



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL



ILDA APARECIDA DA SILVA VAN DER MER

**APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE VOLUME: UMA PROPOSTA
DIDÁTICA COMPARTILHADA COM LICENCIANDOS DA
MATEMÁTICA**

ITUIUTABA – MG
2017



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL



ILDA APARECIDA DA SILVA VAN DER MER

**APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE VOLUME: UMA PROPOSTA
DIDÁTICA COMPARTILHADA COM LICENCIANDOS DA
MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito avaliativo para obtenção do Título de Mestre, sob a orientação da Professora Doutora Odaléa Aparecida Viana.

ITUIUTABA – MG
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

V228a Van Der Mer, Ilda Aparecida da Silva, 1960-
2017 Aprendizagem do conceito de volume : uma proposta didática
compartilhada com licenciandos da matemática / Ilda Aparecida da Silva
Van Der Mer. - 2017.
102 f. : il.

Orientadora: Odaléa Aparecida Viana.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de
Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e
Matemática.

Inclui bibliografia.

1. Ciência - Estudo e ensino - Teses. 2. Aprendizagem experimental
- Teses. 3. Matemática - Formação de professores - Teses. 4. Prática de
ensino - Formação de professores - Teses. 5. Geometria (Ensino
fundamental) - Estudo e ensino - Teses. I. Viana, Odaléa Aparecida. II.
Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em
Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 50:37

TERMO DE APROVAÇÃO

ILDA APARECIDA DA SILVA VAN DER MER

APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE VOLUME: UMA PROPOSTA DIDÁTICA COMPARTILHADA COM LICENCIANDOS DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito avaliativo do Título de Mestre, sob a Orientação da Professora Doutora Odaléa Aparecida Viana.

Aprovado em ____/____/____.

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dr.^a. Odaléa Aparecida Viana
Universidade Federal de Uberlândia- UFU
Orientadora

Prof.^a Dr.^a. Érica Valéria Alves
Universidade do Estado da Bahia - UNEB
Membro da Banca

Prof.^a Dr.^a. Cristiane Coppe de Oliveira
Universidade Federal de Uberlândia- UFU
Membro da Banca

ITUIUTABA – MG
2017

DEDICATÓRIA

Aos meus filhos:

Enrique e Rafaela, com imenso carinho!

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é produto da minha história pessoal iniciada em 1967, no pré-escolar, com a professora que me ensinou as primeiras letras, e de outras pessoas que vêm contribuindo até hoje para a compreensão dos conceitos da aprendizagem. Seria praticamente impossível nomear todos aqueles que colaboraram para minha formação acadêmica e pessoal, pois são inúmeros os que, numa simples conversa de amigos, ajudou-me a chegar até aqui. A estes, agradeço por fazerem parte da minha caminhada.

Muito Obrigada:

Deus, por não me deixar desistir de lutar sempre e me animar nas horas mais difíceis: na solidão, na doença, na falta de fé e nas vezes em que segurou minha mão.

Agradeço imensamente aos meus pais pela minha vida, pois sei que para estar aqui tive que buscar meus sonhos.

Um especial agradecimento à Universidade Federal de Uberlândia – UFU por esta oportunidade. Em especial, à coordenação do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

A todos os professores que passaram por minha vida, desde a primeira que segurou minha mão até os professores do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, por tudo que me proporcionaram.

À Professora Doutora Odaléa Aparecida Viana, orientadora deste trabalho, que disponibilizou seus saberes para meu crescimento educacional, profissional e humano.

A todos os alunos com quem convivi, pois foram o motivo dos meus estudos, minhas ansiedades e experiências. Muitos deles encontro pela rua, em seu local de trabalho ou na Universidade, e alguns jamais esqueceram minhas palavras, mesmo as incorretas. Cada vez que podia dialogar com meus alunos e ouvi-los, sentia que um pouco de mim ficava com eles.

VAN DER MER, I. A. da S. **Aprendizagem do conceito de volume:** uma proposta didática compartilhada com licenciandos da matemática. 2017. 106 f. Dissertação [Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática]. Universidade Federal de Uberlândia – MG.

RESUMO

Este trabalho visa analisar uma proposta didática para o ensino do conceito de volume a alunos do Ensino Fundamental, tendo sido a mesma compartilhada junto a oito licenciandos do subprojeto Matemática PIBID/UFU na forma de um minicurso desenvolvido em três encontros de noventa minutos; este teve o intuito de resgatar as principais ideias dos alunos sobre o conceito de volume bem como coletar suas opiniões acerca da metodologia empregada. Com base na teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, teve-se por objetivos: (a) analisar a potencialidade do material apresentado, composto por dois tipos de atividades: aquelas que, por meio de questionamentos, discussões e manipulação de materiais visaram articular as grandezas volume, massa e conteúdo; e as que envolviam a solução de problemas envolvendo comparação, medição e produção de paralelepípedos; (b) analisar o desempenho dos licenciandos no desenvolvimento das atividades e (c) analisar as opiniões deles acerca do trabalho desenvolvido. Foram utilizada filmagem, gravação de áudio, registros fotográficos. A análise da aplicação da sequência indica que as questões e os problemas propostos favoreceram as articulações necessárias para a formação do conceito e que o material tem elementos para ser considerado como potencialmente significativo para a construção do conceito de volume e pode ser aplicado a alunos do ensino fundamental, desde que seja adaptado à sua realidade.

Palavras-chave: Aprendizagem significativa. Conceito de volume. Sequência didática.

VAN DER MER, I. A. da S. Learning of the concept of volume: a didactic proposal shared with graduates of mathematics. 2017. 106 f. Dissertation [Professional Master's Degree in Science and Mathematics Teaching]. Federal University of Uberlândia - MG.

ABSTRACT

This work aims at analyzing a didactic proposal for the teaching of the concept of volume the elementary students, having been the same shared with eight students of the subproject Mathematics "PIBID/UFU" in the form of a short course developed on three dates of 90 minutes, this had to rescue the main ideas of the students about the concept of volume as well as to collect their views on the methodology employed. Based on meaningful learning theory of David Ausubel, had for objectives: (a) examine the potential of material presented, consisting of two types of activities: those who, by means of questions, discussions and handling materials aimed at articulating the volume, mass and content, and those that involve problem solving involving comparison, measurement and production of paving stones; (b) analyze the performance of students in the development of activities and (c) analyze their opinions about work. Were used in filming, audio recording, photographic records, the review of the implementation of the string that indicates that the issues and the problems proposed favored the joints necessary for the formation of the concept, and that the material has to be considered as potentially significant for the construction of the concept of volume and can be applied to elementary school students, since the discussions are adapted to their reality.

Keywords: Meaningful learning. Concept of volume. Didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 01	Quadros de compreensão do conceito de área como grandeza....	31
Figura 02	Princípio de Cavalieri (I).....	41
Figura 03	Princípio de Cavalieri (II).....	42
Figura 04	1ª questão da Sequência Didática	56
Figura 05	2ª questão da Sequência Didática	57
Figura 06	3ª questão da Sequência Didática	58
Figura 07	4ª questão da Sequência Didática	59
Figura 08	5ª questão da Sequência Didática	60
Figura 09	Parte da 6ª questão da Sequência Didática	60
Figura 10	Respostas à 6ª questão da Sequência Didática.....	61
Figura 11	7ª questão da Sequência Didática.....	62
Figura 12	Ações realizadas para responder à 8ª questão.....	63
Figura 13	Exemplo de tabela solicitada na 8ª questão	64
Figura 14	Ações realizadas para responder à 9ª questão.....	65
Figura 15	Ações realizadas para responder à 10ª questão.....	66
Figura 16	Ações realizadas para responder à 11ª questão.....	66
Figura 17	Tabela de transformação de unidade de capacidade, volume, área, comprimento e massa.....	67
Figura 18	Tabela de comparação de volume, capacidade e massa de alguns materiais.....	69
Figura 19	Ações realizadas para responder ao 1º e 2º problema.....	70
Figura 20	Aresta do cubo.....	71
Figura 21	Volume do sólido.....	71
Figura 22	Resposta ao questionamento do problema nº. 05.....	72
Figura 23	Resposta ao questionamento do problema nº. 06.....	72
Figura 24	Resposta ao questionamento do problema nº. 07.....	73

LISTA DE ABREVIATURAS

CAPES	Conselho de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CBC's	Currículos Básicos Comuns
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FACIP	Faculdade de Ciências Integradas do Pontal
GEMP	Geometria Espacial Métrica e Posicional
MEC	Ministério da Educação
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNDL	Plano Nacional do Livro Didático
PIBID	Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
SEB	Secretaria de Educação Básica
SAEB/MEC	Sistema de Avaliação da Educação Básica do Ministério da Educação
TCP	Teoria dos Construtos Pessoais

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	11
CAPÍTULO 1: A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA.....	14
1.1 Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel.....	14
1.2 Tipos de aprendizagem significativa.....	17
1.3 Formas de aprendizagem significativa: subordinação, superordenação e aprendizagem combinatória.....	19
1.4 Aprendizagem por descoberta e por recepção.....	19
1.5 Condições para a existência da aprendizagem significativa	21
1.6 Organizadores prévios.....	22
CAPÍTULO 2: O ENSINO DA GEOMETRIA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE VOLUME DE SÓLIDOS.....	23
2.1 Um breve histórico sobre a geometria.....	23
2.2 Algumas orientações curriculares.....	26
2.3 As dificuldades em geometria: breve revisão bibliográfica.....	28
2.4 O conceito de volume.....	37
2.5 Alguns pressupostos da resolução de problemas.....	44
2.6 Os problemas de volume.....	51
CAPÍTULO 3: OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DO MINICURSO E DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	53
3.1 Objetivos do trabalho.....	53
3.2 Os procedimentos do minicurso.....	54
3.3 A sequência didática: descrição das atividades e da aplicação no minicurso.....	55
CAPÍTULO 4: ANÁLISE E DISCUSSÃO.....	73
4.1 A potencialidade significativa do material e a articulação entre os quadros geométrico, numérico e de grandezas.....	73
4.2 A potencialidade significativa do material e a articulação entre as grandezas volume, massa e conteúdo	74
4.3 A resolução de problemas.....	76
4.4 As ideias dos licenciandos do PIBID.....	78
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	81
REFERÊNCIAS.....	85
ANEXO A.....	92
ANEXO B	101
ANEXO C	102

INTRODUÇÃO

Com base na experiência de mais de vinte anos como professora de matemática das redes municipal e estadual de Minas Gerais, considero que alguns conteúdos matemáticos parecem exigir do docente não apenas o domínio dos conceitos e procedimentos, mas principalmente de conhecimento de estratégias e metodologias que proporcionem aos alunos uma aprendizagem cada vez mais significativa e proveitosa. Entre os conteúdos trabalhados ao longo desta trajetória destaca-se o conceito de volume de sólidos geométricos, tema em que os alunos apresentam significativas dificuldades de compreensão e entendimento.

O conceito de volume de sólidos pertence a dois blocos de conteúdos da aprendizagem, conforme indicado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998). No bloco “Espaço e Forma” são estudados as figuras geométricas espaciais que, entre outras características, possuem volume; já no bloco “Grandezas e Medidas” consta o estudo de algumas grandezas como volume, área, massa, tempo, etc. e de seus respectivos sistemas de medida. Apesar de o tema poder ser explorado em diversas situações do cotidiano, verificam-se, junto aos acadêmicos, diversas dificuldades quando realizadas tentativas de se resolver problemas simples envolvendo o estudo de volume das figuras geométricas. Frequentemente, os mesmos fazem uso mecânico de fórmulas sem necessariamente demonstrar real entendimento do conceito.

A aprendizagem significativa é definida por David Ausubel (2003) como um processo que permite que uma nova informação, um novo conceito ou uma nova ideia se incorpore à estrutura cognitiva do sujeito a partir da relação com os conhecimentos que o mesmo já possui. Quando a relação é arbitrária, a aprendizagem é chamada de mecânica; seria esse o caso, por exemplo, de aprender a aplicar fórmulas de volume de figuras geométricas em exercícios repetitivos.

A aprendizagem mecânica pode dificultar o processo de resolução de problemas. A dificuldade dos alunos em resolver problemas envolvendo conceitos de geometria pode ser constatada por meio das avaliações realizadas pelo estado de Minas Gerais nas escolas da rede pública de ensino. Levantamento realizado por Viana (2010) constatou que a porcentagem de acertos nas questões envolvendo a geometria espacial era de apenas 41%, ou seja, o desempenho foi considerado pouco satisfatório. Especificamente no tema volume, Viana (2015) verificou que os alunos pesquisados não conseguiam resolver problemas simples de comparação de

capacidade e concluiu que eles pareciam não compreender o conceito de volume e demonstravam competência métrica pouco desenvolvida. Conforme apontado por Figueiredo e colaboradores (2014), nos livros didáticos pode ser verificado a ênfase exagerada na utilização de fórmulas e conversão de unidades, o que não contribui para a formação do conceito.

Muitas ideias estão relacionadas ao tema volume e alguns autores investigaram a formação deste conceito. Com base nos estudos para a construção do conceito de área realizados por Douady e Perrin-Glorian (1989) e Barros (2002) sintetizou-se a distinção entre três quadros¹: o quadro geométrico, composto pelas figuras geométricas espaciais; o quadro numérico, composto pelos números reais positivos e o quadro das grandezas, constituído de classes de equivalência de sólidos de mesmo volume, as quais podem ser representadas pelo par número/unidade de medida.

Já os trabalhos de Figueiredo (2013), Moraes (2012, 2013), Oliveira (2002, 2007) e Rodrigues (2011) utilizaram metodologia de ensino para o conceito de volume com base na articulação das grandezas massa e conteúdo. Tais autores também destacaram a utilização de problemas classificados como: problemas de comparação, de medição, de produção e de imersão de sólidos em líquidos para a compreensão do conceito de volume, de modo que os alunos pudessem atribuir significados às novas ideias a partir de seus conhecimentos prévios advindos do cotidiano. Conforme Ausubel (2003), além dos conhecimentos prévios e da motivação dos alunos, uma condição para a atribuição de significados refere-se ao material apresentado ao aluno, que deve ser potencialmente significativo, isto é, ser organizado numa sequência lógica e numa linguagem adequada. Assim, com base nos estudos realizados, planejou-se, inicialmente, uma proposta didática para o ensino do conceito de volume direcionada a alunos do ensino fundamental. As atividades propostas deveriam favorecer a articulação entre as grandezas volume, massa e conteúdo e os problemas envolviam comparação, medição e produção de sólidos.

No entanto, avaliando a complexidade das ideias envolvidas no conceito e, principalmente, da metodologia a ser empregada, questionou-se se estudantes de licenciatura em Matemática poderiam contribuir neste processo de elaboração de

¹ Um Quadro é um objeto matemático, constituído de conceitos, procedimentos e de relações. Por vezes é necessário mobilizar dois ou mais quadros para resolver uma situação (BARROS, 2002).

atividades e de problemas com vistas à aprendizagem significativa de conceitos. Como a orientadora deste trabalho era coordenadora do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), direcionou-se o estudo para os licenciandos do subprojeto Matemática/FACIP/UFU.

Justifica-se a opção de direcionar a atividade para os licenciandos pelo fato de que caberá a esses futuros profissionais a tarefa de planejar, organizar e desenvolver atividades que favoreçam a aprendizagem significativa de conceitos e de procedimentos matemáticos. Além disso, um dos objetivos do programa é fazer o estudante vivenciar situações de sala de aula de modo a contribuir com a melhoria das práticas pedagógicas. Acrescenta-se que a coordenadora do subprojeto já mantinha a prática de elaborar atividades com o objetivo de contribuir, a princípio, para a formação conceitual dos próprios participantes; posteriormente, as sequências didáticas eram direcionadas aos alunos do ensino fundamental das escolas parceiras do programa. Em sua visão, alguns conceitos e procedimentos referentes à geometria espacial do ensino básico não estão plenamente consolidados pelos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática; a autora argumenta que, em várias disciplinas, para a compreensão das definições e das demonstrações propostas em aula pelo professor, é necessário um nível de formação conceitual muito acima daquele em que se encontram os alunos (VIANA, 2009, p.156).

Desta forma, este trabalho pretende responder aos questionamentos: Uma sequência didática baseada em atividades que articulem as grandezas volume, massa e conteúdo e em problemas envolvendo comparação, medição e produção pode efetivamente contribuir para a aprendizagem significativa do conceito de volume? Como os licenciandos participantes do “Matemática/PIBID” podem contribuir na discussão da potencialidade significativa desse material didático?

Para responder a estas perguntas, elaborou-se sequência didática que foi aplicada e discutida junto aos licenciandos do subprojeto “Matemática/PIBID” na forma de minicurso aplicado aos mesmos em conjunto com a coordenadora do subprojeto Matemática. O produto educacional deste trabalho, vinculado ao Mestrado Profissional de Ciências e Matemática, foi organizado a partir das reflexões procedentes da experiência realizada pela pesquisadora junto aos licenciandos em sala de aula.

CAPÍTULO 1

A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

1.1 Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel

A teoria da aprendizagem significativa de Ausubel fundamenta-se na premissa de que a mente humana tem uma estrutura organizada e hierarquizada de conhecimentos que é continuamente diferenciada pela assimilação de novos conceitos, proposições e ideias.

A aprendizagem significativa se dá quando as novas ideias se relacionam de forma não arbitrária e substantiva com as ideias já existentes. Já na aprendizagem mecânica os novos conteúdos não se relacionam de forma lógica e clara com nenhuma ideia já existente na estrutura cognitiva do sujeito, mas são memorizados e apenas armazenados de forma arbitrária, o que não garante flexibilidade no seu uso, nem longevidade.

Ausubel (1980; 2000) entende que a aprendizagem significativa pode ocorrer seja pelo processo de descoberta, seja pelo processo de recepção. No processo de descoberta cabe ao aluno descobrir algum princípio, forma, lei, etc. para a resolução de um problema. Já no processo de recepção o conteúdo é apresentado de maneira acabada. Em ambos os casos o conteúdo ensinado deve ser potencialmente significativo e precisa haver a disposição do aluno em relacionar o material instrucional de modo consistente e não arbitrário.

Assim, “é importante destacar que é a maneira como o novo conhecimento vai ser armazenado na estrutura cognitiva que caracteriza se a aprendizagem é significativa ou memorística” (SOUZA, 2011). Moreira e Masini (1982, p. 20) observam que na aprendizagem mecânica o desenvolvimento se dá “com pouca ou nenhuma associação com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva”. A aprendizagem significativa e a mecânica não constituem uma oposição entre si, sendo que ambas podem aparecer durante o mesmo processo de ensino e de aprendizagem em situações que se aproximam mais de uma ou de outra. Essa é a ideia de um *continuum* onde estão localizados esses dois tipos de aprendizagem (Ausubel et al., 1978).

Ausubel (2003 apud SOUZA, 2011, p. 22) esclarece que “a dupla convicção generalizada”, mas não garantida, de que a aprendizagem por recepção é invariavelmente memorizada e que a aprendizagem por descoberta é por inerência e necessariamente significativa, provoca confusão frequente entre aprendizagem por memorização e significativa e entre a aprendizagem por recepção e aprendizagem por descoberta. O autor considera que ambos os pressupostos se relacionam com a premissa enraizada “de que os únicos conhecimentos que uma pessoa possui e compreende verdadeiramente são os que a pessoa descobre por si. De fato, cada distinção constitui uma dimensão da aprendizagem completamente independente”.

Nesse contexto, o aluno participa ao se apropriar da aprendizagem e ao reconstruir sua estrutura mental cabendo aos professores investigar o que ele já sabe. Conforme Ausubel (2003) cabe ao professor propor atividades favoráveis à ativação dos conhecimentos prévios dos estudantes acerca do material a ser estudado de maneira que os conceitos relevantes sirvam de apoio para novos conceitos. Cabe ao aprendiz relacionar a nova informação de forma não arbitrária e não literal com o que já se encontra na sua estrutura cognitiva (SOUZA, 2011).

Mas a aprendizagem significativa não é apenas o processo, mas também seu produto. A atribuição de significado se faz com novas informações é o resultado emergente da interação entre os subsunçores claros, estáveis e relevantes presentes na estrutura cognitiva e a nova informação ou conteúdo. Como consequência do mesmo, estes subsunçores ou ideias âncoras mais potentes e explicativas servirão como base para aprendizagens futuras (RODRÍGUEZ PALMERO et al., 2008, p. 11).

Assim, os significados construídos são resultantes de várias interações em que intervêm no mínimo três elementos básicos: o aluno, os conteúdos de aprendizagem e o docente. Considera-se aprendiz aquele que, ao tomar o conhecimento, o retém na memória por meio de estudo, observação ou experiência – logo, há uma ação para adquiri-lo.

Porém, Ausubel (2003, p. 30) adverte que frequentemente, os professores ensinam e os alunos apreendem materiais de instrução lógica e potencialmente significativos como se possuíssem um caráter memorizado e, logo, caso aconteça retenção, esta ocorre de maneira ineficiente e com dificuldades desnecessárias. Observa ainda que a situação que causa dificuldades à aprendizagem e à retenção significativa de ideias novas e estranhas (mas potencialmente significativas) é que

os possíveis subsunçores da estrutura cognitiva do aprendiz não possuem o grau necessário e desejável de relevância e de especificidade (além da falta de capacidade de discriminação das ideias relevantes estabelecidas na estrutura cognitiva), para agirem como ideias ancoradas eficazes (Ausubel, 2003, p. 66).

Moreira e colaboradores (2000) observam que, para Ausubel, a aprendizagem depende daquilo que já fora incorporado à estrutura cognitiva do aluno. Os conhecimentos prévios dos alunos devem ser valorizados como meio para se “construir estruturas mentais utilizando, como meio, mapas conceituais que permitem descobrir e redescobrir outros conhecimentos, caracterizando, assim, uma aprendizagem significativa e dinâmica” (PELIZZARI et al., 2002, p. 37).

Acrescenta-se que, para a aprendizagem ser significativa, o aluno deve ter disposição para aprender e o conteúdo deve ser significativo para ele, pois só assim ocorrerá uma verdadeira compreensão de conceitos e teorias, implicando na detenção de significados intensos e intransferíveis.

Segundo a teoria de Ausubel, o desenvolvimento de conceitos relacionados a uma área específica de conhecimento ou de uma disciplina é facilitado quando as ideias gerais e inclusivas de um conceito são introduzidas inicialmente e, *a posteriori*, por meio de um processo progressivo, diferenciando-se em termos de detalhe e de especificidade. Esse processo de diferenciação progressiva estabelece hierarquias conceituais organizadas na estrutura cognitiva, permitindo que os conceitos adquiram cada vez mais complexidade. De fato, a aprendizagem significativa impulsiona o incremento dos conceitos existentes.

Ausubel e colaboradores (1978), ao considerarem a interação entre professor, aluno e novas possibilidades de expressar o conhecimento no âmbito escolar, identificaram que as duas formas de aprender (a mecânica e a significativa) fazem parte de um processo contínuo, e às vezes é preciso memorizar algumas informações que são armazenadas aleatoriamente, sem se relacionarem com outras ideias existentes.

Na aprendizagem mecânica, o indivíduo não consegue expressar suas ideias, tornando-se um repetidor de palavras, ao passo que, conforme afirma Ausubel (2003), a aprendizagem é significativa a partir do instante que permite que uma nova informação recebida pelo sujeito se inclua com um aspecto considerado relevante da sua estrutura cognitiva, momento em que o indivíduo relaciona o conteúdo a ser

aprendido com o que já sabe, podendo então formular novos conteúdos com sua própria linguagem.

1.2 Tipos de aprendizagem significativa

Quanto aos tipos de aprendizagem significativa, Ausubel (2003) os classifica em representacional, de conceitos e proposicional, assim definidos por Moreira (2006, p. 26):

A **aprendizagem representacional** é o tipo mais básico de aprendizagem significativa do qual os demais dependem. Envolve a atribuição de significados a determinados símbolos (tipicamente palavras), isto é, a identificação, em significado, de símbolos com seus referentes (objetos, eventos, conceitos). Os símbolos passam a significar, para o indivíduo, aquilo que seus referentes significam (p. 25).

