

THALES RENATO BERTOLAZZO TREVILATO

CONTROLE ATIVO DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS
INTELIGENTES NA PRESENÇA DE INCERTEZAS



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBÊRLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2012

THALES RENATO BERTOLAZZO TREVILATO

CONTROLE ATIVO DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS INTELIGENTES
NA PRESENÇA DE INCERTEZAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

Orientador: Prof. Dr. Domingos Alves Rade

UBERLÂNDIA-MG

2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil

T813c Trevilato, Thales Renato Bertolazzo, 1987-
2012 Controle ativo de estruturas compósitas inteligentes na presença de
incertezas / Thales Renato Bertolazzo Trevilato. – 2012.
90 p. : il.

Orientador: Domingos Alves Rade.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica – Teses. 2. Controle robusto – Teses. I. Rade, Domingos Alves. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela força e vontade para superar todos os obstáculos para conseguir chegar onde estou.

Aos meus pais Moacir e Margarete pelo exemplo e suporte em todas as decisões de minha vida.

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Domingos Alves Rade, e ao Prof. Dr. Helder Barbieri Lacerda, pelas oportunidades, paciência, confiança e conhecimento cedidos a mim.

A todos os colegas do Laboratório de Mecânica de Estruturas Prof. José Eduardo Tannús Reis (LMEst), pelo companheirismo e momentos de aprendizado sem os quais os nossos trabalhos não seriam possíveis. Refiro-me a “nossos” trabalhos, pois formamos uma equipe, na essência da palavra. Em especial, gostaria de agradecer ao colega Edson Hideki Koroishi e ao Prof. Dr. Albert Willian Faria, cujos conhecimentos e ajuda foram essenciais.

À Universidade Federal de Uberlândia e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia Mecânica pela oportunidade e confiança depositada para realização desse trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro que possibilitou a realização desse trabalho.

TREVILATO, T. R. B. **Controle Ativo de Estruturas Compósitas Inteligentes na Presença de Incertezas**. 2012. 90f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo o estudo acerca da utilização de técnicas robustas de controle ativo em estruturas constituídas de materiais compósitos laminados dotadas de atuadores piezelétricos. O projeto dos controladores usa o enfoque das desigualdades matriciais lineares (LMI), que facilitam a inclusão de incertezas do tipo politópicas no projeto, tornando o controle robusto. A proposta é comparar dois tipos de controladores robustos aplicados ao controle de vibrações de uma viga flexível engastada-livre, constituída de material compósito, frente a incertezas politópicas. Os controladores escolhidos foram o H_∞ e o regulador linear quadrático (LQR), ambos com realimentação de estados obtidos por observadores e ambos projetados com a utilização de LMI. O modelo da estrutura compósita laminada, considerando o acoplamento eletromecânico com materiais piezelétricos, foi obtido utilizando o método dos elementos finitos (MEF). Para a compatibilização do modelo com o procedimento de controle ativo, foi empregada a técnica de redução de modelos baseada na representação balanceada. Foram consideradas duas formas de introdução das incertezas paramétricas: a primeira diz respeito à direção das fibras em cada camada do material compósito, caso que comumente ocorre durante a fabricação do material. A segunda é pertinente à rigidez não ideal do dispositivo de engaste, por meio da redução da rigidez dos elementos diretamente ligados ao engaste. Os resultados, obtidos através de simulações computacionais realizadas em ambiente, MATLAB®, são discutidos especialmente no tocante à robustez das técnicas de controle estudadas.

Palavras-chave: Controle Robusto, Desigualdades Matriciais Lineares, Materiais Compósitos, Atuadores Piezelétricos, Controle LQR, Controle H_∞ .

TREVILATO, T. R. B. **Active Control of Smart Composite Structures in the Presence of Uncertainties**. 2012. 90f. M.Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil.

ABSTRACT

This work addresses the use of robust techniques for the active control of composite structures coupled with piezoelectric actuators. The design of controllers uses the approach of linear matrix inequalities (LMI), which facilitate the inclusion of polytopic type uncertainties in the design of robust controllers. The proposal is to compare two types of robust controllers applied to vibration control of a flexible composite cantilever beam subjected to polytopic uncertainties. H_∞ and linear quadratic regulator (LQR) controllers, both with state-feedback obtained by observers and designed with the use of LMI are chosen. The composite laminate model considering the electromechanical coupling of piezoelectric materials is obtained using the finite element method (FEM). The reduction method based on balanced realization is used for the compatibilization of model dimension to the control procedures. Two kinds of uncertainties are considered: the first is related to the direction of the fibers in each layer of composite material, which commonly occurs during the manufacturing. The second type pertains the non-ideal stiffness of the clamping device, by means of the reduction of the elements directly linked to the clamp. The results, obtained through numerical simulations in MATLAB[®] environment, are discussed with regard to the robustness of the control techniques investigated.

Keywords: Robust Control, Linear Matrix Inequalities, Composite Materials, Piezoelectric actuators, LQR Control, H_∞ Control.

Lista de Símbolos

Símbolos Latinos

$[A]$	matriz dinâmica
$[B_1]$	matriz de entradas exógenas
$[B_2]$	matriz de entradas de controle
$[C]$	matriz de saída
$[D_1], [D_2]$	matriz de transmissão direta
c_{ij}	rigidez mecânica
d_{ik}	constante piezoeétrica
D_m	deslocamento elétrico
e_{ik}	constante dielétrica
E_K	campo elétrico
$\{F\}, \{Q\}$	vetores de carregamento elétrico e mecânico
$[G]$	função de transferência do sistema
h	espessura total do compósito
J	jacobiano
K_e, K_g	energia cinética elementar e global
$[K_{uu}], [K_{uf}], [K_{fu}], [K_{ff}]$	matrizes de rigidez eletromecânica que incorporam efeitos piezoeétricos
$[K_c]$	ganho do controlador
L	lagrangeano
$[L]$	ganho do observador
$[H_e]$	matriz booleana
$[M_e], [M_g]$	matrizes de massa elementar e global
N^8	Funções de forma do elemento Serendipity de 8 nós
P_e, P_g	energia potencial elementar e global

s_{ij}	flexibilidade mecânica (inverso da rigidez mecânica)
$\{U\}$	vetor deslocamento mecânico total elementar
$\{u\}$	vetor de saídas de desempenho
$\{w\}$	vetor de entradas exógenas (ou de distúrbios)
W_e, W_g	trabalho elementar e global
$\{x\}$	vetor de estado
$\{y\}$	vetor de saídas
(u, v, w)	componentes do deslocamento total
(x, y)	sistemas de coordenadas planas globais
$\{z\}$	vetor de entradas (ou de controle)

Símbolos Gregos

β_c	restrição no sinal de entrada
(ξ, η)	sistema local de coordenadas planas do elemento
χ_{mk}^e	permissividade dielétrica
ψ	rotações em torno dos eixos
φ_j	funções de interface
φ_e, φ_g	potencial elétrico elementar e global
ε_i	deformação mecânica
σ_j	tensão mecânica

Lista de abreviações

FRF	função de resposta em frequência
gdl	graus de liberdade
LMI	linear matrix inequation (Desigualdades Matriciais Lineares)
LQR	linear quadratic regulator (regulador linear quadrático)
MEF	método dos elementos finitos
PVDF	fluorido de polivinilideno
PZT	zirconato titanato de chumbo

Sumário

Capítulo I	INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
1.1	Introdução	1
1.2	Revisão Bibliográfica	5
Capítulo II	MODELAGEM DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS LAMINADAS COM TRANSDUTORES PIEZELÉTRICOS	7
2.1	Fundamentos da Piezeletricidade Linear	8
2.1.1	Equações Constitutivas da Piezeletricidade Linear	10
2.2	Materiais Compósitos Laminados	14
2.3	Formulação por Elementos Finitos	24
Capítulo III	TÉCNICAS DE CONTROLE ROBUSTO	31
3.1	Introdução	31
3.2	Desigualdades Matriciais Lineares	32
3.2.1	Definições	32
3.2.2	Estabilidade Quadrática	33
3.2.3	Realimentação de Estados via LMI	35
3.2.4	Estabilidade Quadrática em Malha Fechada	36
3.2.5	Observadores de Estado via LMI	37
3.3	Controle H_{∞}	39
3.3.1	A Norma H_{∞}	39
3.3.2	Projeto de Controladores H_{∞}	39
3.4	Controle LQR	44
3.5	Restrição no Sinal de Controle	47
3.6	Redução de Modelos	48

	X
3.7 Incerteza Politópicas	49
Capítulo IV SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	54
4.1 Introdução	54
4.2 Viga Laminada de Compósito com Atuadores Piezelétricos	54
4.2.1 Modelo com Incertezas nas Direções das Camadas	57
4.2.2 Modelo com Incertezas na Rigidez do Engaste	65
4.3 Análise dos Resultados	70
Capítulo V CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	72
5.1 Conclusões	72
5.2 Sugestões para Trabalhos Futuros	73
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74
APÊNDICE I	79

CAPÍTULO I

Introdução e Revisão Bibliográfica

1.1 Introdução

O ritmo acelerado de nossa sociedade impõe a necessidade de desenvolvimento de novas tecnologias e a renovação das já existentes, com exigências cada vez maiores de sistemas mais precisos, leves, robustos e com maiores velocidades de operação. Mas tal desenvolvimento sempre deve ter em vista a segurança, eficiência e economia, o que sempre proporciona um interessante desafio de engenharia, em especial para as áreas de vibração e controle.

Um dos desafios de engenharia, criados por esse ritmo acelerado está, justamente, ligado a vibração e ruído, já que esses, na maioria das situações, estão ligados diretamente à queda de desempenho e de segurança de uma vasta quantidade de sistemas. Em resposta, várias técnicas de controle vêm sendo aperfeiçoadas e essas podem ser divididas em três categorias principais: controle passivo, controle semiativo e controle ativo.

As técnicas passivas podem ser consideradas o grupo mais conservativo dos três, no qual o controle é feito sem a adição de energia ao sistema, sendo realizado pelas alterações das características dinâmicas do sistema ou pela adição de absorvedor dinâmico de vibrações ou materiais dissipativos (MEIROVITCH, 1989). Essas técnicas apresentam custos de implementação relativamente baixos e são de fácil instalação; entretanto, para sua maior eficiência, é necessário um bom conhecimento das características do sistema a ser controlado, o que nem sempre é possível na realidade industrial. Além disso, possuem pouca versatilidade a alterações das propriedades do sistema (que ocorrem com frequência na realidade) e geralmente acrescentam considerável quantidade de peso.

Já a vertente do controle ativo implica a adição de energia ao sistema, geralmente pela atuação de forças de controle aplicadas por meio de atuadores. Apesar de serem de

implementação mais complicada e cara que as técnicas de controle passivo, as técnicas de controle ativo são mais insensíveis a erros nas estimativas das propriedades dinâmicas do sistema, bem como a alterações durante seu funcionamento. Assim, essas técnicas são mais robustas, o que pode significar aumento da eficiência e economia.

Geralmente, as técnicas de controle ativo (em inglês *Active Vibration Control*, AVC) são divididas em dois subgrupos: controle de alimentação direta ou antecipativo (*feedforward*) e controle por realimentação (*feedback*). O primeiro usa um sinal de referência externo e a saída para ajustar continuamente o sinal de controle. O segundo realimenta o sistema com informações do próprio sistema, saídas ou estados, sendo particularmente mais eficiente para controlar modos de baixa frequência do que o *feedforward* (BUENO, 2007).

Como foi dito anteriormente, as técnicas ativas ainda mantêm certo grau de desempenho frente a pequenas alterações ou erros de estimativas dos parâmetros do sistema, possuindo certa robustez intrínseca, principalmente o controle por realimentação. Entretanto, muitas vezes esse nível de robustez não é suficiente para atender as necessidades de algumas utilizações, sendo necessário recorrer a técnicas de controle robusto.

Nesse contexto, umas das abordagens que vem ganhando grande notoriedade na área de controle robusto são as Desigualdades Matriciais Lineares (*Linear Matrix Inequalities*, LMI) que transformam o problema de controle em um problema de otimização com restrições na forma de desigualdades matriciais (BOYD, 1994; CARAHUIRE, 2009). Se o problema for convexo, há várias ferramentas numéricas que podem ser aplicadas na resolução; caso não seja convexo, pode ser possível aplicar tratamentos para transformá-lo em um problema alternativo ou numa série de problemas convexos.

As LMI também são muito usadas em problemas de controle que não são considerados robustos, mas foi no controle robusto que elas ganharam maior espaço, haja vista a facilidade proporcionada para modelar as incertezas do sistema (CARAHUIRE, 2009).

As técnicas de controle ativo necessitam de sensores para informar os níveis de vibrações, e o controlador informa aos atuadores a ação a ser realizada. Tendo isso em vista, fica clara a importância do emprego de sensores e atuadores de alta confiabilidade e de preferência pouco intrusivos, necessidade esta que o desenvolvimento dos chamados materiais inteligentes tem ajudado a suprir.

Há uma boa gama de materiais inteligentes com características muito interessantes, dentre as quais podemos destacar materiais piezelétricos, ligas com memória de forma, fibras ópticas, materiais electrostrictivos e magnetoestrictivos, e fluidos eletroreológicos (LEO,

2006). Para a utilização com sensores e atuadores em estruturas flexíveis, os materiais piezelétricos têm recebido grande atenção desde os trabalhos pioneiros de Crawley e De Luís (1987).

Desde então, a utilização de pastilhas piezelétricas tem sofrido uma grande evolução (SUNAR; RAO, 1999; CHOPRA, 2002) e os materiais piezelétricos conquistaram um importante espaço junto ao controle ativo por apresentarem boa sensibilidade a alterações estruturais e operacionais e adaptarem-se a essas novas situações mantendo os níveis de desempenho.

Deve-se destacar que o emprego dos materiais piezelétricos já se faz presente em várias áreas da engenharia com o uso em aviões e veículos espaciais, em especial no controle de vibrações e ruídos e no monitoramento estrutural nos chamados *Smart Aircraft Systems*, tentando aumentar a eficiência e segurança (LI, 2011). Em outras áreas pode-se constatar o emprego em material esportivo como em raquetes de tênis, bastões de baseball que diminuem os impactos nos braços dos atletas e esquis que dissipam parte das vibrações oriundas das irregularidades do solo. Há também o emprego de materiais piezelétricos no desenvolvimento de músculos artificiais para emprego em robótica, além de aplicações na área de bioengenharia, como em ultra-sonografia (MANBACHI e COBBOLD; 2011).

Ainda falando das várias aplicações dos materiais piezelétricos, uma das aplicações que mais está em evidência nos últimos anos é a geração de energia (*power harvesting*) (SODANO, INMAN e PARK; 2004) que utiliza o efeito piezelétrico direto, ou seja, a transformação de energia mecânica em elétrica, para armazenar energia elétrica gerada através da deformação ou vibração do material piezelétrico. A efervescência desse assunto é comprovada pelas várias pesquisas recentes sobre o assunto (KORLA et al., 2011; Chen, YANG; YAO, 2011) e que também é abordado pelo Laboratório de Mecânicas de Estruturas (LMEst) da Universidade Federal de Uberlândia.

Tendo em vista o contexto apresentado, este trabalho visa ao estudo e implementação computacional de técnicas de controle, aplicadas ao controle de vibrações de estruturas compostas inteligente dotadas de atuadores piezelétricos, sob a influência de incertezas politópicas em características da estrutura (rigidez do engaste e orientação das camadas). As técnicas de controle aqui considerados serão o controle H_∞ e o controle LQR.

O controle H_∞ foi escolhido por ser uma das teorias de controle mais usadas em se tratando de controle robusto, enquanto a teoria LQR é uma das teorias de controle ótimo mais conhecidas e utilizadas.

A principal contribuição que se busca proporcionar, em relação aos estudos anteriores dedicados ao controle robusto de estruturas flexíveis, é a extensão dos procedimentos desenvolvidos ao caso específico de estruturas compostas laminadas. Este tipo de estrutura tem grande aplicabilidade na indústria aeroespacial e, dada a sua própria natureza, requer procedimentos especiais de modelagem e apresentam tipos particulares de incertezas.

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos cujos conteúdos são:

Este capítulo introdutório apresenta a contextualização e as motivações para o estudo e também traz uma revisão acerca de algumas das principais contribuições no estudo de controle robusto de estruturas inteligentes.

O segundo capítulo apresenta a formulação por elementos finitos de estruturas compostas laminadas dotadas de transdutores piezelétricos, obtendo-se as equações gerais do movimento do sistema eletromecânico. Para melhor elucidar essa formulação, alguns conceitos são trabalhados neste capítulo, sendo esses:

- Piezeletricidade linear, sendo apresentado um breve histórico da piezeletricidade e as relações constitutivas eletromecânicas;
- Compósitos laminados, com ênfase na *Teoria Mista*.

O terceiro capítulo apresenta os fundamentos da teoria de controle H_∞ e LQR; essas abordagens são apresentadas em associação com *desigualdades matriciais lineares* (LMI). A seguir, são mostradas formas de se representar matematicamente incertezas, em especial a representação politópica.

O quarto capítulo trata das simulações numéricas de modelos de estruturas compostas laminadas inteligentes, dotadas de transdutores piezelétricos.

Por fim, o quinto capítulo apresenta os comentários finais e conclusões sobre o trabalho e propostas para trabalhos futuros.

O trabalho de pesquisa foi desenvolvido no Laboratório de Mecânica de Estruturas da Faculdade de Engenharia Mecânica da UFU, que é a sede do Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Estruturas Inteligentes em Engenharia (INCT-EIE), que se dedica ao estudo dos fundamentos e aplicações tecnológicas de materiais inteligentes em engenharia e em problemas multidisciplinares.

1.2 Revisão Bibliográfica

As técnicas de controle sofreram grandes modificações e avanços com o passar dos anos e muitos acreditam que a engenharia de controle teve seu verdadeiro começo no fim do século XIX. Mas foi somente nas décadas de 1930 e 1940 que a engenharia de controle realmente teve um grande desenvolvimento, graças ao trabalho de vários pesquisadores como: Harry Nyquist, Richard Bellman, Andrey Kolmogorov, Lev Pontryagin, entre outros.

As chamadas técnicas de controle clássico têm como conceito principal a estabilidade do sistema, e seu principal método de avaliação é a investigação dos polos em malha fechada da função de transferência. Nesse grupo se encontram os métodos dos lugares das raízes, resposta em frequência, carta de Nichols, além de outros métodos gráficos (MEIROVITCH, 1989). Esses métodos foram desenvolvidos para sistemas com uma entrada e uma saída (SISO – *single input, single output*), portanto com uma única função de transferência, ou para um número reduzido de entradas e saídas.

Entretanto, essas técnicas não conseguiam ser viáveis na resolução de problemas mais complexos, como os de múltiplas entradas e saídas (MIMO- *multiple input, multiple output*), ou com critérios de desempenho mais complexos, que resultam em leis de controle não lineares. Assim, fez-se necessária a criação de técnicas de controle com uma nova abordagem, sendo essa abordagem a minimização de um critério de desempenho e essas técnicas chamadas de controle ótimo e são parte das técnicas de controle moderno. Essas técnicas modernas costumam ser baseadas em abordagem no domínio do tempo descritas na representação de espaço de estados. A técnica de alocação dos polos também pode ser considerada uma técnica de controle moderno.

Já nas últimas duas décadas, o controle robusto passou a receber grande interesse dos pesquisadores, com vários tipos de controladores robustos desenvolvidos. Entre esses controladores pode-se citar a μ -síntese, que foi usado por Li et al. (2003) em um experimento para controlar as vibrações de uma placa de alumínio engastada-livre, com dois atuadores piezelétricos, na qual massas variadas foram adicionadas para gerar as incertezas. Na técnica μ -síntese, os projetos são avaliados por um critério chamado valor singular estruturado (μ); essa abordagem está mais bem fundamentada em nos trabalhos de Sanches-Peña et al. (1998) e de Skogestad et al. (1996).

Outra técnica a se destacar é controle *fuzzy* que utiliza a lógica *fuzzy*, ou nebulosa para calcular, através da realimentação do sistema, a resposta desejada, utilizando um processo de “fuzzificação” para converter valores absolutos em valores “nebulosos” (ARTERO, 2009).

A lógica *fuzzy* tem destaque no controle de sistemas não-lineares. Gaino (2009) realizou, em sua tese de doutorado, o controle não linear para uma prótese de perna utilizando modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno baseados em LMI. Cardim (2009) propôs um novo método de controle de sistemas não lineares, descritos através de modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno, com projeto baseado em LMI.

Recentemente, os controladores H_∞ têm recebido grande atenção, pois são controladores que produzem margens de ganho mais confiáveis (KAR, 2000), sendo muito usados no controle robusto. O controle H_∞ consiste na utilização de uma lei de controle ótimo que minimiza a norma H_∞ da função ou matriz de transferência da saída de desempenho com respeito às entradas exógenas, o que corresponde a minimizar o pico de resposta em frequência do sistema em malha fechada. Uma das primeiras aplicações de um controlador H_∞ com atuadores piezelétricos em estruturas foi realizado por Dosch et al. (1995) que projetaram um controlador robusto para uma antena de satélite.

Dentre os trabalhos recentes, pode-se citar o de Jiang e Li (2011) no qual se realizaram simulações numéricas de uma placa engastada-livre dotada de quatro atuadores piezelétricos para reduzir vibrações, sujeita a 20% de incertezas nas frequências modais e no amortecimento. Para tal, foi utilizado um controlador robusto H_∞ formulado via desigualdades. O sistema proposto pelos autores resultou em desigualdades bilineares, portanto não se pode resolvê-las diretamente usando os pacotes computacionais de otimização convexa existentes, sendo necessária a utilização de procedimentos iterativos, como o algoritmo proposto por Chen e Gui (2007), que aumentam consideravelmente o custo computacional.

Já no cenário nacional é possível destacar os trabalhos de Abreu (2003) que estudou um projeto H_∞ em estruturas flexíveis com materiais piezeletricos incorporados. Bueno (2007) usou um controlador LQR para controlar uma treliça com incerteza na rigidez de seus elementos, através de simulações numéricas e experimentais. Santos (2010) estudou controladores H_∞ aplicados a suspensões ativas veiculares, com dois, quatro e sete graus de liberdade, sujeitas a incertezas paramétricas. Canahuire Cabello (2009) e Mazoni (2007) usaram controladores H_∞ para o controle de vibrações, sendo que Canahuire levou em conta a saturação dos atuadores e Mazoni abordou vários tipos de incertezas (paramétricas, dinâmicas e politópicas). Todos esses controladores citados foram formulados via LMI.

