



**Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática**

Bacharelado em Matemática

**TEORIA MODERNA DE CARTEIRAS - UMA
VISÃO CONCEITUAL COM APLICAÇÕES**

Gisele Andrade Lemos

**Uberlândia-MG
2018**

Gisele Andrade Lemos

TEORIA MODERNA DE CARTEIRAS - UMA VISÃO CONCEITUAL COM APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientador: Flávio Luiz de Moraes Barboza

**Uberlândia-MG
2018**



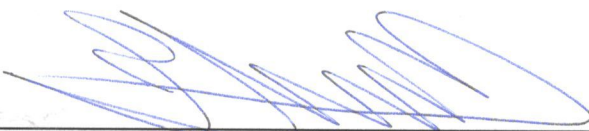
**Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática**

Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática

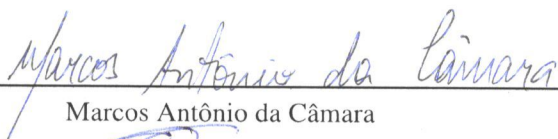
A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Uberlândia, 14 de DEZEMBRO de 2018

BANCA EXAMINADORA



Flávio Luiz de Moraes Barboza



Marcos Antônio da Câmara



Neiton Pereira da Silva

Uberlândia-MG

2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus, pois sem Ele não conseguiria nada, nem estaria aqui.

Agradeço à minha mãe Neuzelina, meu pai Evanilson, meu irmão Jabes e minha irmã Miriã que sempre me apoiaram, compreendendo cada fase de mais essa trajetória nada trivial.

Agradeço aos meus familiares de Uberlândia pelo apoio.

Agradeço à minha avó Diorcela (in memoriam) por todo amor!

Agradeço aos meus colegas de curso, principalmente aos colegas do PET, que tenho certeza que foi Deus quem os colocou em meu caminho. Com eles aprendi a querer ser uma pessoa melhor.

Agradeço aos tutores do PET Professor Marcos Câmara e Professora Elisa que sempre acreditam e motivam seus alunos.

Agradeço a todos os professores que me orientaram durante a graduação, de modo especial ao orientador deste trabalho Professor Flávio, por toda a dedicação, paciência e ensinamentos.

Agradeço ao comitê científico do X ENAPETMAT (Encontro Nacional de PETs Matemática), ocorrido na UFU em 2019, pela atribuição de Menção Honrosa na categoria de Matemática aplicada à parte deste trabalho de conclusão de curso apresentada por mim, em formato pôster, no evento.

RESUMO

Uma carteira é um conjunto de ativos financeiros formada para atender a um determinado objetivo de investimento (lucro). Existem métodos que auxiliam na formação de carteiras, de acordo com cada intuito e aversão ao risco. Uma das técnicas disponíveis na literatura é baseada na Teoria Moderna de Carteiras, cujo desenvolvimento é atribuído a um economista chamado Harry Markowitz. Tal Teoria utiliza duas medidas básicas (retorno e risco) estatísticas e uma série de premissas para desenvolver um modelo otimizado de carteira, com o objetivo de diversificá-la e simultaneamente tentar atingir o menor nível de risco em relação à todos os ativos da carteira. Assim, ao aplicar a Teoria de Markowitz a um portfólio, são apresentadas proporções relativas a cada ativo, ou seja, qual a quantidade de cada um deles estará presente na carteira considerando o total a ser investido. Tais proporções são as indicadas para que o investimento se concretize com o menor risco diante das condições estabelecidas previamente. Nesse trabalho será apresentada a teoria supracitada, desde os conceitos e resultados essenciais, no Capítulo 2, aprofundando, no Capítulo 3, na Teoria de Carteiras em si com demonstrações dos resultados para, inicialmente, dois ativos de risco compondo a carteira e generalizando para n ativos. Ainda no Capítulo 3 será apresentada a definição de Fronteira Eficiente e como obtê-la. O Capítulo 4 apresentará uma aplicação da Teoria Moderna de Carteiras no mercado de ações brasileiro, detalhando todo o processo de obtenção da carteira e da planilha de apuração dos resultados. O Capítulo 5 discorrerá sobre os resultados apresentados no capítulo anterior e o Capítulo 6 apresentará as conclusões do trabalho e possibilidades de estudos futuros visando a melhora da aplicação desenvolvida.

Palavras-chave: Portfólio, Investimento, Risco .

ABSTRACT

A portfolio is a set of financial assets formed to meet a particular investment objective (profit). There are methods that assist in the formation of portfolios, according to each intention and risk aversion. One of the techniques available in the literature is the called Modern Portfolio Theory, whose development is attributed to an economist named Harry Markowitz. This theory uses two basic measures statistics (return and risk) and a series of assumptions to develop an optimized portfolio model, with the objective of diversifying it and simultaneously attempting to achieve the lowest level of risk in relation to all the assets of potfolio. Thus, when applying the Markowitz theory to a portfolio, proportions are presented relative to each asset, that is, how much each of them will be present in the portfolio considering the total to be invested. Such proportions are those indicated so that the investment is realized with the lowest risk faced with the conditions previously established. In this work, the aforementioned theory will be presented, from the essential concepts and results in Chapter 2, deepening, in Chapter 3, in the Portfolio Theory itself with demonstrations of the results for, initially, two risk assets composing the Portfolio and generalizing to n assets. Also in Chapter 3 will be presented the definition of efficient frontier and how to obtain it. Chapter 4 will present an application of the modern portfolio theory in the Brazilian stock market, detailing the entire process of obtaining the portfolio and the calculation of results spreadsheet. Chapter 5 will discuss the results presented in the previous chapter and Chapter 6 will present the conclusions of the work and possibilities of future studies aiming at improving the application developed.

Keywords: Portfolio, Investment, Risk.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	I
1 Introdução	1
2 Conceitos Essenciais	3
2.0.1 Determinação do Valor Médio	4
2.0.2 Determinação da Dispersão	6
3 Delineamento de Carteira Eficiente	9
3.0.3 Carteiras de Investimento	9
3.0.4 Análise da diversificação do risco de uma carteira com dois ativos	10
3.0.5 Análise da diversificação do risco de uma carteira com mais de dois ativos de risco	17
3.0.6 Fronteira eficiente	17
3.0.7 Teoria de Markowitz para 3 ativos de risco	18
3.0.8 Teoria de Markowitz para n ativos de risco	21
4 Uma aplicação da TMC	23
4.0.9 Metodologia para os investimentos simulados	26
4.0.10 Apuração dos investimentos	34
5 Resultados e discussão	37
6 Conclusões	39
Referências Bibliográficas	41

LISTA DE FIGURAS

3.1	Fronteira Eficiente de Ativos com risco. Fonte: Securato, 1996, p. 192	19
3.2	Fronteira Eficiente no plano Variância x Retorno. Fonte: Securato, 1996, p. 192	19
3.3	Avaliação de retas que passam por $P \in C'$. Fonte: Securato, 1996, p. 193	19
4.1	Dados coletados	24
4.2	Primeiro filtro	24
4.3	Segundo filtro	25
4.4	Terceiro filtro	25
4.5	Carteira obtida	26
4.6	Dados dos ativos durante o ano de 2013	26
4.7	Retorno Esperado e Risco dos ativos com base nos dados de 2013	27
4.8	Cálculos do Retorno Esperado e Risco da Carteira de 2013	27
4.9	Layout do Solver	28
4.10	Composição ótima da carteira gerada pelo Solver	29
4.11	Fronteira Eficiente da carteira de 2013	29
4.12	Carteira ótima de 2014	30
4.13	Fronteira Eficiente da carteira de 2014	30
4.14	Carteira ótima de 2015	31
4.15	Fronteira Eficiente da carteira de 2015	31
4.16	Carteira ótima de 2016	32
4.17	Fronteira Eficiente da carteira de 2016	32
4.18	Carteira ótima de 2017	33
4.19	Fronteira Eficiente da carteira de 2017	33
4.20	Apuração das carteiras de 2014 e 2015	34
4.21	Apuração das carteiras de 2016 e 2017	34
4.22	Apuração da carteira de 2018	35

1. INTRODUÇÃO

No meio dos investimentos, percebe-se uma falta de conhecimento sobre os métodos que auxiliam na formação de carteiras, por meio dos números divulgados pela Bolsa de Valores Brasileira, a B3, sobre a representação popular no âmbito do mercado de capitais e financeiro. Dados disponíveis publicamente mostram que existem aproximadamente 600 mil contas ativas (pessoas físicas), o que representa um número muito pequeno em comparação com o tamanho da população brasileira (B3, 2017).

Em termos de oferta de produtos financeiros, uma carteira composta de diversos ativos parece uma classe de investimento interessante, com algumas características especiais, como liquidez, isto é, a capacidade de transformar um investimento em dinheiro em espécie; retorno (lucro), riscos, impostos, entre outros. Por outro lado, o domínio de estratégias fundamentadas por parte dos investidores ainda é tema de constante debate, pois isso está associado diretamente ao risco que, muitas vezes, geram oscilações inesperadas nos ativos e, por conseguinte, nos seus respectivos derivativos (produtos financeiros atrelado a ativos subjacentes).

Uma maneira de analisar os investimentos é por meio da Teoria Moderna de Carteiras (TMC) que pode ser uma alternativa plausível de explicar de maneira sofisticada - porém de fácil entendimento prático - a composição de um pacote de investimentos. A TMC, criada por Markowitz (1952), fornece um método para analisar o quanto uma determinada carteira (conjunto de ativos - um exemplo imediato seria ações de várias empresas negociadas em bolsa), baseando-se apenas em média e variação dos retornos (lucro/prejuízo percentual entre dois instantes de tempo) desses ativos contidos no portfólio. Um investidor deve ser avesso ao risco, portanto, ele busca uma pequena variação do retorno (ou seja, um pequeno risco) e um alto retorno esperado.

Durante os anos 50, Harry Markowitz, um economista treinado, desenvolveu pioneiramente as teorias que formam a base da Moderna Teoria da Carteira. Outros acadêmicos e especialistas em investimentos contribuíram para a teoria nos anos subsequentes. Tal teoria será apresentada nos tópicos a seguir.

2. CONCEITOS ESSENCIAIS

No dia-a-dia é comum se deparar com inúmeras situações que exigem a tomada de decisões em diversos níveis, umas mais simples como a escolha da roupa para o trabalho e outras mais complexas como a escolha da profissão, por exemplo. Em algumas dessas decisões o conhecimento ou experiência sobre vivências passadas é um fator de grande influência na escolha de qual decisão tomar. Segundo SECURATO (1996), o sensor de previsão de resultados auxilia no processo, já que é embasado nele que as decisões acontecem.

Frente a tantas decisões a serem tomadas diariamente, conceitos como risco, incerteza e expectativa/esperança são comuns à vida de qualquer pessoa.

No mundo dos investimentos, esses conceitos também são utilizados intensamente e são a causa dos estudos de técnicas para auxiliar no processo decisório.

Para Gitman e Joehnk (2005) um investimento é “qualquer instrumento em que os fundos disponíveis podem ser colocados com a expectativa de que gerarão renda”. Essa expectativa pode ser apresentada em números, no que é conhecido no mundo das Finanças como Retorno Esperado. O Retorno Esperado é o que se espera ganhar com um investimento. E depois de apurado, chama-se Retorno o total de ganhos ou prejuízos decorrentes de um investimento durante determinado período de tempo (GITMAN e JOEHNK, 2005). Porém, nem sempre tal expectativa é alcançada pois a maioria dos investimentos vem acoplados a graus de risco. O Risco é o “grau de incerteza associado aos rendimentos de um investimento”, ou seja, é o potencial que o investimento tem de não proporcionar o resultado esperado (GITMAN e JOEHNK, 2005).

Em condições de certeza, o problema de decisão do investidor pode ser caracterizado por um resultado garantido. Porém quando há risco, o resultado de qualquer decisão não é conhecido com absoluta confiança, e os possíveis resultados são geralmente representados por uma função matemática apresentada no subtópico 2.02 desse capítulo.

Em termos de investimentos, as possíveis taxas de retorno de um determinado ativo são representadas por variáveis aleatórias, que são variáveis cujos valores são definidos por processos, como o nome sugere, aleatórios, ao acaso e cujo observador não possui controle sobre as mesmas. A função matemática que associa uma probabilidade de ocorrência a cada possível resultado da variável aleatória, e que satisfaz condições previamente definidas é chamada de Função Distribuição de Probabilidade. A soma das probabilidades de todos os resultados possíveis deve ser igual a 1 (KAZMIER, 1982).

A tabela a seguir apresenta uma distribuição desse tipo. Suponha que um determinado investimento possua três retornos possíveis com chances iguais de acontecerem. Se ocorrer o evento 1, o investidor terá um retorno de 10%; se ocorrer o evento 2, o retorno será de 7% e se ocorrer o evento

3 o retorno será de 5%. Vejamos:

Retorno	Probabilidade	Evento
10	1/3	1
7	1/3	2
5	1/3	3

Tabela 2.1: Exemplo de possibilidades de retornos de um investimento

Geralmente não se delinea todas as possibilidades como apresenta a tabela acima. As possibilidades para ativos reais são suficientemente numerosas para tornar complexa a tarefa de descrição como a tabela apresentada. Além disso, mesmo que o investidor decidisse construir tais tabelas, as imprecisões seriam tão grandes que talvez fosse melhor limitar-se a representar os resultados possíveis em termos de algumas medidas que sintetizam todas as informações. Em geral, apenas duas medidas são necessárias para informar, de forma relevante, sobre uma distribuição de probabilidades: uma que meça o valor médio e outra que meça a dispersão em torno do valor médio. (ELTON e GRUBER, 1995)

2.0.1 DETERMINAÇÃO DO VALOR MÉDIO

Os estatísticos normalmente usam a expressão Valor Esperado, Esperança ou Valor Médio para se referirem à Média, e as notações utilizadas são $E[X]$ ou μ_X .

Definição 1. Sejam x_i o resultado de um evento i e P_i a probabilidade de ocorrência do evento i , então o Valor Esperado é:

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i P_i.$$

Duas propriedades do Valor Esperado serão extremamente úteis nesse estudo e por isso serão apresentadas agora juntamente com mais algumas definições.

Definição 2. Sejam X, Y variáveis aleatórias e $P(x) = P(X = x)$, $P(y) = P(Y = y)$. A função distribuição conjunta de X e Y , denotada por $P(x, y)$ e que indica a probabilidade de ocorrência do evento $\{X = x \text{ e } Y = y\} = \{X = x\} \cap \{Y = y\}$, é dada por:

$$P(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

Definição 3. Sejam X, Y variáveis aleatórias, com valores $x_1, \dots, x_n$ e $y_1, \dots, y_m$, probabilidades $P(x_1), \dots, P(x_n)$ e $P(y_1), \dots, P(y_m)$, respectivamente. X, Y são chamadas variáveis aleatórias independentes se:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j), \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}.$$

Caso pelo menos um par (x_i, y_j) não satisfaça a igualdade acima, as variáveis aleatórias X, Y são chamadas de variáveis aleatórias dependentes.