A **aprendizagem de conceitos** é de certa forma uma aprendizagem representacional, pois os conceitos são também representados por símbolos particulares, porém são genéricos ou categóricos já que representam abstrações dos atributos criteriais (essenciais) dos referentes, isto é, representam regularidades em eventos ou objetos.

Na **aprendizagem proposicional**, contrariamente à aprendizagem representacional, a tarefa não é aprender significativamente o que palavras isoladas ou combinadas representam, e sim aprender o significado de ideias em forma de proposição.

Segundo Ausubel (2003), a aprendizagem representacional é uma aprendizagem próxima da aprendizagem por memorização, em que o aluno estabelece uma correspondência entre o símbolo e seu referente. Ao ocorrer de forma reiterativa e por descobrimento, sendo produzida na infância, ela conduz de forma natural à aprendizagem de conceitos e é base para outras formas de aprendizagem. A aprendizagem do significado de palavras individuais exige a apreensão do que estas representam, ou seja, certos símbolos representam ou possuem um significado análogo a determinados referentes.

Já a aprendizagem conceitual pode ser considerada também como uma aprendizagem representacional, pois nessa abordagem o sujeito abstrai da realidade objetiva os atributos relativos, diante de símbolos ou signos. Os atributos específicos

do conceito se dão por meio de experiências diretas ou não com formulação de hipóteses, testes e generalização. Porém, à medida que o vocabulário de uma criança progride, novos conceitos são assimilados.

Para Ausubel (2003), a aprendizagem proposicional tem uma função comunicativa, cujo objetivo é aprender com ideias expressadas verbalmente e que formam um conceito. De acordo com o autor, na verdadeira aprendizagem proposicional verbal apreende-se o significado de uma ideia composta na medida em que a própria proposição se estabeleça a partir da combinação ou relação dos conceitos, representando um referente unitário; e as palavras particulares se ajustam de tal maneira que a nova ideia resultante seja mais do que a soma dos significados das palavras individuais componentes.

Segundo Rodríguez Palmero e colaboradores (2008, p. 17), para que ocorra a assimilação de uma aprendizagem verbal significativa, a linguagem torna-se um facilitador de grande importância, pois expressar-se verbalmente e exteriorizar ideias é um indicativo essencial na formação e assimilação de conceitos. Diz a autora:

Se a falha inicial ocorre na aquisição da linguagem apropriada, o desenvolvimento das capacidades cognitivas (tais como processamento de informações e resolução de problemas) é limitado, o que torna difícil o desempenho cognitivo mais tarde. A correlação entre a linguagem e aprendizagem significativa, é fundamental.

Assim, a linguagem como um facilitador no que se refere à aprendizagem significativa, tanto por recepção como por descoberta, estimula a capacidade de manipulação de conceitos e proposições, com um papel essencial e operativo no funcionamento do pensamento. Caso produza um fracasso inicial na aquisição da linguagem, o desenvolvimento posterior das capacidades cognitivas ficará limitado, dificultando o desempenho cognitivo posterior. A conexão entre a linguagem e a aprendizagem significativa é, portanto, crucial (RODRÍGUEZ PALMERO et al., 2008).

Portanto, é evidente que antes de se apreender os significados das proposições verbais é preciso conhecer primeiramente os termos componentes ou o que eles representam. Desse modo, as aprendizagens representacional e conceitual constituem a base, ou um pré-requisito, para a verdadeira aprendizagem proposicional, desde que as proposições se expressem de forma verbal.

1.3 Formas de aprendizagem significativa: subordinação, superordenação e aprendizagem combinatória

Präss (2008, p. 29-30) esclarece que o relacionamento entre o conjunto de ideias já existentes na estrutura cognitiva com as novas ideias pode ocorrer de três formas:

Subordinação: pode acontecer segundo duas formas:

- a. Derivativa: o que se aprende é mais um exemplo daquilo que já se sabe, não trazendo qualquer alteração para a ideia mais geral a qual está relacionado.
- b. Correlativa: a nova ideia que se aprende é um exemplo que alarga o sentido/significado de algo mais amplo que já se sabe.

Superordenação: Ocorre quando a nova ideia que se aprende é mais geral do que uma ou um conjunto de ideias que já se sabe. É mais fácil para o ser humano aprender por subordinação do que por superordenação.

Aprendizagem combinatória: acontece quando a nova ideia não está hierarquicamente acima nem abaixo da ideia já existente na estrutura cognitiva à qual ela se relacionou de forma não arbitrária e lógica. A nova ideia não é exemplo nem generalização daquilo que se usou como âncora para ela na estrutura cognitiva do indivíduo. Esta âncora é necessária para que se possa estabelecer uma aprendizagem de fato significativa.

As três formas de aprendizagem são resultantes de uma complexa série de interações entre o aluno, os conteúdos de aprendizagem e o professor.

1.4 Aprendizagem por descoberta e por recepção

De acordo com Ausubel (2003), a aprendizagem pode se dar por descoberta ou por recepção. A aprendizagem por descoberta acontece mediante a busca da solução, em que o aluno aprende por si só. Nota-se que grande parte dos problemas do dia a dia é solucionada por meio da aprendizagem por descoberta, pois

pressupõe uma fase de resolução de problemas que antecede a interiorização de informações e o aparecimento de significados.

Apesar disso, existe sobreposição de funções: os conhecimentos adquiridos com a aprendizagem por recepção também se utilizam na resolução dos problemas cotidianos e a aprendizagem pela descoberta utiliza-se, comumente na sala de aula para se aplicarem, alargarem, integrarem e avaliarem conhecimentos de matérias e para se testar a compreensão das mesmas.

Contudo, as proposições geralmente descobertas através de métodos de resolução de problemas raramente são suficientemente originais, significativas ou merecem ser incorporadas nos conhecimentos que o aprendiz possui das matérias. Em qualquer dos casos, as técnicas de descoberta dificilmente constituem um meio essencial e eficiente de transmissão do conteúdo de uma disciplina acadêmica (AUSUBEL, 2003).

É necessário transformar o conhecimento original em ações e expressá-lo em forma de linguagens oral ou escrita. Situações que permitem ao educador ter indícios daquilo que o aluno já sabe são aquelas que exigem transformações do conhecimento aprendido. Essas situações podem ser criadas a partir de um problema real ou até de uma questão de prova escrita, a qual não pode ser do tipo que exige uma resposta direta e memorizável, mas sim uma situação nova que exija transformação do conhecimento original, fazendo-o, por exemplo, reescrever com suas próprias palavras aquilo que aprendeu ou aplicar o conhecimento para explicar um fenômeno novo ou tomar uma decisão baseando-se num determinado saber.

O professor pode considerar, em aulas expositivas, as descobertas dos aprendizes para trabalhar significativamente os conteúdos pretendidos, pois ao trabalhar com as dificuldades e explicações dos alunos ao fenômeno, ele aliará as concepções prévias aos novos conhecimentos. A partir da ação do sujeito, o conhecimento é construído pelas tarefas realizadas, observando-as, concluindo-as e incorporando-as à sua estrutura cognitiva.

De acordo com Ausubel (2003), na aprendizagem por recepção o conteúdo é apresentado ao educando sob a forma final, exigindo-se dele a interiorização ou incorporação do material (fórmula da geometria plana ou regras de álgebra) que, por sua vez, é apresentado para que seja acessível ou reproduzível em uma ocasião adequada. Na aprendizagem por recepção significativa, a tarefa ou matéria é interpretada ou tomada significativamente durante o procedimento de interiorização;

enquanto isso, na aprendizagem por recepção automática, a tarefa de aprendizagem não é potencialmente significativa e nem se recua de forma significativa no procedimento de interiorização.

1.5 Condições para a existência da aprendizagem significativa

Para que ocorra uma aprendizagem significativa pressupõe-se a existência de duas condições fundamentais: aquelas relativas ao material e as que se referem ao aluno. O material apresentado deve ter significado lógico, isto é, que seja potencialmente relacionável com a estrutura cognitiva, e que deve estar organizado numa sequência lógica e numa linguagem adequada aos alunos.

Para Ausubel (2003, p. 71), o material de instrução relaciona-se quer a algum aspecto ou conteúdo existente especificamente relevante da estrutura cognitiva do aprendiz, a uma imagem, um símbolo já significativo, um conceito ou uma proposição, quer a algumas ideias anteriores, de carácter menos específico, mas geralmente relevantes existentes na estrutura de conhecimentos do mesmo.

Acrescenta ainda que, se o material de aprendizagem é ou não potencialmente significativo, depende mais da estrutura cognitiva *particular* do aprendiz do que da natureza do próprio material de aprendizagem.

De acordo com Viana (2011, p. 03), além da organização do material a ser aprendido, é necessário que as conexões entre os temas sejam mencionadas aos alunos, de modo a facilitar a percepção da estrutura conceitual a ser aprendida. Observa ainda que, a fim de promover o estabelecimento de relações significativas entre os termos aprendidos, torna-se importante acrescentar um vocabulário peculiar de forma progressiva.

Já as condições referentes ao aluno dizem respeito aos conhecimentos prévios e a predisposição para aprender.

Ausubel (2003) estabelece como estratégia para facilitar a aprendizagem do aprendiz os chamados organizadores prévios, apresentados antes do conteúdo a ser assimilado.

Para Viana (2011) uns dos motivos para que o aluno não se esforce para ter uma aprendizagem significativa seria a falta de reconhecimento de suas ideias pelo professor, a falta de confiança em suas capacidades e atitudes adversas ao objeto.

1.6 Organizadores prévios

Organizador prévio consiste na manipulação da estrutura cognitiva do aluno a fim de facilitar sua aprendizagem sobre algo que pode ser completamente desconhecido. Sua principal função é elaborar uma ponte cognitiva entre o que o aluno já sabe e o que ele deve saber.

Ausubel (1968 apud CAE/UCB [201-]) esclarece:

No caso de conteúdos totalmente desconhecidos, um organizador “expositório” pode ser usado para prover subsunções relevantes e próximos, sendo eles sustentados por uma relação superordenada com o novo conteúdo, fornecendo assim uma ancoragem ideacional em termos do que já é familiar para o aprendiz. Para aprendizagem de conteúdos relativamente familiares, um organizador “comparativo” pode ser empregado na integração de novas ideias com conceitos basicamente similares já existentes na estrutura cognitiva, assim como no aumento da discriminabilidade entre ideias novas e as existentes, as quais possam parecer similares, chegando a ponto de se confundirem.

Kleinke (2003) ressalta que para ser útil, o organizador prévio precisa ser formulado em termos “familiares ao aluno, para que possam ser aprendidos, além de contar com uma boa organização do material de aprendizagem, para terem valor de ordem pedagógica”.

Ausubel (1968) afirma que o conhecimento adquirido de maneira significativa é retido e lembrado por mais tempo, colaborando com a capacidade de aprender outros conteúdos de modo mais fácil, mesmo se a informação original for esquecida – quando isso ocorre, facilita a aprendizagem seguinte a uma reaprendizagem. O esclarecimento dessas vantagens está nos processos específicos a partir dos quais se produz a aprendizagem significativa, o que implica, como um processo central, a interação entre a estrutura cognitiva prévia do aluno e o conteúdo de aprendizagem.

Os conhecimentos prévios foram designados de *ancoragem*, uma vez que indicam o que o aprendiz já sabe.

Com isso, as informações assimiladas complementam as ideias que serviram de ancoragem ampliando a aprendizagem significativa dos materiais e, posteriormente, sendo aplicada em outros contextos.

CAPÍTULO 2

O ENSINO DA GEOMETRIA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE VOLUME DE SÓLIDOS

2.1 Um breve histórico sobre a geometria

A geometria surgiu em virtude da necessidade de resolver problemas práticos de astronomia, agricultura, arquitetura e engenharia. Para os pesquisadores turcos Tekin-Sitrava e Işiksal-Bostan (2014), a geometria “tem papel crucial no ensino e aprendizagem da matemática”, sendo importante tanto para alunos quanto para professores também “em outros tópicos no currículo de matemática e outras disciplinas”.

De acordo com Iezzi (2013, p. 160),

A história da geometria vem desde as civilizações egípcias, onde se desenvolveu com o intuito de resolver problemas de medições, como cálculo de distâncias, áreas e volumes, ligados diretamente à atividade de subsistência.

Hoje, os conhecimentos geométricos são bastante utilizados nos diversos campos do conhecimento humano, como física, química, geologia e biologia, entre outros. Cabe ressaltar que ela é considerada parte da matemática pura, mesmo que tenha iniciado como uma ciência prática e seja aplicada em outros ramos, sendo comumente abstraída da realidade como uma teoria matemática, em que os matemáticos estudam motivados pelo seu apelo intrínseco.

Segundo Boyer (1996), os geômetras egípcios eram conhecidos como “estiradores de corda” (ou agrimensores), uma vez que utilizavam cordas para traçar as bases de templos e para realinhar demarcações apagadas de terras. Acreditavam também que a motivação geométrica dos “estiradores de corda” no Egito possuía mais praticidade que na Índia; isso sugere que tanto a geometria da Índia como a egípcia pode proceder de uma fonte comum – uma protogeometria relacionada com ritos mais ou menos do modo como a ciência se desenvolveu a partir da mitologia e a filosofia da teologia (BOYER, 1996).

Foi na Grécia (século V a. C.) que a geometria se desvinculou dos assuntos de mensuração para tomar um rumo mais abstrato. Passou-se a exigir a validação das propriedades das figuras geométricas por meio de demonstrações lógicas, e não por procedimentos experimentais.

Tales de Mileto foi um dos primeiros pensadores a utilizar o método demonstrativo, seguido por Pitágoras, que contribuiu para a demonstração que leva o seu nome. Mas um dos maiores pensadores gregos ligados à Matemática foi, sem dúvidas, Euclides (cerca de 300 a. C.), que estudou no Museu de Alexandria, uma espécie de Universidade da época.

A obra-prima de Euclides, intitulada *Os elementos* é composta por treze volumes, sendo que apesar de citar a palavra “geometria” em seu título, não abordam apenas essa área do conhecimento. São discutidas e demonstradas propriedades, teoria dos números e álgebra elementar (geométrica), enumera várias definições, nove axiomas, 465 proposições e cinco postulados. A geometria espacial é abordada nos seus três últimos volumes para que todas as noções ou conceitos geométricos fossem definidos, ou melhor, diferenciados objetivamente por palavras e baseados apenas em conceitos instituídos anteriormente. Demonstrou ainda que, qualquer figura de lado reto pode ser dividido em triângulos, método muito utilizado para demonstrar área de figuras planas. Mesmo sendo considerado um método imperfeito, a obra de Euclides continua sendo utilizada até hoje, com alguns aperfeiçoamentos realizados por matemáticos dos séculos XIX e XX.

Na escola básica, o ensino de geometria tem sido discutido por muitos educadores matemáticos. Clements e Battista (1992 apud TEKIN-SITRAVA E IŞIKSAL-BOSTAN, 2014, p. 2) declararam que a geometria pode ser considerada como uma ferramenta para facilitar a interpretação e reflexão sobre o ambiente físico, permitindo-nos descrever, analisar e compreender o mundo em que vivemos. Por meio da geometria acontecem as possibilidades de contextualização dos conteúdos, em que o aluno passa a valorizar a necessidade de entender o mundo onde vive e aproveitar ao máximo as relações entre os conteúdos e o seu contexto pessoal. A partir do momento que se conhecem conceitos relacionados a outros campos do conhecimento com a vida prática, a geometria não é apenas um conteúdo isolado, mas uma ferramenta que auxilia o desenvolvimento de conceitos da matemática.

2.2 Algumas orientações curriculares

Os documentos intitulados CBC - Currículo Básico Comum (MINAS GERAIS, 2006) orientam o professor para que contextualize a resolução de problemas, de modo que a geometria seja trabalhada de forma espiral, principiando com a apresentação dos sólidos geométricos com seus elementos e posteriormente com a capacidade de resolver problemas envolvendo área e volume de figuras tridimensionais.

Já os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p. 51) indicam que, por meio dos conceitos geométricos, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. As atividades relacionadas com as noções de grandezas e medidas podem ser exploradas de forma a proporcionar uma melhor compreensão de conceitos referentes ao espaço e às formas. Conforme o documento,

O aluno deve realizar procedimentos que indiquem o volume de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo pela contagem de cubos utilizados para preencher seu interior, estabelecendo conversões entre algumas unidades de medida mais usuais (para comprimento, massa, capacidade, tempo) em resolução de situações-problema (BRASIL, 1998, p. 74).

Tais procedimentos devem ser relevantes para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, para a construção de novas atitudes e formas de pensar com situações experimentais que possibilitem ao aluno fazer um paralelo entre as operações no mundo físico e as que ocorrem no mundo matemático (OLIVEIRA, 2007, p. 173).

Quando se analisam as recentes avaliações realizadas pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica do Ministério da Educação (SAEB/MEC) e pela Secretaria de Educação de Minas Gerais, evidencia-se a importância de resgatar o trabalho com geometria no Ensino Fundamental para o posterior fortalecimento no Ensino Médio e o resgate de atividades que proporcionem o desempenho intelectual e criativo do aluno. Abre-se, portanto, um espaço dentro da sala de aula onde o aluno explora a sua capacidade, suas inquietudes, observações e relatos sobre as

atividades propostas, seja de forma oral e escrita tanto na matemática, física, biologia ou química (Revista Pedagógica, 2013).

O MEC/SEB (2006, p. 75) define que:

O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida.

Em relação às grandezas geométricas, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) assinalam ainda que as atividades propostas deverão consolidar conceitos aprendidos nas etapas anteriores; ou seja, no Ensino Fundamental.

Ainda com relação ao estudo de grandezas e medidas, há indicações para que o aluno desenvolva essa competência desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, a exemplo das atividades que envolvem a culinária, por meio do tempo de cozimento dos alimentos, da quantidade dos ingredientes em litro e seus submúltiplos (quilograma, pitada, xícara e colher). Sugere-se explorar, ainda, as medidas de largura da sala de aula para calcular área e perímetro; e os problemas envolvendo noções de volume, sobretudo no paralelepípedo (BRASIL, 2006, p. 76).

Assim sendo, acredita-se que, quando a geometria é trabalhada corretamente desde as séries iniciais, no Ensino Médio os alunos sejam capazes de resolver o cálculo de volume de diversos sólidos geométricos de forma significativa (MEC/SEB, 2006). A compreensão da geometria ocorre quando os alunos descobrem juntos, exploram as figuras, compreendem as relações geométricas e aplicam o conhecimento em outras áreas.

Conforme Viana (2005), ensinar conceitos geométricos é interferir na formação da capacidade intelectual, na estruturação do pensamento e na ampliação do raciocínio dedutivo do estudante.

O estudo da geometria envolvendo a resolução de problemas leva o aluno a uma interação com o mundo real, desenvolvendo o raciocínio matemático e os significados para novas ideias, e não somente uma repetição de fórmulas.

Exemplifica-se o estudo de volumes, em que é possível estabelecer um padrão, como o cubo unitário, ao ser analisada uma caixa de leite, seja fazendo

medições ou comparações da embalagem, ou explorando estratégias distintas sobre qual objeto é mais leve, mais pesado, discutindo o seu tamanho, ordenando-os, verificando que nem sempre o peso do objeto é dado pelo seu tamanho.

2.3 As dificuldades em geometria: breve revisão bibliográfica

Dificuldades dos alunos com conceitos geométricos, especialmente aqueles ligados à geometria espacial, têm sido levantadas por vários autores da área de educação matemática.

No âmbito internacional, pode ser citado o trabalho de Işıksal, Koç e Osmanoğlu (2010) em Ancara, capital da Turquia, realizado com 271 alunos da 8ª série, que objetivou investigar as habilidades de raciocínio destes em medição sobre área e volume e verificou o baixo desempenho dos alunos nestes temas. Os pesquisadores focaram um único tópico, o cálculo do volume de um prisma retangular, sendo que os resultados revelaram que os alunos tinham um nível moderado de desempenho em termos de cálculo do volume de um prisma retangular. Além disso, a análise mostrou que os alunos foram capazes de criar um número limitado de estratégias de solução para os problemas indicados e que tinham dificuldades em entender o conceito de volume.

Viana (2011), em trabalho realizado com alunos do curso de Pedagogia da UFU, *Campus* do Pontal, investigou os conhecimentos prévios com relação à geometria espacial, visando identificar o nível conceitual e os conhecimentos específicos preexistentes por meio de atividades elaboradas a partir de mapa conceitual. Tomando por base princípios da aprendizagem significativa, a pesquisadora analisou os aspectos conceituais e os processos mentais dos sujeitos a partir de relatos verbais e da manipulação dos objetos confeccionados para serem utilizados na intervenção didática. Na pesquisa, foi possível concluir que os estudantes não conseguiam reconhecer as formas geométricas e as propriedades das figuras planas e espaciais mais comuns trabalhadas no ensino básico. A autora ressaltou a necessidade de se trabalhar com conceitos de geometria na formação inicial do professor das séries iniciais do ensino fundamental.

Vidalletti (2009) propôs o ensino e a aprendizagem da geometria espacial por meio da manipulação de sólidos. Para tanto, vinte alunos de uma turma de terceiro ano do ensino médio tomaram como modelo embalagens de produtos comercializados a fim de criar novas embalagens para esses mesmos produtos, porém variando as formas de apresentação e mantendo as medidas originais. A autora ponderou sobre a importância dos conhecimentos prévios dos alunos para a aprendizagem de novos conhecimentos e concluiu que a aprendizagem da geometria espacial a partir da manipulação de sólidos minimiza as dificuldades dos discentes.

Já Oliveira (2007) verificou a interferência das grandezas físicas na construção de volume, por meio da análise dos dados obtidos com 65 alunos do Ensino Médio de duas escolas e 25 alunos de dois cursos de Licenciatura em Matemática em Recife-PE. O trabalho foi baseado na descrição dos fenômenos relacionados com as grandezas físicas: massa, peso, densidade e a grandeza geométrica volume, com o escopo de dar suporte e melhorar o ensino de geometria, conforme o modelo didático desenvolvido por Bellemain e Lima (2002) para a grandeza área, de acordo com os quadros geométricos das grandezas e das medidas.

O mesmo autor realçou a grande influência das grandezas físicas na formação conceitual de volume e diagnosticou que vários alunos tinham movimentado alguns teoremas falsos na resolução de problemas, como o fato de o objeto mais pesado ter maior volume (mesmo para objetos de densidade diferente). O pesquisador concluiu que os conceitos mais relevantes para a elaboração conceitual de volume foram densidade, massa e peso e sugere que os professores proponham atividades que envolvam a relação entre as grandezas de modo a permitir a formação do conceito.

Segundo Oliveira (2007), Moraes (2012) e Figueiredo (2013), os experimentos utilizados em intervenções para o ensino do conceito de volume buscam articular características do mundo físico com as do mundo matemático, o que ajuda a identificar as dificuldades dos alunos, por exemplo, nas mudanças de unidade de medida, oriunda da distinção e da articulação entre os quadros numéricos, geométricos e das grandezas.

Para conhecer como os alunos podem aprender conceito de volume, Rodrigues (2011) analisou parte dos materiais didáticos conhecidos como “Caderno

do Professor”² e “Caderno do Aluno” distribuídos em 2008 e 2009 aos professores e alunos do Ensino Médio das escolas públicas do estado de São Paulo. O autor limitou sua pesquisa ao exame da parte dos Cadernos de Matemática destinada ao estudo do cálculo de volume dos sólidos, visando investigar se havia abordagem conceitual do tópico em questão. Apoiado na teoria sobre aprendizagem de matemática desenvolvida por Raymond Duval³ e nos trabalhos de autores que abordaram a mesma temática em seus estudos, Rodrigues verificou que os Cadernos trazem atividades que envolvem o ensino conceitual, tais como construção e raciocínio, composição e decomposição das figuras geométricas, conceituação das ideias matemáticas, manipulação dos objetos e dos registros, aplicação e contextualização epistemológica dos conceitos, utilização de diversos materiais concretos e recursos multimídia. O mesmo verificou que tais atividades despertam a curiosidade dos alunos, favorecendo o processo de aprendizado ao torná-lo mais agradável e menos cansativo.