CAPÍTULO II

Modelagem de estruturas compósitas laminadas com transdutores piezelétricos

Este capítulo aborda a modelagem de estruturas constituídas de compósitos laminados inteligentes, mais especificamente, estruturas dotadas de materiais piezelétricos que podem atuar como sensores e/ou atuadores, sob várias condições de contorno.

A modelagem de qualquer sistema físico geralmente resulta em equações complexas, de difícil ou até mesmo impossível resolução analítica (na maioria dos casos têm-se equações diferenciais parciais), sendo necessária a utilização de métodos numéricos para a resolução dos problemas. Um dos métodos numéricos mais populares é o *Método dos Elementos Finitos*, que foi o método escolhido para o desenvolvimento deste trabalho.

A presente formulação é a mesma usada no trabalho de Faria (2006), que considera graus de liberdades nodais que incluem variáveis elétricas (potenciais elétricos) e variáveis mecânicas (deslocamentos). Como será mostrado no decorrer deste capítulo, essa formulação é considerada uma formulação mista, já que os elementos retangulares planos de oito nós usados discretizam o campo de deslocamento como uma camada única e os potenciais elétricos como camadas discretas.

Esse capítulo tem como objetivo a obtenção da equação geral do sistema eletromecânico acoplado, e para isso será necessário expressar as relações deformações-deslocamentos e campo elétrico-tensão elétrica em função das variáveis nodais e funções de forma.

O capítulo está dividido em três seções: a primeira trata de uma revisão dos fundamentos da piezeletricidade linear, apresentando as equações eletromecânicas constitutivas. Na segunda seção são abordados os compósitos laminados com enfoque na *Teoria Mista*; e por fim, a terceira seção aborda a formulação por elementos finitos segundo o *Princípio Variacional de Hamilton*.

2.1 Fundamentos da piezeletricidade linear

A piezeletricidade é o termo usado para definir o acoplamento entre os domínios mecânicos e elétricos apresentados por alguns materiais (IKEDA, 1996). Esse acoplamento se dá pelo aparecimento de cargas elétricas no material quando submetido a algum tipo de carregamento, sendo que esse fenômeno foi inicialmente relatado pelos irmãos Pierre (1859-1906) e Jacques Curie (1856-1941) que, posteriormente, conseguiram prever em quais cristais esse fenômeno ocorre (BUENO, 2007). Outros pesquisadores observaram o fenômeno da piezeletricidade antes dos irmãos Curie, mas foram estes os primeiros a apresentar esse efeito em um trabalho científico (FARIA, 2006).

O fenômeno acima descrito é o chamado efeito piezelétrico direto sendo que na mesma época o físico Lippmann já havia previsto o efeito piezelétrico inverso através de considerações termodinâmicas, que posteriormente foram comprovadas experimentalmente. O efeito piezelétrico inverso é caracterizado pela deformação do material quando exposto a um campo elétrico.

Um dos primeiros efeitos de surgimento de cargas elétricas em materiais devido à interação com outras áreas da física vem do século XVIII, quando o físico alemão Aepinus verificou o surgimento de cargas elétricas em cristais de turmalina quando esses eram aquecidos. Esse fenômeno, posteriormente, recebeu o nome de efeito piroelétrico (PIEFORT, 2001). O efeito inverso recebe o nome de eletrocalórico.

Nesse momento inicial, as primeiras aplicações dos materiais ficaram restritas aos laboratórios, mas com o tempo, aplicações mais práticas surgiram como o desenvolvimento de sonares. Mas foi somente após a Segunda Grande Guerra que ocorreu a grande evolução dos materiais piezelétricos, principalmente pelo desenvolvimento de novos materiais sintéticos, como o *zirconato titanato* de chumbo (PZT), que superaram alguns problemas apresentados pelos materiais existentes até então.

Os materiais piezelétricos podem ser divididos em duas classes: monocristais (cristais e filmes finos) e policristais (cerâmicas e polímeros) (FARIA, 2006). Os cristais piezelétricos destacam-se por suas altas temperaturas de operação e pequena influência da variação de temperatura nas propriedades piezelétricas.

Os materiais cerâmicos policristalinos, por outro lado, são mais baratos, possuem uma grande variedade de composições que permitem uma grande variação de suas propriedades físicas e maior variedade de geometrias, mas, ainda restritas se comparadas aos polímeros piezelétricos. Entretanto, suas propriedades eletromecânicas possuem maior dependência da temperatura e variação de suas propriedades com o tempo.

Os materiais piezelétricos, em geral, costumam apresentar valores intermediários de módulo de elasticidade e densidade, se comparados à grande maioria dos materiais. As cerâmicas piezelétricas possuem módulo de elasticidade na faixa de 10 a 100GPa e densidade em torno de 7000 a 8000 kg/m³. Já os polímeros piezelétricos são mais macios e possuem módulos na ordem de 1 a 3GPa, com densidade na faixa de 1000 a 2000 kg/m³ (LEO, 2006).

Os piezocerâmicos não apresentam a propriedade piezelétrica em seu estado natural, pois não apresentam polarização em nível macroscópico. Eles apresentam, em nível microscópico, dipolos elétricos que estão dispostos de forma aleatória e para apresentarem a piezeletricidade é necessária uma polarização sob a aplicação de altos campos elétricos, na ordem de KV/mm, na direção escolhida, acima de uma determinada temperatura, conhecida como temperatura de Curie.

Entretanto, após a fabricação, as cerâmicas piezelétricas não podem ultrapassar uma temperatura limite (temperatura de Curie) na qual o material perde a polarização. Esse também não deve ser exposto a um campo elétrico alto e de sentido oposto ao do campo aplicado na sua fabricação, que também causará despolarização. Os valores da temperatura de Curie e do campo elétrico dependem do tipo de cerâmica piezelétrica utilizada.

Além dos materiais citados, polímeros piezelétricos ganharam força nas últimas décadas. Os polímeros piezelétricos surgiram como umas alternativas as cerâmicas e sua descoberta data ao final da década de 1960 pelo físico Kawai, e ganharam aplicações mais práticas nos anos de 1980, sendo o *fluoreto de polovinilideno* (PVDF) o mais conhecido (FARIA, 2006).

Os polímeros piezelétricos apresentam como características principais a baixa densidade e flexibilidade, podem ser confeccionados em geometrias mais complexas que os cerâmicos e podem ser colados facilmente em superfícies irregulares. Porém, são mais difíceis de ser polarizados e apresentam constante dielétrica baixa. A tabela 2.1 mostra algumas propriedades do PZT e PVDF.

Tabela 2.1 – propriedades físicas do PZT e PVDF (BUENO, 2007)

Propriedades	PZT	PVDF
Temperatura de Curie (°C)	210	100
Módulo de elasticidade (N/m ²)	59,5×10 ⁹	3,0×10 ⁹
Coefficiente piezelétrico d ₃₁ (m/V)	212×10 ⁻¹²	23×10 ⁻¹²
Campo elétrico máximo (V/m)	0,4×10 ⁶	40×10 ⁶

As aplicações dos materiais piezelétricos, enfocadas nesse trabalho se referem a atuadores, e as características mais importantes para materiais usados na fabricação de atuadores são a força e deslocamento que eles podem gerar, além da velocidade de resposta a estímulos. Os materiais piezelétricos apresentam baixas deformações, da ordem de 0,1%, mas conseguem produzir altas forças de atuação. Algumas cerâmicas piezelétricas podem produzir tensões na ordem de 10MPa, ao passo que os polímeros piezelétricos produzem tensões bem menores.

Já a velocidade de resposta é uma grandeza difícil de ser mensurada e que depende de muitos fatores, sendo vários alheios ao material. Entretanto, os materiais piezelétricos estão entre os que têm maiores velocidades de resposta a estímulos dentre os materiais inteligentes; segundo Leo (2006) é possível projetar um material piezelétrico que pode alterar suas dimensões numa escala de tempo de 10⁻⁶ segundos.

2.1.1 Equações constitutivas da piezeletricidade linear

Na elasticidade linear a lei de Hooke relaciona o tensor de tensões mecânicas σ_{kl} , o tensor de deformações ε_{ij} , e o tensor de rigidez c_{ijkl} , por meio da seguinte relação expressa em notação indicial:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.1)$$

onde i, j, k e assumem valores de 1 a 3.

Como os tensores de tensões e de deformações são simétricos, suas nove componentes são reduzidas a seis componentes independentes, e a notação contraída fica:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \varepsilon_{11} & \sigma_1 &= \sigma_{11} \\
\varepsilon_2 &= \varepsilon_{22} & \sigma_2 &= \sigma_{22} \\
\varepsilon_3 &= \varepsilon_{33} & \sigma_3 &= \sigma_{33} \\
\varepsilon_4 &= \varepsilon_{23} + \varepsilon_{32} & \sigma_4 &= \sigma_{23} = \sigma_{13} \\
\varepsilon_5 &= \varepsilon_{31} + \varepsilon_{13} & \sigma_5 &= \sigma_{31} = \sigma_{21} \\
\varepsilon_6 &= \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} & \sigma_6 &= \sigma_{12} = \sigma_{21}
\end{aligned}$$

Assim, a lei de Hooke pode ser reescrita sobre a forma contraída dos tensores de tensão e de deformação e o tensor c_{ijkl} de quarta ordem é reduzido a um tensor de segunda ordem, de modo que a equação (2.1) pode ser reescrita sob a forma:

$$\sigma_i = c_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.2)$$

onde $i, j = 1, 2, \dots, 6$.

Quando um material piezelétrico é submetido a uma tensão mecânica, além da deformação ocorrerá uma rotação dos dipolos elétricos produzindo deslocamento elétrico. Se eletrodos forem colocados nas extremidades do material eles acusarão um fluxo elétrico, caracterizando o efeito elétrico direto. Para níveis relativamente baixos de tensões mecânicas, o efeito piezelétrico direto pode ser modelado por relações lineares entre as quantidades físicas envolvidas. Para um elemento piezelétrico sem campo elétrico aplicado, utilizando notação contraída, escreve-se:

$$D_i = d_{ij} \sigma_j \quad (2.3)$$

Considerando o caso em que um material piezelétrico é exposto a um campo elétrico, esse campo irá produzir rotação nos dipolos elétricos e subsequente deformação, caracterizando o efeito piezelétrico inverso. Para níveis relativamente baixos de campo elétrico, o efeito piezelétrico inverso também pode ser modelado por relações lineares entre as quantidades físicas envolvidas. Para um elemento piezelétrico livre de tensões mecânicas, escreve-se, na notação contraída:

$$\varepsilon_j = d_{ji} E_i, \quad (2.4)$$

Para as Eq. (2.3) e (2.4), $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, \dots, 6$; D_i é o vetor de deslocamentos elétricos (C/m^2), d_{ij} é o tensor de constantes piezelétricas (C/N), σ_j é o vetor das tensões mecânicas (N/m^2), ε_j é o vetor de deformações (m/m) e E_i é o vetor dos campos elétricos (V/m). Nota-se que a ordem dos índices do tensor de constantes piezelétricas da Eq. (2.4) indica que esse é o transposto do tensor de constantes piezelétricas que aparece na Eq. (2.3).

É fácil perceber que o efeito piezelétrico direto e inverso são expressos matematicamente pela relação das grandezas mecânicas tensão e deformação com as grandezas elétricas campo elétrico e deslocamento elétrico. Quando o carregamento mecânico e o campo elétrico são aplicados simultaneamente ao material piezelétrico, o acoplamento eletromecânico é descrito pela seguinte relação matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_i \\ D_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{ij} & d_{ik} \\ d_{mj} & \chi_{mk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_j \\ E_k \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

onde i e j variam de 1 a 6, m e k variam de 1 a 3, χ_{mk} é o tensor de permissividade, s_{ij} é o tensor de flexibilidade.

O acoplamento eletromecânico é fortemente influenciado pelas condições de contorno elétricas e mecânicas. Como condições de contorno elétricas temos os eletrodos em curto-circuito ($E=0$) ou em circuito aberto ($D=0$); para esses casos as equações da deformação ficam:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= s_{ij} \sigma_j \\ \varepsilon_i &= s_{ij} (1 - k_{ij}^2) \sigma_j \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde k é coeficiente de acoplamento piezelétrico, dado por:

$$k_{ij} = \frac{d_{ij}}{\sqrt{s_{jj} \chi_{kk}}} \quad (2.7)$$

As eq. (2.6) demonstram que a matriz de flexibilidade depende das condições de contorno elétricas; assim sendo, é necessário especificar em qual condição de contorno a matriz foi obtida. É convencionado usar os índices E e D sobrescritos para a condição de curto-circuito e circuito aberto, respectivamente.

Analogamente, as condições de contorno mecânicas também interferem nas propriedades elétricas do material, sendo essas condições o corpo livre de tensões ($\sigma = 0$) e o corpo livre de deformações ($\varepsilon = 0$), no qual os índices sobrescritos usados são σ e ε , respectivamente. Com a utilização desses índices, a eq. (2.5) pode ser reescrita sob a forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_i \\ D_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{ij}^E & d_{ik} \\ d_{mj} & \chi_{mk}^\sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_j \\ E_k \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

A Eq. (2.8) em sua forma matricial expandida, fica:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & s_{14}^E & s_{15}^E & s_{16}^E & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ s_{21}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & s_{24}^E & s_{25}^E & s_{26}^E & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ s_{31}^E & s_{32}^E & s_{33}^E & s_{34}^E & s_{35}^E & s_{36}^E & d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ s_{41}^E & s_{42}^E & s_{43}^E & s_{44}^E & s_{45}^E & s_{46}^E & d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ s_{51}^E & s_{52}^E & s_{53}^E & s_{54}^E & s_{55}^E & s_{56}^E & d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ s_{61}^E & s_{62}^E & s_{63}^E & s_{64}^E & s_{65}^E & s_{66}^E & d_{16} & d_{26} & d_{36} \\ d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & \chi_{12}^\sigma & \chi_{21}^\sigma & \chi_{31}^\sigma \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & \chi_{12}^\sigma & \chi_{22}^\sigma & \chi_{32}^\sigma \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & \chi_{13}^\sigma & \chi_{23}^\sigma & \chi_{33}^\sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Não há necessidade de que as equações constitutivas do material piezelétrico sejam expressas com a tensão e campo elétrico como as variáveis independentes e a deformação e o deslocamento elétrico como as variáveis dependentes; esta é apenas a forma mais usual encontrada na literatura. Assim, as equações constitutivas podem também ser escritas na forma inversa:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_i \\ D_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{ij}^E & e_{ik} \\ e_{mj} & \chi_{mk}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_j \\ E_k \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & c_{14}^E & c_{15}^E & c_{16}^E & e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ c_{21}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & c_{24}^E & c_{25}^E & c_{26}^E & e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ c_{31}^E & c_{32}^E & c_{33}^E & c_{34}^E & c_{35}^E & c_{36}^E & e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ c_{41}^E & c_{42}^E & c_{43}^E & c_{44}^E & c_{45}^E & c_{46}^E & e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ c_{51}^E & c_{52}^E & c_{53}^E & c_{54}^E & c_{55}^E & c_{56}^E & e_{15} & e_{25} & e_{35} \\ c_{61}^E & c_{62}^E & c_{63}^E & c_{64}^E & c_{65}^E & c_{66}^E & e_{16} & e_{26} & e_{36} \\ e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & \chi_{12}^E & \chi_{21}^E & \chi_{31}^E \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} & \chi_{12}^E & \chi_{22}^E & \chi_{32}^E \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} & \chi_{13}^E & \chi_{23}^E & \chi_{33}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

onde e_{ij} é o tensor de constantes dielétricas e χ_{mk}^E é o tensor de permissividade dielétrica. Por conveniência, a Eq. (2.11) pode ser escrita com os tensores tensão e deslocamento elétricos em equações separadas:

$$\sigma_i = c_{ij}^E \varepsilon_j + e_{ik} E_k \quad (2.12-a)$$

$$D_m = e_{mj} \varepsilon_j + \chi_{mk}^E E_k \quad (2.12-b)$$

2.2 Materiais compósitos laminados

Essa seção se dedica a apresentar de forma sucinta os materiais compósitos laminados acoplados a materiais piezelétricos e sua modelagem quanto aos campos de deslocamento mecânicos e elétricos. Busca-se fazer uma rápida introdução a esses materiais, apresentando os conceitos básicos e os principais modelos de placa usados, dando-se maior atenção à *Teoria Mista*, que, nesse caso, engloba a *Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem* (FSDT) e a *Teoria de Camadas Equivalentes Discretas*. Para maior aprofundamento, o leitor deve consultar os trabalhos de Chee *et al.* (2000), Faria (2006) e Lima *et al.* (2010).

Materiais compósitos são descritos como materiais que são compósitos por uma combinação de dois ou mais materiais diferentes visando explorar simultaneamente as diferentes vantagens dos materiais componentes. Por sua natureza diversificada, os materiais compósitos podem não ser, dependendo da escala estudada, homogêneos e, frequentemente, apresentam comportamento mecânico anisotrópico.

Os materiais compósitos podem ser classificados segundo vários critérios, mas segundo a morfologia das estruturas de reforço, eles se dividem em: compósitos particulados, com fibras e estruturados (PEREIRA Jr., 2004; FARIA, 2006). Esses últimos ainda são divididos em compósitos do tipo sanduíche e compósitos laminados.

Quanto a matriz, esses podem ser classificados de acordo com o material constituinte da matriz, sendo os grupos principais:

- Matriz metálica;
- Matriz cerâmica;
- Matriz polimérica, que pode ser subdividido em termo-endurecível e termoplástico.

Nessa dissertação, o interesse dirigido somente aos compósitos laminados que são materiais formados por diferentes lâminas fibrosas contínuas cuja orientação e material são parâmetros do projeto.

Os materiais compósitos não foram tão exaustivamente estudados como os materiais mais tradicionais usados em engenharia, como o aço e o alumínio que possuem informações de fácil acesso sobre suas propriedades; entretanto, costumam apresentar uma melhor relação resistência/peso que os materiais tradicionais, sem sacrificar outras propriedades mecânicas (rigidez, resistência a fadiga) ou químicas (resistência à corrosão).

A maior parte das teorias de materiais laminados vieram de teorias inicialmente criadas para placas e cascas de materiais homogêneos e isotrópicos e foram posteriormente estendidas aos laminados anisotrópicos ou ortotrópicos e com materiais piezelétricos colados ou embutidos na estrutura. As teorias de materiais laminados, aplicáveis a placas, se dividem em duas categorias (FARIA, 2006):

- Teoria da Camada Única Equivalente (*Equivalent Single Layer Theory*);
- Teoria das Camadas Equivalentes Discretas (*Layerwise Theory* ou *Discrete Layer Theory*);

Na primeira categoria, o compósito laminado é modelado como uma única camada equivalente que engloba a *Teoria Clássica dos Laminados* (CLT); *Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem* (FSDT), *Teoria da Deformação Cisalhante de Ordem Superior* (HSDT) (REDDY, 1997; FARIA, 2006). Nessas teorias o compósito é visto como uma única camada e associado uma única função a essa camada.

Na segunda categoria incluem-se a *Teoria das Camadas Independentes* e a *Teoria das Camadas Dependentes* (REDDY, 1997), em que cada camada é analisada de forma independente, e assim, a cada uma delas é associada uma função.

Para muitos casos, os dois grandes grupos de teorias isoladamente não apresentam desempenho satisfatório em determinados modelos, notadamente em estruturas inteligentes dotadas de transdutores piezelétricos. Para esses casos pode-se adotar uma terceira teoria chamada de *Teoria Mista*, que, como o nome diz, associa duas teorias: a Teoria da Camada Única Equivalente é usada para a aproximação dos campos mecânicos, e a Teoria das Camadas Equivalentes Discretas é usada para o potencial elétrico.

Essa teoria foi adotada pois a *Teoria da Camada Única Equivalente* não é adequada para representar os potenciais elétricos, entretanto, modelar todo a estrutura pela *Teoria das Camadas Equivalentes Discretas* causaria um alto custo computacional, que pode ser evitado usando a *Teoria Mista*.

A *Teoria Mista* aqui apresentada é mais aprofundada no trabalho de Faria (2006). Nessa teoria o comportamento mecânico da placa laminada é representado pela FSDT, sendo expresso por:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z\psi_x(x,y,t) \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z\psi_y(x,y,t) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde u_0 , v_0 e w_0 , são deslocamentos na direções x , y e z , respectivamente, sendo o plano x - y o plano médio não deformado da placa, ψ_x e ψ_y são rotações em torno dos eixos y e x , respectivamente. Essas grandezas são apresentadas na Fig. (2.1).

A Eq. (2.13) pode ser reescrita na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u(x,y,z,t) \\ v(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}(x,y,t) \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

ou na forma simplificada:

$$\{U(x,y,z)\} = [A_u(z)] \{\hat{u}(x,y,t)\} \quad (2.15)$$

onde:

$$\begin{aligned}\{U(x,y,z,t)\} &= \{u(x,y,z,t) \quad v(x,y,z,t) \quad w(x,y,z,t)\}^T \\ \{\hat{u}(x,y,t)\} &= \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \psi_x \quad \psi_y\}^T\end{aligned}\quad (2.16)$$

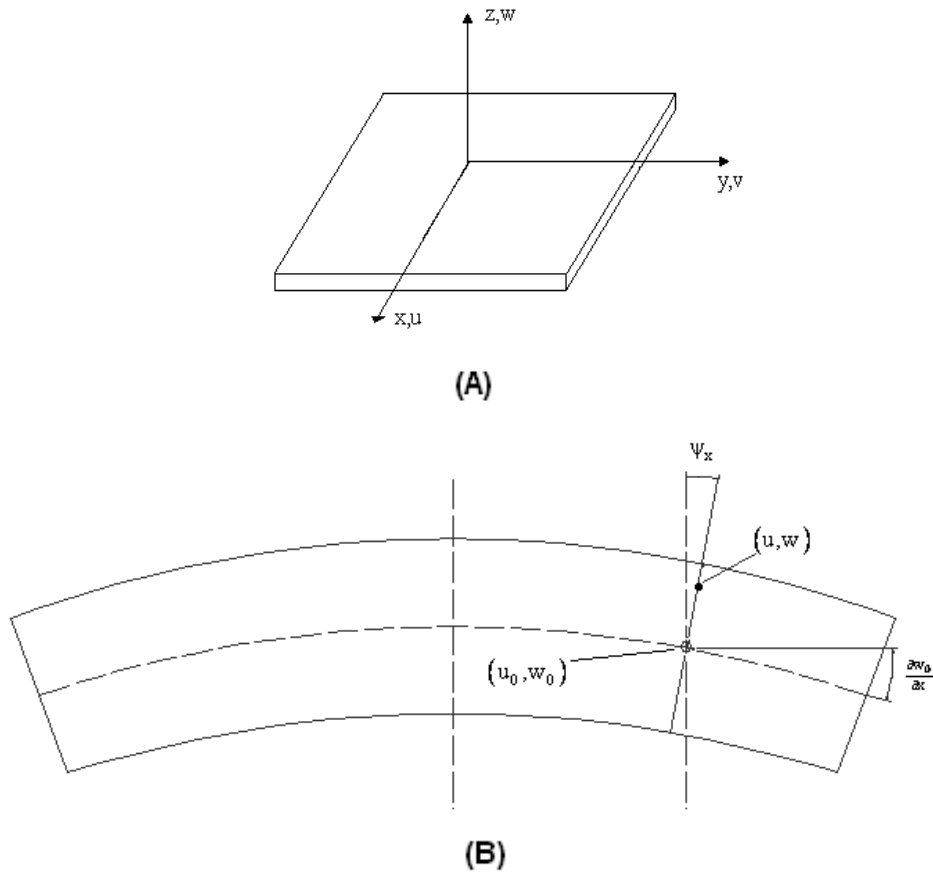


Figura 2.1: eixos de referência (A) e a ilustração da deformação de uma seção da placa, segundo a FSDT (B)

Para descrever as variáveis da Eq. (2.13) através do Método dos Elementos Finitos (MEF) são necessárias funções de forma e variáveis nodais adequadas. O elemento considerado nessa formulação é o Serenpidity, um elemento plano com três nós por aresta, num total de oito nós (REDDY,1997), o qual está ilustrado na Figura (2.2) em coordenadas globais e locais. As relações entre as coordenadas locais globais são dadas pelas Eqs. (2.17-a) e (2.17-b).

