

Universidade Federal de Uberlândia

Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

**Desbravando π e o número de Euler:
do simples ao complexo da Matemática**

por

Silas Silveira Campos

Bacharelado em Matemática - Ituiutaba - MG

Orientadora: Profa. Dra. Evaneide Alves Carneiro

Desbravando π e o número de Euler: do simples ao complexo da matemática

Ituiutaba, 30 de Novembro de 2023.

Profa. Dra. Evaneide Alves Carneiro

Banca examinadora:

Profa. Dra. Evaneide Alves Carneiro.

Profa. Dra. Patrícia Borges dos Santos.

Prof. Dr. Rogério Fernando Pires.

Monografia apresentada ao Instituto de
Ciências Exatas e Naturais do Pontal,
UFU como requisito parcial para ob-
tenção do título de **Bacharelado em**
Matemática.

*À minha família e à minha
orientadora Evaneide.*

+

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero expressar meu agradecimento a Deus por ter me guiado até este momento, permitindo-me saúde, força e determinação ao longo de todo o curso.

À minha mãe, Silvania, que merece um agradecimento especial pelo amor e carinho. Mesmo à distância, sei o quanto foi difícil para ela, mas sempre esteve disponível para me ajudar, além de proporcionar uma excelente educação.

Ao meu pai, Liomar, agradeço por todos os conselhos valiosos, assim como pela oportunidade de me criar como uma pessoa melhor a cada dia.

Ao meu irmão e melhor amigo, Matheus, agradeço por todos os ensinamentos, pelo companheirismo constante e por ser uma fonte de motivação ao longo da minha jornada.

Às minhas irmãs, Amanda e Lays, agradeço por sempre apoiarem minhas decisões e por trabalharem juntas pelo bem da nossa família.

Aos meus sobrinhos, Pietro e Maya, desejo que cresçam felizes e saudáveis, sabendo o quanto seu tio os ama.

Em memória da minha avó paterna, Angelina, agradeço por todo o amor, carinho e ensinamentos que ela me proporcionou durante toda a minha infância. Aos meus avós maternos, Aparecida e Valdevino, agradeço por todo o carinho dedicado aos netos e pela inspiração que meu avô representou como um homem trabalhador, honesto, humilde, gentil e carinhoso.

À família Silveira que sempre me apoiou e incentivou.

À minha companheira, Lorraine, que cruzou meu caminho durante a graduação. Agradeço por seu incentivo, companheirismo, carinho e confiança em todos os momentos.

À minha orientadora Evaneide Alves Carneiro, por toda paciência e ensinamentos durante a minha trajetória acadêmica.

À banca examinadora por contribuírem com meu trabalho.

Aos meus amigos de graduação e aos petianos que compartilharam minha jornada, em especial, Carlos, Giulio, Henrique, Igor, Jordi, José Antônio, Matheus Felipe, Matheus Henrique, Paulo, Taigor e Welton, agradeço pela amizade e apoio ao longo dessa jornada.

A todos os professores e técnicos de laboratório do curso de Matemática. Em especial, agradeço à Patrícia por sua orientação na Iniciação Científica através do Programa de Educação Tutorial (PET), assim como aos professores Rogério, Alisson e Homero pelos ensinamentos, conhecimentos e aulas que ministram.

Ao Éder Vieira Flor, secretário do curso de Matemática, agradeço por esclarecer todas as dúvidas e pendências que surgiram.

Ao Programa de Educação Tutorial, que me auxiliou nas disciplinas de graduação e proporcionou experiências enriquecedoras em grupo. Agradeço especialmente ao Marcelo e Evaneide pela tutoria.

Ao Programa Institucional da Graduação Assistida – PROSSIGA, no qual participei das atividades do Projeto de Nivelamento em Matemática e Estatística (PRONIME): possibilidades e potencialidades para o desenvolvimento matemático no ensino superior.

Por fim, quero expressar meu agradecimento à equipe da empresa Ultimatedrinks, em especial a Lauro, Iasminy e Matheus, por me permitirem fazer parte dessa equipe.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo estudar alguns problemas da Teoria dos Números que utilizam ferramentas de Análise Matemática, destacando a interligação entre essas subáreas da Matemática, e tornar o conteúdo mais acessível para alunos de graduação. O estudo é dividido em três capítulos, que abordam as origens, as representações e as propriedades dos números π e e , dois números fundamentais na Matemática. A metodologia utilizada é a pesquisa bibliográfica, com ênfase na clareza e na didática das demonstrações matemáticas. Sobre os resultados da pesquisa, ela colaborou para uma melhor compreensão da essência dos números π e e , além de suas aplicações e implicações em diversas áreas da Matemática.

Palavras-chave: Relógio alfabético do π . Representação de série. Problema da Basiléia. Irracionalidade e transcendência.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Relógio com letras	6
1.2	Relógio após retirada de letras utilizando simetria vertical	7
1.3	Relógio alfabético do π	7
1.4	π em Viena	9
1.5	Diagrama espiral	12
2.1	Região da mudança de variável	21
2.2	Região de integração	22
2.3	Área da região hachurada	26
2.4	Região de integração	27

CONTEÚDO

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Introdução	1
1 Histórias e fatos curiosos sobre π e Euler	3
1.1 Fatos curiosos sobre π	3
1.1.1 Um pouco de história do número π	3
1.1.2 Dia do π	6
1.1.3 Relógio Alfabético do π	6
1.1.4 Outras curiosidades	8
1.2 Algumas contribuições de Euler	9
1.2.1 Um pouco da História de Euler	9
1.2.2 Identidade de Euler	10
2 Equações envolvendo π e o número de Euler	13
2.1 Conceitos preliminares	13
2.2 Representações por meio de séries	16
2.2.1 Representação do número e	16
2.2.2 Representação do número π (Problema da Basileia)	17
2.3 A integral gaussiana	25

3 Irracionalidade e Transcendência	29
3.1 Prova da irracionaisidades de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{p}$, com p sendo número primo	30
3.2 A irracionalidade do número e	33
3.3 A irracionalidade do número π	34
3.3.1 A irracionalidade de π^2	40
3.4 A transcendência do número e	42
3.5 Transcendência de π	51
Considerações	61
Bibliografia	62

INTRODUÇÃO

Dois números que possuem significância na Matemática, são o número pi (π) e o Número de Euler (e). Tais constantes estão ligadas à solução de vários problemas e são dotadas de um conjunto grande de histórias ricas em detalhes.

Apesar de ser possível listar diferentes subáreas da Matemática, como Álgebra, Análise e Geometria, não se pode afirmar que há uma clara separação entre elas, pois a solução de alguns problemas requer a utilização simultânea de métodos que originalmente pertencem a subáreas distintas. Por exemplo, a Teoria Analítica dos Números utiliza ferramentas de Análise Matemática para resolver problemas referentes a números inteiros, que é o objeto de estudo da Teoria dos Números. Assim, o estudo de certos problemas a partir da sua história e do desenvolvimento da solução melhora a compreensão de como as várias subáreas da Matemática estão interligadas, o que contribui para o amadurecimento do pesquisador e dos estudantes nas áreas da Matemática.

Diante do contexto apresentado, o presente trabalho de conclusão de curso partiu da minha familiaridade adquirida durante as disciplinas de Introdução à Teoria dos Números e Análise. Além disso, realizei uma Iniciação Científica (IC), no Programa de Educação Tutorial (PET), intitulada “Algumas propriedades de números demonstradas com o auxílio da Análise Matemática”. A pesquisa teve por objetivo estudar alguns problemas que utilizam ferramentas de Análise Matemática na sua solução, examinando brevemente a história do problema e do desenvolvimento da solução, com destaque para o aspecto da interligação entre algumas subáreas da Matemática.

Assim, objetivamos fornecer uma visão abrangente e acessível sobre o estudo de π e

Número de Euler e , não apenas aprofundando a compreensão desses números notáveis por parte dos estudantes, mas também cultivando uma apreciação pela beleza e complexidade da Matemática pura, através do estudo de conteúdos da Teoria dos Números que não estão previstos na ementa da disciplina dos cursos de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP), da Universidade Federal de Uberlândia (UFU).

A metodologia empregada é a pesquisa bibliográfica, que nos permite acessar tanto as contribuições históricas de matemáticos renomados quanto as descobertas mais recentes, enriquecendo o entendimento desses números fundamentais. Adicionalmente, um esforço foi dedicado à simplificação da linguagem e à elaboração de demonstrações passo a passo, visando facilitar o aprendizado dos alunos de graduação.

Sobre a estrutura do presente trabalho, ele está dividido em três capítulos, com o propósito de não só elucidar a essência de números específicos, mas também explorar suas origens, representações matemáticas e atributos intrínsecos.

O primeiro capítulo descreve as origens e a história de π e e , desvendando suas utilidades matemáticas e o contexto cultural e histórico que os envolve. Este segmento do estudo foca especialmente na trajetória do número π , desde as civilizações antigas até suas aplicações modernas, revelando uma história fascinante repleta de intrigas e descobertas. Similarmente, a narrativa do e é explorada retrocedendo às raízes da análise matemática.

No segundo capítulo, a atenção se volta para a representação matemática destes números, com especial ênfase em elucidar os métodos e técnicas que permitem expressar π e o e de maneiras variadas. Este capítulo inicia com a exploração da representação exponencial do Número de Euler, avançando para as complexas interconexões de π com o Problema da Basileia e a Integral de Gauss. Essas representações são detalhadas passo a passo, facilitando a compreensão dos alunos e aprofundando o entendimento desses números, realçando a sua riqueza e complexidade.

Por fim, o terceiro capítulo foca nas propriedades fundamentais desses números. Aqui, são investigadas as irracionalidades de π e e com uma exposição detalhada das teorias matemáticas especializadas, tornando o conteúdo acessível para alunos em fase de aprendizado. A transcendência desses números também é abordada, evidenciando sua singularidade matemática.

CAPÍTULO 1

HISTÓRIAS E FATOS CURIOSOS SOBRE π E EULER

1.1 Fatos curiosos sobre π

1.1.1 Um pouco de história do número π

As evidências sobre a utilização do número π indicam que ele já era usado há cerca de 4.000 anos, sendo uma relação constante entre a circunferência e o seu diâmetro, percebida e investigada por muitas civilizações antigas, gerando interesse e curiosidade. No antigo testamento da Bíblia, em I Reis 7:23, temos que: “E ele (Salomão) fez também um lago de dez cúbitos¹, de margem a margem, circular, cinco cúbitos de fundo, e trinta cúbitos em redor”. Este mesmo verso aparece também em II Crônicas 4:2. A leitura bíblica percorre uma lista de especificações para o grande templo de Salomão, construído cerca de 950 a.C. A circunferência era três vezes o tamanho do diâmetro. Isto significa que os antigos Hebreus se contentavam em atribuir a π o valor 3, determinado possivelmente através de algumas medições.

Os povos egípcios perceberam que o valor da razão entre o comprimento c de uma circunferência e o seu diâmetro d é a mesma para qualquer circunferência. Além disso, associavam esse valor ao do π , sendo de aproximadamente 3,16, ou seja, $\pi = \frac{c}{d}$. Essa

¹Distância do cotovelo à ponta do dedo médio.

aproximação foi mais precisa que a estabelecida pelos babilônios, que afirmaram que o comprimento de qualquer circunferência era o triplo de seu diâmetro.

O famoso matemático grego Arquimedes escreveu em sua obra “Da Medida do Círculo”, que o número π relaciona-se com o comprimento da circunferência. Nessa época, já se tinha a noção que a razão entre o comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro resultava em uma certa “constante”. Arquimedes, utilizando polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma circunferência, construiu uma aproximação para o número π , calculando o perímetro desses polígonos regulares. Quanto mais lados ele acrescentava no polígono, mais refinada ia sendo a sua aproximação. Através do polígono regular de 96 lados, ele calculou uma aproximação para π da forma:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

Como citamos anteriormente, o número π exerceu grande fascínio em várias civilizações ao longo dos séculos. A tabela abaixo (1.1) mostra algumas aproximações para o valor de π , adotadas em diferentes datas.

Tabela 1.1: Aproximações para o valor de π

Origem/autor	Data Aproximada	Valor
Babilônia	2000 a. C.	$3 + \frac{1}{8}$
Egito (Papiro de Ahmes)	1650 a. C.	$\left(\frac{16}{9}\right)^2$
Arquimedes	250 a. C.	$\frac{22}{7}$
Ptolomeu	150 d. C.	$\frac{377}{120}$
China (Liu Hui)	220 d. C.	3,14159
China (Tsu Chung Chih)	480 d. C.	$\frac{355}{113}$

Fonte: Barros e Sá (2022)

Com o passar do tempo, as civilizações compreenderam que números como π e $\sqrt{2}$ são diferentes dos números inteiros, assim como dos números racionais. Alguns povos perceberam então a irracionalidade de $\sqrt{2}$, o que ocorreu para π apenas posteriormente.

Atualmente alguns pesquisadores vêm calculando e quebrando o recorde de precisão das casas decimais do número π . De acordo com [15], o último recorde mundial foi em 2021 pela Universidade de Ciências Aplicadas de Graubünden, na Suíça, com 62,8 trilhões de casas decimais. Anteriormente a isso foram computadas 50 trilhões de casas decimais, que acabaram superando os 31,4 trilhões de dígitos anteriores.

1.1.2 Dia do π

O Dia do pi (π), ou *Pi day* [3], é uma celebração anual da constante matemática π . A escolha da comemoração na data de 14 de março desde 1988 para o Dia Internacional do Pi, justifica-se pelo modo como os americanos registram as datas, com o mês na frente do dia (3/14).

1.1.3 Relógio Alfabético do π

Iremos abordar agora uma ideia criativa e inovadora de [13] sobre o “Relógio Alfabético do π ”, utilizando simetria e a sequência dos dígitos desse número. Esse conceito combina elementos matemáticos e arte de uma maneira única sobre um dos números mais famosos da história, que possui grande significância na Matemática, por estar ligado à solução de vários problemas e por ser dotado de um conjunto grande de histórias ricas em detalhes. Assim, foi concebida uma variante inovadora de relógio. Em vez do tradicional modelo numérico, imaginamos um relógio composto por letras. Mais especificamente, ele incorpora todas as 26 letras do alfabeto português. Este design transforma o convencional relógio numérico em uma exibição alfabética do relógio do π como segue na figura (1.1).