O trabalho de Figueiredo (2013), realizado com dez alunos do terceiro ano do ensino médio da rede privada de Recife – PE investigou o conceito de volume à luz dos estudos de Regine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989), citados pelo autor, sobre área de figuras planas como grandeza e adotando como suporte a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud⁴ e seus colaboradores.

Figueiredo (2013, p. 6) observou que o campo numérico predomina em relação ao campo geométrico e das grandezas, na maioria das situações de volume abordadas e que situações de medida são as mais compreendidas pelos sujeitos.

E que, em situações em que necessitam dissociar e articular os quadros numérico, geométrico e das grandezas, como nas situações de produção, apresentam dificuldades, quer seja no campo numérico, quer seja no campo geométrico ou no campo das grandezas.

² Os Cadernos foram elaborados para uniformizar cada uma das disciplinas do currículo escolar de todas as séries de ensino fundamental e médio do estado de São Paulo.

³ Segundo Duval, a atividade matemática, do ponto de vista cognitivo, é diferente dos outros domínios da ciência, visto que os objetos matemáticos são acessíveis apenas por meio de suas representações semióticas (RODRIGUES, 2011).

⁴ Vergnaud define campo conceitual como um conjunto de situações cujo domínio promove uma variedade de conceitos, artifícios e representações simbólicas conectadas entre si. Assim, um único conceito não se refere a um só tipo de situação e uma única situação não pode ser analisada com um só conceito (FIGUEIREDO, 2013).

Os elementos da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud abrangem três dimensões do conhecimento, as quais estão inter-relacionadas, ficando o conceito definido por:

$$C = \{S, IO, \Sigma\}$$

Em que:

S = conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência).

IO = conjunto de invariantes operatórios, mecanismos utilizados pelo sujeito na resolução do problema (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação), sobre os quais se apoiam a operacionalidade dos esquemas (variável psicológica).

Σ = conjunto de representações simbólicas utilizadas/possíveis, tanto para apresentação quanto para resolução do problema (possibilidade de representação simbólica do conceito) (FIGUEIREDO, 2013, p. 3).

Para compreensão do conceito de área como grandeza, a autora utilizou os quadros elaborados por Douady e Perrin-Glorian (1989), citados por Figueiredo (2013) e ilustrados na Figura 1, em que:

Quadro numérico: relaciona-se aos números que correspondem às medidas dos volumes dos sólidos geométricos.

Quadro das grandezas: diz respeito às classes de equivalências de sólidos de mesmo volume.

Quadro geométrico: se refere às classes de equivalência de sólidos geométricos de mesma medida (figuras espaciais).

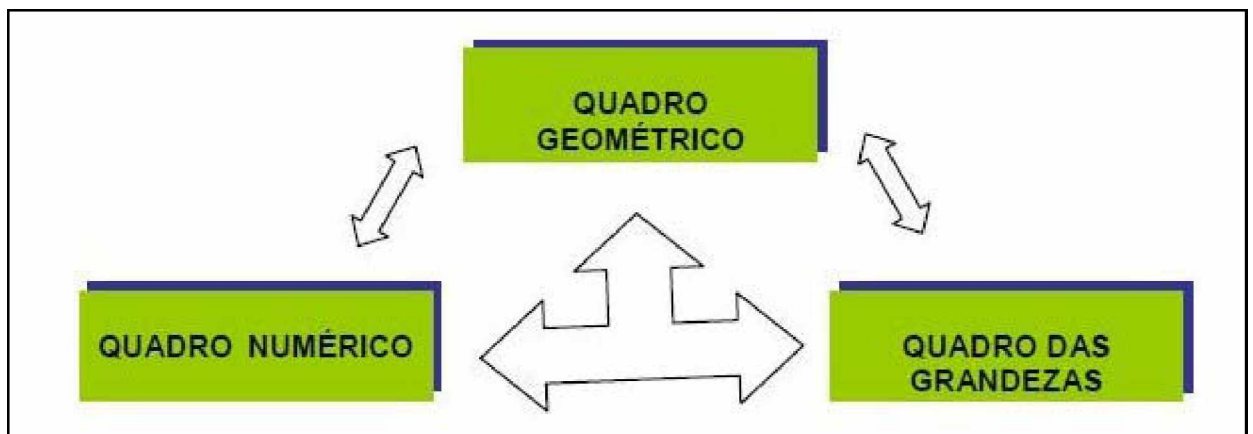


Figura 01: Quadros de compreensão do conceito de área como grandeza.
Fonte: OLIVEIRA, 2007, p. 58.

Figueiredo (2013) classificou as situações que dão sentido ao conceito de volume em:

- a) comparação de volumes, que favorecem o aparecimento de maior variedade de concepções e procedimentos que não estão presentes em situações que envolvem apenas o cálculo de volume;
- b) produção de sólidos, em que se produz um sólido com volume maior, menor ou igual ao volume dado;
- c) transformação de unidades, em que as situações exigem a mudança ou a transformação de unidades e;
- d) adição e subtração de volumes, que consiste na efetuação das operações entre as medidas apresentadas.

Dessa forma, a atividade desenvolvida pelos alunos constou de questionário contendo 11 questões sobre o tema volume, em que cada estudante respondeu individualmente as questões, sem qualquer orientação.

De acordo com Figueiredo (2013, p. 28), quando medimos um objeto, atribuímos um número para compor o campo numérico e também uma unidade de medida para a medição, que irá compor o campo das grandezas geométricas. Este quadro corresponde à composição de classes de equivalência, isto é, a um conjunto quociente composto a partir da relação de equivalência “ter o mesmo volume”.

Cumprе destacar que a elaboração de um conceito de grandeza geométrica acontece quando o aluno tem a capacidade de relacionar os campos numérico e geométrico, associando-os ao campo das grandezas.

Ainda conforme Figueiredo (2013, p. 34), capacidade é um conceito pertencente ao quadro das grandezas, pois se trata de um tipo de volume interno de um determinado recipiente. É, portanto, um termo que deve ser usado apenas em sólidos ocos, por apresentar o seu espaço interno vazio. Então, a capacidade pode ser considerada o volume interno do recipiente, enquanto o volume total do recipiente é sua capacidade acrescentada ao espaço pelas paredes do recipiente, caso elas tenham suas dimensões consideradas.

Ao final da pesquisa, Figueiredo concluiu que a maioria dos alunos investigados compreendia volume como grandeza diante de situações de medida, reconhecia a fórmula do volume do paralelepípedo e da pirâmide e recorria à representação simbólica dos sólidos durante a resolução das questões.

Oliveira (2007 apud FIGUEIREDO, 2013, p. 33), por exemplo, em um de seus experimentos, colocava à disposição de oito alunos, recipientes diferentes, com densidades variadas (uma bola maciça, um pedaço de ferro, um copo plástico, uma bacia de plástico e uma vasilha prismática de plástico), pedindo para que eles colocassem os recipientes em ordem crescente de volume, inicialmente pelo método visual e mental, e, posteriormente, pelo método experimental, com o uso de duas jarras contendo água em seu interior, para comprovarem suas respostas. Nessa atividade, pretendia-se avaliar se os alunos articulavam o quadro geométrico e o das grandezas, sem necessidade do quadro numérico; buscava-se, também, investigar se os educandos compreendiam a concepção de capacidade e de volume como sendo a mesma grandeza. Embora nenhum dos sujeitos tenha formado a sequência completa corretamente, a maioria considerou os volumes e as capacidades como sendo a mesma grandeza e apenas dois estudantes realizaram a sequência separando os objetos em dois blocos (dos recipientes e dos sólidos maciços).

Outro fato já ressaltado em estudos como o de Oliveira (2007) e que dificulta a compreensão do conceito de volume como grandeza geométrica é desconhecer a relação entre massa e volume. Isso remete ao conceito de densidade dos corpos: ao comparar dois ou mais objetos, nem sempre o mais pesado será o de maior volume, a não ser que eles sejam constituídos da mesma substância, pois terão a mesma densidade.

Há também confusão entre o conceito de volume e o de capacidade. Estudos mostram que eles não são vistos como sendo uma única grandeza, distinguindo o que é capacidade (relacionada aos sólidos ocos) do que é volume (que diz respeito aos sólidos maciços).

Em situações de comparação, os problemas consistem em determinar, no que diz respeito a dois sólidos, se eles têm mesmo volume ou qual deles tem volume maior. Nos casos em que são apresentados mais de dois sólidos, deve-se ordená-los; por conseguinte, intervém a transitividade da relação de ordem.

Situações de comparação exigem do aluno a passagem do quadro geométrico para o das grandezas. Nesses termos, as situações em que são comparados sólidos ocos ou maciços ou nas quais são feitas comparações estáticas ou dinâmicas podem favorecer ou bloquear as estratégias mobilizadas pelos estudantes.

Enquanto isso, as situações de medida de volume permitem a articulação entre os quadros numérico, geométrico e das grandezas. Ao calcular o volume de um sólido, o aluno passa do quadro geométrico para o numérico, e, ao reconhecer a medida como sendo da grandeza volume, passa para o quadro das grandezas.

A pesquisa de Moraes (2013) teve como foco o mapeamento e a classificação das situações que abordam a grandeza volume em sete coleções de livros didáticos de Matemática do ensino médio aprovados no Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2012. A exemplo de Figueiredo (2013), Moraes também baseou sua pesquisa na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1990) e no modelo didático proposto por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989).

Para análise desse material, Moraes (2013), respaldado pela classificação de Baldaire (1986) quanto ao conceito de área, analisou situações para dar sentido ao conceito de volume: (a) medição (termo adotado pelo autor em seu estudo), sendo esta subdividida em situações de transformação de unidades e as de operacionalização de volumes; (b) situações de comparação e (c) situações de produção.

O autor, na abordagem da grandeza volume, levanta quatro aspectos importantes nesses documentos: o primeiro envolve a relação entre grandezas (densidade, massa e volume, velocidade etc.); o segundo, a consolidação dos conhecimentos construídos na etapa anterior (Ensino Fundamental) e a compreensão das fórmulas para o cálculo de volume; o terceiro destaca o Princípio de Cavalieri⁵ como uma ferramenta importante para a compreensão das fórmulas que permitem calcular o volume dos sólidos geométricos prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas; e o quarto enfatizava o tratamento de tais fórmulas como meio de trabalhar a argumentação lógico-matemática.

Esses fatores foram apresentados em todas as coleções analisadas como ferramenta para a construção das fórmulas de volume, mas verificou-se que nem sempre o seu uso era feito de maneira adequada e suficiente para dar sentido ao volume como grandeza.

Moraes (2013) ainda acrescentou, em seu estudo sobre volume nos livros didáticos, que o ensino dessa temática é realizado em seções de capítulos dedicados ao estudo dos sólidos geométricos, situando volume no domínio da

⁵ O Princípio de Cavalieri estabelece que dois sólidos com a mesma altura tenham o mesmo volume se as secções planas de iguais alturas possuírem a mesma área (SANTOS 2012).

geometria, em que as situações de medições são amplamente majoritárias, sendo enfatizados os aspectos numéricos e o uso de fórmulas, mesmo em exercícios de comparação, produção etc. A extensão da validade da fórmula do volume do bloco retangular para os casos em que as medidas de comprimento das arestas não são inteiras em geral não é argumentada e nem ao menos explicitada. A distinção entre volume e sólido (e entre volume e medida) está presente em todas as coleções, mas geralmente de maneira implícita e escassa para dar sentido ao volume como grandeza.

Morais (2013) também defendeu que, ao variar a unidade de medida, o volume é o mesmo, mas a medida dele muda. Dada uma figura geométrica, por exemplo, é possível corresponder a esse objeto um número real positivo e sua medida, a partir da escolha de uma unidade de mesma natureza que a grandeza a ser comparado, o que permite associar o objeto geométrico, o número e a grandeza. Nesse sentido, atividades relativas ao estudo de tal grandeza devem favorecer a passagem de um quadro para o outro e a dissociação/articulação entre o número, a figura e a grandeza, processo que às vezes é trabalhado de forma mecânica e repetitiva, sem compreensão do conceito e nem, por parte do aluno, do que é o volume do bloco retangular.

Para corroborar suas conclusões, Moraes (2013) cita trabalhos de vários autores, como os que seguem abaixo:

- a) Moraes e Bellemain (2010, p. 45): os autores selecionaram cinco coleções aprovadas no PNLD 2008, nas quais foram mapeadas situações que possibilitam dar sentido ao conceito de volume enquanto grandeza. O estudo apontou a valorização do aspecto numérico de volume, uma vez que as situações de medição e de transformação de unidades são as mais recorrentes implicando em uma compreensão insuficiente do conceito. As fórmulas também são valorizadas, sobretudo por se tratar de uma tendência histórica na abordagem de área e de volume.
- b) Moraes (2010, p. 15): o autor analisou cinco provas (2006 a 2010) do ENEM e do vestibular da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), objetivando diagnosticar o que efetivamente vem sendo requerido dos alunos sobre volume nesses exames. O mesmo observou que tal conteúdo foi contemplado em todas as edições analisadas, tendo como características predominantes a relação entre modelos matemáticos e modelos concretos dos sólidos geométricos escolares

(prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera) e o uso das fórmulas. Nos exames vestibulares, ressalta-se a articulação com outros conteúdos matemáticos, sendo favorecidas as manipulações algébricas com fórmulas.

- c) Oliveira (2002) e Barros (2002): em estudo realizado com alunos do 8º ano (com média de 13,5 anos de idade) sobre a construção do conceito de volume, diante de uma atividade sobre cálculo de volume de blocos retangulares em que os comprimentos das arestas foram informados, a maioria dos sujeitos mobilizou a fórmula ($V = a.b.c$, onde a , b e c são os comprimentos das arestas concorrentes num ponto) durante a resolução. Os autores constataram que alunos dos anos finais do ensino fundamental revelaram uma compreensão insuficiente de volume como grandeza, uma vez que os sujeitos investigados pouco articularam/dissociaram os três componentes: o número, o sólido e a grandeza.

De acordo com Roldán (2003 apud FIGUEIREDO, 2013, p. 31-32), a maioria dos professores do México utiliza fórmulas apenas para calcular o volume pedido, sendo que não sabem distinguir nem relacionar volume e capacidade, volume e peso, volume e área de um corpo.

Percebe-se ainda que a riqueza do conceito de volume cabe, entre outros fatores, à variedade de significados que podem associar à palavra volume, à complexidade das características físicas e geométricas dos objetos e às relações que guarda com outras propriedades dos corpos como capacidade e peso, além de permitir a medição do volume de maneira indireta, de diversas formas, além do uso de fórmulas, como a imersão de um sólido dentro de um recipiente com líquido no seu interior.

O estudo desenvolvido por Santos (2012) investigou as potencialidades do ensino de volume dos sólidos geométricos com utilização de tecnologias computacionais, aplicando questionários a 100 professores da rede pública e particular do Estado do Pará e a 100 alunos recém-egressos do Ensino Médio, com o objetivo de perceber de que forma vem sendo desenvolvido o ensino de Volume de Sólidos Geométricos, baseando-se na Teoria das Situações Didáticas, de Brosseau (1996).

Na fase de *Análise a priori*, a autora optou pelo desenvolvimento de um *software* para dar suporte para o desenvolvimento das sessões de ensino tendo como base o Ensino por Atividades e planejamento da sequência didática; a fase de Experimentação se concretizou com 09 sessões de ensino, com duas turmas do 3º

ano do Ensino Médio de uma Escola do Ensino Fundamental e Médio, inicialmente com um Pré-teste, sendo que nas sessões seguintes as atividades foram conduzidas com o intuito de promover a descoberta das fórmulas de cálculo do volume do paralelepípedo, cubo, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera – com o suporte tecnológico do *software*; finalizou as sessões com um Pós- teste. Na *Análise a Posteriori e Validação*, desenvolveu as análises de todas as informações colhidas durante a fase de experimentação, confrontação dos dados obtidos nas análises *a priori* e *a posteriori*.

Nos resultados do Pré e do Pós-testes foi verificado um percentual excelente de aproveitamento dos alunos com 77% no mínimo e 100% no máximo, demonstrando que a sequência didática aplicada foi validada favorecendo o aprendizado dos alunos no cálculo do volume de sólidos geométricos.

Em Silva (2013) encontramos o estudo sobre o ensino da geometria métrica, ensinada no final do Ensino Médio com a utilização de softwares de visualização e softwares de jogos para atenuar as dificuldades dos alunos diante da visualização geométrica e da assimilação conceitual.

O autor analisou os Parâmetros Curriculares Nacionais, os Currículos Básicos Comuns de Minas Gerais e as referências bibliográficas indicadas pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD). Encontrou que boa parte desses documentos busca orientar os professores sobre o desenvolvimento de habilidades e competências dos alunos, de maneira a estimular a criatividade.

O produto final da pesquisa foi um projeto que tinha como objetivo favorecer o desenvolvimento das habilidades e competências geométricas utilizando materiais concretos como embalagens ou objetos que lembrem o sólido a ser estudado, o software educacional winggeom que permite a construção de figuras e espaciais e o software de jogo Gemp (Geometria Espacial Métrica e Posicional).

2.4 O conceito de volume

Tendo a experiência de ensinar, durante muitos anos, o conceito de volume a alunos do ensino fundamental e médio, foi possível perceber as dificuldades que os alunos apresentam acerca dos sólidos geométricos e das fórmulas de volume, o que

difículta ainda mais a aplicação a aplicação do conceito na resolução de problemas. Na maioria dos casos, os estudantes resolvem os exercícios apenas aplicando fórmulas decoradas sem justificar a solução encontrada. Talvez isso aconteça porque eles não aprenderem a explorar propriedades dos objetos, a estabelecer relações, a empregar estratégias de solução de problemas, a reconhecer que a medida do volume depende da unidade escolhida etc.

Os estudos anteriores indicam que a conceituação de volume incide em dissociar volume e número e também volume e sólido. Além do cálculo de volume, devem ser exploradas situações de comparação, de avaliação e de transformação de unidades de medida.

Conforme discutido por Ribeiro (2010, p. 97), o ato de medir é uma atividade mais comum do que parece. Ao medir nossa massa em uma balança na farmácia, por exemplo, verifica-se o resultado de uma medição de massa. Então, massa é a quantidade de matéria de um corpo, e peso é a força que depende da gravidade que atrai o corpo para o centro da terra. Mas, o que é volume?

Pode-se dizer que volume é a quantidade de espaço ocupado por um corpo ou a capacidade de armazenamento que o corpo possui (caso seja oco, despreze-se as paredes e seja possível utilizá-lo como recipiente). A grandeza geométrica em que está integrado o objeto geométrico constituído pelo sólido e a sua medida é representada pelos números reais não negativos.

Nesses termos, a unidade de medida de volume deve ter uma forma que preencha totalmente o espaço; por exemplo, os cubos completam integralmente o espaço, enquanto as esferas, não. Desta forma, as unidades de volume são baseadas em cubos e são chamadas de unidades cúbicas, o que pode ser comprovado com o preenchimento de uma caixa de sapatos com cubinhos e, posteriormente, com bolinhas de pingue-pongue para a comprovação (DANTE, 2007).

Oliveira (2002 apud FIGUEIREDO, 2012, p. 17) discorre que o uso da fórmula e de outras grandezas para o cálculo de volume tem mostrado mecanicamente o surgimento do uso insuficiente das unidades de volume. Isso ocasiona a incapacidade na resolução de problemas relacionados a volume que necessitam de outros tipos de estratégia.

De acordo com Morais et al. (2012, p. 26):

Para a medição de grandezas é necessária a escolha de uma unidade de medida de mesma espécie da grandeza a ser medida e que é conceitualmente arbitrária. Em certas situações, o uso de unidades não convencionais pode ser suficiente para resolver o problema. A aceitação desse caráter arbitrário é parte do processo de compreensão da grandeza. Podemos assim considerar como unidades de medida de volume o metro cúbico, o litro, mas para medir volume também podemos ter como unidades, por exemplo, o cubinho de 1 cm de aresta, ou uma barra de sabão de coco, pois se conseguir preencher um recipiente com 20 barras de sabão de coco, então o volume desse recipiente será 20 barras de sabão de coco. O que não podemos é confundir unidades de medida de volume com unidades de medida de outras grandezas como área (metro quadrado), a massa (grama) e comprimento (metro).

Tomando por exemplo o paralelepípedo – uma figura que faz parte do campo geométrico – tem-se que, ao medi-lo, será preciso atribuir um número para compor o campo numérico; a unidade de medida escolhida para a medição que irá compor o campo das grandezas geométricas (MORAIS et al., 2012).

O quadro das grandezas corresponde a um conjunto composto a partir da relação de equivalência “ter mesmo volume”. Podemos notar que, para a construção de um conceito de grandeza geométrica, é essencial que o aluno saiba relacionar os campos numéricos e geométricos, integrando-os ao campo das grandezas.

De fato, o cálculo de volume está presente em vários contextos, o que nos leva a acreditar que é importante que os alunos da Educação Básica entendam a geometria desde as series iniciais para que possam relacioná-la com os demais conteúdos a fim de compreender e conceituar situações-problema futuramente.

Uma das maneiras de ensinar volume é por meio de comparações entre objetos. De acordo com Lima et al. (2001), algumas comparações provocativas podem ser feitas para os alunos em sala de aula. Por exemplo, ao serem apresentadas duas caixas, pode-se questionar qual delas teria maior volume. Quando os objetos são impermeáveis, sugere-se que mergulhemos um de cada vez, em reservatório adequado cheio de água, para comparar a quantidade de água que transbordou.

Tal experiência pode ser um elemento motivador para estudar volumes, mas não suficiente para entender o conceito. Alguns objetos podem necessitar de outros métodos para o cálculo de volume, como na situação em que o mestre de obras precisa saber o volume de concreto que será utilizado para a construção de colunas, vigas e lajes de um edifício ou uma casa.

O volume de um sólido pode ser um número que exprima quantas vezes o cubo unitário está contido nele. Todavia, toma-se o questionamento de Lima et al. (2001): como saber quantos cubos unitários de 1 cm de aresta cabem dentro de uma panela?

A ideia inicial de cálculo preciso é feita com o volume do paralelepípedo retângulo, também conhecido como bloco retangular. Nesse caso, a quantidade de cubinhos que cabem no paralelepípedo precisa ser igual ao produto da área da base pela altura, correspondendo então à quantidade de cubinhos que completam o sólido.

O cálculo de volumes, de acordo com a Equipe de Matemática do Centro de Referência Virtual do Professor da Secretaria de Educação de Minas Gerais (2006) pressupõe o conhecimento das operações com números racionais na forma fracionária e decimal, medidas de comprimento, volume e capacidade, e as respectivas mudanças de unidades; e o domínio de conceitos geométricos, como blocos retangulares, arestas de um cubo e assemelhados.

O documento sugere ainda que se ensinem os alunos a calcular o volume de blocos retangulares e de sólidos que possam ser decompostos em tais blocos para, então, aplicar esse conhecimento na resolução de problemas.

Alves (2014) estabelece em seu trabalho uma associação entre um sólido dado e um número real positivo para se referir à quantidade de espaço por ele ocupado, a fim de deduzir as fórmulas de cálculo de volume de alguns sólidos geométricos. Ao reconhecer o cubo de aresta igual a uma unidade de comprimento e unidade de volume, possibilita-se a definição de volume por meio de aproximações por falta, a partir dos poliedros retangulares contidos nele.

Ao iniciar a pesquisa com a ideia intuitiva de volume e buscando o significado do termo, Alves (2014) toma como exemplo uma caixa d'água retangular e, para conceituar o espaço ocupado por ela, se baseia em um cubo denominado unitário.

Vários objetos podem possuir o mesmo volume por ocuparem o mesmo espaço, apesar de possuírem formas diferentes. Alguns paralelepípedos são chamados de sólidos equivalentes por terem volumes iguais, porém com áreas diferentes.

Um princípio importante para ajudar os alunos a reconhecerem a equivalência de volume em sólidos distintos é o Princípio de Cavalieri⁶. Podem ser construídos sólidos com o mesmo volume, desde que tenham a mesma altura e, quando seccionados em planos horizontais, apresentem mesmas áreas correspondentes ao mesmo plano, a exemplo da Figura 2.

