

LEODAN ACUÑA TORRES

Tipos de Holomorfia em Espaços de Banach



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2014

LEODAN ACUÑA TORRES

Tipos de Holomorfia em Espaços de Banach

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

T693t Torres, Leodan Acuña, 1985-
2014 Tipos de holomorfia em Espaços de Banach / Leodan Acuña Torres.
- 2014.
97 f.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Banach, Álgebra de - Teses. 3. Polinômios
- Teses. I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo. II. Universidade
Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III.
Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO(A): Leodan Acuña Torres.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11312MAT006.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Tipos de Holomorfia em Espaços de Banach.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 4 de dezembro de 2014, às 10h 00min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME

ASSINATURA

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Profª. Dra. Mary Lilian Lourenço
IME-USP - Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Jamílson Ramos Campos
UFPB - Universidade Federal da Paraíba

Uberlândia-MG, 4 de dezembro de 2014.

Dedicatória

A mi hermano Duberly Acuña Torres.

Agradecimentos

A meu orientador Geraldo Márcio de Azevedo Botelho por seus ensinamentos quando eu precisava. A minha namorada Karine Santos e a todos meus amigos, em especial Renato Tolentino, Nathy, Eduard, Nancy, José Bravo, Manuel, José Mendoza e Carlitos. Muito obrigado por tudo.

Torres, L. A. *Tipos de Holomorfia em Espaços de Banach*. 2014. 86 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é estudar a teoria de tipos de holomorfia entre espaços de Banach, principalmente a diferenciação de tipos de holomorfia e a relação que existe entre tipos de holomorfia globais e ideais de polinômios homogêneos. Para isso estudamos primeiramente aplicações multilineares e polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach. Em seguida definimos e damos vários exemplos de tipos de holomorfia. Na sequência estudamos a diferenciação de tipos de holomorfia como uma forma de exibir novos tipos de holomorfia a partir de um tipo dado e também fazemos um breve estudo sobre funções holomorfas associadas a um tipo de holomorfia. Por fim mostramos que todo ideal de Banach de polinômios com a propriedade (B) é um tipo de holomorfia global e que, no caso complexo, um ideal fechado de polinômios é um tipo de holomorfia global se, e somente se, o ideal tem a propriedade (B). Finalizamos a dissertação provando que, surpreendentemente, no caso real nenhum ideal fechado de polinômios tem a propriedade (B).

Palavras-chave: espaços de Banach, polinômios homogêneos contínuos, função holomorfa, tipo de holomorfia, diferenciação de tipos de holomorfia, ideais de polinômios homogêneos contínuos.

Torres, L. A. *Holomorphy Types in Banach Spaces*. 2014. 86 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The main purpose of this dissertation is to study the theory of holomorphy types between Banach spaces, mainly the differentiation of holomorphy types and the interplay between holomorphy types and ideals of homogeneous polynomials. To do so we first study continuous multilinear mappings and homogeneous polynomials between Banach spaces. Then we define and give examples of holomorphy types. Next we study the differentiation of holomorphy types as a method to generate new holomorphy types from a given one and we briefly study holomorphic functions associated to a given holomorphy type. Finally we show that every Banach ideal of homogeneous polynomials with property (B) is a holomorphy type and that, in the complex case, a closed ideal of polynomials is a holomorphy type if and only if it has property (B). We finish the work proving that, surprisingly, in the real case no closed ideal of polynomials has property (B).

Keywords: Banach spaces, continuous homogeneous polynomials, holomorphic function, holomorphy types, differentiation of holomorphy types, ideals of continuous homogeneous polynomials.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais.
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos.
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
X, Y	espaços metricos.
$E_1, \dots, E_m, E$ e F	espaços vetoriais ou espaços vetoriais normados ou espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$.
$Im(f)$	imagem da aplicação f .
$ker(f)$	núcleo da aplicação f .
$L(E_1, \dots, E_m; F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações multilineares de $E_1 \times \dots \times E_m$ em F .
E^*	dual algébrico do espaço vetorial E .
E'	dual topológico do espaço vetorial E .
Id_E	operador identidade definido em E .
$L(E_1, \dots, E_m; F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações multilineares de $E_1 \times \dots \times E_m$ em F .
$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações multilineares contínuas de $E_1 \times \dots \times E_m$ em F .
$(\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F), \ \cdot\)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações multilineares contínuas de $E_1 \times \dots \times E_m$ em F munido com a norma usual do sup.
$L(^n E; F)$	$L(E, (^n \cdot), E; F)$.
$\mathcal{L}(^m E; F)$	$\mathcal{L}(E, (^m \cdot), E; F)$.
$L^s(^n E; F)$	subespaço vetorial de $L(^n E; F)$ das aplicações multilineares simétricas.
$\mathcal{L}^s(^m E; F)$	subespaço vetorial de $\mathcal{L}(^m E; F)$ das aplicações multilineares simétricas.
$L_f(E_1, \dots, E_n; F)$	subespaço vetorial de $L(E_1, \dots, E_n; F)$ das aplicações n -lineares de tipo finito.
$L_{\mathfrak{f}}(E_1, \dots, E_n; F)$	subespaço vetorial de $L(E_1, \dots, E_n; F)$ das aplicações n -lineares de posto finito.

$P(^mE; F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m -homogêneos de E em F .
$\mathcal{P}(^mE; F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m -homogêneos contínuos de E em F .
$P_f(^mE; F)$	conjunto dos polinômios m -homogêneos de tipo finito de E em F .
$P_{\mathfrak{F}}(^mE; F)$	conjunto dos polinômios m -homogêneos de posto finito entre os espaços vetoriais E e F .
$(\mathcal{P}(^mE; F), \ \cdot\)$	espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m -homogêneos contínuos que aplicam E em F munido com a norma usual do sup.
$(\mathcal{L}^s(^mE; F), \ \cdot\)$	subespaço vetorial normado de $(\mathcal{L}(^mE; F), \ \cdot\)$ das aplicações multilineares simétricas.
$(\mathcal{P}_{\Theta}(^mE; F); \ \cdot\ _{\Theta})_{m=0}^{\infty}$	tipo de holomorfia de E em F .
$\mathcal{P}_N(^mE; F)$	polinômios m -homogêneos nucleares de E em F .
$\mathcal{P}_A(^mE; F)$	polinômios m -homogêneos aproximáveis de E em F .
$\mathcal{H}(U; F)$	conjunto de todas as funções holomorfas de U em F .
$\mathcal{H}_{\Theta}(U; F)$	o subespaço vetorial de $\mathcal{H}(U; F)$ formado pelas funções Θ -tipo de holomorfia em U .
$\mathcal{I}$	ideal de operadores.
$\mathcal{M}$	ideal de aplicações multilineares.
$\mathcal{Q}$	ideal de polinômios homogêneos contínuos.
$\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$	ideal de polinômios gerado pelo ideal $\mathcal{M}$.
$\ell_p(E)$	o espaço Banach das sequências absolutamente p -somantes.
$\ell_p^w(E)$	o espaço Banach das sequências fracamente p -somantes.
$\mathcal{L}_{as(p; q_1, \dots, q_n)}(E_1, \dots, E_n; F)$	o espaço vetorial de todas as aplicações multilineares absolutamente $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somantes de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F .

SUMÁRIO

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Símbolos	ix
Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Aplicações multilineares	3
1.2 Polinômios homogêneos	14
1.3 Alguns resultados sobre séries	17
2 Tipos de Holomorfia	21
2.1 Funções holomorfas	21
2.2 Tipos de holomorfia	24
2.3 Exemplos de tipos de holomorfia	26
2.4 Funções holomorfas associadas a um tipo de holomorfia	35
3 Diferenciação de Tipos de Holomorfia	38
3.1 Resultados preliminares	38
3.2 Diferenciação de tipos de holomorfia	50
3.3 Funções holomorfas associadas ao tipo de holomorfia diferenciado	56
4 Tipo de Holomorfia Global e Ideais de Polinômios	61
4.1 Tipo de holomorfia global	61
4.2 Exemplos e contraexemplos	67
4.3 Propriedade (B) e tipos de holomorfia	69
4.4 A propriedade (B)-polinomial	75
Referências Bibliográficas	84

INTRODUÇÃO

Classes especiais de polinômios homogêneos entre espaços de Banach começaram a ser estudados, no âmbito da holomorfia em dimensão infinita, no início da década de 1960. No final desta mesma década, L. Nachbin introduziu em [27] a definição de tipo de holomorfia entre espaços de Banach com o propósito de unificar o estudo dessas classes de polinômios que vinham sendo estudadas individualmente. Paralelamente, como uma consequência natural do sucesso da teoria de ideais de operadores lineares, em 1983 A. Pietsch em [31] introduziu a noção de ideais de aplicações multilineares, que foi adaptada imediatamente para polinômios homogêneos. O primeiro registro de polinômios homogêneos estudados sob a perspectiva de ideais é a tese de H.A.-Braunss [10] de 1984. O fato de classes de polinômios serem estudadas a partir dessas duas abordagens explica-se pelo fato de polinômios homogêneos estarem a meio caminho entre operadores lineares e funções holomorfas.

As duas abordagens descritas acima foram exploradas por muitos anos por vários autores, até que, em 2006, Botelho, Braunss, Junek e Pellegrino [7] estabeleceram a conexão entre tipos de holomorfia e ideais de polinômios homogêneos por meio da chamada *propriedade (B)*. O objetivo principal desta dissertação é estudar e descrever os principais resultados de [7], evidenciando a interação entre tipos de holomorfia e ideais de polinômios homogêneos. Um segundo objetivo é apresentar demonstrações completas e detalhadas dos resultados relativos a diferenciação de tipos de holomorfia que aparecem em [27]. Trata-se de uma técnica de se obter novos tipos de holomorfia a partir de um tipo de holomorfia dado usando diferenciação. As demonstrações que aparecem em [27] são apenas esboçadas e com passagens muito pouco justificadas. Pretende-se aqui detalhar e justificar essas demonstrações.

A dissertação está estruturada da seguinte maneira:

- No Capítulo 1 apresentamos a teoria de aplicações multilineares e polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach, com ênfase nos resultados que serão úteis ao longo da dissertação. Alguns resultados sobre séries em espaços de Banach também são estudados. As principais referências usadas neste capítulo foram [2], [5], [9] e [34].
- No Capítulo 2 introduzimos a definição de tipo de holomorfia e damos alguns exemplos ilustrativos. Também introduzimos e exploramos a noção de função holomorfa associada

a um tipo de holomorfia, igualmente introduzida por Nachbin [27]. As referências usadas neste capítulo são [21], [25] e [27].

- No Capítulo 3 apresentamos em detalhes a técnica de diferenciação de tipos de holomorfia e também estudamos as funções holomorfas associadas ao tipo de holomorfia diferenciado. Para fazer este estudo precisamos de vários resultados da teoria de funções holomorfas e uma seção inicial é dedicada à obtenção desses resultados preparatórios. Este capítulo baseia-se, principalmente, em [25] e [27].

- No Capítulo 4 apresentamos os resultados que relacionam tipos de holomorfia aos ideais de polinômios. Primeiramente estudamos ideais de aplicações multilineares e a propriedade (B). Em seguida, a partir do conceito de tipo de holomorfia global, completamos a relação das duas noções por meio da propriedade (B)-polinomial. As referências mais importantes para o estudo empreendido neste capítulo são [1], [5], [13], [14], [20], [29], [32], [33].

Leodan Acuña Torres
Uberlândia-MG, 4 de dezembro de 2014.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos a teoria básica de aplicações multilineares contínuas e polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach, assim como alguns resultados sobre séries em espaços normados que serão úteis ao longo da dissertação.

1.1 Aplicações multilineares

Definição 1.1.1 Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Dizemos que uma aplicação $A: E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ é n -linear (ou multilinear) se é linear em cada uma das suas variáveis, isto é,

$$A(x_1, \dots, x_i + \lambda x'_i, \dots, x_n) = A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \lambda A(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n),$$

para quaisquer $x_i, x'_i \in E_i$, com $i = 1, \dots, n$, e $\lambda \in \mathbb{K}$. Se $F = \mathbb{K}$, dizemos que A é uma *forma n -linear*.

O conjunto de todas as aplicações n -lineares de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F será denotado por $L(E_1, \dots, E_n; F)$. Se $F = \mathbb{K}$ denotamos $L(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$ por $L(E_1, \dots, E_n)$. No caso em que $E = E_1 = \dots = E_n$ denotamos este conjunto por $L(^n E; F)$. Se $E = E_1 = \dots = E_n$ e $F = \mathbb{K}$ escrevemos simplesmente $L(^n E)$. Se $n = 1$ temos que $L(^1 E; F) = L(E; F)$. Se $n = 1$ e $F = \mathbb{K}$ então $L(E; \mathbb{K}) = E^* =$ dual algébrico de E .

A seguir definiremos as operações algébricas usuais no conjunto $L(E_1, \dots, E_n; F)$ no sentido de torná-lo um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$:

1) A cada par de aplicações n -lineares de $A, B \in L(E_1, \dots, E_n; F)$ fazemos corresponder a aplicação n -linear $A + B \in L(E_1, \dots, E_n; F)$ definida por:

$$\begin{aligned} A + B: E_1 \times \dots \times E_n &\longrightarrow F; \\ (A + B)(x_1, \dots, x_n) &= A(x_1, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

2) A cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ e cada aplicação n -linear $A \in L(E_1, \dots, E_n; F)$ fazemos corresponder a aplicação n -linear $\lambda A \in L(E_1, \dots, E_n; F)$ definida por:

$$\begin{aligned}\lambda A: E_1 \times \cdots \times E_n &\longrightarrow F; \\ (\lambda A)(x_1, \dots, x_n) &= \lambda A(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

A demonstração do resultado abaixo é imediata:

Proposição 1.1.2 Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Então $L(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial com as operações algébricas definidas acima.

Exemplo 1.1.3 Sejam $\varphi_1 \in E_1^*, \dots, \varphi_n \in E_n^*$ e $b \in F$. Definindo

$$\begin{aligned}\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b: E_1 \times \cdots \times E_n &\longrightarrow F; \\ \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b(x_1, \dots, x_n) &= \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b,\end{aligned}$$

então $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b \in L(E_1, \dots, E_n; F)$. De fato, dados $x_i, x'_i \in E_i$, $i = 1, \dots, n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b(x_1, \dots, x_i + \lambda x'_i, \dots, x_n) &= \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_i(x_i + \lambda x'_i) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b \\ &= \varphi_1(x_1) \cdots [\varphi_i(x_i) + \lambda \varphi_i(x'_i)] \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b \\ &= \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_i(x_i) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b \\ &\quad + \varphi_1(x_1) \cdots \lambda \varphi_i(x'_i) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b \\ &= \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_i(x_i) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b \\ &\quad + \lambda \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_i(x'_i) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b \\ &= \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &\quad + \lambda \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Portanto $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b \in L(E_1, \dots, E_n; F)$.

O conjunto de todas as aplicações n -lineares gerado por aplicações multilineares do tipo $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b$ será denotado por $L_f(E_1, \dots, E_n; F)$. Seus elementos são chamados de *aplicações multilineares de tipo finito*. Assim, $A \in L_f(E_1, \dots, E_n; F)$ se, e somente se, existem $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_{j,i} \in E_j^*$, $b_i \in F$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, k$, tais que $A = \sum_{i=1}^k \varphi_{1,i} \otimes \cdots \otimes \varphi_{n,i} \otimes b_i$. Como

$$L_f(E_1, \dots, E_n; F) = \text{span}\{\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b; b \in F \text{ e } \varphi_j \in E_j^*, j = 1, \dots, n\},$$

segue que $L_f(E_1, \dots, E_n; F)$ é subespaço vetorial de $L(E_1, \dots, E_n; F)$.

Exemplo 1.1.4 Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais de dimensão finita e F um espaço vetorial. Vejamos que

$$L(E_1, \dots, E_n; F) = L_f(E_1, \dots, E_n; F).$$

É claro que basta mostrar que $L(E_1, \dots, E_n; F) \subset L_f(E_1, \dots, E_n; F)$. Para isso, seja $A \in L(E_1, \dots, E_n; F)$. Como $E_1, \dots, E_n$ têm dimensão finita, sejam $B_i = \{y_i^1, \dots, y_i^{k_i}\}$ bases para os espaços E_i , $i = 1, \dots, n$ onde $k_i \in \mathbb{N}$ é a dimensão de E_i . Logo se $x_i \in E_i$,

$i = 1, \dots, n$, existem escalares $\lambda_i^{j_i}$, $i = 1, \dots, n$; $j_i = 1, \dots, k_i$ tais que $x_i = \sum_{j_i=1}^{k_i} \lambda_i^{j_i} y_i^{j_i}$, $i = 1, \dots, n$. Então

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_n) &= A\left(\sum_{j_1=1}^{k_1} \lambda_1^{j_1} y_1^{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{k_n} \lambda_n^{j_n} y_n^{j_n}\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \lambda_1^{j_1} \dots \sum_{j_n=1}^{k_n} \lambda_n^{j_n} A(y_1^{j_1}, \dots, y_n^{j_n}) \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \dots \sum_{j_n=1}^{k_n} \lambda_1^{j_1} \dots \lambda_n^{j_n} A(y_1^{j_1}, \dots, y_n^{j_n}) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^{k_1, \dots, k_n} \lambda_1^{j_1} \dots \lambda_n^{j_n} A(y_1^{j_1}, \dots, y_n^{j_n}). \end{aligned}$$

Definindo

$$\pi_i^{j_i}: E_i \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \pi_i^{j_i}(x_i) = \lambda_i^{j_i},$$

temos $\pi_i^{j_i}(x_i) \in E_i^*$ para $i = 1, \dots, n$, $j_i = 1, \dots, k_i$. Segue que

$$A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^{k_1, \dots, k_n} \pi_1^{j_1}(x_1) \dots \pi_n^{j_n}(x_n) A(y_1^{j_1}, \dots, y_n^{j_n})$$

e assim $A \in L_f(E_1, \dots, E_n; F)$.

O objetivo do próximo exemplo é mostrar que em dimensão infinita existem aplicações multilineares que não são de tipo finito.

Exemplo 1.1.5 Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais onde $\dim E_n = +\infty$ e sejam $\varphi_1 \in E_1^*, \dots, \varphi_{n-1} \in E_{n-1}^*$ funcionais lineares não nulos. Definimos

$$A: E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow E_n$$

$$A(x_1, \dots, x_n) \mapsto \varphi_1(x_1) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x_n.$$

Vejamos que A é n -linear:

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_i + \lambda x'_i, \dots, x_n) &= \varphi_1(x_1) \dots \varphi_i(x_i + \lambda x'_i) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x_n \\ &= \varphi_1(x_1) \dots [\varphi_i(x_i) + \lambda \varphi_i(x'_i)] \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x_n \\ &= \varphi_1(x_1) \dots \varphi_i(x_i) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x_n \\ &\quad + \lambda \varphi_1(x_1) \dots \varphi_i(x'_i) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x_n \\ &= A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \lambda A(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \lambda x'_n) &= \varphi_1(x_1) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})[x_n + \lambda x'_n] \\ &= \varphi_1(x_1) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x_n + \lambda \varphi_1(x_1) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x'_n \\ &= A(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) + \lambda A(x_1, \dots, x_{n-1}, x'_n). \end{aligned}$$

Afirmção: $Im(A) = E_n$.

De fato, dado $y \in E_n$, como $\varphi_1 \in E_1^*, \dots, \varphi_{n-1} \in E_{n-1}^*$ são não nulos, existem $x_1 \in E_1, \dots, x_{n-1} \in E_{n-1}$ tais que $\varphi_i(x_i) \neq 0$, $i = 1, \dots, n-1$. Logo temos

$$\left(\frac{x_1}{\varphi_1(x_1)}, \dots, \frac{x_{n-1}}{\varphi_{n-1}(x_{n-1})}, y \right) \in E_1 \times \dots \times E_{n-1} \times E_n$$

e

$$A \left(\frac{x_1}{\varphi_1(x_1)}, \dots, \frac{x_{n-1}}{\varphi_{n-1}(x_{n-1})}, y \right) = \varphi_1 \left(\frac{x_1}{\varphi_1(x_1)} \right) \dots \varphi_{n-1} \left(\frac{x_{n-1}}{\varphi_{n-1}(x_{n-1})} \right) y = y.$$

E assim $Im(A) = E_n$. Agora suponha que A seja uma aplicação n -linear de tipo finito. Neste caso,

$$A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^k \varphi_1^j(x_1) \dots \varphi_n^j(x_n) b_j,$$

onde $b_j \in E_n, \varphi_i^j \in E_i^*, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k$. Por tanto $Im(A) \subset \text{span}\{b_1, \dots, b_k\}$. Isso é uma contradição pois $\dim Im(A) = \dim E_n = +\infty$.

Normas no produto cartesiano

Definição 1.1.6 Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma norma sobre E é uma função

$$\|\cdot\|: E \longrightarrow [0, +\infty)$$

tal que

1. $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todos $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in E$.

Neste caso o par $(E, \|\cdot\|)$ é chamado de *espaço vetorial normado*. Um espaço normado que é completo na métrica definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in E,$$

é chamado de *espaço de Banach*. Denotaremos a bola unitária fechada de E por B_E , isto é

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

Definição 1.1.7 Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$. Para $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, definimos:

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 &= \|x_1\| + \dots + \|x_n\|, \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 &= (\|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2)^{1/2}, \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty &= \max \{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\}. \end{aligned}$$

É bem conhecido que as aplicações $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são normas em $E_1 \times \dots \times E_n$.

Definição 1.1.8 Duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ no espaço vetorial E são equivalentes se definem a mesma topologia em E , ou, equivalentemente, se existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1\|x\| \leq \|x\|' \leq c_2\|x\| \text{ para todo } x \in E.$$

Proposição 1.1.9 *Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais normados .*

1. *As normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são equivalentes em $E_1 \times \dots \times E_n$.*
2. *Se $E_1, \dots, E_n$ são espaços de Banach, então $E_1 \times \dots \times E_n$ é um espaço de Banach com qualquer uma dessas três normas .*

Demonstração. Veja [34, Proposição 2.6]. ■

Caracterizações das aplicações multilineares contínuas

Dados espaços normados $E_1, \dots, E_n, F$, considerando em $E_1 \times \dots \times E_n$ qualquer uma das normas equivalentes da seção anterior, podemos considerar as aplicações n -lineares de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F que são contínuas.

Proposição 1.1.10 *Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais normados. Para cada aplicação $A \in L(E_1, \dots, E_n; F)$, as afirmações seguintes são equivalentes:*

1. *A é contínua;*
2. *A é contínua na origem;*
3. *Existe uma constante $c \geq 0$ tal que*

$$\|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq c \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|,$$

para quaisquer $x_j \in E_j, j = 1, \dots, n$;

4. *$\|A\| := \sup \{\|A(x_1, \dots, x_n)\| : x_j \in E_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1, j = 1, \dots, n\} < +\infty$.*

Demonstração.

(1) $\implies$ (2) Trivial.

(2) $\implies$ (3) Como A é contínua na origem, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\|_\infty < \delta$, então $\|A(x)\| < \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\|_\infty < \delta$, então $\|A(x)\| < 1$. Agora, seja $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$. Se algum $x_i = 0$, a desigualdade desejada se cumpre trivialmente. Se $x_i \neq 0, i = 1, \dots, n$, então

$$\left\| \left(\frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{\|x_1\|} \cdot x_1, \dots, \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{\|x_n\|} \cdot x_n \right) \right\|_\infty = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Da n -linearidade de A segue que

$$\frac{\delta^n}{2^n} \cdot \frac{1}{\|x_1\|} \cdots \frac{1}{\|x_n\|} \cdot \|A(x_1, \dots, x_n)\| = \left\| A \left(\frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{\|x_1\|} \cdot x_1, \dots, \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{\|x_n\|} \cdot x_n \right) \right\| < 1,$$

e portanto

$$\|A(x_1, \dots, x_n)\| < \frac{2^n}{\delta^n} \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|.$$

Tomando $c = \frac{2^n}{\delta^n}$ temos o resultado.

(3) $\implies$ (4) Trivial.

(4) $\implies$ (1) Mostraremos que A é localmente lipschitziana, portanto contínua. Dado $a = (a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, tome $c > 0$ tal que $\|a\|_\infty < c$. Se $x \in E_1 \times \cdots \times E_n$ tal que $\|x\|_\infty < c$, temos

$$\begin{aligned} \|A(x) - A(a)\| &= \|A(x_1, \dots, x_n) - A(a_1, \dots, a_n)\| \\ &= \left\| \sum_{j=1}^n [A(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, \dots, x_n) - A(a_1, \dots, a_j, x_{j+1}, \dots, x_n)] \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=1}^n A(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j - a_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \|A(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j - a_j, x_{j+1}, \dots, x_n)\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \|A\| \cdot c^{n-1} \cdot \|x_j - a_j\| \\ &= \|A\| \cdot c^{n-1} \cdot \sum_{j=1}^n \|x_j - a_j\| = \|A\| \cdot c^{n-1} \cdot \|x - a\|_1. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.1.11 *Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais normados. Para toda aplicação n -linear contínua $A: E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é verdade que:*

- (a) $\|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq \|A\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|$, para todos $x_j \in E_j, j = 1, \dots, n$.
- (b) $\|A\| = \inf \{c \geq 0 : \|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq c \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\| \text{ para todos } x_j \in E_j, j = 1, \dots, n\}$.

Demonstração. Veja [34, Proposição 2.8]. ■

Definição 1.1.12 Sejam $E, E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais normados. Denotaremos o conjunto de todas as aplicações n -lineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F por $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Se $E_1 = \cdots = E_n = E$ escrevemos $\mathcal{L}(^n E; F)$. No caso $n = 1$ e $F = \mathbb{K}$ escrevemos E' no lugar de $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ e dizemos que E' é o dual topológico de E .

Proposição 1.1.13 *Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais normados.*

- (a) $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é subespaço vetorial de $L(E_1, \dots, E_n; F)$;
- (b) O funcional $A \longrightarrow \|A\|$ é uma norma em $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$;

(c) Se F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ com a norma do item (b) também é um espaço de Banach.

Demonstração. Veja [34, Proposições 2.10 e 2.11]. ■

Exemplo 1.1.14 Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F são espaços vetoriais normados. Dados $\varphi_1 \in E'_1, \dots, \varphi_n \in E'_n$ e $b \in F$, já sabemos do Exemplo 1.1.3 que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b: E_1 \times \dots \times E_n &\longrightarrow F, \\ (\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b)(x_1, \dots, x_n) &= \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)b \end{aligned}$$

é n -linear. Mostraremos agora que $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b$ é contínua e que

$$\|\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b\| = \|b\| \cdot \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_n\|.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b\| &= \sup_{\substack{x_j \in E_j \\ \|x_j\| \leq 1 \\ j=1, \dots, n}} \|(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b)(x_1, \dots, x_n)\| \\ &= \sup_{\substack{x_j \in E_j \\ \|x_j\| \leq 1 \\ j=1, \dots, n}} \|\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)b\| \\ &= \sup_{\substack{x_j \in E_j \\ \|x_j\| \leq 1 \\ j=1, \dots, n}} |\varphi_1(x_1)| \dots |\varphi_n(x_n)| \cdot \|b\| \\ &= \|b\| \cdot \sup_{\substack{x_j \in E_j \\ \|x_j\| \leq 1 \\ j=1, \dots, n}} |\varphi_1(x_1)| \dots |\varphi_n(x_n)| \\ &= \|b\| \cdot \sup_{\substack{x_1 \in E_1 \\ \|x_1\| \leq 1}} |\varphi_1(x_1)| \dots \sup_{\substack{x_n \in E_n \\ \|x_n\| \leq 1}} |\varphi_n(x_n)| \\ &= \|b\| \cdot \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_n\| < +\infty. \end{aligned}$$

Denotaremos

$$\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F) = \text{span} \left\{ \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b : b \in F, \varphi_j \in E'_j, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Os elementos de $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)$ são chamados de aplicações multilineares contínuas de tipo finito. Notemos que $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Definição 1.1.15 Sejam X um conjunto e V um espaço vetorial. Uma função $f: X \longrightarrow V$ tem posto finito se o subespaço $\text{span}\{f(X)\}$ de V gerado pela imagem de f tem dimensão finita. Denotamos

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{F}}(E_1, \dots, E_n; F) := \{A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) : A \text{ tem posto finito}\}.$$

Notemos que $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \mathcal{L}_{\mathfrak{F}}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Exemplo 1.1.16 Dados $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n)$ e $b \in F$, definindo

$$\begin{aligned} B \otimes b &: E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F, \\ B \otimes b(x_1, \dots, x_n) &= B(x_1, \dots, x_n) \cdot b, \end{aligned}$$

é fácil ver que $B \otimes b$ é n -linear e, ademais, é contínuo:

$$\begin{aligned} \|B \otimes b\| &= \sup \{ \|(B \otimes b)(x_1, \dots, x_n)\| : x_j \in E_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1; j = 1, \dots, n \} \\ &= \sup \{ \|B(x_1, \dots, x_n) \cdot b\| : x_j \in E_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1; j = 1, \dots, n \} \\ &= \sup \{ |B(x_1, \dots, x_n)| \cdot \|b\| : x_j \in E_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1; j = 1, \dots, n \} \\ &= \|b\| \cdot \sup \{ |B(x_1, \dots, x_n)| : x_j \in E_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1; j = 1, \dots, n \} \\ &= \|b\| \cdot \|B\|. \end{aligned}$$

Logo $B \otimes b \in \mathcal{L}_{\mathfrak{F}}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Proposição 1.1.17 Para todos espaços vetoriais normados $E_1, \dots, E_n$ e F ,

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{F}}(E_1, \dots, E_n; F) = \left\{ \sum_{j=1}^k B_j \otimes b_j : B_j \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n); b_j \in F; k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Em particular, $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}}(E_1, \dots, E_n; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{L}_{\mathfrak{F}}(E_1, \dots, E_n; F)$. Então $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $[Im(A)]$ tem dimensão finita. Suponhamos que $\dim[Im(A)] = k$. Então existem $b_1, \dots, b_k \in Im(A)$ tais que $F \supset [Im(A)] = [b_1, \dots, b_k]$. Definimos

$$T_j : [b_1, \dots, b_k] \longrightarrow \mathbb{K}, \quad T_j(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k) = \alpha_j,$$

para $j = 1, \dots, k$. Notemos que cada T_j é linear e contínua, pois $\dim[Im(A)] = k < +\infty$ (ver [23, Teorema 2.7.8]). Se $y = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k$, então $y = \sum_{i=1}^k T_j(y) b_i$. Definimos também

$$\begin{aligned} B_j &: E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow \mathbb{K}, \\ B_j(x_1, \dots, x_n) &= T_j(A(x_1, \dots, x_n)), \end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, k$. Vejamos que cada B_j é n -linear e contínua:

$$\begin{aligned} B_j(x_1, \dots, x_i + \lambda x'_i, \dots, x_n) &= T_j(A(x_1, \dots, x_i + \lambda x'_i, \dots, x_n)) \\ &= T_j[A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \lambda A(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n)] \\ &= T_j(A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) + \lambda T_j(A(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n)) \\ &= B_j(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \lambda B_j(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|B_j\| &= \sup \{ \|B_j(x_1, \dots, x_n)\| : x_i \in E_i, \|x_i\| \leq 1, i = 1, \dots, n \} \\ &= \sup \{ \|T_j(A(x_1, \dots, x_n))\| : x_i \in E_i, \|x_i\| \leq 1, i = 1, \dots, n \} \\ &\leq \|T_j\| \cdot \sup \{ \|A(x_1, \dots, x_n)\| : x_i \in E_i, \|x_i\| \leq 1, i = 1, \dots, n \} \\ &= \|T_j\| \cdot \|A\|. \end{aligned}$$

E por outro lado,

$$\begin{aligned} \left[\sum_{j=1}^k B_j \otimes b_j \right] (x_1, \dots, x_n) &= \sum_{j=1}^k (B_j \otimes b_j)(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^k B_j(x_1, \dots, x_n) b_j \\ &= \sum_{j=1}^k T_j(A(x_1, \dots, x_n)) b_j = A(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$, provando que $A = \sum_{j=1}^k B_j \otimes b_j$. A outra inclusão é óbvia. ■

Proposição 1.1.18 *Sejam $E_1, \dots, E_{m+n}$ espaços vetoriais com $m, n \in \mathbb{N}$.*

(a) *A correspondência*

$$A \in L(E_1, \dots, E_{m+n}; F) \mapsto T_A \in L(E_1, \dots, E_m; L(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F)),$$

dada por

$$T_A(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) = A(x_1, \dots, x_{m+n}),$$

estabelece um isomorfismo entre os espaços vetoriais $L(E_1, \dots, E_{m+n}; F)$ e $L(E_1, \dots, E_m; L(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F))$;

(b) *Se $E_1, \dots, E_{m+n}$ são espaços normados, então o isomorfismo do item (a) induz um isomorfismo isométrico entre os espaços normados $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_{m+n}; F)$ e $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{L}(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F))$.*

Demonstração. Veja [34, Proposição 2.12]. ■

Definição 1.1.19 Uma aplicação multilinear $A: E^m \longrightarrow F$ é dita ser *simétrica* se

$$A(x_1, \dots, x_m) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$$

para todo $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$ e toda permutação $\sigma \in S_m$, onde S_m denota o conjunto das permutações dos primeiros m números naturais.