Figura 1.1: Relógio com letras

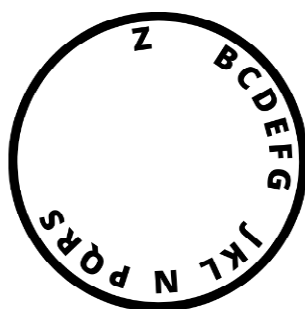


Fonte: Elaborada pelo autor

A seguir utilizamos o conceito de simetria (veja a definição (4)) considerando todas as letras do alfabeto que possuem simetria vertical, que são: A, H, I, M, O, T, U, V, W,

X e Y. Ao remover tais letras simétricas, os 5 grupos formados por letras que sobram do relógio têm, respectivamente, a seguinte quantidade de letras agrupadas: 6, 3, 1, 4, 1, conforme a figura (1.2).

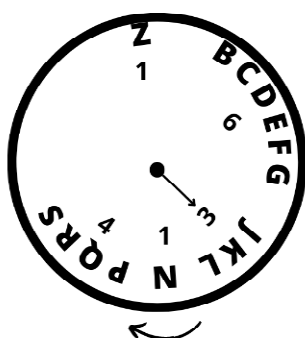
Figura 1.2: Relógio após retirada de letras utilizando simetria vertical



Fonte: Elaborada pelo autor

Da quantidade acima, o único número primo é 3. Colocando o ponteiro sobre o 3 e lendo os números em sentido horário, você obtém a sequência 3,1416, que é uma aproximação de π .

Figura 1.3: Relógio alfabético do π



Fonte: Elaborada pelo autor

Este método é uma maneira interessante e educativa de visualizar e explorar propriedades de π . Ele pode ser um recurso excelente para a educação matemática, especialmente para despertar o interesse em matemática e números entre estudantes. Além disso, a abordagem artística e o uso de simetria adicionam elementos visuais atraentes que podem facilitar a compreensão e o interesse pelo conceito. A ideia também destaca a natureza ubíqua do número π , mostrando como ele pode ser incorporado de maneiras não convencionais e criativas em diferentes contextos, como a arte e o design. É um excelente exemplo de como os conceitos matemáticos podem ser explorados de forma lúdica e imaginativa.

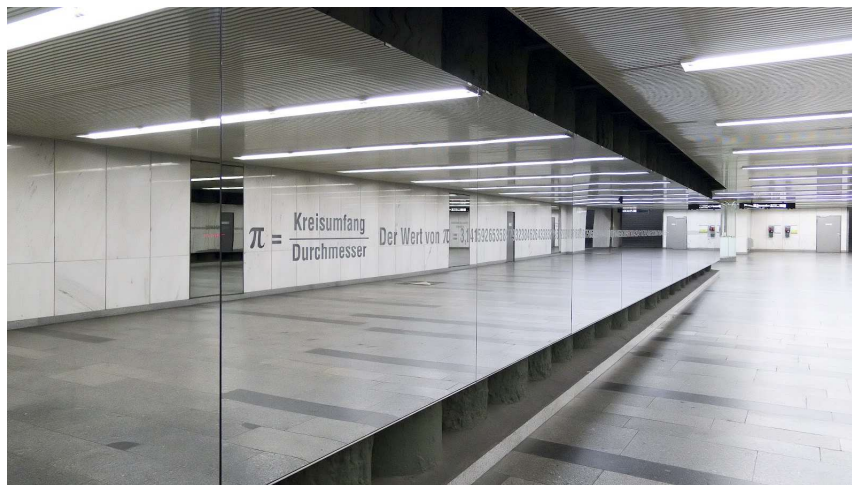
1.1.4 Outras curiosidades

Abordaremos uma curiosidade fascinante relacionada ao Problema da Basileia no próximo capítulo, com um foco especial na contribuição de Euler para a soma de uma determinada série. Euler aproximou-se da solução através de algumas propriedades, representando π de uma maneira inovadora. É interessante notar, conforme citado em [6], que Euler cometeu o que pode ser considerado um “erro” do ponto de vista do rigor matemático. Ele generalizou uma propriedade de polinômios para séries de potências sem justificativa formal, uma lacuna que persistiu por cerca de 150 anos. Posteriormente, o matemático Weierstrass forneceu a fundamentação necessária, consolidando o avanço inicial de Euler.

Outra abordagem do ramo das curiosidades, conforme citado em [7], é que entre janeiro de 2005 e novembro de 2006, o artista sino-canadense Ken Lum, nascido em 1956, criou uma instalação notável na Ópera de Viena, Áustria. Esta obra envolvia uma projeção do número π e a inclusão de 478 quadrados decorados com decimais, dispostos na parede da Opernpassage, um espaço circular dentro do teatro. Antes de se estabelecer como um artista conceitual prolífico, Lum possuiu uma formação acadêmica em ciências naturais, demonstrando a intersecção única de seus interesses em arte e ciência nas suas obras.

Ken Lum colaborou com o Instituto SORA no desenvolvimento dos dados científicos para a instalação. O objetivo de “Pi” era demonstrar que a arte contemporânea pode conectar arte, ciência, arquitetura e sociologia. A intenção era transformar o Karlsplatz em um “local vibrante de encontro, com brilho artístico comunicativo”. Essa instalação, ao representar π e incorporar dados estatísticos variados, reflete uma intersecção única entre matemática, arte e vida cotidiana, ressaltando a presença constante e a relevância de π em diferentes aspectos do mundo ao nosso redor.

Figura 1.4: π em Viena



Fonte: Gugerell (2011)

1.2 Algumas contribuições de Euler

1.2.1 Um pouco da História de Euler

Seguindo o livro “Introdução à História da Matemática” de Howard Eves ([4]), falaremos de Leonhard Euler, um cidadão suíço nascido na cidade de Basileia em 1707. Depois de explorar a possibilidade de seguir uma carreira na área da teologia, Euler descobriu sua verdadeira paixão no campo da matemática. Foi nesse período que seu pai, um pastor calvinista com habilidades e interesse em matemática, o orientou, fornecendo-lhe os alicerces essenciais dessa disciplina. O pai, que recebeu instruções de Jakob Bernoulli, conseguiu garantir que seu filho seguisse seus estudos sob a tutela de Johann Bernoulli.

Euler se destacou como um autor extremamente prolífico, certamente inigualável na história da matemática em termos de quantidade de obras produzidas. Seu nome é associado a praticamente todos os ramos da matemática. É notável que sua vasta experiência não tenha sido vivida quando, logo após retornar a São Petersburgo, ele sofreu a infelicidade de perder completamente a visão. Curiosamente, ele já era cego do olho direito desde 1735, o que explica as poses em seus retratos que refletem esse fato. Embora a cegueira pudesse parecer uma barreira insuperável para um matemático, assim como a surdez não impediu Beethoven de compor, Euler conseguiu manter uma atividade produtiva extraordinária após essa perda, com o auxílio de uma memória fenomenal e uma

notável capacidade de concentração imperturbável. Entre livros e artigos, Euler publicou um total de 530 trabalhos durante sua vida. Além disso, ao falecer, deixou uma série de manuscritos que enriqueceram as publicações da Academia de São Petersburgo por mais de 47 anos. A Sociedade Suíça de Ciências Naturais deu início, em 1909, a uma edição completa das obras de Euler, abrangendo 886 trabalhos entre livros e artigos. As contribuições matemáticas de Euler são tão vastas que é impossível abordá-las todas. Sendo assim, para começar, é importante mencionar que Euler foi o responsável por introduzir as seguintes notações:

$f(x)$	para funções,
e	para a base dos logaritmos naturais,
Σ	para somatórios,
i	para a unidade imaginária, $\sqrt{-1}$.

Também se deve a ele a fórmula:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (2.1)$$

que, para $x = \pi$, se transforma em:

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \quad (2.2)$$

uma igualdade que relaciona cinco dos mais importantes números da matemática. Falaremos um pouco mais sobre a constante “e” na próxima seção.

Por processos puramente formais, Euler chegou a um número enorme de relações curiosas, como:

$$i^i = e^{-\pi/2}.$$

Um fato importante que ele conseguiu estabelecer é que todo número real não nulo r tem uma infinidade de logaritmos (para uma dada base), todos complexos se $r < 0$ e todos complexos, exceto um, se $r > 0$.

1.2.2 Identidade de Euler

Agora falaremos um pouco mais sobre a equação (2.2), utilizando ([19]) como referência. Mostraremos como chegar na identidade de Euler (2.1), que é um dos resultados expres-

sivos em sua carreira, e relaciona e^x , com as funções trigonométricas, $\cos x$ e $\sin x$.

As funções citadas acima podem ser expandidas como séries de potências, e a expansão é válida para todos os valores de x . Temos suas respectivas representações:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots, \\ \sin x &= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sabemos que a função exponencial cresce para infinito, e as funções seno e cosseno são limitadas. Aparentemente não existe relação entre as funções. Mas em 1737 Euler descobriu uma conexão fundamental, que permite introduzir o número imaginário i , a raiz quadrada de -1. Uma das maneiras de ver isso acontecendo, como mostrou Euler, é substituir x por ix na série de potências da exponencial, ficando com:

$$e^{ix} = 1 + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \frac{1}{6!}(ix)^6 + \frac{1}{7!}(ix)^7 + \dots$$

Como $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, segue que $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, etc.. Assim, temos:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{i}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{i}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{i}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 - \frac{i}{7!}x^7 + \dots \\ &= \left\{ 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \right\} + i \left\{ \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \right\} \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Logo, concluímos o resultado desejado,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

A identidade de Euler é uma das equações mais famosas, e para $i = \pi$, torna-se aquela considerada a mais linda de toda a matemática,

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 \\ &\Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0. \end{aligned}$$

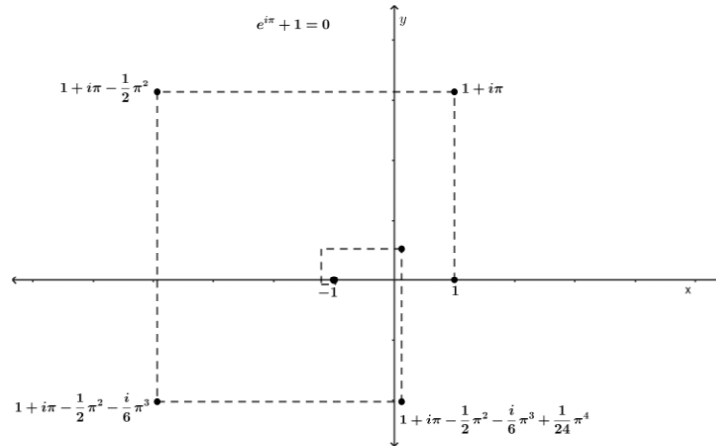
Embora seja altamente provável que Euler tenha chegado a essa dedução, ela não é mencionada de forma explícita em nenhum de seus trabalhos publicados.

No ano de 1959 o professor inglês L.W.H. Hull publicou uma interpretação geométrica, (1.5), associada à equação (2.2). Para isso, ele substituiu $x = i\pi$ na série de potências (2.3), obtendo:

$$e^{i\pi} = 1 + i\pi - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{i}{6}\pi^3 + \frac{1}{24}\pi^4 + \frac{i}{120}\pi^5 - \frac{1}{720}\pi^6 - \dots \quad (2.4)$$

Então ele começou no ponto (1,0) do plano complexo, somou o valor de $i\pi$, a seguir subtraiu $\frac{1}{2}\pi^2$, depois subtraiu $\frac{i}{6}\pi^3$, a seguir adicionou $+\frac{1}{24}\pi^4$ e assim sucessivamente, como em (2.4). Isso produziu um caminho espiral que converge para a soma da série, conforme a figura abaixo.

Figura 1.5: Diagrama espiral



Fonte: Elaborada pelo autor, adaptado de Wilson (2018)

Baseado no exposto acima, como deveríamos chamar a equação $e^{i\pi} + 1 = 0$? Matemáticos tentaram e até conseguiram chegar nessa relação e publicar algo sobre isso. Inclusive Euler, mesmo não escrevendo essa fórmula explicitamente, deve ter reparado que chegaria nela através da sua identidade (2.1). Não parece ser bem determinada a identificação da pessoa que primeiro declarou o resultado de maneira explícita. No entanto, sabe-se que Jacques Français escreveu sobre o assunto nos anos 1813-1814 em uma revista matemática francesa. Atualmente, a quase totalidade das pessoas atribuem esse resultado a Leonhard Euler. Por esse motivo, justifica-se o nome “Identidade de Euler”, em reconhecimento às conquistas deste notável pioneiro da matemática. A palavra “Euler” se encaixa nessa designação, incluindo as cinco constantes: $\pi, i, 0, 1$ e e .

No próximo capítulo, vamos explorar as expressões matemáticas que envolvem as constantes π e e .

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES ENVOLVENDO π E O NÚMERO DE EULER

2.1 Conceitos preliminares

A seguir destacamos alguns conceitos e resultados utilizados para obter as representações e propriedades dos números π e e aqui estudadas.

Definições

As referências utilizadas para as definições foram [9] e [10].

Definição 1. *Série:* *uma série é a soma de uma sequência de termos. Formalmente, se temos uma sequência $\{a_n\}$, então a série associada é a soma $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$. Matematicamente, isso é representado como:*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Definição 2. *Série Convergente:* *uma série é dita convergente se a soma de seus termos infinitos se aproxima de um limite finito. Isto é, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se*

existe um número real L tal que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = L.$$

Definição 3. Série Não Convergente: uma série é não convergente (ou divergente) se a soma de seus termos infinitos não se aproxima de um limite finito. Ou seja, para a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, não existe um limite finito L tal que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = L.$$

Além disso, dada uma sequência (a_n) de números reais, a partir dela formamos uma nova sequência (s_n) onde

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \text{ etc.}$$

Os números s_n chamam-se as reduzidas ou somas parciais da série $\sum a_n$. A parcela a_n é o n -ésimo termo ou termo geral da série.

Se existir o limite $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, diremos que a série $\sum a_n$ é convergente e o número $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ será chamado a soma da série. Se $\lim s_n$ não existir, diremos que $\sum a_n$ é uma série divergente.

Definição 4. Simetria: é a harmonia de forma e tamanho entre as partes de um objeto ou imagem. Ela pode ser definida como tudo aquilo que pode ser dividido em partes, sendo que as partes coincidem quando sobrepostas, por exemplo: se traçarmos uma linha reta dividindo ao meio uma figura, e as duas metades, quando colocadas uma sobre a outra, forem congruentes, podemos dizer que a figura é simétrica. Na geometria, dá-se o nome de eixo de simetria à linha, imaginária ou real, que divide a figura ou objeto em partes idênticas.