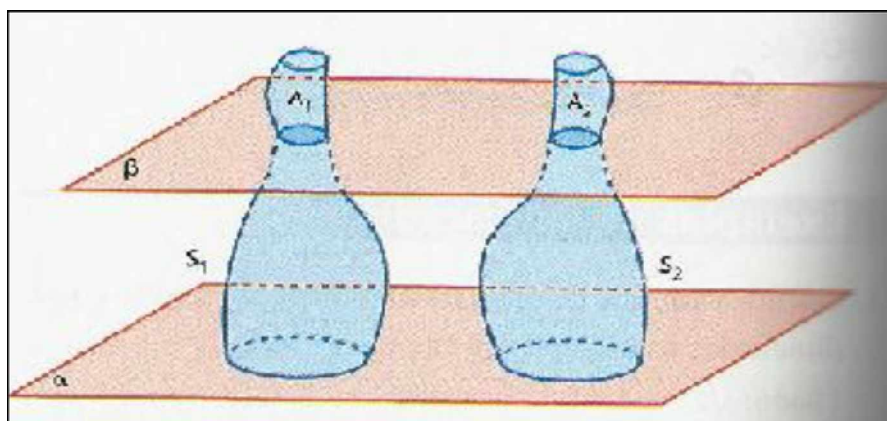


Figura 02: Princípio de Cavalieri (I)

Fonte: DANTE, 2010, p. 223.

Considerando os sólidos S_1 e S_2 num plano horizontal com um plano paralelo que, ao seccionar S_1 , também secciona S_2 , determinando duas regiões planas de áreas A_1 e A_2 , pode-se afirmar então que, para todo plano, temos $A_1 = A_2$; logo:

$$\text{Volume } S_1 = \text{Volume } S_2$$

Para ilustrar o Princípio de Cavalieri, podem ser colocadas em cima de uma mesa várias caixas iguais, dispostas como na Figura 3. O sólido final é um paralelepípedo construído pela sobreposição das caixas.

Deslizando as caixas umas sobre as outras, obtemos um paralelepípedo oblíquo; ao modificar um pouco mais, temos um sólido geométrico bem diferente, conforme ilustra a figura. Qualquer que seja a maneira de empilhar essas caixas, o volume de cada pilha será o mesmo.

⁶ O italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), que foi discípulo de Galileu, publicou em 1635 sua Teoria Indivisível, que apresenta o Princípio de Cavalieri. Este foi bastante repellido à época, uma vez que a teoria não se mostrava suficientemente embasada. Mal sabiam os críticos que o Princípio de Cavalieri seria um dos pilares do que hoje conhecemos como cálculo integral, ajudando a definir a noção de integral.

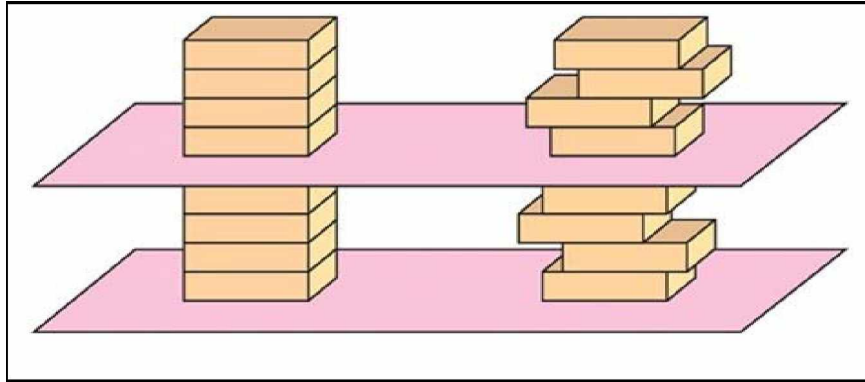


Figura 03: Princípio de Cavalieri (II)
Fonte: RIBEIRO, 2010, p. 99.

O cálculo dos volumes dos mais variados sólidos só irá avançar com essa nova ferramenta se apresentar as duas pilhas com o mesmo número de caixas iguais, dispostas de formas distintas.

Diante disso, o princípio de Cavalieri estabelece que dois sólidos com a mesma altura tenham volumes iguais se as secções planas de iguais alturas possuírem a mesma área. Pode-se considerar que sólidos nessa condição terão mesmo volume; logo, caso se conheça o volume de um dos sólidos, tem-se o volume dos outros.

De acordo com Pontes (2014), pode-se utilizar o Princípio de Cavalieri com os alunos a partir de seus conhecimentos prévios. É possível enfatizar os seus processos históricos e instigar os estudantes a pesquisar sobre o respectivo conteúdo.

Segundo Primo (2013, p. 26),

O enfoque do cálculo de volumes, pelo Princípio de Cavalieri é conveniente para o Ensino Médio. Sabemos que esse princípio é um teorema, mas pode ser apresentado na forma de axioma aos alunos nesse nível de ensino. No formato de axioma, acreditamos que seja bem intuitivo e aceitável por parte dos alunos, sendo que sua aplicação é consideravelmente simples e nos permite reduzir os argumentos necessários para a dedução de fórmulas, que expressam o volume de alguns sólidos. Sabemos da limitação em relação a superfícies curvas que esse princípio apresenta, mas acreditamos que para os sólidos, que são ensinados no Ensino Médio temos muitas vantagens em relação às desvantagens. A utilização desse princípio exige conhecimentos elementares da Matemática.

Os objetos que se encontram ao nosso redor ocupam um determinado espaço, e calcular o volume deles é medir o espaço que ocupam. O volume, como outras grandezas, é muito utilizado no nosso dia a dia, mas ainda continua sendo obstáculo para a maioria dos alunos, a exemplo do Princípio de Cavalieri que, mesmo estando presente nos livros didáticos, é pouco estudado dentro da sala de aula.

Em sua pesquisa, Garavello (2013) envolve o referido princípio nas atividades em sala de aula com volumes de algumas figuras geométricas, utilizando pequenos paralelepípedos de madeira que foram montados de diversas maneiras (da região “plana” para a menor), em que se solicitou aos alunos que comparassem seus sólidos com os dos colegas. Mesmo sendo simples, tal atividade serve como esclarecimento sobre o Princípio de Cavalieri, que pode ser aprofundado com outros materiais como folhas de papel, chapas metálicas, tijolos e caixas, para mostrar aos estudantes a aplicabilidade da geometria no dia a dia, além de abordar alguns conceitos.

Medir o volume ou a capacidade de um determinado objeto requer conhecimento sobre a quantidade e o armazenamento de espaço. Um exemplo disso é a caixa de suco com 9 cm de comprimento por 5,5 cm de largura e 19 cm de altura, constando na embalagem um litro. Nesse caso, é dispensável o cálculo do volume e da massa da caixa, pois o litro, que é comum no nosso cotidiano quanto à grandeza de volume, dá a ideia de capacidade, como é o caso de um litro de Jabuticaba, 1 litro de farinha de mandioca ou uma quarta de polvilho que equivale a uma lata de 18 litros cheia em Minas Gerais.

Ocupar lugar no espaço é uma característica associada à grandeza volume, ou seja, ele expressa a quantidade de espaço ocupado por uma porção de matéria, independentemente do estado (sólido, líquido ou gasoso).

É possível articular os conceitos de volume e massa, levando o aluno a questionar os seus significados, pois a aprendizagem significativa resulta em constantes indagações e pesquisas. Objetiva-se, porquanto, uma concepção de aprendizagem como processo de construção do conhecimento, sendo imprescindível a adoção de estratégias diretamente vinculadas a experiências práticas.

2.5 Alguns pressupostos da resolução de problemas

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental ponderam que, de acordo com alguns educadores matemáticos, a resolução de problemas permite aos alunos a mobilização dos conhecimentos desenvolvendo a capacidade de gerenciar as informações que estão ao seu alcance. A resolução de problemas como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática pode ser resumida nos seguintes princípios:

- a) a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição;
- b) o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório;
- c) um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;
- d) a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (BRASIL, 1998, p. 40).

Os Parâmetros Curriculares (BRASIL, 1998) ainda discutem direções para se fazer Matemática na sala de aula; tornam evidente o papel da disciplina no ensino fundamental, indicam a valorização do conhecimento matemático como ferramenta para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área que instiga o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.

Destacam ainda que, mesmo no ensino atual, a abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva de Resolução de Problemas, quando é incorporada ao programa, aparece como um item isolado. Costuma ser desenvolvida paralelamente, como aplicação da aprendizagem, a partir de listas de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha e repetição de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos.

Já de acordo com os CBC's (2006) um dos principais objetivos do ensino de Matemática, em qualquer nível, é o de desenvolver capacidades para a solução de problemas – que podem advir de circunstâncias concretas observáveis

(“contextualizadas”) ou não, sendo necessária uma boa capacidade de usar a linguagem matemática para interpretar questões formuladas verbalmente.

Por outro lado, problemas interessantes que despertem a curiosidade dos estudantes podem surgir dentro do próprio contexto matemático, em que novas situações podem ser exploradas e o conhecimento aprofundado, num exercício contínuo da imaginação. Na matemática, parece desnecessária a justificativa do valor que tem a solução de problemas, pois resolver problemas implica na mobilização de conhecimentos, organização e planejamento de estratégias na execução e verificação de uma solução adequada. A resolução de problemas envolve habilidades necessárias para a aprendizagem: leitura, escrita e significado das soluções – o que pode levar a uma aprendizagem mais significativa.

No Brasil, estudos voltados à resolução de problemas no contexto da educação matemática em todos os níveis de ensino vêm sendo desenvolvidos e orientados como os da Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, que afirma que problema é tudo o que não sabemos fazer, mas que temos interesse em fazer.

A autora destaca a necessidade de mudança na maneira de trabalhar a resolução de problemas. É preciso “considerar os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos; e a atividade de resolução de problemas como uma organização complexa e simultânea de vários níveis” (ALLEVATO E ONUCHIC, 2005, p. 2).

Em 1980, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) publicou documento intitulado *An agenda for action: recommendations for school mathematics in the 1980's*, com a indicação de que a “resolução de problemas deve ser o foco da matemática escolar” (ONUCHIC, 1999, p. 204). As ideias envolvidas nesta indicação apoiavam-se especialmente nos fundamentos do construtivismo; recursos foram desenvolvidos na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho dos alunos nessa área, visando o trabalho em sala de aula. Esse material teve grande contribuição para que os professores fizessem da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho.

Apesar disso, Onuchic e Allevato (2011) afirmam que muitos professores conceberam a resolução de problemas apenas como uma forma de aplicação dos conteúdos matemáticos e não como o eixo articulador de conteúdos. Essa abordagem também é encontrada em grande parte dos livros didáticos utilizados nas

escolas: depois de exercícios de “fixação” são apresentados os problemas contextualizados.

Problema para Mayer (1992) consiste em uma situação, verbal ou não, que é apresentada em um estado inicial para que seja transformada em outro estado distinto. Diante de uma situação-problema, o sujeito procura interpretações para a situação – tal compreensão é chamada de representação do problema, conhecida como fase determinante do grau de dificuldade do problema a ser solucionado.

Nesse contexto, o conjunto de operações prováveis é denominado espaço de solução do problema. Ele determina as habilidades dos sujeitos: os mais habilidosos fazem uma representação mais concisa escolhendo a melhor estratégia, sem considerar as demais prováveis, o que diminui o espaço de solução do problema; por sua vez, os sujeitos menos habilidosos, ao excluir lembretes necessários ou acrescentar lembretes desnecessários, tornarão a solução ainda mais confusa, aumentando o espaço do problema.

Mayer (1992) acrescenta ainda que só há um problema quando o sujeito não dispõe de procedimentos automáticos que permitam solucionar a situação de forma mais ou menos imediata e sem exigir, de alguma maneira, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos, dirigida a objetivos envolvendo mais artifícios cognitivos que automáticos. O autor estabelece que, para solucionar um problema, precisamos compreender o enunciado, conhecer o tipo de problema, os procedimentos dos cálculos e o modo como são enfocados.

De acordo com Brito (2006, p. 7), a solução de problemas pode ser definida como um procedimento cognitivo com a modificação de uma situação dirigida a um objetivo, com quatro características básicas: é cognitiva, é um processo, é dirigida a um objetivo e é pessoal, pois depende do conhecimento prévio do indivíduo. O processo refere-se a uma agilidade mental superior que envolve o uso de conceitos e princípios que o aprendiz combina na estrutura cognitiva, juntamente com procedimentos, técnicas, habilidades e conhecimentos prévios adquiridos que serão unidos a uma nova situação.

Para Romanatto (2012), é necessário um caminho adequado para os trabalhos diferenciados nas aulas de matemática, como a resolução de problemas, pois as mudanças teóricas e práticas são essenciais. Define-se, então, um problema matemático como uma situação que demanda a realização de uma sequência de

atitudes ou operações para obter um resultado, em que a solução não se encontra disponível no início; logo, é necessário construí-la.

Enquanto isso, Van de Walle (2009 apud ROMANATTO, 2012 p. 3) denomina problema como uma tarefa ou atividade em que os estudantes não têm regras determinadas ou memorizadas, nem a ideia de como chegar à solução corretamente. É necessário que o professor trabalhe as soluções individuais, grupais e coletivas – estas últimas são aceitas pela comunidade dos matemáticos.

Assim, é tarefa prioritária organizar, sintetizar e formalizar os conceitos, princípios e procedimentos matemáticos presentes nos problemas apresentados. A metodologia de ensino por meio da resolução de problemas traz simultaneamente as principais dimensões do trabalho docente: o ensino, a aprendizagem e a avaliação. No entanto, não é igualitário o envolvimento dos estudantes nas tarefas de resolução de problemas, sendo imprescindível a utilização de vários tipos de avaliações.

Van de Walle (2001 apud ONUCHIC E ALLEVATO, 2011, p. 81) discorre que há diferentes concepções relacionadas ao problema. Para o referido autor, um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual não existem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, tampouco a percepção sobre a existência de um método específico para se chegar à solução mais adequada.

Entre os autores e trabalhos já publicados, é possível encontrar conceitos de problema adjetivados, o que reflete qualidades específicas que deles se espera: problemas de fixação; exercícios; problemas abertos, fechados, padrão, rotineiros e não rotineiros; quebra-cabeças; desafios etc. Na realidade, todos eles são problemas, e os adjetivos expressam problemas estruturados e não estruturados que admitem diferentes estratégias para serem resolvidos.

Para os referidos autores, a resolução de problemas exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes no tocante ao trabalho em sala de aula. O docente precisa preparar (ou escolher) problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito a ser construído; ele deve deixar de ser o centro das atividades, passando para educandos a maior responsabilidade pela aprendizagem.

Enquanto isso, os estudantes devem entender e assumir essa responsabilidade num ato que exige mudanças de atitude e postura de ambos, o que nem sempre é obtido com facilidade. Há, entretanto, boas razões para se fazer

esse esforço. Conforme as ideias registradas em Onuchic e Allevato (2005), Van de Walle (2001) e outros autores que abordam o tema, são possíveis destacar:

- a) A resolução de problemas focaliza a atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre como dar sentido.
- b) A resolução de problemas desenvolve o poder matemático nos alunos, ou seja, a capacidade de pensar matematicamente e utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas. Isso permite aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
- c) A resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que ela faz sentido. Com isso, a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam.
- d) A resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.
- e) Os professores que ensinam dessa forma se empolgam e não querem voltar a ensinar de maneira tradicional. Eles se sentem gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
- f) A formalização de conceitos e teorias matemáticas, feita pelo docente, passa a fazer mais sentido para os educandos.

Ainda de acordo com Onuchic e Allevato (2011), o professor como mediador leva os alunos a pensar, uma vez que lhes dá tempo e os incentiva a trocar ideias entre eles. Com isso, os alunos são incitados a utilizar conhecimentos prévios e técnicas operatórias conhecidas, vistas como primordiais à resolução do problema proposto; e podem perpassar diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem – nesse caso, o docente precisa atender os educandos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador.

Diante desse quadro, o professor acompanha as explorações dos estudantes e os ajuda, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução – notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias –, com vistas a possibilitar a continuação do trabalho.

Hoje, os alunos têm sido beneficiados por variados tipos de materiais instrucionais e metodologias de ensino, ao passo que os docentes estão mais bem

preparados, seja pedagógica e matematicamente, em relação ao passado, e os currículos escolares de matemática estão cada vez mais inovadores.

Em contrapartida, ainda há queixas de que os estudantes não gostam e não aprendem matemática de maneira suficiente; que os professores não sabem matemática e tampouco ensiná-la; que os currículos escolares são superficiais, repetitivos e fragmentados. Isso, juntamente com os dados obtidos de pesquisas, avaliações, entre outros, atesta que os discentes saem mal preparados da escola, não sabendo fazer uso da matemática trabalhada ao longo de vários anos de escolaridade; logo, se mostram incapazes de tomar decisões na vida, sem terem aprendido a pensar matematicamente.

Outro aspecto necessário para o trabalho com a resolução de problemas é a constante reflexão sobre as atividades realizadas em sala de aula, em que se devem validar experiências bem-sucedidas de especialistas para identificar caminhos que superem dificuldades.

Ao analisar os resultados das avaliações do estado de Minas Gerais, percebe-se que um dos objetivos do ensino de grandezas e medidas é que os alunos resolvam problemas que envolvam medidas da sala de aula, utilizando algum objeto como medida. Isso ocorre desde o Ensino Fundamental, para que verifiquem e discutam os diferentes resultados entre eles.

Tais avaliações evidenciam que:

A resolução de problemas é uma capacidade cognitiva que deve ser desenvolvida na escola. O ensino da Matemática pode auxiliar nesse desenvolvimento considerando que a resolução de problemas não é o ponto final do processo de aprendizagem e sim o ponto de partida da atividade matemática, propiciando ao aluno desenvolver estratégias, levantar hipóteses, testar resultados e utilizar conceitos já aprendidos em outras competências. No campo do Espaço e forma, espera-se que os alunos consigam aplicar relações e propriedades das figuras geométricas – planas e não planas – em situações-problema (REVISTA PEDAGÓGICA, 2013, p. 27).

Nos anos finais do Ensino Fundamental, espera-se que os alunos sejam capazes de resolver problemas envolvendo o cálculo de perímetro, a área de figuras planas e as noções de volume (paralelepípedo) – se tais habilidades forem trabalhadas de maneira eficaz, os alunos resolverão problemas de cálculo de volume de diferentes sólidos geométricos no Ensino Médio.

Várias atividades cotidianas podem desenvolver a competência supracitada, como a comparação no tamanho de objetos, massas, volumes e temperaturas diferentes; e a comparação de dois objetos estimando suas medidas para compreender o processo de medição, pois medir significa comparar grandezas de mesma natureza para obter uma medida expressa por um número.

Callejo e Vila (2006) ponderam que resolver problemas pode ser um caminho para desenvolver um ambiente de aprendizagem que crie sujeitos autônomos, críticos e com desenvoltura para questionar situações que surgem conforme o estímulo propiciado pelo professor, que deve estar preparado para aceitar os diferentes procedimentos dos alunos nas soluções de tais problemas. Além disso, cabe ao professor garantir a constante discussão dos procedimentos que surgem tanto nos pequenos grupos, quanto na classe toda, visando ao enriquecimento da resolução de novos problemas que encaminham para o aprendizado.

O professor deve ensinar a partir dos conhecimentos prévios dos alunos, posto que a aprendizagem precise ser significativa, cabendo às atividades práticas a utilização do método de resolução de problemas que os permitam observarem a contextualização como uma ótima estratégia para aprender as aplicações de volumes e sólidos geométricos.

De fato, o compartilhamento de saberes possibilita a verificação em situações reais e experiências diretas para os alunos aprenderem de forma prazerosa e significativa, além de proporcionar um excelente momento para fazer reflexões sobre as respostas e corrigir eventuais erros individuais e coletivos.

A resolução de problemas valoriza a exposição de ideias, a argumentação e a criticidade. Desse modo, fomentam-se o trabalho em grupo, a comunicação, o contraste e o diálogo, envolvendo os alunos em um processo gerador de conhecimento, em que novas ideias aparecem e se tornam parte da aprendizagem.

Conforme indicam os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), é necessário desenvolver a autoestima e a confiança na capacidade de aprender. Deve-se deixar claro que o erro pode ser encarado como um ponto de apoio para uma nova ideia, em que o aluno pode arriscar, aventurar, gerar novas ideias, e explorar novos caminhos. Vale ressaltar que novos problemas surgem e motivam os alunos a problematizar diferentes situações, seja em forma de projetos e/ou em outros recursos didáticos.

Os problemas nem sempre precisam de um texto como enunciado, pois pode haver enunciados em forma de imagens completando o texto ou esquemas. Porém, o professor como mediador pode comentar o excesso (ou a falta) de dados e até mesmo dialogar sobre o que deseja para a resolução.

Em certas situações, é possível resolver um problema de distintas formas, desde que se faça uma análise para identificar os dados, as condições. Assim é possível retornar a conhecimentos obtidos anteriormente, onde a solução não conhecida de imediato.

Na resolução de problemas matemáticos, o principal assunto é relacionar as informações fornecidas com os símbolos matemáticos, encaixados para a solução dos problemas. O aluno precisa entender a situação, identificando a operação mais adequada para a resolução, e isso necessita de uma leitura acautelada e de um processo de interpretação.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p.86), os problemas, especialmente os de geometria fazem com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo.

Para Viana (2009), “a solução de vários problemas de geometria espacial requer a habilidade para formar e manipular imagens mentais. E que, em algumas situações os alunos não demonstram possuir o raciocínio espacial necessário para a solução de questões geométricas e este fato pode comprometer a sua atuação como professores do ensino básico” (p. 156).

Assim sendo, considera-se que para trabalhar com volume devemos apreciar os conhecimentos prévios dos alunos a fim de contribuir com o ensino e formação conceitual de maneira significativa.

A presente pesquisa pretende então, colaborar na formação conceitual dos alunos do ensino fundamental por meio da sequencia didática contendo a resolução de problemas envolvendo o conceito de volume.

2.6 Os problemas de volume

A construção do conceito de volume a partir de problemas foi sugerida por alguns autores.

Oliveira (2007) propôs problemas envolvendo a capacidade de dois ou mais recipientes para que os alunos desenvolvessem a ideia de comparação e de medida de quantidade de algum material – geralmente, líquidos. No entanto, adverte que se devam diferenciar as grandezas capacidade e volume. Anwandter-Cuellar (2008) discorre que problemas sobre volume podem ser classificados como:

- a) Problemas de comparação: comparar volumes.
- b) Problemas de medida de volume de um sólido: atribuir um número ao volume de um sólido.
- c) Problemas do estudo de variação de volume e de área: pesquisar sobre efeitos de transformações geométricas e numéricas de volume e da área de um sólido.
- d) Problemas de produção de um sólido com volume dado: produzir um sólido associado a um volume dado.
- e) Problemas de produção de sólidos com volume maior ou menor que o de um sólido dado: produzir um sólido com volume maior ou menor que o volume de um sólido dado.
- f) Problemas de mudança de unidade: medir o volume usando unidades diferentes.

Os autores avaliaram o conceito de volume de alunos por meio dos diferentes tipos de problemas e verificaram que a maioria dos participantes da pesquisa ora apresentava uma concepção situada no quadro geométrico (*volume sólido* – quando confundem a grandeza com o próprio sólido), ora uma concepção situada no quadro numérico (*volume medida*; *volume número*), porém sem associá-las. Uma das explicações para o baixo desempenho seria o fato de que nos manuais escolares franceses o tema volume é centrado no uso de fórmulas e nas transformações de unidades, ou seja, o conceito se situava no quadro numérico.

Assim, com base nas referências citadas, a sequência didática aqui apresentada pretende contemplar problemas de volume envolvendo comparação, medição e produção de sólidos.

CAPÍTULO 3

OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DO MINICURSO E DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

3.1 Objetivos do trabalho

O presente trabalho teve por objetivo analisar as contribuições de uma sequência didática para o ensino de volume a alunos do ensino fundamental. Especificamente, pretendeu-se:

- a) Analisar a potencialidade significativa do material quanto à articulação entre:
 - os quadros geométrico, numérico e de grandezas;
 - as grandezas volume, massa e conteúdo;
 - a resolução de problemas de comparação, de medição e de produção.
- b) Analisar as ideias apresentadas pelos licenciandos do Matemática/PIBID no minicurso em que se aplicou a referida sequência.