Os conjuntos das aplicações multilineares simétricas e das aplicações multilineares simétricas contínuas $A: E^m \longrightarrow F$ serão denotados, respectivamente, por $L^s({}^m E; F)$ e $\mathcal{L}^s({}^m E; F)$.

É fácil ver que $L^s({}^m E; F)$ é subespaço vetorial de $L({}^m E; F)$ e que $\mathcal{L}^s({}^m E; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}({}^m E; F)$.

Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos $\mathcal{L}^s({}^m E; F) = \mathcal{L}({}^m E)$ e $\mathcal{L}^s({}^m E; F) = \mathcal{L}^s({}^m E)$. Para $m = 0$ escrevemos $\mathcal{L}^s({}^0 E; F) = F$ (espaço das funções constantes a valores em F).

Definição 1.1.20 Para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada multi-índice $\gamma = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k$, definimos :

$$\begin{cases} \|\gamma\| &= n_1 + \dots + n_k \\ \gamma! &= \prod_{j=1}^k n_j! \end{cases}$$

Definição 1.1.21 Sejam $A \in L({}^m E; F)$ e $k \leq m$. Para cada $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$ e cada multi-índice $\gamma = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k$ com $\|\gamma\| = m$, definimos

$$Ax_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} = A(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{x_k, \dots, x_k}_{n_k \text{ vezes}}).$$

Proposição 1.1.22 Para cada $A \in L({}^m E; F)$, definimos

$$A^s: E^m \longrightarrow F, \quad A^s(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}).$$

As seguintes propriedades são satisfeitas :

- (a) $A^s \in L({}^m E; F)$;
- (b) $A^s = A$ se, e somente se, $A \in L({}^s E; F)$;
- (c) $(A^s)^s = A^s$;
- (d) O operador $s: L({}^m E; F) \longrightarrow L({}^s({}^m E; F))$ definido por $s(A) = A^s$, é linear, sobrejetor e não injetor;
- (e) O operador $S: \mathcal{L}({}^m E; F) \longrightarrow \mathcal{L}({}^s({}^m E; F))$ definido por $S(A) = A^s$, está bem definido, é linear, contínuo, sobrejetor, não injetor e $\|S\| = 1$;
- (f) Se $x \in E$, então $Ax^m = A^s x^m$.

Demonstração. Provemos o item (e). Para isso, seja $A \in \mathcal{L}({}^m E; F)$ uma aplicação m -linear dada. Por (a) sabemos que $S(A) = A^s \in L({}^s({}^m E; F))$. A linearidade de S segue da linearidade de s (item (d)). Para todos $x_1, \dots, x_m \in E$ com $\|x_i\| \leq 1$, $j = 1, \dots, m$, temos

$$\begin{aligned} \|A^s(x_1, \dots, x_m)\| &= \left\| \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) \right\| \\ &\leq \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \|A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})\| \\ &\leq \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \|A\| \cdot \|x_{\sigma(1)}\| \cdots \|x_{\sigma(m)}\| = \|A\|. \end{aligned}$$

Isso prova que $\|S(A)\| = \|A^s\| \leq \|A\|$, e portanto S é contínua e $\|S\| \leq 1$. Escolhendo $A \in \mathcal{L}({}^s({}^m E; F))$ com $\|A\| = 1$ (basta tomar qualquer aplicação m -linear simétrica não-nula e, caso necessário, dividir por sua norma), temos

$$\|S\| \geq \|S(A)\| = \|A^s\| = \|A\| = 1,$$

provando que $\|S\| = 1$.

Do item (b) sabemos que $A^s = A$ para $A \in \mathcal{L}({}^s({}^m E; F))$, logo $S(A) = A$ e assim temos que S é sobrejetor.

Para verificar que S não é injetor basta tomar $B \in \mathcal{L}({}^m E; F)$ tal que $B \notin \mathcal{L}^s({}^m E; F)$, pois nesse caso é verdade que $B \neq B^s$ e, pelo item (c),

$$S(B) = B^s = (B^s)^s = S(B^s).$$

Para os demais itens veja [2, Proposição 1.1.6]. ■

Teorema 1.1.23 (Fórmula de Leibniz)

Sejam E, F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $A \in L^s({}^m E; F)$. Então para quaisquer $x_1, \dots, x_k \in E$, temos

$$A(x_1 + \dots + x_k)^m = \sum_{\|\gamma\|=m} \frac{m!}{\gamma!} A x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}.$$

Demonstração. Veja [5, Teorema 1.2.16]. ■

Corolário 1.1.24 (Fórmula Binomial de Newton)

Se $A \in L^s({}^m E; F)$, então para quaisquer $x, y \in E$ temos

$$A(x + y)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} A x^{m-j} y^j.$$

Teorema 1.1.25 (Fórmula de Polarização)

Sejam E, F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Se $A \in L^s({}^m E; F)$, então

$$A(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_m x_m)^m,$$

para quaisquer $x_j \in E$, com $j = 0, 1, \dots, m$

Demonstração. Veja [5, Teorema 1.2.18]. ■

Observação 1.1.26 Segue da Fórmula de Polarização que se $A, B \in L^s({}^m E; F)$ são tais que $Ax^m = Bx^m$ para todo $x \in E$, então $A = B$. De fato, para todos $x_1, \dots, x_n \in E$,

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_m) &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m A(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_m x_m)^m \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m B(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_m x_m)^m = B(x_1, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Ou seja, se A e B são aplicações simétricas que coincidem na diagonal, então coincidem em todo o domínio.

1.2 Polinômios homogêneos

As funções analíticas de uma variável complexa são aquelas que podem ser escritas como séries de potências convergentes, ou seja, funções do tipo:

$$f: A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

onde A é um aberto em $\mathbb{C}$ e a sequência de números complexos $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é tal que a série converge uniformemente em uma vizinhança de cada ponto de A .

Esse conceito não pode ser estendido dessa forma para funções entre espaços normados, pois em espaços normados não se pode multiplicar vetores. Precisamos então de funções que cumpram o papel das funções

$$f_n: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f_n(z) = z^n.$$

Observamos que a propriedade fundamental satisfeita por essas funções é a seguinte: para todos $\lambda, z \in \mathbb{C}$,

$$f_n(\lambda z) = \lambda^n f_n(z).$$

Por causa dessa propriedade tais funções são chamadas de *polinômios n -homogêneos*. Utilizamos a teoria de aplicações multilineares para obter funções em espaços normados que reproduzem essa propriedade:

Definição 1.2.1 Sejam E e F espaços vetoriais normados. Uma aplicação $P: E \longrightarrow F$ será denominada *polinômio m -homogêneo* ou *polinômio homogêneo de grau m* , se existir uma aplicação $A \in L(^m E; F)$ tal que $P(x) = Ax^m$ para todo $x \in E$.

Note que a propriedade desejada de fato se cumpre: para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$,

$$P(\lambda x) = A(\lambda x)^m = A(\lambda x, \dots, \lambda x) = \lambda^m Ax^m = \lambda^m P(x).$$

Denotaremos por $P(^m E; F)$ o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau m , denotaremos também por $\mathcal{P}(^m E; F)$ o subespaço vetorial de $P(^m E; F)$ formado pelos polinômios m -homogêneos contínuos. Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos $P(^m E)$ no lugar de $P(^m E; F)$ e $\mathcal{P}(^m E)$ no lugar de $\mathcal{P}(^m E; F)$.

Para cada $P \in P(^m E; F)$, definimos

$$\|P\| := \sup \{\|P(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}.$$

Proposição 1.2.2 Sejam E, F espaços vetoriais normados. Para cada $A \in L(^m E; F)$ considere a aplicação dada por

$$\hat{A}: E \longrightarrow F, \quad \hat{A}(x) := Ax^m.$$

Desse modo, a correspondência $A \mapsto \hat{A}$ induz um isomorfismo entre os espaços vetoriais $L(^m E; F)$ e $P(^m E; F)$. Mais ainda,

$$\|\hat{A}\| \leq \|A\| \leq \frac{m^m}{m!} \|\hat{A}\|.$$

Demonstração. Veja [2, Proposição 1.2.2]. ■

Observação 1.2.3 De acordo com a Proposição 1.2.2, para cada $P \in P(^mE; F)$ existe uma única aplicação multilinear simétrica $A \in L^s(^mE; F)$ tal que $Ax^m = P(x)$ para todo $x \in E$. Nesse caso denotamos $\check{P} := A$.

Proposição 1.2.4 *Sejam E, F espaços normados e $P \in P(^mE; F)$. Então as seguintes condições são equivalentes :*

- (a) P é contínuo;
- (b) P é contínuo em algum ponto de E ;
- (c) P é contínuo no origem;
- (d) $\|P\| < \infty$;
- (e) Existe $k \geq 0$ tal que $\|P(x)\| \leq k \cdot \|x\|^m$ para todo $x \in E$;
- (f) $P(A)$ é limitado em F sempre que A for limitado em E ;
- (g) P é limitado em toda bola $B_E[x_0, r] \subseteq E$;
- (h) P é limitado em alguma bola $B_E[x_0, r] \subseteq E$;
- (i) A aplicação n -linear simétrica $\check{P}$ é contínua;
- (j) Existe $A \in \mathcal{L}(^mE; F)$ tal que $P(x) = Ax^m$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Veja [2, Proposição 1.2.7]. ■

Proposição 1.2.5 *Sejam E, F espaços normados. Então $(\mathcal{P}(^mE; F), \|\cdot\|)$ é um espaço normado (de Banach se F for Banach). Mais ainda,*

$$\|P(x)\| \leq \|P\| \cdot \|x\|^m$$

para todos $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ e $x \in E$.

Demonstração. Veja [2, Proposições 1.2.8 e 1.2.10]. ■

Proposição 1.2.6 *O operador*

$$\varphi: \mathcal{L}^s(^mE; F) \longrightarrow \mathcal{P}(^mE; F), \quad \varphi(A) = \hat{A},$$

é um isomorfismo topológico.

Demonstração. Veja [2, Proposição 1.2.9]. ■

Definição 1.2.7 Sejam E e F espaços vetoriais normados. Dizemos que o espaço E contém uma cópia isomorfa do espaço F se existe um subespaço G de E isomorfo (topologicamente) a F .

Proposição 1.2.8 *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Então o espaço vetorial normado $\mathcal{P}(^m E; \mathcal{P}(^n E; F))$ contém uma cópia isomorfa do espaço normado $\mathcal{P}(^{m+n} E; F)$ por meio do operador:*

$$P \in \mathcal{P}(^{m+n} E; F) \mapsto \tilde{P}(x)(y) = \check{P}(x^m, y^n).$$

Demonstração. Veja [2, Proposição 1.2.12]. ■

Sejam E, F espaços vetoriais. Denotaremos por $\mathcal{P}_{\mathfrak{F}}(^n E; F)$ o conjunto dos polinômios $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$ de posto finito.

Exemplo 1.2.9 Sejam E e F espaços de Banach, $n \in \mathbb{N}$, $Q \in \mathcal{P}(^n E)$ e $b \in F$. Vejamos que, definindo

$$Q \otimes b: E \longrightarrow F, \quad Q \otimes b(x) = Q(x)b,$$

temos $Q \otimes b \in \mathcal{P}_{\mathfrak{F}}(^n E; F)$ e $\|Q \otimes b\| = \|Q\| \cdot \|b\|$. De fato, como $Q \in \mathcal{P}(^n E)$ temos $\check{Q} \in \mathcal{L}^s(^n E; \mathbb{K})$, e definindo

$$W: E^n \longrightarrow F, \quad W(x_1, \dots, x_n) = \check{Q}(x_1, \dots, x_n)b,$$

é imediato que $W \in \mathcal{L}^s(^n E; F)$. Além disso,

$$W(x^n) = \check{Q}(x^n)b = Q(x)b$$

para todo $x \in E$. Isso implica que $\widehat{W} = Q \otimes b \in \mathcal{P}(^n E; F)$. É claro que $Q \otimes b$ tem posto finito. Por fim,

$$\begin{aligned} \|Q \otimes b\| &= \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|Q \otimes b(x)\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|Q(x)b\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |Q(x)| \cdot \|b\| \\ &= \|b\| \cdot \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |Q(x)| = \|Q\| \cdot \|b\|. \end{aligned}$$

Proposição 1.2.10 *Para todos espaços de Banach E e F e $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{F}}(^n E; F) = \left\{ \sum_{j=1}^m Q_j \otimes b_j : m \in \mathbb{N}; Q_j \in \mathcal{P}(^n E), b_j \in F \right\}.$$

Em particular, $\mathcal{P}_{\mathfrak{F}}(^n E; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^n E; F)$.

Demonstração. Pelo exemplo anterior temos

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{F}}(^n E; F) \supseteq \left\{ \sum_{j=1}^m Q_j \otimes b_j : m \in \mathbb{N}; Q_j \in \mathcal{P}(^n E), b_j \in F \right\}.$$

Agora seja $P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{F}}(^n E; F)$. Então $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$ e $[\text{Im}(P)]$ tem dimensão finita, digamos $\dim[\text{Im}(P)] = k$. Portanto existem $b_i \in \text{Im}(P)$, $i = 1, \dots, k$, tais que $F \supseteq [\text{Im}(P)] = [b_1, \dots, b_k]$. Definimos

$$T_j: [b_1, \dots, b_k] \longrightarrow \mathbb{K}, \quad T_j(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k) = \alpha_j,$$

para cada $j = 1, \dots, k$. É óbvio que cada T_j é linear e também é contínua pois $\dim[\text{Im}(P)] = k < \infty$. Notemos que se $y = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k$, então $y = \sum_{j=1}^k T_j(y) b_j$.

Definimos também

$$B_j: E \longrightarrow \mathbb{K}, \quad B_j(x) = T_j(P(x)).$$

É fácil ver que $B_j \in \mathcal{P}(^n E)$. Ademais

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^k B_j \otimes b_j \right) (x) &= \sum_{j=1}^k (B_j \otimes b_j) (x) = \sum_{j=1}^k B_j(x) b_j \\ &= \sum_{j=1}^k T_j(P(x)) b_j = P(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in E$, provando que $P = \sum_{j=1}^k B_j \otimes b_j$. ■

Um subespaço importante do espaço dos polinômios homogêneos de posto finito, chamado de subespaço dos polinômios homogêneos de tipo finito, será introduzido no Exemplo 2.3.2 e desempenhará um papel importante no Capítulo 3.

1.3 Alguns resultados sobre séries

Apresentamos nesta seção alguns resultados sobre séries convergentes em espaços normados que serão úteis mais adiante.

Definição 1.3.1 Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no espaço normado E é dita *absolutamente convergente* quando $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é uma série numérica convergente. Quando uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge mas $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ diverge, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é *condicionalmente convergente*.

Definição 1.3.2 Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no espaço normado E é dita *incondicionalmente convergente* quando para toda bijeção $\sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é convergente.

Proposição 1.3.3 Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série incondicionalmente convergente no espaço normado E . Se $\sigma_1, \sigma_2: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ são funções bijetoras, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_1(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_2(n)}.$$

Demonstração. Veja [9, Proposição 5.3.8]. ■

Teorema 1.3.4 *Seja E um espaço normado. As seguintes afirmações são equivalentes*

- (a) E é espaço de Banach.
- (b) Toda série absolutamente convergente em E é convergente.
- (c) Toda série absolutamente convergente em E é incondicionalmente convergente.

Demonstração. Veja [9, Proposição 10.1.4]. ■

Definição 1.3.5 Sejam X um conjunto arbitrário e M um espaço métrico. Dizemos que a sequência de funções $g_n: X \rightarrow M$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformemente em X para a função $g: X \rightarrow M$ se para todo número real $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(g_n(x), g(x)) < \varepsilon \text{ para todos } n > n_0 \text{ e } x \in X.$$

Proposição 1.3.6 *Sejam X um conjunto arbitrário e $(Y, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Então a sequência de funções $f_n: X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformemente em X para alguma função $f: X \rightarrow Y$ se, e somente se,*

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f_m(x)\| = 0.$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que a sequência de funções $f_n: X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, convirja uniformemente em X para alguma função $f: X \rightarrow Y$. Neste caso, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, então $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in X$. Dessa forma, para todos $m, n \geq n_0$ e $x \in X$, temos

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n(x) - f(x)\| + \|f_m(x) - f(x)\| < 2\varepsilon.$$

Assim, para $m, n \geq n_0$ temos

$$\sup_{x \in X} \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq 2\varepsilon.$$

Então, dado qualquer $\varepsilon > 0$,

$$0 \leq \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq 2\varepsilon,$$

o que prova que

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f_m(x)\| = 0.$$

Reciprocamente, suponhamos que

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f_m(x)\| = 0.$$

Logo, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0$, então

$$\sup_{x \in X} \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon.$$

Como

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \text{ para todo } x \in X,$$

para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0$, então

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \text{ para todo } x \in X. \quad (1.1)$$

Assim, de (1.1) segue que, para cada $x \in X$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach Y , logo convergente. Podemos então definir

$$f: X \longrightarrow Y, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x). \quad (1.2)$$

Provemos que a sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente em X para a função f . Para isso, seja $\varepsilon > 0$. De (1.1) e (1.2), como $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, temos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f_m(x)\| = \|f_n(x) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

para todos $n \geq n_0$ e $x \in X$. ■

Teorema 1.3.7 (Convergência Uniforme e o Teste de Weierstrass)

Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e (Y, d) um espaço métrico. Seja também $f_n: Y \longrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções para a qual existe uma sequência numérica $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, +\infty)$ tal que:

(i) $\|f_n(y)\|_X \leq M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $y \in Y$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$.

Então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(y)\|_X$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)$ são uniformemente convergentes em Y .

Demonstração. Da condição (ii) sabemos que $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^m M_k = 0$. Notemos que dados

$m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n$,

$$0 \leq \left\| \sum_{k=n+1}^m f_k(y) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|f_k(y)\| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k$$

para todo $y \in Y$. Logo

$$0 \leq \sup_{y \in Y} \left\| \sum_{k=n+1}^m f_k(y) \right\| \leq \sup_{y \in Y} \sum_{k=n+1}^m \|f_k(y)\| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k,$$

e portanto

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sup_{y \in Y} \left\| \sum_{k=n+1}^m f_k(y) \right\| \leq \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sup_{y \in Y} \sum_{k=n+1}^m \|f_k(y)\| \leq \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^m M_k = 0.$$

Da Proposição 1.3.6 segue o resultado. ■

Proposição 1.3.8 *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e (Y, d) um espaço métrico. Sejam também $f: Y \rightarrow X$ uma função e $f_n: Y \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções.*

- (i) *Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em Y e $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = f(y)$ para todo $y \in Y$, então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f .*
- (ii) *Se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em Y para f , então $(\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em Y para αf .*

Demonstração. (i) Sabemos que

$$\|f_m(y) - f_n(y)\| \leq \sup_{x \in Y} \|f_m(x) - f_n(x)\|$$

para todos $y \in Y$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Logo

$$\|f_m(y) - f(y)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_m(y) - f_n(y)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in Y} \|f_m(x) - f_n(x)\|$$

para todos $y \in Y$ e $m \in \mathbb{N}$. Assim

$$\sup_{y \in Y} \|f_m(y) - f(y)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in Y} \|f_m(x) - f_n(x)\|,$$

e, pela Proposição 1.3.6, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{y \in Y} \|f_m(y) - f(y)\| &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in Y} \|f_m(x) - f_n(x)\| \\ &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sup_{x \in Y} \|f_m(x) - f_n(x)\| = 0. \end{aligned}$$

(ii) De

$$\|(\alpha f_n)(y) - (\alpha f)(y)\| = |\alpha| \cdot \|f_n(y) - f(y)\| \leq |\alpha| \cdot \sup_{y \in Y} \|f_n(y) - f(y)\|$$

para todo $y \in Y$, segue que

$$0 \leq \sup_{y \in Y} \|(\alpha f_n)(y) - (\alpha f)(y)\| \leq |\alpha| \cdot \sup_{y \in Y} \|f_n(y) - f(y)\|,$$

e portanto

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in Y} \|(\alpha f_n)(y) - (\alpha f)(y)\| \leq |\alpha| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in Y} \|f_n(y) - f(y)\| = 0.$$

■

CAPÍTULO 2

TIPOS DE HOLOMORFIA

O conceito de tipo de holomorfia foi introduzido por L. Nachbin em [27] com o objetivo de sistematizar o estudo de classes especiais de polinômios homogêneos que vinham sendo estudados individualmente na literatura. Neste capítulo apresentaremos alguns preliminares de funções holomorfas, também definição, exemplos de tipos de holomorfia e o conceito de função holomorfa associada a um tipo de holomorfia, também introduzido por Nachbin.

2.1 Funções holomorfas

Definição 2.1.1 Uma *série de potências* do espaço de Banach E no espaço de Banach F em torno do ponto $a \in E$ é uma série de funções da forma $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x - a)$, onde $P_m \in \mathcal{P}(^m E; F)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$.

Note que a série de potências $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x - a)$ pode também ser escrita na forma $\sum_{m=0}^{\infty} A_m(x - a)^m$, onde $A_m \in \mathcal{L}^s(^m E; F)$ e $\hat{A}_m = P_m$ para todo m .

Definição 2.1.2 O *raio de convergência*, ou mais exatamente, o *raio de convergência uniforme* da série de potências $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x - a)$ é o supremo do conjunto dos números reais $r \geq 0$ para os quais a série converge uniformemente na bola fechada $\overline{B}(a, r)$.

Teorema 2.1.3 Seja R o raio de convergência da série de potências $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x - a)$. Então:

(a) R é determinado pela formula de Cauchy-Hadamard

$$\frac{1}{R} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \|P_m\|^{\frac{1}{m}}.$$

(b) A série de potências converge absolutamente e uniformemente em $\overline{B}(a, r)$ para todo $0 \leq r < R$.

Demonstração. Veja [25, Theorem 4.3]. ■

Agora estamos em condições de definir funções holomorfas:

Definição 2.1.4 Sejam E, F espaços de Banach complexos e U um subconjunto aberto de E . Uma função $f: U \rightarrow F$ é dita *holomorfa* em U se para cada $a \in U$ existem uma bola $B(a, r) \subset U$, $r > 0$, e uma sequência de polinômios homogêneos $(P_m \in \mathcal{P}({}^m E; F))_{m=0}^\infty$ tais que

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x - a)$$

uniformemente para $x \in B(a, r)$.

A sequência de polinômios homogêneos $(P_m)_{m=0}^\infty$ é determinada de maneira única pela função holomorfa f e pelo vetor a (veja [25, Remark 5.2]).

Notação. Estabelecemos agora a notação usual em holomorfia. Denotamos por $\mathcal{H}(U; F)$ o conjunto de todas as funções holomorfas de U em F , que obviamente é um espaço vetorial complexo. No caso em que $F = \mathbb{C}$ escrevemos $\mathcal{H}(U; \mathbb{C}) = \mathcal{H}(U)$.

Denotaremos também $P_m = P^m f(a)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$. A série $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x - a)$ é chamada de *série de Taylor* de f em a .

Continuando com as notações, se, para cada $m \in \mathbb{N}_0$, $A_m \in \mathcal{L}^s({}^m E; F)$ é a aplicação m -linear simétrica associada ao polinômio $P_m \in \mathcal{P}({}^m E; F)$ por $\hat{P}_m = A_m$. Denotamos

$$d^m f(a) = m! A_m \quad \text{e} \quad \hat{d}^m f(a) = m! P_m.$$

Definimos as aplicações diferenciais

$$d^m f: a \in U \rightarrow d^m f(a) \in \mathcal{L}^s({}^m E; F) \quad \text{e} \quad \hat{d}^m f: a \in U \rightarrow \hat{d}^m f(a) \in \mathcal{P}({}^m E; F),$$

e os operadores diferenciais

$$d^m: f \in \mathcal{H}(U; F) \rightarrow d^m f \in \mathcal{H}(U; \mathcal{L}^s({}^m E; F)),$$

$$\hat{d}^m: f \in \mathcal{H}(U; F) \rightarrow \hat{d}^m f \in \mathcal{H}(U; \mathcal{P}({}^m E; F))$$

de ordens $m = 0, 1, 2, \dots$ (as demonstrações de que essas aplicações de fato tomam valores nos espaços que estamos indicando podem ser encontradas em, por exemplo, [27, Proposition 3, Chapter 7]).

Finalmente, o *polinômio de Taylor* $\tau_{m,f,a}$ de ordem m de f em a é definido por

$$\tau_{m,f,a}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \widehat{d}^k f(a)(x-a), \quad x \in E.$$

Na Seção 3.1 desenvolveremos um pouco da teoria de funções holomorfas. Para a teoria geral indicamos os livros de Barroso [4], Dineen [14] e Mujica [25].

Provaremos agora que polinômios homogêneos são exemplos de funções holomorfas:

Exemplo 2.1.5 $\mathcal{P}(^m E; F) \subset \mathcal{H}(U; F)$ para $m = 0, 1, 2, \dots$

De fato, dado $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ existe $A \in \mathcal{L}^s(^m E; F)$ tal que $P = \widehat{A}$. Fixado $\xi \in E$, pela Fórmula Binomial de Newton (Corolário 1.1.24) temos

$$P(x) = Ax^m = A[\xi + (x - \xi)]^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} A\xi^{m-j}(x - \xi)^j,$$

para todo $x \in E$. Assim,

$$P(x) - \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} A\xi^{m-j}(x - \xi)^j = 0 \text{ para todo } x \in E \implies$$

$$\left\| P(x) - \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} A\xi^{m-j}(x - \xi)^j \right\| = 0 \text{ para todo } x \in E.$$

Note que se $k > m$

$$P(x) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} A\xi^{m-j}(x - \xi)^j = \sum_{j=0}^k W_j(x - \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} W_j(x - \xi)$$

para todo $x \in E$, onde

$$W_j: E \longrightarrow F, \quad W_j(y) = \begin{cases} \binom{m}{j} A\xi^{m-j}y^j & \text{se } 0 \leq j \leq m \\ 0 & \text{se } j > m. \end{cases}$$

Logo, para $k > m$,

$$\sup_{x \in E} \left\| P(x) - \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} A\xi^{m-j}(x - \xi)^j \right\| = \sup_{x \in E} \left\| P(x) - \sum_{j=0}^k W_j(x - \xi) \right\| = 0,$$

e portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} \left\| P(x) - \sum_{j=0}^k W_j(x - \xi) \right\| = 0,$$

provando $P(x) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} A \xi^{m-j} (x - \xi)^j$ uniformemente em E . Observe que:

$$\frac{1}{j!} \widehat{d^j} P(\xi)(y) = P^j P(\xi)(y) = \begin{cases} \binom{m}{j} A \xi^{m-j} y^j & \text{se } 0 \leq j \leq m \\ 0 & \text{se } j > m, \end{cases}$$

e

$$\frac{1}{j!} d^j P(\xi)(y)^j = \begin{cases} \binom{m}{j} A \xi^{m-j} y^j & \text{se } 0 \leq j \leq m \\ 0 & \text{se } j > m. \end{cases}$$

Observação 2.1.6 Da demonstração acima decorre que

$$d^j P \in \mathcal{P}^{(m-j)} E; \mathcal{L}^s(j E; F)) \text{ e}$$

$$\widehat{d^j} P \in \mathcal{P}^{(m-j)} E; \mathcal{P}(j E; F)),$$

para $P \in \mathcal{P}^m E; F)$ e $j = 0, \dots, m$.

