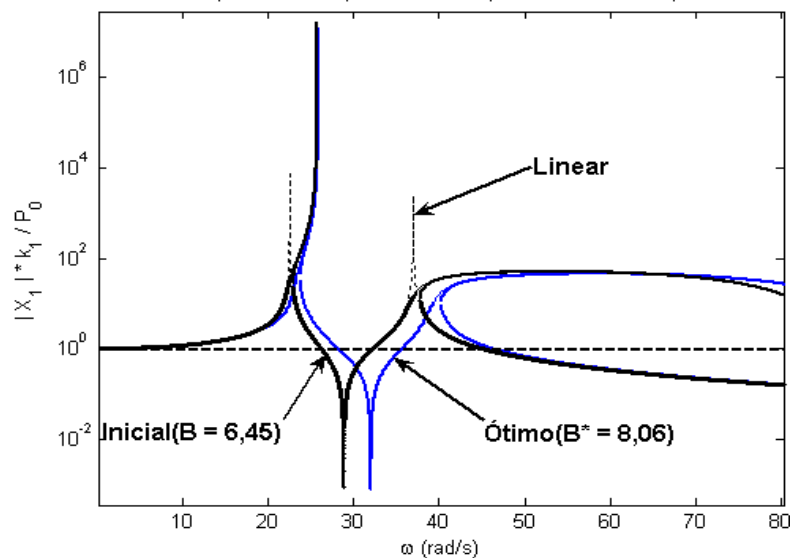


Figura 5.7 – Banda de Supressão: Configuração inicial ($B = 6,45$ rad/s) e Configuração ótima ($B^* = 8,06$ rad/s) - Amplitude da massa principal

Pode-se então concluir que se por um lado a não linearidade por si só já faz aumentar a banda de supressão ao se comparar com o caso linear, por outro, a otimização dos parâmetros do absorvedor dinâmico de vibração não linear faz com que tal banda de supressão seja maximizada. Assim sendo, as características não lineares do absorvedor foram otimizadas tendo em vista a maximização da banda de supressão.

5.5.2 Sensibilidade paramétrica

Para ilustrar o cálculo da sensibilidade das FRFs de sistemas mecânicos incorporando ADVs não-lineares utiliza-se o sistema de dois graus-de-liberdade mostrado na Fig. 4.3. Os valores nominais das características físicas e geométricas utilizadas para gerar o sistema de dois graus-de-liberdade são apresentados na Tab. 5.2.

Tabela 5.2 – Valores nominais das variáveis de projeto

Parâmetros	ε_1	ε_2	β	ζ_1	ζ_2	μ	ρ
Valores nominais	0,001	0,01	0,1	0,01	0,01	0,05	1,0

Neste exemplo, os parâmetros normalizados ζ_1 , ζ_2 , ε_1 , ε_2 , β , μ e ρ são considerados como variáveis de projeto no cálculo das sensibilidades normalizadas das respostas dinâmicas com relação a um dado parâmetro p , $S_H^N(p)$. As partes reais e imaginárias das sensibilidades normalizadas calculadas por diferenças finitas (de acordo com a equação (5.7)) são mostradas nas Figuras 5.8 a 5.14, nas quais uma variação de

20% em torno dos valores nominais de cada variável de projeto foi adotada. Além disso, nas mesmas figuras são apresentadas as funções de resposta em frequência multiplicadas por um fator de escala (fe) conveniente.

Deve ser notado que as funções de sensibilidade, $S_H^N(p)$, foram normalizadas de acordo com a relação (5.10).

Através dos valores e dos sinais das amplitudes das funções de sensibilidade, pode-se avaliar o grau de influência de cada variável de projeto sobre as amplitudes das funções de resposta em frequência, e da largura da banda de supressão, respectivamente, na faixa de frequência de interesse. Além disso, a análise da sensibilidade permite decidir, dentre os parâmetros de projeto, aqueles que serão retidos no processo de otimização por serem os mais “sensíveis” à vista dos objetivos estabelecidos.

Inicialmente é mostrado nas Figs (5.8) e (5.9) as curvas de sensibilidade da amplitude de resposta r , por diferenças finitas para a variação dos coeficientes de amortecimento da massa principal e secundária ζ_1 e ζ_2 , respectivamente:

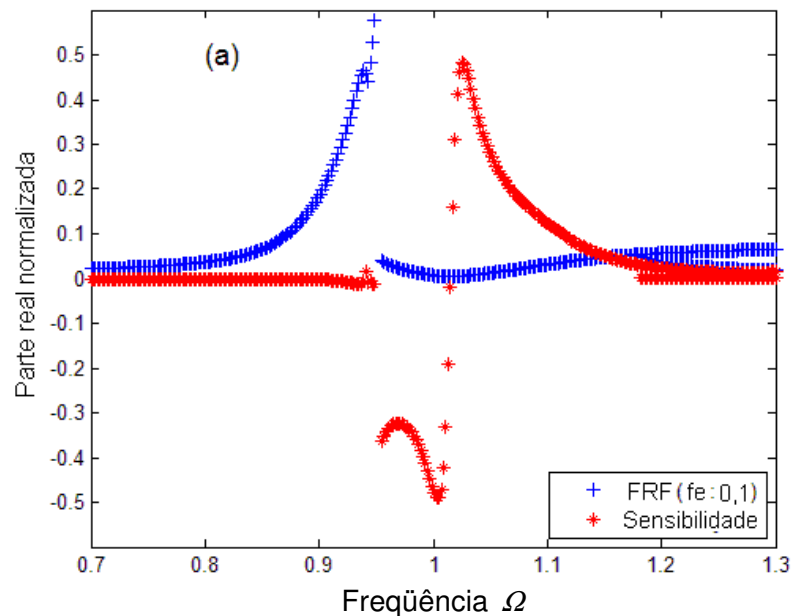


Figura 5.8 – Sensibilidade da resposta em frequência com relação ao fator de amortecimento da massa principal ζ_1

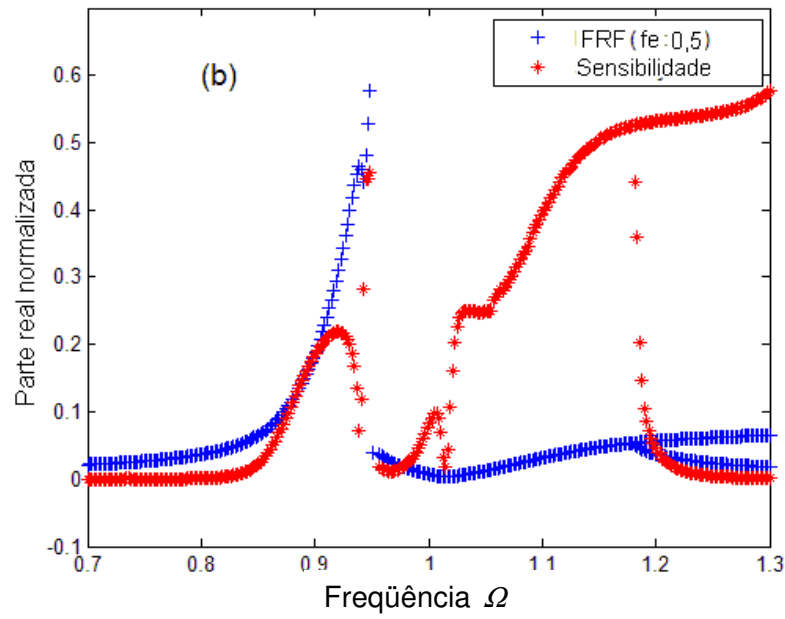


Figura 5.9 – Sensibilidade da resposta em frequência com relação a ζ_2

Analisando os valores das sensibilidades dos parâmetros ζ_1 e ζ_2 mostrados nas Figuras 5.8 e 5.9 respectivamente, é possível observar que ambos os parâmetros não possuem influência significativa quanto à avaliação da largura de banda de supressão e também com respeito à amplitude da resposta. Sendo assim, não são significativos do ponto de vista do projeto de otimização em curso.

São mostradas nas figuras 5.10 e 5.11 as curvas de resposta em frequência com as sensibilidades dos parâmetros ε_1 e ε_2 , respectivamente.