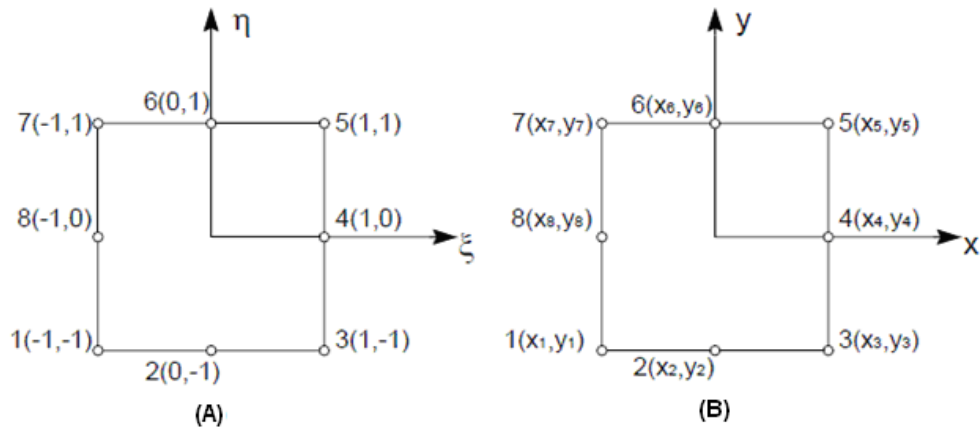


Figura 2.2: elemento Serenpidity em coordenadas locais (A) e globais (B)

$$\xi = \frac{(2x - x_4 - x_8)}{x_4 - x_8} \quad (2.17-a)$$

$$x = \frac{1}{2} [\xi (x_4 - x_8) + x_4 + x_8]$$

$$\eta = \frac{(2y - y_6 - y_2)}{y_6 - y_2} \quad (2.17-b)$$

$$y = \frac{1}{2} [\eta (y_6 - y_2) + y_6 + y_2]$$

A matriz jacobiana de transformação entre as coordenadas locais e globais é dada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(x_4 - x_8)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(y_6 - y_2)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

sendo o determinante da matriz jacobiana dado por:

$$J = \frac{(y_6 - y_2)(x_4 - x_8)}{4} \quad (2.19)$$

Tendo em mente as informações da relação entre as coordenadas locais e globais, as cinco variáveis mecânicas $\{\hat{u}(x, y, t)\} = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \psi_x \quad \psi_y\}^T$ podem ser expressas em função das 40 variáveis mecânicas nodais: $\{u_e(t)\} = \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad \psi_{xi} \quad \psi_{yi}\}^T$, com $i = 1$ a 8, como indicado na Eq. (2.20).

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \psi_{x2} \\ \psi_{y2} \\ \vdots \\ \psi_{x8} \\ \psi_{y8} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Assim, o campo de deslocamento mecânico é escrito em função das coordenadas nodais da seguinte forma:

$$\{U(\xi, \eta, z, t)\} = [A_u(z)][N_u(\xi, \eta)]\{u_e(t)\} \quad (2.21)$$

onde: $\{U(\xi, \eta, z, t)\} = \{u(\xi, \eta, z, t) \quad v(\xi, \eta, z, t) \quad w(\xi, \eta, z, t)\}^T$, $\{u_e(t)\}$ é o vetor que contém todas as variáveis nodais e $[N_u(\xi, \eta)]$ é a matriz com as funções de forma associadas aos graus de liberdade mecânicos, sendo que as funções de forma $N_i = N_i(\xi, \eta)$, $i = 1$ a 8 podem ser expressas, em coordenadas locais, por:

$$\begin{aligned}
N_1(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \\
N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\xi)(1-\eta) \\
N_3(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta) \\
N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta) \\
N_5(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta) \\
N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\eta)(1+\eta) \\
N_7(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) \\
N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

As deformações podem ser expressas em função das funções de forma e das variáveis nodais por meio da seguinte relação:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \varepsilon_5 & \varepsilon_6 \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T = \\
&\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Usando a relação da Eq. (2.23) combinadas com a Eq. (2.21), as relações para a deformação ficam:

$$\{ \varepsilon(\xi, \eta, z, t) \} = [B_u(\xi, \eta, z)] \{ u_e(t) \} \tag{2.24}$$

onde $[B_u(\xi, \eta, z)] = [D_z(z)][N_u(\xi, \eta)]$ e $[D_z(z)]$ é uma matriz que contém operadores diferenciais dada por:

$$[D_z(z)] = [[D_{z0}] + z[D_{z1}]] \tag{2.25-a}$$

$$[D_{z0}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25-b)$$

$$[D_{z1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.25-c)$$

Com a aproximação para os deslocamentos mecânicos realizada, parte-se para a aproximação do campo elétrico, que através da Teoria Mista aqui usada, define o potencial elétrico como na *Teoria das Camadas Equivalentes Discretas*, na qual a direção z (direção ao longo da espessura) é desacoplada do plano de referência x - y ; assim tem-se para $nc+1$ interfaces do laminado, a aproximação para o potencial elétrico:

$$\varphi(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{nc+1} L_j(z) \varphi_j(x,y,t) \quad (2.26)$$

onde $L(z)$ é a chamada função de camadas equivalentes e $\varphi_j(x,y,t)$ são funções de interface da j -ésima lâmina do compósito do laminado. O potencial elétrico, conforme apresentado na Eq. (2.26) é para toda a espessura z do compósito. Considerando que a estrutura é dividida em n camadas ao longo da espessura z , o potencial elétrico de cada camada pode ser aproximado por funções lineares por partes:

$$\varphi_{\text{camada}(i)}(x,y,z,t) = L_{\text{id}}(z)\varphi_i(x,y,t) + L_{\text{iu}}(z)\varphi_{i+1}(x,y,t) \quad (2.27)$$

Assim, cada potencial elétrico associado a cada camada é compósito por duas funções de interfase referentes às interfases inferior e superior, sendo L_{id} e L_{iu} funções de interpolação Lagrangeanas lineares das interfaces inferiores e superiores, respectivamente, dadas por:

$$\begin{aligned} L_{\text{id}}(z) &= \frac{z - z_{i+1}}{z_1 - z_{i+1}} \\ L_{\text{iu}}(z) &= \frac{z - z_1}{z_{i+1} - z_1} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Usando a definição de campo elétrico como o negativo do gradiente do potencial elétrico, o campo elétrico da i-esima camada é expressa por:

$$\{E(x,y,z,t)\}_{\text{camada}(i)} = -\vec{\nabla}\varphi(x,y,z,t)_{\text{camada}(i)} \quad (2.29)$$

Expandindo:

$$\begin{Bmatrix} E_x(x,y,z,t) \\ E_y(x,y,z,t) \\ E_z(x,y,z,t) \end{Bmatrix}_{\text{camada}(i)} = \begin{Bmatrix} L_{\text{id}}(z)\frac{\partial\varphi_i(x,y,t)}{\partial x} + L_{\text{iu}}(z)\frac{\partial\varphi_{i+1}(x,y,t)}{\partial x} \\ L_{\text{id}}(z)\frac{\partial\varphi_i(x,y,t)}{\partial y} + L_{\text{iu}}(z)\frac{\partial\varphi_{i+1}(x,y,t)}{\partial y} \\ \frac{1}{z_1 - z_{i+1}}\varphi_i(x,y,t) + \frac{1}{z_{i+1} - z_1}\varphi_{i+1}(x,y,t) \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

O mesmo elemento é usado para descrever os potenciais elétricos que são descritos como na Fig. (2.3), com os índices i associados ao número de interfaces e j associado a cada nó. Assim as funções de interface podem ser expressas por funções de forma e potenciais elétricos nodais para cada interface do laminado, como expressas na Eq.(2.31):

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_{(n+1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \vdots \\ \varphi_{71} \\ \varphi_{81} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \\ \varphi_{32} \\ \vdots \\ \varphi_{n8} \\ \varphi_{(n+1)8} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

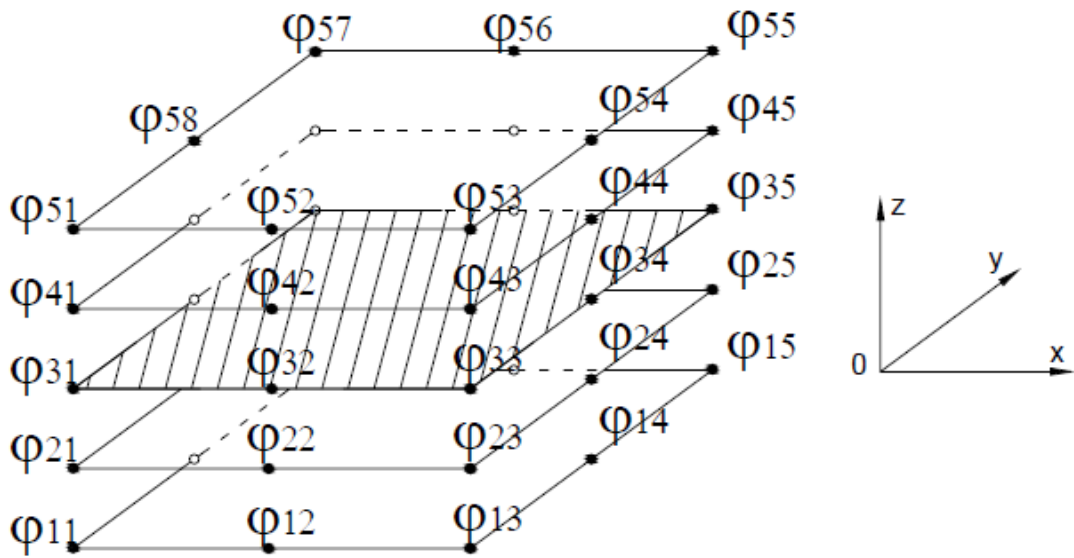


Figura 2.3: Potenciais elétricos nodais de um elemento plano multicamadas.

O potencial elétrico, nas coordenadas locais, da k -ésima camada do e -ésimo elemento é dado por:

$$\varphi(\xi, \eta, z, t)_e^k = [\dots \quad L_{kd}(z) \quad L_{ku}(z) \quad \dots] [\bar{N}_\varphi(\xi, \eta)] \{\varphi_e(t)\} \quad (2.32)$$

Simplificando:

$$\varphi(\xi, \eta, z, t)_e^k = [N_\varphi(\xi, \eta, z)] \{\varphi_e(t)\} \quad (2.33)$$

onde $[N_\varphi(\xi, \eta, z)]$ é a matriz das funções de forma associadas aos potenciais elétricos e $\{\varphi_e(t)\}$ são os potenciais elétricos nodais em nível elementar.

Usando a definição de campo elétrico como o negativo do gradiente do potencial elétrico, tem-se:

$$E(\xi, \eta, z, t)_e^k = -\nabla [N_\varphi(\xi, \eta, z)] \{\varphi_e(t)\} \quad (2.34-a)$$

ou

$$E(\xi, \eta, z, t)_e^k = -[B_\varphi(\xi, \eta, z)] \{\varphi_e(t)\} \quad (2.34-b)$$

$$\text{com } \nabla [N_\varphi(\xi, \eta, z)] = [B_\varphi(\xi, \eta, z)]$$

2.3 Formulação por elementos finitos

A formulação baseada no *Princípio de Hamilton Estendido* é muito conveniente para a modelagem de estruturas inteligentes, uma vez que ela trata todas as energias (mecânica e elétrica) de forma conjunta, sem a necessidade de equações adicionais, permitindo incorporar todas as contribuições energéticas, tanto do substrato passivo, como dos transdutores piezelétricos.

O *Princípio de Hamilton Estendido* pode ser expresso da seguinte forma (MEIROVITCH; 2001):

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta L + \delta W) dt = \int_{t_0}^{t_1} [\delta(K - P) + \delta W] dt = 0 \quad (2.35)$$

onde $L=K-P$ é o Lagrangeano. K é a energia cinética, P é a energia potencial e δW é o trabalho virtual das forças não conservativas. Para desenvolver os termos das energias cinética e potencial é necessária a utilização de funções de forma e variáveis nodais adequadas na integração.

A energia cinética, em nível elementar, é expressa por:

$$K_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\} dV_e \quad (2.36)$$

onde ρ é a densidade do material, V_e é o volume elementar e U é o vetor de deslocamentos, dado pela Eq. (2.21). Assim, é possível calcular a variação da energia cinética do sistema através de uma integral por partes, lembrando que $\delta U_T(t_0) = \delta U_T(t_1) = 0$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta K_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \rho \{ \delta \dot{U} \}^T \{ \dot{U} \} dV_e dt = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \rho \{ \delta U \}^T \{ \ddot{U} \} dV_e dt \quad (2.37)$$

Substituindo a Eq. (2.21) na Eq. (2.37), tem-se:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta K_e dt = - \int_{t_0}^{t_1} \{ \delta u_e \}^T [m_e] \{ \ddot{u}_e \} dt \quad (2.38)$$

$$\text{onde } [m_e] = \int_{V_e} \rho [N_u]^T [A_u]^T [A_u] [N_u] dV_e$$

A energia potencial inclui a parcela da energia potencial mecânica e a parcela da energia potencial elétrica, sendo dada por:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta P_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \left(\{ \sigma \}^T \{ \delta \epsilon \} - \{ D \}^T \{ \delta E \} \right) dV_e dt \quad (2.39)$$

A energia potencial elementar pode ser expressa da seguinte forma em termos das propriedades dos materiais, das deformações mecânicas e do campo elétrico através das Eq. (2.12) (os sobrescritos foram ocultados por simplificação):

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta P_e dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \left(\{ \sigma \}^T \{ \delta \epsilon \} - \{ D \}^T \{ \delta E \} \right) dV_e dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \left(\{ \delta \epsilon_b \}^T ([c] \{ \epsilon \} - [e]^T \{ E \}) \right) dV_e dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \left(\{ \delta E_0 \}^T ([e] \{ \epsilon \} + \chi \{ E \}) \right) dV_e dt \end{aligned} \quad (2.40)$$

A equação (2.40) leva em conta tanto o efeito piezelétrico direto como o efeito piezelétrico inverso, permitindo que o material funcione como sensor ou como atuador. Substituindo as deformações e campo elétrico dados pelas Eq. (2.24) e (2.34-b) na equação da energia potencial Eq. (2.40) e fazendo as devidas manipulações, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_1} \delta P_e dt = & \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \{ \delta u_e \}^T [B_u]^T [c] [B_u] \{ u_e \} dV_e dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \{ \delta u_e \}^T [B_u]^T [e] [B_\phi] \{ \phi_e \} dV_e dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \{ \delta \phi_e \}^T [B_\phi]^T [e] [B_u] \{ u_e \} dV_e dt \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \{ \delta \phi_e \}^T [B_\phi]^T [\chi] [B_\phi] \{ \phi_e \} dV_e dt
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

A equação (2.40), por estar integrando ao longo de todo o volume, está considerando todos os diferentes tipos de materiais das diferentes camadas ao longo da espessura; assim é possível reescrever a Eq. (2.40) sob a forma:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta P_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_x \int_y \sum_{k=1}^{nc} \int_{z=z_k}^{z_{(k+1)}} \{ [A_k] + [B_k] + [C_k] - [D_k] \} dz dy dx \right) dt \tag{2.42}$$

A equação (2.42) está em função, no plano, das coordenadas (x,z), e pode ser reescrita nas coordenadas locais (ξ e η):

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta P_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \left(\sum_{k=1}^{nc} \int_{z=z_k}^{z_{(k+1)}} \{ [A_k] + [B_k] + [C_k] - [D_k] \} dz \right) J d\eta d\xi \right] dt \tag{2.43}$$

onde J é apresentado na Eq. (2.18), e:

$$\begin{aligned}
[A_k] &= \{\delta u_e\}^T [B_u]^T [c] [B_u] \{u_e\} \\
[B_k] &= \{\delta u_e\}^T [B_u]^T [e] [B_\phi] \{\phi_e\} \\
[C_k] &= \{\delta \phi_e\}^T [B_\phi]^T [e] [B_u] \{u_e\} \\
[D_k] &= \{\delta \phi_e\}^T [B_\phi]^T [\chi] [B_\phi] \{\phi_e\}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

De acordo com Lima *et al.* (2010), a Eq. (2.43) inclui as seguintes matrizes de acoplamento elementar:

$$[K_{uu}^e] = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \int_{z=Z_k}^{Z_{k+1}} ([B_u]^T [c] [B_u]) J dz d\eta d\xi \tag{2.45}$$

$$[K_{u\phi}^e] = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \int_{z=Z_k}^{Z_{k+1}} ([B_u]^T [e] [B_\phi]) J dz d\eta d\xi \tag{2.46}$$

$$[K_{\phi u}^e] = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \int_{z=Z_k}^{Z_{k+1}} ([B_\phi]^T [e] [B_u]) J dz d\eta d\xi \tag{2.47}$$

$$[K_{\phi\phi}^e] = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \int_{z=Z_k}^{Z_{k+1}} ([B_\phi]^T [\chi] [B_\phi]) J dz d\eta d\xi \tag{2.48}$$

onde $[K_{uu}^e]$ é a matriz elementar de rigidez elástica, $[K_{u\phi}^e]$ e $[K_{\phi u}^e]$ são as matrizes elementares de acoplamento eletromecânico e $[K_{\phi\phi}^e]$ é a matriz elementar dielétrica. Assim a Eq. (2.43) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} \delta P_e dt = \\
&\int_{t_0}^{t_1} \left(\{\delta u_e\}^T [K_{uu}^e] \{u_e\} + \{\delta u_e\}^T [K_{u\phi}^e] \{\phi_e\} + \{\delta \phi_e\}^T [K_{\phi u}^e] \{u_e\} + \{\delta \phi_e\}^T [K_{\phi\phi}^e] \{\phi_e\} \right) dt
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Da equação (2.35) ainda falta o termo referente ao trabalho virtual das forças externas, que é dado por:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta W_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{V_e} \{\delta U\}^T \{F_V\} dV_e + \int_{S_e} \{\delta U\}^T \{F_S\} dS_e + \{\delta U\}^T \{F_P\} - \int_{S_e} \{\delta \phi\}^T \{Q_S\} dS_e \right) dt \quad (2.50)$$

onde F_V são as forças de corpo, F_S são as forças de superfície, F_P são forças pontuais e Q_S são as cargas elétricas de superfície. Substituindo as Eq (2.22) e (2.34-b) em (2.50) e reorganizando, tem-se:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta W_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\{\delta u_e\}^T \{F_e\} - \{\delta \phi_e\}^T \{Q_e\} \right) dt \quad (2.51)$$

onde $\{F_e\}$ e $\{Q_e\}$ são as forças e cargas nodais generalizadas em nível elementar.

Substituindo as energias das Eq. (2.38), (2.49) e (2.51) em (2.35), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (\delta K_e - \delta P_e + \delta W_e) dt = \\ \int_{t_0}^{t_1} \delta K_e dt = - \int_{t_0}^{t_1} \{\delta u_e\}^T [m_e] \{\ddot{u}_e\} dt + \\ \int_{t_0}^{t_1} \left(\{\delta u_e\}^T [K_{uu}^e] \{u_e\} + \{\delta u_e\}^T [K_{u\phi}^e] [\phi_e] + \{\delta \phi_e\}^T [K_{\phi u}^e] \{u_e\} + \{\delta \phi_e\}^T [K_{\phi\phi}^e] \{\phi_e\} \right) dt + \\ \int_{t_0}^{t_1} \left(\{\delta u_e\}^T \{F_e\} - \{\delta \phi_e\}^T \{Q_e\} \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Evocando o *Lema Fundamental* do cálculo variacional, obtêm-se as equações acopladas do movimento em nível elementar:

$$\begin{bmatrix} [M_e] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_e\} \\ \{\ddot{\phi}_e\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{uu}^e] & [K_{u\phi}^e] \\ [K_{\phi u}^e] & [K_{\phi\phi}^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_e\} \\ \{\phi_e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_e\} \\ \{Q_e\} \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

Para a construção das equações em nível global, a partir das equações em nível elementar, é necessário levar em conta a conectividade entre os elementos. Para n elementos, as matrizes e vetores globais são dados por (RADE, 2002).

Equação (2.53) está expressa em nível elementar e para passá-la para nível global é necessário usar a matriz de conectividade $[H_e]$. Para n elementos, as matrizes e vetores globais são dados por:

$$[M_g] = \sum_{e=1}^n [H_e]^T [M_e] [H_e]$$

$$[K_{uu}^g] = \sum_{e=1}^n [H_e]^T [K_{uu}^e] [H_e]$$

$$[K_{u\phi}^g] = \sum_{e=1}^n [H_e]^T [K_{u\phi}^e] [H_e]$$

$$[K_{\phi u}^g] = \sum_{e=1}^n [H_e]^T [K_{\phi u}^e] [H_e] \quad (2.54)$$

$$[K_{\phi\phi}^g] = \sum_{e=1}^n [H_e]^T [K_{\phi\phi}^e] [H_e]$$

$$\{F_g\} = \sum_{e=1}^n [H_e]^T \{F_e\}$$

$$\{Q_g\} = \sum_{e=1}^n [H_e]^T \{Q_e\}$$

onde $[H_e]$ são matrizes booleanas que permitem levar em conta a conectividade

Com base nas equações apresentadas em (2.54) pode-se escrever a equação geral do modelo em nível global:

$$\begin{bmatrix} [M_g] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_g\} \\ \{\ddot{\phi}_g\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{uu}^g] & [K_{u\phi}^g] \\ [K_{\phi u}^g] & [K_{\phi\phi}^g] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_g\} \\ \{\phi_g\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_g\} \\ \{Q_g\} \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

Equação (2.55) permite modelar estruturas com camadas de materiais passivos e ativos, sendo que esses últimos podem ser sensores ou atuadores; portanto essa formulação adotada é bem geral.