Definição 5. Função par: dizemos que uma função $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função par** quando $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Teoremas

As demonstrações dos teoremas desta seção encontram-se nas seguintes referências: [9],[10], [14], [17]

Teorema 1. (Teorema do confronto [9]). Sejam f, g, h três funções, e suponhamos que exista $r > 0$ tal que:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

para $0 < |x - p| < r$. Nestas condições, se:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow p} h(x),$$

então:

$$\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L.$$

Teorema 2. (Teste para Divergência [10]) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ não existe ou se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Teorema 3. A série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

Se $|r| \geq 1$, a série geométrica é divergente.

Teorema 4. [10] Seja $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, monótona, não-decrescente. Para todo número natural $n \geq a$, seja $a_n = f(n)$. A série $\sum a_n$ converge se, e somente se, a integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Teorema 5. [14] Seja $f(t_1, \dots, t_n)$ um polinômio simétrico de grau d com coeficientes em um dado conjunto A . Então existe um polinômio $g(s_1, \dots, s_n)$ de grau menor do que ou igual a d com coeficientes em A , onde:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{j=1}^n t_j \\ s_2 &= \sum_{i < j} t_i t_j \\ s_3 &= \sum_{i < j < k} t_i t_j t_k \\ &\vdots \\ s_n &= t_1 t_2 \dots t_n \end{aligned}$$

são os polinômios simétricos elementares em $t_1 t_2 \dots t_n$, tal que:

$$f(t_1, \dots, t_n) = g(s_1, \dots, s_n).$$

Para a definição e propriedades de polinômios simétricos, sugerimos a referência [16].

Teorema 6. (Teorema Binomial de Newton [17]) Sejam a e b números reais e n um inteiro positivo, então:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n.$$

Utilizando a notação de somatório, temos que:

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p.$$

Teorema 7. (Teorema do Valor Médio, de Lagrange [10]) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) , existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$.

2.2 Representações por meio de séries

2.2.1 Representação do número e

O número de Euler, denotado por e , é uma constante matemática irracional que possui um valor aproximado de 2,71828. Ele desempenha um papel fundamental em várias áreas da matemática e das ciências, incluindo cálculo, análise e teoria das probabilidades.

Para representar o número de Euler, utilizaremos a Série de Taylor da função exponencial ao redor da origem, dada por:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Nessa série, cada termo é obtido elevando-se o valor de x à potência n e dividindo pelo fatorial de n . Para $x = 1$, temos:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \dots \quad (2.1)$$

Para obter uma aproximação do número de Euler, podemos calcular alguns termos da série acima para diferentes valores de n e somá-los até atingir a precisão desejada. Quanto mais termos você adicionar, mais precisa será a aproximação.

Por exemplo, se quisermos calcular uma aproximação de e usando a Série de Taylor com precisão até a terceira casa decimal, pela fórmula (2.1), teremos:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} = 2.666\dots$$

2.2.2 Representação do número π (Problema da Basiléia)

O problema que levou Leonhard Euler à fama foi inicialmente proposto pelo matemático italiano Pietro Mengoli, e ficou conhecido como Problema da Basiléia. Apesar dos esforços dos principais matemáticos da época, a solução ainda não havia sido encontrada, o que gerou um mistério em torno do problema. Entre as grandes mentes que tentaram resolvê-lo estavam Gottfried Wilhelm Leibniz, John Wallis, Henry Oldenburg e os matemáticos da família Bernoulli [6].

Por um período, Jakob Bernoulli tentou abordar o problema, mas sem sucesso, embora tenha publicado algo sobre o assunto em 1689. Com a morte de Jakob, seu irmão Johann Bernoulli assumiu seu cargo de professor na Universidade de Basiléia, na Suíça, onde teve Leonhard Euler como um de seus alunos [6]. Provavelmente, foi Johann quem apresentou o problema a Euler, que na época era apenas um aluno brilhante. Após resolver o problema, Euler chamou a atenção não somente de seus professores na Universidade, mas de toda a comunidade acadêmica da época.

O nome Problema da Basiléia se deve ao fato de Euler ter nascido, se formado e o ter resolvido nesta cidade. Ele consiste em encontrar a soma dos inversos dos quadrados perfeitos, ou seja, a soma exata da série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. A título de curiosidade, primeiro veremos a prova da divergência da série harmônica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

e a seguir mostraremos a convergência, para o valor de $\frac{\pi^2}{6}$, da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é chamada série harmônica. Ela é divergente, mas isto não segue do teste do enésimo termo (2), pois $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. A divergência ocorre porque não há limitante superior para suas somas parciais.

A soma parcial s_{2^n} pode ser escrita da seguinte forma (Veja [20]):

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots \\ &\dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}_{> 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + n \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Portanto, a série diverge. A divergência da série harmônica nos leva a questionar o que acontece se, ao invés de somarmos os inversos dos inteiros positivos, somarmos os quadrados dos inversos, ou seja, queremos investigar o que acontece com a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k \cdot k} &< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(k-1)k} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{k} < 1. \end{aligned}$$

Quando k tende ao infinito, temos $\lim_{k \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{k}\right] = 1$. Assim,

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k \cdot k} < 1,$$

e portanto,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k \cdot k} < \frac{1}{1^2} + 1$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} < 2.$$

Logo, a sequência das somas parciais da série analisada é crescente e limitada superiormente, e portanto convergente. Percebemos que a soma infinita dos inversos diverge, e a soma dos quadrados dos inversos converge. Indo além, podemos questionar: o que acontece com a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (2.2)$$

sendo $p > 2$? Ela diverge ou converge? Para responder, utilizaremos o Teste da Integral (4) de [10].

Seja $p > 1$, e definamos a função $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Temos:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{h \rightarrow \infty} \int_1^h \frac{1}{x^p} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_1^h x^{-p} dx = \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_{x=1}^{x=h} = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{h^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1^{-p+1}}{-p+1} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{h^{p-1} \cdot (-p+1)} - \frac{1^{-p+1}}{-p+1} \right) \\ &= \frac{-1^{-p+1}}{-p+1}. \end{aligned}$$

Portanto, a série $\sum a_n$, onde $a_n = \frac{1}{n^p}$ com $p > 1$ é convergente, pelo Teste da Integral (4), pois f é contínua, monótona e não decrescente.

Voltemos agora ao objetivo principal desta seção, que é a prova da igualdade:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

A prova será baseada na demonstração de Apostol contida em [1].

Consideremos a integral dupla:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy.$$

Expandindo o integrando em uma série geométrica, e calculando a integral termo a termo, obtemos:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n y^n dx dy = \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Calculando a integral de outra forma, mostraremos que $I = \frac{\pi^2}{6}$. Utilizaremos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x = \frac{u-v}{\sqrt{2}}; \\ y = \frac{u+v}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Fazendo $x = 0$ e $x = 1$ em (2.3) obtemos, respectivamente:

$$\frac{u-v}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow u-v = 0 \Rightarrow u = v,$$

$$\frac{u-v}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow u-v = \sqrt{2} \Rightarrow u = \sqrt{2} + v.$$

Agora, fazendo $y = 0$ e $y = 1$ em (2.3), obtemos:

$$\frac{u+v}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow u+v = 0 \Rightarrow u = -v,$$

$$\frac{u+v}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow u+v = \sqrt{2} \Rightarrow v = \sqrt{2} - u.$$

Calculando o jacobiano da mudança de variáveis acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

O integrando fica:

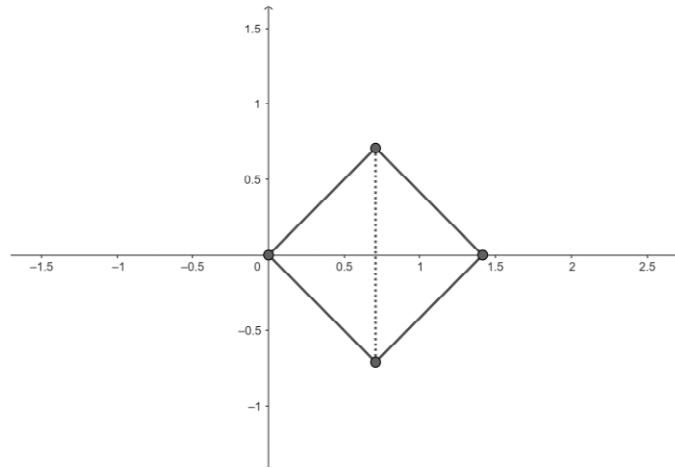
$$\begin{aligned} 1 - xy &= 1 - \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}} \right) = 1 - \frac{(u^2 - v^2)}{2} \\ &= \frac{2 - u^2 + v^2}{2}. \end{aligned}$$

A nossa nova região de integração no plano uv será:

$$A = \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \frac{u-v}{\sqrt{2}} = 0 & \Rightarrow u = v, \\ x = 1 \Rightarrow \frac{u-v}{\sqrt{2}} = 1 & \Rightarrow u = \sqrt{2} + v, \\ y = 0 \Rightarrow \frac{u+v}{\sqrt{2}} = 0 & \Rightarrow u = -v, \\ y = 1 \Rightarrow \frac{u+v}{\sqrt{2}} = 1 & \Rightarrow u = \sqrt{2} - v. \end{cases}$$

A região A está representada na figura (2.1).

Figura 2.1: Região da mudança de variável



Fonte: Elaborada pelo autor

Por questões de simetria e paridade que citaremos em breve, faremos a divisão da região A conforme a figura (2.2).

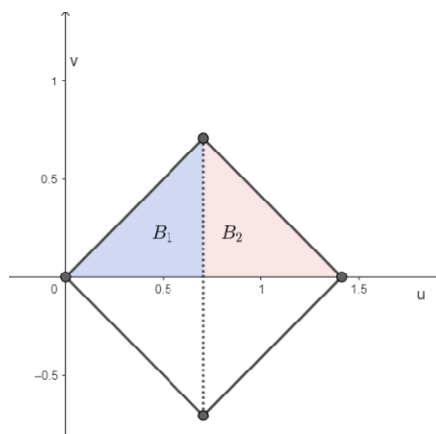
Com a mudança acima, a integral fica da forma:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \iint_A \frac{2}{2-u^2+v^2} dA = 2 \iint_A \frac{1}{2-u^2+v^2} du dv.$$

Como podemos reparar na figura (2.2), a região A é simétrica em relação ao eixo u , pois todos os pontos acima do eixo das abscissas, são reflexos na parte de baixo. Além disso, a função a ser integrada é par na variável u .

Assim, fazendo $B = B_1 \cup B_2$, utilizando a paridade e depois a simetria, obtemos:

Figura 2.2: Região de integração



Fonte: Elaborada pelo autor

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \iint_A \frac{1}{2 - u^2 + v^2} du dv = 2 \cdot 2 \iint_B \frac{1}{2 - u^2 + v^2} du dv = \\
 &= 4 \left[\iint_{B_1} \frac{1}{2 - u^2 + v^2} du dv + \iint_{B_2} \frac{1}{2 - u^2 + v^2} du dv \right] = \\
 &= 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_0^u \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} \right) du + 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} \right) du.
 \end{aligned}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \frac{dt}{a^2 + t^2} &= \int_0^x \frac{1}{a^2 \left(1 + \frac{t^2}{a^2}\right)} dt = \\
 &= \frac{1}{a^2} \int_0^x \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} dt = \\
 &= \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{t}{a} \right) \Big|_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right).
 \end{aligned}$$

Dessa forma, fazendo a substituição $a^2 = 2 - u^2$ (logo, $a = \sqrt{2 - u^2}$), ficamos com:

$$\int_0^u \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} = \frac{1}{\sqrt{2 - u^2}} \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{2 - u^2}} \right)$$

e

$$\int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{dv}{2-u^2+v^2} = \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}} \right) du + 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} \right) du = \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Calcularemos as integrais utilizando substituições trigonométricas. Temos:

$$I_1 = 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}} \right) du \stackrel{(2.4)}{=} 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta = 4 \left[\frac{\theta^2}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{6}} = 2 \left[\frac{\pi}{6} \right]^2.$$

Substituição

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{2} \sin(\theta) \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = \sqrt{2} \cos(\theta) \Rightarrow du = \sqrt{2} \cos(\theta) d\theta, \\ u &= 0 \Rightarrow 0 = \sin(\theta) \Rightarrow \theta = 0, \\ u &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \sin(\theta) \Rightarrow \frac{1}{2} = \sin(\theta) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \\ \sqrt{2-u^2} &= \sqrt{2-2\sin^2(\theta)} = \sqrt{2} \cos(\theta), \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}} \right) du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cos(\theta)} \arctan \left(\frac{\sqrt{2} \sin(\theta)}{\sqrt{2} \cos(\theta)} \right) \sqrt{2} \cos(\theta) d\theta = \theta d\theta. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Além disso, temos:

$$I_2 = 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} \right) du \stackrel{(2.5)}{=} 8 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta = 8 \left[\frac{\theta^2}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{6}} = 4 \cdot \left(\frac{\pi}{6} \right)^2.$$

A substituição e as relações utilizadas nessa última integral estão descritas a seguir.

Substituição

$$\begin{aligned}
u &= \sqrt{2} \cos(2\theta) \Rightarrow du = -2\sqrt{2} \sin(2\theta) d\theta, \\
u = \frac{1}{\sqrt{2}} &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cos(2\theta) \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos(2\theta) \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \\
u = \sqrt{2} &\Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2} \cos(2\theta) \Rightarrow 1 = \cos(2\theta) \Rightarrow 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \quad (2.5) \\
\sqrt{2-u^2} &= \sqrt{2-2\cos^2(2\theta)} = \sqrt{2} \sin(2\theta), \\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2-u}}{\sqrt{2-u^2}}\right) du = \\
&= \frac{-2}{\sqrt{2} \sin(2\theta)} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}(1-\cos(2\theta))}{\sqrt{2} \sin(2\theta)}\right) \sqrt{2} \sin(2\theta) d\theta = \\
&= -2 \arctan(\tan(\theta)) = -2\theta d\theta.
\end{aligned}$$

A penúltima igualdade do quadro acima se justifica pelo seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos(2\theta)}{\sqrt{2-\sqrt{2}^2\cos^2(2\theta)}} = \frac{\sqrt{2}(1-\cos(2\theta))}{\sqrt{2-2\cos^2(2\theta)}} \\
&= \frac{\sqrt{2}(1-\cos(2\theta))}{\sqrt{[\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos(2\theta)][\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos(2\theta)]}} \\
&= \frac{\sqrt{2}(1-\cos(2\theta))}{\sqrt{\sqrt{2}(1+\cos(2\theta))} \cdot \sqrt{\sqrt{2}(1-\cos(2\theta))}} \\
&= \sqrt{\frac{\sqrt{2}(1-\cos(2\theta))}{\sqrt{2}(1+\cos(2\theta))}} \\
&\stackrel{(2.9)(2.10)}{=} \sqrt{\frac{2\sin^2(\theta)}{2\cos^2(\theta)}} = \tan(\theta). \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \Rightarrow \cos(a+a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Da relação fundamental da trigonometria,

$$\begin{aligned}\sin^2(a) + \cos^2(a) &= 1, \\ \text{temos: } \sin^2(a) &= 1 - \cos^2(a).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Substituindo (2.8) em (2.7):

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ \Rightarrow \cos(2a) &= \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a)) \\ \Rightarrow \cos(2a) &= 2\cos^2(a) - 1\end{aligned}\tag{2.9}$$

e

$$\begin{aligned}\cos^2(a) &= 1 - \sin^2(a) \\ \Rightarrow \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = \\ &= 1 - \sin^2(a) - \sin^2(a) = \\ &= 1 - 2\sin^2(a).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Portanto, concluímos que:

$$I = I_1 + I_2 = 2 \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + 4 \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = 6 \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6},$$

como queríamos.