Definição 4. Sejam X, Y duas variáveis aleatórias. As variáveis aleatórias $X+Y$ e XY são definidas por:

$$(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

$$(XY)(\omega) = X(\omega)Y(\omega).$$

Propriedade 1. Sejam X_i variáveis aleatórias, $i = 1, \dots, n$ com valores $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$, probabilidades $P(x_{i_1}), \dots, P(x_{i_n})$ e $P(x_{i_j}, x_{k_l}) = P(X_i = x_{i_j}, X_k = x_{k_l})$. Então vale;

$$E[X_1 + \dots + X_n] = E[X_1] + \dots + E[X_n].$$

Demonstração. Provemos primeiramente para o caso da soma entre somente duas variáveis aleatórias. Assim, sejam X, Y variáveis aleatórias, com valores $x_1, \dots, x_n$ e $y_1, \dots, y_m$, probabilidades $P(x_1), \dots, P(x_n)$ e $P(y_1), \dots, P(y_m)$, respectivamente e $P(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$.

Temos que:

$$\begin{aligned} E[X + Y] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i + y_j) P(x_i, y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i P(x_i, y_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j P(x_i, y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) + \sum_{j=1}^m y_j \sum_{i=1}^n P(x_i, y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i P(x_i) + \sum_{j=1}^m y_j P(y_j) \\ &= E[X] + E[Y] \end{aligned}$$

Com um procedimento análogo pode-se provar o caso da soma entre n variáveis aleatórias.

□

Propriedade 2. O Valor Esperado de uma constante $c \in \mathbb{R}$, multiplicada por um resultado x , é igual à constante multiplicada pelo Valor Esperado do resultado x .

Demonstração. Temos que:

$$E[c \cdot x] = c \cdot x P_x = c \cdot E[x].$$

□

Ao calcular a média de uma distribuição de probabilidade o que se deseja é a substituição das informações dessa função por um único número, que a represente e que possa ser usado para análise de forma a facilitar os processos envolvidos no estudo. Como já dito anteriormente, o Retorno Esperado em uma aplicação financeira, é o que você “espera ganhar com um investimento futuro que determina quanto você deve estar disposto a pagar”.

Definição 5. O Retorno Esperado de uma carteira de investimento é definido como o Valor Esperado.

O conteúdo dessa subseção foi baseado nos livros de Securato (1996), Elton e Gruber (1995) e Bussab e Morettin (2002).

O Retorno sobre um investimento pode vir de duas fontes, a saber, renda corrente e ganhos/perdas de capital. A renda corrente assume a forma de caixa ou tem a possibilidade de ser conversível em caixa de forma rápida, recebido de maneira periódica como resultado de um determinado investimento. A segunda fonte é relacionada à mudança de mercado de um ativo. Se valorizado, o retorno é um ganho de capital, se desvalorizado é uma perda de capital. (GITMAN e JOEHNK, 2005)

2.0.2 DETERMINAÇÃO DA DISPERSÃO

Uma questão importante é saber quão representativa essa média citada no parágrafo acima é, e tal questão é respondida pelo Desvio Padrão, que informa o grau de concentração das probabilidades em torno da média. Assim, quanto menor for o Desvio Padrão, maior a concentração de probabilidades em torno da média, e quanto maior é o desvio padrão, menos a média representa a distribuição. (SECURATO, 1996).

O Desvio Padrão é, por definição, a raiz quadrada da Variância, abaixo definida.

Definição 6. *Seja X uma variável aleatória. A Variância de X , denotada por $Var(X)$ ou σ^2 é:*

$$Var(X) = E[X - E[X]]^2;$$

e o Desvio Padrão da variável aleatória X , denotado por σ ou S_X , é:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Propriedade 3. *Seja X uma variável aleatória. Então,*

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Demonstração. Temos que:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[X - E[X]]^2 = E[(X - E[X])^2] \\ &= E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] \\ &= E[X^2] - E[2XE[X]] + E[E[X]^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2. \end{aligned}$$

□

Definição 7. *Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. A covariância é uma medida de relação entre duas variáveis, denotada por $cov(X, Y)$, e é calculada a partir do Valor Esperado da seguinte forma:*

$$cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Propriedade 4. *Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. Então,*

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$$

Demonstração. Temos que:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= E[(X + Y)^2] - E[X + Y]^2 \\ &= E[X^2 + 2XY + Y^2] - (E[X] + E[Y])^2 \\ &= E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] - E[X]^2 - 2E[X]E[Y] - E[Y]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2 + E[Y^2] - E[Y]^2 + 2(E[XY] - E[X]E[Y]) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y). \end{aligned}$$

□

Definição 8. Sejam X, Y duas variáveis aleatórias. Define-se como o coeficiente de correlação linear entre X e Y , denotada por $\rho(X, Y)$ a seguinte expressão:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Propriedade 5. Sejam X, Y duas variáveis aleatórias e $\rho(X, Y)$ o coeficiente de correlação linear entre X e Y . Então,

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$$

Demonstração. Suponha $E[X] = \mu_1, E[Y] = \mu_2, \text{Var}(X) = \sigma_1^2, \text{Var}(Y) = \sigma_2^2, \text{cov}(X, Y) = \sigma_{12}$. Então, o coeficiente de correlação entre X e Y é dado por:

$$\rho(X, Y) = \rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$$

A função

$$\begin{aligned} f(t) &= E[(X - \mu_1) + t(Y - \mu_2)]^2 \\ &= E[(X - \mu_1)^2 + 2t(X - \mu_1)(Y - \mu_2) + t^2(Y - \mu_2)^2] \\ &= E[(X - \mu_1)^2] + E[2t(X - \mu_1)(Y - \mu_2)] + E[t^2(Y - \mu_2)^2] \\ &= E[X^2 - 2X\mu_1 + \mu_1^2] + 2tE[XY - X\mu_2 - Y\mu_1 + \mu_1\mu_2] + t^2E[Y^2 - 2Y\mu_2 + \mu_2^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[\mu_1] + E[\mu_1^2] + 2t(E[XY] - E[X\mu_2] - E[Y\mu_1] + E[\mu_1\mu_2]) \\ &\quad + t^2(E[Y^2] - 2E[Y\mu_2] + E[\mu_2^2]) \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 + 2t(E[XY] - E[X]E[Y] + E[X]E[Y]) \\ &= +t^2(E[Y^2] - 2E[Y]E[Y] + E[Y]^2) \\ &= E[X^2] - E[X]^2 + 2t(E[XY] - E[X]E[Y]) + t^2(E[Y^2] - E[Y]^2) \\ &= \sigma_1^2 + 2t\sigma_{12} + t^2\sigma_2^2 \end{aligned}$$

é sempre positiva ou nula, quaisquer que sejam os parâmetros σ_1^2, σ_2^2 e σ_{12} . Sendo um polinômio de segundo grau em t , temos que o seu discriminante $4\sigma_{12}^2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^2 \leq 0$. Daí tem-se:

$$\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}\right)^2 \leq 1 \Rightarrow \rho^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \rho \leq 1.$$



Definição 9. Sejam X, Y duas variáveis aleatórias e $\rho(X, Y)$ o coeficiente de correlação linear entre X e Y . A partir dos possíveis valores de ρ tem-se as denominações:

$\rho(X, Y) = -1$: X e Y possuem correlação linear perfeita negativa;

$\rho(X, Y) < 0$: X e Y possuem correlação linear negativa;

$\rho(X, Y) = 0$: não existe correlação linear entre X e Y ;

$\rho(X, Y) > 0$: X e Y possuem correlação linear positiva;

$\rho(X, Y) = 1$: X e Y possuem correlação linear perfeita positiva;

Definição 10. O Risco de uma carteira de investimentos é definido como o Desvio Padrão.

Ao se falar em investimentos em ativos financeiros, o Risco pode ser classificado em alguns tipos, mas os dois tipos principais são o Risco Sistemático e o Risco Não Sistemático.

O chamado Risco sistemático (ou Risco Conjuntural ou Risco de Mercado) consiste no risco que os sistemas econômico, político e social impõem ao ativo. A influência dos fatores de mercado sobre os retornos de investimentos não é padrão. "Tanto o grau quanto a direção da mudança no retorno diferem entre os instrumentos de investimento"(GITMAN e JOEHNK, 2005).

O Risco Não Sistemático (ou Risco Próprio) consiste no risco intrínseco ao ativo e ao sistema ao qual pertence. É a parte do risco que pode ser atribuída a causas aleatórias, específicas a uma firma, e que por isso pode ser minimizado (SECURATO, 1996).

DIVERSIFICAÇÃO DO RISCO

Para Securato (1996), a diversificação do risco é qualquer processo que permita a minimização do risco sobre um ativo ou um portfólio de ativos.

O Risco Sistemático é também chamado de Risco não diversificável pois tem origem nas flutuações que atingem o sistema econômico em geral e por isso não pode ser eliminado mesmo diversificando a carteira. O Risco Não Sistemático é chamado de Risco diversificável pois pode ser eliminado mediante a diversificação eficiente dos ativos (SECURATO, 1996). "Assim, a diversificação minimiza o risco diversificável compensando o retorno fraco de um investimento com o bom retorno de outro"(GITMAN e JOEHNK, 2005).

3. DELINEAMENTO DE CARTEIRA EFICIENTE

3.0.3 CARTEIRAS DE INVESTIMENTO

Ao se examinar os inúmeros títulos do mercado financeiro, nota-se que existem diferentes taxas de retorno, conforme o risco envolvido. Na maioria das vezes, uma aplicação em títulos federais apresenta um Retorno Esperado menor que uma aplicação em CDB (Certificado de Depósito Bancário), que apresenta um Retorno Esperado menor que algum ativo específico negociado na Bolsa de Valores. Esta margem de diferenças das taxas ocorre basicamente em função dos riscos que envolvem as operações. Um título federal tem a garantia do Governo Federal que será cumprido a menos que haja alguma situação bem crítica no país. Mas, mesmo com essa ressalva, os títulos federais são considerados os de menor Risco ou Risco Zero ou ainda Risco Base (SECURATO, 1996).

Um CDB também estará sujeito ao Risco não diversificável, e além disso, envolverá questões de risco próprio do banco emitente. Isso garante ao investidor uma taxa de retorno superior a dos títulos federais (SECURATO, 1996).

Já nas negociações da Bolsa de Valores, além do Risco Sistemático um conjunto de variáveis que afetarão o Risco Próprio do ativo; as condições do mercado irão caracterizar o valor de resgate sem que exista a necessidade de ocorrência de crises para que o Retorno Esperado não ocorra. Em geral a probabilidade de não ocorrer o valor de resgate esperado é muito maior do que nos demais casos (SECURATO, 1996).

Todo investidor busca a otimização de três aspectos básicos em um investimento: retorno, prazo e proteção. Ao avaliá-lo, portanto, deve estimar sua rentabilidade, liquidez e grau de risco. A rentabilidade é sempre diretamente relacionada ao risco. Ao investidor cabe definir o nível de risco que está disposto a correr, em função de obter uma maior ou menor lucratividade. (BOVESPA, 2010 apud CRUZ et al., 2013, página 954)

Existe, à disposição do investidor uma grande relação de ativos financeiros, com diferentes disposições de risco-retorno. Além disso, tem-se os ativos não financeiros como casas, terrenos, apartamentos. Segundo Securato (1996), no mercado brasileiro, em função da constante inflação, também pode-se considerar como alternativas de investimento as aplicações em gado, etc., todas elas passíveis de uma consideração do tipo risco-retorno. O fato é que o investidor brasileiro tem uma gama enorme de alternativas para aplicar seus recursos e de uma forma geral, tenderá a ter uma carteira de

investimentos que apresentará, de acordo com sua composição, um risco e um retorno. Dentre tantas possibilidades, naturalmente, existem as carteiras bem administradas que procuram, por meio da diversificação, obter a melhor relação entre risco e retorno. Passaremos agora a analisar essa relação de uma carteira de investimentos.

3.0.4 ANÁLISE DA DIVERSIFICAÇÃO DO RISCO DE UMA CARTEIRA COM DOIS ATIVOS

Consideremos uma carteira de investimentos composta pelos ativos A_1 (na proporção ω) e A_2 (na proporção $1 - \omega$). Suponha que analisaremos essa carteira por um período de tempo t , e sejam:

- I_1 : variável aleatória que representa taxa de retorno do ativo A_1 ;
- I_2 : variável aleatória que representa taxa de retorno do ativo A_2 .

Admitamos ainda como conhecidas as distribuições de probabilidades de I_1 e de I_2 , ou seja, são dados:

$$I_1 : D(I_{\mu_1}, I_{S_1}) \text{ e } I_2 : D(I_{\mu_2}, I_{S_2}),$$

onde I_{μ_1} representa a taxa de retorno do ativo A_1 e I_{μ_2} representa a taxa de retorno do ativo A_2 . Para determinarmos a taxa de retorno I_{μ_c} da carteira I_c - onde $I_c = \omega I_1 + (1 - \omega)I_2$ - determinaremos a distribuição de probabilidade da variável aleatória I_c , sua média I_{μ_c} e seu desvio padrão I_{S_c} , que representam respectivamente o Retorno Esperado e o Risco da carteira.

CÁLCULO DO RETORNO ESPERADO DA CARTEIRA

Por definição, $I_{\mu_c} = E[I_c]$. Assim,

$$\begin{aligned} I_{\mu_c} &= E[I_c] = E[\omega I_1 + (1 - \omega)I_2] \\ &= E[\omega I_1] + E[(1 - \omega)I_2] \\ &= \omega E[I_1] + (1 - \omega)E[I_2] \\ &= \omega I_{\mu_1} + (1 - \omega)I_{\mu_2} \end{aligned}$$

CÁLCULO DO RISCO DA CARTEIRA

Por definição, $I_{S_c} = S(I_c)$. Assim,

$$\begin{aligned}
 I_{S_c} &= \sqrt{\text{Var}(I_c)} \\
 &= \sqrt{\text{Var}(\omega I_1 + (1 - \omega) I_2)} \\
 &= \sqrt{\text{Var}(\omega I_1) + \text{Var}((1 - \omega) I_2) + 2\text{cov}(\omega I_1, (1 - \omega) I_2)} \\
 &= \sqrt{S^2(\omega I_1) + S^2((1 - \omega) I_2) + 2\omega(1 - \omega)\text{cov}(I_1, I_2)} \\
 &= \sqrt{\omega^2 S^2(I_1) + (1 - \omega)^2 S^2(I_2) + 2\omega(1 - \omega)\text{cov}(I_1, I_2)} \\
 &= \sqrt{\omega^2 I_{S_1}^2 + (1 - \omega)^2 I_{S_2}^2 + 2\omega(1 - \omega)\text{cov}(I_1, I_2)}.
 \end{aligned}$$

COMPOSIÇÃO DA CARTEIRA DE RISCO MÍNIMO

Com a função do risco definida, vamos agora encontrar o seu ponto mínimo.