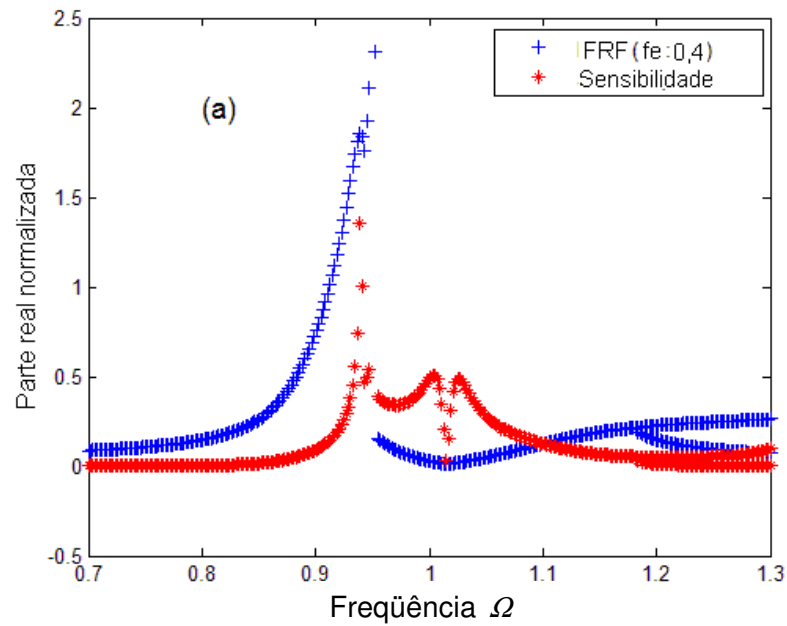


Figura 5.10 – Sensibilidade da resposta em frequência com relação ao coeficiente de não linearidade ε_1

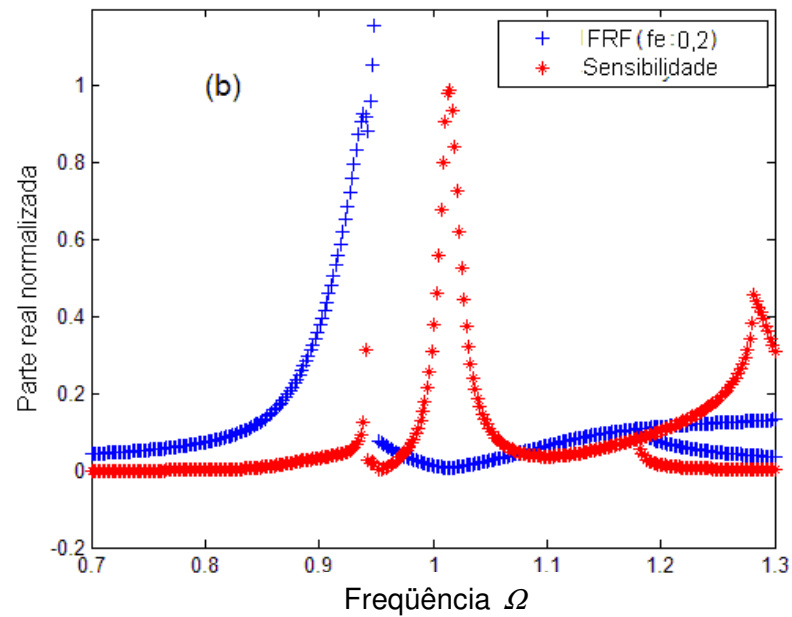


Figura 5.11 – Sensibilidade da resposta em frequência relação ao coeficiente de não linearidade ε_2

Nota-se que a sensibilidade do parâmetro ε_1 (coeficiente de não-linearidade da mola que conecta a massa principal à base) dado na Fig. 5.10, com relação à largura da banda de supressão e à amplitude do sinal é também bastante pequena. Como consequência, este parâmetro não é considerado como variável de projeto no processo de otimização.

Entretanto, o parâmetro ε_2 (coeficiente de não-linearidade da mola que conecta a massa principal à massa secundária), mostrado na Fig. 5.11, possui uma influência bastante grande com respeito à amplitude de resposta da massa principal e também com respeito à largura da banda de supressão. Por este motivo, este é um dos parâmetros que serão considerados no projeto de otimização.

A seguir, na Fig. 5.12, tem-se a curva de resposta em frequência da massa principal com a sensibilidade do parâmetro β :

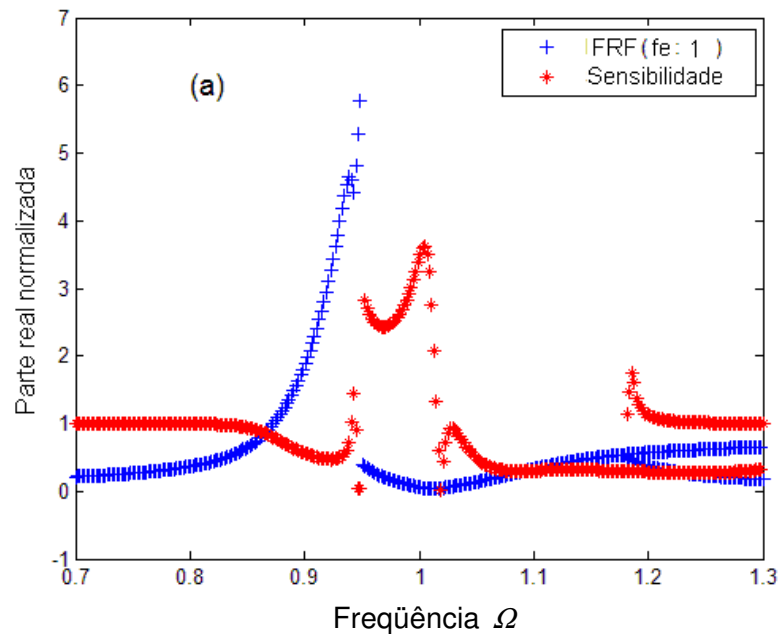


Figura 5.12 – Sensibilidade da resposta em frequência com relação a β .

Analisando a curva mostrada na Fig. 5.12 acima, nota-se que a sensibilidade do parâmetro β (parâmetro de força) também tem grande relevância no que diz respeito à amplitude da resposta da massa principal e, ao mesmo tempo, à largura da banda de supressão. Assim sendo, este parâmetro é também retido para o processo de otimização.

Finalmente, nas Figuras 5.13 e 5.14, são mostradas as curvas de resposta em frequência com as sensibilidades dos parâmetros μ (razão de massas) e ρ (razão entre frequências).

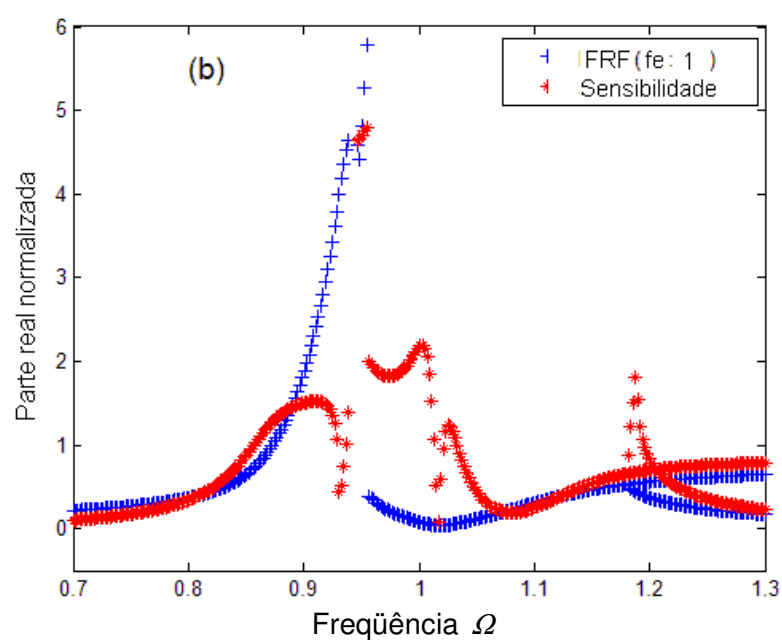


Figura 5.13 – Sensibilidade da resposta em frequência com relação a μ

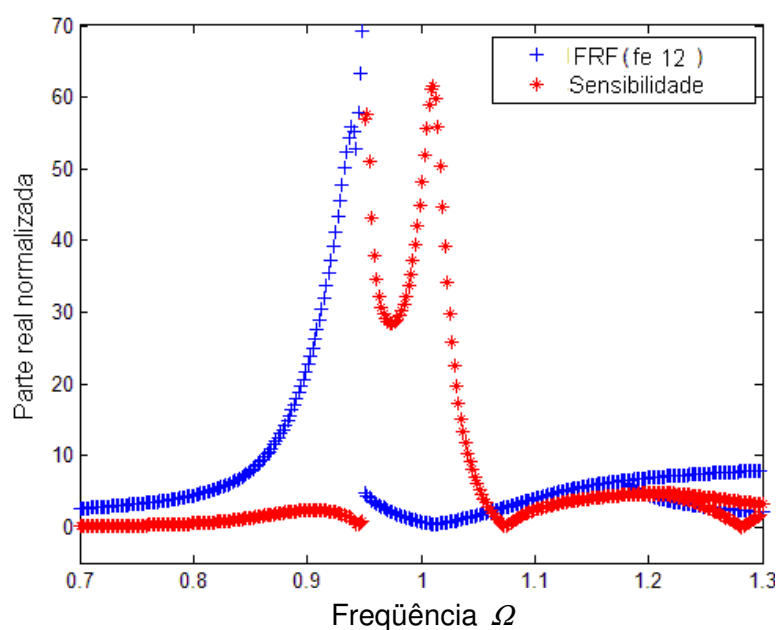


Figura 5.14 – Sensibilidade da resposta em frequência com relação a ρ .