2.3 A integral gaussiana

A integral de Gauss ou integral gaussiana, cujo nome é dado em homenagem ao matemático Carl Friedrich Gaus, é uma integral dupla que resulta no valor $\sqrt{\pi}$, como veremos a seguir. A integral citada é:

$$I_g = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx,\tag{3.11}$$

onde e é a constante de Euler. Esta integral também é conhecida como a função de erro gaussiano, e desempenha um papel importante na teoria da probabilidade e em outras áreas da Matemática e da Física.

Associaremos a integral gaussiana a uma integral dupla nas coordenadas x, y e a seguir faremos uma mudança de coordenadas para polares, utilizando como referência o livro [8]. Queremos mostrar que:

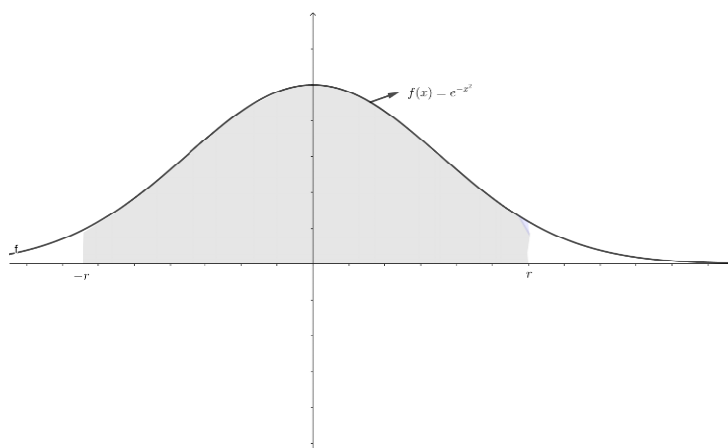
$$(I_g)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \pi.$$

Façamos:

$$I(r) = \int_{-r}^r e^{-x^2} dx = \int_{-r}^r e^{-y^2} dy \quad (r > 0),$$

e essa integral representa a área da figura (2.3).

Figura 2.3: Área da região hachurada



Fonte: Elaborada pelo autor

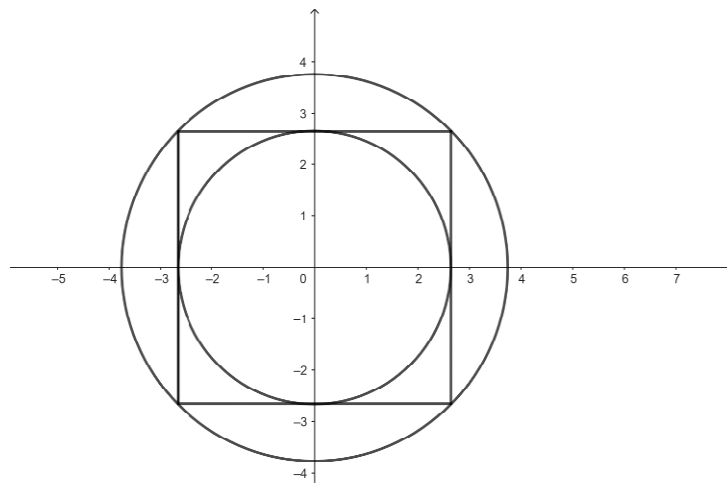
Temos:

$$[I(r)]^2 = \int_{-r}^r e^{-x^2} dx \cdot \int_{-r}^r e^{-y^2} dy = \int_{-r}^r \int_{-r}^r e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Sejam B e B_1 os círculos inscrito e circunscrito, respectivamente, ao quadrado:

$$-r \leq x \leq r, -r \leq y \leq r.$$

Figura 2.4: Região de integração



Fonte: Elaborada pelo autor

O raio de B é r e o de B_1 é $\sqrt{2} r$. Temos:

$$\iint_B e^{-x^2-y^2} dx dy \leq [I(x)]^2 \leq \iint_{B_1} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Utilizando a mudança de variáveis para coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = p \cos \theta, \\ y = p \sin \theta \end{cases},$$

obtemos:

$$\iint_B e^{-x^2-y^2} dx dy = \iint_B e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^r e^{-p^2} \cdot p dp d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r p e^{-p^2} dp$$

Fazendo a integral por substituição, temos:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r p e^{-p^2} dp \stackrel{(3.12)}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{-r^2} -\frac{1}{2p} p e^u du =$$

Substituição

$$\begin{aligned} u &= -p^2 \Rightarrow \frac{du}{dp} = -2p \Rightarrow dp = \frac{1}{-2p} du \\ p &= r \Rightarrow u = -r^2, \quad p = 0 \Rightarrow u = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{2} e^u \Big|_{u=0}^{u=-r^2} \right) = \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{2} [e^{-r^2} - e^0] \right).$$

De modo análogo,

$$\iint_{B_1} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi [1 - e^{-2r^2}].$$

Logo,

$$\pi [1 - e^{-r^2}] \leq [I(r)]^2 \leq \pi [1 - e^{-2r^2}].$$

Extraindo a raiz quadrada, temos:

$$\sqrt{\pi [1 - e^{-r^2}]} \leq I(r) \leq \sqrt{\pi [1 - e^{-2r^2}]}.$$

Como

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{\pi [1 - e^{-r^2}]} = \sqrt{\pi} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{\pi [1 - e^{-2r^2}]},$$

segue, pelo Teorema do Confronto (Teorema (1)), que:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} I(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

No próximo capítulo, vamos apresentar a prova da irracionalidade e da transcendência do número π e do número e .

CAPÍTULO 3

IRRACIONALIDADE E TRANSCENDÊNCIA

Neste capítulo apresentamos a demonstração da irracionalidade e da transcendência de π e e . Antes, destaquemos alguns fatos sobre conjuntos numéricos importantes. Na Teoria dos Números, a construção dos conjuntos de números naturais, inteiros, racionais e irracionais é um aspecto fundamental. Vamos explorar cada um deles:

Números Naturais ($\mathbb{N}$)

Os números naturais são os números usados para contar e ordenar. Eles começam com 0 (ou 1, dependendo da definição adotada) e prosseguem indefinidamente em ordem crescente. Formalmente, a construção dos números naturais pode ser baseada nos Axiomas de Peano, que estabelecem a existência de um número natural 0 e de uma função sucessor que atribui a cada número natural n um sucessor $n + 1$.

Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

Os números inteiros podem ser construídos a partir dos números naturais usando o conceito de pares ordenados e uma relação de equivalência, definindo números inteiros como a diferença entre números naturais.

Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

Os números racionais são todos os números que podem ser expressos como o quociente de dois inteiros, com o denominador diferente de zero. Eles são formalmente construídos a partir dos inteiros usando pares ordenados (a, b) , onde a e b são inteiros e $b \neq 0$. A relação de equivalência entre esses pares é definida de tal maneira que dois pares (a, b) e (c, d) são equivalentes se $ad = bc$.

Números Irracionais

Os números irracionais são números reais que não podem ser expressos como uma razão de dois inteiros, ou seja, não são racionais. Eles incluem números como $\sqrt{2}$, π e e . A construção dos números irracionais geralmente segue a construção dos números reais a partir dos racionais, utilizando, por exemplo, cortes de Dedekind ou sequências de Cauchy. Em ambos os métodos, a ideia é considerar conjuntos ou sequências de números racionais que se aproximam cada vez mais de um valor limite que não é racional.

3.1 Prova da irracionalidades de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{p}$, com p sendo número primo

Antes de abordarmos a prova da irracionalidade dos números e e π , é fundamental familiarizarmo-nos com o método a ser utilizado. Para isso, começaremos com um exemplo clássico frequentemente apresentado em cursos de graduação: a demonstração da irracionalidade do número $\sqrt{2}$. Inicialmente, apresentaremos um resultado preliminar necessário para essa demonstração. Este passo inicial nos ajudará a entender melhor o raciocínio e as técnicas envolvidas no processo de prova para outros números, como e e π .

Lema 1. *Se a é um número inteiro tal que a^2 é par, então a é par.*

Demonstração. Utilizando a técnica da contrapositiva, mostremos que se $a \in \mathbb{Z}$ e a é um número ímpar, então a^2 é um número ímpar. Se a é um número ímpar, então $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$a = 2k + 1. \tag{1.1}$$

Elevando (1.1) ao quadrado, obtemos:

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

que é um número ímpar. □

Teorema 8. *O número $\sqrt{2}$ é irracional.*

Demonstração. Suponhamos que $\sqrt{2}$ é um número racional. Então existem $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$ tais que:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad (1.2)$$

e que $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível, ou seja, $\text{mdc}(a, b) = 1$.

Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado, obtemos:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

ou seja,

$$2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Logo,

$$a^2 = 2b^2, \quad (1.3)$$

e portanto a^2 é um número par (é múltiplo de 2). Segue então que a é par, pelo lema anterior.

Assim, $\exists m \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$a = 2m. \quad (1.4)$$

Substituindo (1.4) em (1.3), obtemos:

$$\begin{aligned} (2m)^2 &= 2b^2 \\ \Rightarrow 4m^2 &= 2b^2 \\ \Rightarrow 2b^2 &= 4m^2 \\ \Rightarrow b^2 &= \frac{4m^2}{2} \Rightarrow 2m^2, \end{aligned}$$

ou seja, b^2 é um número par, e do Lema (1) segue que b é um número par. Assim, $\exists n \in \mathbb{Z}$, tal que

$$b = 2n. \quad (1.5)$$

De (1.4) e (1.5) temos,

$$\frac{a}{b} = \frac{2m}{2n},$$

o que é uma contradição, pois supusemos no início da demonstração que a fração $\frac{a}{b}$ é irredutível. Portanto, $\sqrt{2}$ é um número irracional. $\square$

Teorema 9. *O número $\sqrt{p}$, com p sendo um número primo, é irracional.*

Demonstração. Para provarmos que a raiz quadrada de um número primo é irracional, usaremos um argumento por contradição. Primeiro, lembremos que um número primo é um número natural maior que 1 que tem apenas dois divisores distintos: 1 e ele mesmo. Seja p um número primo e suponhamos que a raiz quadrada de p é um número racional. Portanto, podemos expressar essa raiz quadrada na forma de uma fração irredutível, $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros sem fatores comuns, e $b \neq 0$. Logo se $\sqrt{p}$ é racional, temos:

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}.$$

Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado, obtemos:

$$p = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = pb^2, \quad (1.6)$$

o que implica que a^2 é um número divisível por p , e por consequência, a também deve ser divisível por p (pois, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, temos que todo número inteiro positivo maior que 1 possui uma decomposição única em fatores primos).

Logo, existe um inteiro k , tal que $a = kp$. Substituindo em (1.6), temos:

$$(pk)^2 = pb^2 \Rightarrow p^2k^2 = pb^2.$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por p , obtemos:

$$b^2 = pk^2,$$

implicando que b^2 também é divisível por p , e assim, b é divisível por p . No entanto, isso contradiz nossa suposição inicial de que a e b não têm fatores comuns, pois ambos são divisíveis por p . Essa contradição prova que $\sqrt{p}$ é irracional. $\square$

3.2 A irracionalidade do número e

A matemática é um ramo da ciência cheio de mistérios e descobertas surpreendentes. Uma dessas descobertas é a irracionalidade do número de Euler, um resultado matemático que foi demonstrado pela primeira vez por Johann Lambert.

A demonstração da irracionalidade de e feita por Lambert em 1768 é uma das contribuições mais notáveis em sua carreira. Sua prova foi uma conquista impressionante e consolidou a conjectura de Euler, mostrando que e , de fato é um número irracional.

Já vimos, no Capítulo 1, equação (2.3), que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Fazendo $x = 1$ na série acima, obtemos:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \dots \quad (2.7)$$

Mostremos agora que e é um número irracional. Para tal, utilizaremos a referência [5].

Teorema 10. *O número e é irracional.*

Demonstração. Suponhamos que e seja um número racional, isto é, que pode ser escrito da forma $e = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{N}$ com $q \neq 0$ e tais que p e q são primos entre si. Segue então de (2.7):

$$\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) = \sum_{k=q+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j!}\right) \quad (2.8)$$

Agora, faremos uma estimativa para o segundo membro de (2.8). Temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=q+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j!}\right) &= \frac{1}{q!} \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots\right) \\ &< \frac{1}{q!} \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots\right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

A expressão entre parênteses após a desigualdade em (2.9) é uma série geométrica da forma $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, na qual a razão r está entre 0 e 1, logo converge e tem soma igual a $\frac{r}{1-r}$.

Dessa forma obtemos de (2.9):

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} < \frac{1}{q!} \left(\frac{\frac{1}{q+1}}{1 - \frac{1}{q+1}} \right) = \frac{1}{q!} \left(\frac{\frac{1}{q+1}}{\frac{q}{q+1}} \right) = \frac{1}{q!} \frac{1}{q}. \quad (2.10)$$

Retornando à equação (2.8), com a estimativa (2.10) obtemos:

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) < \frac{1}{q!} \frac{1}{q}.$$

Logo,

$$0 < q! \left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \dots - \frac{1}{q!} \right) < \frac{1}{q} \leq 1. \quad (2.11)$$

Como podemos observar em (2.11), o segundo termo é um número inteiro, pois $q!$ é inteiro e vai cancelar com todos os denominadores das frações. Mas isso é absurdo, pois teríamos que o termo médio é um inteiro positivo estritamente menor que 1. Esse absurdo veio de supor que o número e é racional, e portanto e é irracional. $\square$

3.3 A irracionalidade do número π

A prova da irracionalidade do número π que veremos aqui é baseada nas referências [11] e [12], e deve-se ao matemático Ivan Niven, que é considerado o primeiro a apresentar uma demonstração simples deste fato.