2.2 Tipos de holomorfia

Definição 2.2.1 Sejam E, F espaços de Banach. Um *tipo de holomorfia* Θ de E em F é uma sequência de espaços de Banach $(\mathcal{P}_\Theta(m E; F), \|\cdot\|_\Theta)_{m=0}^\infty$ para a qual são válidas as seguintes afirmações:

- (1) Cada $\mathcal{P}_\Theta(m E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}^m E; F)$;
- (2) $\mathcal{P}_\Theta(0 E; F)$ coincide com $\mathcal{P}(0 E; F) = F$ como espaço vetorial normado;
- (3) Existe um número real $\sigma \geq 1$ tal que, dados $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m$, $a \in E$ e $P \in \mathcal{P}_\Theta(m E; F)$, vale que

$$\widehat{d^k} P(a) \in \mathcal{P}_\Theta(k E; F) \text{ e}$$

$$\left\| \frac{1}{k!} \widehat{d^k} P(a) \right\|_\Theta \leq \sigma^m \cdot \|P\|_\Theta \cdot \|a\|^{m-k}.$$

Observação 2.2.2 Nas condições da Definição 2.2.1, se $P \in \mathcal{P}_\Theta(m E; F)$ e $k \leq m$, então

$$\widehat{\check{P} a^{m-k}} = \frac{(m-k)!}{m!} \widehat{d^k} P(a) \in \mathcal{P}_\Theta(k E; F)$$

e

$$\left\| \widehat{\check{P} a^{m-k}} \right\|_\Theta \leq \frac{\sigma^m \cdot (m-k)! \cdot k!}{m!} \cdot \|P\|_\Theta \cdot \|a\|^{m-k}.$$

De fato, como $P \in \mathcal{P}_\Theta(m E; F)$ e $\mathcal{P}_\Theta(m E; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}^m E; F)$, temos que $P \in \mathcal{P}^m E; F)$ e, pelo Exemplo 2.1.5

$$\frac{1}{k!} \widehat{d^k} P(a)(y) = \binom{m}{k} \check{P} a^{m-k} y^k, \quad 0 \leq k \leq m.$$

Assim

$$\frac{1}{k!} \widehat{d^k P(a)}(y) = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!} \check{P} a^{m-k} y^k = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!} \widehat{\check{P} a^{m-k}}(y)$$

Logo, como $\widehat{d^k P(a)} \in \mathcal{P}_\Theta(^k E; F)$, temos $\widehat{\check{P} a^{m-k}} = \frac{(m-k)!}{m!} \widehat{d^k P(a)} \in \mathcal{P}_\Theta(^k E; F)$ e também temos

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\check{P} a^{m-k}} \right\|_\Theta &= \left\| \frac{(m-k)!}{m!} \widehat{d^k P(a)} \right\|_\Theta = \frac{(m-k)!}{m!} \left\| \widehat{d^k P(a)} \right\|_\Theta \\ &= \frac{k! \cdot (m-k)!}{m!} \left\| \frac{1}{k!} \widehat{d^k P(a)} \right\|_\Theta \leq \frac{k! \cdot (m-k)!}{m!} \cdot \sigma^m \cdot \|P\|_\Theta \cdot \|a\|^{m-k}. \end{aligned}$$

O resultado a seguir será útil para exibir exemplos de tipos de holomorfia.

Proposição 2.2.3 *Sejam E e F espaços de Banach e, para cada $m \in \mathbb{N}$, $Q(^m E; F)$ um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^m E; F)$ com $Q(^0 E; F) = F$. Se $\widehat{d^k P(a)} \in Q(^k E; F)$ sempre que $k \leq m$, $a \in E$ e $P \in Q(^m E; F)$, então $\left(\overline{Q(^m E; F)} \right)_{m=0}^\infty$ é um tipo de holomorfia de E em F com a norma usual de polinômios.*

Demonstração. De fato, por [23, Teorema 2.3.1] sabemos que $(\overline{Q(^m E; F)}, \|\cdot\|)_{m=0}^\infty$ é uma sequência de espaços de Banach em que cada $\overline{Q(^m E; F)}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^m E; F)$. Dados $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m$, $a \in E$ e $P \in \overline{Q(^m E; F)}$, existe uma sequência $(P_j)_{j=1}^\infty$ em $Q(^m E; F)$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|P - P_j\| = 0$. Pelo que vimos na Observação 2.1.5,

$$\widehat{d^k P_j(a)} = \frac{m!}{(m-k)!} \widehat{\check{P}_j a^{m-k}} \quad \text{e} \quad \widehat{d^k P(a)} = \frac{m!}{(m-k)!} \widehat{\check{P} a^{m-k}}.$$

Como $\widehat{d^k P_j(a)} \in Q(^k E; F)$, temos $\widehat{\check{P}_j a^{m-k}} \in Q(^k E; F)$. Ademais,

$$\left\| \widehat{\check{P} a^{m-k}} - \widehat{\check{P}_j a^{m-k}} \right\| = \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\| \leq 1}} \left\| \widehat{\check{P} a^{m-k}}(y) - \widehat{\check{P}_j a^{m-k}}(y) \right\|,$$

onde

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\check{P} a^{m-k}}(y) - \widehat{\check{P}_j a^{m-k}}(y) \right\| &= \left\| \left(\widehat{\check{P} a^{m-k}} - \widehat{\check{P}_j a^{m-k}} \right)(y) \right\| \\ &= \left\| \left(\check{P} a^{m-k} - \check{P}_j a^{m-k} \right)^\wedge(y) \right\| \\ &\leq \left\| \check{P} a^{m-k} - \check{P}_j a^{m-k} \right\| \cdot \|y\|^k, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left\| \check{P} a^{m-k} - \check{P}_j a^{m-k} \right\| &= \sup_{\substack{x_i \in E \\ \|x_i\| \leq 1 \\ i=1, \dots, k}} \left\| \left(\check{P} a^{m-k} - \check{P}_j a^{m-k} \right)(x_1, \dots, x_k) \right\| \\ &= \sup_{\substack{x_i \in E \\ \|x_i\| \leq 1 \\ i=1, \dots, k}} \left\| \check{P}(a, \dots, a, x_1, \dots, x_k) - \check{P}_j(a, \dots, a, x_1, \dots, x_k) \right\| \\ &= \sup_{\substack{x_i \in E \\ \|x_i\| \leq 1 \\ i=1, \dots, k}} \left\| \left(\check{P} - \check{P}_j \right)(a, \dots, a, x_1, \dots, x_k) \right\| \\ &\leq \left\| \check{P} - \check{P}_j \right\| \cdot \|a\|^{m-k}. \end{aligned}$$

Logo

$$\|\widehat{\check{P}a^{m-k}}(y) - \widehat{\check{P}_ja^{m-k}}(y)\| \leq \|\check{P} - \check{P}_j\| \cdot \|a\|^{m-k} \cdot \|y\|^k,$$

e

$$\|\widehat{\check{P}a^{m-k}} - \widehat{\check{P}_ja^{m-k}}\| \leq \|\check{P} - \check{P}_j\| \cdot \|a\|^{m-k} \leq \frac{m^m}{m!} \|P - P_j\| \cdot \|a\|^{m-k}.$$

Assim $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\widehat{\check{P}a^{m-k}} - \widehat{\check{P}_ja^{m-k}}\| = 0$, onde $\left(\widehat{\check{P}_ja^{m-k}}\right)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência em $Q({}^kE; F)$.

Segue que $\widehat{\check{P}a^{m-k}} \in \overline{Q({}^kE; F)}$ e portanto $\widehat{d^k P}(a) \in \overline{Q({}^kE; F)}$. Mais ainda,

$$\left\| \frac{1}{k!} \widehat{d^k P}(a) \right\| = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!} \left\| \widehat{\check{P}a^{m-k}} \right\|,$$

e também sabemos que

$$\left\| \widehat{\check{P}a^{m-k}} \right\| = \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\| \leq 1}} \left\| \widehat{\check{P}a^{m-k}}(y) \right\|.$$

Daí, se $y \in E$ e $\|y\| \leq 1$, então

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\check{P}a^{m-k}}(y) \right\| &= \|(\check{P}a^{m-k})(y)^k\| \leq \|\check{P}\| \cdot \|a\|^{m-k} \cdot \|y\|^k \\ &\leq \frac{m^m}{m!} \cdot \|P\| \cdot \|a\|^{m-k} \cdot \|y\|^k \leq \frac{m^m}{m!} \cdot \|P\| \cdot \|a\|^{m-k}, \end{aligned}$$

logo

$$\left\| \widehat{\check{P}a^{m-k}} \right\| \leq \frac{m^m}{m!} \cdot \|P\| \cdot \|a\|^{m-k}$$

e

$$\left\| \frac{1}{k!} \widehat{d^k P}(a) \right\| \leq \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!} \cdot \frac{m^m}{m!} \cdot \|P\| \cdot \|a\|^{m-k}.$$

Da conhecida expansão da exponencial real $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x \geq 0$ e da desi-

gualdade óbvia $\frac{x^m}{m!} \leq \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!}$ para $k \geq m$, segue que $\frac{x^m}{m!} \leq e^x$, para todo $x \geq 0$, e portanto $\frac{m^m}{m!} \leq e^m$. Por outro lado, $2^m \geq \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$ (veja, por exemplo, [21, observação 2.2.2]). Logo temos

$$\left\| \frac{1}{k!} \widehat{d^k P}(a) \right\| \leq (2e)^m \cdot \|P\| \cdot \|a\|^{m-k}.$$

■

2.3 Exemplos de tipos de holomorfia

Quando omitirmos a norma, estaremos considerando a norma usual $\|\cdot\|$ (norma do supremo) de polinômios.

Exemplo 2.3.1 Vejamos que, para quaisquer espaços de Banach E e F , $(\mathcal{P}({}^m E; F))_{m=0}^\infty$ é um tipo de holomorfia de E em F .

Isso é imediato a partir da Proposição 2.2.3, pois $\mathcal{P}({}^m E; F) = \overline{\mathcal{P}({}^m E; F)}$. Note que se $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}_0$ com $k \leq m$, $a \in E$ e $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$, vale que $\widehat{d}^k P(a) = \frac{m!}{(m-k)!} \widehat{\check{P}a^{m-k}}$, onde $\widehat{\check{P}a^{m-k}} \in \mathcal{P}({}^k E; F)$, e portanto $\widehat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}({}^k E; F)$.

Exemplo 2.3.2 (Polinômios de tipo finito e polinômios aproximáveis) Dados espaços de Banach E e F , um funcional $\varphi \in E'$, um vetor $b \in F$ e um número natural $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$\varphi^m \otimes b: E \longrightarrow F, \quad \varphi^m \otimes b(x) = \varphi(x)^m \cdot b.$$

Afirmção. $\varphi^m \otimes b \in \mathcal{P}({}^m E; F)$ e $\|\varphi^m \otimes b\| = \|\varphi\|^m \cdot \|b\|$.

Do Exemplo 1.1.14 sabemos que a aplicação

$$A: E^m \longrightarrow F, \quad A(x_1, \dots, x_m) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_m) \cdot b,$$

é m -linear e contínua. É imediato que $\varphi^m \otimes b(x) = Ax^m$ para todo $x \in E$, logo $\varphi^m \otimes b \in \mathcal{P}({}^m E; F)$. Como A é simétrica, temos $A = (\varphi^m \otimes b)^\vee$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \|\varphi^m \otimes b\| &= \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|\varphi^m \otimes b(x)\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|\varphi(x)^m \cdot b\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |\varphi(x)|^m \cdot \|b\| \\ &= \left(\sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |\varphi(x)| \right)^m \cdot \|b\| = \|\varphi\|^m \cdot \|b\|. \end{aligned}$$

Os elementos do conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_f({}^m E; F) &:= \text{span} \{ \varphi^m \otimes b : \varphi \in E', b \in F \} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^k \varphi_j^m \otimes b_j : k \in \mathbb{N}, \varphi_j \in E', b_j \in F, j = 1, \dots, k \right\} \end{aligned}$$

são chamados de *polinômios m -homogêneos contínuos de tipo finito*. Da expressão acima é claro que $\mathcal{P}_f({}^m E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}({}^m E; F)$.

Dizemos que um polinômio $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$ é *aproximável* se $P \in \overline{\mathcal{P}_f({}^m E; F)}$, isto é, se existe uma sequência $P_j \in \mathcal{P}_f({}^m E; F)$, $j \in \mathbb{N}$, tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P - P_j\| = 0.$$

Denotamos por $\mathcal{P}_A({}^m E; F)$ o conjunto dos polinômios m -homogêneos contínuos aproximáveis de E em F , ou seja,

$$\mathcal{P}_A({}^m E; F) = \overline{\mathcal{P}_f({}^m E; F)}.$$

O objetivo deste exemplo é mostrar que a sequência $(\mathcal{P}_A({}^m E; F), \|\cdot\|)_{m=0}^\infty$ é um tipo de holomorfia de E em F .

Notemos que $\mathcal{P}_A(^0E; F) = F$ pois $\varphi^0 \otimes b = b$ é constante. Pela Proposição 2.2.3 basta provar que se $P \in \mathcal{P}_f(^mE; F)$, $k \leq m$, $a \in E$, então $\widehat{\check{P}a^{m-k}} \in \mathcal{P}_f(^kE; F)$.

De fato, como $P \in \mathcal{P}_f(^mE; F)$, então $P = \sum_{j=1}^l \varphi_j^m \otimes b_j$ para alguns $l \in \mathbb{N}$, $\varphi_j \in E'$, $b_j \in F$. É claro que $\check{P} = \sum_{j=1}^l A_j$ onde

$$A_j: E^m \longrightarrow F, \quad A_j(x_1, \dots, x_m) = \varphi_j(x_1) \cdots \varphi_j(x_m) b_j,$$

para $j = 1, \dots, l$. Assim,

$$\begin{aligned} \widehat{\check{P}a^{m-k}}(y) &= \check{P}a^{m-k}y^k = \left(\sum_{j=1}^l A_j \right) a^{m-k}y^k = \sum_{j=1}^l A_j(a, \dots, a, y, \dots, y) \\ &= \sum_{j=1}^l [\varphi_j(a)]^{m-k} \cdot [\varphi_j(y)]^k \cdot b_j = \sum_{j=1}^l [\varphi_j(y)]^k \cdot [b_j \cdot (\varphi_j(a))^{m-k}], \end{aligned}$$

e

$$\widehat{\check{P}a^{m-k}} = \sum_{j=1}^l \varphi_j^k \otimes [b_j \cdot (\varphi_j(a))^{m-k}] \in \mathcal{P}_f(^kE; F).$$

Como $\widehat{d^k P}(a) = \frac{m!}{(m-k)!} \widehat{\check{P}a^{m-k}}$, segue que $\widehat{d^k P}(a) \in \mathcal{P}_f(^kE; F)$.

Exemplo 2.3.3 (Polinômios aproximáveis por polinômios de posto finito) Vejamos que, para todos espaços de Banach E e F , $\left(\overline{\mathcal{P}_{\mathfrak{F}}(^mE; F)} \right)_{m=0}^{\infty}$ é um tipo de holomorfia de E em F .

De fato, pela Proposição 1.2.10 sabemos que

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{F}}(^mE; F) = \left\{ \sum_{j=1}^l Q_j \otimes b_j : l \in \mathbb{N}; Q_j \in \mathcal{P}(^mE), b_j \in F \right\}.$$

Em particular, $\mathcal{P}_{\mathfrak{F}}(^mE; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^mE; F)$. É imediato que $\mathcal{P}_{\mathfrak{F}}(^0E; F) = F$. Sejam $k \leq m$, $a \in E$ e $P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{F}}(^mE; F)$. Então

$$P = \sum_{j=1}^l Q_j \otimes b_j \text{ onde } l \in \mathbb{N}, Q_j \in \mathcal{P}(^mE), b_j \in F.$$

Notemos que $\check{P} = \sum_{j=1}^l W_j$, onde

$$W_j: E^m \longrightarrow F, \quad W_j(x_1, \dots, x_m) = \check{Q}_j(x_1, \dots, x_m) b_j,$$

para $j = 1, \dots, l$. Assim

$$\begin{aligned}\widehat{\check{P}a^{m-k}}(y) &= \check{P}a^{m-k}y^k = \left(\sum_{j=1}^l W_j \right) a^{m-k}y^k = \sum_{j=1}^l W_j(a, \dots, a, y, \dots, y) \\ &= \sum_{j=1}^l \check{Q}_j(a, \dots, a, y, \dots, y)b_j = \sum_{j=1}^l \check{Q}_ja^{m-k}y^kb_j = \sum_{j=1}^l \widehat{\check{Q}_ja^{m-k}}(y)b_j,\end{aligned}$$

donde segue que

$$\widehat{\check{P}a^{m-k}} = \sum_{j=1}^l \widehat{\check{Q}_ja^{m-k}} \otimes b_j \in \mathcal{P}_{\mathfrak{F}}({}^kE; F),$$

pois $\widehat{\check{Q}_ja^{m-k}} \in \mathcal{P}({}^kE)$. De $\widehat{d^k P}(a) = \frac{m!}{(m-k)!} \widehat{\check{P}a^{m-k}}$ concluímos que $\widehat{d^k P}(a) \in \mathcal{P}_{\mathfrak{F}}({}^kE; F)$. E assim pela Proposição 2.2.3 temos o resultado.

Para o próximo exemplo precisamos do seguinte resultado preliminar:

Lema 2.3.4 *Seja F um espaço vetorial normado e seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ uma série convergente em F . Então*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_{2i-1} + a_{2i}) = a.$$

Demonstração. Notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^k (a_{2i-1} + a_{2i}) = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{i=1}^{2k} a_i.$$

Mas $\left(\sum_{i=1}^{2k} a_i \right)_{k=1}^{\infty}$ é uma subsequência de $\left(\sum_{i=1}^k a_i \right)_{k=1}^{\infty}$, e esta última sequência converge

para a pois $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$. Logo $\left(\sum_{i=1}^{2k} a_i \right)_{k=1}^{\infty} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$, e portanto $\sum_{i=1}^{\infty} (a_{2i-1} + a_{2i}) = a$. ■

Exemplo 2.3.5 (Polinômios m -homogêneos nucleares) Um polinômio $P \in \mathcal{P}({}^mE; F)$ é dito *nuclear* se podemos escrever P na forma

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i(x)^m y_i, \quad (2.1)$$

em $(x'_i)_{i=1}^{\infty} \subset E'$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty} \subset F$ são sequências limitadas tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^m \cdot \|y_i\| < \infty. \quad (2.2)$$

Neste caso definimos

$$\|P\|_N := \inf \sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^m \cdot \|y_i\|,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências $(x'_i)_{i=1}^{\infty} \subset E'$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty} \subset F$ limitadas, tais que (2.1) e (2.2) são satisfeitas.

Denotamos por $\mathcal{P}_N(mE; F)$ o conjunto de todos os polinômios m -homogêneos nucleares de E em F . No caso linear denotamos por $\mathcal{L}_N(E; F)$ o conjunto de todos os operadores nucleares de E em F . Quando $m = 0$ definimos $\mathcal{P}_N(0E; F) = F$.

O objetivo deste exemplo é mostrar que a sequência $(\mathcal{P}_N(mE; F), \|\cdot\|_N)_{m=0}^{\infty}$ é um tipo de holomorfia de E em F . Para isso provemos que:

(i) $\mathcal{P}_N(mE; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}(mE; F)$ para $m \geq 1$.

Sejam $P, Q \in \mathcal{P}_N(mE; F)$, digamos

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i(x)^m y_i, \quad Q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} z'_i(x)^m w_i, \quad (2.3)$$

onde $(x'_i)_{i=1}^{\infty}, (z'_i)_{i=1}^{\infty} \subset E'$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty}, (w_i)_{i=1}^{\infty} \subset F$ são sequências limitadas tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^m \cdot \|y_i\| < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|z'_i\|^m \cdot \|w_i\| < \infty. \quad (2.4)$$

Dado $x \in E$, definamos a série

$$x'_1(x)^m y_1 + z'_1(x)^m w_1 + x'_2(x)^m y_2 + z'_2(x)^m w_2 + \cdots + x'_n(x)^m y_n + z'_n(x)^m w_n + \cdots. \quad (2.5)$$

Chamando

$$\begin{aligned} s_1 &= \|x'_1\|^m \cdot \|y_1\|, \\ s_2 &= \|x'_1\|^m \cdot \|y_1\| + \|z'_1\|^m \cdot \|w_1\|, \\ s_3 &= \|x'_1\|^m \cdot \|y_1\| + \|z'_1\|^m \cdot \|w_1\| + \|x'_2\|^m \cdot \|y_2\|, \\ &\vdots \end{aligned}$$

por (2.4) sabemos que $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência crescente e limitada de números reais. Logo a série

$$\|x'_1\|^m \cdot \|y_1\| + \|z'_1\|^m \cdot \|w_1\| + \|x'_2\|^m \cdot \|y_2\| + \|z'_2\|^m \cdot \|w_2\| + \cdots + \|x'_n\|^m \cdot \|y_n\| + \|z'_n\|^m \cdot \|w_n\| + \cdots$$

é convergente e, pelo Lema 2.3.4, converge para

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\|x'_i\|^m \cdot \|y_i\| + \|z'_i\|^m \cdot \|w_i\|) = \sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^m \cdot \|y_i\| + \sum_{i=1}^{\infty} \|z'_i\|^m \cdot \|w_i\|.$$

Vejamos que a série (2.5) converge para $[P(x) + Q(x)]$. De fato, a série (2.5) é absolutamente convergente pois

$$\begin{aligned} &\|x'_1(x)^m\| \cdot \|y_1\| + \|z'_1(x)^m\| \cdot \|w_1\| + \cdots + \|x'_n(x)^m\| \cdot \|y_n\| + \|z'_n(x)^m\| \cdot \|w_n\| \leq \\ &[\|x'_1\|^m \cdot \|y_1\| + \|z'_1\|^m \cdot \|w_1\| + \cdots + \|x'_n\|^m \cdot \|y_n\| + \|z'_n\|^m \cdot \|w_n\|] \|x\|^m. \end{aligned}$$

Como F é Banach, pelo Teorema 1.3.4 concluímos que a série (2.5) é convergente e pelo Lema 2.3.4 segue que (2.5) converge para

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x'_i(x)^m y_i + z'_i(x)^m w_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i(x)^m y_i + \sum_{i=1}^{\infty} z'_i(x)^m w_i = P(x) + Q(x).$$

A demonstração de que se $P \in \mathcal{P}_N(mE; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então $\lambda P \in \mathcal{P}_N(mE; F)$ decorre imediatamente da definição, por isso omitimos os detalhes.

(ii) $\|\cdot\|_N$ é uma norma em $\mathcal{P}_N(mE; F)$, $m \geq 1$.

É claro que $\|P\|_N \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{P}_N(mE; F)$ e que $\|0\|_N = 0$. Suponhamos que $P \in \mathcal{P}_N(mE; F)$ é tal que $\|P\|_N = 0$. Para todo $\varepsilon > 0$ existem sequências $(x'_i)_{i=1}^{\infty} \subset E'$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty} \subset F$ limitadas tais que

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i(x)^m y_i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^m \cdot \|y_i\| < \varepsilon.$$

para todo $x \in E$. Logo

$$\begin{aligned} \|P(x)\| &= \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k x'_i(x)^m y_i \right\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^k x'_i(x)^m y_i \right\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |x'_i(x)|^m \cdot \|y_i\| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \|x'_i\|^m \cdot \|x\|^m \cdot \|y_i\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^m \cdot \|y_i\| \right) \cdot \|x\|^m < \varepsilon \cdot \|x\|^m, \end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Então $\|P\| \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, ou seja $\|P\| = 0$, donde segue que $P = 0$.

Novamente, a demonstração de que se $P \in \mathcal{P}_N(mE; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então $\|\lambda P\|_N = |\lambda| \cdot \|P\|_N$ é imediata e, uma vez mais, omitimos os detalhes.

Para provar a desigualdade triangular, sejam $P, Q \in \mathcal{P}_N(nE; F)$. De acordo com (2.3) e (2.4), já provamos que

$$P(x) + Q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (x'_i(x)^m y_i + z'_i(x)^m w_i), \text{ para todo } x \in E, \text{ e}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\|x'_i\|^m \cdot \|y_i\| + \|z'_i\|^m \cdot \|w_i\|) = \sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^m \cdot \|y_i\| + \sum_{i=1}^{\infty} \|z'_i\|^m \cdot \|w_i\|.$$

Dai,

$$\|P + Q\|_N \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^m \cdot \|y_i\| + \sum_{i=1}^{\infty} \|z'_i\|^m \cdot \|w_i\|.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações nucleares de P e de Q segue a desigualdade triangular $\|P + Q\|_N \leq \|P\|_N + \|Q\|_N$.

(iii) O espaço normado $(\mathcal{P}_N(mE; F), \|\cdot\|_N)$ é completo.

Seja $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{P}_N(^mE; F)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n\|_N < \infty$. Devemos provar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ converge em $\mathcal{P}_N(^mE; F)$. Como $\|P_n\|_N \rightarrow 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|P_n\|_N \leq 1$ para todo $n \geq n_0$. Daí podemos supor, sem perda de generalidade, que $\|P_n\|_N \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existem sequências limitadas $(\varphi_{ni})_{i=1}^{\infty} \subset E'$ e $(y_{ni})_{i=1}^{\infty} \subset F$ tais que $P_n = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_{ni})^m y_{ni}$ e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_{ni}\|^m \cdot \|y_{ni}\| < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \cdot \|P_n\|_N.$$

Como $\|P_n\|_N \leq 1$ para todo n , segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_{ni}\|^m \cdot \|y_{ni}\| < \|P_n\|_N + \frac{\varepsilon}{2^n} \cdot \|P_n\|_N \leq \|P_n\|_N + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Para cada n ,

$$\begin{aligned} \|P_n\| &= \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{ni}(x)^m y_{ni} \right\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^k \varphi_{ni}(x)^m y_{ni} \right\| \\ &\leq \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |\varphi_{ni}(x)|^m \cdot \|y_{ni}\| \leq \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \|\varphi_{ni}\|^m \cdot \|y_{ni}\| \right) \cdot \|x\|^m \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_{ni}\|^m \cdot \|y_{ni}\| < \|P_n\|_N + \frac{\varepsilon}{2^n}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\|P_n\|_N + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n\|_N + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n\|_N + \varepsilon < +\infty.$$

Isso quer dizer que a série $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ é absolutamente convergente no espaço de Banach

$\mathcal{P}(^mE; F)$. Pelo Teorema 1.3.4 segue que $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ é convergente em $\mathcal{P}(^mE; F)$, digamos

$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = P \in \mathcal{P}(^mE; F)$. Logo

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{ni}^m y_{ni} = \sum_{n,i=1}^{\infty} \varphi_{ni}^m y_{ni},$$

onde a reordenação é garantida pela convergência absoluta e pelo Teorema 1.3.4. Ademais,

$$\begin{aligned}\sum_{n,i=1}^{\infty} \|\varphi_{ni}\|^m \cdot \|y_{ni}\| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_{ni}\|^m \cdot \|y_{ni}\| \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\|P_n\|_N + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n\|_N + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n\|_N + \varepsilon < +\infty,\end{aligned}$$

provando que $P \in \mathcal{P}_N({}^m E; F)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{n=1}^k P_n - P \right\|_N &= \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} P_n \right\|_N = \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_{ni})^m y_{ni} \right\|_N \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_{ni}\|^m \cdot \|y_{ni}\| = \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_{ni}\|^m \cdot \|y_{ni}\| \right) \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \cdot \|P_n\|_N < (1 + \varepsilon) \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} \|P_n\|_N,\end{aligned}$$

para todo k . Logo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^k P_n - P \right\|_N \leq (1 + \varepsilon) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} \|P_n\|_N = 0,$$

o que prova a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ para P em $\mathcal{P}_N({}^m E; F)$.