Nas figuras 5.13 e 5.14 é possível observar que os parâmetros μ e ρ devem também ser considerados como parâmetros de projeto pelo fato de que exercem grande influência, tanto na banda de supressão quanto na amplitude da resposta da massa principal do sistema.

Assim, sintetizando, ao se considerar a análise feita a partir dos resultados mostrados nas figuras de 5.8 a 5.14, os parâmetros ε_2 , β , μ e ρ serão os quatro

parâmetros a serem incluídos como variáveis de projeto no processo de otimização paramétrica, uma vez que são os mais relevantes dentro contexto deste trabalho.

5.5.3 Projeto ótimo-robusto do ADV não-linear

Após a determinação da influência de cada variável de projeto na resposta dinâmica do sistema não-linear, o interesse agora é avaliar a estratégia de otimização multiobjetivo robusta para o projeto ótimo do ADV não-linear descrito anteriormente na Fig.(4.3).

O problema de otimização determinístico é composto por duas funções objetivo, a saber: a primeira função custo representa a amplitude da FRF do sistema amortecido não-linear correspondente à ressonância do modo 1 (M1), onde o interesse está em sua minimização; a segunda função custo representa a largura da banda de supressão, onde o interesse está em sua maximização. A Fig. 5.15 abaixo mostra a definição das duas funções objetivo consideradas no problema de otimização multiobjetivo que pode ser escrito conforme a seguinte relação:

$$\text{minimizar: } \begin{cases} f_1 = \text{amplitude (M1)} \\ f_2 = -\text{largura da banda de supressão} \end{cases} \quad (5.11)$$

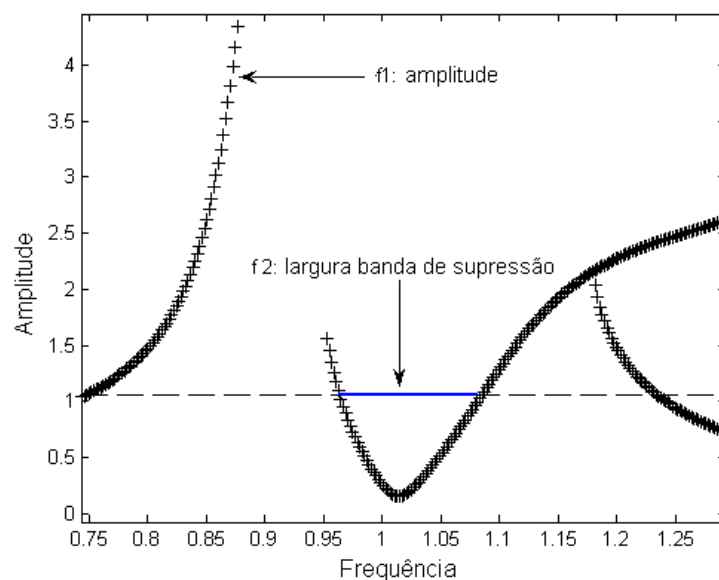


Figura 5.15 – Representação das funções objetivo f_1 e f_2 .

Os parâmetros de projeto e suas correspondentes variações admissíveis estão listados na Tabela 5.3. As variações admissíveis foram escolhidas de acordo com a análise de sensibilidade apresentada na seção precedente. Além disso, somente as faixas de

variações das variáveis contínuas são consideradas como restrições laterais no problema de otimização robusta.

Tabela 5.3 – Variáveis de projeto e variações admissíveis correspondentes.

Variável	Valor nominal	Variações	Incertezas
ρ	1,0	$\pm 30 \%$	$\Delta\rho = 3,0\%$
μ	0,05	$\pm 30 \%$	$\Delta\mu = 3,0\%$
β	0,1	$\pm 30 \%$	$\Delta\beta = 3,0\%$
ε_2	0,01	$\pm 30 \%$	$\Delta\varepsilon_2 = 3,0\%$

As funções de resposta em frequência são calculadas para uma força de excitação aplicada na massa principal, e as respostas são adquiridas no mesmo ponto, como indicado na Fig. 5.16. O problema de otimização estocástico é composto pelas funções objetivo definidas na relação (5.11) e pelas funções vulnerabilidade adicionais associadas a cada função custo, de acordo com a expressão (5.12). O interesse é o de otimizar as funções custo através da minimização da amplitude e da maximização da largura da faixa de supressão, e também de minimizar as funções vulnerabilidade, de forma simultânea.

$$\text{minimizar: } \mathbf{F}(x) = (f_1, f_1^v, f_2, f_2^v) \text{ onde } f_1^v = (\sigma_1/\mu_1)^{-1}; f_2^v = (\sigma_2/\mu_2)^{-1} \quad (5.12)$$

Os parâmetros do NSGA são definidos na Tab. 5.4 abaixo.

Tabela 5.4 – Definição dos parâmetros do NSGA usados no processo de otimização.

NSGA	
Probabilidade de seleção	0,25
Probabilidade de cruzamento	0,25
Probabilidade de mutação	0,25
Número de gerações	100
Número de indivíduos/geração	30
Coeficiente de Sharing (σ)	0,2

Para encontrar as soluções ótimas-robustas usando o algoritmo NSGA com as características mostradas em Tab. 5.4, para cada geração são introduzidas as incertezas

definidas na Tabela 5.3 utilizando-se o método de simulação de sorteios aleatórios Hiper-Cubo-Latino (HCL). São geradas 200 amostras para cada variável de projeto que serão utilizadas para o cálculo das funções de vulnerabilidade associadas a cada função custo (de acordo com os níveis de dispersão adotados).

A Figura 5.16 mostra os resultados provenientes da otimização robusta NSGA, representando, respectivamente, cada função custo e sua vulnerabilidade. Na prática, as funções de vulnerabilidade utilizadas consistem em minimizar as dispersões ao redor de cada solução ótima encontrada durante o processo de otimização. Observa-se que o intervalo de dispersão para cada função custo é :

- De 0,006% a 0,014% para as soluções ótimas correspondentes à primeira função custo;
- De 0% a 0,05% para as soluções ótimas correspondentes à segunda função custo.

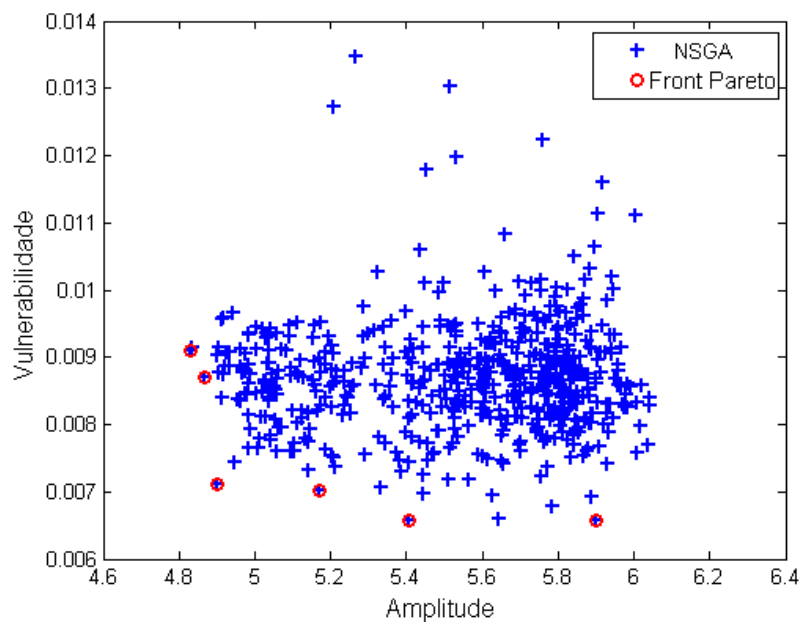


Figura 5.16 – Representação da função custo f_I e sua vulnerabilidade.