A ideia da demonstração é a seguinte: suponhamos que π é um número racional, ou seja, que existam inteiros positivos a e b tais que $\pi = a/b$.

Definimos uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}, \quad (3.12)$$

onde n é arbitrário. Analisaremos algumas propriedades desta função, que não dependem do valor de n , e para concluir a demonstração escolheremos um valor conveniente para n . A prova é dividida em vários resultados, com o intuito de facilitar a compreensão.

Proposição 1. *A função f se anula nos pontos 0 e π , ou seja, $f(0) = 0 = f(\pi)$.*

Demonstração. Basta substituir x na expressão (3.12), por 0 e π , respectivamente, para obtermos:

$$f(0) = \frac{0^n(a - b \cdot 0)^n}{n!} = 0$$

e

$$f(\pi) = \frac{\pi^n(a - b\pi)^n}{n!} \underset{\pi=\frac{a}{b}}{=} \frac{\pi^n\left(a - b \cdot \left(\frac{a}{b}\right)\right)^n}{n!} = \frac{\pi^n(a - a)^n}{n!} = 0.$$

□

Proposição 2. *O valor $f(x)$ é positivo, para todo $x \in (0, \pi)$.*

Demonstração. Observemos que:

$$x \in (0, \pi) \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x^n > 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} x \in (0, \pi) &\Rightarrow \frac{a}{b} = \pi > x > 0 \Rightarrow a > bx > 0 \\ &\Rightarrow a - bx > 0 \Rightarrow (a - bx)^n > 0. \end{aligned}$$

Combinando as duas desigualdades (e usando o fato que $n! > 0$), concluímos que:

$$x^n(a - bx)^n > 0 \Rightarrow \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} > 0 \Rightarrow f(x) > 0.$$

□

Proposição 3. *Quando $x \in (0, \pi)$, tem-se $f(x) \cdot \sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!}$.*

Demonstração. Pela hipótese feita, temos $0 < x < \pi$ e por conseguinte $x^n < \pi^n$. Ademais, como $b > 0$,

$$\begin{aligned} x \in (0, \pi) \Rightarrow 0 < bx &\Rightarrow a < a + bx \Rightarrow a - bx < a \\ &\Rightarrow (a - bx)^n < a^n. \end{aligned}$$

Na última implicação usamos o fato já visto que $(a - bx) > 0$. Agora, levando em conta que $0 < \sin x \leq 1$, para todo $x \in (0, \pi)$, concluímos o que queríamos:

$$f(x) \cdot \sin x = \frac{x^n(a - bx)^n \sin x}{n!} < \frac{\pi^n \cdot a^n \cdot 1}{n!} = \frac{\pi^n a^n}{n!}$$

□

Proposição 4. *Se $x \in (0, \pi)$, então $0 < f(x) \cdot \sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!}$.*

Demonstração. Utilizando o fato de que a função seno é positiva no intervalo dado, juntamente com a Proposição 2, vemos que:

$$0 < f(x) \cdot \sin x,$$

e combinando com a Proposição 3, segue o resultado desejado. $\square$

Proposição 5. Para todo x , vale $f(\pi - x) = f(x)$.

Demonstração. Fazendo manipulações algébricas, obtemos:

$$\begin{aligned} f(\pi - x) &= f\left(\frac{a}{b} - x\right) \stackrel{(3.12)}{=} \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \left(a - b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^n}{n!} = \\ &= \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n (a - a + bx)^n}{n!} = \\ &= \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n b^n x^n}{n!} = \frac{\left(\left(\frac{a}{b} - x\right)b\right)^n x^n}{n!} = \\ &= \frac{(a - bx)^n x^n}{n!} = f(x). \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 6. Cada derivada de f , seja qual for sua ordem, assume apenas valores inteiros no ponto $x = 0$. Ou seja, $f^{(i)}(0)$ é sempre inteiro, onde $f^{(i)}$ representa a i -ésima derivada de f .

Demonstração. Reescrevendo a função $f(x)$ através do desenvolvimento binomial, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^n (a^n - \dots + (-b)^n x^n)}{n!} \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{a^n x^n}{n!} - \dots + \frac{(-b)^n x^{2n}}{n!}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

A expressão acima mostra que f tem grau $2n$, logo precisamos derivar $2n + 1$ vezes ou mais para que cheguemos em uma derivada nula. Como cada termo tem no máximo grau $2n$, quando $i > 2n$ então $f^{(i)}(x)$ é zero para todo x , em particular para $x = 0$.

Como nenhum termo tem grau menor do que n , se $i < n$ então cada termo de $f^{(i)}(x)$ terá um fator x . Assim, ao calcular $f^{(i)}(0)$, concluímos que cada termo apresentará um fator nulo e, por conseguinte, teremos $f^{(i)}(0) = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$.

Assim, já sabemos que $f^{(i)}(0) = 0$ quando $i < n$ ou $i > 2n$. Analisemos o caso em que $n \leq i \leq 2n$. Observemos que cada monômio da expressão (3.13) é da forma

$$\frac{kx^{n+j}}{n!},$$

onde k é uma constante e $0 \leq j \leq n$ (por exemplo, no primeiro termo, $k = a^n$ e $j = 0$). Tomemos então i tal que $n \leq i \leq 2n$. Na expressão (3.13), alguns termos terão grau menor do que i , outros terão grau maior do que i e um termo terá grau igual a i (ou seja, teremos $i = n + j$ para algum j). Ao calcularmos $f^{(i)}(0)$, os termos que têm grau menor do que e maior do que i , se reduzirão a zero. Logo, basta ver o que ocorre com o termo cujo grau i vale $n + j$. Derivando-o $i = n + j$ vezes vamos obter:

$$\frac{(n+j)(n+j-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot k \cdot x^0}{n!} = \frac{(n+j)!k}{n!}.$$

A igualdade acima é um inteiro, pois o fator $n!$ está no numerador. Assim, dado qualquer monômio de f , ao ser derivado $n + j$ vezes ele se reduzirá zero (se seu grau for menor do $n + j$) ou ele permanecerá com um fator igual a x (caso seu grau seja maior do que $n + j$) ou ele será uma constante inteira (se o grau for exatamente $n + j$). Segue-se que a derivada de ordem $n + j$ de cada monômio de f no ponto $x = 0$ vale zero ou é um número inteiro. Dessa forma, $f^{(n+j)}(0)$ também é um inteiro (pois é a soma das derivadas de cada monômio), o que justifica a afirmação para o caso que restava. $\square$

Proposição 7. *Temos $f^{(i)}(x) = (-1)^i f^{(i)}(\pi - x)$, $\forall x$.*

Demonstração. Vimos em (5) que $f(\pi - x) = f(x)$. Derivando ambos os lados e utilizando a regra da cadeia no lado esquerdo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(\pi - x)] &= \frac{d}{dx}[f(x)] \\ \Rightarrow f'(\pi - x) \frac{d}{dx}[\pi - x] &= f'(x) \Rightarrow f'(\pi - x) \cdot (-1) = f'(x). \end{aligned}$$

Calculando a segunda e terceira derivadas para analisar, obtemos:

$$\begin{aligned} f^{(2)}(\pi - x) &= f^{(2)}(x), \\ f^{(3)}(\pi - x) &= -f^{(3)}(x), \end{aligned}$$

e assim sucessivamente. $\square$

Proposição 8. *O número $f^{(i)}(\pi)$ é um inteiro.*

Demonstração. Pela Proposição (7),

$$f^{(i)}(\pi) = (-1)^i f^{(i)}(\pi - \pi) = (-1)^i f^{(i)}(0).$$

Como $f^{(i)}(0)$ é um inteiro (pela Proposição (6)), a justificativa está completa (pois o resultado da multiplicação de um inteiro por (-1) resulta num inteiro). $\square$

Vimos até aqui as propriedades mais úteis da função (3.12). Agora definiremos uma nova função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pondo:

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x). \quad (3.14)$$

Vejamos algumas propriedades desta outra função.

Proposição 9. *Vale a igualdade $F''(x) + F(x) = f(x)$.*

Demonstração. Utilizando manipulações algébricas, obtemos:

$$\begin{aligned} F''(x) + F(x) &= (f^{(2)}(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) \cdots) \\ &\quad + (f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) \cdots) \\ &= f(x) + (f^{(2)}(x) - f^{(2)}(x)) + (f^{(4)}(x) - f^{(4)}(x)) + \cdots \\ &= f(x) + 0 + 0 + \cdots + 0 = f(x). \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 10. *A diferença $(F'(x) \cdot \sin x - F(x) \cdot \cos x)$ é uma primitiva de $f(x) \cdot \sin x$.*

Demonstração. Derivando $F'(x) \cdot \sin x - F(x) \cdot \cos x$ (usaremos a regra do produto e, no último passo, a Proposição 9), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [F'(x) \sin x - F(x) \cos x] &= \\ &= F''(x) \sin x + F'(x) \cos x - F'(x) \cos x + F(x) \sin x = \\ &= F''(x) \sin x + F(x) \sin x = (F''(x) + F(x)) \sin x = \\ &= f(x) \sin x. \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 11. *A soma $F(0) + F(\pi)$ é um número inteiro.*

Demonstração. Mostremos que $F(0)$ e $F(\pi)$ são inteiros. Temos:

$$F(0) = f(0) - f^{(2)}(0) + f^{(4)}(0) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(0).$$

Pela Proposição 6, a soma acima reduz-se a uma soma de inteiros, ou seja, é um número inteiro. Usando um raciocínio análogo e a Proposição 8 para o caso $x = \pi$, temos o resultado desejado. $\square$

Proposição 12. *A integral abaixo representa um número inteiro:*

$$\int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} x dx.$$

Demonstração. Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo (em conjunto com a Proposição 10), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} x dx &= [F'(x) \operatorname{sen} x - F(x) \cos x]_0^\pi \\ &= [F'(\pi) \operatorname{sen} \pi - F(\pi) \cos \pi] - [F'(0) \operatorname{sen} 0 - F(0) \cos 0] \\ &= F(\pi) + F(0). \end{aligned}$$

A afirmação segue então da Proposição 11. $\square$

Proposição 13. *Se $x \in (0, \pi)$, então:*

$$0 < \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} x dx < \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}.$$

Demonstração. Pela Proposição 4, no intervalo $(0, \pi)$ vale:

$$0 < f(x) \operatorname{sen} x < \frac{\pi^n a^n}{n!}.$$

Usando a continuidade das funções envolvidas na desigualdade acima, concluímos que:

$$0 < \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} x dx < \int_0^\pi \frac{\pi^n a^n}{n!} dx = \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}.$$

$\square$

Podemos agora demonstrar o:

Teorema 11. *O número π é irracional.*

Demonstração. Supondo que π é racional e utilizando a teoria de limites, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{\pi^{n_0+1} a^{n_0}}{n_0!} < 1.$$

Intuitivamente, isso significa que quando n é muito grande, então o denominador da fração é muito maior do que o numerador. Tomando $n = n_0$ na definição de f e utilizando a Proposição 13, obtemos:

$$0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx < 1.$$

Essas desigualdades nos levam a concluir, utilizando a Proposição 12, que existe um inteiro maior do que zero e menor do que 1, o que é um absurdo. Tal absurdo veio de supor que π é um número racional. Portanto o número π é irracional. $\square$

3.3.1 A irracionalidade de π^2

Agora iremos para uma pergunta bem simples de ser respondida: “Se um número é irracional, então o quadrado dele também é irracional?”

A resposta é não, como por exemplo se tomarmos $x = \sqrt{2}$, sabemos que x é um número irracional mas o seu quadrado não é irracional.

Agora a questão recíproca: “Se o quadrado de um número é irracional, então esse número é irracional?”

Aqui a resposta é sim, uma vez que, se $x = \frac{a}{b}$ é racional, então $x^2 = \frac{a^2}{b^2} \in \mathbb{Q}$.

Nesse sentido, mostrar que o quadrado de um número é irracional é um resultado tão forte quanto mostrar que o próprio número é irracional. A título de ilustração, apresentaremos a seguir a irracionalidade de π^2 , cujas ideias são semelhantes àsquelas utilizadas para demonstrar a irracionalidade de π e poderia ser utilizada para este fim.

Teorema 12. *O número π^2 é irracional.*

Demonstração. Sejam n um inteiro positivo, $x \in (0, 1)$ e:

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

Utilizando o Teorema Binomial (6), obtemos:

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-x)^k = \frac{1}{n!} \sum_{m=n}^{2n} c_m x^m,$$

onde os coeficientes c_m são inteiros. Além disso, como $0 < x < 1$, obtemos:

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}. \quad (3.15)$$

Suponhamos por absurdo que π^2 é racional, ou seja, $\pi^2 = \frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros positivos.

Vemos que $f(0) = 0$ e $f^{(m)}(0) = 0$, se $m < n$ ou $m > 2n$. Para $n \leq m \leq 2n$, temos:

$$f^{(m)}(0) = \frac{m!}{n!} c_m \in \mathbb{Z},$$

pois c_m é um número inteiro que tem a forma:

$$c_m = k \frac{n!}{(n-m)!m!}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $f(x)$ e todas as suas derivadas assumem valores inteiros em $x = 0$. Desde que $f(1-x) = f(x)$, o mesmo é válido para $x = 1$.