A investigação tem características que a classificam como pesquisa do professor devido ao fato de se buscar reunir informações sobre um determinado problema ou assunto e analisá-las, utilizando para isso o método científico com o objetivo de aumentar o conhecimento de determinado assunto, descobrir algo novo ou refutar conjecturas anteriores. Conforme Garcia (2009, p. 77), a pesquisa do professor tem como objetivo o conhecimento da realidade para transformá-la, a fim de melhorar suas práticas pedagógicas e desenvolver sua autonomia.

Também pode ser caracterizada como pesquisa de campo ou naturalística, devido ao fato de que os dados são coletados diretamente no “campo”, em contraste com aqueles que são realizados em bibliotecas, museus ou laboratórios.

O pesquisador acompanha, analisa observando diretamente as atividades do grupo para deter as explicações e interpretações do que ocorre naquele fato, conforme indicam Fiorentini e Lorenzato (2006).

A proposta deu-se na forma de uma sequência didática, isto é, atividades encadeadas de discussões e ações executadas pelos alunos com a mediação do professor e orientadora, dispostos de modo a aprofundar o tema que estava sendo pesquisado, por meio de algumas estratégias: construções, diálogos, experimentos, questionários e tabelas. De acordo com Zabala (1998) sequências didáticas são:

Um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos [...] (ZABALA, 1998, p. 18).

Neste trabalho, serão descritas as atividades que compõem a sequência didática e também seus objetivos; além disso, serão apresentadas as formas de aplicação e as respostas dos participantes do minicurso.

3.2 Os procedimentos do minicurso

Participaram do minicurso oito licenciandos do subprojeto Matemática da Faculdade de Ciências Integradas do Pontal – Universidade Federal de Uberlândia - Campus Ituiutaba.

O minicurso ocorreu em três encontros semanais durante os meses de maio e junho de 2016, em uma sala do prédio da FACIP.

As atividades foram propostas na forma de uma apostila (ANEXO A) que foi entregue a cada participante no primeiro encontro, sendo recolhida e entregue nos encontros seguintes.

Os participantes, dispostos em duplas e um trio, foram solicitados a resolver, em cada encontro, um determinado conjunto de questões; ou seja, no primeiro encontro apenas as 07 primeiras questões e as outras 09 em forma de oficina com o preenchimento da Tabela 1 (ANEXO A).

Ao término de cada encontro, os participantes formavam uma roda de conversa a fim de interagir com a pesquisadora e a orientadora; as respostas que eram discutidas com o grupo todo.

A roda de conversa teve como objetivo propiciar uma troca de ideias e solucionar as dúvidas; onde todos se sentiam a vontade para escutar e discutir sobre as questões apresentadas.

Além dos questionamentos advindos de cada conceito ou ideia, buscava-se discutir se aquelas questões ou problemas estavam adequados a alunos do ensino fundamental.

A pesquisadora e a orientadora interagiam com os alunos, a fim de estimulá-los na reflexão e na argumentação de suas respostas. As ações foram filmadas e os diálogos transcritos no primeiro e segundo encontro, de maneira a possibilitar a análise das ideias e opiniões dos participantes. Ao todo, foram apresentadas 16 questões que eram resolvidas em duplas e 07 problemas; resolvidos individualmente. Além da apostila, a pesquisadora disponibilizou os seguintes materiais:

- a) Paralelepípedos de cartolina;
- b) Material dourado;
- c) Régua;
- d) Tabela de densidade de materiais.

Neste trabalho, para apresentar as respostas dos participantes, estes foram denominados de **A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7 e A8**.

3.3A sequência didática: descrição das atividades e da aplicação no minicurso

O primeiro encontro

Após apresentação da pesquisadora e dos objetivos do minicurso, foi entregue a cada participante a apostila (ANEXO A) para que respondessem às questões descritas a seguir.

Primeira questão:

A primeira questão, que envolvia uma simulação de manipulação de massas de modelar, tinha a intenção de verificar se os alunos (a) observavam a deformação de uma quantidade de massa de modelar na obtenção de outros sólidos distintos, (b) percebiam assim a conservação do volume e (c) exploravam o invariante operatório “sólidos diferentes podem ter mesmo volume”.

A maioria percebeu que, mesmo com formas diferentes, não se modificaria o volume, pois se tinha partido de uma mesma quantidade de massa, portanto, teria um mesmo volume.

Quase todos os alunos responderam acertadamente a questão, conforme verificado na Figura 04.

1ª questão:
Imagine que você tenha três porções de massas de modelar, todas iguais, logo as três tem mesmo volume. Você, então, faz as seguintes formas:

Massa de modelar	Massa de modelar	Massa de modelar
Transforma no formato de bola (esfera)	Transforma no formato de pizza ou disco	Não modifica
Sólido A	Sólido B	Sólido C

O que você pode afirmar sobre os volumes dos sólidos A, B e C? Qual tem maior volume? E menor?

Resposta: Como não há retirada de material, quando foram modificados os sólidos A, B e C eles mantêm o mesmo volume.

1ª questão:
Imagine que você tenha três porções de massas de modelar, todas iguais, logo as três tem mesmo volume. Você, então, faz as seguintes formas:

Massa de modelar	Massa de modelar	Massa de modelar
Transforma no formato de bola (esfera)	Transforma no formato de pizza ou disco	Não modifica
Sólido A	Sólido B	Sólido C

O que você pode afirmar sobre os volumes dos sólidos A, B e C? Qual tem maior volume? E menor?

Resposta: Os volumes NÃO SÃO iguais, o sólido A TEM maior volume e o sólido B TEM menor volume.

Figura 04: 1ª questão da Sequência Didática
Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

Apesar disso, o diálogo dos alunos mostra que alguns deles pareciam ainda não conservar o volume dos sólidos nas três situações apresentadas:

- A1:** o volume é o que tem lá dentro.
A2: Na esfera achatada (pizza), o volume é menor que o da esfera...
 Modificação dos sólidos..... Amassa as massas de modelar e pronto.
A3: vão ser modificados, os sólidos.

Com a roda de conversa os mesmos alunos perceberam o equívoco com relação à conservação da massa de modelar.

Segunda questão:

A segunda questão objetivou a comparação de volume de latas, sendo solicitado que se colocasse em ordem crescente. Para tanto, os alunos poderiam apresentar possíveis estratégias, como por exemplo, imaginar o preenchimento das latas com água para verificar em qual delas cabe mais; ou simplesmente, observar suas bases e suas alturas e compará-las.

A4: Bem, pelo que parece não se pode ter certeza sobre as latas A e F, pois elas têm base e alturas diferentes. São duas hipóteses: ou $A > F$, ou $A < F$ ou $A = F$. Em relação as latas B e C, ao meu ver pela foto, são iguais, pois parecem ter a mesma área da base e altura. As latas D e F, apesar de parecerem ter área da base iguais, tem alturas diferentes; como E tem altura menor, então $E < D$.

Neste trecho da apostila, percebemos que o participante tomou como base as aparentes medidas das latas.

A figura 05 mostra estratégias adotadas por alguns participantes.

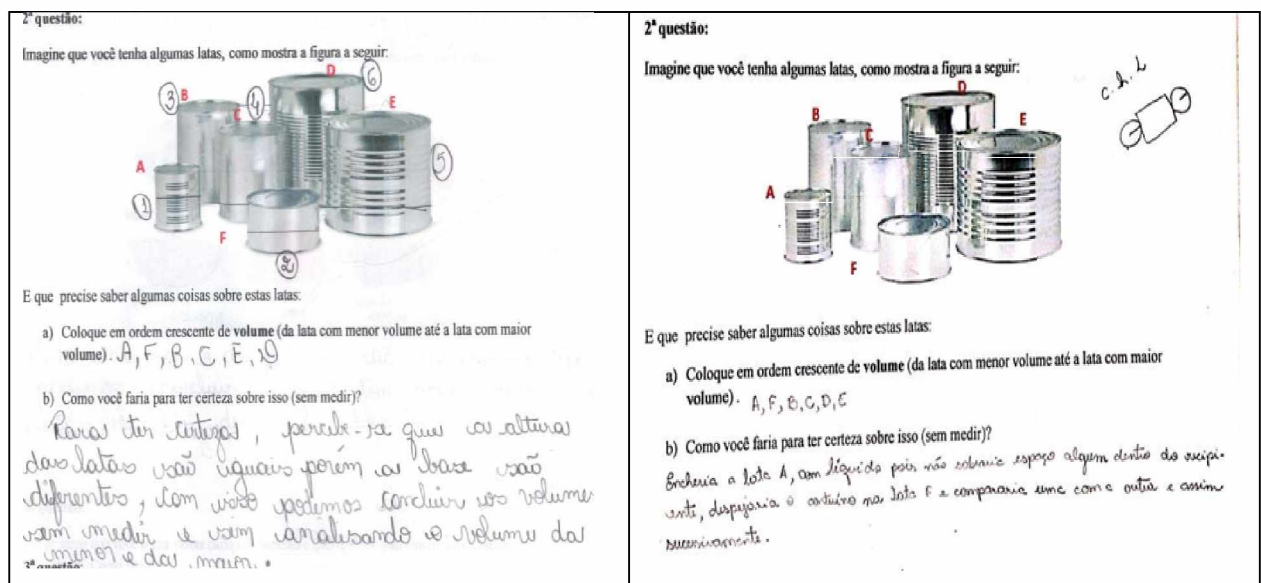


Figura 05: 2ª questão da Sequência Didática

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Os diálogos a seguir evidenciam a discussão acerca da articulação entre as grandezas volume e conteúdo:

A7: Colocar água dentro... Você vai saber quem é o maior se colocar dentro.

Pesquisadora: E então aí, passa para o papel isso que você falou.

A7: É porque se a ideia é sem medir a gente pensou... que a gente podia pegar por exemplo algum recipiente que tivesse um... em valor, em litros, por exemplo e colocar dentro do recipiente A. Então se aqui tivesse por exemplo 50 ml a gente conseguiria saber em relação ao outro. Mas como é sem medir, a gente pensou em pegar... Enche o recipiente de água na lata A, joga dentro da F que é a que a gente acha que é menor. Se for menor...

A5: tem que ficar um espaço a gente enche a F e joga dentro da B. Fica um espaço.

A3: Aí com o mesmo líquido a gente tem que comparar né... Enche essa aqui e coloca dentro da B que a gente acha que é maior. Aí se

sobrar um espaço tá certo... Mas se passar não tá certo... Mas tem que ser o mesmo líquido da A.

Orientadora: Sim. Água?

Pesquisadora: Poderia ser só líquido?

A5: Não. Pode ser outro tipo de coisa... Não, mas o líquido... Ele preenche totalmente não é?... Se você colocar grãos vai ter espaço, vai dar espaço. Então tem que ser líquido.

O fato de o aluno ser estimulado a argumentar as suas ideias a partir da simulação de ações com o material parece ter contribuído na articulação entre as grandezas conteúdo e volume, conforme se pretendia.

Terceira questão:

Na terceira questão, foram apresentadas três pedras do mesmo tipo e era perguntado qual delas tinha maior volume. Como eram sólidos irregulares uma estratégia possível seria obter o peso das mesmas. Foi verificado que alguns alunos identificaram a relação $B > A > C$ mas não sabiam justificar.

3ª questão: Imagine que você tenha três pedras do mesmo tipo, mais ou menos como mostra a figura.  Imagine que você precise saber algumas coisas a respeito dessas pedras: a) Coloque em ordem crescente de volume. C, A, B b) Como você faria para ter certeza dessa afirmação? Resposta: três copos de mesmo tamanho, colocando uma pedra em cada copo e enchendo com água até o mesmo nível, depois de maior volume a pedra que ocupar mais espaço.	3ª questão: Imagine que você tenha três pedras do mesmo tipo, mais ou menos como mostra a figura.  Imagine que você precise saber algumas coisas a respeito dessas pedras: a) Coloque em ordem crescente de volume. C, A, B b) Como você faria para ter certeza dessa afirmação? Colocaria em um copo de água para ver o deslocamento de água.
---	--

Figura 06: 3ª questão da Sequência Didática

Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

Alguns alunos disseram que usariam três copos de mesmo tamanho cheios de água, colocariam uma pedra em cada um e verificariam, assim, que a pedra de maior volume seria aquela contida no copo que deslocaria mais água. Outros afirmaram que pesariam as pedras, ou seja, a comparação dos volumes seria feita por meio das massas – medida em gramas ou em quilos.

Quarta questão:

As pedras cujo volume deveriam ser comparados eram de natureza distinta. Apesar de os participantes não se referirem ao conceito de densidade, a maioria percebeu que não seria possível pesá-las, já que a maior massa poderia não indicar o maior volume. A solução dada foi colocar as pedras em um recipiente com água a fim de observar o deslocamento de cada uma, separadamente. Assim, a pedra com maior volume seria aquela que deslocaria maior quantidade de líquido – esta seria verificada pela altura da água no recipiente.

A Figura 07, a seguir, ilustra algumas respostas.

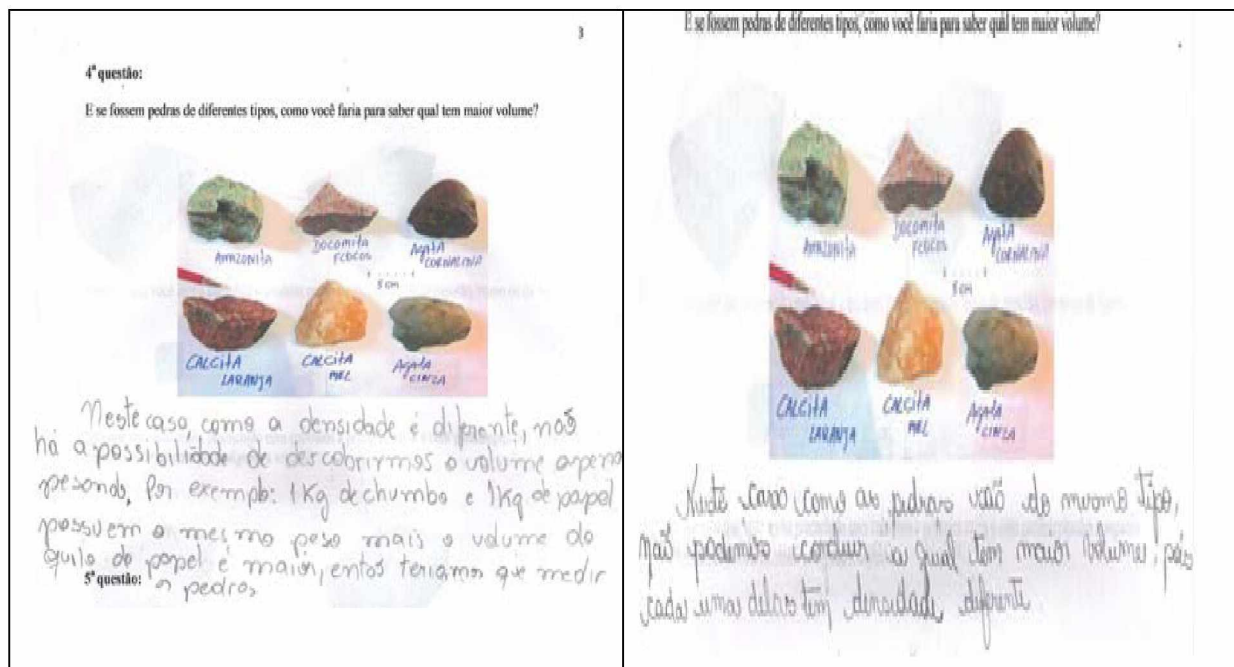


Figura 07: 4ª questão da Sequência Didática

Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

Quinta questão:

A quinta questão apresentava algumas caixas de tamanhos distintos e solicitava que se colocasse em ordem crescente de volume, justificando a resposta.

Os participantes concluíram que pesar não era adequado, tampouco mergulhar na água. Uma das sugestões para comparar as caixas duas a duas, foi preencher uma delas com areia e depois despejar este conteúdo na outra caixa; se na ação ainda restasse espaço na primeira caixa, esta seria maior.

Outra sugestão foi utilizar uma caixa menor como unidade de medida de areia e então contar quantas vezes seu conteúdo preencheria cada caixa. Assim, cada volume seria expresso por um número – e então seria fácil compará-los. A Figura 08 ilustra uma das respostas.

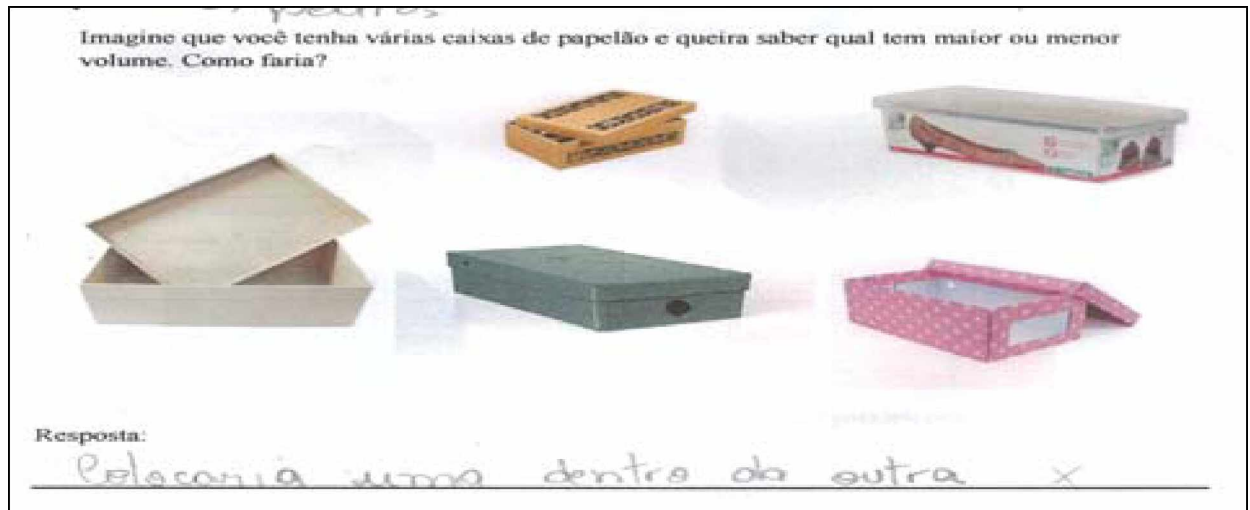


Figura 08: 5ª questão da Sequência Didática
Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

Sexta questão:

A sexta questão apresentava duas caixas iguais A e B cujos volumes teriam sido medidos por duas unidades de medida distintas: cubos para A e paralelepípedos para B (Figura 09).

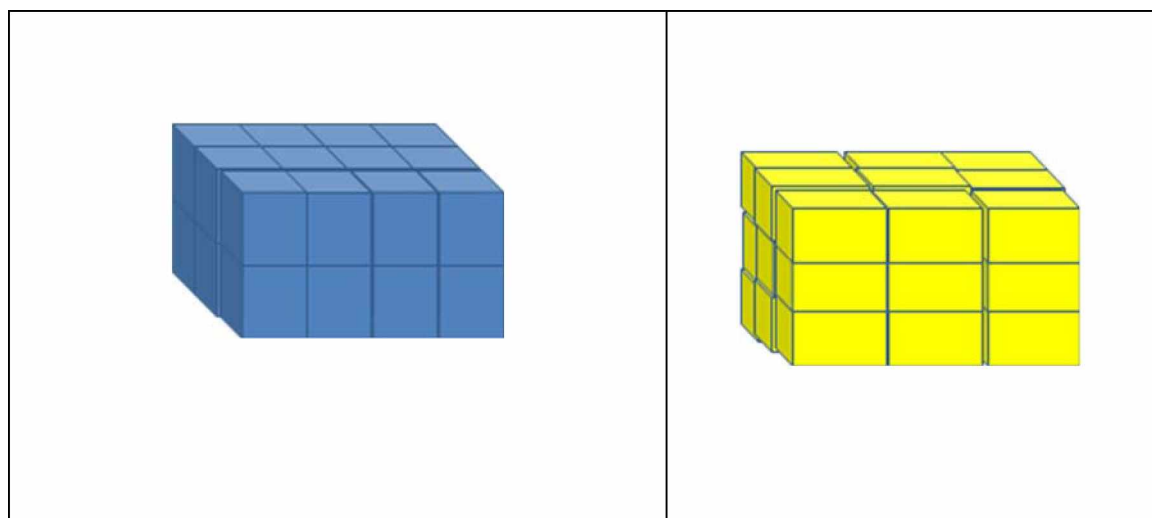


Figura 09: Parte da 6ª questão da Sequência Didática
Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

Constatou-se que apesar de, evidentemente, o volume ser o mesmo, a medida do volume dependia da unidade de medida adotada. Algumas respostas são mostradas na Figura 10.

Pergunta-se: a) Quantos cubinhos formam a caixa A? <u>$4 \times 3 \times 2 = 24$</u> b) Quantos cubinhos formam a caixa B? <u>$3 \times 3 \times 3 = 27$</u> c) Qual das duas tem maior volume? <u>as iguais</u> d) Tente explicar a situação. <u>Massa e comprimento influenciam no volume do sólido</u> <u>O volume do cubo é maior que o volume do paralelepípedo</u>	Pergunta-se: a) Quantos cubinhos formam a caixa A? <u>24</u> b) Quantos cubinhos formam a caixa B? <u>24</u> c) Qual das duas tem maior volume? <u>Nenhuma, pois as duas partem das mesmas caixas.</u> d) Tente explicar a situação. <u>O paralelepípedo tem o volume menor, pois como</u> <u>cabem mais na caixa do que os cubinhos formam</u> <u>o volume maior.</u>
---	--

Figura 10 - Respostas à 6ª questão da Sequência Didática.

Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

Na primeira resposta acima podemos verificar que o participante compreende que as duas caixas possuem volumes iguais e, portanto, explica que massa e comprimento influenciam no volume do sólido e que o volume do cubo é menor que o volume do paralelepípedo. Já na segunda resposta, percebe-se que as duas caixas são exatamente iguais.

Ao medir o volume das caixas, pode-se atribuir um número que irá compor o campo numérico, e a unidade de medida escolhida para medir compõe o campo das grandezas geométricas.

Conforme foi possível constatar, mesmo compreendendo que o volume é o mesmo, um participante confundiu-se ao tentar explicar a situação:

A3: O volume é o mesmo, mas!!!...

Pesquisadora: Pode falar: !!!!

A3: Então. No primeiro momento eu também pensei assim.

Mas... quando fui fazer a questão seis vi que, não!...

A6: A seis !!!!...

A3: Na questão seis; um é cubo e o outro é paralelepípedo. Aí fiquei na dúvida. Será que a caixa vai ficar com o mesmo volume?

A5: Eu acho que o que mudou foi o volume dos objetos... A caixa é a mesma!...

Orientadora: Pode falar também!...

A1: Deixou-me encucada a seis. Tenho comprimento, largura e altura! Mas... Ela tinha que dar o mesmo volume da outra caixa...

Sétima questão:

Esta questão foi composta de uma pergunta: o que é volume? As respostas foram parecidas, conforme mostra a Figura 11.