As ordens das matrizes e vetores presentes na Eq (2.44) dependem do número de nós nn , do número de camadas nc e do número de graus de liberdade por nó (nesse caso 5 g.d.l.). A matriz $[M_g]$ é quadrada de ordem $5 \times nn$, a matriz $[K_{uu}^g]$ também é quadrada de ordem $5 \times nn$, a matriz $[K_{u\phi}^g]$ é de ordem $(5nn) \times (nn(nc+1))$ e $[K_{\phi\phi}^g]$ é de quadrada de ordem $nn(nc+1)$.

Os vetores $\{F_g\}$, $\{\ddot{u}_g\}$ e $\{u_g\}$ são de ordem $(5nn) \times 1$ e os vetores $\{\ddot{\phi}_g\}$, $\{\phi_g\}$ e $\{Q_g\}$ são de ordem $nn(nc+1) \times 1$.

CAPÍTULO III

TÉCNICAS DE CONTROLE ROBUSTO

3.1. Introdução

Todo modelo físico é uma representação de realidade e, como tal, deve ser concebido sob hipóteses redutoras e aproximações. Isso faz com que o modelo sempre possua erros em relação ao sistema real; não importando o quão complexo o modelo seja, ele sempre será uma aproximação da realidade.

Essa é uma realidade com a qual todos os seres humanos devem lidar, inclusive, e principalmente, os pesquisadores. Uma das alternativas para tentar aliviar essa situação é a criação de modelos incertos (ou robustos), ou seja, modelos de levam em conta a existência de algum tipo de incerteza, podendo ser erros de aproximação ou sobre parâmetros estimados. O mesmo é válido para as técnicas de controle, sendo essas chamadas de *controle robusto*.

Para melhor compreensão da teoria aqui apresentada, esse capítulo está dividido em quatro seções descritas a seguir:

A primeira seção discorre sobre as desigualdades matriciais lineares (LMI), apresentando um breve histórico, sua definição e alguns dos conceitos principais que serão úteis ao longo desse capítulo.

A segunda seção apresenta a teoria de controle H_∞ , com seu conceito e formulação através de LMI e, por fim, o problema que caracteriza o controlador H_∞ via LMI.

A terceira seção apresenta a teoria de controle LQR e, de forma análoga à seção anterior, apresenta o conceito e a formulação que caracteriza o controlador LQR via LMI.

Finalmente, a quarta seção apresenta o conceito de representação de incertezas politópicas e o problema dos controladores H_∞ e LQR robustos. Os códigos dos controladores em MatLab® estão no Apêndice I

3.2 Desigualdades Matriciais Lineares

Os desenvolvimentos apresentados nesta seção foram adaptados dos trabalhos de Bueno (2007), Canahuire (2009), Mazoni (2008) e Silva (2005).

3.2.1 Definições

Segundo Boyd (1994), recebe o nome de desigualdade matricial linear, ou LMI, uma desigualdade matricial na forma:

$$[F(x)] = [F_0] + \sum_{i=1}^m x_i [F_i] > 0 \quad (3.1)$$

em que o vetor $\{x\} \in \mathbb{R}^n$ é a variável do problema de otimização, x_i é o seu i -ésimo elemento, e as matrizes $[F_i] = [F_i^T] \in \mathbb{R}^{n \times n}, i=0,1,\dots,m$ são dadas. Johnson e Erkus (2006) apresentam algumas observações acerca da inequação (3.1):

- A inequação $[F(x)] > 0$ implica que $[F(x)]$ é uma matriz positiva definida; portanto, as partes reais de todos os autovalores de $[F(x)]$ são positivos;
- O vetor $\{x\}$ que satisfaz a inequação (3.1) é conhecido como solução factível da LMI. O conjunto formado pela solução factível, $\{\{x\} | [F(x)] > 0\}$ é um conjunto convexo. Convexidade é uma importante característica nesse tipo de problema, pois existem técnicas numéricas eficientes para resolução de problemas com conjuntos convexos.
- Várias inequações que não estão na forma da inequação (3.1) podem ser convertidas nessa LMI através de manipulações algébricas. Além disso, múltiplas LMI podem ser convertidas em uma única LMI através de uma mudança de variáveis.

Na maioria dos casos, não é conveniente escrever uma desigualdade matricial linear na forma padrão da inequação (3.1). Assim, recebe o nome de LMI qualquer desigualdade matricial cuja equivalência com uma desigualdade na forma padrão da inequação (3.1) seja óbvia.

Deve-se ressaltar que algumas desigualdades não lineares podem ser convertidas na forma de LMI através do uso do complemento de Schur (VAN ANTWERP e BRAATZ, 2000). Assim, seja a desigualdade matricial não linear:

$$\begin{aligned} [Q] - [S][R]^{-1}[S]^T &> 0, \\ [R] &> 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $[Q(x)] = [Q(x)]^T$, $[R(x)] = [R(x)]^T$ e $[S(x)]$ são dependentes afins (lineares) de x . O sistema de inequações (3.2) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} [Q] & [S] \\ [S]^T & [R] \end{bmatrix} > 0 \quad (3.3)$$

3.2.2 Estabilidade quadrática

Seja o sistema dinâmico representado por:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\}, \quad (3.4)$$

considerando que esse sistema seja assintoticamente estável, ou seja, que $[A]$ possua todos os seus autovalores com a parte real negativa. Considere a existência de uma função na forma quadrática:

$$V(x) = \{x\}^T [P] \{x\} \quad (3.5)$$

sendo $[P]$ uma matriz simétrica positiva definida. Segundo Lyapunov esse sistema só será estável se a função $V(x)$, conhecida como função de Lyapunov, for positiva e a derivada

primeira de $V(\mathbf{x})$ no tempo for negativa. Assim, uma condição necessária e suficiente para a Eq. (3.5) ser estável é solucionar o seguinte problema de factibilidade da LMI:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}]^T [\mathbf{P}] + [\mathbf{P}][\mathbf{A}] &< 0 \\ [\mathbf{P}] &= [\mathbf{P}]^T > 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Definindo uma nova variável $[\mathbf{Q}] = [\mathbf{P}]^{-1}$ tem-se:

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}][\mathbf{A}]^T + [\mathbf{A}][\mathbf{Q}] &< 0 \\ [\mathbf{Q}] &= [\mathbf{Q}]^T > 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Agora, considere o sistema dinâmico representado por:

$$\{\dot{\mathbf{x}}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\} + [\mathbf{B}]\{\mathbf{w}\} \quad (3.8)$$

onde $\{\mathbf{w}\}$ é um distúrbio, $\{\mathbf{x}\}$ o vetor de estados, $[\mathbf{A}]$ a matriz dinâmica e $[\mathbf{B}]$ a matriz de entrada. Segundo Johnson e Erkus (2006), a estabilidade no sentido de Lyapunov é garantida se, e somente se:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}]^T [\mathbf{P}] + [\mathbf{P}][\mathbf{A}] + [\mathbf{S}] &< 0 \\ [\mathbf{P}] &= [\mathbf{P}]^T > 0 \\ [\mathbf{S}] &= [\mathbf{S}]^T > 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $[\mathbf{P}]$ é a matriz de Lyapunov. Considerando o caso em que $[\mathbf{S}] = [\mathbf{B}][\mathbf{B}]^T$, a inequação (3.9) fica:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}]^T [\mathbf{P}] + [\mathbf{P}][\mathbf{A}] + [\mathbf{B}][\mathbf{B}]^T &< 0 \\ [\mathbf{P}] &= [\mathbf{P}]^T > 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.2.3 Realimentação de estados via LMI

Considere agora um sistema linear e invariante no tempo:

$$\begin{aligned}\{\dot{x}\} &= [A]\{x\} + [B_1]\{w\} + [B_2]\{z\} \\ \{y\} &= [C]\{x\} + [D_1]\{w\} + [D_2]\{z\}\end{aligned}\quad (3.11)$$

onde:

$$\{x\}_{(n \times 1)} = [x_1 \ x_2 \ \dots x_n]^T \text{ é o vetor de estado.}$$

$$\{w\}_{(a \times 1)} = [w_1 \ w_2 \ \dots w_a]^T \text{ é o vetor de entradas exógenas (ou de distúrbios).}$$

$$\{z\}_{(r \times 1)} = [z_1 \ z_2 \ \dots z_r]^T \text{ é o vetor de entradas (ou de controle).}$$

$$\{y\}_{(m \times 1)} = [y_1 \ y_2 \ \dots y_m]^T \text{ é o vetor de saídas.}$$

Além disso, $[A]_{(n \times n)}$ é a matriz dinâmica, $[B_1]_{(n \times a)}$ é a matriz de entradas exógenas, $[B_2]_{(n \times r)}$ é a matriz de entradas de controle, $[C]_{(m \times n)}$ é a matriz de saída e as matrizes $[D_1]_{(n \times a)}$ e $[D_2]_{(n \times r)}$ são as matrizes de transmissão direta.

Assumindo controle por realimentação de estados para a Eq. (3.11), uma lei de controle linear pode ser dada por:

$$\{z\} = -[K_c]\{x\} \quad (3.12)$$

sendo $[K_c]$ a matriz de ganho de realimentação a ser determinada. Considere-se também que $[D_1] = 0$ e $[D] = [D_2]$. Substituindo a Eq. (3.12) em (3.11), tem-se:

$$\begin{aligned}\{\dot{x}\} &= [[A] - [B_2][K_c]]\{x\} + [B_1]\{w\} \\ \{y\} &= [[C] - [D_2][K_c]]\{x\} + [D_1]\{w\}\end{aligned}\quad (3.13)$$

As matrizes de estado em condição de malha fechada são dadas por:

$$[A_f] = [A] - [B_2][K_c] \quad (3.14)$$

$$[C_c] = [C] - [D][K_c] \quad (3.15)$$

O objetivo é encontrar os ganhos estabilizantes definidos por:

$$[K_c] = \{ [K_c] : [A_f] \text{ é asympt. estável} \} \quad (3.16)$$

Ou seja, todos os autovalores de $[A_f]$ devem ter parte real negativa. Este cálculo também pode levar em consideração restrições que atendam algumas especificações de desempenho e robustez, como limitação de sinais de saída, limitação de sinais de entrada, taxa de decaimento.

3.2.4 Estabilidade quadrática em malha fechada

Retomando o sistema da Eq. (3.11), este é quadraticamente estabilizável via realimentação de estados se, e somente se:

$$\begin{aligned} & \left([A] + [B_2][K_c] \right)^T [P] + [P] \left([A] + [B_2][K_c] \right) < 0 \\ & [P] > 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

ou, na forma dual:

$$\begin{aligned} & [Q] \left([A] + [B_2][K_c] \right)^T + \left([A] + [B_2][K_c] \right) [Q] < 0 \\ & [Q] > 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aqui, as variáveis são as matrizes $[P]$ ou $[Q]$ e $[K_c]$. Como existe multiplicação entre elas, as restrições geradas pelas inequações (3.17) e (3.18) não são convexas nas

variáveis de interesse. No entanto, definindo a variável $[Y]=[K_c][Q]$ e substituindo na inequação (3.18), o problema se torna convexo:

$$\begin{aligned} & [A][Q]+[Q][A]^T+[B_2][Y]+[Y]^T[B_2]^T < 0 \\ & [Q] > 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

sendo $[Y]$ e $[Q]$ as variáveis da inequação e o ganho de realimentação é determinado por:

$$[K_c]=[Y][Q]^{-1} \quad (3.20)$$

De acordo com Mazoni (2007), de forma geral, os problemas de controle via LMIs seguem os seguintes passos:

- Tem-se uma planta linear representada por suas matrizes de estado e se deseja projetar um controlador (estático ou dinâmico, realimentando estados ou saídas);
- A representação do controlador é concatenada com a da planta produzindo as matrizes de malha fechada;
- Em seguida, as matrizes de malha fechada são submetidas a um teste matricial de estabilidade pelo critério de Lyapunov; isso constitui uma condição matemática que as matrizes do controlador devem respeitar;
- A inequação matricial resultante é a expressão a ser satisfeita para estabilidade do sistema em malha fechada. As variáveis dessa inequação são as matrizes do controlador e a matriz original da desigualdade de Lyapunov. Se for possível encontrar tais matrizes, o problema é factível;
- Sujeitas à inequação anterior, as matrizes do controlador e da planta são usadas para estabelecer algum objetivo de controle;

Assim, o problema consiste em encontrar as matrizes do controlador que satisfazem à desigualdade matricial e minimizam o objetivo de controle escolhido;

3.2.5 Observadores de estado via LMI

Na maior parte das aplicações de realimentação de estados, não é viável medir todos estados, pois são de difícil acesso ou mesmo não possuem um significado físico claro, fazendo-se necessário o uso de observadores de estados.

Para um sistema como descrito pela Eq. (3.13) um observador de estado é dado por:

$$\{\dot{\hat{x}}\} = [A]\{\hat{x}\} + [B]\{w\} + [L][\{y\} - [C]\{\hat{x}\}] \quad (3.21)$$

onde $[L]$ é a matriz do observador; $\{\hat{x}\}$ é o vetor de estado do observador. Segundo Koroishi et al. (2010) o estudo de estabilidade do observador pode ser dado pela seguinte LMI:

$$\begin{aligned} [P]([A] - [L][C]) + ([A] - [L][C])^T [P] &< 0 \\ [P] &> 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Efetuada algumas manipulações matemáticas, escreve-se:

$$[P][A] - [P][L][C] + [A]^T [P] - [C]^T [L]^T [P] < 0 \quad (3.23)$$

Pré-multiplicando e pós-multiplicando ambos os lados da Eq. (3.23) por $[P]^{-1}$, tem-se:

$$[A][P]^{-1} - [L][C][P]^{-1} + [P]^{-1}[A]^T - [P]^{-1}[C]^T [L]^T < 0 \quad (3.24)$$

Para linearizar a Eq. (3.24) faz-se $[X] = [P]^{-1}$ e $[G] = [P]^{-1}[L] = [X][L]$, assim:

$$\begin{aligned} [A][X] + [X][A]^T - [G][C] - [C]^T [G]^T &< 0 \\ [X] &> 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

O ganho do observador é dado por:

$$[L] = [X]^{-1}[G] \quad (3.26)$$

3.3 Controle H_∞

O controlador H_∞ tem como medida de desempenho a minimização da norma H_∞ , o que representa a minimização da função de transferência da saída de desempenho em relação às entradas exógenas. No domínio da frequência isso representa a minimização da máxima amplitude da função de transferência.

Essa teoria de controle também pode ser interpretada como um problema de otimização em que a variável a ser otimizada é o próprio controlador, sendo essa interpretação que a abordagem por LMI utiliza para desenvolver o problema do controlador (MAZONI, 2008).

3.3.1 A Norma H_∞

Segundo Canahure (2009) considerando sistemas estáveis, a norma H_∞ da função de transferência $[G(s)]$ para sistemas de uma entrada e uma saída (SISO) é:

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)| \quad (3.27)$$

A norma H_∞ da matriz de transferência $[G(s)]$ para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) é:

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega \sigma_{\max}([G(j\omega)]) \quad (3.28)$$

sendo $\sigma_{\max}(G(j\omega))$ o maior valor singular da matriz de transferência $[G(s)]$.

3.3.2 Projeto de controladores H_∞

Seja um sistema dinâmico que seja representado pelo conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
\{\dot{x}\} &= [A]\{x\} + [B_1]\{w\} + [B_2]\{z\} \\
\{u\} &= [C_1]\{x\} + [D_{11}]\{w\} + [D_{12}]\{z\} \\
\{y\} &= [C_2]\{x\} + [D_{21}]\{w\} + [D_{22}]\{z\}
\end{aligned}
\tag{3.29}$$

onde:

$\{x\}_{(n \times 1)} = [x_1 \ x_2 \ \dots x_n]^T$ é o vetor de estado.

$\{w\}_{(a \times 1)} = [w_1 \ w_2 \ \dots w_a]^T$ é o vetor de entradas exógenas (ou de distúrbios).

$\{z\}_{(r \times 1)} = [z_1 \ z_2 \ \dots z_r]^T$ é o vetor de entradas (ou de controle).

$\{u\}_{(m \times 1)} = [u_1 \ u_2 \ \dots u_m]^T$ é o vetor de saídas de desempenho

$\{y\}_{(q \times 1)} = [y_1 \ y_2 \ \dots y_q]^T$ é o vetor de saídas.

A planta a ser controlada é dada pela matriz $[G]$ abaixo:

$$[G] = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}.
\tag{3.30}$$

O sistema em malha fechada pode ser descrito pelo diagrama de blocos:

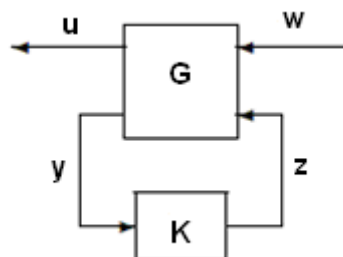


Figura 3.1: controlador H_∞

sendo G a planta e K o controlador. O projeto de um controlador ótimo H_∞ pode ser definido como (ZHOU e DOYLE; 1998):

Controlador ótimo H_∞ : encontrar todos controladores K_c admissíveis (que tornem o sistema estável) que minimizem a norma $\|H_\infty\|$ da função de transferência entre as entradas $\{w\}$ e as saídas $\{z\}$.

Entretanto, encontrar o controlador H_∞ ótimo nem sempre é fácil e, na prática, geralmente não é desejável, ou mesmo necessário encontrar a solução ótima. Assim, lançando mão de problema subótimo, que é definido como (ZHOU e DOYLE; 1998):

Controlador subótimo H_∞ : encontrar todos os controladores K_c admissíveis, tal que $\|H_\infty\| < \gamma$. Para $\gamma > 0$.

Aqui é necessário inserir um importante conceito: o *Lema do Limite Real*. É através desse lema que é possível converter o projeto de um controlador em um problema de otimização com restrições matriciais lineares. Dentre os vários corolários decorrentes do *Lema do limite Real* serão mostrados a seguir apenas os utilizados; o lema completo é mostrado em (Zhou e Doyle, 1998)

Corolário: Seja a planta de um sistema dada por $[G] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ e a matriz de transferência entre a entrada $\{w\}$ e a saída $\{y\}$ dada por $[T_{yw}]$. Assim, $\|[T_{yw}]\|_\infty < \gamma$, com $\gamma > 0$, se e somente se existir uma matriz simétrica positiva definida $[P]$, tal que:

$$\begin{bmatrix} [A][P] + [P][A]^T & [P][B] & [C]^T \\ [B]^T [P] & -\mu[I] & [D] \\ [C] & [D] & -\mu[I] \end{bmatrix} < 0 \quad (3.31)$$

A partir do *Lema do Limite Real* é possível escrever o problema do controlador H_∞ por realimentação de estados que será formulado nessa seção. Configurações alternativas

seriam a realimentação estática de saída e a realimentação dinâmica de saída. Tendo o sistema:

$$\begin{aligned}\{\dot{x}\} &= [A]\{x\} + [B_1]\{w\} + [B_2]\{z\} \\ \{y\} &= [C]\{x\} + [D_1]\{w\} + [D_2]\{z\}\end{aligned}\quad (3.32)$$

e realimentação de estados,

$$\{z\} = -[K_c]\{x\} \quad (3.33)$$

com $[K_c]$ sendo o ganho de realimentação a ser definido. Substituindo a Eq. (3.33) em (3.32) tem-se o sistema controlado:

$$\begin{aligned}\{\dot{x}\} &= ([A] - [B_2][K_c])\{x\} + [B_1]\{w\} \\ \{y\} &= ([C] - [D_2][K_c])\{x\} + [D_1]\{w\}\end{aligned}\quad (3.34)$$

com as matrizes em malha fechada mostradas a seguir:

$$\begin{aligned}[\tilde{A}] &= [A] - [B_2][K_c] \\ [\tilde{B}] &= [B_1] \\ [\tilde{C}] &= [C] - [D_2][K_c] \\ [\tilde{D}] &= [D_1]\end{aligned}\quad (3.35)$$

Usando o *Lema do Limite Real* para o sistema em malha fechada (3.34) e com auxílio do complemento de Schur, o problema de otimização é descrito como:

$$\min_{\mu, [P]} \mu = \gamma^2$$

sujeito a:

$$\begin{bmatrix} [\tilde{A}][P] + [P][\tilde{A}]^T & [P][\tilde{B}] & [\tilde{C}]^T \\ [\tilde{B}]^T [P] & -[I] & [\tilde{D}]^T \\ [\tilde{C}] & [\tilde{D}] & -\mu[I] \end{bmatrix} < 0 \quad (3.36)$$

$$[P] = [P]^T > 0, \mu > 0$$

Fazendo uma transformação de congruência na restrição do problema H_∞ chega-se ao problema na forma em que ele é comumente encontrado na literatura:

$$\begin{bmatrix} [P]^{-1} & [0] & [0] \\ [0] & [I] & [0] \\ [0] & [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\tilde{A}][P] + [P][\tilde{A}]^T & [P][\tilde{B}] & [\tilde{C}]^T \\ [\tilde{B}]^T [P] & -[I] & [\tilde{D}]^T \\ [\tilde{C}] & [\tilde{D}] & -\mu[I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [P]^{-1} & [0] & [0] \\ [0] & [I] & [0] \\ [0] & [0] & [I] \end{bmatrix} < 0 \quad (3.37)$$

Fazendo $[Q] = [P]^{-1}$ tem-se:

$$\begin{bmatrix} [Q][\tilde{A}]^T + [\tilde{A}][Q] & [\tilde{B}] & [Q][\tilde{C}]^T \\ [\tilde{B}]^T & -[I] & [\tilde{D}]^T \\ [\tilde{C}][Q] & [\tilde{D}] & -\mu[I] \end{bmatrix} < 0 \quad (3.38)$$

Substituindo as matrizes do sistema controlado (3.35) em (3.38) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} [A][Q] + [B_2][Y] + [Q][A]^T + [Y]^T [B_2] & [B_1] & [Q][C]^T + [Y]^T [D_2] \\ [B_1]^T & -[I] & [D_1]^T \\ [C][Q] + [D_2][Y] & [D_1] & -\mu[I] \end{bmatrix} < 0 \quad (3.39)$$

com $[Y] = [K_c][Q]$.