(iv) Condição (3) da Definição 2.2.1,

Sejam $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m$, $a \in E$ e $P \in \mathcal{P}_N({}^m E; F)$. Dado $\varepsilon > 0$. Como $P \in \mathcal{P}_N({}^m E; F)$, podemos escrever

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i(x)^m y_i,$$

para todo $x \in E$, onde $(x'_i)_{i=1}^{\infty} \subset E'$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty} \subset F$ são sequências limitadas tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^m \cdot \|y_i\| < \|P\|_N + \varepsilon.$$

Da Fórmula de Polarização, para todos $x_1, \dots, x_m \in E$,

$$\begin{aligned}
\check{P}(x_1, \dots, x_m) &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m) \\
&= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \left(\sum_{i=1}^{\infty} x'_i(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m y_i \right) \\
&= \frac{1}{m!2^m} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m x'_i(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m y_i \\
&= \frac{1}{m!2^m} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m [\varepsilon_1 x'_i(x_1) + \cdots + \varepsilon_m x'_i(x_m)]^m \right) \cdot y_i \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{m!2^m} \sum_{i=1}^{\infty} m!2^m x'_i(x_1) \cdots x'_i(x_m) y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i(x_1) \cdots x'_i(x_m) y_i.
\end{aligned}$$

Em $(*)$ usamos que, para todos escalares $a_1, \dots, a_m$,

$$\sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m [\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_m a_m]^m = m!2^m a_1 \cdots a_m.$$

Segue então que, para todo $t \in E$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!} \hat{d}^k P(a)(t) &= \frac{m!}{k!(m-k)!} \check{P} a^{m-k} t^k \\
&= \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{x'_i(a) \cdots x'_i(a)}_{m-k \text{ vezes}} \cdot \underbrace{x'_i(t) \cdots x'_i(t)}_{k \text{ vezes}} \cdot y_i \\
&= \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{i=1}^{\infty} [x'_i(a)]^{m-k} \cdot [x'_i(t)]^k \cdot y_i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} [x'_i(t)]^k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot [x'_i(a)]^{m-k} \cdot y_i.
\end{aligned}$$

Definindo, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$w_i = \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot [x'_i(a)]^{m-k} \cdot y_i \in F,$$

de

$$\|w_i\| = \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \|x'_i(a)\|^{m-k} \cdot \|y_i\| \leq \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \|x'_i\|^{m-k} \cdot \|a\|^{m-k} \cdot \|y_i\|,$$

segue que a sequência $(w_i)_{i=1}^\infty$ é limitada em F . Além disso,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^k \cdot \|w_i\| &= \sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \|[x'_i(a)]^{m-k} \cdot y_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \|x'_i\|^k \cdot \|x'_i\|^{m-k} \cdot \|a\|^{m-k} \cdot \|y_i\| \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \|a\|^{m-k} \cdot \|x'_i\|^m \cdot \|y_i\| \\
&\leq 2^m \cdot \|a\|^{m-k} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^m \cdot \|y_i\| \right) < +\infty,
\end{aligned}$$

provando que $\frac{1}{k!} \widehat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}_N({}^k E; F)$. Ocorre que

$$\left\| \frac{1}{k!} \widehat{d}^k P(a) \right\|_N = \sup_{\substack{t \in E \\ \|t\| \leq 1}} \left\| \frac{1}{k!} \widehat{d}^k P(a)(t) \right\| = \sup_{\substack{t \in E \\ \|t\| \leq 1}} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} [x'_i(t)]^k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot [x'_i(a)]^{m-k} \cdot y_i \right\|,$$

e para cada $l \in \mathbb{N}$, se $\|t\| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^l [x'_i(t)]^k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot [x'_i(a)]^{m-k} \cdot y_i \right\| &\leq \sum_{i=1}^l \|x'_i(t)\|^k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \|x'_i(a)\|^{m-k} \cdot \|y_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^l \|x'_i\|^k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \|x'_i\|^{m-k} \cdot \|a\|^{m-k} \cdot \|y_i\| \\
&= \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \|a\|^{m-k} \cdot \left(\sum_{i=1}^l \|x'_i\|^m \cdot \|y_i\| \right).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{k!} \widehat{d}^k P(a)(t) \right\| &\leq \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \|a\|^{m-k} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^m \cdot \|y_i\| \right) \\
&\leq \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \|a\|^{m-k} \cdot (\|P\|_N + \varepsilon) \leq 2^m \cdot (\|P\|_N + \varepsilon) \cdot \|a\|^{m-k}.
\end{aligned}$$

Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, segue que

$$\left\| \frac{1}{k!} \widehat{d}^k P(a) \right\| \leq 2^m \cdot \|P\|_N \cdot \|a\|^{m-k}.$$

2.4 Funções holomorfas associadas a um tipo de holomorfia

As funções holomorfas associadas a um tipo de holomorfia foram introduzidas por Nachbin em [27, Definition 9.2]. Este conceito foi muito utilizado quando foi introduzido (veja,

por exemplo, [18, 19]), e também tem sido utilizado recentemente (veja, por exemplo, [3, 6, 11, 15]).

Definição 2.4.1 Sejam $(\mathcal{P}_\Theta(^m E; F))_{m=0}^\infty$ um tipo de holomorfia do espaço de Banach E no espaço de Banach F e U um subconjunto aberto de E . Dizemos que uma função holomorfa $f \in \mathcal{H}(U; F)$ é de Θ -tipo de holomorfia em $\xi \in U$ se:

- (1) $\widehat{d}^m f(\xi) \in \mathcal{P}_\Theta(^m E; F)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
- (2) Existem números $C \geq 0$ e $c \geq 0$ tais que $\left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(\xi) \right\|_\Theta \leq C \cdot c^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Dizemos que f é de Θ -tipo de holomorfia em U se f é Θ -tipo de holomorfia em todo ponto de U . Denotaremos por $\mathcal{H}_\Theta(U; F)$ o subconjunto de $\mathcal{H}(U; F)$ formado pelas funções de Θ -tipo de holomorfia em U .

Proposição 2.4.2 Se $(\mathcal{P}_\Theta(^m E; F), F)_{m=0}^\infty$ é um tipo de holomorfia do espaço de Banach E no espaço de Banach F e U um subconjunto aberto de E , então $\mathcal{H}_\Theta(U; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{H}(U; F)$.

Demonstração. Por definição sabemos que $\mathcal{H}_\Theta(U; F) \subset \mathcal{H}(U; F)$. Sejam $f, g \in \mathcal{H}_\Theta(U; F)$ e seja $\xi \in U$. Pela condição (1) da Definição 2.4.1 sabemos que $\widehat{d}^m f(\xi), \widehat{d}^m g(\xi) \in \mathcal{P}_\Theta(^m E; F)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e pela condição (2) da mesma definição existem números $C, c, K, k \geq 0$ tais que

$$\left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(\xi) \right\|_\Theta \leq C \cdot c^m, \quad \left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m g(\xi) \right\|_\Theta \leq K \cdot k^m$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $f, g \in \mathcal{H}(U; F)$ e $\mathcal{H}(U; F)$ é espaço vetorial, temos $f + g \in \mathcal{H}(U; F)$ e, mais ainda, $P^m(f + g)(\xi) = P^m(f)(\xi) + P^m(g)(\xi)$, onde $P^m(f)(\xi) = \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(\xi)$ e $P^m(g)(\xi) = \frac{1}{m!} \widehat{d}^m g(\xi)$. Logo

$$P^m(f + g)(\xi) = \frac{1}{m!} \widehat{d}^m(f + g)(\xi) = \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(\xi) + \frac{1}{m!} \widehat{d}^m g(\xi),$$

e portanto $\widehat{d}^m(f + g)(\xi) = \widehat{d}^m f(\xi) + \widehat{d}^m g(\xi) \in \mathcal{P}_\Theta(^m E; F)$ e

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m(f + g)(\xi) \right\|_\Theta &= \left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(\xi) + \frac{1}{m!} \widehat{d}^m g(\xi) \right\|_\Theta \\ &\leq \left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(\xi) \right\|_\Theta + \left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m g(\xi) \right\|_\Theta \\ &\leq C \cdot c^m + K \cdot k^m \leq S \cdot s^m, \end{aligned}$$

onde $S = \max\{C, K\}$ e $s = \max\{c, k\}$.

Sejam agora $f \in \mathcal{H}_\Theta(U; F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\xi \in U$. Então $\widehat{d}^m f(\xi) \in \mathcal{P}_\Theta(^m E; F)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e existem números $C \geq 0, c \geq 0$ tais que

$$\left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(\xi) \right\|_\Theta \leq C \cdot c^m$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Da mesma forma que antes, temos $\lambda f \in \mathcal{H}(U; F)$ e $P^m(\lambda f)(\xi) = \lambda P^m(f)(\xi)$, onde $P^m(f)(\xi) = \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(\xi)$. Logo

$$P^m(\lambda f)(\xi) = \frac{1}{m!} \widehat{d}^m(\lambda f)(\xi) = \lambda \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(\xi)$$

e portanto $\widehat{d}^m(\lambda f)(\xi) = \lambda \widehat{d}^m f(\xi) \in \mathcal{P}_\Theta({}^m E; F)$ e

$$\left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m(\lambda f)(\xi) \right\|_\Theta = \left\| \lambda \cdot \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(\xi) \right\|_\Theta = |\lambda| \left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(\xi) \right\|_\Theta \leq (|\lambda| \cdot C) \cdot c^m$$

■

CAPÍTULO 3

DIFERENCIAÇÃO DE TIPOS DE HOLOMORFIA

No Capítulo 10 de [27], L. Nachbin ensina como obter novos tipos de holomorfia a partir da diferenciação de um tipo de holomorfia dado. Entretanto, as demonstrações lá apresentadas são apenas esquematizadas e com passagens muito pouco justificadas. O objetivo central deste capítulo é dar demonstrações completas, detalhadas e justificadas dos resultados que aparecem no referido capítulo.

3.1 Resultados preliminares

Antes de falar sobre diferenciação de tipos de holomorfia, precisamos apresentar alguns resultados sobre funções holomorfas que serão necessários. As primeiras definições e notações sobre funções holomorfas foram apresentadas na Seção 2.4.

Nesta seção, E e F serão espaços de Banach complexos e U denotará um aberto de E .

Proposição 3.1.1 (Fórmula integral de Cauchy) *Sejam $f \in \mathcal{H}(U; F)$, $\xi \in U$, $x \in U$ e $\rho > 1$ tais que $(1 - \lambda)\xi + \lambda x \in U$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| \leq \rho$. Então*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1 - \lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda - 1} d\lambda.$$

Demonstração. Consideremos a função contínua

$$\theta: \mathbb{C} \longrightarrow E, \quad \theta(\lambda) = (1 - \lambda)\xi + \lambda x.$$

Como $\theta^{-1}(U)$ é aberto em $\mathbb{C}$, existe um aberto $V \subset \theta^{-1}(U)$ convexo tal que $\bar{D}(0, \rho) \subset V$. Dado $\varphi \in F'$, pela fórmula integral de Cauchy para funções analíticas em $\mathbb{C}$ para abertos convexos, temos

$$(\varphi \circ f \circ \theta)(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{(\varphi \circ f \circ \theta)(\lambda)}{\lambda - 1} d\lambda,$$

pois $1 \in D(0, \rho)$. Assim,

$$\varphi(f(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{[\varphi \circ (f \circ \theta)](\lambda)}{\lambda - 1} d\lambda,$$

e como $f \circ \theta$ é Bochner integrável em $\bar{D}(0, \rho)$ (veja [25, Definição 6.3 e Proposition 6.4]), temos

$$\varphi(f(x)) = \varphi \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda - 1} d\lambda \right)$$

para todo $\varphi \in F'$. Pelo Teorema de Hahn-Banach sabemos que F' separa pontos de F , portanto

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda - 1} d\lambda.$$

■

Proposição 3.1.2 (Fórmula integral de Cauchy) *Sejam $f \in \mathcal{H}(U; F)$, $\xi \in U$, $x \in E$ e $\rho > 0$ tais que $\xi + \lambda x \in U$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| \leq \rho$. Então*

$$\frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(\xi)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\xi + \lambda x)}{\lambda^{m+1}} d\lambda$$

para $m = 0, 1, 2, \dots$

Demonstração. Veja [25, Corollary 7.3] ■

Proposição 3.1.3 (Desigualdade de Cauchy) *Se $f \in \mathcal{H}(U; F)$, $\xi \in U$ e $\rho > 0$ são tais que $\bar{B}_\rho(\xi) \subset U$, então*

$$\left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(\xi) \right\| \leq \frac{1}{\rho^m} \cdot \sup_{\|x-\xi\|=\rho} \|f(x)\|$$

para $m = 0, 1, 2, \dots$. Aqui $\bar{B}_\rho(\xi)$ é uma bola fechada de centro em ξ e raio ρ .

Demonstração. Para cada m , pela Proposição 3.1.2, temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(\xi) \right\| &= \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(\xi)(x) \right\| \\ &= \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\xi + \lambda x)}{\lambda^{m+1}} d\lambda \right\| \\ &= \frac{1}{2\pi} \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \left\| \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\xi + \lambda x)}{\lambda^{m+1}} d\lambda \right\|. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular para a integral de Bochner (veja [9, Corolário 9.7.7] ou [25, Proposition 6.4(b)]), obtemos que para $x \in E$ com $\|x\| = 1$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\xi + \lambda x)}{\lambda^{m+1}} d\lambda \right\| &\leq \int_{|\lambda|=\rho} \left\| \frac{f(\xi + \lambda x)}{\lambda^{m+1}} \right\| d\lambda = \int_{|\lambda|=\rho} \frac{\|f(\xi + \lambda x)\|}{\rho^{m+1}} d\lambda \\ &= \frac{1}{\rho^{m+1}} \cdot \int_{|\lambda|=\rho} \|f(\xi + \lambda x)\| d\lambda \\ &\leq \frac{1}{\rho^{m+1}} \cdot \sup_{|\lambda|=\rho} \|f(\xi + \lambda x)\| \cdot (\text{comprimento de } |\lambda| = \rho) \\ &= \frac{2\pi\rho}{\rho^{m+1}} \cdot \sup_{\|y-\xi\|=\rho} \|f(y)\| = \frac{2\pi}{\rho^m} \cdot \sup_{\|y-\xi\|=\rho} \|f(y)\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(\xi) \right\| \leq \frac{1}{\rho^m} \cdot \sup_{\|y-\xi\|=\rho} \|f(y)\|.$$

■

Relembre que $\tau_{m,f,\xi}$ denota o polinômio de Taylor de ordem m da função holomorfa f em ξ (veja Seção 2.4).

Lema 3.1.4 *Sejam $f \in \mathcal{H}(U; F)$, $\xi \in U$, $x \in U$ e $\rho > 1$ tais que $(1 - \lambda)\xi + \lambda x \in U$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| \leq \rho$. Então*

$$\|f(x) - \tau_{m,f,\xi}(x)\| \leq \frac{1}{\rho^m(\rho - 1)} \cdot \sup_{|\lambda|=\rho} \|f[(1 - \lambda)\xi + \lambda x]\|$$

para $m = 0, 1, 2, \dots$

Demonstração. Para todos $0 \neq \lambda \neq 1$ e $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$\frac{1}{\lambda^{m+1}(\lambda - 1)} = \frac{1}{(\lambda - 1)} - \sum_{k=0}^m \frac{1}{\lambda^{k+1}}.$$

Reescrevendo na forma

$$\frac{1}{(\lambda - 1)} - \sum_{k=0}^m \frac{1}{\lambda^{k+1}} = \frac{1}{\lambda^{m+1}(\lambda - 1)},$$

obtemos

$$\frac{f[(1 - \lambda)\xi + \lambda x]}{(\lambda - 1)} - \sum_{k=0}^m \frac{f[(1 - \lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{k+1}} = \frac{f[(1 - \lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{m+1}(\lambda - 1)}.$$

Daí,

$$\int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1 - \lambda)\xi + \lambda x]}{(\lambda - 1)} d\lambda - \sum_{k=0}^m \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1 - \lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{k+1}} d\lambda = \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1 - \lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{m+1}(\lambda - 1)} d\lambda,$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{(\lambda-1)} d\lambda - \sum_{k=0}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{k+1}} d\lambda \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{m+1}(\lambda-1)} d\lambda. \end{aligned}$$

Pelas Proposições 3.1.1 e 3.1.2, temos

$$f(x) - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \widehat{d}^k f(\xi)(x - \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{m+1}(\lambda-1)} d\lambda.$$

Usando novamente a desigualdade triangular para a integral de Bochner, obtemos

$$\begin{aligned} \|f(x) - \tau_{m,f,\xi}\| &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{m+1}(\lambda-1)} d\lambda \right\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|=\rho} \left\| \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{m+1}(\lambda-1)} \right\| d\lambda. \end{aligned}$$

Agora, como

$$|\lambda^{m+1}(\lambda-1)| = |\lambda^{m+1}| \cdot |\lambda-1| \geq |\lambda^{m+1}| \cdot (|\lambda| - 1),$$

segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|=\rho} \left\| \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{m+1}(\lambda-1)} \right\| d\lambda &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{\|f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]\|}{\rho^{m+1}(\rho-1)} d\lambda \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\sup_{|\lambda|=\rho} \|f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]\| \right) \cdot 2\pi\rho \cdot \frac{1}{\rho^{m+1}(\rho-1)} \\ &= \frac{1}{\rho^m(\rho-1)} \cdot \sup_{|\lambda|=\rho} \|f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]\|. \end{aligned}$$

■

Definição 3.1.5 (Conjunto ξ -equilibrado) Seja $U \subset E$ um subconjunto aberto não vazio. U é dito ξ -*equilibrado* com respeito a um de seus pontos ξ se $(1-\lambda)\xi + \lambda x \in U$ para todos $x \in U$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| \leq 1$.

Exemplo 3.1.6 Em qualquer espaço de Banach complexo E , a bola aberta $B_r(0)$ com $r > 0$ é 0-equilibrado. Além disso, se $\xi \neq 0$, então $B_r(0)$ não é ξ -equilibrado

Lema 3.1.7 *Sejam U aberto em E , W aberto em $\mathbb{C} \times E$, $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ e $K \subset U$ um compacto tal que $\mathbb{D} \times K \subset W$. Então existem $\rho > 1$ e V aberto em E tais que:*

(i) $K \subset V \subset U$.

(ii) $\mathbb{D} \times K \subset D_\rho(0) \times V \subset W$, onde $D_\rho(0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \rho\}$.

Demonstração. Usando a generalização do lema do tubo (veja, por exemplo, [26, Exercise 26.9]), existem abertos A em $\mathbb{C}$ e B em E tais que

$$\mathbb{D} \times K \subset A \times B \subset W.$$

Logo $\mathbb{D} \subset A$ e $K \subset B$. Assim

$$K = K \cap U \subset B \cap U \subset U,$$

e chamando $V = B \cap U$ temos

$$\mathbb{D} \times K \subset A \times V \subset A \times B \subset W.$$

Afirmção. Existe $\rho > 1$ tal que $D_\rho(0) \subset A$.

Para provar a afirmação, suponhamos, por absurdo, que $D_\rho(0) \not\subset A$ para todo $\rho > 1$. Chamando $\rho_n = 1 + \frac{1}{n}$ para todo n , existe uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $a_n \in D_{\rho_n}(0)$ e $a_n \notin A$ para todo n . Agora, como $D_2(0)$ é compacto e $D_{\rho_n}(0) \subset D_2(0)$, então $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente em $D_2(0)$. Existem então um subconjunto infinito $\mathbb{N}'$ de $\mathbb{N}$ e $a \in D_2(0)$ tais que $\lim_{n \in \mathbb{N}'} a_n = a$. Neste caso, $|a_n| \leq \rho_n$ para todo $n \in \mathbb{N}'$. Assim, $|a| \leq 1$ e portanto $a \in \mathbb{D} \subset A$. Então $a \in A$, o que é um absurdo pois A é aberto e $a_n \notin A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso prova a afirmação, da qual segue que

$$\mathbb{D} \times K \subset D_\rho(0) \times K \subset D_\rho(0) \times V \times A \times B \subset W.$$

■

Proposição 3.1.8 *Sejam $f \in \mathcal{H}(U; F)$ e $\xi \in U$. Se U é ξ -equilibrado, então a série de Taylor de f em ξ converge a f uniformemente em alguma vizinhança, contida em U , de cada subconjunto compacto de U .*

Demonstração. Primeiramente notemos que f é contínua em U por ser holomorfa [25, Lemma 5.6]. Dado $K \subset U$ compacto, consideremos a função

$$g: \mathbb{D} \times K \longrightarrow E, \quad g(\lambda, x) = (1 - \lambda)\xi + \lambda x.$$

Notemos que g é contínua e que $\mathbb{D} \times K$ é compacto em $\mathbb{C} \times E$. Assim,

$$A := g(\mathbb{D} \times K) = \{(1 - \lambda)\xi + \lambda x : x \in K, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$$

é compacto em E . Por ser U ξ -equilibrado, temos $A \subset U$. Dessa forma obtemos que f é limitada em A , pois todo espaço métrico compacto é limitado. Logo existe W aberto em F limitado tal que $f(g(\mathbb{D} \times K)) \subset W \subset F$. Assim,

$$g(\mathbb{D} \times K) \subset f^{-1}(W) \subset U \quad \text{e} \quad \mathbb{D} \times K \subset g^{-1}(f^{-1}(W)),$$

onde $g^{-1}(f^{-1}(W))$ é aberto em $\mathbb{C} \times E$. Pelo Lema 3.1.7 existem $\rho > 1$ e V aberto em E com $K \subset V \subset U$ tais que

$$\mathbb{D} \times K \subset D_\rho(0) \times V \subset g^{-1}(f^{-1}(W)).$$

Decorre que

$$g(D_\rho(0) \times V) \subset g(g^{-1}(f^{-1}(W))) \subset f^{-1}(W),$$

e portanto

$$f(g(D_\rho(0) \times V)) \subset f(f^{-1}(W)) \subset W.$$

Logo $f(g(D_\rho(0) \times V)) \subset W$ é limitado e

$$g(D_\rho(0) \times V) \subset f^{-1}(f(g(D_\rho(0) \times V))) \subset f^{-1}(W) \subset U. \quad (3.1)$$

Notemos que

$$g(D_\rho(0) \times V) = \{(1 - \lambda)\xi + \lambda x : x \in V, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq \rho\},$$

daí

$$\sup_{\substack{x \in V \\ \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1}} \|f[(1 - \lambda)\xi + \lambda x]\| < +\infty.$$

Pelo Lema 3.1.4 e por (3.1), temos

$$\begin{aligned} \|f(x) - \tau_{m,f,\xi}(x)\| &\leq \frac{1}{\rho^m(\rho - 1)} \cdot \sup_{|\lambda|=\rho} \|f[(1 - \lambda)\xi + \lambda x]\| \\ &\leq \frac{1}{\rho^m(\rho - 1)} \cdot \sup_{\substack{x \in V \\ |\lambda|=\rho}} \|f[(1 - \lambda)\xi + \lambda x]\|, \end{aligned}$$

logo

$$\sup_{x \in V} \|f(x) - \tau_{m,f,\xi}(x)\| \leq \frac{1}{\rho^m(\rho - 1)} \cdot \sup_{\substack{x \in V \\ |\lambda|=\rho}} \|f[(1 - \lambda)\xi + \lambda x]\|$$

e então $\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in V} \|f(x) - \tau_{m,f,\xi}(x)\| = 0$ pois $\rho > 1$. ■

Definição 3.1.9 Sejam $f \in \mathcal{H}(U; F)$ e $\xi \in U$.

- (a) O *raio de limitação de f em ξ* é o supremo do conjunto formado pelos números $r > 0$ tais que $\bar{B}_r(\xi) \subset U$ e f é limitada em $\bar{B}_r(\xi)$. O raio de limitação de f em ξ é denotado por $r_b f(\xi)$;
- (b) O *raio de convergência da série de Taylor de f em ξ* é denotada por $r_c f(\xi)$;
- (c) A distância de ξ à fronteira de U é denotada por $d(\xi; \partial U)$. No caso em que $U = E$ definimos, por conveniência, $d(\xi; \partial U) = \infty$.

Lema 3.1.10 Sejam $U \subset E$ aberto e $\xi \in U$. Então

$$d(\xi; \partial U) := \inf\{d(\xi, a) : a \in \partial U\} = \sup\{r > 0 : \bar{B}_r(\xi) \subset U\}.$$

Demonstração. Notemos que a igualdade desejada se cumpre se $U = E$ pois $d(\xi; \partial U) = \infty$ neste caso. Agora consideremos $U \neq E$ e chamemos $I = d(\xi; \partial U)$ e $S = \sup\{r > 0 : \bar{B}_r(\xi) \subset U\}$. Dividiremos o argumento em quatro passos:

Passo 1. $I > 0$.

Suponhamos, por absurdo, que $I = 0$. Neste caso,

$$\text{para todo } r > 0 \text{ existe } b \in \partial U \text{ tal que } 0 \leq d(\xi, b) < r. \quad (3.2)$$

Agora, como $\xi \in U$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\xi) \subset U$, e de (3.2) segue a existência de $b \in \partial U$ tal que $0 \leq d(\xi, b) < \delta$. Dessa forma $b \in B_\delta(\xi) \subset U$ e portanto $b \in U$, o que é um absurdo pois $b \in \partial U$.

Passo 2. $B_I(\xi) \subset U$.

Argumentando novamente por absurdo, suponhamos que exista $a \in B_I(\xi)$ tal que $a \notin U$. Neste caso $d(\xi, a) < I$, e portanto $a \notin \partial U$, pois se $a \in \partial U$ teríamos $d(\xi, a) \geq I$, o que é um absurdo. Como $U \neq E$, $a \notin U$ e $a \notin \partial U$, temos $a \in \text{int}(U^c)$. Consideremos a função contínua

$$f: [0, 1] \longrightarrow E, \quad f(\lambda) = (1 - \lambda)a + \lambda\xi.$$

Os conjuntos $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(\text{int}(U^c))$ são abertos em $[0, 1]$, $0 \in f^{-1}(\text{int}(U^c))$ e $1 \in f^{-1}(U)$. Como $[0, 1]$ é conexo, existe $\lambda_0 \in (0, 1)$ tal que $\lambda_0 \notin f^{-1}(U)$, $\lambda_0 \notin f^{-1}(\text{int}(U^c))$, portanto $f(\lambda_0) \notin U$ e $f(\lambda_0) \notin \text{int}(U^c)$. Assim $f(\lambda_0) \in U^c$ e para todo $r > 0$ existe $y \in B_r(f(\lambda_0))$ tal que $y \in U$, ou seja, $f(\lambda_0) \in \partial U$. Logo $d(\xi, a) \geq d(\xi, f(\lambda_0)) \geq I$, donde segue a contradição $I > d(\xi, a) \geq I$.

Passo 3. $I \leq S$.

Seja ε tal que $0 < \varepsilon < I$. Em primeiro lugar notemos que $\bar{B}_{I-\varepsilon}(\xi) \subset B_I(\xi) \subset U$ pois, se $x \in \bar{B}_{I-\varepsilon}(\xi)$, então $\|x - \xi\| \leq I - \varepsilon < I$. Do Passo 2 decorre que $I - \varepsilon \leq S$. Então $I \leq S + \varepsilon$ para todo $0 < \varepsilon < I$, e daí concluímos que $I \leq S$.

Passo 4. $I \geq S$.

Suponha que $I < S$. Neste caso existe $c > 0$ tal que $I < c < S$. Pelas definições de ínfimo e de supremo existe $r > 0$ tal que $\bar{B}_r(\xi) \subset U$ e $c < r \leq S$, e existe $a \in \partial U$ tal que $I \leq d(\xi, a) < c$. Assim $d(\xi, a) < c < r$, e portanto $a \in \bar{B}_r(\xi) \subset U$. Isso implica que $a \in U$, o que é um absurdo pois $a \in \partial U$. ■

Proposição 3.1.11 *Sejam $f \in \mathcal{H}(U; F)$ e $\xi \in U$. Então*

$$r_b f(\xi) = \min\{r_c f(\xi), d(\xi; \partial U)\}.$$

Demonstração. Provemos primeiramente que $r_b f(\xi) \leq \min\{r_c f(\xi), d(\xi; \partial U)\}$. Pelo Lema 3.1.10, sabemos que $d(\xi; \partial U) = \sup\{r > 0 : \bar{B}_r(\xi) \subset U\}$, logo $r_b f(\xi) \leq d(\xi; \partial U)$. Por outro lado, se $0 \leq r < r_b f(\xi)$, então $\bar{B}_r(\xi) \subset U$ e f é limitada em $\bar{B}_r(\xi)$, digamos $\|f(x)\| \leq M$ para todo $x \in \bar{B}_r(\xi)$. Pela Desigualdade de Cauchy (Proposição 3.1.3), segue

que se $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x - \xi)$, então

$$\|P_m\| \leq \frac{1}{r^m} \cdot \sup_{\|x-\xi\|=r} \|f(x)\| \leq \frac{M}{r^m} \text{ para todo } m = 0, 1, 2, \dots$$

Assim, $\|P_m\|^{\frac{1}{m}} \leq \frac{M^{\frac{1}{m}}}{r}$, e portanto, se $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{m \geq n} \|P_m\|^{\frac{1}{m}} \leq \sup_{m \geq n} \frac{M^{\frac{1}{m}}}{r},$$

o que implica

$$\inf_n \sup_{m \geq n} \|P_m\|^{\frac{1}{m}} \leq \sup_{m \geq n} \|P_m\|^{\frac{1}{m}} \leq \sup_{m \geq n} \frac{M^{\frac{1}{m}}}{r}$$

e então

$$\limsup_m \|P_m\|^{\frac{1}{m}} \leq \limsup_m \frac{M^{\frac{1}{m}}}{r} = \frac{1}{r}.$$

Disso segue que $\frac{1}{\limsup_m \|P_m\|^{\frac{1}{m}}} \geq r$ e pelo Teorema 2.1.3 temos $r_c f(\xi) \geq r$. Fazendo

$r \rightarrow r_b f(\xi)$ obtemos $r_c f(\xi) \geq r_b f(\xi)$.

Provemos agora que $r_b f(\xi) \geq \min\{r_c f(\xi), d(\xi; \partial U)\}$. Começamos notando que $r_c f(\xi) > 0$ e que $d(\xi; \partial U) > 0$ pois f é holomorfa e U é aberto. Agora, se

$$0 \leq r < s < \min\{r_c f(\xi), d(\xi; \partial U)\},$$

então $s < d(\xi; \partial U)$, e pelo Lema 3.1.10 tem-se $B_s(\xi) \subset U$. Logo $B_s(\xi)$ é ξ -equilibrado e pela Proposição 3.1.8 segue que para cada $x \in B_s(\xi)$,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P^m f(\xi)(x - \xi),$$

pois $\{x\}$ é compacto para cada $x \in B_s(\xi)$. Pela formula de Cauchy-Hadamard (Teorema 2.1.3) e pela desigualdade $s < r_c f(\xi)$ temos

$$\limsup_m \|P^m f(\xi)\|^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{r_c f(\xi)} < \frac{1}{s},$$

ou seja,

$$\inf_n \sup_{m \geq n} \|P^m f(\xi)\|^{\frac{1}{m}} < \frac{1}{s}.$$

Existe então $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\sup_{m \geq n_0} \|P^m f(\xi)\|^{\frac{1}{m}} \right) < \frac{1}{s}$, ou seja,

$$\sup_{m \geq n_0} \left\{ \|P^m f(\xi)\|^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{s} \right\} < 0.$$

Dessa forma, podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|P^m f(\xi)\|^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{s} < -\varepsilon \quad \text{para todo } m \geq n_0.$$

Assim $\|P^m f(\xi)\|_m^{\frac{1}{m}} < \frac{1}{s} - \varepsilon$ e

$$\|P^m f(\xi)\| < \left(\frac{1}{s} - \varepsilon\right)^m = \frac{(1 - s\varepsilon)^m}{s^m} < \frac{1}{s^m},$$

para todo $m \geq n_0$. Logo $\|P^m f(\xi)\| < \frac{c}{s^m}$ para $m = 0, 1, 2, \dots$, onde

$$c = \max \{1, \|P^0 f(\xi)\|, \dots, s^{n_0-1} \|P^{n_0-1} f(\xi)\|\}.$$

Para cada $x \in B_s(\xi)$ sabemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| f(x) - \sum_{m=0}^k P^m f(\xi)(x - \xi) \right\| = 0.$$

E para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $x \in \bar{B}_r(\xi)$,

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &\leq \left\| f(x) - \sum_{m=0}^k P^m f(\xi)(x - \xi) \right\| + \left\| \sum_{m=0}^k P^m f(\xi)(x - \xi) \right\| \\ &\leq \left\| f(x) - \sum_{m=0}^k P^m f(\xi)(x - \xi) \right\| + \sum_{m=0}^k \|P^m f(\xi)(x - \xi)\| \\ &\leq \left\| f(x) - \sum_{m=0}^k P^m f(\xi)(x - \xi) \right\| + \sum_{m=0}^k \frac{c}{s^m} \cdot r^m. \end{aligned}$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$, obtemos

$$\|f(x)\| \leq \sum_{m=0}^{\infty} c \left(\frac{r}{s}\right)^m = c \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^m,$$

para todo $x \in \bar{B}_r(\xi)$. A série $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^m$ é convergente pois $\frac{r}{s} < 1$, e daí segue que $r_b f(\xi) \geq r$. Usando a definição de supremo e o fato de que $0 < r < \min\{r_c f(\xi), d(\xi; \partial U)\}$, concluímos que $\min\{r_c f(\xi), d(\xi; \partial U)\} \leq r_b f(\xi)$. ■

Lema 3.1.12 *Sejam $U \subset E$ aberto, $a \in E$ e $U - a := \{x - a : x \in U\}$. Para cada $f \in \mathcal{H}(U; F)$ definimos*

$$f_a: U - a \longrightarrow F, \quad f_a(t) = f(a + t).$$

Então

(a) $f_a \in \mathcal{H}(U - a; F)$ e $P^m f_a(t) = P^m f(a + t)$ para todos $t \in (U - a)$ e $m \in \mathbb{N}_0$.