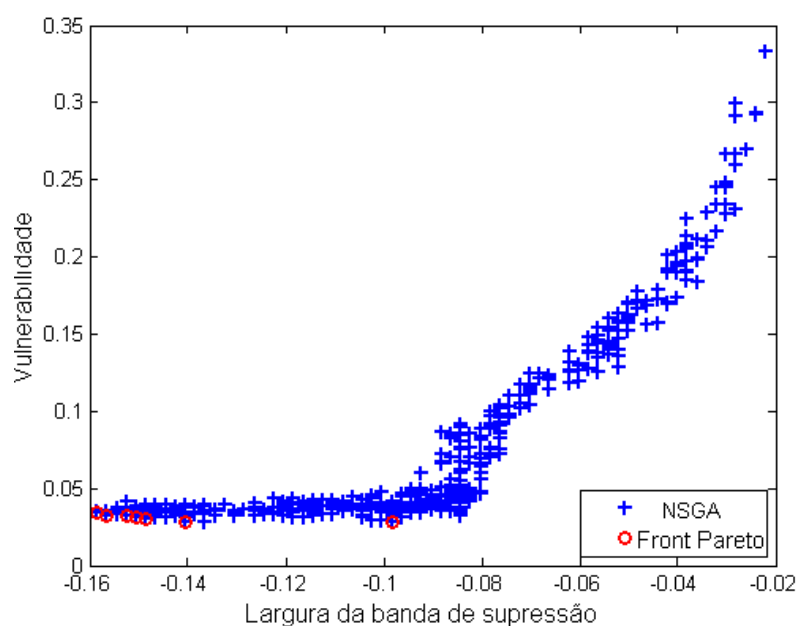


Figura 5.17 – Representação da função custo f_2 e sua vulnerabilidade.

A Figura 5.18 mostra uma comparação entre as soluções robustas e as soluções determinísticas. Pode-se concluir que as soluções determinísticas dominam as soluções robustas. Entretanto, as soluções determinísticas não são robustas no que diz respeito às incertezas introduzidas nos parâmetros de projeto.

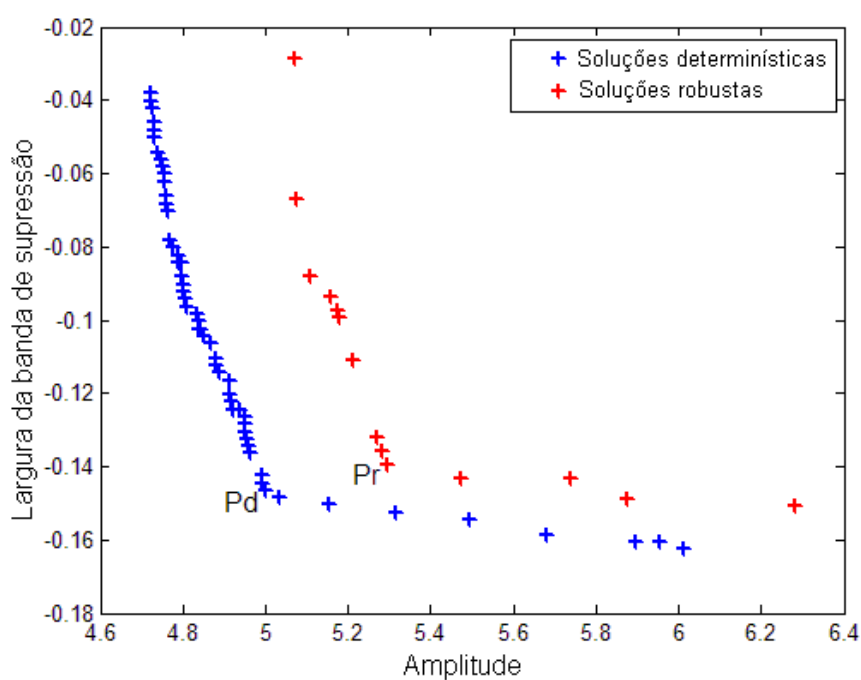


Figura 5.18 – Comparação entre as soluções robustas e determinísticas.

Para verificar a estabilidade (nível de dispersão) das soluções ótimas robustas comparada à das soluções determinísticas, serão tomadas as soluções ótimas correspondentes aos pontos **Pr** e **Pd**, respectivamente, indicadas na Fig. 5.18. Para cada conjunto de soluções, gera-se aleatoriamente pelo método Hiper-Cubo-Latino (HCL), **1000 amostras** de pontos para cada conjunto, e calcula-se as respostas do sistema. Para a geração das amostras, foram considerados os seguintes níveis de dispersão nas variáveis de projeto definidas na Tabela 5.3: $\Delta\rho = 1,5\%$ para a razão entre frequências, $\Delta\mu = 1,5\%$ para a razão de massa, $\Delta\beta = 1,5\%$ para o parâmetro de força, e $\Delta\varepsilon_2 = 1,5\%$ para o coeficiente não-linear.

Tabela 5.5 – Soluções ótimas para os pontos **Pd** e **Pr**

Pontos ótimos	ρ	μ	β	ε_2
Pd	1,1	0,054959	0,09	0,0091724
Pr	1,1	0,054458	0,09	0,010462

As análises das Figuras 5.19 e 5.20 a seguir mostram que as soluções robustas são mais estáveis que as soluções determinísticas no que diz respeito às incertezas introduzidas, o que demonstra que as soluções ótimas são bastante estáveis (vulnerabilidade mínima), levando-se em conta as pequenas perturbações introduzidas.

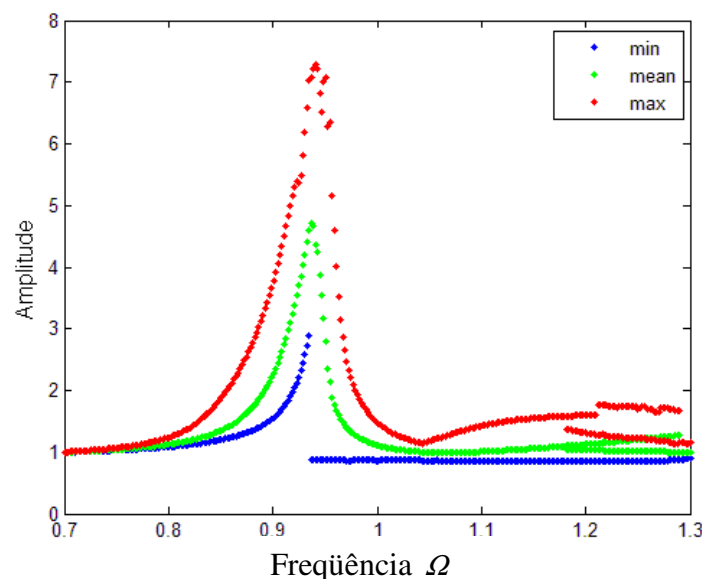


Figura 5.19 – Envelopes das funções resposta em frequência determinísticas.

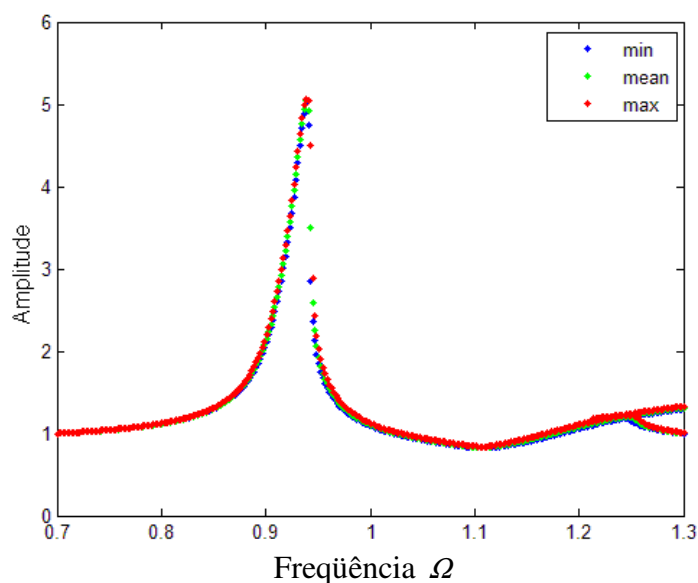


Figura 5.20 – Envelopes das funções resposta em frequência robustas.

A seguir, tem-se na Fig. (5.21a) a comparação entre o projeto inicial e o ótimo determinístico encontrado como acima e na outra figura (5.21b) a resposta inicial é comparada com o ótimo robusto também encontrado acima.