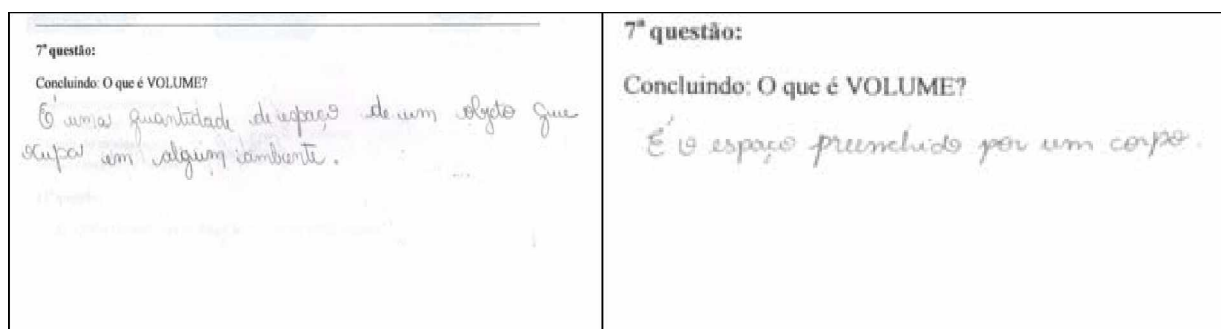


Figura 11 – 7ª questão da Sequência Didática
Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

Nota-se que para entender volume não basta utilizar corretamente as fórmulas; é preciso usar o conhecimento conceitual que exige a articulação dos quadros geométrico, das grandezas e numérico e, que para Figueiredo (2013 apud OLIVEIRA, 2002, p. 19), embora a fórmula seja uma ferramenta importante para o cálculo de volume e de outras grandezas geométricas, o seu uso de forma mecânica, sem a compreensão do seu sentido, e a aplicação exagerada das mesmas para compreensão das grandezas têm se mostrado ineficazes e geradores de entraves, como por exemplo, a omissão ou o uso inadequado de unidades de volume; o que gera como uma das consequências, a incapacidade de resolver problemas de cálculo de volume, que exijam outros tipos de estratégia.

Podemos observar ainda que, os conceitos que dão suporte à construção de volume são: medida, densidade, massa, peso, forma e dimensão; e que devemos trabalhar com os alunos com objetos para que comparem, construam e pesem.

O segundo encontro

Dando continuidade ao trabalho, este encontro foi organizado em forma de oficina, com duração de 90 minutos, onde os alunos, em duplas, receberam pelo menos duas caixas em forma de paralelepípedos para medir com cubinhos, anotando todo o procedimento, ou seja, quantos cubinhos utilizariam para calcular o volume.

Cada grupo recebeu um kit formado por uma caixa de material dourado⁷, a apostila (ANEXO A), umas caixinhas de cartolina e duas tabelas (ANEXO B e ANEXO C), uma contendo a densidade de alguns metais e outra com a densidade de madeiras, de modo a dar continuidade às questões propostas.

Oitava questão:

A oitava questão solicitava que se formasse em cima da carteira alguns paralelepípedos a partir do volume dado e utilizando os cubinhos distribuídos; em seguida, os participantes deveriam dar as medidas da largura, comprimento e altura, preenchendo uma tabela. O objetivo era que verificassem as diversas construções dos colegas e concluíssem que o volume dos paralelepípedos pode ser medido em centímetros cúbicos (cm^3) – tomados como unidade de medida e que sólidos distintos poderiam ter o mesmo volume.

A Figura 12 ilustra as ações realizadas e a Figura 13 o preenchimento da tabela solicitada.

⁷ O Material Dourado distribuído era constituído por cubinhos, barras, placas e cubo maior, todos feitos de madeira. Em geral, esse tipo de material é utilizado para conceituar o sistema de numeração decimal.

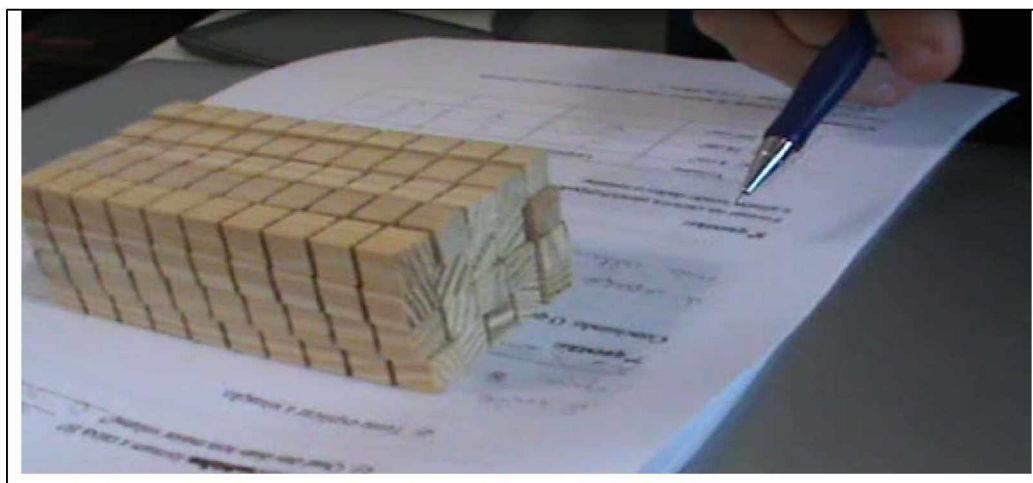


Figura 12. Ações realizadas para responder a 8ª questão
Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

Os alunos completaram um quadro com a largura, comprimento e altura, para dar o volume e a capacidade aproximados de algumas caixinhas (linhas 5 e 6 da Tabela).

8ª questão:
Formar na carteira paralelepípedos utilizando os cubinhos e dar as medidas da largura, comprimento e altura; sendo dados o volume.

Volume	Largura	Comprimento	Altura
a) 8 cm^3	1 cm	2 cm	4 cm
b) 24 cm^3	6 cm	2 cm	2 cm
c) 200 cm^3	10 cm	10 cm	2 cm

Figura 13 - Exemplo de tabela solicitada na 8ª questão
Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

Comparando as respostas dos alunos, foi possível perceber que, para um mesmo volume, foram apresentados paralelepípedos de medidas diferentes. Assim, as observações e discussões provocadas entre os estudantes podem ter contribuído para a compreensão do quadro numérico na conceituação de volume, pois a interação aluno- professor e aluno-aluno possibilitam diferentes interpretações do que está sendo discutido.

Procedimento que os professores podem levar para a sala de aula para que juntamente com os alunos possam pensar em outros valores e com distintas figuras.

Nona questão

A nona questão solicitava o volume aproximado de algumas caixinhas – que foram distribuídas pela pesquisadora – usando o material dourado. Esperava-se que os alunos utilizassem os cubinhos para dar a resposta e, assim, preencher as linhas 5 e 6 da tabela fornecida; as ações são ilustradas pela Figura 14.



Figura 14 - Ações realizadas para responder à 9ª questão.
Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

Conforme pode ser visto na Figura 14, os licenciandos não se valeram da régua para medir as caixinhas e utilizaram o material para obter um valor aproximado do volume. Esta ação buscava conceituar o centímetro cúbico como unidade de medida para objetos do cotidiano, sem ainda utilizar o cálculo que geralmente é aprendido mecanicamente na escola.

Décima questão

Sem usar o material, a décima questão solicitava determinar o volume de três paralelepípedos – figuras desenhadas acompanhadas das três medidas, conforme mostra a

Figura 15. Esperava-se que os alunos concluíssem que a medida do volume de um paralelepípedo seria dada pelo produto de suas medidas.

10ª questão:

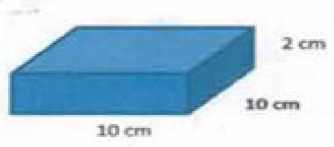
Sem usar o material, determinar o volume dos paralelepípedos A, B e C a seguir e colocá-los em ordem de crescente de volume. (7,8,9 da tabela).

A



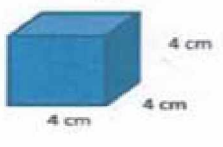
10 cm 4 cm 5 cm

B



10 cm 10 cm 2 cm

C



4 cm 4 cm 4 cm

Resposta:
 Volume do paralelepípedo A = 200 cm^3
 Volume do paralelepípedo B = 200 cm^3
 Volume do paralelepípedo C = 64 cm^3
 Ordem crescente de volume = C, A ou B.

Figura 15: Ações realizadas para responder a 10ª questão
 Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

Décima primeira questão:

Para sintetizar, nesta questão indagou-se qual seria a fórmula para se obter o volume do paralelepípedo, apresentando um desenho da figura. Esperava-se que os alunos chegassem à fórmula $V = a \cdot b \cdot c$.

11ª questão:

a) Qual a fórmula para se chegar ao volume do paralelepípedo?

c



a **b**

Volume_{paralelepípedo} = $C \cdot A \cdot B$

Volume_{cubo} = $a \times a \times a = a^3$

Como em um cubo suas dimensões tem a mesma medida ou $a \times a \times a$ ou $b \times b \times b$ ou $C \times C \times C$.

12ª questão:

Figura 16 - Ações realizadas para responder à 11ª questão.
 Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

Décima segunda questão:

Nesta questão, os participantes deveriam relacionar o volume do cubinho de madeira (cm^3) com a capacidade da forma, caso pudesse ser preenchida com líquido e então completar: 1 cm^3 (volume) = ... ml (capacidade). Articulando as duas grandezas, foi solicitado que determinassem a capacidade das outras peças do material dourado (supondo peças ocas e desprezando as paredes), completando todas as linhas da Tabela nas colunas Volume e Capacidade. Nota-se que as duas últimas linhas exigiram a revisão das unidades de medida de volume e capacidade, conforme mostra a Figura 17.

Medida de	Grandeza	Fator	Múltiplos			Unidade	Submúltiplos		
Capacidade	Litro	10	kl	hl	dal	l	dl	cl	ml
Volume	Metro Cúbico	1000	km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
Área	Metro Quadrado	100	km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
Comprimento	Metro	10	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Massa	Gramas	10	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
			: $\rightarrow$ X	: $\rightarrow$ X	: $\rightarrow$ X	: $\rightarrow$ X	: $\rightarrow$ X	: $\rightarrow$ X	: $\rightarrow$ X
			$\leftarrow$:	$\leftarrow$:	$\leftarrow$:	$\leftarrow$:	$\leftarrow$:	$\leftarrow$:	$\leftarrow$:

* Setas à direita ($\rightarrow$ X) indicam uma multiplicação pelo fator multiplicador 10, 100 ou 1000 dependendo da unidade de medida.

**Setas à esquerda ($\leftarrow$:) indicam uma divisão pelo fator multiplicador 10, 100 ou 1000 dependendo da unidade de medida.

Figura 17 – Tabela de transformação de unidade de capacidade, volume, área, comprimento e massa. Fonte: superreforco.blogspot.com/2012/11/sistemas-de-metrico-decimal-medidas-de.html

Décima terceira questão:

A 13ª questão solicitava que os participantes pegassem as caixinhas e os paralelepípedos usados anteriormente e determinasse a capacidade delas, completando as linhas 5 a 11 da Tabela 1, colunas Volume e Capacidade.

Décima quarta questão:

Finalizando a articulação entre volume e capacidade, os participantes foram solicitados a completar as demais linhas da Tabela, colunas Volume e Capacidade.

Décima quinta questão:

A articulação entre volume, capacidade e massa foi iniciada por meio da 15ª questão. Os participantes foram solicitados a pegar o cubinho de madeira e imaginar que, caso a água contida nele fosse pesada em uma balança, qual seria sua massa; completariam, assim, a igualdade: 1 cm^3 (volume) = ... ml (capacidade) = ...(massa). Após isso, deveriam determinar a massa das outras peças do material dourado, supondo que elas sejam feitas de água, completando as linhas 1, 2, 3 e 4 da Tabela, coluna Massa (em água).

Décima sexta questão:

Uma tabela com a densidade de materiais foi entregue aos participantes para que, conhecendo esses valores, pudessem completar a Tabela nas colunas Massa (em ferro, em madeira, em outro material qualquer). Antes do preenchimento da tabela, foram oferecidos vários objetos (inclusive peças do material dourado) para que, individualmente, determinasse qual seria seu volume, sua capacidade (supondo oco) e sua massa (supondo feito em ferro, madeira, ouro etc.).

Questionamentos foram surgindo com relação aos conceitos de volume, massa e densidade e também acerca da densidade da madeira – já que esta depende do tipo de madeira.

Alguns participantes ficavam segurando o cubinho e comentavam qual seria a densidade de alguns materiais não constantes na tabela, o que parecia estar contribuindo para a formação do conceito. A Figura 18 a seguir mostra um exemplo da tabela 1 preenchida.

TABELA

Nº	Objeto/figura	Volume	Capacidade	Massa (peso)			
				Em água	Em ferro	Em madeira <i>Oliveira</i>	Escolha material <i>Alto</i>
1	Cubinho do material dourado	1 cm^3	1 ml	1 g	7,8 g	0,95 g	0,55 g
2	Barra do material dourado	10 cm^3	10 ml	10 g	78 g	9,5 g	5,5 g
3	Placa do material dourado	100 cm^3	100 ml	100 g	780 g	95 g	55 g
4	Cubo grande	1000 cm^3	1000 ml = 1 L	1000 g ou 1 kg	7800 g 7,8 kg	950 g 950 g	550 g
5	Caixinha A (aproximado)	150 cm^3	150 ml	150 g	1,170 g ou 1,170 kg	142,5 g	82,5 g
6	Caixinha B (aproximado)	240 cm^3	240 ml	240 g	1,872 g 1 kg 872 g	228 g	132 g
7	Paralelepípedo A	200 cm^3	200 ml	200 g	1560 g 1 kg 560 g	190 g	110 g
8	Paralelepípedo B	200 cm^3	200 ml	200 g	1560 g 1 kg 560 g	190 g	110 g
9	Paralelepípedo III C	64 cm^3	64 ml	64 g	501,12 g	60,17 g	35,2 g
10	Caixinha A (exato) <i>água</i>	$5,3 \times 6 \times 5,5 =$ $174,9\text{ cm}^3$	174,9 ml	174,9 g	1,364 g	166,15 g	96,19 g
11	Caixinha B (exato)	$9,8 \times 3,7 \times 7 =$ $253,82\text{ cm}^3$	253,82 ml	253,82 g	1,979 g 1 kg 979 g	244,13 g	139,10 g
12	Paralelepípedo medinho 30cm por 20 cm e tendo 20cm de altura. <i>linguado</i>	12000 cm^3	12000 ml 12 L	12000 g 12 kg	93,600 g 93 kg 600 g	11,400 g	6,600 g 6 kg 600 g
13	Água de uma piscina retangular medindo 10 m por 4m e com 1,5m de altura.	60 m^3 $1\text{ m}^3 = 1000\text{ L}$	60000 L	60000 kg 60 ton	468 000 000 g 468 000 kg 468 ton	57 000 000 g 57 000 kg 57 ton	33 000 000 g 33 000 kg 33 ton

Figura 18 - Tabela de comparação de volume, capacidade e massa de alguns materiais.
Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

O Terceiro Encontro

Neste encontro, os participantes responderam a problemas relacionados com a construção, comparação e decomposição de paralelepípedos resolvidos de forma

individual a fim de contribuir para a fixação dos conceitos e também refletir sobre a potencialidade do material apresentado no minicurso.

Para os estudantes envolvidos neste trabalho, percebeu-se a importância da realização de atividades práticas para possibilitar a aplicação dos conteúdos de geometria espacial.

A figura 19 ilustra os dois primeiros problemas.

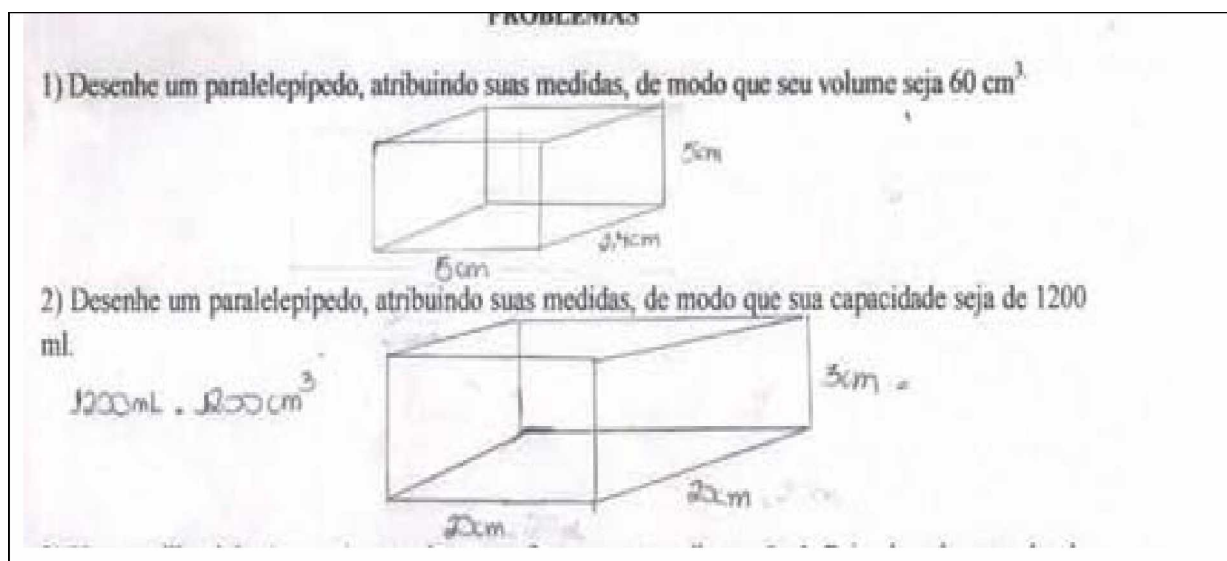


Figura 19 - Ações realizadas para responder ao 1º e 2º problema.

Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

Conforme mostra a Figura 19, os dois primeiros problemas propostos solicitavam a construção de paralelepípedos, atribuindo-lhes medidas de comprimento, largura e altura.

Já o terceiro problema considerava o deslocamento da água após a imersão do cubo de metal na mesma vasilha que estava com um volume inicial de 250 ml e que, após a imersão, passou para 350 ml. Era necessário verificar que o volume do cubo seria obtido pela diferença entre V_f e V_i , ou seja, volume final e volume inicial; assim, o volume do cubo seria igual ao volume da água deslocada, que corresponde à elevação de 100 ml do nível da água na vasilha.

Nesta questão, apenas um dos alunos não conseguiu identificar a medida da aresta mesmo calculando o volume do cubo corretamente (Figura 20).

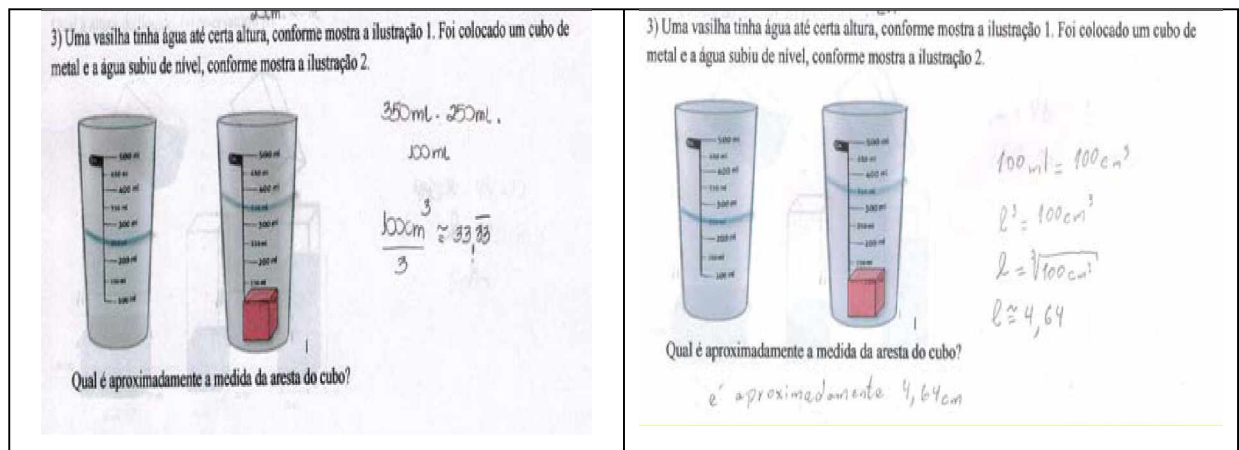


Figura 20 - Aresta do cubo.
Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

O quarto problema apresentava um sólido formado por blocos que podiam ser decompostos. Os participantes separaram os dois cubos de 5 cm de aresta e um paralelepípedo com 30 cm de comprimento, 5 cm de largura e 5 cm de altura e calcularam cada volume obtendo como resultado a soma dos três volumes (Figura 21).

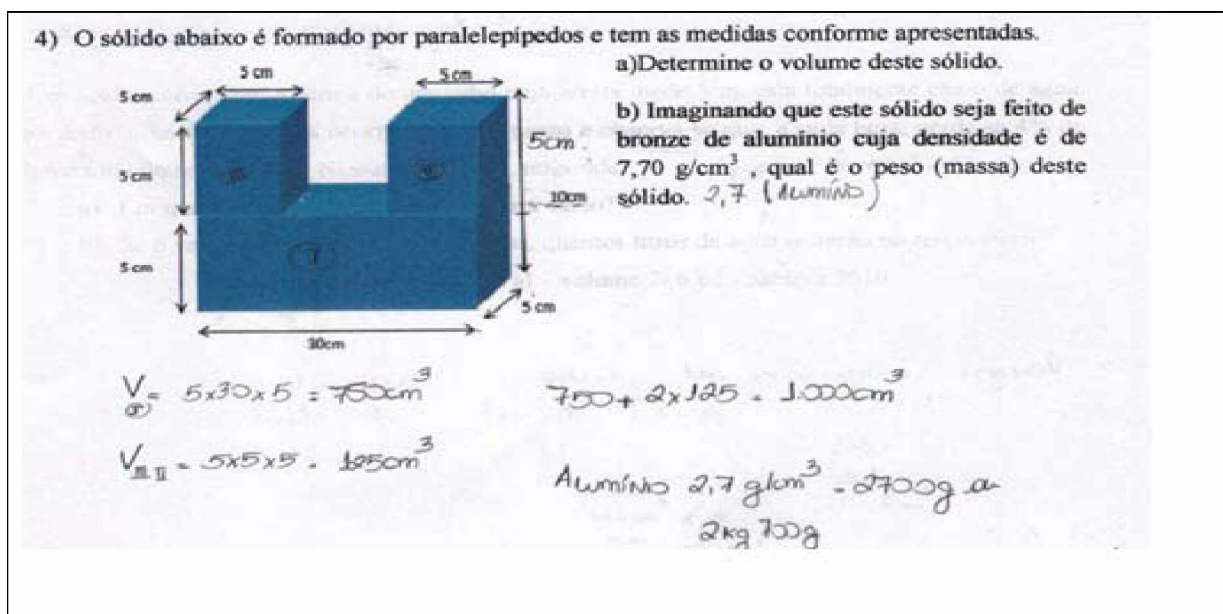


Figura 21 – Volume do sólido.
Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

O quinto problema requeria a noção de conservação de volume. Alguns participantes fizeram o cubo com suas medidas, o paralelepípedo sem a altura; outros, porém, conseguiram perceber como fazer sem a representação pictórica; ou seja, utilizando as imagens retidas na mente (Figura 22).

5) Um cubo de ferro medindo 20 cm de aresta foi derretido e, com o material, foi feito um paralelepípedo de medidas de base 10 cm por 20 cm. Qual é a altura do paralelepípedo?

$V_{\text{cubo}} = 20^3 = 8000 \text{ cm}^3$

$V_{\text{paral}} = 10 \cdot 20 \cdot h = 8000$

$h = \text{altura}$

5) Um cubo de ferro medindo 20 cm de aresta foi derretido e, com o material, foi feito um paralelepípedo de medidas de base 10 cm por 20 cm. Qual é a altura do paralelepípedo?

Para saber a altura, descobrimos primeiro o volume: $20 \times 20 \times 20 = 8000 \text{ cm}^3$

Para descobrir a altura do paralelepípedo, vamos dividir o volume por sua base, pois ele contém o mesmo material. Assim:

$20 \times 20 \times x = 8000$

$400x = 8000$

$x = \frac{8000}{400}$

$x = 20 \text{ cm}$ que será a altura de sua altura

Figura 22 - Resposta ao questionamento do problema nº 05.

Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

O sexto problema mostrava sólidos com medidas diferentes; porém com volumes iguais. O sólido A completamente cheio era despejado (Figura 23) em outro recipiente denominado sólido B.

6) O reservatório A estava cheio de água até a borda. Toda a água foi despejada no reservatório B. Qual a altura do líquido, no reservatório B?