Primeiramente vamos encontrar as raízes da função $\frac{dI_{S_c}}{d\omega}$, ou seja, os seus pontos críticos. Temos que:

$$I_{S_c} = \sqrt{\omega^2 I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\omega I_{S_2}^2 + \omega^2 I_{S_2}^2 + 2\omega \text{cov}(I_1, I_2) - 2\omega^2 \text{cov}(I_1, I_2)},$$

daí,

$$I_{S_c} = \sqrt{\omega^2 (I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\text{cov}(I_1, I_2)) - 2\omega (I_{S_2}^2 - \text{cov}(I_1, I_2)) + I_{S_2}^2}.$$

Defina

$$\begin{aligned}
 A &:= I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\text{cov}(I_1, I_2) \\
 B &:= I_{S_2}^2 - \text{cov}(I_1, I_2).
 \end{aligned}$$

Reescrevendo I_{S_c} temos:

$$I_{S_c} = \sqrt{A\omega^2 - 2B\omega + I_{S_2}^2}.$$

Derivando I_{S_c} em relação à ω , temos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_{S_c}}{d\omega} &= \frac{1}{2}(A\omega^2 - 2B\omega + I_{S_2}^2)^{\frac{1}{2}}(2A\omega - 2B) \\
 &= \frac{2A\omega - 2B}{2\sqrt{A\omega^2 - 2B\omega + I_{S_2}^2}}.
 \end{aligned}$$

Agora, $\frac{dI_{S_c}}{d\omega} = 0 \iff 2A\omega - 2B = 0 \iff \omega = \frac{2B}{2A} = \frac{B}{A}$. Ou seja, $\frac{B}{A}$ é o único ponto crítico da função que determina o risco da carteira. Note que o ponto crítico será ponto de mínimo porque $\frac{dI_{S_c}}{d\omega} < 0$ se $\omega < \frac{B}{A}$ e $\frac{dI_{S_c}}{d\omega} > 0$ se $\omega > \frac{B}{A}$.

Daí, substituindo esse ponto na expressão de I_{S_c} , temos que:

$$\begin{aligned}
I_{S_c} \left(\frac{B}{A} \right) &= \sqrt{A \left(\frac{B}{A} \right)^2 - 2B \left(\frac{B}{A} \right) + I_{S_2}^2} \\
&= \sqrt{\frac{B^2}{A} - 2\frac{B^2}{A} + I_{S_2}^2} \\
&= \sqrt{-\frac{B^2}{A} + I_{S_2}^2}.
\end{aligned}$$

Logo, a condição de risco mínimo da carteira ocorrerá para a composição

$$(\omega, 1 - \omega),$$

onde:

$$\omega = \frac{B}{A},$$

e o risco mínimo será:

$$I_{S_{c_{min}}} = \sqrt{I_{S_2}^2 - \frac{B^2}{A}}.$$

CURVA RISCO-RETORNO DA CARTEIRA

O objetivo agora será a identificação uma curva conhecida para a equação da carteira.

Como

$$I_{\mu_c} = \omega I_{\mu_1} + (1 - \omega) I_{\mu_2},$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
I_{\mu_c} &= \omega I_{\mu_1} + I_{\mu_2} - \omega I_{\mu_2} \\
I_{\mu_c} &= \omega(I_{\mu_1} - I_{\mu_2}) + I_{\mu_2} \Rightarrow \\
\Rightarrow I_{\mu_c} - I_{\mu_2} &= \omega(I_{\mu_1} - I_{\mu_2}) \Rightarrow \\
\Rightarrow \omega &= \frac{I_{\mu_c} - I_{\mu_2}}{I_{\mu_1} - I_{\mu_2}}.
\end{aligned}$$

Essa última passagem foi possível pelo fato de que $(I_{\mu_1} - I_{\mu_2}) \neq 0$, já que as proporções dos ativos são diferentes entre si. Substituindo ω na expressão $I_{S_c} = \sqrt{A\omega^2 - 2B\omega + I_{S_2}^2}$, temos que:

$$\begin{aligned}
I_{S_c} &= \sqrt{A \left(\frac{I_{\mu_c} - I_{\mu_2}}{I_{\mu_1} - I_{\mu_2}} \right)^2 - 2B \left(\frac{I_{\mu_c} - I_{\mu_2}}{I_{\mu_1} - I_{\mu_2}} \right) + I_{S_2}^2} \\
&= \sqrt{\frac{A(I_{\mu_c} - I_{\mu_2})^2}{(I_{\mu_1} - I_{\mu_2})^2} - \frac{2B(I_{\mu_c} - I_{\mu_2})}{(I_{\mu_1} - I_{\mu_2})} + I_{S_2}^2} \\
&= \sqrt{\frac{A(I_{\mu_c} - I_{\mu_2})^2 - 2B(I_{\mu_c} - I_{\mu_2})(I_{\mu_1} - I_{\mu_2})}{(I_{\mu_1} - I_{\mu_2})^2} + I_{S_2}^2},
\end{aligned}$$

elevando ao quadrado ambos os membros, e definindo $R := I_{\mu_1} - I_{\mu_2}$ e $Z := I_{\mu_c} - I_{\mu_2}$, temos que:

$$\begin{aligned} I_{S_c}^2 &= \frac{AZ^2 - 2BZR}{R^2} + I_{S_2}^2 \\ I_{S_c}^2 &= \frac{AZ^2}{R^2} - \frac{2BZ}{R} + I_{S_2}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 &= I_{S_c}^2 - I_{S_2}^2 - \frac{AZ^2}{R^2} + 2\frac{BZ}{R}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Precisamos agora obter a forma da curva risco-retorno definida pela equação 3.1 acima apresentada, nas variáveis I_{S_c} e $Z = I_{\mu_c} - I_{\mu_2}$.

Será apresentado aqui um resultado sobre classificação de cônicas. A demonstração do mesmo pode ser encontrado no livro Álgebra Linear do autor José Luiz Boldrini (Referência [2]).

Dada a forma geral de uma cônica

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

e os determinantes

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

é possível identificar a forma da cônica que a equação geral representa. Se $D_1 \neq 0$, então:

- $D_2 > 0 \Rightarrow$ elipse;
- $D_2 < 0 \Rightarrow$ hipérbole;
- $D_2 = 0 \Rightarrow$ parábola.

Agora o resultado supracitado será utilizado no problema aqui proposto:

Colocando a equação 3.1 na forma geral, temos:

$$1I_{S_c}^2 + \left(-\frac{A}{R^2}\right) Z^2 + 2 \cdot 0 \cdot I_{S_c}Z + 2 \cdot 0I_{S_c} + 2\left(\frac{B}{R}\right) Z + (-I_{S_2}^2) = 0.$$

Assim,

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A}{R^2} & \frac{B}{R} \\ 0 & \frac{B}{R} & -I_{S_2}^2 \end{vmatrix} = \frac{A}{R^2} I_{S_2}^2 - \frac{B^2}{R^2},$$

e

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{A}{R^2} \end{vmatrix} = -\frac{A}{R^2}.$$

Agora vamos analisar os possíveis valores para cada determinante.

(1º caso - $D_1 = 0$) Considerando $D_1 = 0$, então $\frac{A}{R^2}I_{S_2}^2 = \frac{B^2}{R^2}$ o que implica $AI_{S_2}^2 = B^2$. Substituindo os valores de A e B, temos que:

$$\begin{aligned}
 [I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2cov(I_1, I_2)]I_{S_2}^2 &= [I_{S_2}^2 - cov(I_1, I_2)]^2 \\
 \Rightarrow I_{S_1}^2 I_{S_2}^2 + I_{S_2}^4 - 2I_{S_2}^2 cov(I_1, I_2) &= I_{S_2}^4 - 2I_{S_2}^2 cov(I_1, I_2) + cov^2(I_1, I_2) \\
 \Rightarrow I_{S_1}^2 I_{S_2}^2 &= cov^2(I_1, I_2) \\
 \Rightarrow \sqrt{I_{S_1}^2 I_{S_2}^2} &= \sqrt{cov^2(I_1, I_2)} \\
 \Rightarrow |I_{S_1}^2 I_{S_2}^2| &= |cov^2(I_1, I_2)| \\
 \Rightarrow \pm I_{S_1} I_{S_2} &= cov(I_1, I_2)
 \end{aligned}$$

o que ocorrerá quando os ativos A_1 e A_2 tiverem correlação linear ρ perfeita, positiva ou negativa.

No caso em que $\rho = 1$, como $\rho(I_1, AI_2) = \frac{cov(I_1, I_2)}{I_{S_1} I_{S_2}} \Rightarrow cov(I_1, I_2) = \rho(I_1, I_2) I_{S_1} I_{S_2}$, e na expressão de I_{S_c} temos:

$$\begin{aligned}
 I_{S_c} &= \sqrt{\omega^2 I_{S_1}^2 + (1 - \omega)^2 I_{S_2}^2 + 2\omega(1 - \omega)cov(I_1, I_2)} \\
 &= \sqrt{\omega^2 I_{S_1}^2 + (1 - \omega)^2 I_{S_2}^2 + 2\omega(1 - \omega)\rho(I_1, I_2)I_{S_1} I_{S_2}} \\
 &= \sqrt{\omega^2 I_{S_1}^2 + 2\omega(1 - \omega)I_{S_1} I_{S_2} + (1 - \omega)^2 I_{S_2}^2} \\
 &= \sqrt{(\omega I_{S_1} + (1 - \omega)I_{S_2})^2} \\
 &= \omega I_{S_1} + (1 - \omega)I_{S_2} \\
 &= \omega I_{S_1} + I_{S_2} - \omega I_{S_2},
 \end{aligned}$$

donde $\omega = \frac{I_{S_c} - I_{S_2}}{I_{S_1} - I_{S_2}}$. Substituindo em $I_{\mu_c} = \omega I_{\mu_1} + (1 - \omega)I_{\mu_2}$, temos:

$$I_{\mu_c} = \frac{I_{S_c} - I_{S_2}}{I_{S_1} - I_{S_2}} I_{\mu_1} + \left(1 - \frac{I_{S_c} - I_{S_2}}{I_{S_1} - I_{S_2}}\right) I_{\mu_2},$$

que é a equação de uma reta ligando o título A_1 e o título A_2 no plano Risco-Retorno.

No caso de ativos perfeitamente correlacionados, o retorno e o risco do portfólio formado pelos dois ativos são obtidos como médias ponderadas dos retornos e dos riscos dos ativos individuais. Não há redução de risco com a compra dos dois ativos. [...] Nada se ganha diversificando em vez de comprar os ativos individuais. (ELTON; GRUBER, 1995, p.74, tradução nossa)

No caso em que $\rho = -1$, temos:

$$\begin{aligned}
 I_{S_c} &= \sqrt{\omega^2 I_{S_1}^2 + (1 - \omega)^2 I_{S_2}^2 + 2\omega(1 - \omega)\text{cov}(I_1, I_2)} \\
 &= \sqrt{\omega^2 I_{S_1}^2 + (1 - \omega)^2 I_{S_2}^2 + 2\omega(1 - \omega)\rho(I_1, I_2)I_{S_1}I_{S_2}} \\
 &= \sqrt{\omega^2 I_{S_1}^2 - 2\omega(1 - \omega)I_{S_1}I_{S_2} + (1 - \omega)^2 I_{S_2}^2} \\
 &= \sqrt{(\omega I_{S_1} - (1 - \omega)I_{S_2})^2} \\
 &= |\omega I_{S_1} + (1 - \omega)I_{S_2}|,
 \end{aligned}$$

donde obtém-se dois possíveis valores para ω , a saber, $\omega_1 = \frac{I_{S_c} + I_{S_2}}{I_{S_1} + I_{S_2}}$ e $\omega_2 = -\frac{I_{S_c} + I_{S_2}}{I_{S_1} + I_{S_2}}$ o que nos garante duas retas concorrentes:

$$\begin{aligned}
 I_{\mu_{c1}} &= \frac{I_{S_c} - I_{S_2}}{I_{S_1} - I_{S_2}} I_{\mu_1} + \left(1 - \frac{I_{S_c} - I_{S_2}}{I_{S_1} - I_{S_2}}\right) I_{\mu_2}, \\
 I_{\mu_{c2}} &= -\frac{I_{S_c} - I_{S_2}}{I_{S_1} - I_{S_2}} I_{\mu_1} + \left(1 + \frac{I_{S_c} - I_{S_2}}{I_{S_1} - I_{S_2}}\right) I_{\mu_2}.
 \end{aligned}$$

Agora, $I_{S_c} = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{I_{S_2}}{I_{S_1} + I_{S_2}}$, com $I_{S_1}, I_{S_2} > 0$, o que fornece "o mais poderoso resultado de diversificação: a habilidade de combinação de títulos para a redução do risco"(ELTON;GRUBER, 1995, p.75, tradução nossa).

(2º caso - $D_1 \neq 0$ e $D_2 \geq 0$) Temos que $D_2 = -\frac{A}{R^2}$ e $A = I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\text{cov}(I_1, I_2)$. Portanto $D_2 = -\frac{I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\text{cov}(I_1, I_2)}{R^2}$.