(b) O operador

$$\psi: \mathcal{H}(U; F) \longrightarrow \mathcal{H}(U - a; F), \quad \psi(f) = f_a,$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Demonstração.

(a) Como $f \in \mathcal{H}(U; F)$, para cada $\xi \in U$ existem $B_r(\xi) \subset U$ e uma sequência de polinômios $P^m f(\xi) \in \mathcal{P}^m E; F$ tais que $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P^m f(\xi)(x - \xi)$ uniformemente para $x \in B_r(\xi)$. Agora seja $\zeta \in (U - a)$. Então $\zeta = \xi - a$ para algum $\xi \in U$. Notemos que $(B_r(\xi) - a) \subset (U - a)$ pois $B_r(\xi) \subset U$. Dado $y \in B_r(\xi) - a$, então $y = x - a$ para algum $x \in B_r(\xi)$. Assim,

$$f_a(y) = f_a(x - a) = f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P^m f(\xi)(x - \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} P^m f_a(\zeta)(y - \zeta)$$

uniformemente para $y \in B_r(\xi) - a$. Ademais, pela unicidade da sequência de polinômios da série de Taylor, segue que $P^m f_a(\zeta) = P^m f(a + \zeta)$ para $\zeta \in (U - a)$ e $m \in \mathbb{N}_0$.

(b) Vejamos que ψ é linear. Sejam $f, g \in \mathcal{H}(U; F)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Para todo $t \in (U - a)$,

$$\begin{aligned} \psi(f + \lambda g)(t) &= (f + \lambda g)_a(t) = (f + \lambda g)(a + t) = f(a + t) + \lambda g(a + t) \\ &= f_a(t) + \lambda g_a(t) = (f_a + \lambda g_a)(t) = (\psi(f) + \lambda \psi(g))(t), \end{aligned}$$

provando que $\psi(f + \lambda g) = \psi(f) + \lambda \psi(g)$.

Agora suponhamos que $f \in \mathcal{H}(U; F)$ seja tal que $\psi(f) = f_a = 0$. Neste caso $f_a(t) = f(a + t) = 0$ para todo $t \in (U - a)$. Dado $x \in U$, $(x - a) \in (U - a)$, logo $f(x) = f(a + (x - a)) = 0$, provando que $f = 0$. Segue que ψ é injetora.

Dada $g \in \mathcal{H}(U - a; F)$, por (a) temos $g_{-a} \in \mathcal{H}(U; F)$, onde

$$g_{-a}: U \longrightarrow F, \quad g_{-a}(x) = g(x - a)$$

Logo $\psi(g_{-a}) = (g_{-a})_a = g$, o que prova a sobrejetividade de ψ . ■

Proposição 3.1.13 *Se $f \in \mathcal{H}(U; F)$, então*

$$d^m f \in \mathcal{H}(U; \mathcal{L}^s(mE; F)) \text{ e}$$

$$\widehat{d}^m f \in \mathcal{H}(U; \mathcal{P}^m E; F)$$

para $m = 0, 1, 2, \dots$. Mais ainda, se $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} P^j f(\xi)(x - \xi)$ é a série de Taylor de f em $\xi \in U$, então as séries de Taylor de $d^m f$ e $\widehat{d}^m f$ em ξ são

$$d^m f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} d^m [P^{m+j} f(\xi)](x - \xi) \text{ e}$$

$$\widehat{d}^m f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{d}^m [P^{m+j} f(\xi)](x - \xi).$$

Demonstração. Provemos primeiramente o caso em que $0 \in U$. Como $f(0) \in F$, qualquer bola aberta $B_\Delta(f(0))$, $\Delta > 0$, está contida em F . Assim $0 \in f^{-1}(B_\Delta(f(0))) \subset U$, e como $f^{-1}(B_\Delta(f(0)))$ é aberto, uma vez que f é contínua por ser holomorfa, existe $r > 0$ tal que

$$\bar{B}_{3r}(0) \subset f^{-1}(B_\Delta(f(0))) \subset U$$

onde f é limitada em $\bar{B}_{3r}(0)$, isto pois

$$f(\bar{B}_{3r}(0)) \subset f(f^{-1}(B_\Delta(f(0)))) \subset B_\Delta(f(0)).$$

Pela Proposição 3.1.11 temos, em particular, que a série de Taylor de f na origem converge a f uniformemente em $\bar{B}_{2r}(0)$. Então para todo $\delta > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| f(t) - \sum_{j=0}^k P^j f(0)(t) \right\| < \delta$$

sempre que $k \geq k_0$ e $\|t\| \leq 2r$. Dados $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$, tomando $\delta = \varepsilon r^m$ segue que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| f(t) - \sum_{j=0}^k P^j f(0)(t) \right\| < \varepsilon r^m$$

sempre que $k \geq k_0$ e $\|t\| \leq 2r$. Logo

$$\sup_{\|x-t\|=r} \left\| f(x) - \sum_{j=0}^k P^j f(0)(x) \right\| \leq \varepsilon r^m$$

para cada t com $\|t\| \leq r$. Aplicando uma vez mais a Desigualdade de Cauchy (Proposição 3.1.3) temos

$$\left\| P^m \left(f - \sum_{j=0}^k P^j f(0) \right) (t) \right\| \leq \frac{1}{r^m} \cdot \sup_{\|x-t\|=r} \left\| f(x) - \sum_{j=0}^k P^j f(0)(x) \right\| \leq \varepsilon,$$

para cada t com $\|t\| \leq r$. Assim

$$\left\| P^m \left(f - \sum_{j=0}^k P^j f(0) \right) (t) \right\| = \left\| P^m f(t) - \sum_{j=0}^k P^m [P^j f(0)](t) \right\| \leq \varepsilon$$

para todos t com $\|t\| \leq r$ e $k \geq k_0$. Observe que aqui estamos usando o seguinte fato: se $f, g \in \mathcal{H}(U; F)$, então $f + g \in \mathcal{H}(U; F)$ e $P^m(f + g)(a) = P^m(f)(a) + P^m(g)(a)$. Concluimos que

$$P^m f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} P^m [P^j f(0)](t)$$

com convergência uniforme da série para $\|t\| \leq r$. Sabemos ademais que $P^m [P^j f(0)] = 0$ para $m > j$, logo

$$P^m f(t) = \sum_{j=m}^{\infty} P^m [P^j f(0)](t) = \sum_{j=0}^{\infty} P^m [P^{m+j} f(0)](t)$$

e como $P^{m+j}f(0) \in \mathcal{P}^{(m+j)}E; F)$, temos

$$P^m[P^{m+j}f(0)] \in \mathcal{P}^{(m+j-m)}E; \mathcal{P}^{(m)}E; F).$$

Façamos agora o caso geral. Dado $a \in U$, definimos

$$f_a: U - a \longrightarrow F, \quad f_a(t) = f(a + t).$$

Pelo Lema 3.1.12 sabemos que $f_a \in \mathcal{H}(U - a; F)$ e $P^m f_a(t) = P^m f(a + t)$ para todos $t \in (U - a)$ e $m \in \mathbb{N}_0$. De forma análoga ao que fizemos no caso anterior, concluimos que se f é limitada em $\bar{B}(a; 3r) \subset U$, então f_a é também limitada em $\bar{B}(0; 3r) \subset (U - a)$. Usando o caso já provado, temos

$$P^m f(a + t) = P^m f_a(t) = \sum_{j=0}^{\infty} P^m[P^{m+j}f_a(0)](t) = \sum_{j=0}^{\infty} P^m[P^{m+j}f(a)](t)$$

uniformemente para $\|t\| \leq r$. Além disso, $P^m[P^{m+j}f(a)] \in \mathcal{P}^{(j)}E; \mathcal{P}^{(m)}E; F)$. ■

Observação 3.1.14 Examinando a demonstração anterior, notamos que se

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} P^j f(\xi)(x - \xi)$$

é a série de Taylor da função holomorfa $f \in \mathcal{H}(U; F)$ em $\xi \in U$, então existe um número real $\rho > 0$ tal que $0 < \rho < r_b$, $B_\rho(\xi) \subset U$ e

$$\hat{d}^l f(x) = \sum_{j=l}^{\infty} \hat{d}^l P^j f(\xi)(x - \xi)$$

uniformemente em $B_\rho(\xi)$ no sentido de $\mathcal{P}^{(l)}E; F)$ para qualquer $l \in \mathbb{N}$.

Corolário 3.1.15 Se $f \in \mathcal{H}(U; F)$ e $\xi \in U$, então

$$\frac{1}{k!} \hat{d}^k \left(\frac{1}{m!} \hat{d}^m f \right) (\xi) = \frac{1}{m!} \hat{d}^m \left[\frac{1}{(k+m)!} \hat{d}^{k+m} f(\xi) \right]$$

para $k, m = 0, 1, \dots$

Demonstração. Como $f \in \mathcal{H}(U; F)$ e $\xi \in U$, usando o fato de que se $g \in \mathcal{H}(U; F)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\lambda g \in \mathcal{H}(U; F)$ e $P^m(\lambda g)(a) = \lambda P^m g(a)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \hat{d}^k \left(\frac{1}{m!} \hat{d}^m f \right) (\xi) &= \frac{1}{m!} \left[\frac{1}{k!} \hat{d}^k \left(\hat{d}^m f \right) (\xi) \right] = \frac{1}{m!} \left[P^k \left(\hat{d}^m f \right) (\xi) \right] \\ &= \frac{1}{m!} \hat{d}^m [P^{m+k} f(\xi)] = P^m [P^{m+k} f(\xi)] \\ &= \frac{1}{m!} \hat{d}^m \left[\frac{1}{(m+k)!} \hat{d}^{m+k} f(\xi) \right]. \end{aligned}$$

■

3.2 Diferenciação de tipos de holomorfia

Estudamos nesta seção o método introduzido por Nachbin [27] de gerar novos tipos de holomorfia a partir da diferenciação de um tipo de holomorfia dado. Ao longo da seção, E e F serão espaços de Banach complexos.

Proposição 3.2.1 *Seja $(\mathcal{P}_\Theta(mE; F))_{m=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de E em F . Para cada $m \in \mathbb{N}_0$ a aplicação inclusão*

$$\mathcal{P}_\Theta(mE; F) \hookrightarrow \mathcal{P}(mE; F)$$

é contínua e

$$\|P\| \leq \sigma^m \|P\|_\Theta$$

para todo polinômio $P \in \mathcal{P}_\Theta(mE; F)$, onde σ é a constante da condição (3) da Definição 2.2.1.

Demonstração. Pela condição (1) da Definição 2.2.1 sabemos que $\mathcal{P}_\Theta(mE; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}(mE; F)$ para cada $m \in \mathbb{N}_0$. Dado $P \in \mathcal{P}_\Theta(mE; F)$, tomando $k = 0$ e $a \in E$, pela condições (2) e (3) da definição 2.2.1 temos

$$\hat{d}^0 P(a) = P(a) \in \mathcal{P}_\Theta(0E; F) = F.$$

Assim também, pela condição (3) da mesma definição,

$$\|P(a)\| = \|P(a)\|_\Theta = \left\| \frac{1}{0!} P(a) \right\| \leq \sigma^m \|P\|_\Theta \|a\|^m.$$

Disso decorre imediatamente que $\|P\| \leq \sigma^m \|P\|_\Theta$. ■

Proposição 3.2.2 *Sejam E e F espaços de Banach, $l \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}_0$. Então o operador*

$$\Psi: \mathcal{P}(^{l+m}E; F) \longrightarrow \mathcal{P}(^mE; \mathcal{P}(^lE; F)) \text{ , } \Psi(P) = \frac{1}{l!} \hat{d}^l P,$$

é um isomorfismo (de espaços de Banach) sobre sua imagem.

Demonstração. (i) Vejamos que Ψ esta bem definida no sentido de que toma valores no contradomínio indicado.

De fato, como $P \in \mathcal{P}(^{l+m}E; F)$, então $\hat{d}^l P \in \mathcal{P}(^mE; \mathcal{P}(^lE; F))$ como comprovado na Observação 2.1.6.

(ii) Vejamos que Ψ é linear.

Para isso sejam $P, Q \in \mathcal{P}(^{l+m}E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ (neste resultado podemos considerar os casos em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Então $(P + \lambda Q) \in \mathcal{P}(^{l+m}E; F)$ e $\Psi(P + \lambda Q) = \frac{1}{l!} \hat{d}^l (P + \lambda Q)$. Pelo Exemplo 2.1.5, para todos $x, y \in E$ temos

$$\begin{aligned} \Psi(P + \lambda Q)(x)(y) &= \frac{1}{l!} \hat{d}^l (P + \lambda Q)(x)(y) = \binom{l+m}{l} (P + \lambda Q)^\vee x^m y^l \\ &= \binom{l+m}{l} (\check{P} + \lambda \check{Q}) x^m y^l = \binom{l+m}{l} [\check{P} x^m y^l + \lambda \check{Q} x^m y^l] \\ &= \binom{l+m}{l} \check{P} x^m y^l + \lambda \binom{l+m}{l} \check{Q} x^m y^l = \frac{1}{l!} \hat{d}^l P(x)(y) + \lambda \frac{1}{l!} \hat{d}^l Q(x)(y) \\ &= \Psi(P)(x)(y) + \lambda \Psi(Q)(x)(y) = [\Psi(P) + \lambda \Psi(Q)](x)(y), \end{aligned}$$

provando que $\Psi(P + \lambda Q) = \Psi(P) + \lambda \Psi(Q)$.

(iii) Vejamos que Ψ é injetora.

Suponhamos que $P \in \mathcal{P}^{(l+m)}E; F$ é tal que $\Psi(P) = 0$. Como $\Psi(P) = \frac{1}{l!} \hat{d}^l P = 0$, para todos $\xi, y \in E$,

$$\frac{1}{l!} \hat{d}^l P(\xi)(y) = \binom{l+m}{l} \check{P} \xi^m y^l = 0.$$

Logo $\check{P} \xi^m y^l = 0$ para todos $\xi, y \in E$. Assim

$$P(\xi) = \check{P} \xi^{l+m} = \check{P} \xi^m \xi^l = 0,$$

para todo $\xi \in E$, o que prova que $P = 0$.

(iv) Provemos por fim que Ψ é contínua e que Ψ^{-1} , definida na imagem de Ψ , também é contínua.

Para isso seja $P \in \mathcal{P}^{(l+m)}E; F$. Para todos $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} \|\Psi(P)(x)(y)\| &= \left\| \frac{1}{l!} \hat{d}^l P(x)(y) \right\| = \left\| \binom{l+m}{l} \check{P} x^m y^l \right\| \\ &= \binom{l+m}{l} \|\check{P} x^m y^l\| \leq \binom{l+m}{l} \cdot \|\check{P}\| \cdot \|x\|^m \cdot \|y\|^l \\ &\leq \binom{l+m}{l} \cdot \frac{(l+m)^{l+m}}{(l+m)!} \cdot \|P\| \cdot \|x\|^m \cdot \|y\|^l \\ &= \frac{(l+m)!}{l!m!} \cdot \frac{(l+m)^{l+m}}{(l+m)!} \cdot \|P\| \cdot \|x\|^m \cdot \|y\|^l \\ &= \frac{(l+m)^{l+m}}{l!m!} \cdot \|P\| \cdot \|x\|^m \cdot \|y\|^l. \end{aligned}$$

De

$$\|\Psi(P)\| = \sup_{\substack{x, y \in E \\ \|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \|\Psi(P)(x)(y)\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\| \leq 1}} \|\Psi(P)(x)(y)\|,$$

segue que

$$\|\Psi(P)\| \leq \frac{(l+m)^{l+m}}{l!m!} \cdot \|P\|,$$

donde concluimos a continuidade de Ψ .

Por outro lado, para todo $x \in E$, $\|x\| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \|P(x)\| &= \|\check{P} x^m x^l\| \leq \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\| \leq 1}} \|\check{P} x^m y^l\| \leq \sup_{\substack{z \in E \\ \|z\| \leq 1}} \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\| \leq 1}} \|\check{P} z^m y^l\| \\ &= \frac{1}{\binom{l+m}{l}} \sup_{\substack{z \in E \\ \|z\| \leq 1}} \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\| \leq 1}} \left\| \binom{l+m}{l} \check{P} z^m y^l \right\| = \frac{1}{\binom{l+m}{l}} \sup_{\substack{z \in E \\ \|z\| \leq 1}} \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\| \leq 1}} \|\Psi(P)(z)(y)\| \\ &= \frac{1}{\binom{l+m}{l}} \|\Psi(P)\|. \end{aligned}$$

Disso segue que $\binom{l+m}{l} \|P\| \leq \|\Psi(P)\|$, provando a continuidade de Ψ^{-1} sobre a imagem de Ψ . ■

Observação 3.2.3 Analisemos mais detidamente o caso em que $m = 0$ na proposição acima. Neste caso temos

$$\Psi: \mathcal{P}({}^l E; F) \longrightarrow \mathcal{P}({}^0 E; \mathcal{P}({}^l E; F)) = \mathcal{P}({}^l E; F), \quad \Psi(P) = \frac{1}{l!} \hat{d}^l P = P.$$

Com efeito, se $P \in \mathcal{P}({}^l E; F)$, então

$$\Psi(P)(\xi)(y) = \frac{1}{l!} \hat{d}^l P(\xi)(y) = \binom{l}{l} \check{P} \xi^{l-l} y^l = \check{P} y^l = P(y),$$

para todos $\xi, y \in E$. Isso nos dá $\Psi(P)(\xi) = P$ para todo $\xi \in E$, ou seja, $\Psi(P) = P$.

Agora podemos definir a diferenciação de um tipo de holomorfia:

Definição 3.2.4 Seja Θ um tipo de holomorfia de E em F . Sabemos pela Proposição 3.2.2 que para todos $l, m \in \mathbb{N}$, o operador

$$\Psi: \mathcal{P}({}^{l+m} E; F) \longrightarrow \mathcal{P}({}^m E; \mathcal{P}({}^l E; F)), \quad \Psi(P) = \frac{1}{l!} \hat{d}^l P,$$

é um isomorfismo sobre sua imagem. Dado $P \in \mathcal{P}_\Theta({}^{l+m} E; F)$, pela condição (3) da definição 2.2.1 e como $l \leq m + l$, temos

$$\hat{d}^l P(x) \in \mathcal{P}_\Theta({}^l E; F),$$

logo

$$\hat{d}^l P \in \mathcal{P}({}^m E; \mathcal{P}_\Theta({}^l E; F)).$$

Então $\Psi(\mathcal{P}_\Theta({}^{l+m} E; F))$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}({}^m E; \mathcal{P}_\Theta({}^l E; F))$ e $\mathcal{P}_\Theta({}^{l+m} E; F)$ e $\Psi(\mathcal{P}_\Theta({}^{l+m} E; F))$ são isomorfos como espaços vetoriais. Denotamos

$$\frac{1}{l!} \hat{d}^l \mathcal{P}_\Theta({}^{l+m} E; F) := \Psi(\mathcal{P}_\Theta({}^{l+m} E; F)),$$

e definimos

$$\left\| \frac{1}{l!} \hat{d}^l P \right\|_\tau := \|P\|_\Theta$$

para todo $P \in \mathcal{P}_\Theta({}^{l+m} E; F)$.

Os axiomas de norma para $\|\cdot\|_\tau$ seguem imediatamente do seguinte fato elementar:

Lema 3.2.5 *Sejam U, V espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, U normado com norma $\|\cdot\|$. Se $\varphi: U \longrightarrow V$ é um isomorfismo de espaços vetoriais, então a função*

$$\|\cdot\|_1: V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|\varphi(u)\|_1 = \|u\|,$$

é uma norma em V .

Demonstração. Verifiquemos os axiomas de norma:

(i) $\|v\|_1 = \|\varphi^{-1}(v)\| \geq 0$ para todo $v \in V$.

(ii) Dado $v \in V$, da bijetividade de φ ,

$$\|v\|_1 = 0 \iff \|\varphi^{-1}(v)\| = 0 \iff \varphi^{-1}(v) = 0 \iff v = 0.$$

(iii) Para todos $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, da linearidade de φ ,

$$\|\lambda v\|_1 = \|\varphi^{-1}(\lambda v)\| = \|\lambda \cdot \varphi^{-1}(v)\| = |\lambda| \cdot \|\varphi^{-1}(v)\| = |\lambda| \cdot \|v\|_1.$$

(iv) Para todos $v, w \in V$, usando novamente a linearidade de φ ,

$$\|v+w\|_1 = \|\varphi^{-1}(v+w)\| = \|\varphi^{-1}(v) + \varphi^{-1}(w)\| \leq \|\varphi^{-1}(v)\| + \|\varphi^{-1}(w)\| = \|v\|_1 + \|w\|_1.$$

■

Proposição 3.2.6 *Nas condições da Definição 3.2.4,*

$$\left(\frac{1}{l!} \hat{d}^l \mathcal{P}_\Theta(l+m E; F); \|\cdot\|_\tau \right) \quad (3.3)$$

é um espaço de Banach para todos $l, m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Já sabemos que (3.3) é espaço vetorial e os axiomas de norma seguem do Lema 3.2.5. Resta mostrar que $\frac{1}{l!} \hat{d}^l \mathcal{P}_\Theta(l+m E; F)$ é completo na norma $\|\cdot\|_\tau$. Para isso nos valeremos do Teorema 1.3.4. Seja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \hat{d}^l P_k$ uma série absolutamente convergente em $\frac{1}{l!} \hat{d}^l \mathcal{P}_\Theta(l+m E; F)$, com cada $P_k \in \mathcal{P}_\Theta(l+m E; F)$. Isso quer dizer que a série de números reais $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{l!} \hat{d}^l P_k \right\|_\tau$ é convergente. Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|P_k\|_\Theta = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{l!} \hat{d}^l P_k \right\|_\tau < +\infty,$$

e $(\mathcal{P}_\Theta(l+m E; F), \|\cdot\|_\Theta)$ é um espaço de Banach, pelo Teorema 1.3.4 concluímos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ é convergente em $\mathcal{P}_\Theta(l+m E; F)$, digamos $\sum_{k=1}^{\infty} P_k = P \in \mathcal{P}_\Theta(l+m E; F)$. Neste caso, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n \frac{1}{l!} \hat{d}^l P_k - \frac{1}{l!} \hat{d}^l P \right\|_\tau &= \left\| \frac{1}{l!} \hat{d}^l \left(\sum_{k=1}^n P_k \right) - \frac{1}{l!} \hat{d}^l P \right\|_\tau \\ &= \left\| \frac{1}{l!} \hat{d}^l \left(\sum_{k=1}^n P_k - P \right) \right\|_\tau \\ &= \left\| \sum_{k=1}^n P_k - P \right\|_\Theta, \end{aligned}$$

logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n \frac{1}{l!} \hat{d}^l P_k - \frac{1}{l!} \hat{d}^l P \right\|_{\tau} = 0.$$

Isso quer dizer que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \hat{d}^l P_k = \frac{1}{l!} \hat{d}^l P$ em $\frac{1}{l!} \hat{d}^l \mathcal{P}_{\Theta}(^{l+m}E; F)$ e a completude segue de uma nova aplicação do Teorema 1.3.4. ■

Proposição 3.2.7 *Sejam Θ um tipo de holomorfia de E em F e $l \in \mathbb{N}$. Então a sequência de espaços de Banach*

$$\left(\frac{1}{l!} \hat{d}^l \mathcal{P}_{\Theta}(^{l+m}E; F) \right)_{m \in \mathbb{N}_0}$$

é um tipo de holomorfia de E em $\mathcal{P}_{\Theta}(^l E; F)$ na norma τ definida por

$$\left\| \frac{1}{l!} \hat{d}^l P \right\|_{\tau} = \|P\|_{\Theta},$$

Este tipo de holomorfia será denotado por $\frac{1}{l!} \hat{d}^l \Theta$.

Demonstração. Da Proposição 3.2.6 já sabemos que

$$\left(\frac{1}{l!} \hat{d}^l \mathcal{P}_{\Theta}(^{l+m}E; F); \|\cdot\|_{\tau} \right)_{m=0}^{\infty}$$

é uma sequência de espaços de Banach e:

(i) $\frac{1}{l!} \hat{d}^l \mathcal{P}_{\Theta}(^{l+m}E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^m E; \mathcal{P}_{\Theta}(^l E; F))$ para todo $m = 0, 1, 2, \dots$

(ii) Pela Observação 3.2.3,

$$\frac{1}{l!} \hat{d}^l \mathcal{P}_{\Theta}(^l E; F) = \Psi(\mathcal{P}_{\Theta}(^l E; F)) = \mathcal{P}_{\Theta}(^l E; F),$$

onde $\mathcal{P}_{\Theta}(^l E; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^l E; F)$.

(iii) Sejam $k, m \in \mathbb{N}$, $k \leq m$, $x \in E$ e $P \in \frac{1}{l!} \hat{d}^l \mathcal{P}_{\Theta}(^{l+m}E; F)$. Como

$$P \in \frac{1}{l!} \hat{d}^l \mathcal{P}_{\Theta}(^{l+m}E; F) = \Psi(\mathcal{P}_{\Theta}(^{l+m}E; F)),$$

então existe um único $Q \in \mathcal{P}_{\Theta}(^{l+m}E; F)$ tal que $\Psi(Q) = P$. Além disso, pelo Exemplo 2.1.5 e pelo Corolário 3.1.15,

$$\frac{1}{k!} \hat{d}^k P(x) = \frac{1}{k!} \hat{d}^k \Psi(Q)(x) = \frac{1}{k!} \hat{d}^k \left(\frac{1}{l!} \hat{d}^l Q \right)(x) = \frac{1}{l!} \hat{d}^l \left[\frac{1}{(k+l)!} \hat{d}^{k+l} Q(x) \right].$$

Como $Q \in \mathcal{P}_{\Theta}(^{l+m}E; F)$ e $l+k \leq l+m$, da condição (3) da Definição 2.2.1 segue que $\hat{d}^{l+k} Q(x) \in \mathcal{P}_{\Theta}(^{l+k}E; F)$. Então

$$\frac{1}{k!} \hat{d}^k P(x) = \frac{1}{l!} \hat{d}^l \left[\frac{1}{(l+k)!} \hat{d}^{l+k} Q(x) \right] \in \frac{1}{l!} \hat{d}^l \mathcal{P}_{\Theta}(^{l+k}E; F).$$

Para completar a demonstração basta provar que

$$\left\| \frac{1}{k!} \widehat{d}^k P(x) \right\|_{\tau} \leq (\sigma^{l+1})^m \cdot \|P\|_{\tau} \cdot \|x\|^{m-k}$$

para $m = 0, 1, 2, \dots$, onde σ é o parâmetro associado ao tipo de holomorfia Θ de E em F de acordo com a condição (3) da Definição 2.2.1. Inicialmente, note que isso equivale a mostrar que

$$\left\| \frac{1}{(l+k)!} \widehat{d}^{l+k} Q(x) \right\|_{\Theta} \leq (\sigma^{l+1})^m \cdot \|Q\|_{\Theta} \cdot \|x\|^{m-k},$$

uma vez que $\Psi(Q) = P$ e

$$\frac{1}{k!} \widehat{d}^k P(x) = \frac{1}{l!} \widehat{d}^l \left[\frac{1}{(l+k)!} \widehat{d}^{l+k} Q(x) \right].$$

Agora notemos que se $m = 0$, como $k \leq m$, temos $k = 0$. Assim $Q \in \mathcal{P}_{\Theta}(^l E; F)$ e então, pela Observação 3.2.3, temos $\frac{1}{l!} \widehat{d}^l Q(x) = Q$, e portanto

$$\left\| \frac{1}{l!} \widehat{d}^l Q(x) \right\|_{\Theta} = \|Q\|_{\Theta}.$$

Agora se $m \geq 1$, então $Q \in \mathcal{P}_{\Theta}(^{l+m} E; F)$ e $l+k \leq l+m$. Pela condição (3) da definição 2.2.1 concluímos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{(l+k)!} \widehat{d}^{l+k} Q(x) \right\|_{\Theta} &\leq \sigma^{l+m} \cdot \|Q\|_{\Theta} \cdot \|x\|^{l+m-(l+k)} \\ &= \sigma^{l+m} \cdot \|Q\|_{\Theta} \cdot \|x\|^{m-k} \\ &\leq (\sigma^{l+1})^m \cdot \|Q\|_{\Theta} \cdot \|x\|^{m-k}. \end{aligned}$$

■

Observação 3.2.8 Na demonstração da Proposição 3.2.7 usamos a seguinte desigualdade: se $l, m \in \mathbb{N}$, então

$$\sigma^{l+m} \leq \sigma^{lm+m} = \sigma^{(l+1)m}.$$

Isso decorre do fato de que $\sigma \geq 1$, pois neste caso a função

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sigma^x,$$

é crescente. De fato, como $l \geq 1$, $m \geq 1$ e $0 \leq l(m-1) = lm - l$, então $lm \geq l$ e $lm + m \geq l + m$, e daí segue que

$$\sigma^{l+m} = f(l+m) \leq f(lm+m) = \sigma^{lm+m} = \sigma^{(l+1)m}.$$

3.3 Funções holomorfas associadas ao tipo de holomorfia diferenciado

Dado um tipo de holomorfia Θ , na Seção 2.4 estudamos as funções holomorfas associadas a Θ e na Seção 3.2 aprendemos a diferenciar Θ de modo a obter novos tipos de holomorfia $\frac{1}{l!}\hat{d}^l\Theta$, $l \in \mathbb{N}$. Torna-se natural então estudar as funções holomorfas associadas aos tipos de holomorfia $\frac{1}{n!}\hat{d}^n\Theta$, o que faremos nesta seção.