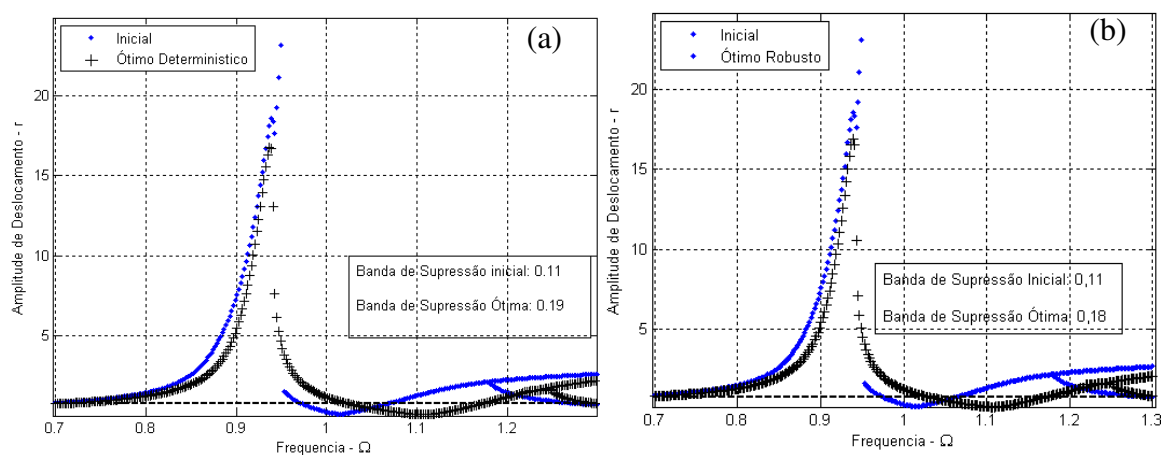


Figura 5.21: Resposta em Frequência: otimização determinística (a), otimização robusta (b)

Como verificado acima, nota-se que a otimização determinística fornece melhores resultados, mas, do ponto do vista de projeto, a otimização robusta é mais indicada, pois é menos vulnerável a influências externas.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

6.1. Conclusões Gerais

Este trabalho procurou inicialmente apresentar uma síntese dos aspectos fundamentais que envolvem os sistemas não lineares, servindo de embasamento para a seqüência da pesquisa, esta dedicada aos absorvedores dinâmicos de vibração não lineares.

Na parte que se refere à revisão bibliográfica, procurou-se mostrar alguns sistemas não lineares bem como vários tipos de não linearidades que podem estar presentes nestes sistemas, sejam elas ligadas à geometria, às características do material constitutivo do sistema, ou ainda inerentes à estrutura considerada. Ainda buscando exemplificar o comportamento de sistemas contendo não linearidades, foram estudados outros exemplos de não linearidades bastante comuns, conforme a literatura sobre o assunto. Assim, primeiramente foi mostrado um sistema livre, composto de um pêndulo com suporte oscilante que possui características não lineares. A partir deste exemplo, com o auxílio do chamado plano de fases, foi possível apresentar os vários conceitos básicos envolvendo os fenômenos não lineares, inclusive o conceito de estabilidade. Em seguida, também com a finalidade de explorar conceitos básicos, mostrou-se um problema de vibração forçada, que foi analisado tanto para o caso não amortecido quanto para o caso onde se tem amortecimento. Este mesmo exemplo foi também utilizado para ilustrar o chamado fenômeno do salto (*Jump Phenomenon*) presente na resposta em frequência dos sistemas não lineares.

Posteriormente (Capítulo III), fez-se uma revisão dos absorvedores dinâmicos de vibração para o caso clássico (linear), tanto para o sistema sem amortecimento, quanto para o caso amortecido. Foram apresentadas as equações do movimento destes sistemas, bem como suas FRFs. Este caso clássico foi mostrado como base para o estudo dos absorvedores dinâmicos de vibração não lineares a serem estudados posteriormente. Um aspecto importante a ser lembrado aqui é que os absorvedores dinâmicos de vibração

clássicos, embora muito eficientes e largamente utilizados enquanto sistemas passivos para atenuação de vibração, possuem uma limitação intrínseca à sua dinâmica, ou seja, precisam estar convenientemente sintonizados numa dada frequência. Fora desta, sua eficiência se deteriora rapidamente.

O estudo avançou no Capítulo IV, onde foi introduzido o absorvedor dinâmico de vibração não linear, que foi estudado segundo duas vertentes. Na primeira, dedicou-se a um estudo de um absorvedor dinâmico de vibração não linear não amortecido, com a mola do absorvedor (sistema secundário) apresentando características não lineares do tipo “*senh*”. Nesse caso, foi estudado o comportamento das não linearidades associadas a esta mola, para, em seguida, se resolver as equações básicas que regem o comportamento dinâmico de absorvedores dinâmicos de vibrações não-lineares não amortecidos. Com a finalidade de diversificar as ferramentas matemáticas disponíveis para tratar os sistemas não lineares, foram usadas primeiramente as funções de Bessel, para resolver as equações do movimento e encontrar a resposta no domínio da frequência. Posteriormente, encontrou-se a resposta para o mesmo sistema no domínio do tempo, utilizando-se do método da expansão, que por sua vez é um método de perturbação, tendo este fornecido bom resultado quando comparado com aquele proveniente de uma solução numérica de Runge-Kutta. Conclui-se, analisando as respostas obtidas no domínio da frequência, que as funções de Bessel se mostraram eficientes na resolução das equações do movimento do ADV não linear, bastando para isto uma expansão do termo não linear apenas até a terceira ordem. Observou-se também que o efeito da não linearidade pode ser muito interessante quanto à diminuição da amplitude de vibração do sistema, apesar de que uma não linearidade muito elevada também pode causar efeitos indesejados, ou seja, aparecem várias regiões com instabilidades na curva de resposta.

Procurando se aproximar mais de uma situação real, considerou-se também um absorvedor contendo amortecimento, este introduzido na mola que liga a base à massa principal, na mola que une as duas massas, ou ainda nestas duas molas ao mesmo tempo. Foram apresentadas as equações do movimento que representam o comportamento dinâmico deste sistema. Estas foram resolvidas analiticamente, utilizando outro método de perturbação conhecido como Método da Média, que se mostrou bastante eficiente na resolução do sistema dinâmico não linear. A partir desse ponto, chegou-se a um sistema de equações algébricas não lineares que, por sua vez, foi resolvido numericamente utilizando o “SQP” (programação quadrática seqüencial) que é uma técnica clássica de otimização. Diversas configurações foram analisadas de modo a se ter uma melhor compreensão do

sistema. Em assim sendo, foi visto que a magnitude da não linearidade associada à rigidez do sistema (mola do absorvedor), também neste caso, pode ser bastante interessante, pois, por si só, faz com que a amplitude de vibração diminua consideravelmente, além de promover um aumento satisfatório da banda de supressão. Porém, como mencionado anteriormente, tem-se que atentar para a magnitude da não linearidade empregada, pois ao mesmo tempo em que traz resultados positivos ao se considerar sua resposta dinâmica, podem aparecer instabilidades indesejadas. Evidenciou-se, então, a necessidade de se otimizar o coeficiente de não linearidade, de forma a se obter a melhor solução possível para o sistema.

Finalmente, no quinto capítulo, buscou-se aperfeiçoar as técnicas de projeto de sistemas contendo absorvedores dinâmicos de vibração não lineares. Para tanto, foram utilizadas técnicas de projeto ótimo, tanto para o ADV não linear não amortecido quanto para o caso amortecido. Para o caso sem amortecimento, a finalidade do projeto ótimo foi a de fazer aumentar a banda de supressão da resposta da massa principal do sistema. Com tal intuito, foram utilizados os algoritmos genéticos clássicos, utilizando como variáveis de projeto, o coeficiente de não linearidade, o parâmetro de rigidez do absorvedor e a massa do absorvedor. Com isso obtiveram-se resultados plenamente satisfatórios, ou seja, conseguiu-se um aumento considerável na banda de supressão da resposta em frequência da massa principal. Antes de empregar os algoritmos genéticos, também foram feitos vários testes com técnicas de otimização clássica, que não deram bons resultados, visto que resultaram convergências prematuras para mínimos locais.