Agora, para $x \in (0, 1)$, definimos:

$$G(x) = b^n [\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f''(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)],$$

e pelo visto anteriormente, $G(0)$ e $G(1)$ são números inteiros. Temos ainda:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [G'(x) \operatorname{sen}(\pi x) - \pi G(x) \cos(\pi x)] &= \\ &= G''(x) \operatorname{sen}(\pi x) + \pi G'(x) \cos(\pi x) \\ &\quad - \pi G'(x) \cos(\pi x) + \pi^2 G(x) \operatorname{sen}(\pi x) = \\ &= [G''(x) + \pi^2 G(x)] \operatorname{sen}(\pi x) = \\ &= b^n \pi^{2n+2} f(x) \operatorname{sen}(\pi x) = \\ &= \pi^2 b^n \pi^{2n} f(x) \operatorname{sen}(\pi x) = \\ &= \pi^2 b^n \frac{a^n}{b^n} f(x) \operatorname{sen}(\pi x) = \\ &= \pi^2 a^n \operatorname{sen}(\pi x) f(x). \end{aligned}$$

Assim, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, vemos que:

$$I = \pi \int_0^1 a^n \operatorname{sen}(\pi x) f(x) dx = \left[\frac{G'(x) \operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} - G(x) \cos(\pi x) \right] \Big|_0^1 = G(1) + G(0) \in \mathbb{Z}.$$

Pela equação (3.15),

$$0 < \pi \int_0^1 a^n \operatorname{sen}(\pi x) f(x) dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1,$$

para n suficientemente grande. Portanto, I é um número inteiro entre 0 e 1, o que é uma contradição. $\square$

3.4 A transcendência do número e

Agora iremos falar sobre os números algébricos e transcendentos. Temos por definição que qualquer solução de uma equação polinomial da forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (4.16)$$

onde os coeficientes a_i 's são inteiros, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, é chamado de número algébrico.

Portanto, um número α é algébrico se pudermos fabricar uma equação polinomial com coeficientes inteiros, da qual α seja raiz. Assim, qualquer número racional $\alpha = p/q$ é algébrico, porque α é a raiz da equação $qx - p = 0$. Um número que não é algébrico é chamado de transcendente.

A transcendência de e foi um desafio aos matemáticos até o século XIX, conforme [5]. Em 1873, o matemático francês C. Hermite marcou época ao demonstrá-la. A demonstração original de Hermite sofreu simplificações sucessivas por matemáticos famosos como Jordan (1882), Markhoff (1883), Rouché (1883), Weierstrass (1885), Hurwitz (1893), entre outras. A demonstração que apresentaremos a seguir é baseada no trabalho de Hurwitz.

Antes de mostrar a transcendência do número de e , exibiremos alguns resultados que são necessários para a sua demonstração. Utilizaremos as referências [5] e [18].

Lema 2. *Seja $P(x)$ um polinômio de grau r . Definindo a função real:*

$$F(x) = P(x) + P'(x) + \dots + P^r(x),$$

onde $P^r(x)$ representa a derivada de ordem r de P , temos:

$$\frac{d}{dx} (e^{-x} F(x)) = -e^{-x} P(x).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [e^{-x} F(x)] &= \frac{d}{dx} [e^{-x} (P(x) + P'(x) + \dots + P^r(x))] = \\ &= -e^{-x} (P(x) + P'(x) + \dots + P^r(x)) + e^{-x} (P'(x) + \dots + P^r(x) + P^{r+1}(x)) = \\ &= e^{-x} (-P(x) - P'(x) - \dots - P^r(x) + P'(x) + \dots + P^r(x) + P^{r+1}(x)) = \\ &= e^{-x} (-P(x) + P^{r+1}(x)) = -e^{-x} (P(x)) = -e^{-x} P(x). \end{aligned}$$

□

Lema 3. *Sejam $F(x)$ e $P(x)$ como no Lema 2. Então:*

$$F(k) - e^k F(0) = -P(k \cdot \theta_k) k e^{k(1-\theta_k)},$$

para todo $k > 0$, onde θ_k é um número que está entre 0 e 1.

Demonstração. Definindo a função:

$$\begin{aligned} G : [0, k] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto G(x) = e^{-x} \cdot F(x), \end{aligned}$$

vemos que, para $k > 0$, G é contínua em $[0, k]$ e derivável em $(0, k)$, pois e^x e $F(x)$ são deriváveis. Dessa forma, utilizando o Teorema do Valor Médio, vemos que existe $c \in (0, k)$ tal que:

$$\begin{aligned} G(k) - G(0) &= G'(c) \cdot (k - 0) \\ \Rightarrow e^{-k} F(k) - e^0 F(0) &= -e^{-c} P(c) k \\ \Rightarrow e^{-k} F(k) - F(0) &= -k (e^{-c} P(c)). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Fazendo:

$$c = k\theta_k, \tag{4.18}$$

e substituindo (4.18) em (4.17), obtemos:

$$e^{-k} F(k) - F(0) = -k (e^{-k\theta_k} P(k\theta_k)).$$

Multiplicando ambos os membros por e^k , tem-se:

$$e^k e^{-k} F(k) - e^k F(0) = -e^k k (e^{-k\theta_k} P(k\theta_k)) \Rightarrow F(k) - e^k F(0) = -P(k\theta_k) k e^{k(1-\theta_k)} = A_k.$$

□

Corolário 1. *Sejam $F(x)$ e A_k como definidos no Lema 2 e na demonstração do Lema 3, e suponhamos que e não seja transcendente. Então, existem inteiros $c_0, c_1, \dots, c_n$ (com $c_0 > 0$), tais que:*

$$c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_n F(n) = c_1 A_1 + \dots + c_n A_n.$$

Demonstração. De fato, supondo que e é algébrico, existem inteiros $c_0, c_1, \dots, c_n$ (com $c_0 > 0$), tais que:

$$c_n e^n + \dots + c_1 e + c_0 = 0.$$

Caso tenhamos $c_0 < 0$, basta considerar $(-c_n) e^n + \dots + (-c_1) e - c_0 = 0$.

Pelo Lema 3, temos $A_k = F(k) - e^k F(0)$. Então, para $k \in \{1, \dots, n\}$, vale:

$$\begin{aligned} c_1 A_1 + \dots + c_n A_n &= \\ &= c_1 (F(1) - e F(0)) + \dots + c_n (F(n) - e^n F(0)) = \\ &= c_1 F(1) + \dots + c_n F(n) - (c_1 e F(0) + \dots + c_n e^n F(0)) = \\ &= c_1 F(1) + \dots + c_n F(n) - [F(0) (c_1 e + \dots + c_n e^n)] = \\ &= c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_n F(n) \\ \Rightarrow c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_n F(n) &= c_1 A_1 + \dots + c_n A_n. \end{aligned}$$

□

O objetivo a seguir é mostrar que o lado esquerdo dessa igualdade no Corolário (1) é um número inteiro não nulo, não divisível por p sendo $p \in \mathbb{Z}$, enquanto o lado direito da igualdade tem módulo menor que 1, caracterizando um absurdo.

Para provarmos a afirmação sobre o lado esquerdo da igualdade usaremos os Lemas 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Já para o lado direito da igualdade usaremos os Lemas 10 e 11 a seguir.

Lema 4. *Sejam $Q(x)$ uma função polinomial com coeficientes inteiros definida por:*

$$Q(x) = \sum_{j=0}^r a_j x^j, a_j \in \mathbb{Z}, j = 0, \dots, r.$$

Então:

$$Q^{(i)}(x) = \sum_{j=i}^r \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i}, i \leq r.$$

Demonstração. Antes façamos alguns exemplos. Para $r = 4$, obtemos:

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \sum_{j=0}^4 a_j x^j = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4, \\
Q^{(1)}(x) &= a_1 + 2a_2 x^{2-1} + 3a_3 x^{3-1} + 4a_4 x^{4-1}, \\
Q^{(2)}(x) &= (2-1)2a_2 x^{2-2} + (3-1)3a_3 x^{3-2} + (4-1)4a_4 x^{4-2}, \\
Q^{(3)}(x) &= (3-2)(3-1)3a_3 x^{3-3} + (4-2)(4-1)4a_4 x^{4-3}, \\
Q^{(4)}(x) &= (4-3)(4-2)(4-1)4a_4 x^{4-4}.
\end{aligned}$$

Se observarmos:

$$\begin{aligned}
\frac{1!}{(1-1)!} &= \frac{1!}{0!} = 1 \\
\frac{2!}{(2-1)!} &= 2 \\
\frac{3!}{(3-1)!} &= \frac{3!}{2!} = 3 \\
\frac{4!}{(4-1)!} &= \frac{4!}{3!} = 4,
\end{aligned}$$

podemos reescrever a primeira derivada da seguinte forma:

$$Q^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^4 \frac{j!}{(j-1)!} a_j x^{j-1}.$$

Analogamente, para $i = 2$ temos:

$$Q^{(2)}(x) = \sum_{j=2}^4 \frac{j!}{(j-2)!} a_j x^{j-2}.$$

Para $i = 3$,

$$Q^{(3)}(x) = \sum_{j=3}^4 \frac{j!}{(j-3)!} a_j x^{j-3}.$$

Para $i = 4$, temos:

$$Q^{(4)}(x) = \sum_{j=4}^4 \frac{j!}{(j-4)!} a_j x^{j-4}.$$

Agora provemos por indução a validade da expressão para $Q^{(i)}(x)$.

Verifiquemos se $Q^{(1)}(x)$ é válida.

$$\begin{aligned}
Q^{(1)}(x) &= [Q(x)]' = \\
&= \left(\sum_{j=0}^r a_j x^j \right)' = (a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_r x^r)' = \\
&= (a_1 x^{1-1} + (2)a_2 x^{2-1} + \dots + (r)a_r x^{r-1}) = \\
&= \frac{1!}{(1-1)!} a_1 x^{1-1} + \frac{2!}{(2-1)!} a_2 x^{2-1} + \dots + \frac{r!}{(r-1)!} a_r x^{r-1} = \\
&= \sum_{j=1}^r \frac{j!}{(j-1)!} a_j x^{j-1},
\end{aligned}$$

portanto $Q^{(1)}(x)$ é válida.

Hipótese de Indução: Suponhamos que a afirmação é válida para $i = k$, ou seja:

$$Q^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^r \frac{j!}{(j-k)!} a_j x^{j-k}.$$

Queremos provar que:

$$Q^{(k+1)}(x) = \sum_{j=k+1}^r \frac{j!}{(j-(k+1))!} a_j x^{j-(k+1)}.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
Q^{(k+1)}(x) &= (Q^{(k)}(x))' = \left(\sum_{j=k}^r \frac{j!}{(j-k)!} a_j x^{j-k} \right)' = \\
&= \left(\frac{k!}{(k-k)!} a_k x^{k-k} + \frac{(k+1)!}{((k+1)-k)!} a_{k+1} x^{(k+1)-k} + \dots + \frac{r!}{(r-k)!} a_r x^{r-k} \right)' = \\
&= (k+1-k) \frac{(k+1)!}{((k+1)-k)!} a_{k+1} x^{(k+1)-k-1} + \dots + (r-k) \frac{r!}{(r-k)!} a_r x^{r-k-1}.
\end{aligned}$$

Observemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{(k+1)!}{((k+1)-k)!} &= \frac{(k+1)!}{((k+1)-(k+1))!}, \\
\frac{r!}{(r-k)(r-(k+1))!} &= \frac{r!}{(r-(k+1))!}, \\
(r-k)! &= (r-k)(r-(k+1))!.
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
Q^{(k+1)}(x) &= \frac{(k+1)!}{((k+1)-(k+1))!} a_{k+1} x^{(k+1)-(k+1)} + \dots + \frac{r!}{(r-(k+1))!} a_r x^{r-(k+1)} = \\
&= \sum_{j=k+1}^r \frac{j!}{(j-(k+1))!} a_j x^{j-(k+1)}.
\end{aligned}$$

Logo vale a expressão para $Q^{(k+1)}(x)$, e dessa forma concluímos pelo Princípio de Indução Finita que é válida a sentença para $Q^{(i)}(x)$, $i \leq r$ e $r \in \mathbb{N}$. $\square$

Lema 5. *Sob o contexto do Lema 4, $\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x)$, para $i \geq p$, é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p .*

Demonstração. Substituindo $Q^{(i)}(x)$ dado no Lema 4, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x) &= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{j=i}^r \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i} = \\
&= \sum_{j=i}^r \frac{1}{(p-1)!} \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-1},
\end{aligned}$$

logo o polinômio dado acima possui coeficientes dados por:

$$b_j = \frac{1}{(p-1)!} \frac{j!}{(j-i)!} a_j.$$

Queremos mostrar que cada b_j é um número inteiro e divisível por p , ou seja, queremos mostrar existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b_j = pk$.

Para isso, observemos que $\frac{1}{(p-1)!} = \frac{p}{(p)!}$, logo $b_j = \frac{p}{p!} \frac{j!}{(j-i)!} a_j = p a_j \frac{j!}{p!(j-i)!}$.

Considerando $k = a_j \frac{j!}{p!(j-i)!}$, mostraremos que k é um número inteiro. Como já sabemos por hipótese do Lema 4, que $a_j \in \mathbb{Z}$, para mostrarmos que $k \in \mathbb{Z}$, basta vermos que $\frac{j!}{p!(j-i)!}$ é um número inteiro. Como $j \geq p$, segue que $j! \geq p!$. Assim,

$$\frac{j!}{p!(j-i)!} = \frac{j(j-1)(j-2) \dots (p+1)p!}{p!(j-i)!} = \frac{j(j-1)(j-2) \dots (p+1)}{(j-i)!},$$

que é um número inteiro. $\square$

Lema 6. *Consideremos o polinômio dado no Lema 2, como $P(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p \dots (n-x)^p$. Então $P(x)$ é da forma:*

$$P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{b_0}{(p-1)!}x^p + \dots$$

Demonstração. Notemos que:

$$\begin{aligned}
 (1-x)^p &= 1 + p(-x) + \dots + p(-x)^{p-1} + (-x)^p, \\
 (2-x)^p &= 2^p + p2^{p-1}(-x) + \dots + p2(-x)^{p-1} + (-x)^p, \\
 (3-x)^p &= 3^p + p3^{p-1}(-x) + \dots + p3(-x)^{p-1} + (-x)^p, \\
 &\vdots \\
 (n-x)^p &= n^p + pn^{p-1}(-x) + \dots + pn(-x)^{p-2} + (-x)^p.
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 P(x) &= \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1 + p(-x) + \dots + (-x)^p) \cdot \\
 &\quad \cdot (2^p + p2^{p-1}(-x) + \dots + (-x)^p) \cdot \\
 &\quad \cdot (3^p + p3^{p-1}(-x) + \dots + (-x)^p) \cdot \dots \\
 &\quad \cdot (n^p + pn^{p-1}(-x) + \dots + (-x)^p) \dots \\
 &= \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} (1 \cdot 2^p 3^p \dots n^p + p(-x)p2^{p-1}(-x) + p3^{p-1}(-x) + \dots + pn^{p-1}(-x) + \dots) = \\
 &= \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} ((n!)^p + x(-p - p2^{p-1} - p3^{p-1} - \dots - pn^{p-1}) + \dots) = \\
 &= \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} ((n!)^p + xb_0 + \dots) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{b_0 x^p}{(p-1)!} + \dots,
 \end{aligned}$$

onde $b_0 = -p - p2^{p-1} - p3^{p-1} - \dots - pn^{p-1}$.