O seguinte resultado elementar de Análise Funcional será útil mais adiante.

Proposição 3.3.1 *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados tais que $X \subset Y$ e a aplicação inclusão $X \hookrightarrow Y$ é contínua. Seja $y \in Y$ e seja $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que:*

- (i) $x_k \longrightarrow y$ na norma $\|\cdot\|_Y$;
- (ii) $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente na norma $\|\cdot\|_X$.

Então $y \in X$ e $x_k \longrightarrow y$ na norma $\|\cdot\|_X$.

Demonstração. Da condição (ii) existe $x_0 \in X$ tal que $x_k \longrightarrow x_0$ na norma $\|\cdot\|_X$. Da continuidade da aplicação inclusão $X \hookrightarrow Y$ segue que $x_k \longrightarrow x_0$ na norma $\|\cdot\|_Y$. Mas $x_k \longrightarrow y$ na norma $\|\cdot\|_Y$ pela condição (i), então a unicidade do limite no espaço normado $(Y, \|\cdot\|_Y)$ assegura que $y = x_0 \in X$. ■

Lema 3.3.2 *Sejam $U \subset E$ aberto e Θ um tipo de holomorfia de E em F . Se $f \in \mathcal{H}(U; F)$ é de Θ -tipo de holomorfia em $\xi \in U$, então existe um número real $\rho > 0$ tal que $B_\rho(\xi) \subset U$ e:*

- (a) $\hat{d}^m f(x) \in \mathcal{P}_\Theta({}^m E; F)$ para todos $x \in B_\rho(\xi)$ e $m \in \mathbb{N}$;
- (b) Existem números reais $C \geq 0$ e $c \geq 0$ tais que

$$\left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(x) \right\|_\Theta \leq C \cdot c^m$$

para todos $x \in B_\rho(\xi)$ e $m \in \mathbb{N}$;

- (c) Para todos $x \in B_\rho(\xi)$ e $m \in \mathbb{N}$,

$$\hat{d}^m f(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \hat{d}^k f(\xi) P_k(x - \xi),$$

onde

$$P_k = \frac{1}{k!} \hat{d}^k f(\xi) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}$$

e a convergência se dá no sentido de $\mathcal{P}_\Theta({}^m E; F)$.

Demonstração. Como a função f é holomorfa em U e $\xi \in U$, existem uma bola $B_r(\xi) \subset U$ e uma sequência de polinômios $P^k f(\xi) \in \mathcal{P}({}^k E; F)$, $k \in \mathbb{N}_0$, tais que $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P^k f(\xi)(x - \xi)$ uniformemente para $x \in B_r(\xi)$. Pela Observação 3.1.14 existe um número real $\rho > 0$ tal que $0 < \rho < r_b$, $B_\rho(\xi) \subset U$ e

$$\widehat{d}^m f(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \widehat{d}^m P^k f(\xi)(x - \xi),$$

com convergência uniforme em $B_\rho(\xi)$ no sentido de $\mathcal{P}({}^m E; F)$ para qualquer $m \in \mathbb{N}$, onde $P^k f(\xi) = \frac{1}{k!} \widehat{d}^k f(\xi)$ para todo k . Agora, como f é de Θ -tipo de holomorfia em ξ , pela condição (1) da Definição 2.4.1 temos $\widehat{d}^k f(\xi) = k! P^k f(\xi) \in \mathcal{P}_\Theta({}^k E; F)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Com isso obtemos $P^k f(\xi) \in \mathcal{P}_\Theta({}^k E; F)$ para todo k . Daí, se $\sigma \geq 1$ é a constante cuja existência é garantida pela condição (3) da Definição 2.2.1, temos

$$\widehat{d}^m P^k f(\xi)(x - \xi) \in \mathcal{P}_\Theta({}^m E; F)$$

e

$$\left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m P^k f(\xi)(x - \xi) \right\|_{\Theta} \leq \sigma^k \cdot \|P^k f(\xi)\|_{\Theta} \cdot \|x - \xi\|^{k-m},$$

para todo $m \leq k$. Logo

$$\left\| \widehat{d}^m P^k f(\xi)(x - \xi) \right\|_{\Theta} \leq m! \cdot \sigma^k \cdot \|P^k f(\xi)\|_{\Theta} \cdot \|x - \xi\|^{k-m}. \quad (3.4)$$

Também pela condição (2) da Definição 2.4.1 existem constantes $C' \geq 0$, $c' \geq 0$ tais que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \frac{1}{k!} \widehat{d}^k f(\xi) \right\|_{\Theta} = \|P^k f(\xi)\|_{\Theta} \leq C' \cdot (c')^k. \quad (3.5)$$

De (3.4) e (3.5) segue que

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{d}^m P^k f(\xi)(x - \xi) \right\|_{\Theta} &\leq m! \cdot \sigma^k \cdot \|P^k f(\xi)\|_{\Theta} \cdot \|x - \xi\|^{k-m} \\ &\leq m! \cdot \sigma^k \cdot C' \cdot (c')^k \cdot \|x - \xi\|^{k-m} \\ &= m! \cdot C' \cdot \sigma^k \cdot (c')^k \cdot \|x - \xi\|^{k-m}. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\sigma \cdot c' \cdot \rho < 1$ (caso seja necessário, basta trabalhar com $\min \left\{ \rho, \frac{1}{2\sigma \cdot c'} \right\}$ no lugar de ρ). Então

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{d}^m P^k f(\xi)(x - \xi) \right\|_{\Theta} &\leq m! \cdot C' \cdot \sigma^k \cdot (c')^k \cdot \|x - \xi\|^{k-m} \\ &\leq m! \cdot C' \cdot \sigma^k \cdot (c')^k \cdot \rho^{k-m} = \frac{m! \cdot C'}{\rho^m} \cdot (\sigma \cdot c' \cdot \rho)^k, \end{aligned}$$

para todos k e $x \in B_\rho(\xi)$. Como

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{m! \cdot C'}{\rho^m} \cdot (\sigma \cdot c' \cdot \rho)^k = \frac{m! \cdot C'}{\rho^m} \cdot \frac{(\sigma \cdot c' \cdot \rho)^m}{(1 - \sigma \cdot c' \cdot \rho)} = \frac{m! \cdot C' \cdot (\sigma \cdot c')^m}{(1 - \sigma \cdot c' \cdot \rho)} < +\infty,$$

pelo Teste de Weierstrass (Teorema 1.3.7) segue que a série $\sum_{k=m}^{\infty} \left\| \widehat{d}^m P^k f(\xi)(x - \xi) \right\|_{\Theta}$ converge uniformemente em $B_{\rho}(\xi)$. Mais ainda,

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left\| \widehat{d}^m P^k f(\xi)(x - \xi) \right\|_{\Theta} \leq \frac{m! \cdot C' \cdot (\sigma \cdot c')^m}{(1 - \sigma \cdot c' \cdot \rho)}. \quad (3.6)$$

Novamente pelo Teste de Weierstrass concluímos que a série

$$\sum_{k=m}^{\infty} \widehat{d}^m P^k f(\xi)(x - \xi) \quad (3.7)$$

converge uniformemente em $B_{\rho}(\xi)$ no sentido de $\mathcal{P}_{\Theta}(^m E; F)$. Por outro lado sabemos que essa mesma série converge para $\widehat{d}^m f(x)$ uniformemente em $B_{\rho}(\xi)$ no sentido de $\mathcal{P}(^m E; F)$. Combinando a Proposição 3.2.1, a Proposição 3.3.1, a convergência (3.7) e essa última convergência, concluímos que

$$\widehat{d}^m f(x) \in \mathcal{P}_{\Theta}(^m E; F)$$

para todos $x \in B_{\rho}(\xi)$ e $m \in \mathbb{N}$, e, ainda mais,

$$\sum_{k=m}^{\infty} \widehat{d}^m P^k f(\xi)(x - \xi) = \widehat{d}^m f(x)$$

no sentido de $\mathcal{P}_{\Theta}(^m E; F)$ para todo $x \in B_{\rho}(\xi)$. Assim ficam provados os itens (a) e (c). De

$$\left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(x) \right\|_{\Theta} = \frac{1}{m!} \left\| \widehat{d}^m f(x) \right\|_{\Theta} = \frac{1}{m!} \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n \widehat{d}^m P^k f(\xi)(x - \xi) \right\|_{\Theta},$$

e

$$\left\| \sum_{k=m}^n \widehat{d}^m P^k f(\xi)(x - \xi) \right\|_{\Theta} \leq \sum_{k=m}^n \left\| \widehat{d}^m P^k f(\xi)(x - \xi) \right\|_{\Theta},$$

temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(x) \right\|_{\Theta} &\leq \frac{1}{m!} \sum_{k=m}^{\infty} \left\| \widehat{d}^m P^k f(\xi)(x - \xi) \right\|_{\Theta} \\ &\stackrel{(3.6)}{\leq} \frac{1}{m!} \left[\frac{m! \cdot C' \cdot (\sigma \cdot c')^m}{(1 - \sigma \cdot c' \cdot \rho)} \right] \\ &= \frac{C'}{(1 - \sigma \cdot c' \cdot \rho)} \cdot (\sigma \cdot c')^m \end{aligned}$$

para todo $x \in B_{\rho}(\xi)$, completando a demonstração do item (b). ■

Proposição 3.3.3 *Sejam Θ um tipo de holomorfia de E em F e $\tau = \frac{1}{l!} \widehat{d}^l \Theta$ o correspondente tipo de holomorfia de E em $\mathcal{P}_{\Theta}(^l E; F)$ onde $l \in \mathbb{N}$. Se $f \in \mathcal{H}_{\Theta}(U; F)$, então*

$$\widehat{d}^l f \in \mathcal{H}_{\tau}(U; \mathcal{P}_{\Theta}(^l E; F)).$$

Demonstração. Mostraremos primeiramente que $\widehat{d}^l f$ toma valores em $\mathcal{P}_\Theta(^l E; F)$, mais precisamente $\widehat{d}^l f \in \mathcal{H}(U; \mathcal{P}_\Theta(^l E; F))$. Dado $\xi \in U$, como $f \in \mathcal{H}_\Theta(U; F)$ pelo Lema 3.3.2 existe um número real $\rho > 0$ tal que $B_\rho(\xi) \subset U$ e

- (a) $\widehat{d}^m f(x) \in \mathcal{P}_\Theta(^m E; F)$ para todos $x \in B_\rho(\xi)$ e $m \in \mathbb{N}$;
- (b) Existem números reais $C \geq 0$, $c \geq 0$ tais que

$$\left\| \frac{1}{m!} \widehat{d}^m f(x) \right\|_\Theta \leq C \cdot c^m$$

para todos $x \in B_\rho(\xi)$ e $m \in \mathbb{N}$;

- (c) Para todos $x \in B_\rho(\xi)$ e $m \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{d}^m f(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \widehat{d}^m P_k(x - \xi),$$

onde

$$P_k = \frac{1}{k!} \widehat{d}^k f(\xi),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, onde a convergência se dá no sentido de $\mathcal{P}_\Theta(^m E; F)$.

Aplicando (c) para $l \in \mathbb{N}$, temos

$$\widehat{d}^l f(x) = \sum_{k=l}^{\infty} \widehat{d}^l P_k(x - \xi),$$

para todo $x \in B_\rho(\xi)$ onde, por (a),

$$P_k = \frac{1}{k!} \widehat{d}^k f(\xi) \in \mathcal{P}_\Theta(^k E; F)$$

e a convergência das séries se dá no sentido de $\mathcal{P}_\Theta(^l E; F)$. Logo

$$\frac{1}{l!} \widehat{d}^l f(x) = \sum_{k=l}^{\infty} \frac{1}{l!} \widehat{d}^l P_k(x - \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \widehat{d}^l P_{l+k}(x - \xi). \quad (3.8)$$

Como $l \leq l + k$, pela condição (3) da Definição 2.2.1 temos

$$\widehat{d}^l P_{l+k}(x - \xi) \in \mathcal{P}_\Theta(^l E; F)$$

e

$$\left\| \frac{1}{l!} \widehat{d}^l P_{l+k}(x - \xi) \right\|_\Theta \leq \sigma^{l+k} \cdot \|P_{l+k}\|_\Theta \cdot \|x - \xi\|^{k=l+k-l}. \quad (3.9)$$

Agora, por (b),

$$\|P_{l+k}\|_\Theta = \left\| \frac{1}{(l+k)!} \widehat{d}^{l+k} f(\xi) \right\|_\Theta \leq C \cdot c^{l+k}.$$

Combinando com (3.9) temos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{l!} \widehat{d}^l P_{l+k}(x - \xi) \right\|_{\Theta} &\leq C \cdot \sigma^{l+k} \cdot c^{l+k} \cdot \|x - \xi\|^k \\
&= C \cdot (\sigma \cdot c)^l \cdot (\sigma \cdot c)^k \cdot \|x - \xi\|^k \\
&< C \cdot (\sigma \cdot c)^l \cdot (\sigma \cdot c)^k \cdot \rho^k \\
&= C \cdot (\sigma \cdot c)^l \cdot (\sigma \cdot c \cdot \rho)^k.
\end{aligned}$$

Consequentemente, em (3.8), pelo Teste de Weierstrass segue que a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \widehat{d}^l P_{l+k}(x - \xi) \tag{3.10}$$

converge uniformemente em $B_{\rho}(\xi)$. Além disso, da igualdade (3.8) segue que, para todo $x \in B_{\rho}(\xi)$,

$$\frac{1}{l!} \widehat{d}^l f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \widehat{d}^l P_{l+k}(x - \xi) \tag{3.11}$$

pontualmente. Logo de (3.10), (3.11) e pela Proposição 1.3.8 temos

$$\frac{1}{l!} \widehat{d}^l f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \widehat{d}^l P_{l+k}(x - \xi),$$

com convergência uniforme em $B_{\rho}(\xi)$ no sentido de $\mathcal{P}_{\Theta}({}^l E; F)$. E assim

$$\widehat{d}^l f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{d}^l P_{l+k}(x - \xi)$$

converge uniformemente em $B_{\rho}(\xi)$ no sentido de $\mathcal{P}_{\Theta}({}^l E; F)$, onde

$$\widehat{d}^l P_{l+k} \in \mathcal{P}({}^k E; \mathcal{P}_{\Theta}({}^l E; F)).$$

Por outro lado, $\frac{1}{l!} \widehat{d}^l P_{l+k} \in \frac{1}{l!} \widehat{d}^l \mathcal{P}_{\Theta}({}^{l+k} E; F)$ e assim

$$\widehat{d}^l P_{l+k} \in \frac{1}{l!} \widehat{d}^l \mathcal{P}_{\Theta}({}^{l+k} E; F),$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. Por fim, de

$$\left\| \frac{1}{l!} \widehat{d}^l P_{l+k} \right\|_{\tau} = \|P_{l+k}\|_{\Theta} \leq C \cdot c^{l+k},$$

segue que

$$\|\widehat{d}^l P_{l+k}\|_{\tau} \leq (l!C) \cdot c^{l+k},$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$ ■

CAPÍTULO 4

TIPO DE HOLOMORFIA GLOBAL E IDEAIS DE POLINÔMIOS

Como já foi dito, o objetivo do conceito de tipo de holomorfia é unificar classes especiais de polinômios que eram consideradas individualmente. Com o advento da teoria de ideais de aplicações multilineares, iniciada por Pietsch em [31], uma nova maneira de estudar classes especiais de polinômios apareceu naturalmente, a saber, a teoria de ideais de polinômios homogêneos, que foi desenvolvida por vários autores, em especial por K. Floret (veja [16, 17] dentre outros). Torna-se necessário então saber relacionar tipos de holomorfia com ideais de polinômios homogêneos e o objetivo deste capítulo é exatamente estabelecer esta relação. Os resultados apresentados neste capítulo foram provados em [7].

4.1 Tipo de holomorfia global

A definição de tipo de holomorfia diz respeito a espaços de polinômios homogêneos de E em F , para espaços de Banach E e F fixados. Entretanto, como mostram os exemplos explorados até aqui, na maioria das vezes as classes estudadas funcionam para *todos* espaços de Banach E e F . Isso motivou a definição de tipo de holomorfia global em [7]. A exemplo do que se faz na teoria de ideais, generaliza-se o estudo no sentido de considerar espaços quasi-normados e não apenas espaços normados. Vejamos primeiramente as definições:

Definição 4.1.1 Seja E um espaço de vetorial sobre $\mathbb{K}$.

(a) Uma *quasi-norma* em E é uma função $\|\cdot\|: E \rightarrow [0, +\infty)$ tal que

- (i) $\|x\| \geq 0$ para todo x em E , e $\|x\| = 0$ se e somente se $x = 0$;
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ para todos x em E e $\lambda \in \mathbb{K}$;
- (iii) Existe uma constante $c \geq 1$ tal que $\|x + y\| \leq c(\|x\| + \|y\|)$ para quaisquer $x, y \in E$.

Quando $c = 1$, a quasi-norma é uma norma.

(b) Seja $0 < p \leq 1$. Uma p -norma em um espaço vetorial E é uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, +\infty)$ tal que

(i) $\|x\| \geq 0$ para todo x em E , e $\|x\| = 0$ se e somente se $x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ para todo x em E e $\lambda \in \mathbb{K}$;

(iii) $\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$ para quaisquer $x, y \in E$.

Para a teoria de espaços quasi-normados e p -normados, veja [22]. Para nós o importante é que tanto faz trabalhar com quasi-normas ou com p -normas, mais precisamente:

- Toda p -norma é uma quasi-norma, com constante $c = 2^{\frac{1}{p}}$ (veja [5, Proposição 1.1.3]).
- Toda quasi-norma (com constante C) é uma p -norma onde $C = 2^{\frac{1}{p-1}}$ (veja [22, p. 1102]).

Dada uma p -norma $\|\cdot\|$ em E , a função

$$d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \|x - y\|^p,$$

é uma métrica em E . Quando esta métrica for completa, dizemos que $(E, \|\cdot\|)$ é um *espaço p -Banach* ou *espaço quasi-Banach*.

Definição 4.1.2 Um *tipo de holomorfia global* $\mathcal{P}_H$ é uma classe de polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach tal que para todo número natural n e quaisquer espaços de Banach E e F , a componente

$$\mathcal{P}_H(^n E; F) := \mathcal{P}(^n E; F) \cap \mathcal{P}_H$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^n E; F)$ e que é um espaço de Banach quando dotado de uma norma $P \mapsto \|P\|_H$ tal que

(a) $\mathcal{P}_H(^0 E; F) = F$, como um espaço vetorial normado para todos E e F ;

(b) Existe $\sigma \geq 1$ tal que para quaisquer espaços de Banach E e F , $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $a \in E$ e $P \in \mathcal{P}_H(^n E; F)$, tem-se

$$\widehat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}_H(^k E; F) \quad \text{e} \quad \left\| \frac{1}{k!} \widehat{d}^k P(a) \right\|_H \leq \sigma^n \cdot \|P\|_H \cdot \|a\|^{n-k},$$

onde $\widehat{d}^k P(a)$ é a k -ésima diferencial de P em a .

Se tivermos quasi-normas em vez de normas (cada $\mathcal{P}_H(^n E; F)$ é um espaço quasi-Banach com constante de quasi-norma não dependendo dos espaços subjacentes E e F , mas possivelmente dependendo de n), dizemos que $\mathcal{P}_H$ é um *quasi-tipo de holomorfia global*.

Observação 4.1.3 Se $\mathcal{P}_H$ é um tipo (quasi-tipo) de holomorfia global com constante σ e $\|\cdot\|_K$ é uma outra norma (quasi-norma) em $\mathcal{P}_H$ para a qual existe $\gamma \geq 1$ tal que

$$\|P\|_H \leq \|P\|_K \leq \gamma^n \|P\|_H$$

para todos n , E, F e $P \in \mathcal{P}_H(^n E; F)$, então $(\mathcal{P}_H, \|\cdot\|_K)$ é um tipo (quasi-tipo) de holomorfia global com constante $\sigma\gamma$. De fato, como $\gamma \geq 1$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{k!} \widehat{d}^k P(a) \right\|_K &\leq \gamma^k \cdot \left\| \frac{1}{k!} \widehat{d}^k P(a) \right\|_H \leq \gamma^k \cdot \sigma^n \cdot \|P\|_H \cdot \|a\|^{n-k} \\ &\leq \gamma^n \cdot \sigma^n \cdot \|P\|_H \cdot \|a\|^{n-k} \leq (\gamma\sigma)^n \cdot \|P\|_K \cdot \|a\|^{n-k}. \end{aligned}$$

O conceito de ideais de operadores foi sintetizado por A. Pietsch [30] a partir de classes especiais de operadores lineares estudados nas décadas anteriores.

Definição 4.1.4 Um *ideal de operadores* $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para quaisquer espaços de Banach E e F , as componentes

$$\mathcal{I}(E; F) := \mathcal{L}(E; F) \cap \mathcal{I}$$

satisfazem:

- (1) $\mathcal{I}(E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; F)$ que contém os operadores de posto finito;
- (2) Propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(E; F)$, $v \in \mathcal{I}(F; G)$ e $t \in \mathcal{L}(G; H)$, então $t \circ v \circ u \in \mathcal{I}(E; H)$.

Se existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}: \mathcal{I} \rightarrow [0, +\infty)$ tal que

- (a) Para algum $0 < p \leq 1$ se tem que $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita a $\mathcal{I}(E; F)$ é uma p -norma para quaisquer espaços de Banach E e F ;
- (b) $\|id_{\mathbb{K}}: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}: id(\lambda) = \lambda\|_{\mathcal{I}} = 1$;
- (c) Se $u \in \mathcal{L}(E; F)$, $v \in \mathcal{I}(F; G)$ e $t \in \mathcal{L}(G; H)$, então $\|t \circ v \circ u\|_{\mathcal{I}} \leq \|t\| \cdot \|v\|_{\mathcal{I}} \cdot \|u\|$,

então $\mathcal{I}$ é chamado de *ideal quasinormado* (*normado se $p=1$*) *de operadores*. Se as componentes $\mathcal{I}(E; F)$ são completas com respeito a $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, dizemos que $\mathcal{I}$ é um *ideal quasi-Banach* (*Banach se $p=1$*) *de operadores*.

Em [31] A. Pietsch deu início à teoria de ideais de aplicações multilineares:

Definição 4.1.5 Um *ideal aplicações multilineares* é uma classe $\mathcal{M}$ de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer espaços de Banach $E_1, \dots, E_n$ e F , as componentes

$$\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F) := \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \cap \mathcal{M}$$

satisfazem:

- (1) $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ que contém as aplicações n -lineares de tipo finito;
- (2) Propriedade de ideal: Se $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ para $j = 1, \dots, n$, e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então $t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{M}(G_1, \dots, G_n; H)$.

Se existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty)$ tal que

- (a) Para cada natural n existe $0 < p_n \leq 1$ tal que $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ restrita a $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é uma p_n -norma para quaisquer espaços de Banach $E_1, \dots, E_n$ e F ;
- (b) $\|A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} : A(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n\|_{\mathcal{M}} = 1$ para todo n ;
- (c) Se $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ para $j = 1, \dots, n$, e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$\|t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n)\|_{\mathcal{M}} \leq \|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{M}} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|,$$

então $\mathcal{M}$ é chamado de *ideal quasi-normado* (normado se todo $p_n = 1$) de aplicações multilineares. Se as componentes $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ são completas com respeito a $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, dizemos que $\mathcal{M}$ é um *ideal quasi-Banach* (Banach se todo $p_n = 1$) de aplicações multilineares. Para um ideal fixo $\mathcal{M}$ de aplicações multilineares e $n \in \mathbb{N}$, a classe

$$\mathcal{M}_n := \bigcup_{E_1, \dots, E_n, F} \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$$

é chamado de *ideal de aplicações n -lineares*. Um ideal de Banach de aplicações n -lineares é chamada de *fechado* se sua norma é a norma usual de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e cada componente $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Um ideal $\mathcal{M}$ de aplicações multilineares é *fechado* se cada $\mathcal{M}_n$ é fechado.

A adaptação para o caso de polinômios homogêneos é imediata:

Definição 4.1.6 Um *ideal de polinômios homogêneos* é uma classe $\mathcal{Q}$ de polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer espaços de Banach E e F , as componentes

$$\mathcal{Q}(^n E; F) := \mathcal{P}(^n E; F) \cap \mathcal{Q}$$

satisfazem:

- (1) $\mathcal{Q}(^n E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^n E; F)$ que contém os polinômios n -homogêneos de tipo finito;
- (2) Propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(G; E)$, $P \in \mathcal{Q}(^n E; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então $t \circ P \circ u \in \mathcal{Q}(^n G; H)$.

Se existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}: \mathcal{Q} \rightarrow [0, +\infty)$ tal que

- (a) Para cada natural n existe $0 < p_n \leq 1$ tal que $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ restrita a $\mathcal{Q}(^n E; F)$ é uma p_n -norma para quaisquer espaços de Banach E e F ;

(b) $\|P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : P(\lambda) = \lambda^n\|_{\mathcal{Q}} = 1$ para todo n ;

(c) Se $u \in \mathcal{L}(G; E)$, $P \in \mathcal{Q}(^n E; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$\|t \circ P \circ u\|_{\mathcal{Q}} \leq \|t\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|u\|^n,$$

então $\mathcal{Q}$ é chamado de *ideal quasi-normado* (*normado* se todo $p_n = 1$) de *polinômios homogêneos*. Se as componentes $\mathcal{Q}(^n E; F)$ são completas com respeito a $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$, dizemos que $\mathcal{Q}$ é um *ideal quasi-Banach* (*Banach* se todo $p_n = 1$) de *polinômios homogêneos*. Para um ideal fixo $\mathcal{Q}$ de polinômios homogêneos e $n \in \mathbb{N}$, a classe

$$\mathcal{Q}_n := \bigcup_{E, F} \mathcal{Q}(^n E; F)$$

é chamada de *ideal de polinômios n -homogêneos*. Um ideal de Banach de polinômios n -homogêneos é chamado de *fechado* se sua norma é a norma usual de $\mathcal{P}(^n E; F)$ e cada componente $\mathcal{Q}(^n E; F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{P}(^n E; F)$. Um ideal $\mathcal{Q}$ de polinômios homogêneos é *fechado* se cada $\mathcal{Q}_n$ é fechado. Se $\mathcal{Q}$ é um ideal de polinômios, definimos $\mathcal{Q}(^0 E; F) = F$ para todos E e F .

A um ideal de aplicações multilineares corresponde um ideal de polinômios de maneira natural:

Proposição 4.1.7 *Seja $\mathcal{M}$ um ideal de aplicações multilineares, onde cada $\mathcal{M}_n$ é um ideal p_n -Banach de aplicações n -lineares. Definindo*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}} := \{P : \check{P} \in \mathcal{M}\}, \text{ e } \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} := \|\check{P}\|_{\mathcal{M}},$$

obtém-se um ideal quasi-Banach (Banach se $\mathcal{M}$ é Banach) de polinômios, chamado de ideal de polinômios gerado por $\mathcal{M}$.

Demonstração. (1) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e E, F espaços de Banach. Consideremos a componente

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^n E; F) := \mathcal{P}(^n E; F) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{M}}.$$

É claro que $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^n E; F) \subset \mathcal{P}(^n E; F)$. Dados $P, Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^n E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos $\check{P}, \check{Q} \in \mathcal{M}(^n E; F)$, e portanto

$$\check{P} + \lambda \check{Q} = (P + \lambda Q)^{\vee} \in \mathcal{M}(^n E; F),$$

provando que $P + \lambda Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^n E; F)$. Vimos no Exemplo 2.3.2 que a aplicação multilinear simétrica associada a um polinômio homogêneo de tipo finito tem tipo finito. Como $\mathcal{M}(^n E; F)$ contém as aplicações multilineares de tipo finito, segue que $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ contém os polinômios homogêneos de tipo finito.

(2) Sejam $u \in \mathcal{L}(G; E)$, $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^n E; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Como $\mathcal{M}$ é ideal, temos $t \circ \check{P} \circ (u, \cdot^{(n)}, u) \in \mathcal{M}(^n G; H)$ pois $\check{P} \in \mathcal{M}(^n E; F)$. Assim, para todo $x \in E$,

$$\left[t \circ \check{P} \circ (u, \cdot^{(n)}, u) \right] (x, \cdot^{(n)}, x) = t(\check{P}(u(x), \cdot^{(n)}, u(x))) = t(P(u(x))) = (t \circ P \circ u)(x),$$

provando que $\left[t \circ \check{P} \circ (u, \cdot^{(n)}, u) \right]^\wedge = t \circ P \circ u$, e portanto $t \circ P \circ u \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}({}^n E; F)$.