Para tratar o ADV não linear amortecido, foi construído um projeto robusto multi-objetivo utilizando métodos probabilísticos, como a simulação de Monte Carlo (MC), e o método do Hiper-Cubo-Latino (HCL). Foi então possível concluir que as duas abordagens são compatíveis, levando-se em conta que, ao fazer as tiragens pelo método de Monte Carlo, têm-se melhores resultados, porém, ao custo de um número de tiragem muito grande. Já ao se utilizar o Hiper-Cubo-Latino, pode-se conseguir bons resultados com um número menor de ensaios, o que leva imediatamente a um menor custo computacional. Buscou-se neste projeto ótimo o aumento da banda de supressão da resposta em frequência da massa principal e, simultaneamente, minimizar a amplitude de vibração da massa primária do sistema, ou seja, foi necessário implementar uma abordagem multiobjetivo para o problema de otimização. Assim, para resolver o problema de otimização multiobjetivo, foi empregada a técnica conhecida como NSGA, derivada dos algoritmos genéticos, e que se serve do conceito de dominância de Pareto. Para a escolha correta das variáveis de projeto que

participaram do processo de otimização, fez-se uma análise de sensibilidade de todos os parâmetros do sistema e, com isso, verificou-se quais deles mais influenciavam na resposta do sistema. A intenção foi a de minimizar os custos de projeto pela escolha dos parâmetros os mais sensíveis, à vista dos objetivos procurados. A análise de sensibilidade foi realizada utilizando diferenças finitas, já que não se dispunha da solução analítica do problema. A técnica das diferenças finitas funcionou adequadamente, além de ser de fácil implementação. Assim, utilizando os resultados obtidos através da análise de sensibilidade, selecionaram-se as quatro variáveis de projeto que mais influenciavam a amplitude de vibração da massa principal e a banda de supressão da resposta em frequência, sendo tais variáveis utilizadas posteriormente no processo de otimização. Portanto, servindo-se das variáveis de projeto “mais sensíveis” foi possível otimizar o projeto do sistema com absorvedor de vibração não linear, sendo obtidas as soluções ótimas que maximizam a banda de supressão da curva de resposta e, ao mesmo tempo, minimizam a amplitude de vibração da massa principal do sistema. Fez-se então o processo de otimização determinística e robusta multi-objetivo, a fim de comparar esses dois resultados. No processo de otimização multi-objetivo, obtiveram-se soluções bastante satisfatórias no que diz respeito aos resultados esperados. A geração das amostras foi feita utilizando a Simulação de Monte Carlo que também é de fácil implementação e que exhibe boa convergência, desde que se tenha um número de amostras relativamente grande. O problema deste tipo de simulação é o custo computacional elevado, necessitando então de um computador de bom desempenho. O tempo de convergência é aceitável. No caso da otimização robusta, introduziu-se incertezas nas variáveis de projeto e na função objetivo. Estas incertezas têm como objetivo simular situações reais de projeto, onde os valores nominais dos parâmetros do sistema não são realizados exatamente conforme desejado. Foram então mostrados os bons resultados do ponto de vista do projeto ótimo robusto, conforme ilustrado numericamente na forma gráfica, onde se comparou a otimização robusta com a determinística. Foi constatado que a otimização determinística, como esperado, apresenta melhores resultados que a otimização robusta, pois opera com os valores nominais dos parâmetros ótimos do sistema. Porém, a otimização robusta é menos vulnerável a influências externas, sendo recomendada em situações reais de projetos de engenharia.

Finalizando, as principais contribuições deste trabalho podem ser assim resumidas:

- Foi elaborada uma revisão didática da literatura sobre a teoria não linear básica, visto que, mesmo com o crescente número de pesquisadores trabalhando com este tipo de teoria, ainda se tem dificuldade quando se

investiga temas envolvendo vibrações não lineares. Deve-se ainda considerar que o presente trabalho é dos primeiros realizados pelo Grupo de Dinâmica da FEMEC/UFU na área de sistemas não lineares.

- Foi desenvolvido um estudo sistemático sobre os absorvedores dinâmicos de vibração com características não lineares (com rigidez não linear), tanto no caso amortecido quanto no caso sem amortecimento, pensando em estender este estudo para estruturas mais complexas. Assim sendo, a análise não linear empreendida foi capaz de melhor evidenciar os fenômenos envolvidos.
- Foram empregados alguns dos métodos de perturbação indicados pela literatura e, também, o método das funções de Bessel na resolução das equações do movimento dos absorvedores dinâmicos não lineares, testando-as para este tipo de sistema dinâmico. Neste sentido, estudos anteriores foram complementados quanto ao estudo do comportamento dinâmico destes sistemas, além de ter sido acrescentada a otimização de seus parâmetros, aspecto este pouco explorado por contribuições anteriores.
- Foi feito um estudo dos fenômenos não lineares do ponto de vista de sua contribuição para a atenuação de vibração e para o aumento da banda de supressão da massa principal quando se inclui um absorvedor dinâmico de vibração não linear. Com tal propósito, as dificuldades de projeto em decorrência das instabilidades que os absorvedores não lineares podem introduzir na curva de resposta em frequência foram evidenciadas.
- Foram desenvolvidas técnicas para se chegar ao projeto ótimo dos sistemas estudados contendo absorvedor de vibração não linear. Primeiramente, os algoritmos genéticos clássicos foram utilizados para encontrar os parâmetros ótimos do absorvedor sem amortecimento e, posteriormente, foi empregada uma técnica multiobjetivo de robustecimento do projeto dedicada a um absorvedor dinâmico de vibração não linear onde, dentre os objetivos, apresentavam-se o de minimizar a amplitude de vibração da massa principal do sistema e o de aumentar sua banda de supressão, simultaneamente. Os resultados foram então comparados com o caso determinístico. Para tanto, serviu-se da simulação de Monte-Carlo e, naquele momento, foi ainda aplicada uma técnica de análise de sensibilidade por diferenças finitas para a

escolha das variáveis de projeto a serem utilizadas no processo de otimização que foi feita através de uma técnica variante dos algoritmos genéticos.

6.2. Perspectivas para Trabalhos Futuros

Como sugestões para trabalhos futuros, a experiência adquirida com o trabalho empreendido, permite apontar para as seguintes possibilidades:

- Estudar absorvedores dinâmicos de vibração, tendo em vista uma análise detalhada das condições de estabilidade do sistema resultante, com a finalidade de minimizar os riscos de se ter regiões instáveis na curva de resposta em frequência, especialmente para o projeto ótimo.
- Generalizar o estudo realizado pela incorporação de um conjunto de absorvedores de vibração não lineares a uma dada estrutura, pensando na atenuação de vibração em várias faixas de frequência ao longo do espectro de interesse.
- Complementar este estudo preliminar enfocando outros tipos de não linearidades, por exemplo, introduzindo-as nos amortecedores.
- Buscar uma validação experimental da eficiência dos absorvedores dinâmicos de vibração não lineares. Para tanto, uma abordagem que parece promissora é a introdução de não linearidades usando técnicas de controle.

CAPÍTULO VII

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BENNETT, J. A., LUST, R. V., , Conservative Methods for Structural Optimization, **AIAA Journal**, Vol. 28, pp. 1491-1496, ago.,1990

BIELAJEW, A., F. 2001, **Fundamentals of the Monte Carlo Method for neutral and charged particle transport**, The University of Michigan Department of Nuclear Engineering and Radiological Sciences 2927 Cooley, Building (North Campus),Disponível em “[http://www- personal.umich.edu/~bielajew/MCBook/book.pdf](http://www-personal.umich.edu/~bielajew/MCBook/book.pdf)”

BORGES, R.A, **Técnicas Inteligentes de Otimização**, 2003, Dissertação de Mestrado 135f, Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica.

BORGES, R.A; STEFFEN JR. V, **Estudo e Comparação Entre Técnicas Inteligentes de Otimização Para o Projeto de Placas Com Atuadores Piezoelétricos**, In: II CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 2004, Belém - Pará- Brasil, anais em CD-ROM.

BORGES, R. A. , Marques, R. F., Steffen Jr. Valder, Estudo de um Absorvedor Dinâmico de Vibração Não-Linear. , XXVI IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING – CILAMCE, 2005, Guarapará – ES, Brasil

BORGES, R.A., STEFFEN JR. V., Optimization of a nonlinear dynamic vibration absorber, Proceedings of 19th INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING (COBEM), 2007, Brasília – DF - Brasil.

BORGES, R.A., LIMA, A. M., G., STEFFEN JR. V., Modeling Strategy and Robust Optimal Design of a Non-linear Dynamic Vibration Absorber, - In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING OPTIMIZATION, 2008, EngOpt 2008, Rio de Janeiro, Brasil

BRAIBANT, V., DELCROIX, F., OUDSHOORN, A., , Méthodes non-déterministes pour l'analyse et la conception robuste de produits et de procédés : Approche par l'arithmétique des intervalles, In : COLLOQUE IDMME'98, 1998, Compiègne, pp. 137-145.

BOYLE, P., A Monte Carlo Approach, **Journal of Financial Economics**, 1977, pp.323-338

BUTKEWITSCH, S., BORGES, R. A., STEFFEN JR. V, 'A Comparison Between Gradient Based and Intelligent Optimization Techniques for the Design of an Automotive Component, II CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA - II CONEM, 2002, João Pessoa - PB - Brasil.