Finalmente, o problema de controle H_∞ para a realimentação de estados é reescrito como:

$$\begin{aligned} \min_{\mu, [Q], [Y]} \quad & \mu = \gamma^2 \\ \text{sujeito a:} \quad & \\ (3.39) \quad & \\ [Q] = [Q]^T > 0, \mu > 0 \end{aligned} \tag{3.40}$$

em que as variáveis de otimização são $[Q], [Y]$ e μ , e a matriz de ganho de realimentação é obtida de $[K_c] = [Y][Q]^{-1}$. O código implementado em MatLab® é visto no Apêndice I.

3.4 Controle LQR

O regulador linear quadrático (*Linear Quadratic Regulator* – LQR) possui grande importância na teoria de controle, pois, além de ser uma poderosa ferramenta de controle de sistemas MIMO, é a base de muitos outros métodos de controle ótimo.

Ainda são poucas as abordagens do LQR via LMI, apesar dele ter sido inicialmente proposto na década de 1970, sendo que nesta abordagem podemos citar Erkus e Lee (2004) e no cenário nacional o trabalho de Bueno (2007).

O LQR se baseia na minimização de uma função de desempenho quadrática que geralmente possui a forma (Ogata, 2003):

$$J = \int_0^\infty \left(\{x\}^T [Q_{lqr}] \{x\} + \{w\}^T [R_{lqr}] \{w\} \right) dt \tag{3.41}$$

sendo as matrizes $[Q_{lqr}]$ e $[R_{lqr}]$ matrizes hermitianas.

Nas abordagens convencionais, primeiramente é definido o ganho do controlador para depois verificar sua estabilidade; já em abordagens utilizando o usando o teorema de Lyapunov faz-se o inverso, ou seja, primeiro são verificadas as condições de estabilidade e, posteriormente, o controlador é projetado respeitando as restrições criadas no primeiro passo.

A formulação aqui apresentada é a mesma usada por Johnson e Erkus (2006), na qual o problema de controle LQR é apresentado na forma clássica de um problema de otimização. Retornando ao sistema representado pela Eq. (3.32):

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B_1]\{w\} + [B_2]\{z\} \quad (3.42-a)$$

$$\{y\} = [C]\{x\} + [D_1]\{w\} + [D_2]\{z\} \quad (3.42-b)$$

e usando uma lei de realimentação de estados como a da Eq. (3.33), Johnson e Erkus (2006) formulam o problema de controle LQR como: encontrar o ganho do controlador $[K_c]$ que satisfaça o problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{[K_c]} E & \left[\{x\}^T [Q_{lqr}] \{x\} + \{w\}^T [R_{lqr}] \{w\} + \{x\}^T [N] \{w\} + \{w\}^T [N] \{x\} \right] \\ \text{sujeito a:} & (3.42-a) \text{ e } \{z\} = -[K_c] \{x\} \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde $[Q_{lqr}] = [Q_{lqr}]^T > 0$, $[R_{lqr}] = [R_{lqr}]^T > 0$ e $[N]$ são matrizes de ponderação. A matriz $[N]$ representa a inserção de um ruído ao sistema e não será utilizada nesse trabalho, sendo, portanto, considerada nula. Substituindo $\{z\} = -[K_c] \{x\}$ na função objetivo e na restrição dada pela Eq. (3.42-a), tem-se:

$$\begin{aligned} \min_{[K_c]} E & \left[\{x\}^T [Q_{lqr}] \{x\} + \{x\}^T [K_c]^T [R_{lqr}] [K_c] \{x\} \right] \\ \text{sujeito a:} & \{\dot{x}\} = ([A] - [B_1][K_c]) \{x\} + [B_2]\{z\} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Considerando que as matrizes $[Q_{lqr}]$ e $[R_{lqr}]$ satisfazem $[Q_{lqr}]^{\frac{1}{2}} [Q_{lqr}]^{\frac{1}{2}} = [Q_{lqr}]$ e $[R_{lqr}]^{\frac{1}{2}} [R_{lqr}]^{\frac{1}{2}} = [R_{lqr}]$, o problema (3.44) pode ser expresso sob a forma:

$$\begin{aligned} \min_{[K_c]} E & \left[\{x\}^T [Q_{lqr}]^{\frac{1}{2}} [Q_{lqr}]^{\frac{1}{2}} \{x\} + \{x\}^T [K_c]^T [R_{lqr}]^{\frac{1}{2}} [R_{lqr}]^{\frac{1}{2}} [K_c] \{x\} \right] \\ \text{sujeito a:} & \{\dot{x}\} = ([A] - [B_1][K_c]) \{x\} + [B_2]\{z\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Assumindo que $E(\{x\}\{x\}^T) = [P]$, usando o operador traço $\text{Tr}(\bullet)$, que é definido como a soma dos elementos da diagonal principal, e a inequação de Lyapunov dada por (3.10), o problema (3.45) fica:

$$\begin{aligned} \min_{[K_c], [P]} & \text{Tr} \left([Q_{lqr}]^{\frac{1}{2}} [P] [Q_{lqr}]^{\frac{1}{2}} \right) + \text{Tr} \left([R_{lqr}]^{\frac{1}{2}} [K_c] [P] [K_c]^T [R_{lqr}]^{\frac{1}{2}} \right) \\ \text{sujeito a:} & ([A] - [B_1][K_c])[P] + [P]([A] - [B_1][K_c])^T + [B_2][B_2]^T < 0; [P] = [P]^T > 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

O problema de otimização (3.46) ainda não representa uma LMI, pois possui o termo não linear $[K_c][P]$ e a primeira inequação da restrição é bilinear. Para converter essa inequação bilinear em linear é necessário introduzir uma nova variável $[Y] = [K_c][P]$ em (3.46):

$$\begin{aligned} \min_{[Y], [P]} & \text{Tr} \left([Q_{lqr}]^{\frac{1}{2}} [P] [Q_{lqr}]^{\frac{1}{2}} \right) + \text{Tr} \left([R_{lqr}]^{\frac{1}{2}} [Y] [S]^{-1} [Y]^T [R_{lqr}]^{\frac{1}{2}} \right) \\ \text{sujeito a:} & [A][P] - [B_1][Y] + [P][A]^T - [Y]^T [B_1]^T + [B_2][B_2]^T < 0; [P] = [P]^T > 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

A não linearidade na função objetivo pode ser substituída pela solução de um problema de otimização:

$$\text{Tr} \left([R_{lqr}]^{\frac{1}{2}} [Y] [S]^{-1} [Y]^T [R_{lqr}]^{\frac{1}{2}} \right) = \left[\begin{array}{l} \min_{[Y], [P]} \text{TR}([X]) \\ \text{sujeito a: } [X] > [R]^{\frac{1}{2}} [Y] [S]^{-1} [Y]^T [R]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right] \quad (3.48)$$

onde a matriz $[X]$ é uma variável auxiliar. A prova para da Eq. (3.48) é encontrada em Johnson e Erkus (2006). A inequação presente na restrição do segundo lado da Eq. (3.47) pode ser reescrita usando o complemento de Schur:

$$\left[\begin{array}{cc} [X] & [R]^{\frac{1}{2}} \\ [Y][R]^{\frac{1}{2}} & [S] \end{array} \right] > 0 \quad (3.49)$$

Assim, o problema (3.47) pode ser escrito:

$$\begin{aligned} \min_{[Y], [P], [X]} \quad & \text{Tr} \left([Q_{lqr}]^{\frac{1}{2}} [P] [Q_{lqr}]^{\frac{1}{2}} \right) + \text{Tr}([X]) \\ \text{sujeito a:} \quad & [A][P] - [B_1][Y] + [P][A]^T - [Y]^T [B_1]^T + [E][E]^T < 0; \begin{bmatrix} [X] & [R]^{\frac{1}{2}} [Y] \\ [Y][R]^{\frac{1}{2}} & [S] \end{bmatrix} > 0; [P] > 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

O ganho do controlador é dado por $[K_c] = [Y][P]$. O código implementado se encontra no Apêndice I.

3.5 Restrição no Sinal de Controle

Muitas vezes é necessário restringir o sinal (esforço) de controle, pois em simulações numéricas o esforço de controle pode ser irrealista, sendo que pode não existir atuador que consiga realizar tal esforço. Esse é um fato recorrente em controladores H_∞ quando o controlador encontrado é o controlador ótimo; assim essa restrição coloca o problema como um controlador subótimo. A forma da restrição aqui apresentada está na forma de uma LMI, conforme foi apresentado por Canahuire (2009).

Dadas as matrizes $[Q] = [P]^{-1} > 0$ e $[Y]$, as quais formam o ganho do controlador $[K_c] = [Y][Q]^{-1}$ e seja ε o elipsóide definido por:

$$\varepsilon = \left\{ \{x\} \in \mathbb{R}^n \mid \{x\}^T [Q]^{-1} \{x\} \leq 1 \right\}. \quad (3.51)$$

Este elipsóide é dito invariante para o sistema representado por (3.32) se para toda trajetória que começar dentro deste elipsóide, todos os estados permanecerem dentro dele, ou seja:

$$\{x(0)\} \in \varepsilon \Rightarrow \forall t > 0, \{x(t)\} \in \varepsilon \quad (3.52)$$

Segundo Boyd et al. (1994) é possível escrever:

$$\begin{aligned}
\max_{t \geq 0} \|\{z\}\| &= \max_{t \geq 0} \|[Y][Q]^{-1}\{x\}\| \leq \max_{x \in \mathcal{E}} \|[Y][Q]^{-1}\{x\}\| = \dots \\
&= \left[\lambda_{\max} \left([Q]^{-\frac{1}{2}} [Y]^T [Y] [Q]^{-\frac{1}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \beta_c \\
&= \lambda_{\max} \left([Q]^{-\frac{1}{2}} [Y]^T [Y] [Q]^{-\frac{1}{2}} \right) \leq \beta_c^2
\end{aligned} \tag{3.53}$$

onde β_c representa a restrição no sinal de entrada e $\lambda_{\max}(\bullet)$ o maior autovalor. Usando o complemento de Schur, a inequação final de (3.53) pode ser rescrita como uma inequação matricial:

$$\begin{bmatrix} [Q] & [Y]^T \\ [Y] & \beta_c^2 [I] \end{bmatrix} > 0 \tag{3.54}$$

Essa inequação pode ser incluída como uma restrição nos problemas (3.40) e (3.50) e β_c é um dos parâmetros do projeto.

3.6 Redução do Modelo

Modelos de ordem muito elevadas muitas vezes impedem a avaliação desses e para que seja possível analisá-los é necessário encontrar um modelo de ordem menor, mas que seja representativo do sistema de ordem original. Nesse trabalho é utilizada a redução através da representação balanceada.

Realização balanceada consiste em descrever o modelo do sistema na representação de espaço de estados combinando as matrizes de observabilidade e de controlabilidade usando os gramínicos de observabilidade e de controlabilidade do sistema. A redução do modelo através da realização balanceada é chamada de truncamento balanceado (ZHOU e DOYLE, 1998). Esse método foi escolhido pela sua simplicidade e facilidade de implementação e devido ao fato de ser facilmente descrito através das equações de Lyapunov. Aqui o modelo reduzido é obtido através da negligência dos estados associados a pequenos valores singulares (ASSUNÇÃO e HEMERLY, 1992; ZHOU e DOYLE, 1998).

Dado um sistema descrito pelas equações:

$$\begin{aligned}\{\dot{x}\} &= [A]\{x\} + [B]\{w\} \\ \{y\} &= [C]\{x\} + [D]\{w\}\end{aligned}\quad (3.55)$$

a realização balanceada mínima desse sistema é assintoticamente estável se os gramínicos de observabilidade e controlabilidade do sistema forem iguais e diagonais ($[\Sigma] = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$) e se respeitarem as seguintes equações de Lyapunov:

$$\begin{aligned}[A][\Sigma] + [\Sigma][A]^T + [B][B]^T &= 0 \\ [A]^T[\Sigma] + [\Sigma][A] + [C]^T[C] &= 0\end{aligned}\quad (3.56)$$

Aqui, σ_i , $i=1,2,\dots,n$, são os valores singulares do sistema. A cada σ_i é associado um estado x_i do sistema balanceado e esse valor quantifica a contribuição do correspondente estado para a resposta do sistema. Assim, o modelo é reduzido através da análise dos valores singulares e o modelo final é formado pelos estados referentes aos maiores valores singulares.

3.7 Incertezas Politópicas

Todos os modelos e sistemas são aproximações da natureza e apresentam incertezas em relação aos sistemas reais. Essas incertezas ocorrem por vários motivos, como a dificuldade de se medir ou estimar com precisão os parâmetros do sistema, ou a linearização e aproximações feitas no modelo.

As incertezas podem ser divididas em dois tipos: incertezas não estruturadas ou estáticas e incertezas estruturadas ou dinâmicas. As incertezas não estruturadas ou dinâmicas são referentes ao modelo, no caso de controle são incertezas na planta, geralmente causadas pela desconsideração de efeitos físicos no modelo, seja por causa de hipóteses simplificadoras, ausência de uma equação que os descreva ou pelo truncamento do modelo (ZHOU, 1996). Esse tipo de incerteza é geralmente descrita em termos de sua amplitude e limitadas por normas (OLIVEIRA e ARRIFANO, 2001).

Os tipos de modelos de incertezas não estruturadas mais comuns são: modelo com incerteza aditiva, modelo com incerteza multiplicativa na saída e modelo com incerteza

multiplicativa na entrada. Esse trabalho não abordará a incertezas não estruturadas, focando exclusivamente as estruturadas.

As incertezas estruturadas são geralmente causadas por erros na medição e estimação dos parâmetros, assim como a alteração desses ao longo do funcionamento do sistema. A caracterização destas incertezas pode ser feita através de modelos politópicos, modelos a parâmetro dependente afim e modelos com matrizes de incerteza.

A forma aqui considerada no projeto de controle é através da abordagem politópica. Dado um conjunto de S , esse conjunto é convexo se, e somente se, para quaisquer pontos x_1 e $x_2 \in S$, o segmento de reta que liga esses dois pontos também pertence a esse conjunto S . A figura 3.2 apresenta um conjunto convexo e outro não convexo.

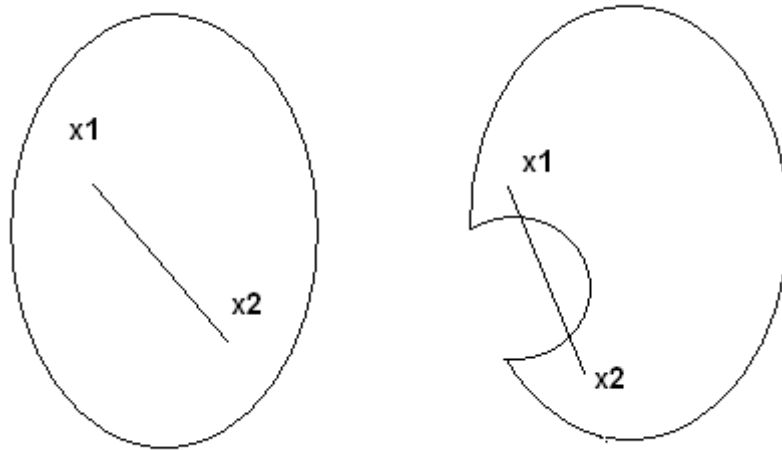


Figura 3.2: Exemplo de conjunto convexo e não convexo.

Na representação politópica é apresentado um conjunto de vários sistemas possíveis como uma combinação convexa de sistema totalmente conhecidos. Considera-se que as matrizes de estado $[A], [B], [C], [D]$ da planta são incertas. O conjunto convexo Φ , é dado por:

$$\Phi = \left\{ ([A], [B], [C], [D]) = \sum_{i=1}^p \alpha_i ([A_i], [B_i], [C_i], [D_i]) \mid \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1, \alpha_i > 0 \right\} \quad (3.57)$$

A figura 3.3 apresenta uma representação gráfica do conjunto expresso pela Eq. (3.57), que é resultado de uma combinação convexa dos vértices $([A],[B],[C],[D])_i$. O controlador assim projetado é robusto levando em conta os valores mínimos e máximos dos parâmetros.

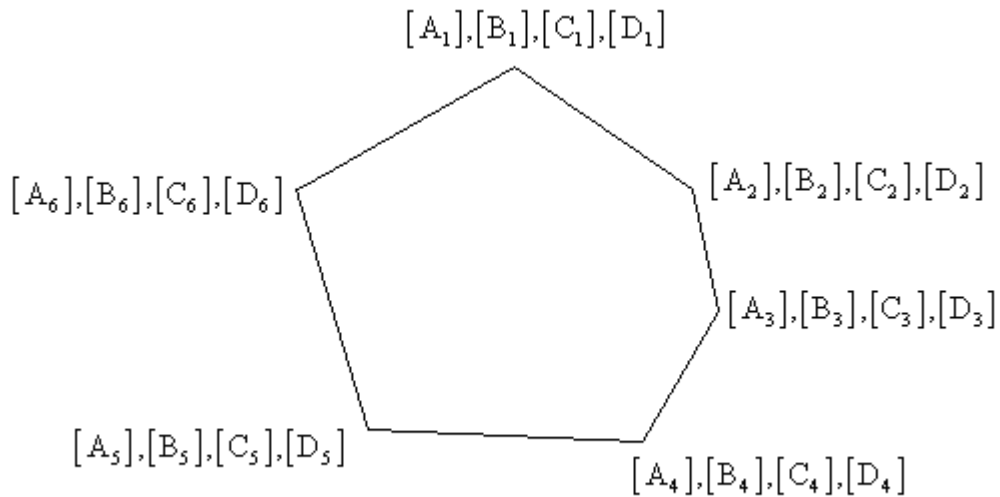


Figura 3.3: Politopo formado pelos sistemas extremos das incertezas em cada vértice.

Aqui, o conceito de estabilidade quadrática apresentado na seção 3.1.3 será aplicado para garantir a estabilidade do sistema. Assim, o sistema incerto pode ser descrito por um politopo com os sistemas extremos em cada vértice do politopo, sendo adotada uma restrição em cada vértice para resolver o problema matemático com todas as restrições. Supondo que um sistema incerto pertença a um politopo de vértices $[A_i]$, o sistema será estável se e somente se:

$$[P][A_i] + [A_i]^T [P] < 0, i=1, \dots, p \quad (3.58)$$

A seguir, a prova da inequação (3.58) apresentada por Santos (2010). Considera-se um politopo definido pelos vértices $[A_i]$; os vértices desse politopo são estáveis se:

$$\begin{aligned}
[P][A_1] + [A_1]^T [P] &< 0, \\
[P][A_2] + [A_2]^T [P] &< 0, \\
&\vdots \\
[P][A_p] + [A_p]^T [P] &< 0,
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Seja um sistema com matriz de estado $[A]$ no interior deste politopo, obedecendo à equação:

$$[A] = \sum_{i=1}^p \alpha_i [A_i] \tag{3.60}$$

onde $\alpha_i > 0$. É possível multiplicar as inequações (3.59) por α_i , que são números positivos, assim, as inequações continuarão sendo negativas, ou seja:

$$\begin{aligned}
\alpha_i ([P][A_1] + [A_1]^T [P]) &< 0, \\
\alpha_i ([P][A_2] + [A_2]^T [P]) &< 0, \\
&\vdots \\
\alpha_i ([P][A_p] + [A_p]^T [P]) &< 0,
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Somando as inequações (3.61), tem-se:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i ([P][A_i] + [A_i]^T [P]) < 0 \tag{3.62}$$

Portanto:

$$[P][A_i] + [A_i]^T [P] < 0 \tag{3.63}$$

Nas Seções 3.2 e 3.3 foram apresentados os problemas sem considerar as incertezas paramétricas, nos sistema (3.40) por H_∞ e (3.50) por LQR. Agora, deve-se considerar o caso de sistemas com incertezas paramétricas na forma que foram aqui abordadas, os sistemas (3.40) e (3.50) podem ser escritos criando uma restrição para cada

um dos vértices do politopo considerado. Aqui, cada restrição aplicada ao vértice i será chamada aqui de $LMI(i)$.

$$\begin{aligned}
 & \|H\|_{\infty} = \min \mu = \gamma^2 \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & LMI_1 < 0 \\
 & LMI_2 < 0 \\
 & \vdots \\
 & LMI_i < 0 \\
 & [Q] = [Q]^T > 0, \mu > 0
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
 & \min_{Y, P, X} E \left[\text{Tr} \left([Q_{lqr}]^{\frac{1}{2}} [P] [Q_{lqr}]^{\frac{1}{2}} \right) + \text{Tr}([X]) \right] \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & LMI_1 < 0 \\
 & LMI_2 < 0 \\
 & \vdots \\
 & LMI_i < 0; \\
 & \begin{bmatrix} [X] & [R]^{\frac{1}{2}} [Y] \\ [Y] [R]^{\frac{1}{2}} & [S] \end{bmatrix}; [P] > 0
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Os problemas de otimização assim descritos devem encontrar um controlador que satisfaça todas as restrições, sendo estável em todos os vértices e, por conseguinte, estável em toda a região do politopo. É fácil perceber que ao se projetar um controlador que satisfaça todos os vértices ao mesmo tempo, esse não é ótimo em nenhum dos vértices isoladamente, mas sim ao politopo como um todo (Santos, 2010).

CAPÍTULO IV

Simulações Numéricas

4.1 Introdução

Neste capítulo são descritas implementações numéricas dos procedimentos de controle estudados no Capítulo III, aplicados ao controle das vibrações transversais de uma viga engastada-livre constituída de material compósito. São considerados dois tipos de incertezas consideradas relevantes para o tipo de estrutura em questão, a saber: incertezas sobre as orientações relativas das camadas do material compósito, e incertezas sobre a rigidez do engastamento.

4.2 Viga laminada de material compósito com atuadores piezelétricos

A viga laminada de material compósito utilizada, ilustrada na Fig. 4.1, possui um total de cinco camadas feitas de grafite/epóxi (AS4/3501), em que a orientação nominal das camadas é $[45^\circ/0^\circ/45^\circ/0^\circ/45^\circ]$, ou na notação contraída, $[45^\circ/0^\circ]_3$. A camada orientada a 0° é paralela ao eixo x e a espessura de cada camada é de 0,2 mm. A condição de contorno adotada é a engastada livre; foi adotado um amortecimento viscoso proporcional às matrizes de massa e de rigidez, com coeficientes de proporcionalidade $\alpha=5$ e $\beta=10^{-6}$, respectivamente, como pode ser visto na Eq. (4.1).

$$[C_{am}] = \alpha[M] + \beta[K_{uu}] \quad (4.1)$$

onde $[C_{am}]$ é a matriz de amortecimento, $[K_{uu}]$ é a matriz de rigidez e $[M]$ a matriz de massa. Esses valores foram obtidos na trabalho de Faria et. al. (2010), que como as dimensões e orientação das camadas são os mesmo desse trabalho. O atuador piezelétrico se encontra a 1 mm do engaste e as demais propriedades geométricas e físicas da viga são apresentadas na Tabela 4.1 e as do PZT na Tabela 4.2.