Se $D_2 \geq 0$, teremos:

$$\begin{aligned}
 -(I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\text{cov}(I_1, I_2)) &\geq 0 \\
 I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\text{cov}(I_1, I_2) &\leq 0 \\
 I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 &\leq 2\text{cov}(I_1, I_2)
 \end{aligned}$$

Agora, como

$$\begin{aligned}
 -1 &\leq \frac{\text{cov}(I_1, I_2)}{I_{S_1}I_{S_2}} \leq 1 \\
 -I_{S_1}I_{S_2} &\leq \text{cov}(I_1, I_2) \leq I_{S_1}I_{S_2} \\
 -2I_{S_1}I_{S_2} &\leq 2\text{cov}(I_1, I_2) \leq 2I_{S_1}I_{S_2},
 \end{aligned}$$

temos que,

$$\begin{aligned}
 I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 &\leq 2cov(I_1, I_2) \leq 2I_{S_1}I_{S_2} \\
 \Rightarrow I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 &\leq 2I_{S_1}I_{S_2} \\
 \Rightarrow I_{S_1}^2 - 2I_{S_1}I_{S_2} + I_{S_2}^2 &\leq 0 \\
 \Rightarrow (I_{S_1} - I_{S_2})^2 &\leq 0 \\
 \Rightarrow I_{S_1} - I_{S_2} &= 0 \\
 \Rightarrow I_{S_1} &= I_{S_2}.
 \end{aligned}$$

Assim, se $I_1 = I_2$, teremos:

$$\begin{aligned}
 2I_{S_1}^2 &= 2cov(I_1, I_2) \\
 \Rightarrow cov(I_1, I_2) &= I_{S_1}^2 = I_{S_2}^2 \\
 \Rightarrow \frac{cov(I_1, I_2)}{I_{S_1}I_{S_2}} &= 1
 \end{aligned}$$

Desse modo, $cov(I_1, I_2) = I_{S_1}^2 = I_{S_2}^2 = S^2$, e substituindo na equação (3.1) temos:

$$I_{S_c}^2 - \frac{A}{R^2}Z^2 + 2\frac{B}{R}Z - I_{S_2}^2 = 0,$$

onde

$$\begin{aligned}
 A &= I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2cov(I_1, I_2) = 2S^2 - 2S^2 = 0; \\
 B &= I_{S_2}^2 - cov(I_1, I_2) = S^2 - S^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$I_{S_c}^2 - S^2 = 0 \Rightarrow I_{S_c} = S,$$

o que representa uma reta paralela ao eixo dos retornos da carteira, ou seja, a carteira terá sempre o mesmo risco independente da sua composição.

(3º caso - $D_1 \neq 0$ e $D_2 < 0$) Segundo Securato (1996), em geral $D_1 \neq 0$ e $D_2 < 0$, exceto nos casos de correlação perfeita entre os ativos da carteira. Assim, a curva representativa na plano Risco-Retorno será uma hipérbole. Nesse caso a correlação $\rho(I_1, I_2)$ assumirá valores pertencentes ao intervalo aberto de $\mathbb{R}(0, 1)$.

3.0.5 ANÁLISE DA DIVERSIFICAÇÃO DO RISCO DE UMA CARTEIRA COM MAIS DE DOIS ATIVOS DE RISCO

Considere uma carteira composta pelos ativos $A_1, \dots, A_n$, cada um com seus respectivos dados, como distribuições de probabilidades $I_1, \dots, I_n$, retornos esperados $I_{\mu_1}, \dots, I_{\mu_n}$ e riscos $I_{S_1}, \dots, I_{S_n}$. Sejam também as variáveis de proporções $\omega_1, \dots, \omega_n$, correspondentes a cada ativo respectivamente. A função de distribuição de probabilidades da carteira I_c é dada pela combinação linear das proporções e das distribuições de probabilidades de cada ativo, ou seja, $I_c = \omega_1 I_1 + \dots + \omega_n I_n$.

CÁLCULO DO RETORNO ESPERADO DA CARTEIRA

Seja I_{μ_c} a variável que representa o Retorno Esperado da carteira. Por definição, $I_{\mu_c} = E[I_c]$. Assim,

$$\begin{aligned}
 I_{\mu_c} &= E[I_c] \\
 &= E[\omega_1 I_1 + \dots + \omega_n I_n] \\
 &= E[\omega_1 I_1] + \dots + E[\omega_n I_n] \\
 &= \omega_1 E[I_1] + \dots + \omega_n E[I_n] \\
 &= \omega_1 I_{\mu_1} + \dots + \omega_n I_{\mu_n} \\
 &= \sum_{i=1}^n \omega_i I_{\mu_i}.
 \end{aligned}$$

CÁLCULO DO RISCO DA CARTEIRA

Seja I_{S_c} a variável que representa o Risco da carteira. Por definição, $I_{S_c} = S(I_c)$. Assim,

$$\begin{aligned}
 I_{S_c} &= \sqrt{Var(I_c)} \\
 &= \sqrt{Var(\omega_1 I_1 + \dots + \omega_n I_n)} \\
 &= \sqrt{S^2(\omega_1 I_1) + \dots + S^2(\omega_n I_n) + 2cov(I_1 \omega_1, I_2 \omega_2) + \dots + 2cov(I_1 \omega_1, I_n \omega_n) \\
 &\quad + 2cov(I_2 \omega_2, I_3 \omega_3) + \dots + 2cov(I_2 \omega_2, I_n \omega_n) + \dots + 2cov(I_{n-1} \omega_{n-1}, I_n \omega_n)} \\
 &= \sqrt{\omega_1^2 S^2(I_1) + \dots + \omega_n^2 S^2(I_n) + 2\omega_1 \omega_2 cov(I_1, I_2) + \dots + 2\omega_1 \omega_n cov(I_1, I_n) \\
 &\quad + 2\omega_2 \omega_3 cov(I_2, I_3) + \dots + 2\omega_2 \omega_n cov(I_2, I_n) + \dots + 2\omega_{n-1} \omega_n cov(I_{n-1}, I_n)} \\
 &= \sqrt{\sum_{j=1}^n \omega_j^2 I_{S_j}^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \omega_j \omega_k cov(I_j, I_k) \right)}.
 \end{aligned}$$

3.0.6 FRONTEIRA EFICIENTE

Teoricamente pode-se formar qualquer número de carteiras possíveis, representando graficamente cada uma delas e cada ativo individualmente em um plano Desvio padrão - Esperança que também

pode ser chamado de Risco-Retorno Esperado. A expressão "teoricamente" é usada pelo fato de que deve se considerar um número infinitamente grande de possibilidades de composição das carteiras.

Definição 11. *O conjunto de todas as carteiras possíveis representado no plano Risco-Retorno é chamado de conjunto viável ou atingível.*

Definição 12. *Denomina-se Carteira Eficiente aquela cujo retorno é o mais alto para um determinado nível de risco, ou cujo risco é o mínimo para um dado nível de retorno esperado.*

A preferência do investidor é um retorno mais alto em relação ao risco. Assim, se for possível encontrar um conjunto de carteiras que:

- ofereça maior retorno com o mesmo risco, ou
- ofereça menor risco com o mesmo retorno,

tem-se identificado todas as carteiras que um investidor analisaria em sua tomada de decisão e todas as outras podem ser ignoradas.

Definição 13. *O limite do conjunto viável de carteiras apresenta todas as carterias eficientes e esse limite é chamado de fronteira eficiente.*

Todas as carteiras na fronteira eficiente têm preferência em relação à todas as outras no conjunto viável.

A fronteira eficiente pode, teoricamente, ser usada para encontrar o mais alto nível de satisfação que o investidor pode atingir, dado o conjunto disponível de carteiras. Para fazer isso, traçamos nos eixos risco-retorno a *função de um investidor* ou as *curvas de indiferença*. Essas curvas indicam, para um dado nível de utilidade (satisfação), o conjunto de combinações de risco-retorno entre as quais um investidor seria indiferente (GITMAN e JOEHNK, 2005).

3.0.7 TEORIA DE MARKOWITZ PARA 3 ATIVOS DE RISCO

Considere os ativos A_1, A_2 e A_3 em que são conhecidos os Retornos Esperados $I_{\mu_1}, I_{\mu_2}, I_{\mu_3}$, os Riscos $I_{S_1}, I_{S_2}, I_{S_3}$, respectivamente. Considere também como conhecidas as covariâncias $cov(I_1, I_2), cov(I_1, I_3), cov(I_2, I_3)$, e as variáveis $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, representando as composições de cada ativo na carteira, respectivamente.

Uma das formas de se obter os pontos da fronteira eficiente é analisando as retas tangentes à curva C representativa da fronteira eficiente geral de investimentos em ativos com risco, que possui o aspecto conforme a figura 3.1.

Como o Risco é determinado pelo desvio padrão e que esse é a raiz quadrada da variância, temos que a curva C' obtida a partir dos pontos da curva C, mas plotados no plano Variância-Retorno. Pela relação entre desvio padrão e variância, a curva C' terá o mesmo aspecto de C, conforme a figura 3.2.

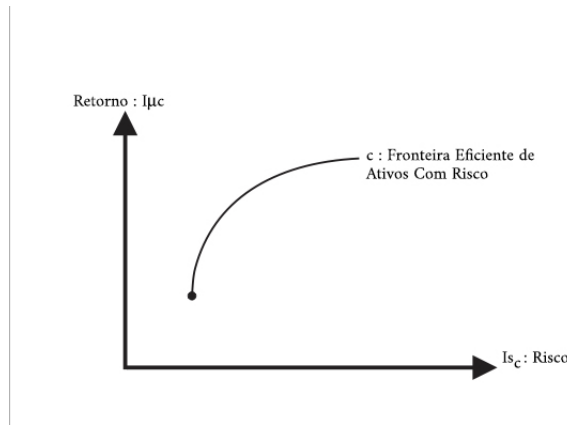


Figura 3.1: Fronteira Eficiente de Ativos com risco. Fonte: Securato, 1996, p. 192

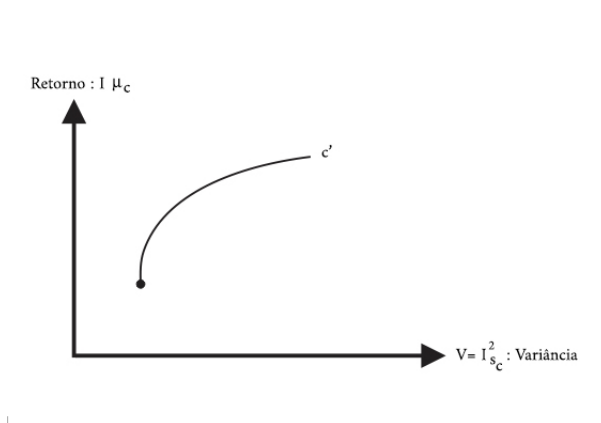


Figura 3.2: Fronteira Eficiente no plano Variância x Retorno. Fonte: Securato, 1996, p. 192

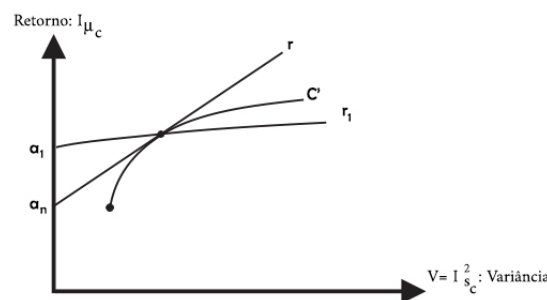


Figura 3.3: Avaliação de retas que passam por $P \in C'$. Fonte: Securato, 1996, p. 193

Considere agora um ponto arbitrário $P \in C'$. A reta r_1 que passa por P e intercepta o eixo Retorno é dada por:

$$r_1 : I_{\mu_c} = a_1 + b_1 V.$$

Fixando o ponto P e considerando as outras retas que passam por ele, tem-se de forma genérica as retas de equação da forma

$$I_{\mu_c} = a_j + b_j V,$$

com $j = 1, 2, \dots, n$ e $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ onde a reta

$$r : I_{\mu_c} = a_n + b_n V,$$

é a reta tangente à curva C' no ponto P . Note que, na reta tangente, $a_n = \min(a_j) = \min(I_{\mu_c} - b_n V)$.

Cada ponto $P_i \in C'$ possui coordenadas $P_i = (V_i, I_{\mu_i})$ em termos de variância-retorno, ou $P_i = (\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \omega_{i_3})$ em termos de composição da carteira.

Agora, para pertencer à curva C' , o ponto P deve satisfazer:

$$\begin{aligned} I_{\mu_c} &= \omega_1 I_{\mu_1} + \omega_2 I_{\mu_2} + \omega_3 I_{\mu_3}, \\ I_{S_c}^2 &= \omega_1^2 I_{S_1}^2 + \omega_2^2 I_{S_2}^2 + \omega_3^2 I_{S_3}^2 + 2\omega_1 \omega_2 \text{cov}(I_1, I_2) + 2\omega_1 \omega_3 \text{cov}(I_1, I_3) \\ &\quad + 2\omega_2 \omega_3 \text{cov}(I_2, I_3), \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 &= 1, \\ \omega_1, \omega_2, \omega_3 &\geq 0, \\ a_n &= \min(I_{\mu_c} - b_n V). \end{aligned}$$

E, para se obter a composição das carteiras que nos dá os pontos $P_i \in C'$, deve-se conseguir, nesse caso, triplas $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ de forma que:

$$\begin{aligned} a &= \min(I_{\mu_c} - bV) \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 &= 1, \\ \omega_1, \omega_2, \omega_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

A solução para esse problema pode ser encontrada aplicando o método matemático do multiplicador de Lagrange.

O primeiro passo do método é definir a função objetivo F dada por:

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) = f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \lambda g(\omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

onde,

$$\begin{aligned} f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= I_{\mu_c} - bV, \\ g(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1. \end{aligned}$$

Substituindo os valores de I_{μ_c} e $V = I_{S_c}^2$, temos que:

$$\begin{aligned} F(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) &= \omega_1 I_{\mu_1} + \omega_2 I_{\mu_2} + \omega_3 I_{\mu_3} - b(\omega_1^2 I_{S_1}^2 + \omega_2^2 I_{S_2}^2 + \omega_3^2 I_{S_3}^2 + 2\omega_1 \omega_2 \text{cov}(I_1, I_2) \\ &\quad + 2\omega_1 \omega_3 \text{cov}(I_1, I_3) + 2\omega_2 \omega_3 \text{cov}(I_2, I_3)) + \lambda(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1). \end{aligned}$$

O segundo passo é resolver o sistema de equações apresentado a seguir, dado pelas derivadas

parciais de F em relação à cada variável.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \omega_1} = I_{\mu_1} - 2b\omega_1 I_{S_1}^2 - 2b\omega_2 \text{cov}(I_1, I_2) - 2b\omega_3 \text{cov}(I_1, I_3) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \omega_2} = I_{\mu_2} - 2b\omega_2 I_{S_2}^2 - 2b\omega_1 \text{cov}(I_1, I_2) - 2b\omega_3 \text{cov}(I_2, I_3) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \omega_3} = I_{\mu_3} - 2b\omega_3 I_{S_3}^2 - 2b\omega_1 \text{cov}(I_1, I_3) - 2b\omega_2 \text{cov}(I_2, I_3) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

Multiplicando $\frac{b}{b}$ em ambos os lados das três primeiras igualdades, e reescrevendo de forma conveniente, temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\omega_1 I_{S_1}^2 + 2\omega_2 \text{cov}(I_1, I_2) + 2\omega_3 \text{cov}(I_1, I_3) - \frac{\lambda}{b} = \frac{I_{\mu_1}}{b} \\ 2\omega_1 \text{cov}(I_1, I_2) + 2\omega_2 I_{S_2}^2 + 2\omega_3 \text{cov}(I_2, I_3) - \frac{\lambda}{b} = \frac{I_{\mu_2}}{b} \\ 2\omega_1 \text{cov}(I_1, I_3) + 2\omega_2 \text{cov}(I_2, I_3) + 2\omega_3 I_{S_3}^2 - \frac{\lambda}{b} = \frac{I_{\mu_3}}{b} \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1 \end{array} \right.$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2I_{S_1}^2 & 2\text{cov}(I_1, I_2) & 2\text{cov}(I_1, I_3) & -1 \\ 2\text{cov}(I_1, I_2) & 2I_{S_2}^2 & 2\text{cov}(I_2, I_3) & -1 \\ 2\text{cov}(I_1, I_3) & 2\text{cov}(I_2, I_3) & 2I_{S_3}^2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \frac{\lambda}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_{\mu_1}}{b} \\ \frac{I_{\mu_2}}{b} \\ \frac{I_{\mu_3}}{b} \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou, denotando mais simplificadamente e resolvendo temos que:

$$M \cdot W = U \Rightarrow W = M^{-1} \cdot U.$$

o que possibilitará a obtenção da tripla $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ em função do coeficiente b .