CASTRO, R.E, 1991, **Otimização de Estruturas de Multi-Objetivos, via Algoritmos Genéticos**, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.

CHARLES DARWIN, M.A., **On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life**, John Murray, London, Ibemarle Street., 1959.

COLEMAN, T.F. AND Y. LI, An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds, **SIAM Journal on Optimization**, Vol. 6, pp. 418-445, 1996.

CUNHA JR, S. S., **Estudo Teórico e Numérico de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações**, 1999, Dissertação de Mestrado, 114f, Universidade Federal de Uberlândia.

CUNHA JR., S. S., 2004, Avaliação Numérica e Experimental de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Ativos e Adaptativos. 2004., Tese de Doutorado 139 f, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, M.G.

DAS, I., And J. E. Dennis, Normal-boundary Intersection : A new method for generating the Pareto surface in multicriteria optimisation problems, **SIAM J. Optimization**,. pp 631-657. 1998.

DAVIES, L., **Genetic Algorithms and Simulated Annealing**, Morgan Kaufmann Publishers, 1997, San Mateo, CA., 412pp.

DEN HARTOG, J. P., **Mechanical Vibrations**, 4th ed. McGraw-Hill, New York, 1985, 436pp

DESSOMBZ, O., THOUVEREZ, F., LAÏNE, J. P., JEZEQUEL, L., Analyse Dynamique de Structures Comportant des Paramètres Incertains, **Journal Sound and Vibration**, Vol. 239(5), pp.949-968, 2001.

DIMARAGONAS, A., **Vibration for Engineers**, ed. 2nd, Prentice Hall, 1996, 672pp.

PHAM, D.T., D. KARABOGA, D, **Intelligent Optimization Techniques**, Springer, ed. 2, 2000, 302pp

ESCHENAUER, J., KOSKI, J. AND OSYCZKA, A., **Multicriteria design optimization**, Springer-Verlag, 1990, 504pp.

FERRARA N. F. E PRADO, C.P.C, **Caos, uma Introdução**, 2 ed. Edgard Blucher LTDA, 1994, 318pp

FONSECA, C. M., FLEMING, P. J., Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization. In: Proceedings of the **Fifth International Conference on Genetic Algorithms**, pp. 416-423, 1993

FLORIAN, A., An Efficient Sampling Scheme: Updates Latin Hypercube Sampling, **Journal Probabilistic Engineering Mechanics**, 1992, Vol. 7, pp. 123-130.

FRAHM, H., "Device for Damping Vibrations of Bodies", 1911, US Patent 989, 958.

GLOVER, F., Tabu search Part I", **ORSA Journal on Computing**, 1989, vol.1, N03, pp. 190-206.

GLOVER, F., 1990, Tabu search Part II", **ORSA Journal on Computing**, 1990, v. 2, pp 4-32.

GOLDBERG, D. E., **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning**, Adison-Wesley, 1st USA, 1989, 372pp.

HAGEDORN, P., Non-Linear Oscillations, Clarendon Press, 1988, .

HAMMERLEY, J.M.; HANDSCOMB, D.C. **Monte Carlo methods**. Wiley press, 1964, 178pp.

HANSEN, P., The Steepest Ascent, Mildest Descent Heuristic for Combinatorial Programming, **Congress on Numerical Methods in Combinatorial Optimization**, 1986, Capri, Italy.

HAUG, E. J., CHOI, K. K., KOMKOV, V. **Design Sensitivity Analysis of Structural Systems**, Academic Press, 1986.

HUANG, S. C., INMAN, D. J., AUSTIN, E. M., Some Design Considerations for Active and Passive Constrained Layer Damping Treatments, **Smart Materials & Structures**, 1996, Vol. 5(3), pp. 301-313.

HAUPT, R. L. & HAUPT, S. E., 2004, **Practical Genetic Algorithms**, Second Edition, Wiley-Interscience, New York, USA.

HOLLAND, J.H., Adaptation in natural and artificial systems, **MIT Press, Illinois Genetic Algorithm Laboratory. IlliGAL, University of Illinois at Urbana-Champaign**, 1975, pp. 11-147.

H.J. RICE, Combinational instability of the non-linear vibration absorber, **Journal of Sound and Vibration** 108 (4), 1986, pp. 526–532.

HORN, J., NAFPLIOTIS, N., Multiobjective Optimization Using the Niche Pareto Genetic Algorithm. IlliGAL Report No. 93005, **Illinois Genetic Algorithms Laboratory, University of Illinois, Urbana, Champaign**, Jul. 1993.

HUNT, J. B., NISSEN, J. C., The Broadband Dynamic Vibration Absorber”, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 83(4), 1982; pp. 573-578

JORDANOV, L., N., CHESHANKOV, B., L., Optimal Design of Linear and Non-linear Dynamic Vibration Absorbers, **Journal of Sound and Vibration** , 1988, pp. 157-170

KORONEV, B., G., REZNIKOV, L. M. **Dynamic Vibration Absorbers: Theory and Technical Applications**, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, UK, 1993. 296 pp.,

KOTINDA G. Y., **Absorvedor Dinâmico de Vibração Tipo Lâmina Vibrante**, 2005,

Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia

LEE, K. H. AND PARK, G. J., Robust optimization considering tolerance of design variables”, **Journal of Computer and Structures**, 2001, v.**79**, 77-86.

LIMA, A. M. G., BOUHADDI, N., RADE, D. A, Multicriteria optimization of viscoelastic systems combining evolutionary algorithms, robust condensation and metamodelling, Proc. **15th International Conference on Engineering Computational Technology (CST)**, .., 2006, Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

LIMA, A. M. G., **Modelling and Robust Optimisation of Viscoelastic Damping in Mechanical Systems**. Doctorate Thesis, University of Franche-Comté (UFC), Besançon in France, and Federal University of Uberlândia (UFU), Uberlândia in Brazil, 2007.

MARQUES, R. F., A., 1998, **Estudo Teórico e Numérico de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Ativos e Adaptativos**. 120 f., Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, M.G.

MEIROVITCH, L., **Elements of Vibration Analysis**, McGraw-Hill, Inc., U.S, 1975.

METROPOLIS, N.; ULAM, S. The Monte Carlo method, **Journal of the American Statistical Association**, 1949, vol. 44.

METROPOLIS, N; ROSENBLUTH, M.; ROSENBLUTH, A.; TELLER, E., 'Equation of state calculations by fast computing machines **J. Chem. Phys**, 1953. V. 21, pp.1087-1092.

MONTEIRO, L. H. A; **Sistemas Dinâmicos**, Editora: Livraria da Física, 2002, 1st ed. 527pp.

MORSE, J. N., Reducing the size of the Nondominated set: Pruning by Clustering, **Computers & Operations Research**, 1980, Vol. 7, pp. 55-66.

MURTHY, D., V., HAFTKA, R., T., Derivatives of Eigenvalues and Engivectors of a General Complex Matrix, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1988, Vol. 26, pp. 293-311.

NATSIAVAS, S. Steady state oscillations and stability of non-linear dynamic vibration absorbers, **Journal of Sound and Vibration**, 1992 156 (2) 227–245.

NAYFEH, A. H., **Perturbation Methods**, John Wiley & Sons, Inc., 2000.

NISSEN, J. C., POPP, K., SCHMALHORST, B , Optimization of a Nonlinear Dynamic Vibration Absorber, **Journal of Sound and Vibration**, .1985; vol. 99(1), pp. 149-154

OEINI, S. S., CHIN, C. M., NAYFEH, A. H., A Review of Development and Implementation of an Active Nonlinear Vibration Absorber, **Archive of Applied Mechanics**, 1999a, vol. 69, pp. 585-620. (a)

OEINI, S. S., CHIN, C. M., NAYFEH, A. H., Dynamics of cubic nonlinear Vibration Absorber, **Nonlinear Dynamics**, 1999b, vol. 20, pp. 283-295. (b)

PAI, P. F. SCHULZ, M. J., A Refined Nonlinear Vibration Absorber, **International Journal Of Mechanical Sciences**, 1998 , Vol. 42, pp. 537-560(a).

PAPADRAKAKIS, M. ET KOTSOPULOS, A., Parallel Solution Methods for Stochastic Finite Element Analysis Using Monte Carlo Simulation, **Computers Methods Applied Mechanics Engineering**, 1999, Vol. 168. pp. 305-320.

PIPES, L. A., Analysis of a Nonlinear Vibration Absorber, **Journal of applied Mechanics**, 1953, Vol. 20, pp. 515-518

RADE, D. A. E STEFFEN JR., Optimization of Dynamic Absorbers Over a Frequency Band, **17th International Modal Analysis Conference**, 1999, Orlando, Florida, U.S., pp. 188-193.