O modelo de elementos finitos, elaborado de acordo com a Teoria Cisalhante de Primeira Ordem, apresentada no Capítulo II, possui uma malha regular de 10 elementos e um número total de 400 graus de liberdade mecânicos, com um impulso unitário aplicada na extremidade da viga (ponto II) e a resposta é capturada no ponto I, distantes 30,6mm.

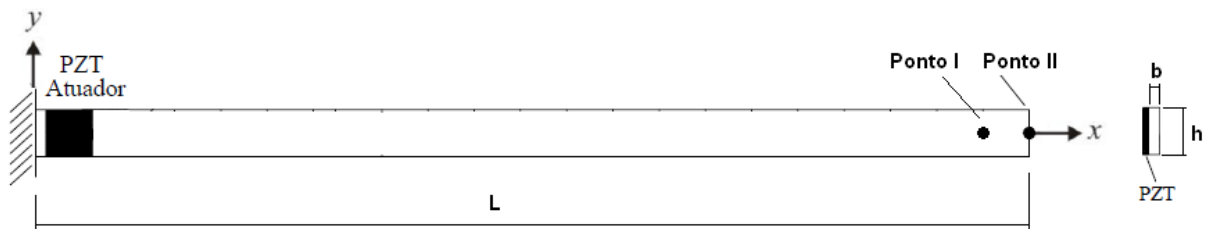


Figura 4.1: Viga de material compósito com atuador piezelétrico

Tabela 4.1: Propriedades da viga

Propriedades	Valores
Constantes de rigidez elásticas (GPa)	
C_{11}	173,60
$C_{22} = C_{33}$	7,61
$C_{12} = C_{13}$	2,48
C_{23}	2,31
C_{44}	1,38
$C_{55} = C_{66}$	3,45
Densidade (Kg/m^3)	1578
Comprimento L (mm)	306
Largura h (mm)	25,50
Espessura b (mm)	1,00

O sistema real possui infinitos graus de liberdade e, portanto, infinitas frequências naturais. Assim é necessário usar um modelo reduzido que represente o sistema real. Para

fins de avaliação da técnica de redução de modelos denominada realização balanceada, apresentada na Seção 3.6, será adotado um modelo com os três primeiros modos que foram obtidos através do processo de redução. A fim de comparação, o modelo reduzido a três modos é comparado com o modelo com mais modos, reduzido. A Tabela 4.3 apresenta as seis primeiras frequências dos modos da viga acoplada com o atuador de PZT.

A comparação das funções de resposta em frequência dos deslocamentos (mobilidade), dos modelos completo e reduzido a três modos pode ser vista na Figura 4.2, mostrando que o modelo reduzido representa convenientemente o comportamento dinâmico na faixa de frequência abrangendo as três primeiras frequências naturais de vibração.

Tabela 4.2 - Propriedades do PZT

Propriedades	Valores
Constantes de rigidez elásticas (GPa)	
$C_{11}=C_{22}=C_{33}$	102,23
$C_{12}=C_{13}=C_{23}$	5,04
$C_{44}=C_{55}=C_{66}$	2,59
Densidade (kg/m^3)	7700
Constantes piezelétricas (C/m^2)	
e_{31}	-18,30
$e_{32}=e_{33}$	-9,013
Permissividade elétrica (F/m)	
$\chi_{11}=\chi_{22}=\chi_{33}$	$1800 \epsilon_0^*$
Comprimento (mm)	30,60
Largura (mm)	25,50
Espessura (mm)	1

*: constante de permissividade elétrica do vácuo: $8,8542 \times 10^{-12} \text{F/m}$

Tabela 4.3 - Frequências naturais da viga

Modo	Frequência (Hz)
1º	13,0
2º	84,9
3º	203,0
4º	251,0
5º	456,0
6º	650,0

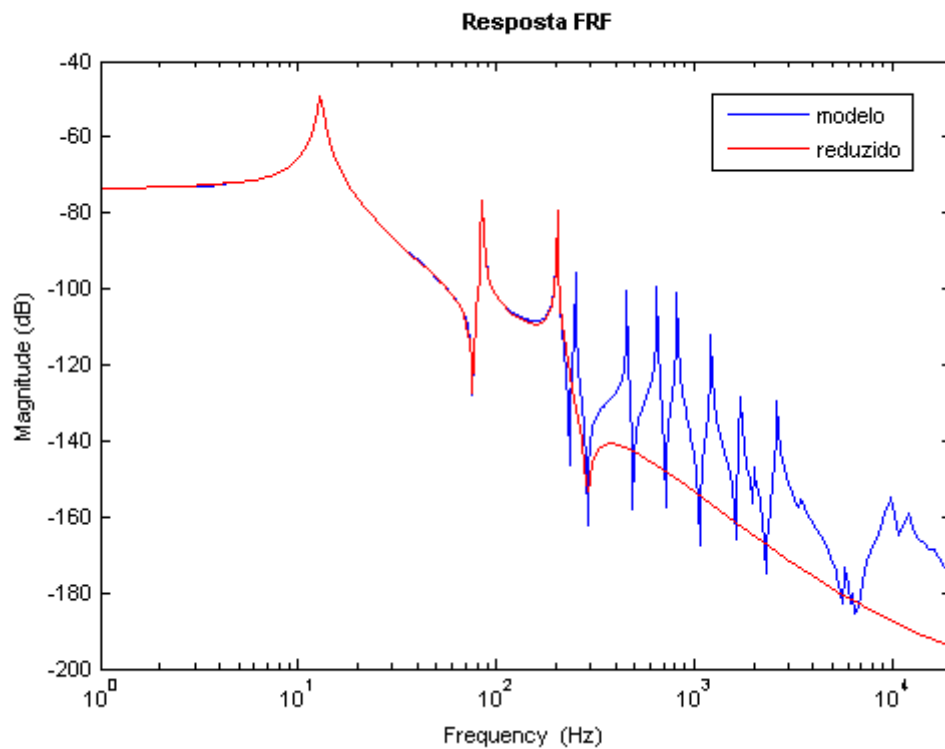


Figura 4.2: FRF do modelo completo e reduzido.

4.2.1 Modelo com incertezas nas direções das camadas

Como já foi discutido anteriormente neste trabalho, todos os modelos adotados possuem erros e uma forma de levar em conta esses erros é a adoção de modelos incertos. Para o caso de materiais compósitos laminados, uma das principais fontes de erro advém da própria fabricação dos materiais, no tocante à orientação relativas das fibras das

diferentes camadas, já que existe uma imprecisão quanto ao verdadeiro ângulo em que essas fibras estão dispostas.

Assim, esse primeiro teste numérico visa a projetar um controlador que seja robusto a variações paramétricas dos ângulos das camadas, para diminuir a amplitude apenas do primeiro modo. Para tal, foi adotada a formulação politópica apresentada no Capítulo III, sendo criado um politopo com quatro vértices, sendo $[45^\circ/0^\circ]_3$ os valores nominais dos ângulos

Cada um dos quatro vértices do politopo foi criado considerando um erro aleatório de $\pm 4,5^\circ$ em cada camada (10% do valor ângulo). Na Fig. 4.3 é mostrada a FRF para cada um dos quatro vértices e na Fig. 4.4, ampliação do primeiro pico da FRF.

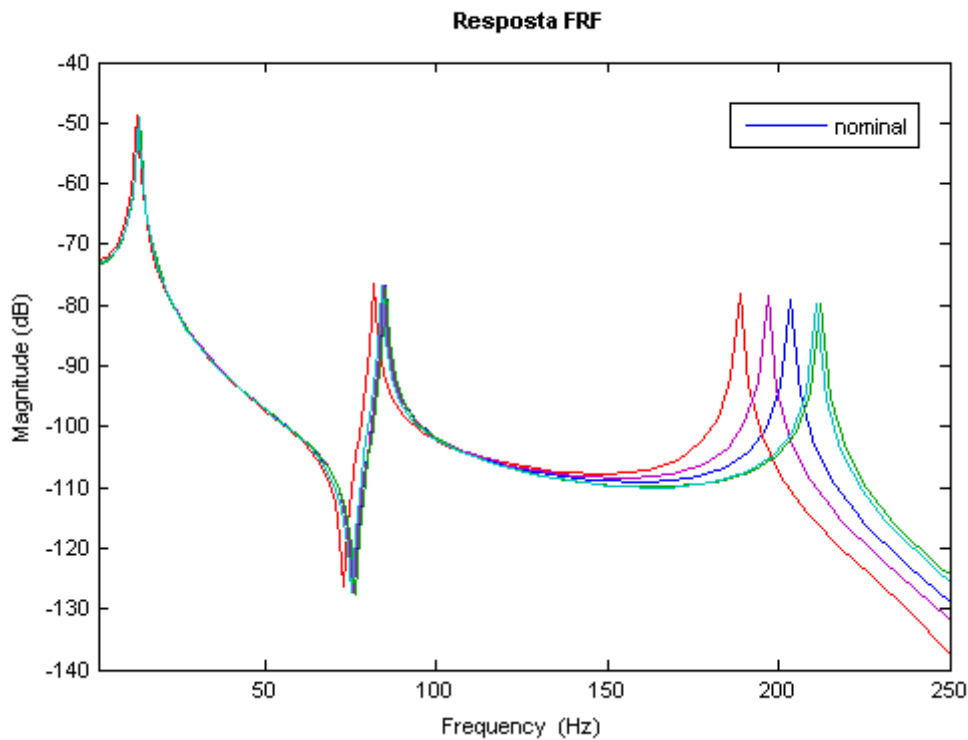


Figura 4.3: FRFs da família de plantas a serem usadas no projeto do controlador.

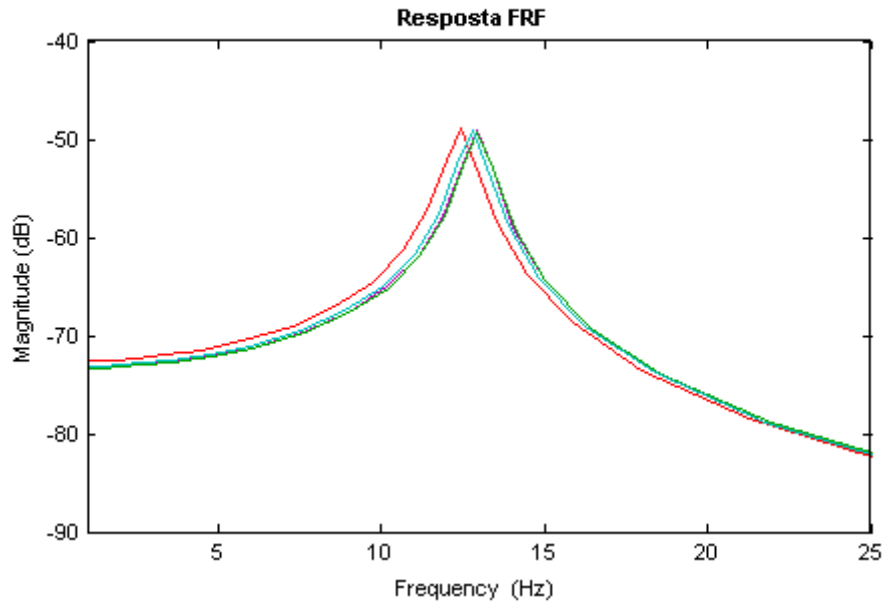


Figura 4.4: FRFs da família de plantas a serem usadas no projeto do controlador (ampliação do primeiro pico da FRF).

Foram sintetizados dois controladores, um H_∞ e outro LQR, os dois via LMI, através da resolução dos problemas de otimização dados no Capítulo III, considerando a família de plantas da Fig. 4.3 e utilizando o parâmetro $\beta_c=0,5$ (apresentado no item 3.5) para os dois controladores; este valor foi retirado do trabalho de Silva (2005), que validou seu modelo com experimentos com uma viga de alumínio com dimensões semelhantes. Foi considerada a realimentação de estados estimados por um observador dinâmico, calculado a partir do problema LMI também dado no Capítulo III.

Na Fig. 4.5 são apresentadas as FRFs do sistema com e sem controle, inicialmente sem consideração das incertezas.

Para o sistema incerto como já foi descrito, foram obtidos os seguintes ganhos do controlador:

$$K_{LQR} = [-0.1611 \quad 1.0035]$$

$$K_{H_\infty} = [-2.7516 \quad 2.8788]$$

Os gráficos das FRFs para os sistemas com controle e sem controle para o modelo na condição nominal e para os quatro vértices do politopo são mostrados nas Fig. 4.6 e 4.7, respectivamente.

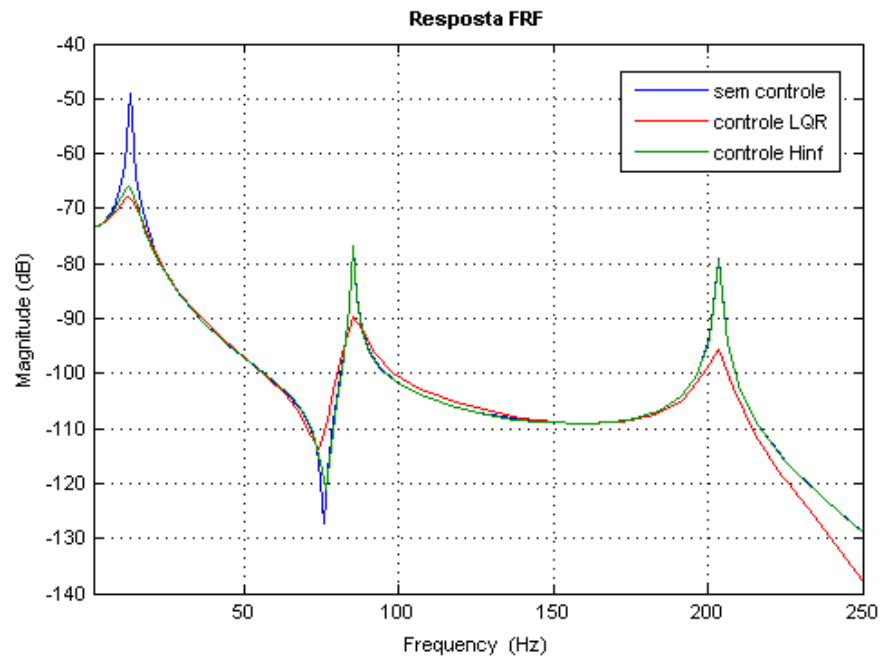


Figura 4.5: FRF para os sistemas sem incertezas em malha aberta e os dois de malha fechada: H_∞ e LQR.

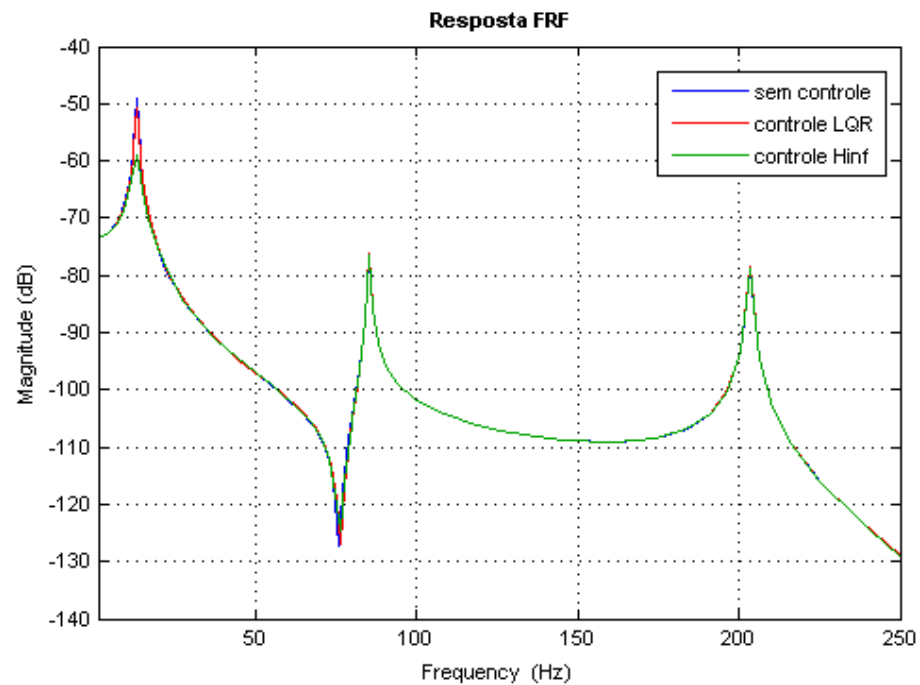


Figura 4.6: FRF para os sistemas incerto com malha aberta e os dois de malha fechada (condição nominal): H_∞ e LQR.

Observa-se que para o sistema incerto, o controlador H_∞ conseguiu reduzir a amplitude do primeiro modo em aproximadamente 10 dB, enquanto o LQR reduziu apenas 4 dB. É interessante ressaltar que para o sistema sem incertezas a técnica LQR causou uma maior atenuação que o controlador H_∞ (redução de aproximadamente 20 dB para o LQR e 16 dB para H_∞), sendo esse um indicativo de que a técnica de controle H_∞ é mais robusta de a técnica LQR. Apesar de uma amplificação de 1 dB ter ocorrido no segundo modo, esta não tem influência significativa na resposta do sistema, comparado ao primeiro modo, como a resposta no tempo mostra nas Fig. 4.8 e 4.9 para o sistema na condição nominal e para os quatro vértices do politopo, respectivamente. Além disso, o sistema é estável como pode ser visto no mapeamento dos polos do sistema em malha fechada na condição nominal na Fig. 4.10 e para os vértices do politopo na Fig. 4.11. O sinal de controle no domínio do tempo é apresentado nas Fig. 4.12 e 4.13, para o sistema nominal e para os vértices do politopo, respectivamente.

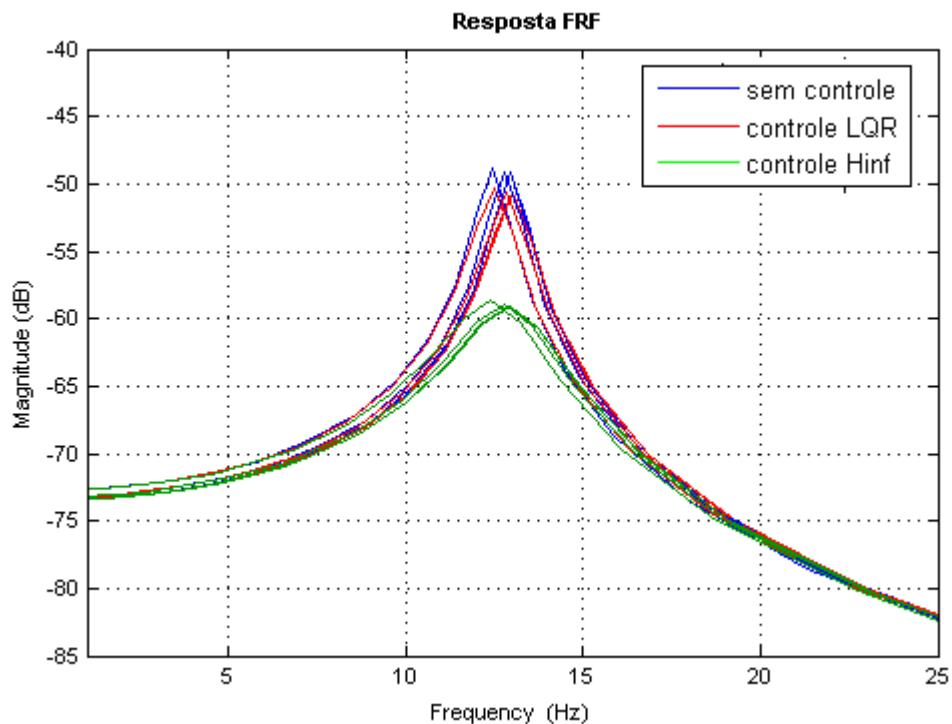


Figura 4.7: FRF para os quatros vértices do politopo do sistema incerto (ampliação do primeiro pico da FRF): H_∞ e LQR.

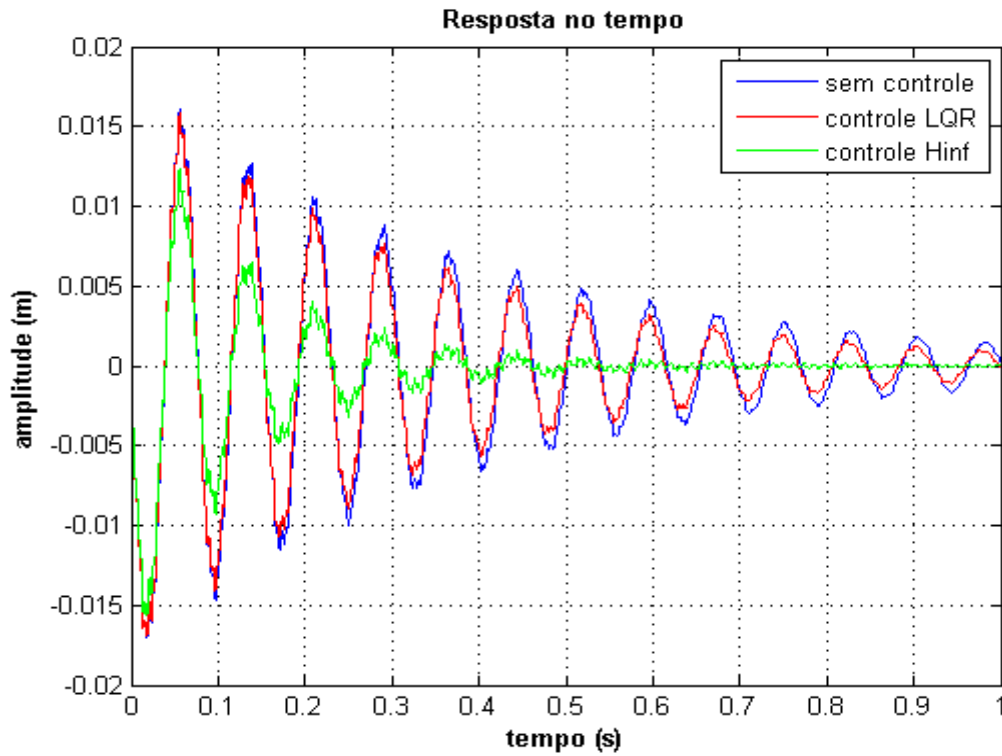


Figura 4.8: Sinal de resposta no tempo para condição nominal: H_∞ e LQR.