Atribuindo valores a b , obtém-se todas as composições $(\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \omega_{i_3})$ pelos pontos da curva C' a menos da condição

$$0 \leq \omega_1, \omega_2, \omega_3 \leq 1.$$

3.0.8 TEORIA DE MARKOWITZ PARA N ATIVOS DE RISCO

No caso geral, ou seja, ao se lidar com uma carteira composta por n ativos com risco, o sistema apresentado acima, na forma matricial, será dado por:

$$M \cdot W = U,$$

com solução

$$W = M^{-1} \cdot U,$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} 2I_{S_1}^2 & 2cov(I_1, I_2) & 2cov(I_1, I_3) & \cdots & 2cov(I_1, I_n) & -1 \\ 2cov(I_1, I_2) & 2I_{S_2}^2 & 2cov(I_2, I_3) & \cdots & 2cov(I_2, I_n) & -1 \\ 2cov(I_1, I_3) & 2cov(I_2, I_3) & 2I_{S_3}^2 & \cdots & 2cov(I_3, I_n) & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2cov(I_1, I_n) & 2cov(I_2, I_n) & 2cov(I_3, I_n) & \cdots & 2I_{S_n}^2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \omega_n \\ \frac{\lambda}{b} \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} \frac{I_{\mu_1}}{b} \\ \frac{I_{\mu_2}}{b} \\ \frac{I_{\mu_3}}{b} \\ \vdots \\ \frac{I_{\mu_n}}{b} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ao se resolver a equação matricial acima, obtém-se o vetor W referente à composição das carteiras que são pontos da fronteira eficiente de investimentos.

Ao se tentar diminuir a variância não é suficiente investir em muitos títulos. É necessário evitar investir em títulos com alta covariância entre si. Nós devemos diversificar entre indústrias porque empresas de diferentes indústrias, especialmente indústrias com características econômicas diferentes, possuem menor covariâncias do que empresas da mesma indústria. (MARKOWITZ, 1952, p. 89, tradução nossa)

O conteúdo desse capítulo foi baseado nos livros de Securato (1996) e Elton e Gruber (1995), exceto os trechos em que há referências de outros autores.

4. UMA APLICAÇÃO DA TMC

A partir de agora será apresentado o desenvolvimento de uma aplicação financeira fictícia em alguns ativos da Bolsa de Valores, utilizando a Teoria Moderna de Carteiras para a tomada de decisão sobre a melhor composição do portfólio.

Serão feitas 4 aplicações simuladas. A primeira será apresentada como se tivesse sido feita em 2014 e, para isso, serão usados os dados de 2013 para os cálculos necessários. Como tem-se o histórico de comportamento dos ativos nesse ano, a apuração também será apresentada. A segunda aplicação usará os dados de 2014 para os cálculos, será apresentada como se tivesse sido feita em 2015 e também será apurada. Esse processo será feito novamente para aplicações em 2016 e 2017. As apurações informarão se a Teoria Moderna de Carteiras, nesse molde aqui apresentada, e nesse momento econômico do Brasil, realmente é funcional.

Existe um sistema chamado Economática, que é uma ferramenta utilizada no mercado de investimentos para acompanhamento de investimentos, possibilitando a criação de gráficos, tabelas, consulta de informações através de seu banco de dados, entre outros. A partir dessa base de dados Economática, foram coletados dados de 565 ativos da bolsa de valores. O sistema gera o grupo de dados solicitados organizados em uma planilha do Excel. Os tipos de dados são apresentados na figura 4.1.

A partir desses dados coletados, foram feitos alguns filtros com o objetivo de selecionar os melhores ativos para a escolha da carteira.

O primeiro filtro foi feito com o objetivo de selecionar somente as ações ordinárias, já que a maioria dos ativos possuía opção de aplicação Ordinária, Preferencial e outros, com os mesmos dados porém características diferentes. A figura 4.2 mostra uma tela desse filtro.

A ação ordinária representa um direito de propriedade sobre os resultados e os ativos de uma corporação. [...] A característica especial da ação ordinária [...] está no fato de que a responsabilidade do titular de ações ordinárias é limitada. Se uma empresa quebrar, o que o acionista ordinário poderá perder será seu investimento original, ou seja, não mais do que seu investimento inicial nas ações. (ELTON; GRUBER, 1995, p.17, tradução nossa)

	A	B	C	F	G	H	I	J	K
	FONTE: Econômica	Nome	Classe	Bolsa / Fonte	Tipo de Ativo	Ativo / Cancelado	Código	Valor Mercado da empresa 31Dez13 em moeda orig em milhares	Sector Econômico Bovespa
1									
2	1	524 Particip	ON	Bovespa	Ação	ativo	QVQP3B	-	Financeiro e outros
3	2	Abc Brasil	PN	Bovespa	Ação	ativo	ABCB4	R\$ 1.764.659,26	Financeiro e outros
4	3	Aco Altona	ON	Bovespa	Ação	ativo	EALT3	R\$ 57.825,00	Bens industriais
5	4	Aco Altona	PN	Bovespa	Ação	ativo	EALT4	R\$ 57.825,00	Bens industriais
6	5	Advanced-Dh	ON	Bovespa	Ação	ativo	ADHM3	R\$ 70.782,33	Saúde
7	6	AES Elpa	ON	Bovespa	Ação	ativo	AELP3	R\$ 878.363,64	Financeiro e outros
8	7	AES Tiete E	ON	Bovespa	Ação	ativo	TIET3	-	Utilidade pública
9	8	AES Tiete E	PN	Bovespa	Ação	ativo	TIET4	-	Utilidade pública
10	9	AES Tiete E	UNT N2	Bovespa	Ação	ativo	TIET11	-	Utilidade pública
11	10	Afluente T	ON	Bovespa	Ação	ativo	AFLT3	R\$ 220.797,50	Utilidade pública
12	11	AGconcessoes	ON	Bovespa	Ação	ativo	ANDG3B	-	Financeiro e outros
13	12	AGconcessoes	PN	Bovespa	Ação	ativo	ANDG4B	-	Financeiro e outros
14	13	Agpart	ON	Bovespa	Ação	ativo	CANT3B	-	Financeiro e outros
15	14	Agpart	PN	Bovespa	Ação	ativo	CANT4B	-	Financeiro e outros
16	15	Alef S/A	ON	Bovespa	Ação	ativo	ALEF3B	-	Financeiro e outros
17	16	Alfa Consorc	ON	Bovespa	Ação	ativo	BRGE3	R\$ 293.368,92	Financeiro e outros
18	17	Alfa Consorc	PNA	Bovespa	Ação	ativo	BRGE5	R\$ 293.368,92	Financeiro e outros
19	18	Alfa Consorc	PNB	Bovespa	Ação	ativo	BRGE6	R\$ 293.368,92	Financeiro e outros

Filtros 1 e 2 Filtro 3 Ativos Selecionados (+)

Figura 4.1: Dados coletados

D6 : =SE(E(B6=B5;C5="ON");0;SE(C6="ON";1;0))

	A	B	C	D	F	G	H	I	J	K
	FONTE: Econômica	Nome	Classe	Seleção de Ações Ordinárias	Bolsa / Fonte	Tipo de Ativo	Ativo / Cancelado	Código	Valor Mercado da empresa 31Dez13 em moeda orig em milhares	Sector Econômico Bovespa
1										
2	1	524 Particip	ON	1	Bovespa	Ação	ativo	QVQP3B	-	Financeiro e outros
3	2	Abc Brasil	PN	0	Bovespa	Ação	ativo	ABCB4	R\$ 1.764.659,26	Financeiro e outros
4	3	Aco Altona	ON	1	Bovespa	Ação	ativo	EALT3	R\$ 57.825,00	Bens industriais
5	4	Aco Altona	PN	0	Bovespa	Ação	ativo	EALT4	R\$ 57.825,00	Bens industriais
6	5	Advanced-Dh	ON	1	Bovespa	Ação	ativo	ADHM3	R\$ 70.782,33	Saúde
7	6	AES Elpa	ON	1	Bovespa	Ação	ativo	AELP3	R\$ 878.363,64	Financeiro e outros
8	7	AES Tiete E	ON	1	Bovespa	Ação	ativo	TIET3	-	Utilidade pública
9	8	AES Tiete E	PN	0	Bovespa	Ação	ativo	TIET4	-	Utilidade pública
10	9	AES Tiete E	UNT N2	0	Bovespa	Ação	ativo	TIET11	-	Utilidade pública
11	10	Afluente T	ON	1	Bovespa	Ação	ativo	AFLT3	R\$ 220.797,50	Utilidade pública
12	11	AGconcessoes	ON	1	Bovespa	Ação	ativo	ANDG3B	-	Financeiro e outros
13	12	AGconcessoes	PN	0	Bovespa	Ação	ativo	ANDG4B	-	Financeiro e outros
14	13	Agpart	ON	1	Bovespa	Ação	ativo	CANT3B	-	Financeiro e outros
15	14	Agpart	PN	0	Bovespa	Ação	ativo	CANT4B	-	Financeiro e outros
16	15	Alef S/A	ON	1	Bovespa	Ação	ativo	ALEF3B	-	Financeiro e outros
17	16	Alfa Consorc	ON	1	Bovespa	Ação	ativo	BRGE3	R\$ 293.368,92	Financeiro e outros
18	17	Alfa Consorc	PNA	0	Bovespa	Ação	ativo	BRGE5	R\$ 293.368,92	Financeiro e outros
19	18	Alfa Consorc	PNB	0	Bovespa	Ação	ativo	BRGE6	R\$ 293.368,92	Financeiro e outros

Filtros 1 e 2 Filtro 3 Ativos Selecionados (+)

Figura 4.2: Primeiro filtro

O item decisório avaliado em cada ativo foi o *Valor de Mercado*, que pode ser entendido como o quanto vale a empresa no mercado financeiro naquele momento. Assim, o segundo filtro foi feito com o objetivo de eliminar os ativos que possuíam o campo *Valor de Mercado* em branco conforme a figura 4.3.

E8 :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	FONTE: Econômica	Nome	Classe	Seleção de Ações Ordinárias	Seleção de Ações com todos os dados necessários	Bolsa / Fonte	Tipo de Ativo	Ativo / Cancelado	Código	Valor Mercado da empresa 31Dez13 em moeda orig em milhares	Setor Econômico Bovespa
1											
2	1	524 Particip	ON	1	0	Bovespa	Ação	ativo	QVQP3B	-	Financeiro e outros
4	3	Aco Altona	ON	1	1	Bovespa	Ação	ativo	EALT3	R\$ 57.825,00	Bens industriais
6	5	Advanced-Dh	ON	1	1	Bovespa	Ação	ativo	ADHM3	R\$ 70.782,33	Saúde
7	6	AES Elpa	ON	1	1	Bovespa	Ação	ativo	AELP3	R\$ 878.363,64	Financeiro e outros
8	7	AES Tiete E	ON	1	0	Bovespa	Ação	ativo	TIET3	-	Utilidade pública
11	10	Afluente T	ON	1	1	Bovespa	Ação	ativo	AFLT3	R\$ 220.797,50	Utilidade pública
12	11	AGconcessoes	ON	1	0	Bovespa	Ação	ativo	ANDG3B	-	Financeiro e outros
14	13	Agpart	ON	1	0	Bovespa	Ação	ativo	CANT3B	-	Financeiro e outros
16	15	Alef S/A	ON	1	0	Bovespa	Ação	ativo	ALEF3B	-	Financeiro e outros
17	16	Alfa Consor	ON	1	1	Bovespa	Ação	ativo	BRGE3	R\$ 293.368,92	Financeiro e outros
24	23	Alfa Financ	ON	1	1	Bovespa	Ação	ativo	CRIV3	R\$ 417.181,31	Financeiro e outros
26	25	Alfa Holding	ON	1	1	Bovespa	Ação	ativo	RPAD3	R\$ 309.268,02	Financeiro e outros
29	28	Alfa Invest	ON	1	1	Bovespa	Ação	ativo	BRIV3	R\$ 573.257,95	Financeiro e outros
31	30	Aliansce	ON	1	1	Bovespa	Ação	ativo	ALSC3	R\$ 2.910.174,34	Financeiro e outros
32	31	Aliperti	ON	1	0	Bovespa	Ação	ativo	APTI3	-	Consumo não cíclico
34	33	All Norte	ON	1	0	Bovespa	Ação	ativo	FRRN3B	-	Bens industriais
37	36	Alliar	ON	1	0	Bovespa	Ação	ativo	AALR3	-	Saúde
38	37	Alpargatas	ON	1	1	Bovespa	Ação	ativo	ALPA3	R\$ 5.840.925,56	Consumo cíclico

Filtros 1 e 2 Filtro 3 Ativos Selecionados

Figura 4.3: Segundo filtro

Com esses filtros, a quantidade de ativos caiu para 277. A partir disso, um terceiro filtro foi realizado com o objetivo de, agora, selecionar um ativo de cada setor, conforme a figura 4.4. A condição usada foi, como já comentado, o maior *Valor de Mercado*.