$V_A = 40 \cdot 20 \cdot 20 = 16000 \text{ cm}^3$

$V_A = V_B$

$V_B = 20 \cdot 20 \cdot x$

$16000 = 400x$

$x = \frac{16000}{400}$

$x = 40 \text{ cm}$ altura

6) O reservatório A estava cheio de água até a borda. Toda a água foi despejada no reservatório B. Qual a altura do líquido, no reservatório B?

$V_A = 30 \cdot 20 \cdot 20 = 12000$

$V_A = V_B$

$V_B = 20 \cdot 20 \cdot x$

$12000 = 400x$

$x = \frac{12000}{400}$

$x = 30$

Logo a altura será 30 cm

Figura 23 – Resposta ao questionamento do problema nº 06.

Fonte: Arquivo da - pesquisadora, 2016.

O sétimo problema articulava as grandezas volume e capacidade, exigindo, inicialmente, o conhecimento da capacidade total de um reservatório, sendo dadas as medidas. A informação dada era que a cada hora perdia-se uma quantidade de água.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE E DISCUSSÃO

4.1A potencialidade significativa do material e a articulação entre os quadros geométrico, numérico e de grandezas

As sete primeiras questões tiveram a intenção de provocar os alunos diante do conceito de volume em diferentes situações cotidianas. Primeiramente, eles ficaram apenas no quadro geométrico, comparando o volume dos objetos selecionados (caixa, pedra, lata) sem atribuir um número ao volume dos mesmos.

Essa estratégia permitiu aos alunos articularem o quadro geométrico com o numérico, para só então tentarem formar o quadro das grandezas. Quando foi mostrado a eles duas caixas iguais com números diferentes para a medida do volume (6ª questão), eles começaram a articular o quadro das grandezas.

Para Moraes et al. (2012, p. 3), o volume não é um número, pois ao alterar a unidade de volume se obtém medidas distintas para um mesmo sólido embora seu volume não se altere. Os autores afirmam ainda que, ao calcular o volume de um determinado sólido, o aluno passa do quadro geométrico para o numérico e ao reconhecer a medida como sendo da grandeza volume, passa pelo quadro das grandezas.

Já para Moraes (2013, p. 45), atividades de comparação de volumes e produção de sólidos permitem a construção da noção de volume como grandeza, uma vez que possibilita o aluno comparar e medir, além de dissociar a grandeza e o sólido (produção), para a compreensão de volume, advertindo ainda, que ao variar a unidade de medida, o volume é o mesmo, mas a medida dele muda, como é o caso da atividade deste minicurso (Figura 09).

4.2 A potencialidade significativa do material e a articulação entre as grandezas volume, massa e conteúdo

Na aprendizagem significativa de acordo com Ausubel, o material de instrução é apenas *potencialmente* significativo. Se *já* fosse significativo, o objetivo da aprendizagem significativa – ou seja, a aquisição de novos significados – já estaria completada, por definição, antes de sequer se tentar ou ocorrer qualquer aprendizagem (2003, p. 78).

Ausubel (1982) sugere que os conhecimentos prévios dos alunos sejam valorizados, para que possam construir estruturas mentais capazes de descobrir e redescobrir outros conhecimentos, caracterizando, assim, uma aprendizagem significativa.

O professor pode ajudar a ativar os conhecimentos prévios dos alunos, para favorecer a aprendizagem significativa de conceitos. Para isso, precisa conhecer que ideias anteriores se relacionam ao novo material, a fim de proporcionar oportunidades para que os aprendizes reflitam sobre elas (justificando, organizando, comparando) e, assim, desenvolvam novas concepções – mais próximas daquelas cientificamente aceitas.

Os conhecimentos prévios dos alunos e os materiais utilizados e organizados a fim de estabelecer relações significativas entre os termos aprendidos, absorvidos progressivamente, proporcionará a mobilização do conhecimento conceitual de volume envolvendo massa e conteúdo, como a questão das latas (Figura 05); em que os alunos puderam discutir possibilidades de preenchimento das mesmas com líquidos devido ao fato de não sobrar espaço dentro do recipiente.

Já nas caixas exatamente iguais feitas de papelão (Figura 09), a princípio alguns alunos se equivocaram devido ao fato dos números que representavam o volume serem diferentes – isto porque a unidade era diferente. A intenção era promover a ideia de que a medida do volume dependia da unidade de medida adotada.

Oliveira (2007, p. 154-55) em seu trabalho destaca a importância de pesquisas que permitam um melhor entendimento entre a relação de Massa e Peso, a questão da dimensionalidade e do Espaço no processo de ensino - aprendizagem conceitual de volume.

Assim, a tabela (Figura 18) apresentada aos alunos deveria favorecer as ações de medir e comparar e, desta forma articular as grandezas volume, capacidade e massa de distintos objetos. Considerou-se que os conceitos físicos de densidade, massa e peso são de grande relevância para a construção do conceito de volume no ensino Fundamental.

Conforme Figueiredo (2013 apud OLIVEIRA, 2007) o que inibe a compreensão do conceito de volume como grandeza geométrica é desconhecer a relação entre massa e volume, que remete ao conceito de densidade dos corpos, pois ao comparar dois ou mais objetos, nem sempre o mais pesado será o de maior volume, a não ser que tais objetos sejam compostos da mesma substância, pois terão a mesma densidade, e assim, massa e volume alteram na mesma proporção, ou seja, são diretamente proporcionais. Como é o caso do volume das pedras mencionado neste trabalho, onde os participantes mesmo não mencionando densidade perceberam a impossibilidade de se pesar as pedras a fim de obter o maior ou menor volume.

4.3 A resolução de problemas

De acordo com os Parâmetros Curriculares, a resolução de problemas ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. (BRASIL, 1998, p.40).

Para Onuchic e Allevato (2005), um problema é algo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer. Nessa perspectiva, a resolução de problemas significa envolver-se em uma tarefa ou atividade cujo método de solução não é conhecido imediatamente. As autoras ainda advertem que o professor deve trabalhar soluções individuais, grupais e coletivas; e que o professor tem como

tarefa prioritária organizar, sintetizar, formalizar os conceitos, princípios e procedimentos matemáticos.

No que se refere aos problemas de volume, Viana (2015), propõe a solução de problemas em situações reais que requerem comparações de volumes de sólidos geométricos para contribuir com a formação conceitual de volume.

O processo da resolução de problemas adotado por alguns pesquisadores como Oliveira (2002, 2007) e Figueiredo (2013) apresentam ideias relevantes para o processo de ensino aprendizagem de conceitos, particularmente de volume, nas escolas e nas instituições de formação de professores.

As atividades de medição deste trabalho levaram os alunos a refletir sobre como medir, entendendo que a medida depende da unidade utilizada. As questões 6, 8, 9 e 10 buscavam a sistematização do processo de medir volumes.

Quanto às atividades de construção, os participantes utilizaram o material dourado, principalmente os cubinhos de 1cm^3 , preenchendo a tabela após construírem sólidos de distintos volumes (Figura 12 e 13), com o preenchimento posterior da Tabela 1 com volume, Capacidade e Massa (Figura 18), puderam discutir de forma significativa cada objeto.

Algumas questões foram propostas para desenvolver estratégias de resolver problemas de volume. Conforme indicam vários autores, para compreender o problema, é preciso investigar, questionar, reconhecer os conceitos matemáticos do mesmo e, os alunos incentivados a pensar.

Nesse sentido para Ponte *et al* (2006, p. 9), investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito elaborados na fronteira do conhecimento, mas a reformulação de questões interessantes, que não sabemos de imediato a resposta.

Como afirma Onuchic (1999), o papel da resolução de problemas no currículo de matemática significa o caminho para a aquisição de novos conhecimentos, ou seja, a compreensão deve ser o fundamental objetivo do ensino.

A resolução de problemas na sequência didática apresentada surgiu devido à necessidade de mobilizar os conhecimentos dos alunos, explorando sua criatividade, curiosidade e a possibilidade de ativar o raciocínio lógico diante de situações problemas, com novas estratégias envolvendo comparação, medição e produção. Isso porque, dentre os conteúdos trabalhados pela pesquisadora durante sua

atuação como educadora, a resolução de problemas relacionados à geometria foi o tema em que os alunos apresentaram mais dificuldades.

Dessa forma, considera-se que os problemas propostos possam contribuir para a aprendizagem significativa do conceito de volume.

4.4 As ideias dos licenciandos do PIBID

A descrição dos fatos observados, as transcrições dos registros de áudio, as respostas dadas às questões e os problemas resolvidos durante o minicurso permitiram compreender o desenvolvimento das concepções dos licenciandos sobre o conceito de volume.

A busca de respostas aos questionamentos contidos nas atividades da sequência proposta parece ter favorecido a aprendizagem por descoberta. Como o conteúdo não foi apresentado de maneira acabada aos licenciandos, estes puderam discutir suas respostas quando, por exemplo, indicavam a maneira de comparar o volume das pedras, colocavam as latas em ordem crescente de volume ou faziam estimativas acerca da massa de um cubinho cheio de água ou feito de bronze. Dessa forma, acredita-se que eles puderam apreender os significados, reorganizando as informações de modo consistente e não arbitrário – o que permitia a eles criar novas proposições para conceituar volume e solucionar os problemas suscitados.

No entanto, em vários momentos do minicurso foi necessário que a ministrante esclarecesse as ideias e sistematizasse as relações estabelecidas, o que favoreceu a aprendizagem por recepção verbal. Assim, aos licenciandos foi dada a oportunidade de reconhecer o fato de que a aprendizagem por recepção verbal não é necessariamente memorizada ou passiva (tal como o é frequentemente na prática educacional corrente).

Foi evidenciada a importância da linguagem como agente facilitador da aprendizagem significativa. Nesse sentido, Ausubel (2003, p. 5) argumenta que as relações da linguagem facilitam, por meio das propriedades representacionais das palavras, a aprendizagem significativa tanto por recepção como pela descoberta, clarificando e tornando mais precisos e transferíveis os significados. Da mesma

forma, Moreira e Masini (2005) afirmam que a linguagem ocupa um papel facilitador e está intensamente ligada ao processo de aquisição de conceitos, contribuindo com a representação de símbolos e com aspectos refinadores da verbalização e, no processo de conceitualização, influencia e reflete o nível do funcionamento cognitivo.

Como houve grande participação dos licenciandos nas atividades propostas, a pesquisadora percebeu a importância de o professor considerar os conhecimentos prévios trazidos pelos estudantes. A promoção de diálogos entre aluno-aluno e aluno-professor e a mediação dos debates durante a execução das ações foram de extrema importância para a mobilização das ideias anteriores acerca de massa, capacidade, densidade etc. na construção do conceito de volume.

O uso de uma metodologia adequada ao objetivo dessa pesquisa, no caso o ensino do conceito de volume por meio da manipulação de materiais concretos, parece ter favorecido a disposição dos licenciandos para empregar esforços cognitivos e relacionar as ideias pré-existentes às novas ideias a serem aprendidas – uma das condições para a aprendizagem significativa.

Desta forma, a partir da análise do que foi discutido junto aos licenciandos, tem-se que a sequência didática aqui proposta apresenta elementos para ser considerada como potencialmente significativa e, assim, adequada para ser aplicada a alunos do ensino fundamental, desde que as discussões promovidas em sala sejam adaptadas à realidade desses estudantes com estratégias diversificadas que permitam a consolidação do conhecimento significativo; que possam contribuir com a compreensão conceitual de volume tornando os resultados das práticas pedagógicas algo que os alunos assimilem adequadamente e, sejam capazes de exteriorizar suas ideias resolvendo problemas relacionados com o conhecimento adquirido permitindo assim, a articulação e compreensão do conceito de volume como grandeza geométrica.

Situações de medida envolvendo problemas de representação dos sólidos, fórmulas e unidades de medida, quando trabalhadas com os alunos requerem que o professor observe como eles lidam diante dessas situações, ou seja, desde a mais elementar, com a mera aplicabilidade da fórmula e compreensão de volume como sendo uma grandeza – ao identificar a correta unidade de medida, passando pela mais complexa, que exige um saber além da fórmula, até a transformação de unidades.

Todas essas questões são essenciais para a discussão de dúvidas e colaboram com a construção de novas ideias tanto pelo professor como pelo aluno.

Nesse sentido, a trajetória traçada para realizar este trabalho buscou responder à problemática principal, que consiste em refletir sobre a possibilidade de a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e a sua contribuição na aprendizagem do conceito de volume para alunos do ensino fundamental.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A sequência didática proposta nesse estudo foi elaborada para ser trabalhada no ensino fundamental, mas foi aplicada e discutida com os licenciandos participantes do PIBID – Matemática da Facip/UFU, que por serem futuros professores, puderam contribuir na discussão sobre a potencialidade significativa desse material didático.

Reforça-se a convicção de que as aulas de carácter experimental, com uso de recursos e a manipulação de materiais concretos e também a promoção de desafios, diálogos e discussões – o que pode desenvolver a capacidade de argumentação e a confiança na própria aprendizagem – favorece a atribuição de significados na construção do conceito de volume.

Durante o estudo realizado notou-se, por meio da revisão bibliográfica realizada, que o ensino do conceito de volume exige do professor um conhecimento acerca dos quadros conceituais que se articulam entre si: o geométrico, o numérico e o das grandezas. Assim, considera-se que o futuro professor deve participar de situações que contribuam para a sua própria aprendizagem para que, assim, possa refletir sobre o seu processo de formação conceitual e sobre as ações que farão em sua futura prática na sala de aula.

Evidenciou-se a importância dos organizadores prévios na promoção da aprendizagem significativa e a importância de o professor promover atividades em sala de aula que levem os alunos a articularem as grandezas volume, massa e capacidade.

Admitindo a resolução de problemas como uma metodologia para o ensino do conceito de volume, realça-se a importância na escolha de problemas que favoreçam a comparação, a medição e a composição de sólidos geométricos como forma de promover a retenção dos significados atribuídos pelos alunos.

Nesse sentido, é correta a afirmação de Rodrigues (2011) de que uma educação voltada para a repetição de exercícios prejudica a aprendizagem do aluno, já que é preciso não somente efetuar cálculos e memorizar informações, mas deve-se promover a construção de conceitos, proposições e ideias.

Verificou-se a assertiva de que, para a aprendizagem ser significativa, o discente precisa ter disposição para aprender e isto reforça o quão fundamental é o

trabalho do professor com conteúdos significativos para os alunos. Este sim é o caminho eficaz para que haja uma verdadeira compreensão de conceitos e teorias e que leve à detenção de significados intensos e transferíveis.

Concorda-se com Pelizzari et al. (2002) que partem da teoria da aprendizagem de Ausubel para propor a valorização dos conhecimentos prévios dos alunos como pilar para construção de estruturas mentais que permitam a construção de conceitos.

Este processo, considerado dinâmico, em que a estrutura cognitiva está sempre se modificando e se enriquecendo com as experiências dos alunos, só é desencadeado quando aluno estiver motivado para aprender.

As considerações de Pelizzari et al. (2002) infelizmente são condizentes com a realidade vivenciada por muitos educadores nos dias atuais, pois, apesar de todo avanço tecnológico, o aluno que hoje frequenta a escola ainda percebe o conhecimento como algo remoto, alheio à sua realidade. Dessa forma, o conteúdo, por não atender às necessidades cotidianas do aluno, acaba sendo pouco aproveitável e sem significância. Concorda-se com os autores quando estes ressaltam a importância da criação de um ambiente propício com uma comunicação eficaz, que respeite o aluno e faça com que ele se sinta parte integrante do processo de aprendizagem.

A manipulação dos paralelepípedos, como propõe Vidaletti (2009) em seu trabalho, deve ocorrer de acordo com os conhecimentos prévios de forma que facilite a compreensão conceitual dos alunos, onde a nova informação possa interagir com os conceitos já conhecidos por eles, observando, assim, que a manipulação de materiais realmente contribui para a formação conceitual de volume, desde que haja o entendimento por parte dos alunos de maneira significativa, com atividades que articulem as grandezas volume, massa e capacidade comparando, medindo ou mesmo produzindo.

Como afirma Souza (2011), a experimentação em sala de aula pode exercer função diagnóstica, facilitadora da assimilação ou consolidadora para objetivar a aprendizagem significativa e, favorecer os professores no trabalho com teorias de aprendizagem que contribuam com seu ato de ensinar de forma consciente e, possivelmente, mais eficaz.

Entre alguns pontos, mencionados destacam-se de grande importância o trabalho do professor na sala de aula e o desenvolvimento cognitivo do aluno diante de situações envolvendo o conceito de volume; de acordo com os pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (2003), pois o aluno somente terá capacidade de conhecer novos conceitos e disposição para aprender mediante a continuidade de novos trabalhos nesse sentido; onde o propósito principal além da contribuição com alunos; possam também proporcionar ao educador novas metodologias.

E, como suporte para uma aprendizagem significativa, a escolha de atividades com material dourado, baseando-se em Ausubel (2003), leva-nos a uma reflexão sobre os conhecimentos prévios dos alunos para um diagnóstico entre as ideias existentes na sua estrutura cognitiva, bem como sobre os conceitos a serem aprendidos, juntamente com novos métodos de ensino de volume na sala de aula, o uso de materiais considerados potencialmente significativos e a pré-disposição do aluno para aprender.

Ao mobilizar tal concepção, dá indicativos de que o aluno compreenda volume como uma grandeza, conforme Figueiredo (2013), que utilizou a decomposição e recomposição de cubinhos em seu trabalho para comparar volumes tomando em conta o quadro utilizado por Oliveira (2007) para então responder ao objetivo específico da pesquisa, onde são relacionados sólidos de mesmo volume e números com as medidas dos sólidos distintos e sólidos com medidas iguais.

Espera-se, assim, que a pesquisa desenvolvida sirva de incentivo para os futuros (e os já) educadores, dando-lhes incentivo para que proporcionem aos seus alunos a oportunidade de apreender conceitos de modo significativo, onde o professor não seja o único responsável pela construção do conhecimento, mas que assuma o papel de mediador, questionador e desafiador.

Acredita-se que este estudo venha a reforçar a certeza de que aulas de caráter experimental, com atividades e objetos manipuláveis, são mais interessantes para os alunos, principalmente do ensino fundamental, devido ao fato de proporcionar a oportunidade de apreender um conceito de uma maneira significativa.

Sugere-se aqui, para consolidar os conhecimentos adquiridos com o desenvolvimento desta proposta, a continuidade da aplicação de tarefas que permitam com que os alunos calculem o volume de diferentes paralelepípedos, ou dado um volume, que se peça que eles indiquem diversos paralelepípedos.

Nesse contexto, vislumbra-se como elo mais forte o educador: que este seja capaz de diminuir a distância entre a teoria e a prática na sala de aula e que saiba utilizar uma linguagem familiar ao aluno – linguagem que o desafie, que o leve a refletir sobre seus sonhos e anseios e que incentive a exposição e discussão de suas ideias. Enfim, vislumbra-se um educador que não seja apenas um repetidor de ideias, um mero professor de fórmulas que serão esquecidas com o tempo.

Considerando o que foi observado, conclui-se que os alunos do ensino fundamental podem, sim, compreender situações de volume em que o aspecto numérico esteja em pauta, como nas situações de medida. Diante de situações em que necessitam dissociar e articular os quadros numérico, geométrico e das grandezas, bem como nos casos de produção, onde possível dificuldade de aprendizagem quer seja no campo numérico, quer seja no campo geométrico ou no campo das grandezas possam surgir.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. F. F. **Estudo sobre o Conceito de volume**. Universidade Federal de Campina Grande- PB - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. 2014.

ARTIMANHA MODELISMO. Tabela de densidade de madeiras. Disponível em: <http://www.artimanha.com.br/Tecnica_modelismo/Densidade/Madeiras_Densidade.htm>. Acesso em: 15 jun. 2016.

AUSUBEL, D. P. **Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva**. Ed. Paidós, Barcelona. 2002.

_____, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva**. 1. Ed. PT- 467. Jan. 2003. ISBN 972 - 707 - 364 – 6 2003.

_____, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicología educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana. 625 p. 1978.

_____, D. P. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

_____, D. P.; NOVAK, J. P.; HANESIAN, H. Educational Psychology: a cognitive view., New York, Holt, Rinehart and Winston Inc. 1968. In: CAE/UCB. **Aprendizagem significativa**. Conteúdo de apoio educacional do Projeto de monitoria da Universidade Católica de Brasília, n.d. Disponível em: <<http://cae.ucb.br/tas/tas/tasRef.html>>. Acesso em: 14 jun. 2015.

BARROS, J. S. **Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório**. Recife, 2002. Dissertação (Mestrado em Educação), Programa de Pós Graduação em Educação, Centro de Educação, UFPE, 2002. In: MORAIS, L. B. de. **Análise da Abordagem da Grandeza Volume em livros didáticos do Ensino Médio**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnologia). Universidade Federal de Pernambuco - Recife, PE. Disponível em: <<http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/13239/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20Leonardo%20Moraes.pdf?Sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 26 jun. 2015.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. Revista por UTA C. MERZBACH. Editora Edgard Blücher Ltda., 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2006.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental; Matemática**. <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. MEC/SEF, 1997. Acesso em: set. 2016.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental e Médio: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITO, M. R. F. Este problema é difícil porque não é de escola: a compreensão e a solução de problemas verbais por crianças da escola fundamental. **XXIX Revista da Sociedade Brasileira de Psicologia**. São Paulo, v. 8, n. 1, p. 93-109, 2000. Temas em Psicologia da SBP.

_____, M. R. F. A psicologia educacional e a formação do professor - pesquisador: criando situações desafiadoras para a aprendizagem e o ensino da Matemática. In: **Educação Matemática em revista**. Ano 9, n. 11A. Edição Especial, 2002, p. 57-68.

_____, M. R. F. de (Org.). **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas: Alínea, 2006.

CAE/UCB. **Aprendizagem significativa**. Conteúdo de apoio educacional do Projeto de monitoria da Universidade Católica de Brasília, [201-]. Disponível em: <<http://cae.ucb.br/tas/tas/tasRef.html>>. Acesso em: 14 jun. 2015.

CALLEJO, M. L.; VILA, A. Matemática para Aprender a Pensar: **O Papel das Crenças na resolução de problemas**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

CLEMENTS, D. H.; BATTISTA, M. T. (1992). **Geometry and spatial understanding**. In: Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of Research Mathematics Teaching and Learning* (p. 420-464). New York, McMillan Publishing Company.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática**. 1. ed. 4. imp. São Paulo: Ática. 2007.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. **Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane**. Educational Studies in Mathematics. 1989. v. 20, n. 4, p. 387-424.

FIGUEIREDO, A. P. N. B.; BELLEMAIN, P. M. B.; TELES, R. A. de MELO. Grandeza volume: um estudo exploratório sobre como alunos do ensino médio lidam com situações de comparação. **Bolema** - Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1172-1192, dez. 2014.

_____, A. P. N. B. **Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do Ensino Médio**: um estudo sob a ótica da teoria dos campos conceituais. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnologia). Universidade Federal de Pernambuco - Recife, PE. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/edumatec/index.php?option=com_phocadownload&view=category&download=90:resolucao-de-problemas-sobre-a-grandeza-volume-por-alunos-do-ensino-medio-um-estudo-sob-a-otica-da-teoria-dos-campos-conceituais&id=10:didatica-da-matematica&Itemid=87>. Acesso em: 20 jul. 2015.

_____, A. P. N.; MORAIS, L. B. **A compreensão do conceito de volume como grandeza no Ensino Médio**. Recife, PE. UFPE, 2012. Disponível em: <<http://matematica.ulbra.br/ocs/index.php/ebapem2012/xviebapem/paper/viewFile/262/229>>. Acesso em: 14 jul. 2015.

FIORENTINI, D. **A didática e a prática de ensino mediada pela investigação sobre a prática**. In: ROMANOWSKI, J.; MARTINS, P.; JUNQUEIRA, S. (Org.).

Conhecimento local e conhecimento universal: pesquisa, didática e ação docente. Curitiba: ENDIPE: Champagnat, 2004. p. 243-258.

_____, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Autores Associados: Campinas, SP, 2006. Coleção formação de professores.