(a) Sejam $P, Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}({}^n E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos $\check{Q}, \check{P} \in \mathcal{M}({}^n E; F)$, logo $\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} \geq 0$, uma vez que $\mathcal{M}({}^n E; F)$ é p_n -normado para algum $0 < p_n \leq 1$. Temos também

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = 0 \iff \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} = 0 \iff \check{P} = 0 \iff P = 0.$$

Para completar os axiomas de p_n -norma,

$$\|\lambda P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|(\lambda P)^\vee\|_{\mathcal{M}} = \|\lambda \cdot \check{P}\|_{\mathcal{M}} = |\lambda| \cdot \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} = |\lambda| \cdot \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} \text{ e}$$

$$\|P + Q\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}^{p_n} = \|(P + Q)^\vee\|_{\mathcal{M}}^{p_n} = \|\check{P} + \check{Q}\|_{\mathcal{M}}^{p_n} \leq \|\check{P}\|_{\mathcal{M}}^{p_n} + \|\check{Q}\|_{\mathcal{M}}^{p_n} = \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}^{p_n} + \|Q\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}^{p_n}.$$

Seja agora $(P_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{P}_{\mathcal{M}}({}^n E; F)$ uma sequência de Cauchy. Então $(\check{P}_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}({}^n E; F)$ e

$$\|\check{P}_j - \check{P}_k\|_{\mathcal{M}}^{p_n} = \|(P_j - P_k)^\vee\|_{\mathcal{M}}^{p_n} = \|P_j - P_k\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}^{p_n} \xrightarrow{j,k \rightarrow \infty} 0,$$

o que prova que $(\check{P}_j)_{j=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{M}({}^n E; F)$. Como $\mathcal{M}({}^n E; F)$ é completo, existe $A \in \mathcal{M}({}^n E; F)$ tal que $\|\check{P}_j - A\|_{\mathcal{M}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Da desigualdade

$$\|\check{P}_j - A\| \leq \|\check{P}_j - A\|_{\mathcal{M}}$$

(veja, por exemplo, [5, Proposição 1.2.16]), concluímos que $\check{P}_j \rightarrow A$ na norma usual de $\mathcal{L}({}^n E; F)$. Como $\mathcal{L}^s({}^n E; F)$ é fechado em $\mathcal{L}({}^n E; F)$ (veja Observação 4.1.8), segue que $A \in \mathcal{L}^s({}^n E; F)$ e portanto $(\hat{A})^\vee = A \in \mathcal{M}({}^n E; F)$. Assim $\hat{A} \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}({}^n E; F)$ e

$$\|P_j - \hat{A}\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|(P_j - \hat{A})^\vee\|_{\mathcal{M}} = \|\check{P}_j - (\hat{A})^\vee\|_{\mathcal{M}} = \|\check{P}_j - A\|_{\mathcal{M}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

(b) Seja $P: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ dado por $P(\lambda) = \lambda^n$. É imediato que $\check{P}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ é dada por

$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Logo $\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} = 1$.

(c) Dados $u \in \mathcal{L}(G; E)$, $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}({}^n E; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, como $(t \circ P \circ u)^\vee = t \circ \check{P} \circ (u, \dots, u)$,

$$\begin{aligned} \|t \circ P \circ u\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} &= \|(t \circ P \circ u)^\vee\|_{\mathcal{M}} = \|t \circ \check{P} \circ (u, \cdot^{(n)}, u)\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \|t\| \cdot \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} \cdot \|u\|^n = \|t\| \cdot \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} \cdot \|u\|^n. \end{aligned}$$

Para o caso em que o ideal é de Banach basta considerar $p_n = 1$ para todo n . ■

Observação 4.1.8 Vejamos que, de fato, $\mathcal{L}^s({}^n E; F)$ é fechado em $\mathcal{L}({}^n E; F)$. Seja $(A_j)_{j=1}^\infty$ é uma sequência em $\mathcal{L}^s({}^n E; F)$ tal que $A_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} A \in \mathcal{L}({}^n E; F)$ na norma usual de $\mathcal{L}({}^n E; F)$. Pela Proposição 1.1.22(e), o operador simetrização

$$B \in \mathcal{L}({}^n E; F) \mapsto B^s \in \mathcal{L}^s({}^n E; F)$$

é contínuo, portanto $A_j = A_j^s \xrightarrow{j \rightarrow \infty} A^s$ na norma usual de $\mathcal{L}({}^n E; F)$. Pela unicidade do limite temos $A = A^s$, ou seja, $A \in \mathcal{L}^s({}^n E; F)$.

4.2 Exemplos e contraexemplos

Começamos dando um exemplo de tipo de holomorfia global que não é um ideal de polinômios:

Exemplo 4.2.1 Seja $\mathcal{P}_H$ a classe de polinômios homogêneos contínuos definida da seguinte forma: para $n = 1$, definimos $\mathcal{P}_H(nE; F) := \mathcal{L}(E; F)$, com a norma usual, para todos E, F espaços de Banach. Para $n > 1$, definimos $\mathcal{P}_H(nE; F) := \mathcal{P}(nE; F)$, com a norma usual, se $E = F = \ell_1$, e $\mathcal{P}_H(nE; F) := \{0\}$ caso contrário. Vejamos que

- $\mathcal{P}_H$ é um tipo de holomorfia global.

Para $n = 1$, temos $\mathcal{P}_H(E; F) := \mathcal{L}(E; F) = \mathcal{P}(^1E; F)$ que é um espaço de Banach na norma usual de $\mathcal{L}(E; F)$. Para $n > 1$ e $E = F = \ell_1$, temos que $\mathcal{P}_H(nE; F) := \mathcal{P}(nE; F)$, que é um espaço de Banach na norma usual de $\mathcal{P}(nE; F)$. Nos outros casos $\mathcal{P}_H(nE; F) := \{0\}$, onde 0 é o polinômio nulo em $\mathcal{P}(nE; F)$. Logo $\mathcal{P}_H(nE; F)$ é Banach em $\mathcal{P}(nE; F)$ pois $\{0\}$ é fechado em $\mathcal{P}(nE; F)$. Temos também $\mathcal{P}_H(^0E; F) = F$. Como estamos trabalhando com a norma usual de polinômios, a condição sobre as derivadas de um polinômio seguem do Exemplo 2.3.1.

- $\mathcal{P}_H$ não é um ideal de polinômios.

Tomando $n > 1$, $\{0\} \neq E \neq \ell_1$ e $F \neq \{0\}$, temos $\mathcal{P}_H(nE; F) = \{0\}$ que não contém os polinômios n -homogêneos de tipo finito.

Para dar um exemplo de um ideal de polinômios que não é um tipo de holomorfia global precisamos de algumas definições.

Dados $p \geq 1$ e um espaço de Banach E , definimos

$$\ell_p(E) = \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \subset E : \sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p < +\infty \right\},$$

que com as operações usuais de seqüências se torna um espaço de Banach com a norma

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para a demonstração veja, [33, Proposição 2.3.2]. As seqüências em $\ell_p(E)$ são chamadas de *absolutamente p -somantes*.

Definimos também

$$\ell_p^w(E) = \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \subset E : (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p(E) \text{ para todo } \varphi \in E' \right\},$$

que, também com as operações usuais de seqüências, se torna um espaço de Banach com a norma

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} = \sup_{\substack{\varphi \in E' \\ \|\varphi\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^\infty \|\varphi(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para a demonstração veja, também, [33, Proposição 2.3.4]. As seqüências em $\ell_p^w(E)$ são chamadas de *fracamente p -somáveis*. É fácil ver que $\ell_p(E) \subseteq \ell_p^w(E)$.

Os operadores absolutamente p -somantes, que formam um dos ideais de operadores mais estudados (veja [13]), são aqueles que transformam seqüências fracamente p -somáveis em seqüências absolutamente p -somáveis. Muitas generalizações multilineares desses operadores têm sido estudadas e a que definimos abaixo começou a ser estudada em [1].

Definição 4.2.2 Sejam $n \in \mathbb{N}$, $0 < p, q_1, \dots, q_n < +\infty$ onde $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1} + \dots + \frac{1}{q_n}$ e $E_1, \dots, E_n, F$ espaços de Banach. Uma aplicação multilinear $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é *absolutamente $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somante*, (ou $(p; q_1, \dots, q_n)$ somante), se

$$\left(A(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)}) \right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$$

sempre que $\left(x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_k}^w(E_k)$, $k = 1, \dots, n$, ou, equivalentemente, se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todas seqüências $\left(x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_k}^w(E_k)$, $k = 1, \dots, n$,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| A(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)}) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \prod_{k=1}^n \left\| \left(x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w, q_k}. \quad (4.1)$$

O espaço vetorial de todas as aplicações multilineares absolutamente $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somantes de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F é representado por $\mathcal{L}_{as(p; q_1, \dots, q_n)}(E_1, \dots, E_n; F)$. O ínfimo das constantes C tais que a desigualdade (4.1) é válida define uma p -norma completa em $\mathcal{L}_{as(p; q_1, \dots, q_n)}(E_1, \dots, E_n; F)$ que será denotada por $\| \cdot \|_{as, p; q_1, \dots, q_n}$. Além disso, a classe $\mathcal{L}_{as(p; q_1, \dots, q_n)}$ de todas as aplicações multilineares $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somantes é um ideal p -Banach de aplicações n -lineares (veja as demonstrações desses fatos em [5] ou [29]).

Note que a definição acima faz todo sentido no caso linear, isto é, $n = 1$. Aproveitando disso, dizemos que um espaço de Banach E tem a *propriedade de Orlicz* se o operador identidade em E é absolutamente $(2; 1)$ -somante.

Proposição 4.2.3 Se $n \geq 2$ e $E_1, \dots, E_n$ têm a propriedade de Orlicz, então

$$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) = \mathcal{L}_{as(1; 1, \dots, 1)}(E_1, \dots, E_n; F)$$

para todo espaço de Banach F .

Demonstração. Veja [1, Proposition 3.8]. ■

Teorema 4.2.4 Sejam $1 \leq p < \infty$ e E um espaço de Banach de dimensão infinita. Então existe uma seqüência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ tal que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_p(E)$, isto é, operador identidade em E não é absolutamente $(p; p)$ -somante.

Demonstração. Veja [13, Theorem 2.18]. ■

Agora sim estamos em condições de dar um exemplo de ideal de polinômios que não é um tipo de holomorfia global.

Exemplo 4.2.5 De acordo com a Definição 4.2.2, a classe

$$\mathcal{L}_{as(1;1)} := \bigcup_{\substack{E_1, \dots, E_n, F \\ \text{Banach}}} \mathcal{L}_{as(1;1, \dots, 1)}(E_1, \dots, E_n; F)$$

das aplicações multilineares absolutamente $(1; 1, \dots, 1)$ -somantes é um ideal de Banach de aplicações multilineares com a norma $\|\cdot\|_{as(1;1, \dots, 1)}$. Pela Proposição 4.1.7, o ideal $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{as(1;1)}}$ gerado por $\mathcal{L}_{as(1;1)}$ é um ideal de Banach de polinômios homogêneos.

Vejamus que $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{as(1;1)}}$ não é um tipo de holomorfia global. Para isso seja E um espaço de Banach de dimensão infinita com a propriedade de Orlicz, por exemplo $L_2[0, 1]$. Sejam $a \in E$ e $\varphi \in E'$ tais que $\varphi(a) = 1$ e considere o polinômio 2-homogêneo

$$P: E \longrightarrow E, \quad P(x) = \varphi(x)x.$$

É imediato que sua aplicação bilinear simétrica associada é dada por

$$\check{P}: E \times E \longrightarrow E, \quad \check{P}(x, y) = \frac{1}{2} [\varphi(x)y + \varphi(y)x].$$

Pela Proposição 4.2.3, sabemos que $\check{P} \in \mathcal{L}_{as(1;1,1)}(^2E; E)$ e assim $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{as(1;1)}}(^2E; E)$. Como $\varphi(a) = 1$, temos

$$\check{P}(a, \cdot) = \frac{1}{2} [id_E(\cdot) + \varphi(\cdot)a]. \quad (4.2)$$

Como E tem dimensão infinita, sabemos pelo Teorema 4.2.4 que $id_E \notin \mathcal{L}_{as(1;1)}(E; E)$. É claro que o operador linear $\varphi(\cdot)a \in \mathcal{L}(E; E)$ é de tipo finito, logo $\varphi(\cdot)a \in \mathcal{L}_{as(1;1)}(E; E)$ pois $\mathcal{L}_{as(1;1)}$ é um ideal de operadores. Supondo então que $\check{P}(a, \cdot) \in \mathcal{L}_{as(1;1)}(E; E)$, por (4.2) teríamos que $id_E(\cdot) \in \mathcal{L}_{as(1;1)}(E; E)$, o que já sabemos não ocorrer. Segue então que $\check{P}(a, \cdot) \notin \mathcal{L}_{as(1;1)}(E; E)$. De

$$\hat{d}^1 P(a)(y) = \frac{2!}{1!1!} \check{P}(a)(y) = 2\check{P}(a)(y)$$

para todo $y \in E$, segue que

$$\hat{d}^1 P(a) = 2\check{P}(a, \cdot) \notin \mathcal{L}_{as(1;1)}(E; E) = \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{as(1;1)}}(E; E).$$

4.3 Propriedade (B) e tipos de holomorfia

Daremos nesta seção uma condição suficiente para que um ideal de Banach de polinômios seja um tipo de holomorfia global, e veremos também quando esta condição é necessária.

Definição 4.3.1 Sejam E, F, G espaços de Banach. Por simplicidade escreveremos $(^n E, G, F)$ em vez de $(E, \cdot^{(n)}, E, G; F)$.

- Uma aplicação $(n+1)$ -linear $A \in \mathcal{L}(^n E, G; F)$ é chamada de *simétrica nas primeiras n -variáveis* se

$$A(x_1, \dots, x_n, y) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y)$$

para toda permutação σ do conjunto $\{1, \dots, n\}$ e quaisquer $x_1, \dots, x_n \in E, y \in G$.

- Dados $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $a \in E_n$, definimos $Aa \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_{n-1}; F)$ por $Aa(x_1, \dots, x_{n-1}) = A(x_1, \dots, x_{n-1}, a)$.
- Seja $\mathcal{J}$ uma classe de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach tal que, para todos $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach $E_1, \dots, E_n$ e F , a componente

$$\mathcal{J}(E_1, \dots, E_n; F) := \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \cap \mathcal{J}$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ equipada com uma quasi-norma denotada por $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$. Dizemos que $\mathcal{J}$ tem propriedade (B) se existe $C \geq 1$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, quaisquer espaços de Banach E e F e toda $A \in \mathcal{J}(^n E, \mathbb{K}, F)$ simétrica nas n primeiras variáveis,

$$A1 \in \mathcal{J}(^n E; F) \text{ e } \|A1\|_{\mathcal{J}} \leq C\|A\|_{\mathcal{J}}.$$

Dados $a \in E$ e $k \in \mathbb{N}$, por a^k queremos dizer $a, a, \dots, a$ onde a aparece k vezes.

Teorema 4.3.2 *Se o ideal de Banach $\mathcal{M}$ de aplicações multilineares tem a propriedade (B) com constante C , então o ideal de Banach $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ de polinômios homogêneos é um tipo de holomorfia global com constante $\sigma = 2C$.*

Demonstração. Dados um vetor $a \in E$ e uma aplicação simétrica $A \in \mathcal{M}(^{n+1} E; F)$, definindo um funcional linear contínuo $\varphi: \mathbb{K} \rightarrow E$ por $\varphi(1) = a$, e definindo

$$B: E^n \times \mathbb{K} \rightarrow F, \quad B(x_1, \dots, x_n, \lambda) = A(x_1, \dots, x_n, \varphi(\lambda)),$$

pela propriedade de ideal temos

$$B = id_F \circ A \circ (id_E, \dots, id_E, \varphi) \in \mathcal{M}(^n E, \mathbb{K}; F).$$

Além disso, B é simétrica nas n -primeiras coordenadas. Como $\mathcal{M}$ tem a propriedade (B), temos

$$B1 = Aa \in \mathcal{M}(^n E; F) \tag{4.3}$$

e também

$$\begin{aligned} \|Aa\|_{\mathcal{M}} &= \|B1\|_{\mathcal{M}} \leq C \cdot \|B\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq C \cdot \|id_F \circ A \circ (id_E, \dots, id_E, \varphi)\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq C \cdot \|id_F\| \cdot \|A\|_{\mathcal{M}} \cdot \|id_E\|^{(n)} \cdot \|id_E\| \cdot \|\varphi\| \\ &= C \cdot \|A\|_{\mathcal{M}} \cdot \|a\|, \end{aligned}$$

uma vez que $\|\varphi\| = \|a\|$. Assim,

$$\|Aa\|_{\mathcal{M}} \leq C \cdot \|A\|_{\mathcal{M}} \cdot \|a\|. \tag{4.4}$$

Pela Proposição 4.1.7 sabemos que $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ é um ideal de Banach de polinômios. Dados $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach E, F , $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^n E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^n E; F)$ completo na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}$. Mais ainda:

(i) $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^0E; F) = F$;

(ii) Sejam $k \leq n$, $a \in E$ e $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE; F)$. Então $\check{P} \in \mathcal{M}(^nE; F)$ e, por (4.3), temos $\check{P}a \in \mathcal{M}(^{n-1}E; F)$. Também por (4.4) temos

$$\|\check{P}a\|_{\mathcal{M}} \leq C \cdot \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} \cdot \|a\| = C \cdot \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} \cdot \|a\|.$$

Como $\check{P}a \in \mathcal{M}(^{n-1}E; F)$ e é simétrica, então

$$\check{P}a(x_1, \dots, x_{n-1}) = \check{P}(x_1, \dots, x_{n-1}, a),$$

para todos $x_i \in E$. Então $\check{P}ax^{n-1} = \check{P}(x^{n-1}, a)$ para todo $x \in E$, logo $(\check{P}a)^\wedge(x) = \check{P}(x^{n-1}, a)$ e

$$(\check{P}a)^\wedge \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^{n-1}E; F),$$

$$\|(\check{P}a)^\wedge\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|\check{P}a\|_{\mathcal{M}} \leq C \cdot \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} \cdot \|a\|.$$

Agora, como $\check{P}a \in \mathcal{M}(^{n-1}E; F)$, por (4.3) temos

$$\check{P}a^2 := (\check{P}a)a \in \mathcal{M}(^{n-2}E; F),$$

onde $\check{P}a^2(x_1, \dots, x_{n-2}) = \check{P}(x_1, \dots, x_{n-2}, a, a)$, e de (4.4) segue que

$$\|\check{P}a^2\|_{\mathcal{M}} \leq C \|\check{P}a\|_{\mathcal{M}} \cdot \|a\| \leq C^2 \cdot \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} \cdot \|a\|^2.$$

Como $\check{P}a^2 \in \mathcal{M}(^{n-2}E; F)$ é simétrica, então $\check{P}a^2x^{n-2} = \check{P}(x^{n-2}, a^2)$, logo $(\check{P}a^2)^\wedge(x) = \check{P}(x^{n-2}, a^2)$ e $(\check{P}a^2)^\wedge \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^{n-2}E; F)$. Assim,

$$\|(\check{P}a^2)^\wedge\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|\check{P}a^2\|_{\mathcal{M}} \leq C^2 \cdot \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} \cdot \|a\|^2 = C^2 \cdot \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} \cdot \|a\|^2.$$

Indutivamente temos que, para $1 \leq j \leq n$, $\check{P}a^j := (\check{P}a^{j-1})a \in \mathcal{M}(^{n-j}E; F)$ é simétrica e

$$\check{P}a^j(x_1, \dots, x_{n-j}) = \check{P}(x_1, \dots, x_{n-j}, a, \dots, a),$$

$$\|\check{P}a^j\|_{\mathcal{M}} \leq C^j \cdot \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} \cdot \|a\|^j, \quad (\check{P}a^j)^\wedge \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^{n-j}E; F),$$

$$\|(\check{P}a^j)^\wedge\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|\check{P}a^j\|_{\mathcal{M}} \leq C^j \cdot \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} \cdot \|a\|^j = C^j \cdot \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} \cdot \|a\|^j.$$

Usando a simetria de $\check{P}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \widehat{d}^k P(a)(y) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \check{P}(a^{n-k}, y^k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \check{P}(y^k, a^{n-k}) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} (\check{P}a^{n-k})(y^k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} (\check{P}a^{n-k})^\wedge(y), \end{aligned}$$

para todo $y \in E$. Assim $\widehat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^kE; F)$. Por [21, Observação 2.2] e usando que $C \geq 1$, segue que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{k!} \widehat{d}^k P(a) \right\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \|(\check{P}a^{n-k})^\wedge\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \|\check{P}a^{n-k}\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot C^{n-k} \cdot \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} \cdot \|a\|^{n-k} \\ &\leq 2^n \cdot C^n \cdot \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} \cdot \|a\|^{n-k} = (2C)^n \cdot \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} \cdot \|a\|^{n-k}. \end{aligned}$$

■

Relembre que, dada uma aplicação n -linear $A \in \mathcal{L}(^n E; F)$, por A^s denotamos a simetrização de A , isto é, $A^s \in \mathcal{L}(^n E; F)$ e

$$A^s(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

onde S_n é o grupo de permutações de $\{1, \dots, n\}$, para todos $x_1, \dots, x_n \in E$.

Definição 4.3.3 Um ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$ é chamado de

- *Simétrico* se $A^s \in \mathcal{M}(^n E; F)$ sempre que $A \in \mathcal{M}(^n E; F)$.
- *Fechado para multiplicação escalar* (c.s.m) se $\mathcal{M}$ satisfaz pelo menos uma das seguintes condições:

(i) Se $A \in \mathcal{M}(^n E; F)$, $\varphi \in E'$ e $\varphi A \in \mathcal{L}(^{n+1} E; F)$ dada por

$$\varphi A(x_1, \dots, x_{n+1}) = \varphi(x_1) \cdot A(x_2, \dots, x_{n+1}),$$

então $\varphi A \in \mathcal{M}(^{n+1} E; F)$;

(ii) Se $A \in \mathcal{M}(^n E; F)$, $\varphi \in E'$ e $A\varphi \in \mathcal{L}(^{n+1} E; F)$ é dada por

$$A\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \varphi(x_{n+1}) \cdot A(x_1, \dots, x_n),$$

então $A\varphi \in \mathcal{M}(^{n+1} E; F)$.

O conceito de ideal simétrico foi introduzido em [16] e de ideal c.s.m. em [8]. Veremos a seguir condições sobre o ideal para que a propriedade (B) seja equivalente a ser tipo de holomorfia:

Teorema 4.3.4 *As seguintes condições são equivalentes para um ideal $\mathcal{M}$ fechado, c.s.m e simétrico de aplicações multilineares:*

- (a) *Para todos n, E, F , $A1 \in \mathcal{M}(^n E; F)$ para toda $A \in \mathcal{M}(^n E, \mathbb{K}; F)$ simétrica nas n primeiras variáveis;*
- (b) *$\mathcal{M}$ tem propriedade (B) (com melhor constante $C = 1$);*
- (c) *$\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ é um tipo de holomorfia global (com melhor constante σ não maior que 2).*

Demonstração.

(a) $\implies$ (b) Como $\mathcal{M}$ é um ideal fechado, por definição sabemos que $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, logo $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é Banach para todos $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \dots, E_n, F$ espaços de Banach. Se $A \in \mathcal{M}(^n E, \mathbb{K}; F)$ é simétrica nas n primeiras variáveis, temos por (a) que $A1 \in \mathcal{M}(^n E; F)$, e ainda mais

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ |\lambda| \leq 1}} \|A(x_1, \dots, x_n, \lambda)\| = \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ |\lambda| \leq 1}} |\lambda| \cdot \|A(x_1, \dots, x_n, 1)\| \\ &= \sup_{|\lambda| \leq 1} |\lambda| \cdot \sup_{\|x_i\| \leq 1} \|A1(x_1, \dots, x_n)\| = \|A1\|. \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Segue do Teorema 4.3.2.

(c) $\Rightarrow$ (a) Por hipótese $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ é um tipo de holomorfia global com constante $\sigma \leq 2$. Sejam $n \in \mathbb{N}$, E e F espaços de Banach e seja também $A \in \mathcal{M}(^n E, \mathbb{K}; F)$ simétrica nas n -primeiras variáveis. Mostraremos a seguir que $A1 \in \mathcal{M}(^n E; F)$. Para isso sejam $\varphi \in E'$ e $a \in E$ tais que $\varphi(a) = 1$. Definindo

$$B := id_F \circ A \circ (id_E \overset{(n)}{...}, id_E, \varphi), \quad B(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = A(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_{n+1})),$$

pela propriedade de ideal temos $B \in \mathcal{M}(^{n+1} E; F)$. Segue que $B^s \in \mathcal{M}(^{n+1} E; F)$ pois $\mathcal{M}$ é simétrico, e daí, pela Proposição 1.1.22(f), temos $\widehat{B} = \widehat{B^s} \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^{n+1} E; F)$. Pela definição de tipo de holomorfia global,

$$\widehat{d^l B}(a) \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^l E; F), \text{ para todo } l \leq n+1. \quad (4.5)$$

Para $k = 0, 1, \dots, n$, definimos

$$P_k: E \longrightarrow F, \quad P_k(x) = \varphi(x) \cdot A1(a^{n-k}, x^k).$$

É imediatato que cada $P_k \in \mathcal{P}(^{k+1} E; F)$. Notemos também que

$$P_k(x) = \varphi(x) \cdot A1(a^{n-k}, x^k) = \varphi(x) \cdot A(a^{n-k}, x^k, 1),$$

para todos $0 < k \leq n$ e $x \in E$. Considerando a aplicação multilinear contínua

$$C: E^{k+1} \longrightarrow F, \quad C(x_1, \dots, x_{k+1}) := \varphi(x_1) \cdot A(a^{n-k}, x_2, \dots, x_{k+1}, 1),$$

temos $\widehat{C^s} = \widehat{C} = P_k \in \mathcal{P}(^{k+1} E; F)$.

Provaremos agora, por indução, que

$$P_k \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^{k+1} E; F) \text{ para } k = 0, 1, \dots, n. \quad (4.6)$$

De fato. para $k = 0$, como P_0 é uma aplicação 1-linear de tipo finito e $\mathcal{M}$ é um ideal, temos $P_0 \in \mathcal{M}(E, F) = \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(E, F)$. Agora suponhamos que para $0 < k < n$, $P_k \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^{k+1} E, F)$. Devemos mostrar que $P_{k+1} \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^{k+2} E, F)$. Como $0 < k < n$, então $k+1 < n+1$. De (4.5) temos $\widehat{d^{k+1} B}(a) \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^{k+1} E, F)$, onde

$$\frac{1}{(k+1)!} \widehat{d^{k+1} B}(a)(x) = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} B^s(a^{n-k}, x^{k+1})$$

para todo $x \in E$. Dado $x \in E$, definindo

$$x_1 = \dots = x_{n-k} = a, \quad x_{n-k+1} = \dots = x_{n+1} = x, \text{ e}$$

$$y_1 = \dots = y_{n-k-1} = z_1 = \dots = z_{n-k} = a, \quad y_{n-k} = \dots = y_n = z_{n-k+1} = \dots = z_n = x,$$

e usando a simetria de A nas n primeiras variáveis, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{(n-k)!}{(n+1)!} \widehat{d}^{k+1} \widehat{B}(a)(x) &= B^s(a^{n-k}, x^{k+1}) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_{n+1}} B(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n+1)}), \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_{n+1}} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, \varphi(x_{\sigma(n+1)})) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left[(n-k) \sum_{\sigma \in S_n} A(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)}, \varphi(a)) \right] + \\
&\quad \frac{1}{(n+1)!} \left[(k+1) \sum_{\sigma \in S_n} A(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}, \varphi(x)) \right] \\
&= \frac{1}{(n+1)!} [(n-k)n!A(a^{n-k-1}, x^{k+1}, \varphi(a)) + n!(k+1)A(a^{n-k}, x^k, \varphi(x))] \\
&= \frac{n!}{(n+1)!} [(n-k)\varphi(a) \cdot A(a^{n-k-1}, x^{k+1}, 1) + (k+1)\varphi(x) \cdot A(a^{n-k}, x^k, 1)] \\
&= \frac{n!}{(n+1)!} [(n-k)\varphi(a) \cdot A1(a^{n-k-1}, x^{k+1}) + (k+1)\varphi(x) \cdot A1(a^{n-k}, x^k)] \\
&= \frac{n!}{(n+1)!} [(n-k)A1(a^{n-k-1}, x^{k+1}) + (k+1)\varphi(x) \cdot A1(a^{n-k}, x^k)] \\
&= \frac{n!}{(n+1)!} [(n-k)A1(a^{n-k-1}, x^{k+1}) + (k+1)P_k(x)] \\
&= \frac{1}{(n+1)} [(n-k)A1(a^{n-k-1}, x^{k+1}) + (k+1)P_k(x)]
\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{(n-k)!}{(n+1)!} \widehat{d}^{k+1} \widehat{B}(a)(x) = \frac{1}{(n+1)} [(n-k)A1(a^{n-k-1}, x^{k+1}) + (k+1)P_k(x)], \quad (4.7)$$

para todo $x \in E$. Como $\widehat{d}^{k+1} \widehat{B}(a)$ e P_k pertencem a $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^{k+1}E; F)$ e

$$\frac{(n-k)!}{(n+1)!} \widehat{d}^{k+1} \widehat{B}(a)(x) - \frac{(k+1)}{(n+1)} P_k(x) = \frac{(n-k)}{(n+1)} A1(a^{n-k-1}, x^{k+1}),$$

para todo $x \in E$, temos que, se $Q(x) := A1(a^{n-k-1}, x^{k+1})$, então $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^{k+1}E; F)$. Logo

$$\check{Q}(x_1, \dots, x_{k+1}) = A1(a^{n-k-1}, x_1, \dots, x_{k+1}),$$

para todos $x_1, \dots, x_{k+1} \in E$, $\check{Q} \in \mathcal{M}(^{k+1}E; F)$ e, ainda mais, $\check{Q}$ é simétrica pois A é simétrica nas n -primeiras variáveis.

Suponhamos que $\mathcal{M}$ satisfaça a condição (i) da definição de ideal (c.s.m). Como $\check{Q} \in \mathcal{M}(^{k+1}E; F)$ e $\varphi \in E'$, segue que $\varphi\check{Q} \in \mathcal{M}(^{k+2}E; F)$, onde

$$\varphi\check{Q}(x_1, \dots, x_{k+2}) = \varphi(x_1) \cdot \check{Q}(x_2, \dots, x_{k+2}) = \varphi(x_1) \cdot A1(a^{n-k-1}, x_2, \dots, x_{k+2}),$$

para todos $x_1, \dots, x_{k+2} \in E$. Agora notemos que, como $P_{k+1}(x) = \varphi(x) \cdot A1(a^{n-k-1}, x^{k+1})$, então

$$P_{k+1}(x) = \varphi \check{Q}(x, \overset{(k+2)}{\cdot}, x) = [(\varphi \check{Q})^s]^\wedge(x),$$

para todo $x \in E$. Como $\varphi \check{Q} \in \mathcal{M}^{(k+2)}(E; F)$ e $\mathcal{M}$ é simétrico, temos $(\varphi \check{Q})^s \in \mathcal{M}^{(k+2)}(E; F)$ e então $P_{k+1} \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}^{(k+2)}(E; F)$.