	A	B	C	D	E	F	G	H
	Valor Mercado da empresa 31Dez13 em moeda orig em milhares	Nome	Classe	Bolsa / Fonte	Tipo de Ativo	Ativo / Cancelado	Código	Setor Econômico Bovespa
1								
2	R\$ 31.374.484,54	CCR SA	ON	Bovespa	Ação	ativo	CCRO3	Bens industriais
3	R\$ 11.149.362,34	Hypera	ON	Bovespa	Ação	ativo	HYPE3	Saúde
4	R\$ 150.610.705,24	ItauUnibanco	ON	Bovespa	Ação	ativo	ITUB3	Financeiro e outros
5	R\$ 23.459.554,38	Engie Brasil	ON	Bovespa	Ação	ativo	EGIE3	Utilidade pública
6	R\$ 128.084.557,49	Bradesco	ON	Bovespa	Ação	ativo	BBDC3	Financeiro e outros
7	R\$ 68.532.638,49	Brasil	ON	Bovespa	Ação	ativo	BBAS3	Financeiro e outros
8	R\$ 56.692.598,90	Itausa	ON	Bovespa	Ação	ativo	ITSA3	Financeiro e outros
9	R\$ 54.593.158,53	Santander BR	ON	Bovespa	Ação	ativo	SANB3	Financeiro e outros
10	R\$ 51.562.062,38	Cielo	ON	Bovespa	Ação	ativo	CIEL3	Financeiro e outros
11	R\$ 14.154.560,81	Lojas Americ	ON	Bovespa	Ação	ativo	LAME3	Consumo cíclico
12	R\$ 18.369.815,62	CPFL Energia	ON	Bovespa	Ação	ativo	CPFE3	Utilidade pública
13	R\$ 49.000.000,00	BBSeguridade	ON	Bovespa	Ação	ativo	BBSE3	Financeiro e outros
14	R\$ 270.935.478,32	Ambev S/A	ON	Bovespa	Ação	ativo	ABEV3	Consumo não cíclico
15	R\$ 18.085.671,13	Sabesp	ON	Bovespa	Ação	ativo	SBSP3	Utilidade pública
16	R\$ 12.872.966,53	Dufry AG	ON	Bovespa	Ação	ativo	DAGB33	Consumo cíclico
17	R\$ 10.536.638,06	Kroton	ON	Bovespa	Ação	ativo	KROT3	Consumo cíclico
18	R\$ 20.943.026,39	B3	ON	Bovespa	Ação	ativo	B3SA3	Financeiro e outros
19	R\$ 19.332.645,98	Weg	ON	Bovespa	Ação	ativo	WEGE3	Bens industriais

Filtros 1 e 2 Filtro 3 Ativos Selecionados

Figura 4.4: Terceiro filtro

Assim, a seguinte carteira foi obtida:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Valor Mercado da empresa 31Dez13 em moeda orig em milhares	Nome	Classe	Bolsa / Fonte	Tipo de Ativo	Ativo / Cancela do	Código	Setor Econômico Bovespa
2	R\$ 31.374.484,54	CCR SA	ON	Bovespa	Ação	ativo	CCRO3	Bens industriais
3	R\$ 14.154.560,81	Lojas Americ	ON	Bovespa	Ação	ativo	LAME3	Consumo ciclico
4	R\$ 270.935.478,32	Ambev S/A	ON	Bovespa	Ação	ativo	ABEV3	Consumo não ciclico
5	R\$ 150.610.705,24	ItauUnibanco	ON	Bovespa	Ação	ativo	ITUB3	Financeiro e outros
6	R\$ 178.163.245,40	Vale	ON	Bovespa	Ação	ativo	VALE3	Materiais básicos
7	R\$ 214.687.733,90	Petrobras	ON	Bovespa	Ação	ativo	PETR3	Petróleo, gás e biocombustíveis
8	R\$ 11.149.362,34	Hypera	ON	Bovespa	Ação	ativo	HYPE3	Saúde
9	R\$ 6.028.313,01	Totvs	ON	Bovespa	Ação	ativo	TOTS3	Tecnologia da informação
10	R\$ 47.754.301,35	Telef Brasil	ON	Bovespa	Ação	ativo	VIVT3	Telecomunicações
11	R\$ 23.459.554,38	Engie Brasil	ON	Bovespa	Ação	ativo	EGIE3	Utilidade pública
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								

Figura 4.5: Carteira obtida

Com a carteira definida, foram coletados, no site <https://br.investing.com/> os dados históricos dos ativos selecionados desde o primeiro registro de cada ativo no site.

4.0.9 METODOLOGIA PARA OS INVESTIMENTOS SIMULADOS

Com os dados do ano de 2013, foram calculados o Retorno Esperado de cada ativo, o Risco de cada ativo e as covariâncias entre os ativos. Os cálculos são baseados na teoria apresentada e foram feitos utilizando as ferramentas de cálculo de média e de desvio padrão do software Microsoft Office Excel, conforme as figuras 4.6 e 4.7.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	EMPRESA:	CCR SA	Lojas Americ	Ambev S/A	ItauUnibanco	Vale	Petrobras	Hypera	Totvs	Telef Brasil	Engie Brasil
2	Setor Econômico Bovespa:	Bens industriais	Consumo ciclico	Consumo não ciclico	Financeiro e outros	Materiais básicos	Petróleo, gás e biocombustíveis	Saúde	Tecnologia da informação	Telecomunicações	Utilidade pública
3	DATA / CÓDIGO	CCRO3	LAME3	ABEV3	ITUB3	VALE3	PETR3	HYPE3	TOTS3	VIVT3	EGIE3
4	02.01.2013	-2,04%	0,11%	0,37%	1,09%	4,30%	1,48%	0,12%	1,46%	1,03%	0,12%
5	03.01.2013	1,81%	1,79%	1,79%	2,67%	-1,70%	3,73%	0,06%	-0,20%	0,68%	1,05%
6	04.01.2013	2,48%	-0,88%	-1,76%	2,04%	-1,89%	0,97%	-0,61%	-3,06%	0,23%	-2,49%
7	07.01.2013	-0,84%	0,72%	1,30%	1,61%	-1,62%	-1,92%	-0,73%	0,61%	-0,81%	-1,82%
8	08.01.2013	-0,05%	-3,53%	-0,12%	0,48%	-0,79%	-2,85%	-0,86%	0,65%	1,13%	-0,93%
9	09.01.2013	0,16%	1,77%	1,53%	3,15%	0,46%	1,01%	0,43%	0,30%	0,02%	5,16%
10	10.01.2013	0,21%	-2,25%	-0,24%	-3,40%	1,06%	0,65%	-0,06%	-0,17%	0,78%	2,38%
11	11.01.2013	0,05%	-1,21%	-1,15%	0,92%	-2,06%	0,25%	-1,05%	0,12%	0,11%	1,19%
12	14.01.2013	0,16%	-1,34%	-0,24%	0,41%	0,39%	0,10%	0,31%	0,37%	-2,09%	0,40%
13	15.01.2013	0,21%	0,24%	1,04%	-0,06%	-0,65%	-0,35%	1,00%	0,50%	0,86%	1,43%
14	16.01.2013	1,95%	0,59%	2,48%	-0,06%	-0,63%	0,35%	-0,25%	0,74%	0,34%	-1,69%
15	17.01.2013	-0,67%	2,81%	0,95%	2,09%	0,20%	-0,69%	-0,62%	3,20%	1,14%	1,15%
16	18.01.2013	-0,57%	-0,91%	1,05%	-0,12%	-0,90%	-0,80%	-0,44%	2,70%	2,04%	0,28%
17	21.01.2013	0,53%	-1,84%	-0,17%	-0,72%	-0,07%	-0,95%	0,19%	2,28%	-1,69%	3,81%
18	22.01.2013	1,98%	2,11%	0,35%	0,96%	1,40%	0,96%	2,56%	0,11%	-2,21%	-2,86%
19	23.01.2013	2,50%	-1,66%	0,17%	-1,15%	-0,73%	-0,35%	1,09%	-1,46%	0,18%	0,36%
20	24.01.2013	-3,53%	-2,97%	1,27%	0,67%	-2,08%	0,45%	-1,92%	-1,53%	-1,96%	0,56%

Figura 4.6: Dados dos ativos durante o ano de 2013

B253											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	EMPRESA:	CCR SA	Lojas Americ	Ambev S/A	ItauUnibanco	Vale	Petrobras	Hypera	Totvs	Telef Brasil	Engie Brasil
1											
2	Setor Econômico Bovespa:	Bens industriais	Consumo ciclico	Consumo não ciclico	Financeiro e outros	Materiais básicos	Petróleo, gás e biocombustíveis	Saúde	Tecnologia da informação	Telecomunicações	Utilidade pública
3	DATA / CÓDIGO	CCRO3	LAME3	ABEV3	ITUB3	VALE3	PETR3	HYPE3	TOTS3	VIVT3	EGIE3
241	12.12.2013	-0,51%	-0,48%	-1,60%	-0,87%	-0,43%	0,26%	-1,37%	-1,24%	-0,24%	-0,15%
242	13.12.2013	0,13%	0,68%	-1,11%	1,26%	-0,62%	0,92%	-0,94%	0,18%	-0,18%	-0,09%
243	16.12.2013	-0,45%	-0,29%	0,59%	0,14%	0,19%	1,57%	0,00%	1,64%	0,42%	-0,15%
244	17.12.2013	1,16%	-0,29%	-0,07%	-0,76%	-0,38%	-3,28%	-1,12%	1,00%	-1,50%	0,30%
245	18.12.2013	-0,83%	1,06%	1,18%	0,80%	0,31%	0,93%	1,59%	-0,46%	-0,58%	-0,88%
246	19.12.2013	4,63%	1,91%	2,01%	1,48%	2,13%	2,17%	0,61%	-1,49%	-0,37%	-1,46%
247	20.12.2013	-1,72%	-0,94%	-0,51%	-0,51%	-1,87%	-1,61%	-0,61%	0,95%	0,28%	0,57%
248	23.12.2013	0,13%	0,38%	0,77%	0,03%	0,31%	0,46%	-1,28%	0,15%	-0,09%	-0,57%
249	26.12.2013	-0,87%	0,56%	-0,76%	-10,85%	0,44%	-0,46%	-0,40%	-0,06%	1,44%	0,27%
250	27.12.2013	1,39%	-0,75%	0,89%	-0,61%	2,30%	0,72%	0,40%	0,53%	0,30%	-0,42%
251	30.12.2013	1,06%	1,23%	1,33%	0,96%	0,58%	0,52%	-0,28%	1,81%	2,60%	0,00%
252											
253	E[R] (RETORNO DO ATIVO)	-0,04165%	-0,17294%	0,00802%	-0,05286%	-0,07645%	-0,06238%	0,03988%	-0,04395%	-0,08423%	0,00798%
254	DESVIO PADRÃO POPULACIONAL	0,015728324	0,024477995	0,014460128	0,018234625	0,020851645	0,025561309	0,01497544	0,017183515	0,01797567	0,014718931
255											
256											
		DP e MED - cada ativo	Planilha de Covariância	Markowitz							

Figura 4.7: Retorno Esperado e Risco dos ativos com base nos dados de 2013

A partir desses dados, e aplicando a Teoria de Markowitz, foram encontrados o Retorno Esperado da carteira e o seu Risco, com composições dos ativos decididas aleatoriamente de modo a ser verificado o valor 100% na soma dos pesos.

	A	B	C	D	G	H
1	ATIVOS	E[R]	DP		ATIVOS	PESOS
2	CCR SA	-0,04165%	1,57283%		CCR SA	10%
3	Lojas Americ	-0,17294%	2,44780%		Lojas Americ	10%
4	Ambev S/A	0,00802%	1,44601%		Ambev S/A	10%
5	ItauUnibanco	-0,05286%	1,82346%		ItauUnibanco	10%
6	Vale	-0,07645%	2,08516%		Vale	10%
7	Petrobras	-0,06238%	2,55613%		Petrobras	10%
8	Hypera	0,03988%	1,49754%		Hypera	10%
9	Totvs	-0,04395%	1,71835%		Totvs	10%
10	Telef Brasil	-0,08423%	1,79757%		Telef Brasil	10%
11	Engie Brasil	0,00798%	1,47189%		Engie Brasil	10%
12					SOMA	100%
13					E[CARTEIRA]	-0,0478588710%
14					DP CARTEIRA	0,9935544615%
15						
16						

Figura 4.8: Cálculos do Retorno Esperado e Risco da Carteira de 2013

O software Microsoft Office Excel dispõe de uma função chamada Solver, que permite a otimização de determinada função sujeita a condições informadas pelo usuário. No nosso exemplo, o objetivo era minimizar o Risco da carteira, modificando as participações individuais dos ativos, sujeito às restrições:

Soma das participações individuais = 1;

Participação individual ≥ 0 ;

Só modificar as células de ativos cujos Retornos esperados são positivos.

O modelo matemático para esse problema pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\text{Min} \left(S_c = \sqrt{\sum_{j=1}^{10} \omega_j^2 I_{S_j}^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^9 \sum_{k=j+1}^{10} \omega_j \omega_k \text{cov}(I_j, I_k) \right)} \right)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{10} \omega_i = 1;$$

$$\omega_1, \dots, \omega_{10} \geq 0;$$

Só modificar as células de ativos cujos Retornos esperados são positivos.

Para essa última restrição ser respeitada, os campos de Pesos dos ativos cujos Retornos esperados em 2013 apresentaram-se em valores negativos foram zerados antes de resolver o problema de otimização.

O Solver apresenta essas informações conforme a figura 4.9.

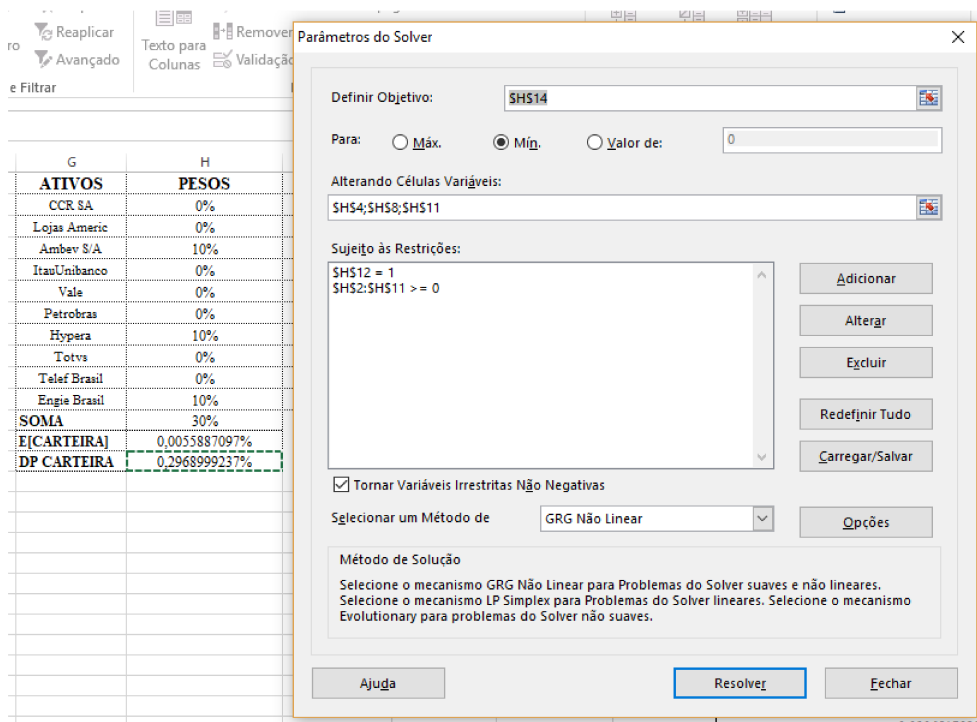


Figura 4.9: Layout do Solver

E após a execução do Solver foi apresentada a carteira ótima conforme a figura 4.10.