RADE, D. A., STEFFEN JR. V., Optimisation of Dynamic Vibration Absorbers over a Frequency Band, **Mechanical Systems and Signal Processing**, 2000, 14(5), pp. 679-690.

ROSENMAN, M. A. AND GERO, J. S., Reducing the Pareto Optimal Set in Multicriteria Optimization (With application to Pareto Optimal Dynamic Programming), **Engineering Optimization**, 1985, Vol. 8, pp. 189-206.

SAVI, M.A., **Dinâmica Não-linear e Caos**; Ed. e-Papers, 2006

SCHAFFER, J. D., **Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms**. Ph.D. dissertation, 1984, Vanderbilt University.

SHAW, J. SHAW, S., W., HADDOW, A., G., On the response of the non-linear vibration absorber, **International Journal of Non-linear Mechanics**, 1989, ed. 24, 281-293.

SRIVINAS N, DEB K., **Multiobjective using nondominated sorting in Genetic Algorithms, Technical Report, Department of Mechanical Engineering, Institute of Technology**, India, 1993.

SRINIVAS, N., DEB, K., Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms, **Evolutionary Computation**, 1994, 2(3): pp. 221-248.

STEFFEN JR, V. AND RADE, D.A.; Dynamic Vibration Absorber; **Encyclopedia of Vibration**, Academic Press, 2001, ISBN 0-12-227085-1; pp. 9-26.

STEUER, R., E., Multiple Criteria Optimization: Probability & Mathematical Statistics, John Wiley & Sons Inc, 1986, 568pp.

THOMSEN, J.J., **Vibrations and Stability**, Springer-Verlag, 2nd Edition, 2003, 403pp.

THOMSON, W. T., DAHLEH, M. D., 1996, **Theory of Vibration with Applications**, 5th edition, Prentice Hall, 1996, 534pp.

TSE, F. S., MORSE, I. E., HINKLE, R. T, **Mechanical Vibrations: Teory and Aplications**, Allyn and Bacon, Inc., 2nd Eition, 1978.

VANDERPLAATS, G.N., **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design**, R&D Inc., Colorado Springs, CO, USA, 1999, pp.417.

VIANA, F. A. C., **Amortecimento de Vibrações Usando Pastilhas Piezelétricas e Circuitos Shunt Ressonantes**, 2005. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia.

VIANA, F.A.C.; VENTER, G.; BALABANOV, V.; On how to Implement an Affordable Optimal Latin Hypercube; **19th International Congress of Mechanical Engineering – COBEM 2007** (in CD); Brasília – Brazil, 2007, 05-09 November.

VIANA, F.A.C., **Surrogate Modeling Techniques and Heuristic Optimization Methods Applied to Design and Identification Problems**, 2008; Tese de Doutorado; UFU

ZITZLER, E., THIELE, L., Multiobjective Evolutionary Algorithms: A Comparative Case Study and Strength Pareto Approach, **IEEE Transaction on evolutionary Computation**, 1999, Vol 3, pp 257-271.

ANEXO A

REVISÃO DO MÉTODO DE DUFFING

O pêndulo matemático apresentado na Fig. 1 é bastante utilizado para se testar métodos dedicados ao estudo das oscilações não-lineares. Nesta Figura, m é a massa, l é o comprimento, g é a aceleração da gravidade e o ângulo θ representa o afastamento da posição de equilíbrio (vertical).

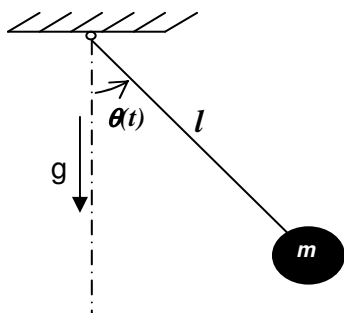


Fig.1: Ilustração de um pêndulo matemático

No caso onde não se considera amortecimento, pode-se escrever a equação diferencial que rege as oscilações livres deste pêndulo como:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\text{sen}\theta = 0 \quad (\text{A-1})$$

ou

$$ml\ddot{\theta} + mg\text{sen}\theta = 0 \quad (\text{A-2})$$

que é obtida simplesmente dividindo toda a eq.(A-1) por l . Então, dividindo a eq.(2) por ml , obtém-se finalmente:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \text{sen}\theta = 0 \quad (\text{A-3})$$

onde $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$.

Para pequenos valores de θ é comum linearizar este problema utilizando o primeiro termo da série de Taylor, ou seja, $\text{sen}\theta \approx \theta$. Assim, a equação diferencial torna-se linear e pode ser resolvida da maneira usual.

Para uma melhor aproximação, considera-se na expansão os dois primeiros termos da série de Taylor, ou seja, $\text{sen}\theta \approx \theta - \theta^3/6$. Neste caso, a eq.(A-3) pode ser escrita como:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \frac{\omega_0^2}{6} \theta^3 = 0 \quad (\text{A-4})$$

O método de Duffing pode ser utilizada para uma análise mais completa do problema. Assim, a eq.(A-4) é reescrita como:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \mu \theta^3 = 0 \quad (\text{A-5})$$

onde μ é um pequeno parâmetro. Na seqüência, uma alternativa é utilizar o método das perturbações, onde se faz uma expansão polinomial de θ , da forma:

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \mu \theta_1(t) + \mu^2 \theta_2(t) + \dots + \mu^m \theta_m(t) + \dots \quad (\text{A-6})$$

Esta expansão é agora substituída na eq.(A-5), sendo que a equação resultante é organizada em termos das potências de μ , resultando n equações diferenciais lineares que poderão ser resolvidas analiticamente de maneira simples, permitindo obter as funções $\theta_i(t)$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Daí pode-se determinar a solução aproximada da equação não linear original.

Considerando agora o caso onde se tem oscilações forçadas não amortecidas, pode-se escrever a eq.(A-5) como:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta + \mu \theta^3 = P \text{sen}(\Omega t) \quad (\text{A-7})$$

sendo $\omega_0^2 = g/l$, $\mu = -g/6l$, e $P = F/ml$.

Neste caso, utiliza-se o método de Duffing para visualizar os fenômenos mais importantes. Assim, reescreve-se a eq.(A-7) da seguinte maneira:

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta - \mu \theta^3 + P \text{sen}(\Omega t) \quad (\text{A-8})$$

E, para uma primeira aproximação, a solução é dada por:

$$\theta_1 = A \text{sen}(\Omega t), \quad A = \text{constante} \quad (\text{A-9})$$

Substituindo a eq. (A-9) no lado direito da eq. (A-8) e chamando a expressão resultante de θ_2 , obtém-se:

$$\ddot{\theta}_2 = \left(P - \omega_0^2 A - \frac{3}{4} \mu A^3 \right) \text{sen}(\Omega t) + \frac{\mu A^3}{4} \text{sen}(3\Omega t) \quad (\text{A-10})$$

onde foi utilizada a relação trigonométrica $\text{sen}^3(\Omega t) = (1/4)(3\text{sen}(\Omega t) - \text{sen}(3\Omega t))$.

Após dupla integração da eq.(A-10) e considerando a solução como periódica, tem-se:

$$\theta_2 = \frac{1}{\Omega^2} \left[\omega_0^2 + \frac{3}{4} \mu A^2 - \frac{P}{A} \right] A \text{sen}(\Omega t) - \frac{1}{36} \frac{\mu A^3}{\Omega^2} \text{sen}(3\Omega t) \quad (\text{A-11})$$

Para uma maior precisão da solução, pode-se continuar o processo iterativo substituindo θ_2 mostrado acima no lado direito da eq.(A-8) e fazendo nova integração. Porém, neste caso, o primeiro passo já fornece uma aproximação satisfatória para a solução do problema.

Para se determinar a constante A , através do método de Duffing, se iguala a contribuição da amplitude com frequência Ω nas equações de θ_1 e θ_2 , ou seja, nas equações (A-9) e (A-11), respectivamente. Assim:

$$A = \frac{1}{\Omega^2} \left[\omega_0^2 + \frac{3}{4} \mu A^2 - \frac{P}{A} \right] A \quad (\text{A-12})$$

resultando a seguinte relação entre frequência e amplitude:

$$\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{P}{A\omega_0^2} + \frac{3}{4} \frac{\mu A^2}{\omega_0^2} \quad (\text{A-13})$$

Como mencionado anteriormente, pode-se repetir o processo iterativo quantas vezes forem necessárias.

Maiores informações sobre esta técnica podem ser encontradas em (HAGEDORN, 1988) e (THOMSEN, 2003).