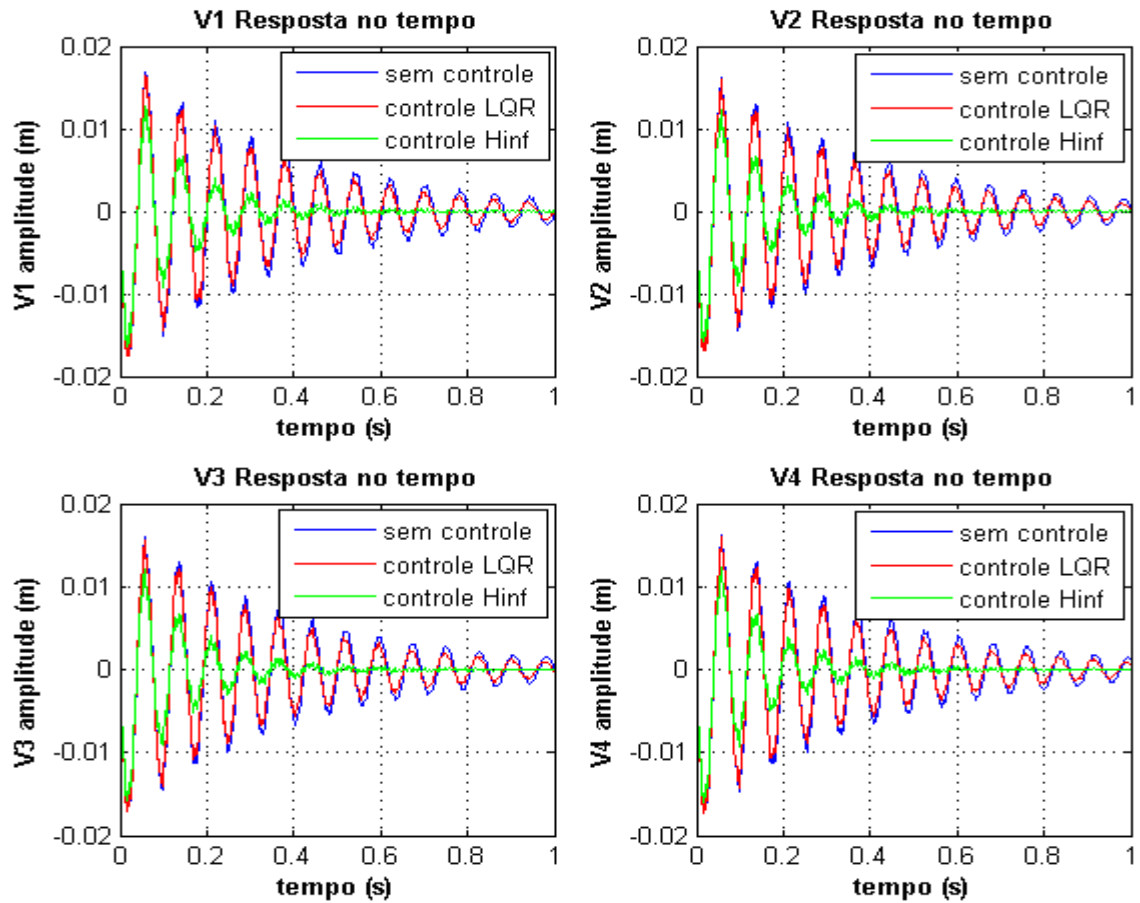


Figura 4.9: Sinal de resposta no tempo, vértices: V1, V2, V3, V4.

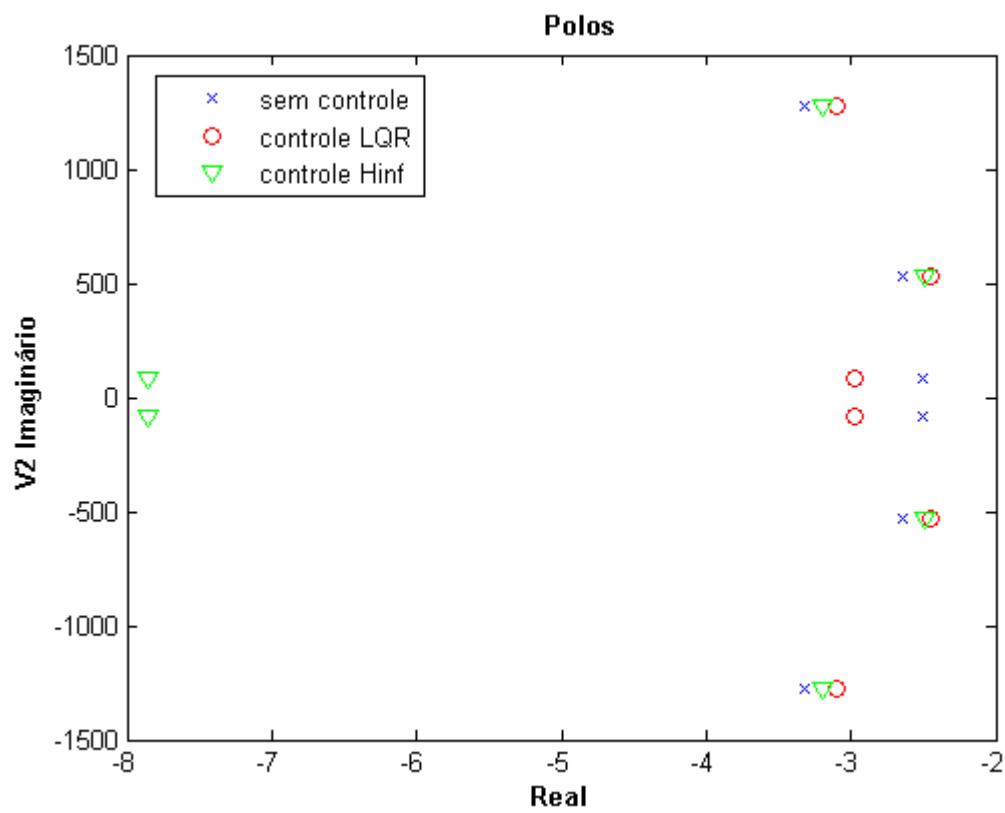


Figura 4.10: Polos do sistema nominal.

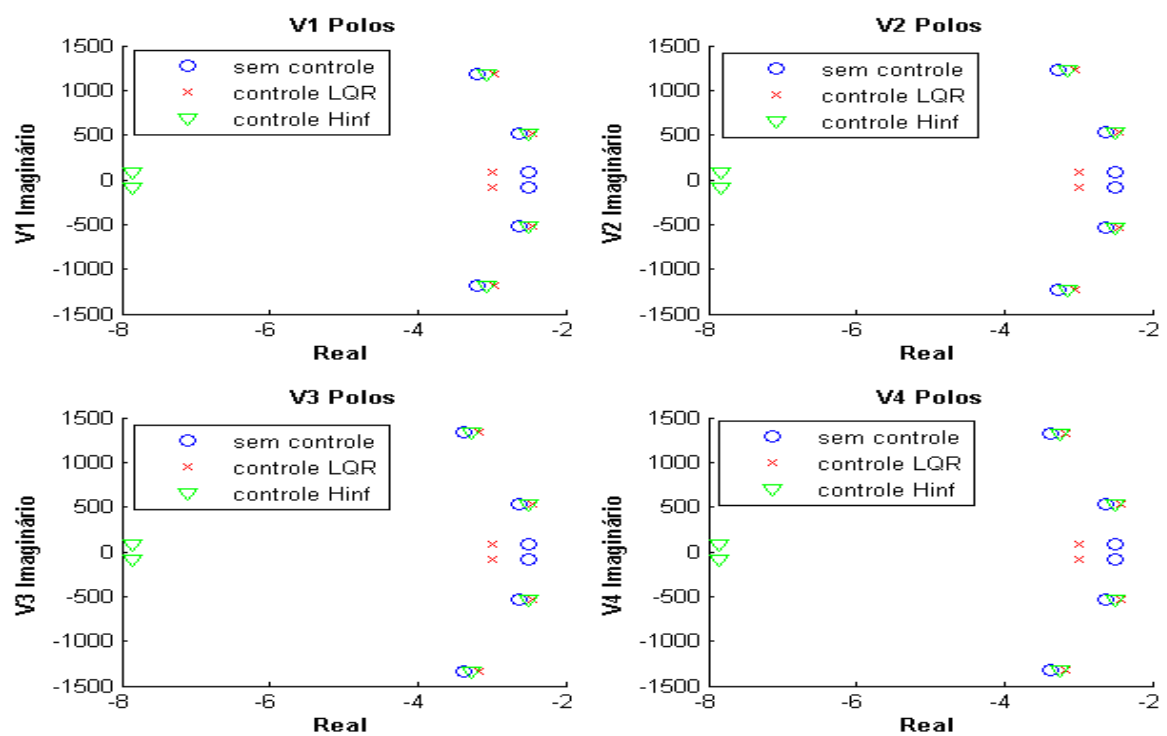


Figura 4.11: Polos dos vértices do politopo: V1, V2, V3, V4.

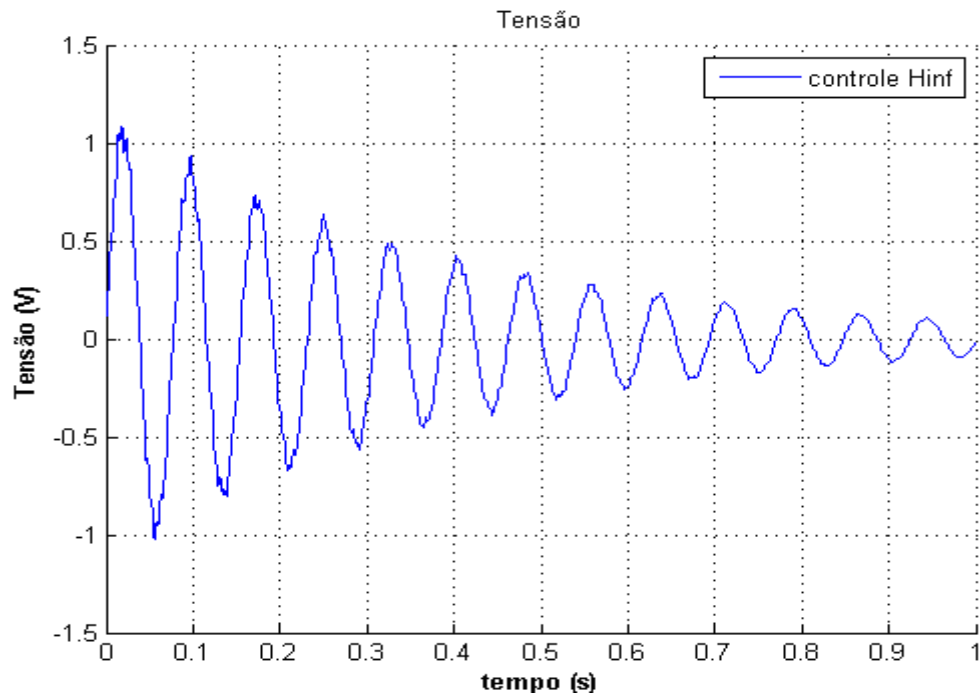


Figura 4.12: Sinal de controle para condição nominal: H_{∞} .

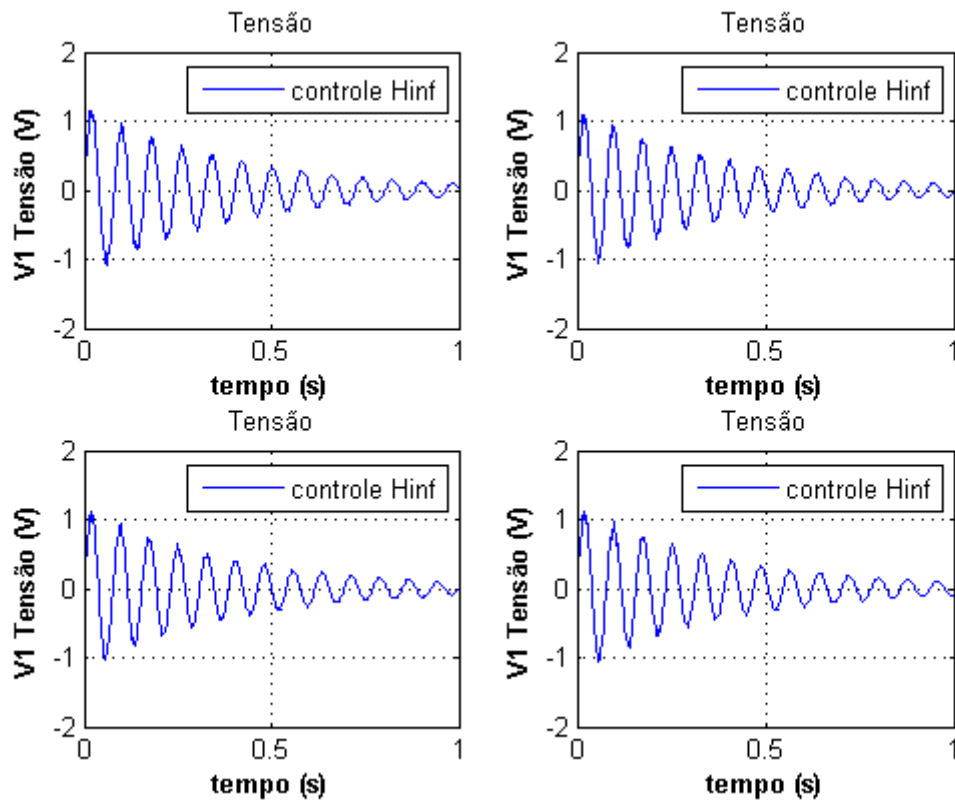


Figura 4.13: Sinal de controle para cada vértice na ordem: V1, V2, V3, V4.

4.2.2 Modelo com incertezas na rigidez do engaste

Outra grande fonte de incertezas frequentemente presente no tipo de sistema aqui estudado é a rigidez do engastamento. Com efeito, é amplamente reconhecido que condições de engastamento ideais raramente podem ser reproduzidas experimentalmente. Normalmente, os modelos consideram esse engaste totalmente rígido, mas na prática, essa rigidez não é garantida, e para tentar emular essa incerteza foi considerada uma variação de 30% na rigidez do elemento finito que está ligado ao engaste. O sistema nominal é o mesmo apresentado no item anterior e as FRF do sistema com a variação de rigidez são apresentadas na Fig. 4.14.

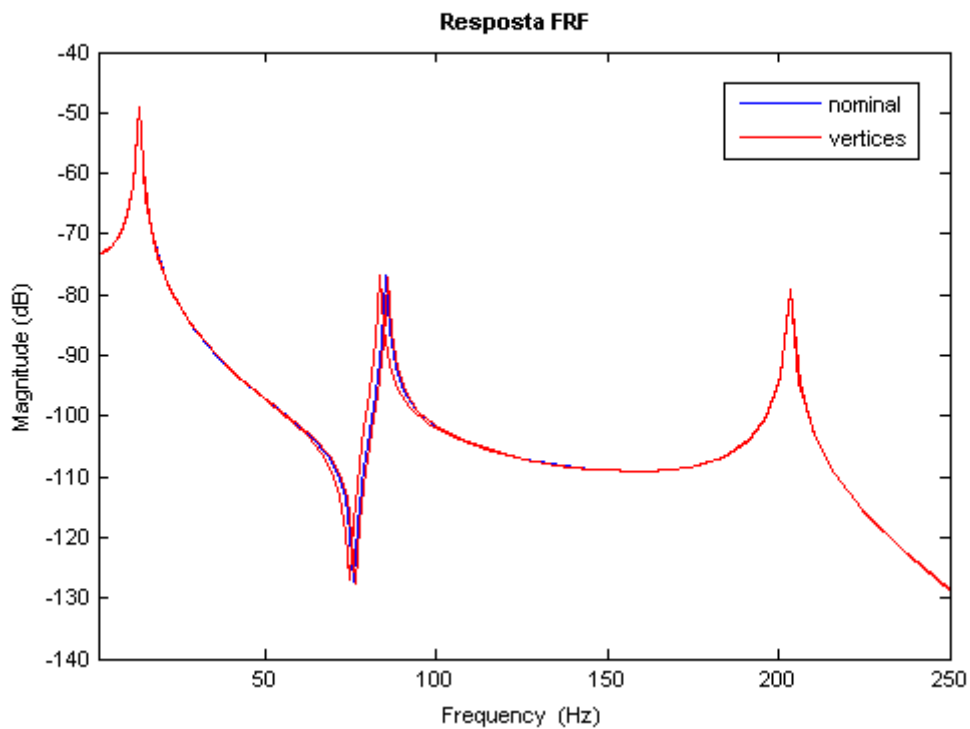


Figura 4.14: Família de plantas a serem usadas.

De maneira análoga ao item estudo numérico anterior, foram implementados os controladores H_∞ e LQR, via LMI, com realimentação de estados estimados por um observador dinâmico. Os ganhos dos controladores são mostrados abaixo e as FRF são apresentadas na Fig. 4.15. Já na Fig. 4.16, são mostradas as FRF para cada extremo do sistema incerto.

$$K_{LQR} = [-5.4120 \quad 17.2618]$$

$$K_{H_\infty} = [-11.6476 \quad 21.0567]$$

Neste caso, a diferença de desempenho entre o controlador H_∞ e LQR não foi tão notável quanto no caso anterior, mas, novamente, o controle H_∞ apresentou um desempenho um pouco melhor, com redução de aproximadamente 15 dB e 13 dB para o controle H_∞ e LQR, respectivamente. Nesse caso, também ocorreu um pequeno aumento na amplitude do segundo modo, mas, assim como no caso anterior, ele teve pouca influência no desempenho do sistema, como pode ser visto na resposta no tempo, apresentadas nas Fig. 4.17 e 4.18, e nos mapeamentos dos polos apresentados na Fig. 4.19 e 4.20. O sinal do controlador no domínio do tempo é apresentado nas Fig. 4.21 e 4.22.

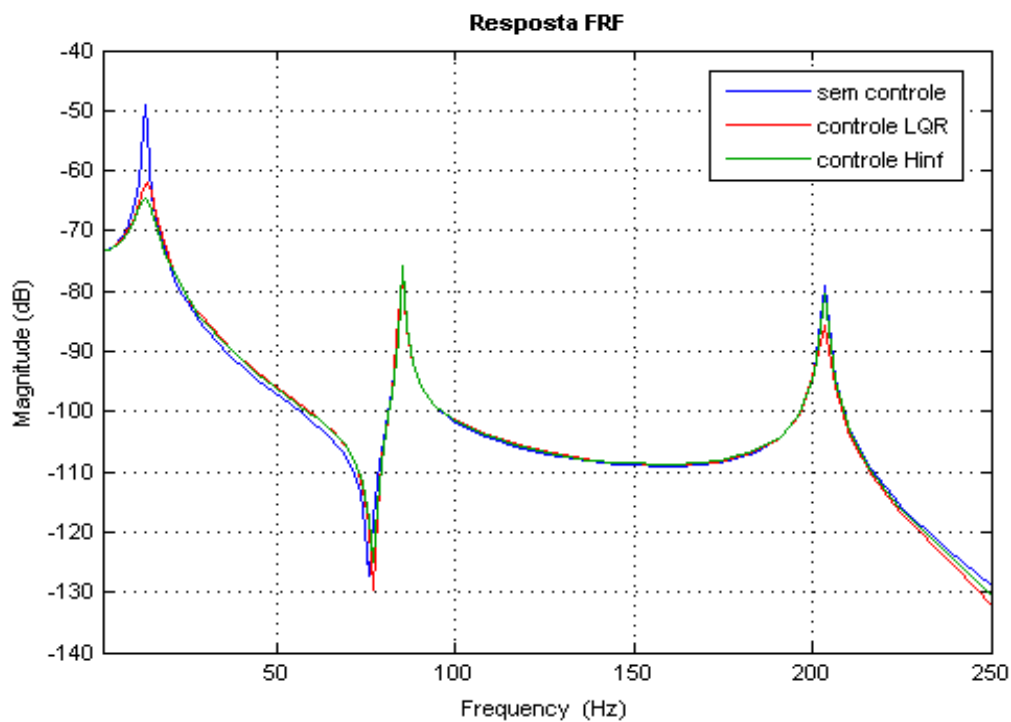


Figura 4.15: FRF para os sistemas sem incertezas com malha aberta e os dois de malha fechada: H_∞ e LQR.