A partir dos dados de Retorno Esperado e Risco da carteira ótima foi gerada no gráfico Risco-Retorno a Fronteira Eficiente conforme mostra a figura 4.11.

	A	B	C	D	G	H
1	ATIVOS	E[R]	DP		ATIVOS	PESOS
2	CCR SA	-0,04165%	1,57283%		CCR SA	0%
3	Lojas Americ	-0,17294%	2,44780%		Lojas Americ	0%
4	Ambev S/A	0,00802%	1,44601%		Ambev S/A	36%
5	ItauUnibanco	-0,05286%	1,82346%		ItauUnibanco	0%
6	Vale	-0,07645%	2,08516%		Vale	0%
7	Petrobras	-0,06238%	2,55613%		Petrobras	0%
8	Hypera	0,03988%	1,49754%		Hypera	30%
9	Totvs	-0,04395%	1,71835%		Totvs	0%
10	Telef Brasil	-0,08423%	1,79757%		Telef Brasil	0%
11	Engie Brasil	0,00798%	1,47189%		Engie Brasil	34%
12					SOMA	100%
13					E[CARTEIRA]	0,0176517809%
14					DP CARTEIRA	0,9882461560%
15						

Figura 4.10: Composição ótima da carteira gerada pelo Solver

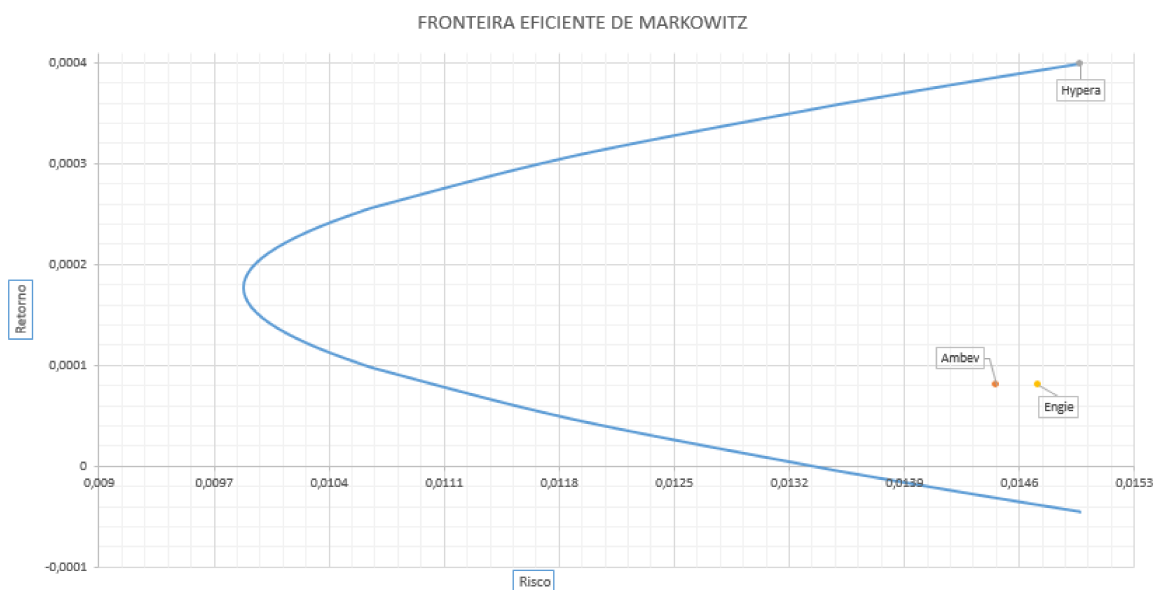


Figura 4.11: Fronteira Eficiente da carteira de 2013

Esse processo foi repetido para os dados dos anos 2014, 2015, 2016 e 2017 conforme figuras a seguir, que mostram as carteiras ótimas resolvidas pelo Solver e seus respectivos gráficos de fronteira eficiente.

	A	B	D	F	G	H
1	ATIVOS	E[R]	DP		ATIVOS	PESOS
2	CCR SA	-0,01661%	2,19585%		CCR SA	0,0%
3	Lojas Americ	0,02230%	1,98478%		Lojas Americ	12,6%
4	Ambev S/A	0,00185%	1,56544%		Ambev S/A	28,0%
5	ItauUnibanco	-0,00456%	2,38294%		ItauUnibanco	0,0%
6	Vale	-0,15907%	1,99739%		Vale	0,0%
7	Petrobras	-0,13710%	3,32640%		Petrobras	0,0%
8	Hypera	-0,01085%	1,58616%		Hypera	0,0%
9	Totvs	0,00415%	1,82520%		Totvs	28,5%
10	Telef Brasil	0,04343%	1,95203%		Telef Brasil	17,6%
11	Engie Brasil	0,00702%	1,78531%		Engie Brasil	13,2%
12					SOMA	100%
13					E[CARTEIRA]	0,0131075187%
14					DP CARTEIRA	1,1120947682%
15						

Figura 4.12: Carteira ótima de 2014

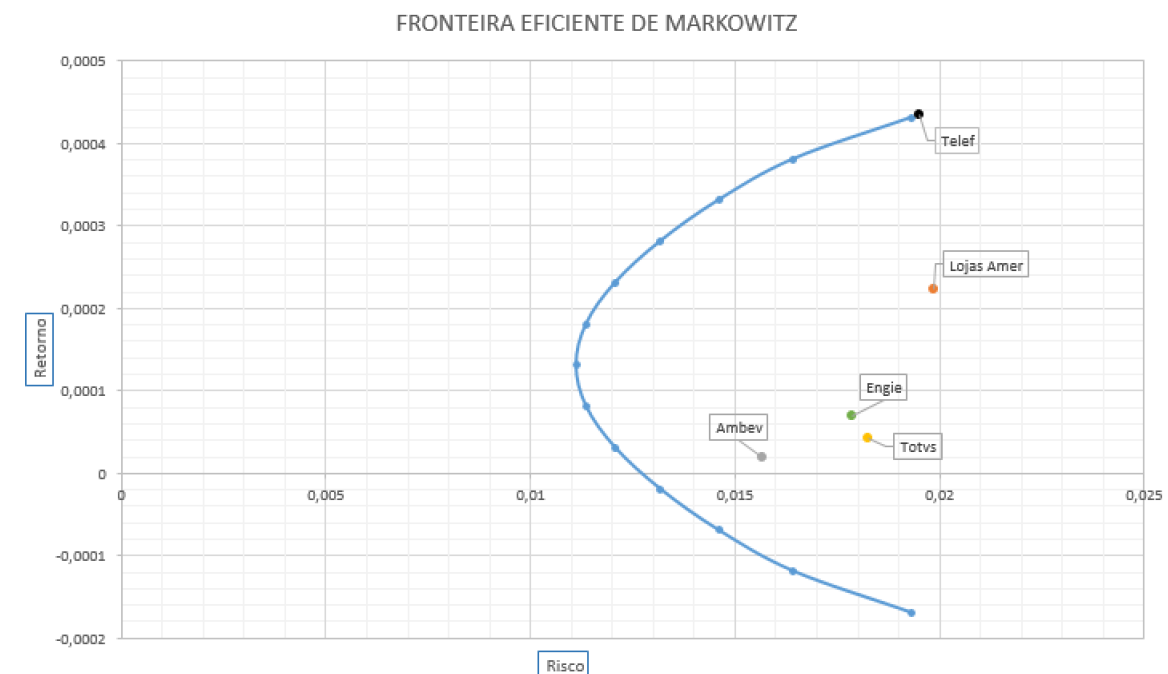


Figura 4.13: Fronteira Eficiente da carteira de 2014

	A	B	D	F	G	H
1	ATIVOS	E[R]	DP		ATIVOS	PESOS
2	CCR SA	-0,00955%	2,19720%		CCR SA	0%
3	Lojas Americ	0,00707%	2,16109%		Lojas Americ	9%
4	Ambev S/A	0,06020%	1,28556%		Ambev S/A	71%
5	ItauUnibanco	-0,03341%	1,82824%		ItauUnibanco	0%
6	Vale	-0,13374%	3,61683%		Vale	0%
7	Petrobras	0,03195%	3,96189%		Petrobras	0%
8	Hypera	0,13260%	2,26749%		Hypera	9%
9	Totvs	-0,00764%	2,34187%		Totvs	0%
10	Telef Brasil	-0,00561%	2,14642%		Telef Brasil	0%
11	Engie Brasil	0,02610%	1,80525%		Engie Brasil	11%
12					SOMA	100%
13					E[CARTEIRA]	0,0581857724%
14					DP CARTEIRA	1,2328853342%
15						

Figura 4.14: Carteira ótima de 2015

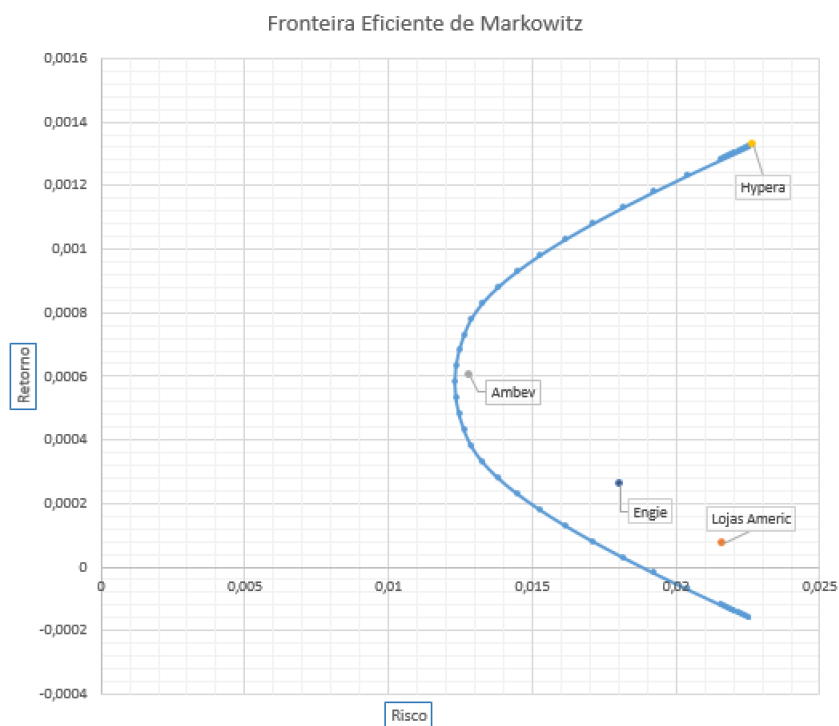


Figura 4.15: Fronteira Eficiente da carteira de 2015

	A	B	D	F	G	H
1	ATIVOS	E[R]	DP		ATIVOS	PESOS
2	CCR SA	0,12643%	2,44681%		CCR SA	0%
3	Lojas Americ	0,09639%	2,09449%		Lojas Americ	8%
4	Ambev S/A	-0,02189%	1,37036%		Ambev S/A	0%
5	ItauUnibanco	0,15124%	2,14515%		ItauUnibanco	0%
6	Vale	0,36217%	4,23533%		Vale	4%
7	Petrobras	0,34627%	3,82543%		Petrobras	0%
8	Hypera	0,09205%	1,85799%		Hypera	15%
9	Totvs	-0,07831%	2,20266%		Totvs	0%
10	Telef Brasil	0,05261%	2,25910%		Telef Brasil	17%
11	Engie Brasil	0,03040%	1,36919%		Engie Brasil	57%
12					SOMA	100%
13					E[CARTEIRA]	0,0602606281%
14					DP CARTEIRA	1,2398738899%

Figura 4.16: Carteira ótima de 2016

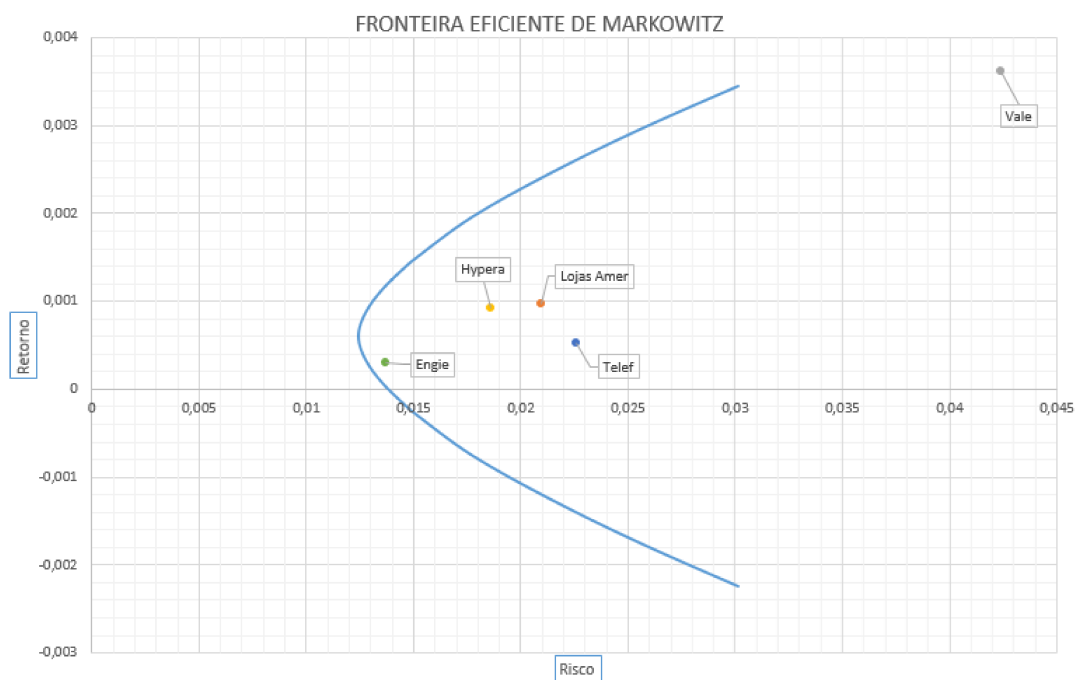


Figura 4.17: Fronteira Eficiente da carteira de 2016

	A	B	D	F	G	H
1	ATIVOS	E[R]	DP		ATIVOS	PESOS
2	CCR SA	0,02453%	1,94053%		CCR SA	0%
3	Lojas Americ	0,03390%	1,70702%		Lojas Americ	0%
4	Ambev S/A	0,11146%	1,06018%		Ambev S/A	67%
5	ItauUnibanco	0,09207%	1,45584%		ItauUnibanco	0%
6	Vale	0,21301%	2,45309%		Vale	0%
7	Petrobras	0,02008%	2,04755%		Petrobras	0%
8	Hypera	0,12915%	1,36706%		Hypera	1%
9	Totvs	0,10370%	1,73988%		Totvs	21%
10	Telef Brasil	0,06833%	1,66277%		Telef Brasil	11%
11	Engie Brasil	0,01297%	1,18852%		Engie Brasil	0%
12					SOMA	100%
13					E[CARTEIRA]	0,1053828021%
14					DP CARTEIRA	0,9615141661%
15						