Usando o que acabamos de provar para o caso em que $k = n - 1$ temos $P_{n-1} \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}^{(n)}(E; F)$, onde

$$P_{n-1}(x) = \varphi(x) \cdot A1(a, x^{n-1}),$$

para todo $x \in E$. Por outro lado, usando (4.5) no caso em que $l = n$, obtemos

$$\widehat{d}^n \widehat{B}(a) \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}^{(n)}(E; F).$$

De (4.7) para $k = n - 1$ segue que

$$\begin{aligned} \frac{1!}{(n+1)!} \widehat{d}^n \widehat{B}(a)(x) &= \frac{1}{n+1} [A1(a^0, x^n) + nP_{n-1}(x)] \\ &= \frac{1}{n+1} [(A1)^\wedge(x) + nP_{n-1}(x)] \end{aligned}$$

e então

$$\frac{1!}{(n+1)!} \widehat{d}^n \widehat{B}(a)(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) = \frac{1}{n+1} (A1)^\wedge(x)$$

para todo $x \in E$. Logo $(A1)^\wedge \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}^{(n)}(E; F)$, e como $A1$ é simétrica, segue que $A1 \in \mathcal{M}^{(n)}(E; F)$. ■

4.4 A propriedade (B)-polinomial

Na tese [10] de H.-A. Braunss, está provado que, sob determinada condição, o ideal de polinômios gerado por um ideal de aplicações multilineares é um tipo de holomorfia global. Veremos nesta seção que o mesmo ocorre com uma condição mais fraca.

Definição 4.4.1 Seja $\mathcal{R}$ uma classe de polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer espaços de Banach E e F , a componente

$$\mathcal{R}^{(n)}(E; F) := \mathcal{P}^{(n)}(E; F) \cap \mathcal{R}$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}^{(n)}(E; F)$ dotado com uma quasi-norma $\|\cdot\|_{\mathcal{R}}$. Como anteriormente, definimos $\mathcal{R}^{(0)}(E; F) = F$ para quaisquer E, F . Dizemos que $\mathcal{R}$ tem a *propriedade (B)* se existe $C \geq 1$ tal que para todos $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{R}^{(n)}(E; F)$ e $a \in E$,

$$Pa \in \mathcal{R}^{(n-1)}(E; F) \text{ e } \|Pa\|_{\mathcal{R}} \leq C \cdot \|P\|_{\mathcal{R}} \cdot \|a\|,$$

onde $Pa \in \mathcal{P}^{(n-1)}(E; F)$ é dado por $Pa(x) = \check{P}(x^{n-1}, a)$ para todo $x \in E$ (e portanto $(Pa)^\vee \in \mathcal{L}^s({}^{n-1}E; F)$ é dada por $(Pa)^\vee(x_1, \dots, x_{n-1}) = \check{P}(x_1, \dots, x_{n-1}, a)$, para todos $x_1, \dots, x_{n-1} \in E$).

Proposição 4.4.2 *Se $\mathcal{R}$ é uma classe de polinômios homogêneos contínuos com propriedade (B) e constante C tal que as componentes são espaços quasi-Banach, então $\mathcal{R}$ é um quasi-tipo de holomorfia global (tipo de holomorfia global se as componentes são espaços de Banach) com constante $\sigma = 2C$.*

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$, E, F espaços de Banach, $k \leq n$, $a \in E$ e $P \in \mathcal{R}(^n E; F)$. Pela propriedade (B) temos $Pa \in \mathcal{R}(^{n-1} E; F)$ e $\|Pa\|_{\mathcal{R}} \leq C \cdot \|P\|_{\mathcal{R}} \cdot \|a\|$. Então

$$Pa^2 := (Pa)a \in \mathcal{R}(^{n-2} E; F),$$

onde

$$((Pa)a)(x) = (Pa)^\vee(x^{n-2}, a) = \check{P}(x^{n-2}, a, a) = \check{P}(x^{n-2}, a^2),$$

para todo $x \in E$, e

$$\|Pa^2\|_{\mathcal{R}} \leq C \cdot \|Pa\|_{\mathcal{R}} \cdot \|a\| \leq C^2 \cdot \|P\|_{\mathcal{R}} \cdot \|a\|^2.$$

Indutivamente, para $1 \leq j \leq n$ temos

$$Pa^j := (Pa^{j-1})a \in \mathcal{R}(^{n-j} E; F), \text{ onde } (Pa^j)(x) = \check{P}(x^{n-j}, a^j), \text{ e}$$

$$\|Pa^j\|_{\mathcal{R}} \leq C^j \cdot \|P\|_{\mathcal{R}} \cdot \|a\|^j.$$

Da simetria de $\check{P}$ decorre que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \widehat{d}^k P(a)(y) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \check{P}(a^{n-k}, y^k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \check{P}(y^k, a^{n-k}) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} (Pa^{n-k})(y), \end{aligned}$$

para todo $y \in E$. Como $Pa^{n-k} \in \mathcal{R}(^k E; F)$, temos $\widehat{d}^k P(a) \in \mathcal{R}(^k E; F)$ e

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{k!} \widehat{d}^k P(a) \right\|_{\mathcal{R}} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \|\check{P}a^{n-k}\|_{\mathcal{R}} \leq \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot C^{n-k} \cdot \|P\|_{\mathcal{R}} \cdot \|a\|^{n-k} \\ &\leq 2^n \cdot C^n \cdot \|P\|_{\mathcal{R}} \cdot \|a\|^{n-k}. \end{aligned}$$

■

Tendo em vista a proposição anterior, nos interessa saber quando uma classe de polinômios tem (ou não) a propriedade (B). Trataremos primeiramente de alguns exemplos.

Denotaremos por $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ e $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ a classe de todas as aplicações multilineares contínuas e polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ com a norma usual, respectivamente.

Dados um espaço de Banach E e um inteiro positivo n , definimos a n -ésima constante de polarização de E por

$$c(n, E) = \inf \{ M > 0 : \|\check{P}\| \leq M \cdot \|P\| \text{ para todo } P \in \mathcal{P}(^n E) \}.$$

Da Proposição 1.2.2 sabemos que, em geral, $c(n, E) \leq \frac{n^n}{n!}$. Mas existem casos particulares em que estimativas melhores valem, por exemplo:

Proposição 4.4.3 *Se H é um espaço de Hilbert, então $c(n, H) = 1$ para todo n . Em particular, $\|\check{P}\| = \|P\|$ para todo $P \in \mathcal{P}(^n H)$ e todo n .*

Demonstração. Veja [14, Proposition 1.44]. ■

Exemplo 4.4.4 Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e seja também $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ a subclasse de $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ formada por todos os polinômios homogêneos contínuos definidos em espaços de Hilbert. Mais precisamente, dados espaços de Banach E e F sobre $\mathbb{K}$ e $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$, então $P \in \mathcal{H}_{\mathbb{K}}(^n E; F)$ se, e somente se, E é um espaço de Hilbert ou $P = 0$. Vejamos que $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ tem a propriedade polinomial (B) em relação à norma usual de polinômios.

De fato, sejam H um espaço de Hilbert e F um espaço de Banach, ambos sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{H}_{\mathbb{K}}(^n H; F)$ e $a \in H$. No caso em que $a = 0$ não há o que fazer, podemos então supor $a \neq 0$. Note, antes de mais nada, que se $\varphi \in F'$, então $\varphi \circ P \in \mathcal{P}(^n H)$, pois $\check{P} \in \mathcal{L}^s(^n H; F)$ e portanto $\varphi \circ \check{P} \in \mathcal{L}^s(^n H)$, onde $(\varphi \circ \check{P})^\wedge = \varphi \circ P$. Da Proposição 4.4.3 segue que

$$\|\varphi \circ P\| = \|(\varphi \circ P)^\vee\| = \|\varphi \circ \check{P}\|. \quad (4.8)$$

Aplicando duas vezes o Teorema de Hahn–Banach na forma de [9, Corolario 3.1.5] e a igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\substack{\varphi \in F' \\ \|\varphi\| \leq 1}} |\varphi(P(x))| = \sup_{\substack{\varphi \in F' \\ \|\varphi\| \leq 1}} \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(P(x))| \\ &= \sup_{\substack{\varphi \in F' \\ \|\varphi\| \leq 1}} \|\varphi \circ P\| = \sup_{\substack{\varphi \in F' \\ \|\varphi\| \leq 1}} \|\varphi \circ \check{P}\| = \sup_{\substack{\varphi \in F' \\ \|\varphi\| \leq 1}} \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |(\varphi \circ \check{P})(x_1, \dots, x_n)| \\ &= \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \sup_{\varphi \in F' \\ \|\varphi\| \leq 1} |(\varphi \circ \check{P})(x_1, \dots, x_n)| = \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \|\check{P}(x_1, \dots, x_n)\| = \|\check{P}\|. \end{aligned}$$

Acabamos de provar que

$$\|P\| = \|\check{P}\| \text{ para todos } n \in \mathbb{N} \text{ e } P \in \mathcal{H}_{\mathbb{K}}(^n H; F). \quad (4.9)$$

Segue que $Pa \in \mathcal{H}_{\mathbb{K}}(^{n-1} H; F)$ e

$$\begin{aligned} \|Pa\| &\stackrel{(4.9)}{=} \| (Pa)^\vee \| = \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \|\check{P}(x_1, \dots, x_{n-1}, a)\| \\ &= \left[\sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \left\| \check{P} \left(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{a}{\|a\|} \right) \right\| \right] \cdot \|a\| \\ &\leq \|\check{P}\| \cdot \|a\| \stackrel{(4.9)}{=} \|P\| \cdot \|a\|. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}(^n H; F)$ é Banach, segue que $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ tem a propriedade (B), e pela Proposição 4.4.2 segue que $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ é um tipo de holomorfia global com constante 2.

Por outro lado, $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ não é um ideal de polinômios pois não contém os operadores lineares de posto finito (basta considerar um funcional linear contínuo não nulo definido em um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ que não é de Hilbert).

A seguinte caracterização dos polinômios n -homogêneos de tipo finito nos será útil:

Lema 4.4.5 Dados E, F espaços de Banach e $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}_f(^n E; F) = \text{span} \{ \varphi^n \otimes b : \varphi \in E', b \in F \} = \text{span} \{ \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b : \varphi_j \in E', b \in F \}.$$

Demonstração. Veja [14, p. 42]. ■

Usaremos o resultado acima para mostrar que polinômios homogêneos em espaços de dimensão finita são todos de tipo finito:

Lema 4.4.6 Sejam E e F espaços normados com E de dimensão finita e $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\mathcal{P}(^n E; F) = \mathcal{P}_f(^n E; F).$$

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de E . Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\Pi_i : E \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \pi_i \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \right) = \alpha_i,$$

é um funcional linear contínuo. Dados $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$ e $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \in E$,

$$\begin{aligned} P(x) &= \check{P}(x^n) = \check{P} \left(\sum_{i_1=1}^n \alpha_{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n \alpha_{i_n} e_{i_n} \right) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_n} \check{P}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \Pi_{i_1}(x) \cdots \Pi_{i_n}(x) \check{P}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n [\Pi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \Pi_{i_n} \otimes \check{P}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})] (x). \end{aligned}$$

Logo

$$P = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \Pi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \Pi_{i_n} \otimes \check{P}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \in \text{span} \{ \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b : \varphi_j \in E', b \in F \}.$$

Pelo Lema 4.4.5 segue que $P \in \mathcal{P}_f(^n E; F)$. ■

O próximo resultado nos diz que, no caso complexo, para ideais fechados de polinômios é equivalente ter a propriedade (B) e ser tipo de holomorfia global:

Proposição 4.4.7 As seguintes afirmações são equivalentes para um ideal fechado $\mathcal{Q}$ de polinômios homogêneos entre espaços de Banach complexos:

- (a) $\mathcal{Q}$ tem a propriedade (B) (com melhor constante $C = e$);
- (b) $\mathcal{Q}$ é um tipo de holomorfia global (com melhor constante $\sigma \leq 2e$);
- (c) Para todos n , E e F , $Pa \in \mathcal{Q}(^{n-1} E; F)$ sempre que $P \in \mathcal{Q}(^n E; F)$ e $a \in E$.

Demonstração. (a) $\implies$ (b) Da definição de ideal fechado de polinômios sabemos que $\mathcal{Q}$ é um ideal de Banach de polinômios. Pela Proposição 4.4.2 concluímos que $\mathcal{Q}$ é um tipo de holomorfia global com melhor constante $\sigma \leq 2e$.

(b) $\implies$ (c) Por hipótese $\mathcal{Q}$ é um tipo de holomorfia global com constante $\sigma \leq 2e$. Sejam n , E e F , $P \in \mathcal{Q}(^n E; F)$ e $a \in E$. Mostraremos a seguir que $Pa \in \mathcal{Q}(^{n-1} E; F)$. De fato, como $P \in \mathcal{Q}(^n E; F)$ e $\mathcal{Q}$ é um tipo de holomorfia global, então $\widehat{d}^{n-1}P(a) \in \mathcal{Q}(^{n-1} E; F)$, onde

$$\frac{1}{(n-1)!} \widehat{d}^{n-1}P(a)(y) = \frac{n!}{(n-1)!1!} \check{P}(a, y^{n-1}) = n \cdot \check{P}(y^{n-1}, a) = n \cdot Pa(y),$$

para todo $y \in E$. Logo $Pa = \frac{1}{n!} \widehat{d}^{n-1}P(a) \in \mathcal{Q}(^{n-1} E; F)$.

(c) $\implies$ (a) Por hipótese, $Pa \in \mathcal{Q}(^{n-1} E; F)$ sempre que $P \in \mathcal{Q}(^n E; F)$ e $a \in E$.

Afirmção 1. Para todos $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{Q}(^n E; F)$ e $a \in E$, $Pa \in \mathcal{Q}(^{n-1} E; F)$ e $\|Pa\| \leq e \cdot \|P\| \cdot \|a\|$.

No caso $n = 1$ temos

$$Pa(x) = \check{P}(x^{1-1}, a) = \check{P}(a),$$

para todo $x \in E$, logo $Pa \in \mathcal{Q}(^0 E; F) = F$ e

$$\|Pa\| = \|\check{P}(a)\| \leq \|P\| \cdot \|a\| \leq e \cdot \|P\| \cdot \|a\|,$$

uma vez que $\|\check{P}\| = \|P\|$ em $\mathcal{Q}(E; F) = \mathcal{Q}(^1 E; F)$.

No caso $n > 1$, temos $Pa \in \mathcal{Q}(^{n-1} E; F)$, onde $Pa(x) = \check{P}(x^{n-1}, a)$ para todo $x \in E$. Façamos primeiramente o caso em que $a = 0$. Neste caso, $P0(x) = \check{P}(x^{n-1}, 0) = 0$ e $P0 = 0$, logo $\|Pa\| \leq e \cdot \|P\| \cdot \|a\|$. Agora, se $a \neq 0$, temos

$$P \frac{a}{\|a\|}(x) = \check{P}\left(x^{n-1}, \frac{a}{\|a\|}\right) = \frac{1}{\|a\|} \check{P}(x^{n-1}, a) = \frac{1}{\|a\|} Pa(x),$$

para todo $x \in E$, o que prova que $P \frac{a}{\|a\|} = \frac{1}{\|a\|} Pa$. Mais ainda, como $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$ segue que

$$Pa(x) = \check{P}(x^{n-1}, a) = \frac{1}{n!} \widehat{d}^{n-1}P(a)(x) \quad (4.10)$$

para todo $x \in E$. Logo

$$\|a\| P \frac{a}{\|a\|} = Pa = \frac{1}{n!} \widehat{d}^{n-1}P(a).$$

Temos então,

$$\begin{aligned} \|Pa\| &= \left\| P \frac{a}{\|a\|} \right\| \cdot \|a\| \stackrel{(4.10)}{=} \left\| \frac{1}{n!} \widehat{d}^{n-1}P \left(\frac{a}{\|a\|} \right) \right\| \cdot \|a\| = \frac{1}{n!} \left\| \widehat{d}^{n-1}P \left(\frac{a}{\|a\|} \right) \right\| \cdot \|a\| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{n!} \left[\frac{n^n (n-1)!}{(n-1)^{n-1}} \cdot \|P\| \right] \cdot \|a\| = \frac{1}{n} \left[\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \|P\| \right] \cdot \|a\| \\ &= \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1} \cdot \|P\| \cdot \|a\| = \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} \cdot \|P\| \cdot \|a\| < e \cdot \|P\| \cdot \|a\|. \end{aligned}$$

A passagem (*) decorre de uma aplicação de [20, Corollary 3] para $k = n - 1$.

Por BAN denotamos a classe de todos os espaços de Banach complexos.

Afirmção 2.

$$e = \inf \{C \geq 1 : \|Pa\| \leq C \cdot \|P\| \cdot \|a\| \ \forall \ n \in \mathbb{N}, E, F \in BAN, P \in \mathcal{Q}(^nE; F), a \in E\}.$$

Por um lado, pela Afirmção 1 sabemos que para todos $n \in \mathbb{N}$, E, F espaços de Banach, $P \in \mathcal{Q}(^nE; F)$ e $a \in E$, temos $\|Pa\| \leq e \cdot \|P\| \cdot \|a\|$.

Por outro lado, suponhamos que exista $1 \leq C < e$ tal que para todos $n \in \mathbb{N}$, E, F espaços de Banach, $P \in \mathcal{Q}(^nE; F)$ e $a \in E$, tem-se

$$\|Pa\| \leq C \cdot \|P\| \cdot \|a\|. \quad (4.11)$$

Para $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{C}^n$ e $F = \mathbb{C}$, definimos

$$P_n : (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1) \longrightarrow \mathbb{C}, \ P_n((\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Aqui $\|\cdot\|_1$ é a norma da soma. Normalmente P_n é chamado de *n-ésimo polinômio de Nachbin*. Para cada $i = 1, \dots, n$,

$$\Pi_i : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \ \Pi_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_i,$$

é um funcional linear contínuo e, consequentemente, a aplicação

$$A : (\mathbb{C}^n)^n \longrightarrow \mathbb{C}, \ A(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \Pi_1(x^{(1)}) \cdots \Pi_n(x^{(n)}),$$

é n -linear e contínua. Para todo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$A(\lambda^n) = \Pi_1(\lambda) \cdots \Pi_n(\lambda) = \lambda_1 \cdots \lambda_n,$$

logo $P_n \in \mathcal{P}(^n(\mathbb{C}^n))$. Pelo Lema 4.4.6 temos $\mathcal{P}(^n(\mathbb{C}^n)) = \mathcal{P}_f(^n(\mathbb{C}^n); \mathbb{C})$, assim $P_n \in \mathcal{P}_f(^n(\mathbb{C}^n); \mathbb{C})$. Como $\mathcal{Q}$ é um ideal de polinômios, temos $\mathcal{P}_f(^n(\mathbb{C}^n); \mathbb{C}) \subset \mathcal{Q}(^n(\mathbb{C}^n); \mathbb{C})$ e portanto $P_n \in \mathcal{Q}(^n(\mathbb{C}^n); \mathbb{C})$. De (4.11), para $a_n = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$, temos

$$\|P_n a_n\| \leq C \|P_n\|. \quad (4.12)$$

Como $\check{P}_n = A^s$, segue que

$$\|P_n a_n\| = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}^n, \|\lambda\|_1 \leq 1} |\check{P}_n(\lambda^{n-1}, a_n)|.$$

Dado $\lambda \in \mathbb{C}^n$, definindo $x^{(1)} = \dots = x^{(n-1)} = \lambda$, $x^{(n)} = a_n$, temos

$$\begin{aligned}
|\check{P}_n(\lambda^{n-1}, a_n)| &= \left| \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A(x^{\sigma(1)}, \dots, x^{\sigma(n)}) \right| = \left| \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \Pi_1(x^{\sigma(1)}) \dots \Pi_n(x^{\sigma(n)}) \right| \\
&= \left| \frac{1}{n!} \left(\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=n}} \Pi_1(x^{\sigma(1)}) \dots \Pi_n(x^{\sigma(n)}) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1) \neq n}} \Pi_1(x^{\sigma(1)}) \dots \Pi_n(x^{\sigma(n)}) \right) \right| \\
&= \frac{1}{n!} \left| \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=n}} \Pi_1(a_n) \dots \Pi_n(x^{\sigma(n)}) \right| = \frac{1}{n!} \left| \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=n}} 1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_n \right| \\
&= \frac{1}{n!} \left| \lambda_2 \dots \lambda_n \cdot \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=n}} 1 \right| = \frac{(n-1)!}{n!} \cdot |\lambda_2| \dots |\lambda_n| \\
&= \frac{1}{n} \cdot |\lambda_2| \dots |\lambda_n| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{(|\lambda_2| + \dots + |\lambda_n|)^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\sup_{\|\lambda\|_1 \leq 1} |\check{P}_n(\lambda^{n-1}, a_n)| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)^{n-1}}.$$

Tomando $\lambda = \left(0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}\right) \in \mathbb{C}^n$, como $\|\lambda\|_1 = 1$, temos

$$|\check{P}_n(\lambda^{n-1}, a_n)| = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)^{n-1}},$$

logo

$$\|P_n a_n\| = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)^{n-1}}.$$

Por outro lado, definindo $x^{(1)} = \dots = x^{(n)} = \lambda$, temos

$$\begin{aligned}
|\check{P}_n(\lambda^n)| &= \left| \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A(x^{\sigma(1)}, \dots, x^{\sigma(n)}) \right| = \left| \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \Pi_1(\lambda) \dots \Pi_n(\lambda) \right| \\
&= |\lambda_1| \dots |\lambda_n| \leq \frac{(|\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|)^n}{n^n},
\end{aligned}$$

o que implica

$$\sup_{\|\lambda\|_1 \leq 1} |\check{P}_n(\lambda^n)| \leq \frac{1}{n^n}.$$

Tomando $\lambda = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{C}^n$, como $\|\lambda\|_1 = 1$, temos

$$|\check{P}_n(\lambda^n)| = \frac{1}{n^n},$$

provando que $\|P_n\| = \frac{1}{n^n}$. Substituindo em (4.12), obtemos

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)^{n-1}} \leq C \cdot \frac{1}{n^n}$$

e então $\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1} = e \leq C.$$

Essa contradição completa a demonstração. ■

O fato de estarmos trabalhando com escalares complexos foi importante na demonstração acima. A pergunta é natural: será que vale também no caso real? Terminaremos a dissertação provando que, surpreendentemente, no caso real as coisas não funcionam tão bem.

Definição 4.4.8 Dados um inteiro positivo m e $0 \leq k \leq m$, definimos

$$c_{m,k} := \sup \left\{ |P^{(k)}(0)| : P \in \mathcal{P}_m, |P(t)| \leq (1+|t|)^m \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \right\},$$

onde $\mathcal{P}_m$ denota o conjunto dos polinômios $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de grau menor ou igual que m .

Observação 4.4.9 De acordo com [20, p. 477],

$$\frac{c_{m,k}}{k!} = \frac{c_{m,m-k}}{(m-k)!}$$

para todo $0 \leq k \leq m$. Em particular, $c_{m,0} = 1$, $(m-1)!c_{m,1} = c_{m,m-1}$, $c_{m,m} = m!$.

Proposição 4.4.10 *Nenhum ideal fechado de polinômios homogêneos entre espaços de Banach reais tem a propriedade (B).*

Demonstração. Suponhamos que exista um ideal fechado $\mathcal{Q}$ de polinômios homogêneos entre espaços de Banach reais que tem a propriedade (B) com constante $C \geq 1$. Por [20, Theorem 2], para cada $n \in \mathbb{N}$ existem um polinômio n -homogêneo $P_n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e um vetor não nulo $a_n \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\left\| \widehat{d}^{n-1} P_n(a_n) \right\| = c_{n,n-1} \|a_n\|_1.$$

Da demonstração de [20, Theorem 2] sabemos que $\|P_n\| = 1$. Logo

$$\left\| \widehat{d}^{n-1} P_n(a_n) \right\| = c_{n,n-1} \cdot \|P_n\| \cdot \|a_n\|_1.$$

Como $P_n \in \mathcal{P}(^n(\mathbb{R}^2); \mathbb{R})$, pelo Lema 4.4.6 temos $P_n \in \mathcal{P}_f(^n(\mathbb{R}^2); \mathbb{R})$, donde segue que $P_n \in \mathcal{Q}(^n(\mathbb{R}^2); \mathbb{R})$ pois $\mathcal{Q}$ é ideal de polinômios.

Por [32, Theorem 1] existe $c_1 > 0$ tal que $c_1 n \log n \leq c_{n,1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Combinando isso com o fato de que $\mathcal{Q}$ tem a propriedade (B) com constante $C > 1$, temos

$$\begin{aligned}
c_1 \cdot n! \log(n) \|P_n\| \cdot \|a_n\|_1 &= c_1 \cdot n \cdot (n-1)! \log(n) \|P_n\| \cdot \|a_n\|_1 \\
&\leq (n-1)! c_{n,1} \|P_n\| \cdot \|a_n\|_1 \\
&\stackrel{4.4.9}{=} c_{n,n-1} \|P_n\| \cdot \|a_n\|_1 \\
&= \left\| \widehat{d}^{n-1} P_n(a_n) \right\| \\
&= n! \|P_n a_n\| \\
&\leq n! C \|P_n\| \cdot \|a_n\|_1.
\end{aligned}$$

Isso implica que $c_1 \log n \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, contradição esta que completa a demonstração. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] R. ALENCAR E M. MATOS, *Some classes of multilinear mappings between Banach spaces*, Publ. Dep. Analisis Mat. Univ. Complut. Madrid **12** (1989).
- [2] T. R. ALVES, *Polinômios dominados entre espaços de Banach.*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2011.
- [3] R. ARON, G. BOTELHO, D. PELLEGRINO E P. RUEDA, *Holomorphic mappings associated to composition ideals of polynomials*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **21** (2010), no. 3, 261–274.
- [4] J. A. BARROSO, *Introduction to Holomorphy*, North Holland Mathematics Studies, 1985.
- [5] A. T. L. BERNARDINO, *Ideais de aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.
- [6] F. BERTOLOTO, G. BOTELHO, V. V. FÁVARO E A. M. JATOBÁ, *Hypercyclicity of convolution operators on spaces of entire functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **63** (2013), no. 4, 1263–1283.
- [7] G. BOTELHO, H.-A. BRAUNSS, H. JUNEK E D. PELLEGRINO, *Holomorphy types and ideals of multilinear mappings*, Studia Mathematica **177** (2006), 43–65.
- [8] G. BOTELHO E D. PELLEGRINO, *Two new properties of ideals of polynomials and applications*, Indag. Math. (N.S.) **16** (2005), 157–169.
- [9] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO E E. TEIXEIRA, *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [10] H.-A. BRAUNSS, *Ideale multilinearer Abbildungen und Räume holomorpher Funktionen*, Tese de Doutorado, Pädagogische Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam, Alemanha, 1984.

- [11] D. CARANDO, V. DIMANT E S. MURO, *Hypercyclic convolution operators on Fréchet spaces of analytic functions*. J. Math. Anal. Appl. **336** (2007), 1324–1340.
- [12] J. B. CONWAY, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, 1978.
- [13] J. DIESTEL, H. JARCHOW E A. TONGE, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [14] S. DINEEN, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer, 1999.
- [15] V. V. FÁVARO E A. M. JATOBÁ, *Holomorphy types and spaces of entire functions of bounded type on Banach spaces*, Czechoslovak Math. J. **59**(134) (2009), 909–927.
- [16] K. FLORET E D. GARCÍA, *On ideals of polynomials and multilinear mappings between Banach spaces*, Arch. Math. **81** (2003), 300–308.
- [17] K. FLORET E S. HUNFELD, *Ultrastability of ideals of homogeneous polynomials and multilinear mappings on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 1425–1435.
- [18] C. P. GUPTA, *Convolution operators and holomorphic mappings on a Banach space*, Séminaire d'Analyse Moderne, No. 2, Dept. Math, Université de Sherbrooke, Québec, 1969.
- [19] C. P. GUPTA, *On the Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space*, Indag. Math. **32** (1970), 356–358.
- [20] L. HARRIS, *A Bernstein-Markov theorem for normed spaces*, J. Math. Anal. Appl. **208** (1997), 476–486.
- [21] A. M. JATOBÁ, *Tipos de holomorfia em espaços de Banach*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 2008.
- [22] N. KALTON, *Quasi-Banach spaces*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 2, North-Holland, 2003, 1099–1130.
- [23] E. KREYSZIG, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.
- [24] E. L. LIMA, *Espaços Métricos*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2007 (Projeto Euclides).
- [25] J. MUJICA, *Complex Analysis in Banach Spaces*, North Holland Mathematics Studies, 1986.
- [26] J. R. MUNKRES, *Topology*, 2nd Edition, Prentice-Hall, 2000.
- [27] L. NACHBIN, *Topology on Spaces of Holomorphic Mappings*, Springer-Verlag, 1969.
- [28] G. M. R. PEREIRA, *O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2012.

- [29] D. PÉREZ-GARCÍA, *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Tesina, Universidad Complutense de Madrid, 2002.
- [30] A. PIETSCH, *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.
- [31] A. PIETSCH, *Ideals of multilinear functionals (designs of a theory)*, Proceedings of the second international conference on operator algebras, ideals, and their applications in theoretical physics (Leipzig, 1983), 185–199, Teubner-Texte Math., 67, Teubner, Leipzig, 1984.
- [32] S. RÉVÉSZ E Y. SARANTOPOULOS, *On Markov constants of homogeneous polynomials over real normed spaces*, East J. Approx. **9** (2003), 277–304.
- [33] J. SANTOS, *Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.
- [34] A. R. SILVA, *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição.*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2010.