Notemos que $P^{(i)}(k) = 0, k = 1, \dots, n, i < p$, pois analisando $P^{(i)}(x)$ para $x = k$, vemos que existem termos com sinais alternados, os quais quando agrupados resultam em zero. Vejamos ainda que:

$$P^{(p-1)}(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!} (p-1)! + \frac{b_0 x p!}{(p-1)!} + (\text{parcelas com a variável } x),$$

logo:

$$P^{(p-1)}(0) = (n!)^p + \frac{b_0 x p!}{(p-1)!} + (\text{parcelas com } x = 0) = (n!)^p.$$

Para $i < p-1$, todas as parcelas de $P^{(i)}(x)$ possuem a variável x , logo quando $x = 0$ $P^{(i)}(0) = 0$. $\square$

Lema 7. Se $d_i, i = 0, 1, \dots, r$ são inteiros tais que d_i , para $i \geq 1$ são divisíveis por p , e d_0 não é divisível por p , então $\sum_{i=0}^r d_i$ não é divisível por p .

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $\sum_{i=0}^r d_i$ seja divisível por p , ou seja,

$$\exists k \in \mathbb{Z} : \sum_{i=0}^r d_i = kp.$$

Como cada d_i é divisível por p , para $1 \leq i \leq r, \exists k_i \in \mathbb{Z} d_i = k_i p, 1 \leq i \leq r$. Assim,

$$kp = \sum_{i=0}^r d_i = d_0 + d_1 + \dots + d_r = d_0 + (k_1 p) + \dots + (k_r p) = d_0 + (k_1 + \dots + k_r) p$$

$$\Rightarrow d_0 = (kp) - (k_1 + \dots + k_r) p = (k - (k_1 + \dots + k_r)) p.$$

Como $L = (k - (k_1 + \dots + k_r)) \in \mathbb{Z}$ e $d_0 = Lp$, segue que d_0 é divisível por p , o que contraria o enunciado. $\square$

Lema 8. Seja $F(x)$ como definida no Lema 2. Então $F(k)$, para $k = 1, \dots, n$ é um inteiro divisível por p e $F(0)$ não é divisível por p .

Demonstração. Temos:

$$F(x) = P(x) + P'(x) + \dots + P^{(p)}(x).$$

Então:

$$F(0) = P(0) + P'(0) + \dots + P^{p-2}(0) + P^{p-1}(0) + P^p(0) = P^{p-1}(0) + P^p(0).$$

Observemos que:

$$P^p(x) = \frac{b_0 p!}{(p-1)!} + (\text{parcelas com a variável } x),$$

logo:

$$P^p(0) = \frac{b_0 p!}{(p-1)!} = b_0 p.$$

Assim, como sabemos que $P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$, segue que $F(0) = (n!)^p + b_0 p$, o qual não pode ser divisível por p , já que se o fosse teríamos que $(n!)^p$ também seria, o que é absurdo pois $p > n$ e p é primo.

Agora,

$$\begin{aligned} F(0) = kp &\Rightarrow (n!)^p = kp - b_0p = p(k - b_0) \\ \Rightarrow (n!)^p &= (n(n-1)(n-2)\dots 2.1)^p = n^p(n-1)^p(n-2)^p\dots 2^p. \end{aligned}$$

Notemos que nenhum termo deste produto é divisível por p . Por exemplo, se n^p o fosse, existiria $L \in \mathbb{Z} : n^p = Lp \Rightarrow nn\dots n = Lp \Rightarrow L = \frac{n \cdot n \dots n}{p}$, o qual não é um número inteiro, já que $p > n$ e p é primo.

Mostremos agora que $F(k), k \in 1, \dots, n$, é um inteiro divisível por p . Sabemos que:

$$F(k) = P(k) + P'(k) + \dots + P^{(p-1)}(k) + P^p(k) = P^p(k). \quad (4.19)$$

Pelo Lema 5, $P^p(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p . Substituindo $x = k, k \in 1, \dots, n$ temos que: $P^p(k)$ é uma soma cuja as parcelas são todas inteiras e divisíveis por p , conseqüentemente $P^p(k)$ é um inteiro divisível por p . Portanto por (4.19), $F(k)$ é divisível por p . $\square$

Lema 9. *O número $c_0F(0) + c_1F(1) + \dots + c_nF(n)$, onde os coeficientes c_i 's são inteiros e $0 < c_0 < p$, é um inteiro não divisível por p .*

Demonstração. Pelo Lema 8, temos que $F(k)$ para $k = 1, \dots, n$ é um inteiro divisível por p e $F(0)$ é um inteiro não divisível por p . Conseqüentemente como $c_k \in \mathbb{Z}, d_k = c_kF(k)$ para $k = 1, \dots, n$ é um inteiro divisível por p e $d_0 = c_0F(0)$ é um inteiro não divisível por p , já que $0 < c_0 < p$. Logo, pelo Lema 7, segue que $\sum_{k=0}^n d_k$ não é divisível por p .

Como $\sum_{k=0}^n d_k = d_0 + d_1 + \dots + d_n = c_0F(0) + c_1F(1) + \dots + c_nF(n)$, vemos que $c_0F(0) + c_1F(1) + \dots + c_nF(n)$ é um inteiro não divisível por p . $\square$

Lema 10. *Seja A_k como definido na demonstração do Lema 3. Então:*

$$|A_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}, \text{ para } k \leq n.$$

Demonstração. Observemos que os A_k definidos no Lema (3), calculados para o polinômio $P(x)$ definido no Lema (6), têm a forma:

$$A_k = -ke^{k(1-\theta k)} \frac{1}{(p-1)!} (k\theta k)^{p-1} (1 - k\theta k)^p \dots (n - k\theta k)^p, 0 < \theta < 1.$$

Então,

$$\begin{aligned}
|A_k| &= \left| -ke^{k(1-\theta_k)} \frac{1}{(p-1)!} (k\theta_k)^{p-1} (1-k\theta_k)^p \dots (n-k\theta_k)^p \right| = \\
&= \frac{1}{(p-1)!} | -k | |e^{k(1-\theta_k)}| |(k\theta_k)^{p-1}| |(1-k\theta_k)^p| \dots |(n-k\theta_k)^p| \leq \\
&\leq \frac{1}{(p-1)!} ne^{n(1-\theta_k)} |n\theta_k|^{p-1} |1-\theta_k|^p \dots |n-\theta_k|^p \leq \\
&\leq \frac{1}{(p-1)!} ne^n n^{p-1} = \frac{e^n n^p}{(p-1)!} \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}.
\end{aligned}$$

□

Lema 11. *Se p for um número primo suficiente grande, então $|c_1 A_1 + \dots + c_n A_n| < 1$.*

Demonstração. De fato, temos:

$$\begin{aligned}
|c_1 A_1 + \dots + c_n A_n| &\leq |c_1 A_1| + \dots + |c_n A_n| \leq |c_1| \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} + \dots + |c_n| \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} = \\
&(|c_1| + \dots + |c_n|) \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}.
\end{aligned}$$

Para p um número primo suficientemente grande, vemos que:

$$|c_1 A_1 + \dots + c_n A_n| \leq (|c_1| + \dots + |c_n|) \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} < 1.$$

□

Teorema 13. *O número e é transcendente.*

Demonstração. Pelo Corolário 1, se existem inteiros $c_0, c_1, \dots, c_n$ com $c_0 > 0$ e tais que $c_n e^n + \dots + c_1 e + c_0 = 0$, então $c_0 F(0) + \dots + c_n F(n) = c_1 A_1 + \dots + c_n A_n$, e pelo Lema 9, segue que $c_0 F(0) + \dots + c_n F(n)$ é um número inteiro não divisível por p . Porém, pelo Lema 11, vemos que, nessas mesmas condições, $|c_1 A_1 + \dots + c_n A_n| < 1$, o que é absurdo, já que um número inteiro não nulo tem módulo sempre maior ou igual que 1. Este absurdo mostra que e não é um número algébrico. □

3.5 Transcendência de π

A relação entre a quadratura do círculo e a transcendência de π é um tópico fascinante na história da matemática. A quadratura do círculo é o problema de tentar construir,

usando apenas um compasso e uma régua sem marcação, um quadrado com a mesma área que um dado círculo. Este problema é muito antigo e intrigou matemáticos por séculos.

A chave para entender a relação com a transcendência de π está no fato que, se fosse possível realizar a quadratura do círculo, então π teria que ser um número algébrico (ou seja, a solução de uma equação polinomial com coeficientes inteiros). No entanto, segundo [5], em 1882 o matemático alemão Ferdinand von Lindemann provou que π é um número transcendente, o que significa que ele não é a solução de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. Como resultado, a quadratura do círculo com métodos geométricos puros (compasso e régua) é impossível, pois exigiria a construção de um número transcendente, algo que essas ferramentas geométricas simples não podem fazer. Para demonstrar a transcendência de π , necessitamos de determinados resultados sobre Análise Complexa. Faremos aqui um resumo das principais ideias contidas na demonstração, utilizando como referência os trabalhos de [5] e [14].

Recordemos o Teorema do Valor Médio para funções reais, a saber: seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Suponhamos que a derivada $f'(x)$ existe para todo x no intervalo aberto (a, b) . Então existe λ com $0 < \lambda < 1$ tal que:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(a + \lambda(b - a)).$$

Para obtermos um teorema de valor médio para funções complexas, utilizaremos fatos sobre funções de duas variáveis. Representamos por $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, isto é, números da forma $z = x + iy$, onde $x, y \in \mathbb{R}$. Uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tem derivada no ponto z se o limite abaixo existe:

$$f'(z) = \lim_{z_0 \rightarrow 0} \frac{f(z + z_0) - f(z)}{z_0}, \quad (5.20)$$

onde $z_0 \in \mathbb{C}$. Se uma função f tiver derivadas em todos os pontos de $\mathbb{C}$, então dizemos que ela é analítica em $\mathbb{C}$. Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ as partes real e imaginária de $f(z)$, isto é,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \text{ onde } z = x + iy. \quad (5.21)$$

Suponhamos que $f(z)$ seja uma função analítica em $\mathbb{C}$ e calcularemos a derivada (5.20) utilizando valores reais para z_0 , $z_0 = h$:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h},$$

ou seja:

$$f'(z) = u_x(x, y) + i v_x(x, y), \quad (5.22)$$

onde u_x representa a derivada de $u(x, y)$ com relação à primeira variável, e u_y com relação à segunda. A seguir calculamos a derivada (5.20) utilizando valores imaginários puros para z_0 , $z_0 = ik$:

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{ik} + i \lim_{k \rightarrow 0} \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{ik}, \quad (5.23)$$

ou seja,

$$f'(z) = -i u_y(x, y) + v_y(x, y).$$

Utilizando (5.22) e (5.23), obtemos as equações de Cauchy-Riemann,

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), u_y(x, y) = -v_x(x, y),$$

para qualquer $z = x + iy$ em $\mathbb{C}$.

Logo vemos que se f for analítica em $\mathbb{C}$, então as equações de Cauchy-Riemann valem em qualquer ponto de $\mathbb{C}$. Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ for uma função analítica em $\mathbb{C}$ e se z_2 e z_1 forem números complexos, não é verdade, em geral, que exista $\lambda, 0 < \lambda < 1$, tal que:

$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1) f'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1)). \quad (5.24)$$

Podemos ver isso por meio de um contraexemplo.

Seja $P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)$, cujas raízes são $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i, z_3 = -1 + i, z_4 = -1 - i$. Aplicando (5.24) aos pares de pontos $(z_1, z_2), (z_2, z_3), (z_3, z_4), (z_4, z_1)$, concluímos que $P'(z)$ teria 4 raízes distintas. Isso, porém, é uma contradição, pois o Teorema Fundamental da Álgebra que diz que um polinômio de grau 3 tem exatamente 3 raízes complexas. Portanto, temos que abrir mão da igualdade no teorema do valor médio. O que vale é:

Teorema 14. *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Então:*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq 2|z_2 - z_1| \sup \{|f'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1))| : 0 \leq \lambda \leq 1\} \quad (5.25)$$

onde $|z|$ representa o módulo do complexo $z = x + iy$, isto é, $|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}$.

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que:

$$|f(z_0) - f(0)| \leq 2|z_0| \sup \{|f'(\lambda z_0)| : 0 \leq \lambda \leq 1\}. \quad (5.26)$$

Isso feito, (5.25) segue pela aplicação de (5.26) à função $g(z) = f(z + z_1)$ e ao ponto $z_0 = z_2 - z_1$. Sejam u e v as partes real e imaginária de $f(z)$. Dado $z_0 = x_0 + iy_0$, defina as funções $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pelas expressões:

$$\phi(\lambda) = u(\lambda x_0, \lambda y_0),$$

$$\psi(\lambda) = v(\lambda x_0, \lambda y_0).$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio às funções reais ϕ e ψ , obtemos:

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\lambda_1), 0 < \lambda_1 < 1, \quad (5.27)$$

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\lambda_2), 0 < \lambda_2 < 1. \quad (5.28)$$

Obtemos, de (5.27) e (5.28),

$$u(x_0, y_0) - u(0, 0) = u_x(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0) x_0 + u_y(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0) y_0,$$

$$v(x_0, y_0) - v(0, 0) = v_x(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0) x_0 + v_y(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0) y_0,$$

e daí:

$$\begin{aligned} f(z_0) - f(0) &= \\ &= u_x(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0) x_0 + u_y(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0) y_0 + i \{v_x(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0) x_0 + v_y(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0) y_0\} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Vamos agora aplicar a desigualdade:

$$|z| \leq |x| + |y|.$$

Além disso, conforme estabelecido pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

Quando aplicamos essas duas desigualdades a (5.29), chegamos ao seguinte resultado, onde a_1, a_2, b_1, b_2 são números reais quaisquer:

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \sqrt{u_x^2(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0) + u_y^2(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ + \sqrt{v_x^2(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0) + v_y^2(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)} \sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \quad (5.30)$$

Devido às equações (5.23) e (5.24) e às equações de Cauchy-Riemann, os termos com radicais na expressão (5.30), que incluem as funções u e v , correspondem exatamente ao módulo de f' calculado em pontos específicos, ou seja,

$$|f(z_0) - f(0)| \leq |f'(\lambda_1 z_0)| |z_0| + |f'(\lambda_2 z_0)| |z_0|.$$

Isso leva diretamente à dedução da equação (5.26). Portanto, com esse resultado, o Teorema (14) está demonstrado. $\square$

Com esses resultados exibidos, iremos demonstrar a transcendência de π .