Figura 4.18: Carteira ótima de 2017

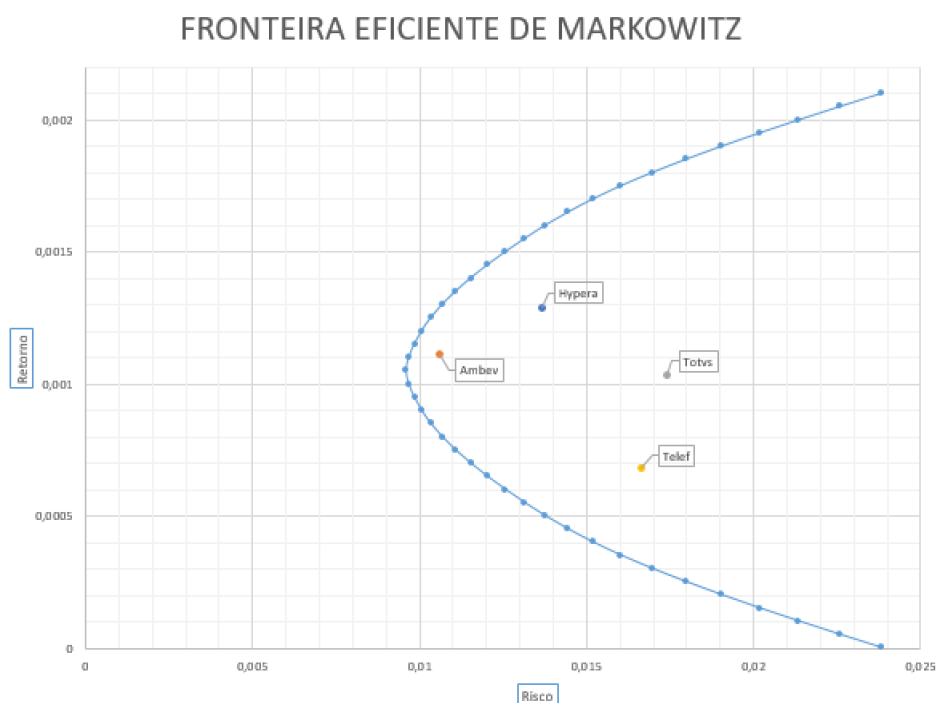


Figura 4.19: Fronteira Eficiente da carteira de 2017

4.0.10 APURAÇÃO DOS INVESTIMENTOS

A primeira carteira ótima foi obtida a partir da análise dos dados dos ativos envolvidos durante o ano de 2013. A simulação do investimento foi feita para o período janeiro de 2014 à janeiro de 2015.

A figura 4.20 é a tela da planilha de apuração das carteiras 1 e 2, e nessa planilha as células F3 à F12 se referem às diferenças entre as respectivas células dos intervalos D3 à D12 e E3 à E12. A célula F13 contém a fórmula = *SOMARPRODUTO*(C3 : C12; F3 : F12), que faz a combinação linear entre a composição e o resultado de cada ativo. A célula F14 apresenta o Retorno da carteira em porcentagem. As células da linha 15 mostra o rendimento do índice Ibovespa no mesmo período da aplicação de cada carteira. O Ibovespa, Índice da Bolsa de Valores de São Paulo é formado por uma carteira teórica de ações que reúne as companhias mais representativas da bolsa em termos de negociações. O Ibovespa é o principal índice da B3, pois mede o desempenho médio do mercado acionário brasileiro. Um comparativo em relação ao Retorno da carteira e o índice supracitado será feito no próximo capítulo.

A mesma explicação acima vale para os dados apresentados nas figuras 4.21.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			APLICAÇÃO EM 2014 - CARTEIRA 1				APLICAÇÃO EM 2015 - CARTEIRA 2			
2			COMPOSIÇÃO	02/01/2014	02/01/2015	RESULTADO	COMPOSIÇÃO	02/01/2015	04/01/2016	RESULTADO
3	CCR SA	CCRO3	0%			0	0,0%			0
4	Lojas Americ	LAME3	0%			0	12,6%	10,84	9,71	-1,13
5	Ambev S/A	ABEV3	36%	16,08	15,39	-0,69	28,0%	15,39	17,09	1,7
6	ItauUnibanco	ITUB3	0%			0	0,0%			0
7	Vale	VALE3	0%			0	0,0%			0
8	Petrobras	PETR3	0%			0	0,0%			0
9	Hypera	HYPE3	30%	17,47	16,19	-1,28	0,0%			0
10	Totvs	TOTS3	0%			0	28,5%	34,6	30,69	-3,91
11	Telef Brasil	VIVT3	0%			0	17,6%	34,62	30,25	-4,37
12	Engie Brasil	EGIE3	34%	33,66	31,24	-2,42	13,2%	31,24	32,38	1,14
13	Produto das composições pelos respectivos valores			22,45499736	21,00048065	-1,454516707		25,7755429	24,3747773	-1,4007657
14	Retorno da carteira em porcentagem					-6,48%				-5,43%
15	ÍNDICE BOVESPA (BVSP)					-5,81%				-15,73%

Figura 4.20: Apuração das carteiras de 2014 e 2015

	A	B	K	L	M	N	O	P	Q	R
1			APLICAÇÃO EM 2016 - CARTEIRA 3				APLICAÇÃO EM 2017 - CARTEIRA 4			
2			COMPOSIÇÃO	04/01/2016	02/01/2017	RESULTADO	COMPOSIÇÃO	02/01/2017	02/01/2018	RESULTADO
3	CCR SA	CCRO3	0%			0	0%			0
4	Lojas Americ	LAME3	9%	9,71	12,5	2,79	8%	12,5	12,58	0,08
5	Ambev S/A	ABEV3	71%	17,09	16,31	-0,78	0%	16,31	21,69	5,38
6	ItauUnibanco	ITUB3	0%			0	0%			0
7	Vale	VALE3	0%			0	4%	25,06	41,72	16,66
8	Petrobras	PETR3	0%			0	0%			0
9	Hypera	HYPE3	9%	21,09	26,17	5,08	15%	26,17	35,95	9,78
10	Totvs	TOTS3	0%			0	0%			0
11	Telef Brasil	VIVT3	0%			0	17%	35,37	41,4	6,03
12	Engie Brasil	EGIE3	11%	32,38	34,85	2,47	57%	34,85	35,72	0,87
13	Produto das composições pelos respectivos valores			18,49458112	18,91686985	0,42228873		31,5669666	35,1072061	3,54023955
14	Retorno da carteira em porcentagem					2,28%				11,22%
15	ÍNDICE BOVESPA (BVSP)					37,46%				29,33%

Figura 4.21: Apuração das carteiras de 2016 e 2017

	A	B	S	T	U	V
1	APLICAÇÃO EM 2018 - CARTEIRA 5					
2			COMPOSIÇÃO	02/01/2018	31/10/2018	RESULTADO
3	CCR SA	CCRO3	0%			0
4	Lojas Americ	LAME3	0%			0
5	Ambev S/A	ABEV3	68%	21,69	16,34	-5,35
6	ItauUnibanco	ITUB3	0%			0
7	Vale	VALE3	0%			0
8	Petrobras	PETR3	0%			0
9	Hypera	HYPE3	0%			0
10	Totvs	TOTS3	21%	30,15	25,10	-5,05
11	Telef Brasil	VIVT3	11%	41,4	39,00	-2,4
12	Engie Brasil	EGIE3	0%			0
13	Produto das composições pelos respectivos valores			25,5861183	20,6178542	-4,9682641
14	Retorno da carteira em porcentagem					-19,42%
15	ÍNDICE BOVESPA (BVSP)					14,43%

Figura 4.22: Apuração da carteira de 2018

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A aplicação do modelo de Markowitz gerou resultados de Retorno esperado da carteira inferior ao do Ibovespa na carteira 1. O momento político vivido pelo país no intervalo anual de 2015 a 2016 foi intenso e turbulento, considerando que houve o impedimento da então presidente da república, Dilma Rousseff, fato que pode ter sido potencializador para os resultados negativos tanto do Ibovespa quanto das carteiras recomendadas pelo método em estudo.

Na carteira 2, a bolsa continuou o seu mergulho, com a constatada involução dos negócios, ainda sofrendo a grande influência política que causou a recessão econômica no país. Apesar disso, a carteira apresentou desempenho melhor que o Ibovespa.

Na carteira 3, a reação das empresas começa a ser percebida, tendo a carteira fechado o período com retorno positivo, porém nesse momento, o Ibovespa apresentou retorno superior, puxado pela recuperação geral da economia brasileira.

O resultado da carteira 4 foi parecido com o da carteira 3, considerando que foi positivo porém menor que o Ibovespa.

Finalmente, na carteira 5, pode-se verificar uma recuada da carteira muito grande considerando a referência tomada para o experimento, o Ibovespa. Aqui, devem ser observados fatores específicos de cada empresa. A Ambev apresentou resultados abaixo do esperado pelos investidores ao longo de 2018, forçando a queda nos papéis da empresa. O gráfico dos últimos anos da Totvs apresentou topos e fundos descendentes, e em 2018 houve demais fatores internos da empresa. Já a Telef Brasil apresentou recuo, que pode ser explicado pela saturação das empresas de telefonia.

6. CONCLUSÕES

A Teoria de Carteiras tem um valor indubitável na área da Economia, referenciado por sua premiação em 1990 com o Prêmio Nobel de Ciências Econômicas. Como já comentado nesse trabalho, a partir do artigo intitulado Portfolio Selection, publicado por Markowitz em 1952, outros economistas aprofundaram seus estudos nessa área contribuindo para o enriquecimento da teoria nos anos seguintes.

Os resultados apresentados no capítulo anterior, mesmo que nem todos com boas rentabilidades, não contradiz a importância da Teoria Moderna de Carteiras. Devem ser considerados como importantes para obtenção de conclusões a respeito do presente estudo, alguns itens limitantes, que serão apresentados a partir de agora.

Um fator limitante desse trabalho foi a quantidade de ativos envolvidos na carteira. A seleção foi restrita a um ativo por setor totalizando assim somente 10 ações para compor o portfólio. Deve-se levar em consideração para estudos futuros a possibilidade de aumento dessa quantidade.

Outro item que pode ser considerado como limitante é sobre os cálculos dos Retornos esperados e riscos dos ativos que foram calculados ao final de cada ano, e com isso, impactos gerados por fatores como o processo de impeachment da presidenta Dilma ou a renúncia do presidente da Câmara dos Deputados Eduardo Cunha poderiam ter sido evitados.

Além disso, foi determinada uma data para apuração do resultado de cada carteira, ou seja, a simulação da venda das ações foi feita sempre no primeiro dia útil de cada ano, sem um acompanhamento prévio para avaliação do melhor período para a venda. Não houve também permissão de alavancagem ou venda a descoberto que pode ser entendida como a venda de títulos que o investidor não possui. Essa modalidade quando bem gerenciada pode trazer grandes ganhos ao investidor.

Observando os aspectos limitantes do trabalho, recomenda-se para trabalhos futuros, a reavaliação das carteiras 1, 2, 3, 4 e 5, considerando cálculos de Retornos esperados e riscos mensais. Pode-se usar também outra modelagem da Teoria Moderna de Carteiras, que, a partir do artigo publicado por Markowitz em 1982, foi ampliada e agregadas novas técnicas e análises. Outra questão importante a ser considerada em trabalhos futuros é o acompanhamento mais ativo do desempenho dos ativos possibilitando a venda das ações em datas mais propícias e a permissão de alavancagem. O objetivo seria buscar melhorias nos Retornos consolidados na apuração das carteiras.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] B3: *Bolsa de Valores*, 2017. http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/servicos/market-data/consultas/historico-pessoas-fisicas/, acesso em 31/08/2017.
- [2] BUSSAB, Wilton de O. e MORETTIN, Pedro A.: *Estatística Básica*. Saraiva, 5ª ed., 2002.
- [3] BOLDRINI, José Luiz e COSTA, Sueli I. Rodrigues e RIBEIRO, Vera Lúcia F.F. e WETZLER, Henry G.: *Álgebra Linear*. Harper & Row do Brasil, 2ª ed., 1980.
- [4] ELTON, Edwin J. e GRUBER, Martin J.: *Modern portfolio theory and investment analysis*. John Wiley & Sons, 5ª ed., 1995.
- [5] SECURATO, José Roberto : *Decisões Financeiras em condições de risco*. Atlas , 1ª ed., 1996.
- [6] GITMAN, Lawrence J. e JOEHNK, Michael D.: *Princípios de investimentos*. Pearson Addison Wesley , 8ª ed., 2005.
- [7] KAZMIER, Leonard J. : *Estatística aplicada à economia e administração*. Coleção Schaum, McGraw-hill do Brasil , 1982.
- [8] MARKOWITZ, H.: *Portfolio selection*. Journal of finance, 7:77–91, 1952. https://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz_JF.pdf, acesso em 10/07/2018.
- [9] SEBASTIÃO, Gilsomar Maia.: *Fato Relevante*. Departamento de Relações com Investidores, 2015, [https://ri.totvs.com.br/ptb/2332/20151201_FR_CFO%20\(PORT\).pdf](https://ri.totvs.com.br/ptb/2332/20151201_FR_CFO%20(PORT).pdf), acesso em 14/11/2018.