GARAVELLO, G. P. **Cálculo de Volumes pelo Princípio de Cavalieri**. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática). Universidade Federal do ABC. Santo André, SP. 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: ciência e aplicações**, volume 2: Ensino Médio. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

IŞIKSAL, M.; KOÇ, Y. ; OSMANOĞLU, A. **Study on Investigating 8th Grade Students' Reasoning Skills on Measurement**: The Case of Cylinder. Education and Science, 2010, Vol. 35, N. 156.

KLEINKE, R. de C. M. **Aprendizagem significativa**: a pedagogia por projetos no processo de alfabetização. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina-Florianópolis-SC. Disponível em: Acesso em: 04 mai. 2016.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **Temas e problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

MAYER, R. E. A Capacidade para a matemática. In: STERNBERG, R. (Org.). **As capacidades intelectuais humanas**: uma abordagem em processamento de informações. Porto Alegre: Artes Médicas. 1992. p. 144-168.

MINAS GERAIS. **Resolução SEE Nº. 833, de 24 de novembro de 2006**. Centro de Referência Virtual do Professor. Disponível em: <http://crv.educacao.mg.gov.br>. Acesso em: 26 out. 2015.

MORAIS, L.B. de. et al. **Trabalhando Matemática: percepções contemporâneas**. (EMAIEFEM) – GT 10. VII epbem. João Pessoa, Paraíba. 2012.

MORAIS, L. B. de. **Análise da Abordagem da Grandeza Volume em livros didáticos do Ensino Médio**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnologia). Universidade Federal de Pernambuco - Recife, PE. Disponível em: <http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/13239/DissertaçãoC3%A7ao%20Leonardo%20Moraes.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 26 jun. 2015.

MORAIS, L. B. de. **A conceitualização de volume como grandeza à luz da teoria dos campos conceituais**- XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa**: A teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2005.

_____, M. A. **Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas.** Aprendizagem Significativa em Revista, v. 1, p. 43-63, 2011.+

_____, M. **A Teoria da Aprendizagem significativa e sua implementação em Sala de Aula.** Brasília: Universidade de Brasília, 2006.

_____, M. **La enseñanza de la física para un aprendizaje significativo crítico.** Instituto de Física – UFRGS. Porto Alegre, RS, Brasil- **Conferencia dictada en el XI Encuentro de Física Regional Norte (Chile) y VI Reunión Internacional Andina de Física**, 10 a 12 de octubre de 2001, Antofagasta, Chile.

_____, M. Organizadores prévios e aprendizagem significativa (Advanced organizers and meaningful learning). **Revista Chilena de Educación Científica.** ISSN 0717-9618, Vol. 7, N. 2, 2008, pp. 23-30. Revisado em 2012.

OLIVEIRA, G. R. F. de. **Construção do conceito de volume no ensino fundamental: um estudo de caso.** 2002 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.
Disponível em <<http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/02/CC61125067420.pdf>>
Acesso em: 10 ago. 2015.

_____, G. R. F. de. **Investigação do papel das grandezas físicas na construção do conceito de volume.** 2007. Dissertação (Doutorado em Educação). Programa de Pós – Graduação em Educação. Universidade Federal de Pernambuco - Recife, PE.
Disponível em: <http://www.repositorio.ufpe.br/jspui/bitstream/123456789/4091/1/arquivo5452_1.pdf>.
>. Acesso em: 26 jun. 2015.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de Problemas. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). **Pesquisa em educação matemática.** São Paulo: Editora da UNESP, 1999, p. 199-218. Acesso em: 12 jul. 2015.

_____, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo; Marcelo de Carvalho Borba (org.). **Educação matemática: pesquisa em movimento.** 3. ed. São Paulo: Cortez, 2005, cap. 12, p. 213-231. Acesso em jul. 2015.

_____, L. R.; ALLEVATO, L. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: <<http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/72994/2-s2.0-84873689803.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 10 set. 2015.

PELLIZZARI, Adriana; KRIEGL, Maria de Lurdes; BARON, Márcia Pirih; FINCK, Nelcy Teresinha Lubi; DOROCINSKI, Solange Inês. **Teoria da Aprendizagem Significativa segundo Ausubel.** Rev. PEC, Curitiba, v. 2, n.1, p.37-42, jul. 2001-jul. 2002.
Disponível em:

<<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000012381.pdf>>. Acesso em: 19 jan. 2015.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autentica, 2006.

_____, N. A. **O princípio de Cavalieri e suas aplicações para cálculo de volumes**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Ceará – Fortaleza. 2014. 53 f.

PRÄSS, A. R. **Teorias de aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física). Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre – RS. 2008.

PRIMO, M. E. **O princípio de Cavalieri para cálculo de volumes no Ensino Médio: algumas possibilidades**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora - MG. 2013. 79 f.

REVISTA PEDAGÓGICA. **Matemática - 3º ano do Ensino Médio**. PROEB, 2013.

RIBEIRO, J. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia: Ensino Médio** / Jackson Ribeiro – São Paulo: Scipione, v. 3, 2010.

RODRIGUES, W.R. **Uma abordagem conceitual de volumes no Ensino Médio**. São Paulo, SP. PUC/SP, 2011.

RODRIGUEZ PALMERO, M .L.; MOREIRA, Marco Antonio. SAHELICES, Moreira, Maria Concesa Caballero; GRECA, Ileana Maria. **La teoría del aprendizaje significativo en la perspectiva de la psicología cognitiva**. Barcelona: Editorial Octaedro, 2008.

ROLDÁN, M. S. Algunos objetos mentales relacionados con El concepto volumen de maestros de primaria. **Revista Mexicana de investigación educativa**. México, 2003. Vol. 8, n. 018. p. 447- 478. ISSN 1405-6666. Disponível em: <<http://www.comie.org.mx/v1/revista/visualizador.php?articulo=ART00379&criteriohttp://www.comie.org.mx/documentos/rmie/v08/n018/pdf/rmie/v08n18scC00n01es.pdf>>. Acesso em: 27 ago. 2015.

ROMANATTO, M. C. **Resolução de problemas nas aulas de Matemática**. Revista Eletrônica de Educação. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, n. 1, p. 299-311, mai. 2012. Disponível em: <<http://www.reveduc.ufscar.br>>. Acesso em: 14 jun. 2015.

SÁNCHEZ INIESTA, T. **La Construcción del Aprendizaje en el Aula**. Buenos Aires, Argentina. 1996.

SANTOS, W. L. S. **O Ensino de Volume de Sólidos por Atividades**. 229 f. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do estado do Pará - Belém, PA. Disponível em:

<<http://Downloads/dissertao%20waldiza%20lima%20salgado%20dos%20santos.pdf>>. Acesso em: 14 jun. 2015.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS. EQUIPE DE MATEMÁTICA DO CENTRO DE REFERÊNCIA VIRTUAL DO PROFESSOR. **Orientação pedagógica: volumes e capacidades.** SEE-MG, 2005. Disponível em: <http://crv.sistti.com.br/sistema_crv_dotnet/index.aspx?ID_OBJETO=42262&tipo=obj&cp=B53C97&cb=&n1=&n2=Orienta%C3%A7%C3%B5es%20Pedag%C3%B3gicas&n3=Fundamental%20%206%C2%BA%20ao%209%C2%BA&n4=Matem%C3%A1tica&b=s>. Acesso em: 10 maio 2016.

SILVA, A. R. **Uma proposta para o Ensino de geometria espacial métrica no Ensino Médio.** Lavras, MG. 2013. 93 p.

SOUZA, R. A. **Teoria da Aprendizagem Significativa e experimentação em sala de aula:** integração teoria e prática. Dissertação (Mestrado em Ensino de Filosofia, História e Ciências). Universidade Federal da Bahia. 139 f. 2011. Disponível em: <https://twiki.ufba.br/twiki/pub/PPGEFHC/DissertacoesPpgefhc/DISSERTA%C7%C3O_RODNEI_SOUZA.pdf>. Acesso em: 14 jun. 2015.

_____, R. İŞIKSAL-BOSTAN, M. An Investigation into the Performance, Solution Strategies and Difficulties in Middle School Students' Calculation of the Volume of a Rectangular Prism. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**, 2014, p. 2-27.

SUPER-REFORÇO. **Sistema métrico decimal:** medidas de massa, capacidade, comprimento, área e volume. 2012. Disponível em: <<http://superreforco.blogspot.com.br/2012/11/sistemas-de-metrico-decimal-medidas-de.html>>. Acesso em: 10 dez. 2016.

TEKİN-SİTRAĞA, R. İŞIKSAL-BOSTAN, M. An Investigation into the Performance, Solution Strategies and Difficulties in Middle School Students' Calculation of the Volume of a Rectangular Prism. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**, 2014, p. 2-27.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics.** 4. ed. New York: Longman, 2001. In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, L. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Disponível em: <<http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/72994/2-s2.0-84873689803.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 10 set. 2015.

_____. Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009. In: ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação.** São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, no. 1, p.299-311, mai. 2012. Disponível em: <<http://www.reveduc.ufscar.br>>. Acesso em: 14 jun. 2015.

VIANA, O. A. **A avaliação em geometria espacial feita pelo SIMAVE.** Estudos em Avaliação Educacional (Impresso), v. 21, p. 505-528, 2010.

_____. **Conhecimentos prévios e organização de material potencialmente significativo para a aprendizagem da geometria espacial.** Ciências & Cognição (UFRJ). V. 16, p. 15-36, 2011.

_____. **O Componente Espacial da Habilidade Matemática de Alunos do Ensino Médio e as Relações com o Desempenho Escolar e as Atitudes em Relação à Matemática e à Geometria.** Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP. Tese (Doutorado em Educação), 2005.

_____. **Conceitos e Habilidades Espaciais Requeridos pelas Questões de Geometria do ENC/ENADE para a Licenciatura em Matemática.** Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil. Boletim de Educação Matemática, Vol. 22, núm. 34, 2009, pp. 153-184.

_____. **Solução de Problemas Geométricos Envolvendo a Noção de Volume: Um Estudo Exploratório com Alunos do Ensino Médio.** VI SIPEM- Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Pirenópolis, GO, Brasil. ANAIS DO VI SIPEM, 2015.

VIDALETTI, V. B. B. **Ensino e aprendizagem da geometria espacial a partir da manipulação de sólidos.** 2009. Dissertação (Mestrado do Curso de Ensino de Ciências Exatas). Centro Universitário UNIVATES - Lajeado, RS. Disponível em: <<https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/82/1/VangizaVidaletti.pdf>>. Acesso em: 25 mai. 2015.

ZABALA, Antoni. **A Prática Educativa:** como ensinar. Trad. Ernani F. da Rosa – Porto Alegre: ArtMed, 1998.

ANEXO A



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
MESTRANDA – ILDA A. SILVA VAN DER MER
ORIENTADORA: PROF^a Dr^a ODALÉA APARECIDA VIANA

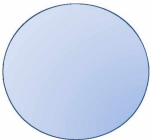


Prezado licenciando do subprojeto Matemática-Pontal do PIBID/UFU.

Sou mestranda do PPGECEM da Facip/UFU, Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, e estou realizando estudos acerca do ensino e aprendizagem do conceito de VOLUME a alunos do ensino fundamental. Solicito que responda as questões abaixo, indicando a sua forma de pensar. Ao final, solicito a sua opinião sobre as questões propostas.

1ª questão:

Imagine que você tenha três porções de massas de modelar, todas iguais, logo as três tem mesmo **volume**. Você, então, faz as seguintes formas:

Massa de modelar 	Massa de modelar 	Massa de modelar 
Transforma no formato de bola (esfera)	Transforma no formato de pizza ou disco	Não modifica
 Sólido A	 Sólido B	 Sólido C

O que você pode afirmar sobre os **volumes** dos sólidos A, B e C? Qual tem maior volume? E menor?

Resposta:

2ª questão:

Imagine que você tenha algumas latas, como mostra a figura a seguir:



E que precise saber algumas coisas sobre estas latas:

- Coloque em ordem crescente de **volume** (da lata com menor volume até a lata com maior volume) .
- Como você faria para ter certeza sobre isso (sem medir)?

3ª questão:

Imagine que você tenha três pedras do mesmo tipo, mais ou menos como mostra a figura.



Imagine que você precise saber algumas coisas a respeito dessas pedras:

- Coloque em ordem crescente de volume.
- Como você faria para ter certeza dessa afirmação?

4ª questão:

E se fossem pedras de diferentes tipos, como você faria para saber qual tem maior volume. Como faria?



5ª questão:

Imagine que você tenha várias caixas de papelão e queira saber qual tem maior ou menor volume. Como faria?



Resposta

6ª questão:

Considere duas caixas exatamente iguais como as que aparecem na figura.



Imagine que você tenha cubinhos e também paralelepípedos feitos de papelão, como os da figura.



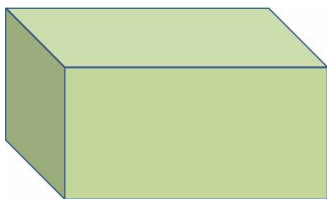
Imagine que você tenha preenchido com cubinhos a primeira caixa e com paralelepípedos a segunda caixa, conforme mostram as figuras a seguir. Pergunta-se:



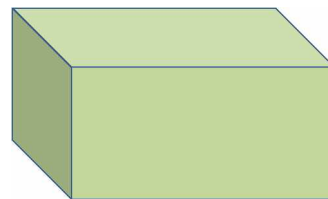
caixa A



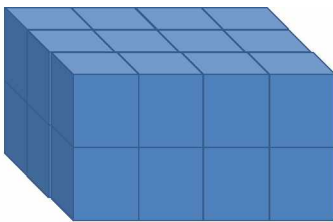
caixa B



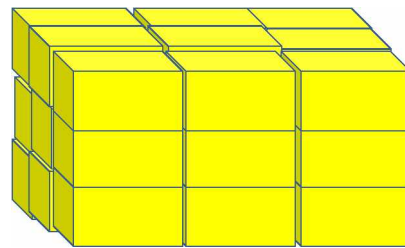
Esboço da caixa A



Esboço da caixa B



Caixa A formada por cubinhos



Caixa B formada por paralelepípedos

a) Quantos cubinhos formam a caixa A?

b) Quantos paralelepípedos formam a caixa B?

c) Qual das duas tem maior volume?

d) Tente explicar a situação.

7ª questão:

Concluindo: O que é VOLUME?

8ª questão:

Formar na carteira paralelepípedos utilizando os cubinhos e dar as medidas da largura, comprimento e altura; sendo dados o volume.

Volume	Largura	Comprimento	Altura
a) 8 cm^3			
b) 24 cm^3			
c) 200 cm^3			

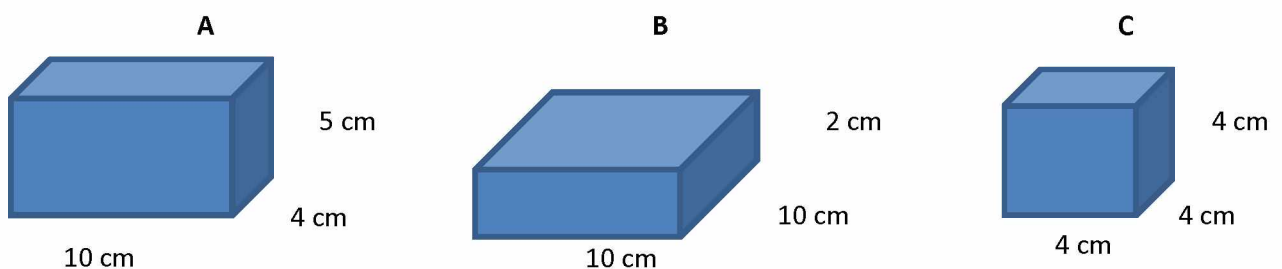
9ª questão:

Dar o volume aproximado de algumas caixinhas usando o material dourado.

(Preencher as linhas 5 e 6 da página 91).

10ª questão:

Sem usar o material, determinar o volume dos paralelepípedos A, B e C a seguir e colocá-los em ordem de crescente de volume.



Resposta:

Volume do paralelepípedo A =

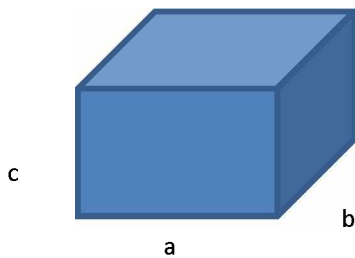
Volume do paralelepípedo B =

Volume do paralelepípedo C =

Ordem crescente de volume=

11ª questão:

- a) Qual a fórmula para se chegar ao volume do paralelepípedo?



Volume_{paralelepípedo} = ...

Volume_{cubo} = ...=

12ª questão:

Pegue o cm^3 de madeira. Caso fosse colocado água dentro dele, teríamos:

Complete: 1 cm^3 (volume) = ... ml (capacidade)

Determine então a capacidade das outras peças do material dourado, completando as linhas 1, 2, 3 e 4 da Tabela, colunas Volume e Capacidade.

13ª questão:

Pegue as caixinhas e os paralelepípedos usados anteriormente e determine a capacidade delas, completando as linhas 5 a 11 da página 91, colunas Volume e Capacidade.

14ª questão:

Complete as demais linhas da página 91, colunas Volume e Capacidade.

15ª questão:

Pegue o cm^3 de madeira. Caso fosse colocado água dentro dele e depois fosse pesado em uma balança, sua massa seria, teríamos:

Complete: 1 cm^3 (volume) = ... ml (capacidade) = ...(massa)

Determine então a massa das outras peças do material dourado, supondo que elas sejam feitas de água, completando as linhas 1, 2, 3 e 4 da Tabela 1, coluna Massa (em água).

16ª questão:

Conhecendo-se a Tabela de densidade dada a seguir, complete a Tabela nas colunas Massa (em ferro, em madeira, em outro material qualquer).

TABELA 1

Nº	Objeto/figura	Volume	Capacidade	Massa (peso)			
				Em água	Em ferro	Em madeira	Escolha material
1	Cubinho do material dourado						
2	Barra do material dourado						
3	Placa do material dourado						
4	Cubo grande						
5	Caixinha A (aproximado)						
6	Caixinha B (aproximado)						
7	Paralelepípedo I						
8	Paralelepípedo II						
9	Paralelepípedo III						
10	Caixinha A (exato)						
11	Caixinha B (exato)						
12	Paralelepípedo medindo 30cm por 20 cm e tendo 20cm de altura.						
13	Água de uma piscina retangular medindo 10 m por 4m e com 1,5m de altura.						

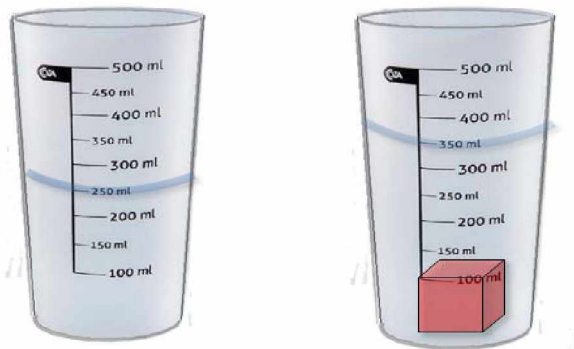
Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2016.

PROBLEMAS

1) Desenhe um paralelepípedo, atribuindo suas medidas, de modo que seu volume seja 60 cm^3 .

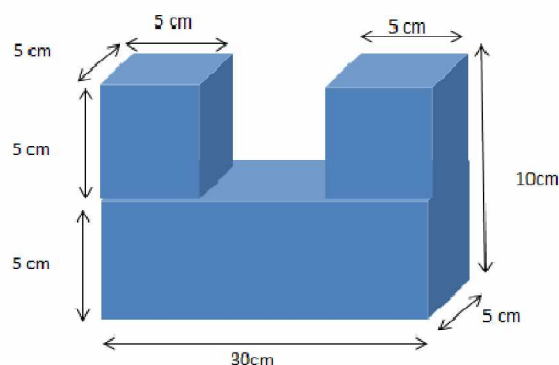
2) Desenhe um paralelepípedo, atribuindo suas medidas, de modo que sua capacidade seja de 1200 ml.

3) Uma vasilha tinha água até certa altura, conforme mostra a ilustração 1. Foi colocado um cubo de metal e a água subiu de nível, conforme mostra a ilustração 2.



Qual é aproximadamente a medida da aresta do cubo?

4) O sólido abaixo é formado por paralelepípedos e tem as medidas conforme apresentadas.

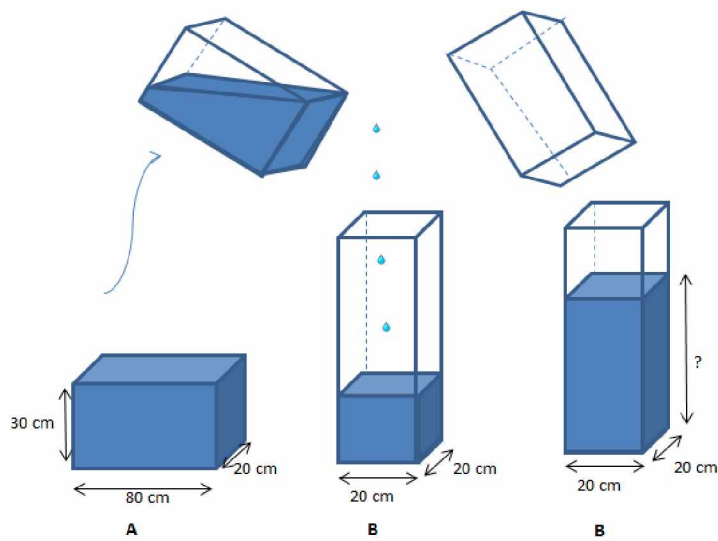


a) Determine o volume deste sólido.

b) Imaginando que este sólido seja feito de alumínio cuja densidade é de $2,7 \text{ g/cm}^3$, qual é o peso (massa) deste sólido.

5) Um cubo de ferro medindo 20 cm de aresta foi derretido e, com o material, foi feito um paralelepípedo de medidas de base 10 cm por 20 cm. Qual é a altura do paralelepípedo?

6) O reservatório A estava cheio de água até a borda. Toda a água foi despejada no reservatório B. Qual a altura do líquido, no reservatório B?



7) Um reservatório, com a forma de um cubo cuja aresta mede 5 m, está totalmente cheio de água. Num dado instante, começa a ocorrer um vazamento e observa-se que, a cada hora, perde-se 4% do volume total do reservatório. Nessas condições, responda:

- Em quanto tempo o reservatório estará vazio?
- Se o vazamento persistir por 15 horas, quantos litros de água restarão no reservatório?

Gelson Iezzi et al – volume 2- 6 ed.- Saraiva 2010.

ANEXO B

Tabela de densidade de madeiras

TABELA DE DENSIDADE DE MADEIRAS www.artimanha.com.br

MADEIRA	DENSIDADE	MADEIRA	DENSIDADE	MADEIRA	DENSIDADE
Balsa	0,16	Platano	0,32	Nogueira	0,70
Cortiça	0,24	Teca	0,43	Faia	0,75
Samba	0,32	Pereira	0,45	Carvalho	0,75
Pinho	0,43	Ameixeira	0,47	Freixo	0,80
Choupo	0,45	Cerejeira	0,55	Teixo	0,80
Tília	0,47	Sicômoto (2)	0,55	Mogno	0,90
Aulne	0,55	Castanheiro	0,60	Pau Brasil	0,93
Abeto	0,55	Nogueira	0,70	Oliveira	0,95
Olmo	0,60	Faia	0,75	Buxo	1,05
Videira	0,16	Carvalho	0,75	Jacarandá	1,05
Sicômoro	0,24	Freixo	0,80	Ébano	1,20

www.artimanha.com.br

Fonte: Artimanha Modelismo, 2011.

ANEXO C

Tabela de densidade de metais

METAL	DENSIDADE (g/cm³)	METAL	DENSIDADE (g/cm³)
Alumínio	2,7	Mercúrio	13,5
Chumbo	11,3	Níquel	8,9
Cobre	8,9	Ouro	19,3
Estanho	7,2	Platina	21,4
Ferro	7,8	Prata	10,5
Magnésio	1,7	Titânio	4,5

Tabela 1- Densidade de alguns metais. (Handbook of Chemistry and Physics).

Fonte: GEPEQ/USP, 2012.