Teorema 15. *O número π é transcendente.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que π seja um número algébrico, ou seja, que satisfaz (4.16).

Portanto, $i\pi$, onde $i = \sqrt{-1}$, seria expresso como um produto de dois números algébricos. Isso implicaria que $i\pi$ é uma raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros:

$$P_1(x) = 0. \quad (5.31)$$

Vamos denotar as raízes da equação (5.31) por $\alpha_1 = i\pi, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Dado que $e^{i\pi} = -1$, podemos inferir que:

$$\prod_{j=1}^n (1 + e^{\alpha_j}) = 0. \quad (5.32)$$

Se expandirmos o produto mencionado na equação (5.32), obteremos uma expressão que segue o padrão: $1 +$ uma soma de termos exponenciais com expoentes que são:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (5.33)$$

$$\alpha_i + \alpha_j, \quad \text{para todos } i < j \quad (5.34)$$

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k, \quad \text{para todos } i < j < k \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \alpha_1 + \dots + \alpha_n. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Observemos que em (5.33) o número de termos é n , enquanto em (5.34) o número de termos é: $\binom{n}{2}$, em (5.35) é $\binom{n}{3}$, ..., em (5.36) é $\binom{n}{n} = 1$, em que $\binom{n}{m}$ são os coeficientes binomiais, isto é, $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ para $0 \leq m \leq n$.

A partir da constatação de que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ satisfaz uma equação polinomial de grau n com coeficientes inteiros, segue que:

- Os números em (5.34) satisfazem uma equação polinomial de grau $\binom{n}{2}$ com coeficientes inteiros,

$$P_2(x) = 0. \quad (5.37)$$

- Os números mencionados na equação (5.35) são raízes de uma equação polinomial de grau $\binom{n}{3}$ com coeficientes inteiros,

$$P_3(x) = 0.$$

E assim sucessivamente.

Portanto, os números listados nas equações (5.33) até (5.36) são soluções de uma equação polinomial,

$$P_1(x) \cdot \dots \cdot P_n(x) = 0, \quad (5.38)$$

com coeficientes inteiros e de grau $n + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$. Alguns dos números nas equações (5.33) a (5.36) podem ser nulos. Vamos supor que m deles sejam diferentes de zero e os representemos como $\beta_1, \dots, \beta_m$. Logo, simplificando de (5.38) os fatores da forma x^q , para $q > 0$, caso haja, (e haverá se $2^n - 1 > m$), obtemos que $\beta_1, \dots, \beta_m$ são raízes de uma equação na forma:

$$R(x) = cx^m + c_{m-1}x^{m-1} + \dots + c_1x + c_0 = 0, \quad (5.39)$$

sendo que os coeficientes são inteiros.

A seguir, efetuamos o produto em (5.32) e obtemos:

$$k + e^{\beta_1} + \dots + e^{\beta_m} = 0. \quad (5.40)$$

Consideremos o polinômio:

$$P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!} x^{p-1} (R(x))^p, \quad (5.41)$$

onde s é igual a $mp - 1$ e p é um número primo que será escolhido mais tarde. O grau de P é igual a $r = s + p$. Agora, consideremos:

$$F(x) = P(x) + P'(x) + \dots + P^{(s+p)}(x). \quad (5.42)$$

Segue que:

$$\frac{d}{dx} (e^{-x} F(x)) = -e^{-x} P(x). \quad (5.43)$$

Ao utilizar o Teorema (14) para a função $f(z) = e^{-z} F(z)$, obtemos:

$$|e^{-\beta_j} F(\beta_j) - F(0)| \leq 2 |\beta_j| \sup \{ |e^{-\lambda \beta_j} P(\lambda \beta_j)| : 0 \leq \lambda \leq 1 \}, \quad (5.44)$$

para $j = 1, \dots, m$. Fazendo:

$$\varepsilon_j = 2 |\beta_j| \sup \{ |e^{(1-\lambda)\beta_j} P(\lambda \beta_j)| : 0 \leq \lambda \leq 1 \}, \quad (5.45)$$

obtemos de (5.44) que:

$$|F(\beta_j) - e^{\beta_j} F(0)| \leq \varepsilon_j. \quad (5.46)$$

Utilizando (5.40) junto com a expressão (5.46) para $j = 1, \dots, m$ obtemos:

$$\left| kF(0) + \sum_{j=1}^m F(\beta_j) \right| \leq \sum_{j=1}^m \varepsilon_j. \quad (5.47)$$

Agora, mostremos que o lado esquerdo da equação (5.47) é um número inteiro não nulo, enquanto o lado direito pode se tornar menor que 1 escolhendo um valor adequado para p .

Para isso, vamos calcular as derivadas de $P(x)$ nos pontos $0, \beta_1, \dots, \beta_m$. O polinômio $P(x)$, conforme definido na equação (5.41), tem o seguinte formato:

$$P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!} \{c_0^p x^{p-1} + bx^p + \dots\}.$$

Logo,

$$P^{(i)}(0) = 0, \quad \text{para } i < p-1, \text{ e } P^{(p-1)}(0) = c^s c_0^p. \quad (5.48)$$

Por outro lado, podemos deduzir a partir de (5.41) que:

$$P^{(i)}(\beta_j) = 0, \quad i < p, \quad j = 1, \dots, m, \quad (5.49)$$

uma vez que nas derivadas $P^{(i)}(x)$, onde $i < p$, a expressão $R(x)$ é um fator comum e $R(\beta_j) = 0$.

Portanto, ao considerar as derivadas de ordem $i \geq p$ a partir da equação (5.41), podemos concluir que os coeficientes de:

$$P^{(i)}(x), i \geq p, \quad (5.50)$$

são números inteiros divisíveis por pc^s .

De (5.48) e (5.50) obtemos:

$$F(0) = c^s c_0^p + pc^s k_0. \quad (5.51)$$

Aqui, k_0 é um número inteiro, e o seu valor não é relevante para o nosso objetivo. No caso dos outros valores $F(\beta_j)$, notamos que:

$$\sum_{j=1}^m F(\beta_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i \geq p} P^{(i)}(\beta_j) = \sum_{i \geq p} \sum_{j=1}^m P^{(i)}(\beta_j). \quad (5.52)$$

Agora, na expressão:

$$\sum_{j=1}^m P^{(i)}(\beta_j), \quad (5.53)$$

para cada valor de i no intervalo fixado, com $p \leq i \leq s+p$, a expressão (5.50) estabelece que os coeficientes do polinômio $P^{(i)}$ são inteiros e divisíveis por pc^s . Além disso, dado

que P tem um grau de $s+p$, podemos concluir que $P^{(i)}$ tem grau $s+p-i \leq s$, pois $p \leq i$. Portanto, a expressão (5.53) pode ser reformulada como:

$$\sum_{j=1}^m P^{(i)}(\beta_j) = pc^s Q(\beta_1, \dots, \beta_m), \quad (5.54)$$

onde $Q(\beta_1, \dots, \beta_m)$ é um polinômio de grau menor ou igual a s , com coeficientes inteiros. Notemos ainda que $Q(\beta_1, \dots, \beta_m)$ é um polinômio simétrico nos β_i 's. Logo, pelo Teorema (5), existe um polinômio $G(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, de grau menor do que ou igual a s , com coeficientes inteiros e onde $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ são os polinômios simétricos elementares em $\beta_1, \dots, \beta_m$, tal que:

$$Q(\beta_1, \dots, \beta_m) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_m). \quad (5.55)$$

Por outro lado, temos:

$$\sigma_1 = c^{-1}c_{m-1}, \quad \sigma_2 = c^{-1}c_{m-2}, \dots, \quad \sigma_m = c^{-1}c_0. \quad (5.56)$$

Logo, de (5.54), (5.55), e (5.56) segue que a expressão (5.53) é um número inteiro divisível por p . Voltando a (5.52) concluimos que:

$$\sum_{j=1}^m F(\beta_j) = pK_1. \quad (5.57)$$

Nesse contexto, K_1 é um número inteiro, e seu valor não tem relevância para nossos objetivos. Continuando, e utilizando (5.51) e (5.57), podemos concluir que o lado esquerdo da expressão (5.47) é um número inteiro com a seguinte forma:

$$|kc^s c_0^p + pK| \quad (5.58)$$

Aqui, o valor de K é dado por $K = c^s k_0 + K_1 l$. Agora, selecionamos um número primo p de tal forma que ele seja maior do que k , c , e c_0 . Como resultado, o inteiro indicado em (5.58) não é um divisível por p , e, portanto, é um número inteiro não nulo.

Para concluir a demonstração, necessitamos fazer a estimativa do termo do lado direito de (5.47). Seja:

$$M = \max(|\beta_1|, \dots, |\beta_m|).$$

Logo,

$$\varepsilon_j \leq 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} \sup \{ |\lambda\beta_j|^{p-1} |R(\lambda\beta_j)|^p : 0 \leq \lambda \leq 1 \} \quad (5.59)$$

onde usamos que $0 \leq \lambda \leq 1$. Seja a seguir:

$$N = \max \{ |R(z)| : |z| < m \},$$

a qual usada em (5.59) produz o seguinte resultado:

$$\varepsilon_j \leq 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} M^{p-1} N^p.$$

Como o fatorial domina qualquer exponencial, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{n!} = 0,$$

para qualquer $A > 0$, segue que, para p suficientemente grande, podemos fazer $\varepsilon_j < \frac{1}{m+1}$.

Logo,

$$\sum_{j=1}^m \varepsilon_j \leq \frac{m}{m+1} < 1. \quad (5.60)$$

A expressão (5.60), considerando também que o lado esquerdo de (5.47) é um número inteiro não nulo, leva a uma contradição. Portanto, concluímos que π é um número transcendente. $\square$

CONSIDERAÇÕES

Este trabalho de conclusão de curso teve como objetivo estudar alguns problemas da Teoria dos Números que utilizam ferramentas de Análise Matemática na sua solução, destacando a interligação entre essas subáreas da Matemática. Para isso, foram abordados os números π e e , dois números fundamentais na Matemática, sob três aspectos: suas origens e história, suas representações matemáticas e suas propriedades. A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica, que permitiu acessar as contribuições históricas e as descobertas mais recentes sobre esses números. Além disso, foi feito um esforço para simplificar a linguagem e elaborar demonstrações passo a passo, visando facilitar o aprendizado dos alunos de graduação.

A pesquisa realizada permitiu compreender melhor a essência desses números, bem como suas aplicações e implicações em diversas áreas da Matemática. Também permitiu evidenciar a importância da Análise Matemática para resolver problemas referentes a números inteiros, que são o objeto de estudo da Teoria dos Números. Assim, o trabalho contribuiu para o amadurecimento do pesquisador e para a divulgação do conhecimento matemático.

Como sugestão para trabalhos futuros, pode-se aprofundar o estudo de outros números importantes na Matemática, como os números de Fibonacci, os números primos e os números complexos. Também pode-se explorar outras ferramentas de Análise Matemática, como as séries de Fourier, as equações diferenciais e as funções analíticas. Dessa forma, espera-se que o trabalho possa estimular o interesse e a curiosidade dos alunos de graduação pela Matemática e pela sua história.

BIBLIOGRAFIA

- [1] APOSTOL, T. M. A proof that Euler Missed: Evaluating $\zeta(2)$ the Easy Way. **The Mathematical Intelligencer**, v. 5, n. 3, Springer-Verlag New York, 1983. Disponível em: <https://fermatslibrary.com/s/a-proof-that-euler-missed>. Acesso em: 26 mai. 2023.
- [2] BARROS, R. L., SÁ, P. F. Incrível história do número pi. **Revista História da Matemática para Professores**, v. 8, n. 1, p. 1–11, 2022. Disponível em: <https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/80>. Acesso em: 10 ago. 2022.
- [3] DIA do pi: para que se usa a mais famosa constante matemática. **BBC News Brasil**, São Paulo, 01 dez. 2016. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-43405566>. Acesso em: 07 set. 2023.
- [4] EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. D. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- [5] FIGUEIREDO, D. G. de. **Números irracionais e transcendentos**. 3^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [6] GAYO, J., PROBST, R. O problema que tornou Euler famoso. **Ciência e Natura**, v. 37, p. 342-355, 2015.
- [7] GUGERELL, P. Wikimedia Commons, 2011 Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:U1_Karlsplatz_Kunst_Factoid_Pi.jpg. Acesso em: 19 nov. 2023.

- [8] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo: Volume 3**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, 2013.
- [9] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo: Volume 1**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, 2013.
- [10] LIMA, E. L. **Análise real**: funções de uma variável. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [11] LIMA, P. R. de. Uma prova de que π é irracional. **Blog Manthano**, 20 dez. 2012. . Disponível em: https://manthanos.blogspot.com/2012/12/uma-prova-de-que-e-irracional_20.html. Acesso em: 20 out. 2023.
- [12] NIVEN, I. A simple proof that is irrational. **Pi: A Source Book**, 1997.
- [13] NUNES, D. **O relógio alfabético do π #matemática**. Disponibilidade e acesso. Disponível no canal Tem Ciência. 17 mar. 2023. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=XfRCeutlgZo>. Acesso em: 16 nov. 2023.
- [14] OLIVEIRA, J. M. de. **A Irracionalidade e Transcendência do Número π** . Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2013.
- [15] ONODY, R. N. O número Pi com 62,8 trilhões de casas decimais. **IFSC**, São Paulo, 20 out. 2021. Disponível em: [https://www2.ifsc.usp.br/portal-ifsc/o-numero-pi-com-628-trilhoes-de-casas-decimais\\$](https://www2.ifsc.usp.br/portal-ifsc/o-numero-pi-com-628-trilhoes-de-casas-decimais$). Acesso em: 24 out. 2022.
- [16] SILVA, D. de O. **Um estudo elementar das identidades algébricas e aplicações em polinômios simétricos em 2 e 3 variáveis**. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Arapiraca, 2021.
- [17] SILVA, S. D. da. **Estudo do Binômio de Newton**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2013.
- [18] VASCONCELOS, G. de A. **A Irracionalidade e Transcendência do Número e** . Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2013.

- [19] WILSON, R., Euler's pioneering equation: The most beautiful theorem in mathematics. 1^a Edição. Oxford University Press. p. 128-152, 2018.
- [20] ZAHN, M. **Sequências e séries**. [s.l.]: [s.n.], 2017. Disponível em: $\langle$ https://wp.ufpel.edu.br/zahn/files/2017/04/seq_ser.pdf $\rangle$. Acesso em: 11 out. 2023.