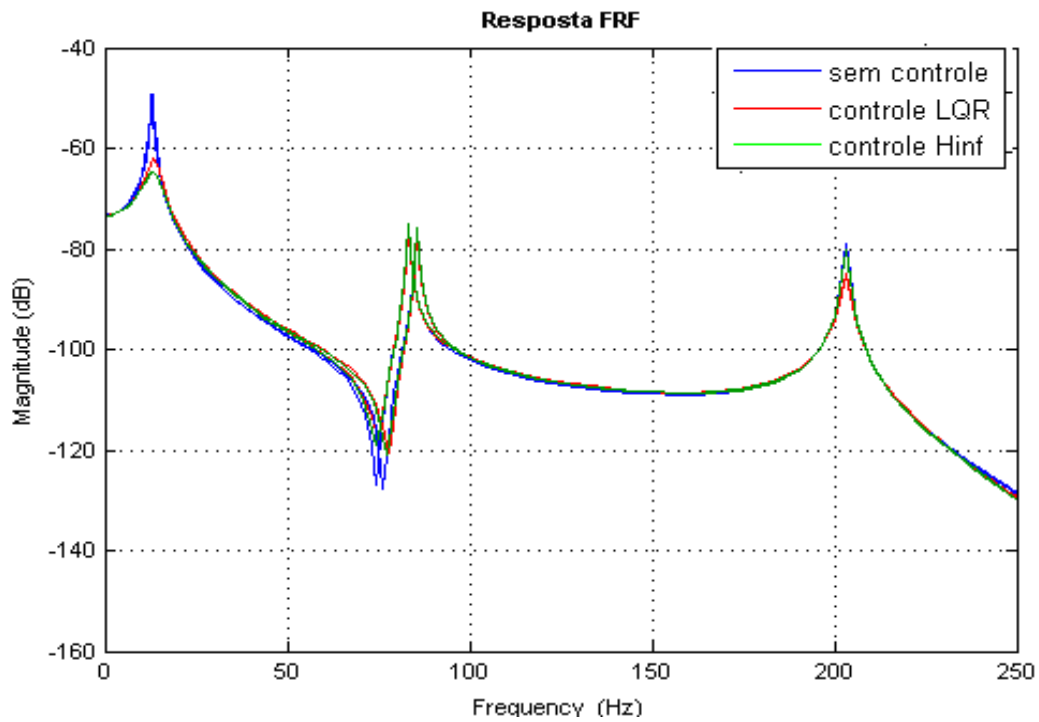


Figura 4.16: FRF para os dois extremos do sistema incerto: H_∞ e LQR

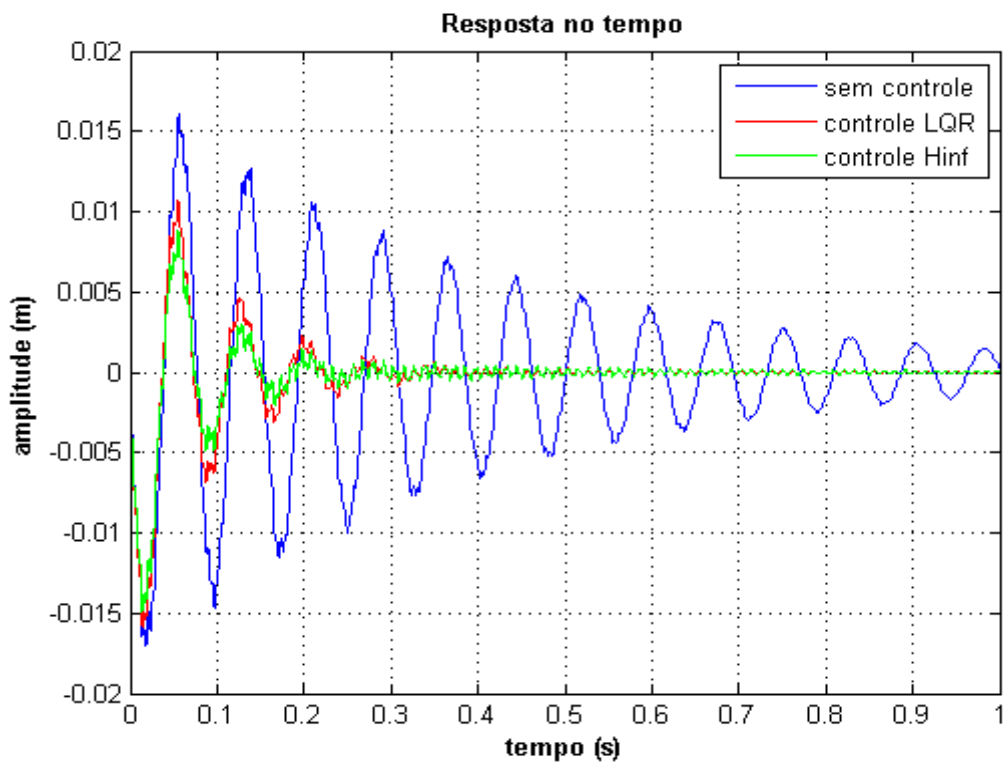


Figura 4.17: Sinal de resposta no tempo para condição nominal: H_∞ e LQR.

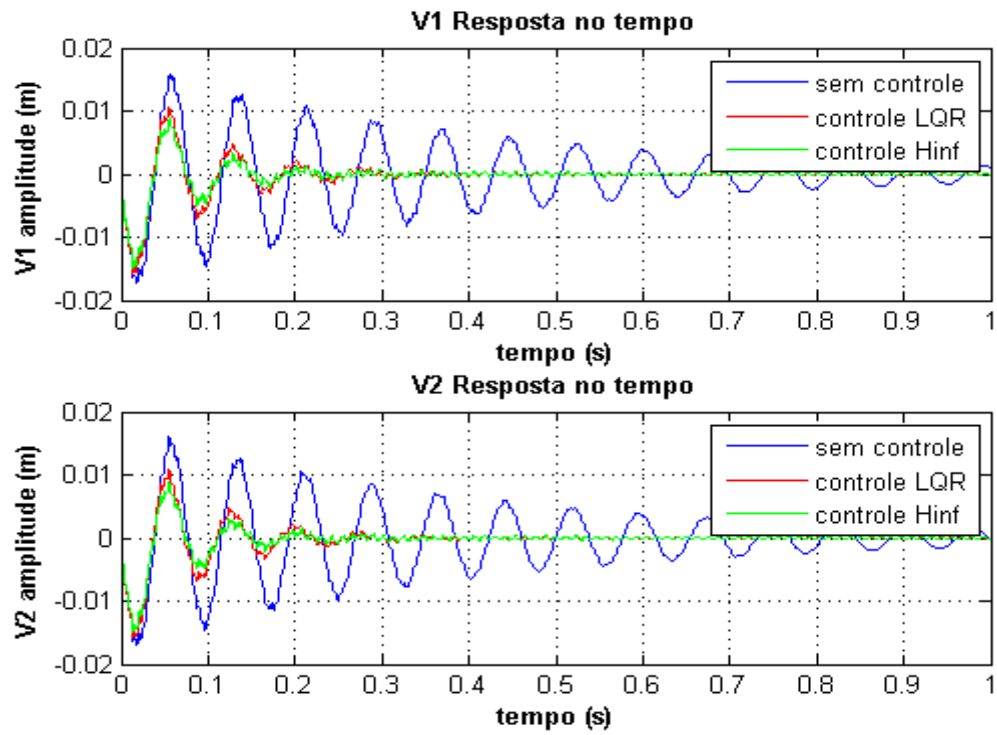


Figura 4.18: Sinal de resposta no tempo para cada extremo do sistema.

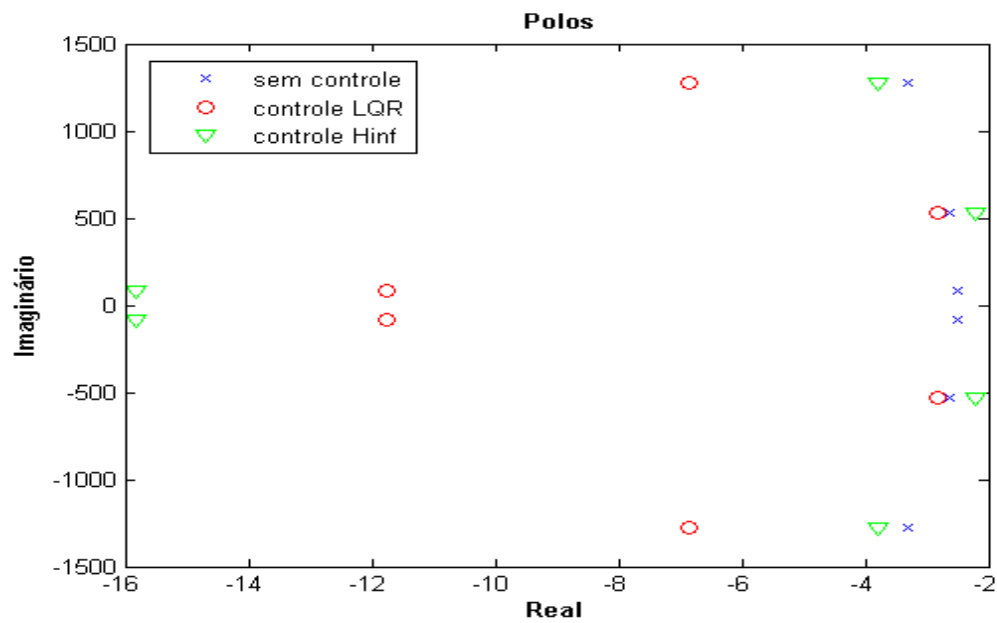


Figura 4.19: Polos do sistema nominal.

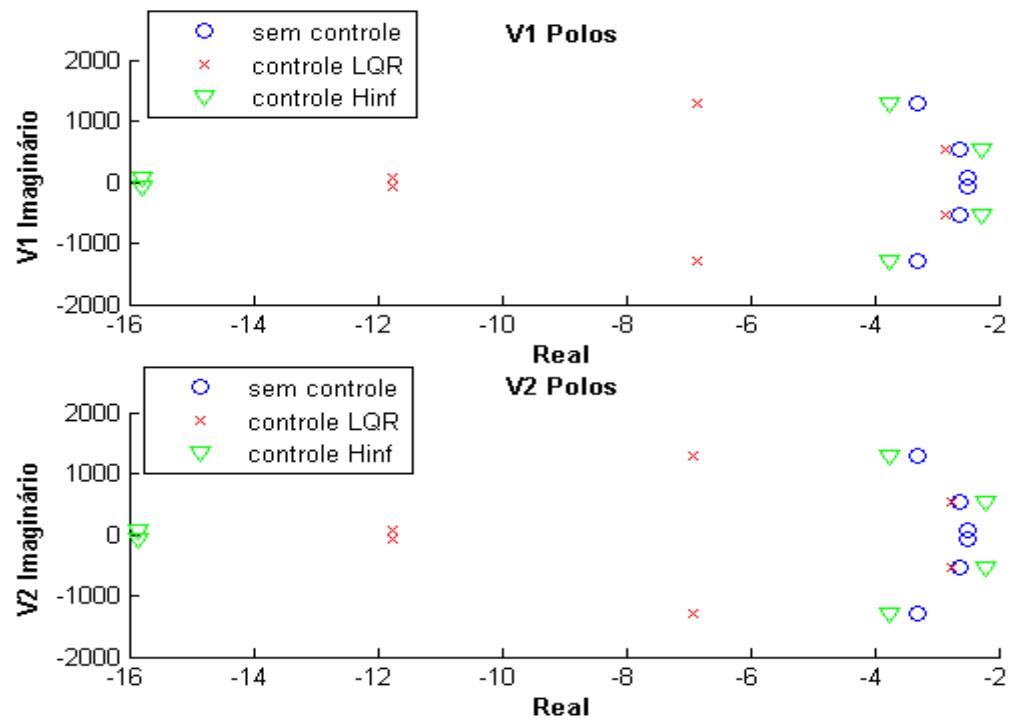


Figura 4.20: Polos dos extremos do sistema incerto.

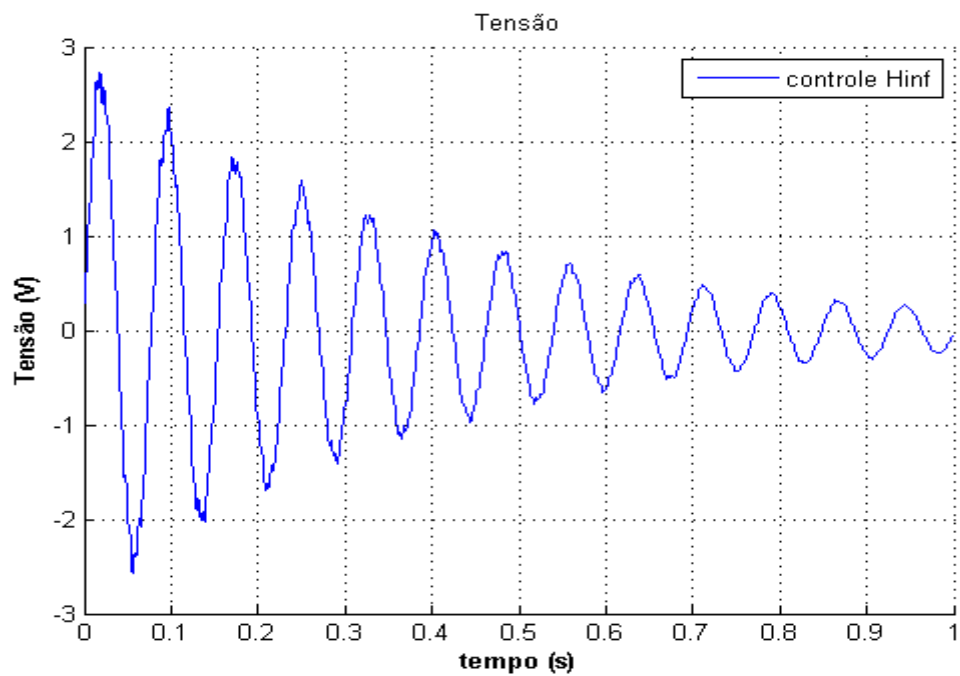


Figura 4.21: Sinal de controle para condição nominal: H_∞ .

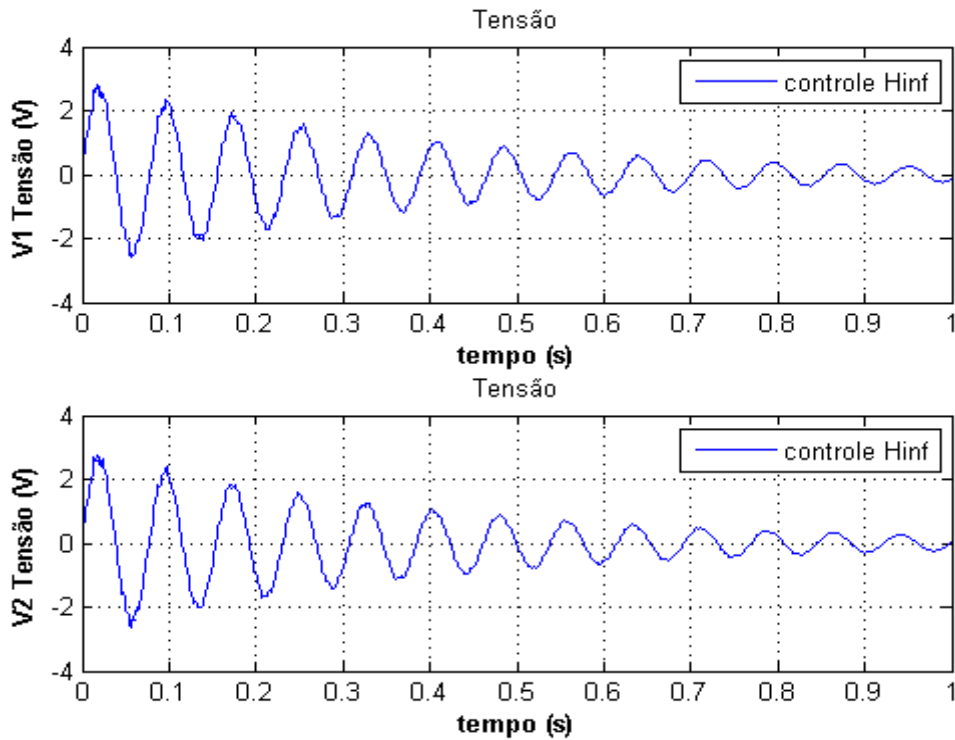


Figura 4.22: Sinal de controle para os extremos do sistema incerto.

4.3 Análise dos Resultados

Inicialmente, a comparação entre o sistema completo e o modelo reduzido mostra que o modelo reduzido representa adequadamente na faixa de frequência até a terceira frequência, possibilitando uma análise coerente dos controladores.

É possível perceber que os controladores conseguiram alcançar desempenhos satisfatórios para todos os casos estudados, com a redução das amplitudes do primeiro modo e mantendo o sistema estável, atenuando consideravelmente o sinal em menos de 0,5 segundos, com exceção do controlador LQR para caso de incertezas nas direções das camadas que apresentou um desempenho baixo.

Como já foi mostrado nesse capítulo, o controlador LQR teve um desempenho melhor que o H_∞ para o sistema sem incertezas (20dB do LQR contra 16dB do H_∞), mas o controlador H_∞ apresentou desempenho melhor em frente às incertezas, indicando que o controlador H_∞ é mais robusto (10 dB para o caso com incertezas nas direções das camadas e 15 dB para o caso com incertezas na rigidez do engaste, usando controlador H_∞ , contra 4 dB e 13 dB para o controlador LQR).

Também é interessante ressaltar que a ordem de grandeza do sinal de controle apresentados são aceitáveis, mostrando que a utilização dessas metodologias em experimentos são é, em primeira análise, possível. Outro ponto que é interessante ressaltar é que se tentou implementar os controladores citados para o caso em que as duas incertezas estudadas fossem consideradas no mesmo sistema, entretanto esse caso se mostrou demasiado complexo e resultando em um sistema infactível durante a resolução dasLMIs.

CAPÍTULO V

Conclusões e Sugestões Para Trabalhos Futuros

5.1 Conclusões

Na presente dissertação foram empregadas as técnicas de controle H_∞ e LQR, ambas através de realimentação de estados estimados por observadores, modeladas por LMI com a inclusão de incertezas do tipo politópicas (nas direções das camadas e na rigidez do engaste).

A abordagem por desigualdades matriciais lineares para modelar as incertezas se mostrou uma metodologia de fácil implementação computacional e, apesar do conservadorismo inerente da utilização da abordagem por incertezas politópicas projetadas com estabilidade quadrática, essa apresenta resultados satisfatórios, sendo uma alternativa viável para as técnicas convencionais da abordagem de incertezas.

Quando se considera o desempenho dos controladores para o caso nominal (sem incertezas), o controlador LQR apresentou um desempenho melhor que o controlador H_∞ ; entretanto, quando os sistemas com incertezas foram examinados, o controlador H_∞ apresentou um desempenho superior ao do LQR, sendo um indício de que o controlador H_∞ se apresenta como mais robusto.

Por fim, destaca-se que a inclusão de incertezas torna o sistema de controle mais realista, em especial para o caso de materiais compósitos que apresentam uma gama maior de parâmetros que podem ser alterados, em comparação com materiais convencionais e, assim, causar maiores erros na operação prática dos sistemas controlados. Também se

destaca que o desempenho dos controladores pode sofrer alteração quando aplicados a sistemas incertos.

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

Esse trabalho possibilitou o desenvolvimento profissional e pessoal do autor e abre perspectivas de novos trabalhos:

- Realização de experimentos para validação dos resultados;
- Utilização de técnicas de otimização para posicionamento dos atuadores piezelétricos ao longo da superfície e ao longo das camadas do compósito;
- Utilização de outras formas de modelagem de incertezas, além da inclusão de outros tipos de incertezas, como a influência da dinâmica residual no sistema truncado;
- Análise da influência da camada de adesivo sobre o desempenho do controlador;
- Extensão da metodologia a estruturas do tipo placas e cascas laminadas, configurações estas de maior interesse industrial, especialmente no ramo aeroespacial.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABREU, G. L. C. M. **Projeto Robusto H_{∞} Aplicado no Controle de Vibrações em Estruturas Flexíveis com Materiais Piezoelétricos Incorporados**. 2003. 299 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia

ARTERO, A. O. **Inteligência Artificial: teórica e prática**, Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2009. 230p.

ASSUNÇÃO, E.; HEMERLY E. M. **Redução de Modelos de Sistemas Dinâmicos**. 9º Congresso Brasileiro de Automática, Vitória, ES, Brasil, v.1, p159-164, 1992.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAM, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, 1994.

BUENO, D. D. **Controle Ativo de Vibrações e Localização Ótima de Sensores e Atuadores Piezoelétricos**. 2007. 230p. Dissertação de Mestrado (Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira.

CANAHUIRE CABELLO, R. V. **Controle H_{∞} de Vibrações com Restrições no Esforço de Controle**. 2009. 128p. Dissertação de Mestrado (Engenharia Mecânica). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

CARDIM, R. **Projeto de controladores baseados em LMIs : realimentação derivativa e sistemas chaveados utilizando estrutura variável**. 2009. 120p. Tese de Doutorado (Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira.

CHEE, C.; TONG L.; STEVEN, G. **A mixed model for adaptive composite plates with piezoelectric for anisotropic actuation.** Computers & Structures, v. 77, n. 3, p. 253-268. 2000.

CHEN, N.; GUI, W. **Robust decentralized control of multi-channel systems with norm-bounded parametric uncertainties.** Journal of Systems Engineering and Electronics, v. 18, p. 871- 878. 2007.

CHEN, X.; YANG, T.; WANG, W.; YAO, X. **Vibration energy harvesting with a clamped piezoelectric circular diaphragm.** Ceramics International v. 38, n. 1, p. 271–S274. 2011

CHOPRA, I. **Review of State of Art of Smart Stuctures and Integrated Systems.** AIAA Journal, v. 40, p. 2145-2187. 2002.

CRAWLEY, E.F.; DE LUIS, J. **Use of Piezoelectric actuators as Elements of Intelligent Structures.** AIAA Journal, v. 25, p.1373-1385. 1987.

DOSCH, J.; LEO, D.J.; INMAN, D.J. **Modeling and Control for Vibration Suppression of a Flexible Active Structure.** Journal of Guidance Control and Dynamics, v. 18, p. 340-346. 1995.

ERKUS, B.; LEE, Y.J., **Linear Matrix Inequalities and Matlab LMI Toolbox.** University of Southern California Group Meeting Report, Los Angeles, California. 2004.

FARIA, A. W. **Modelagem por elementos finitos de placas compostas dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos: implementação computacional e avaliação numérica.** 2006, 152p. Dissertação de mestrado. Faculdade de engenharia mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, MG.

GAINO, R., **Controle de Movimentos de Pacientes Paraplégicos Utilizando Modelos Fuzzy T-S.** 2009, 178p. Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira,

HO, W.; CHEN, S.; LIU, T.; CHOU, J. **Design and testing of an efficient and compact piezoelectric energy harvester.** Microelectronics Journal, v. 42, n, 2, p. 265–270. 2011

IKEDA, T. **FUNDAMENTALS OF PIEZOELECTRICITY**. Oxford – Inglaterra: Oxford University Press, 1996.

JIANG, J. -P; LI, D. -X. **Decentralized Robust Vibration Control of Smart Structures with Parameter Uncertainties**. Journal of Intelligent Material Systems and Structures. v.22, p 137, jan. 2011.

JOHNSON, E. A.; ERKUS, B. **Dissipativity and performance analysis of smart dampers via LMI synthesis**. Structural Control and Health Monitoring. v.14, p.471–496. 2006.

KAR I. N.; MIYAKURA T.; SETO K. **Bending the torsional vibration control of a flexible plate structure using H_{∞} -based robust control law**. IEEE Transactions on Control Systems Technology , v.8, p545–53. 2000.

KORLA S.; LEON R. A.; TANSEL I. N.; YENILMEZ A.; YAPICI A.; DEMETGUL M. **Design and testing of an efficient and compact piezoelectric energy harvester**. Microelectronics Journal, v. 42, p 265–270. 2011

KOROISHI, E. H.; DE MELO, G. P.; ASSUNÇÃO, E. **Design of a State Observer Using Decay Rate LMI Constraints for Fault Detection in Mechanical Systems**. Ciência & Engenharia, v. 19, n. 1, p. 12 – 21. 2010

LAUB. A. J.; M.T.; HEATH M. T.; PAIGE C. C.; WARD R. C. **Computation of Systems Balancing Transformation and Other Applications of Simultaneous Diagonalization Algorithms**, IEEE Transactions on Automatic Control, v AC-32, n 2, 1987.

LEO, DONALD J. **Engineering analysis of smart material systems**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007.

LI, F. M . **Active aeroelastic flutter suppression of a supersonic plate with piezoelectric material**. International Journal of Engineering Science. V. 51, p. 190–203. 2012

LI P.; CHENG L.; LI Y. Y.; CHEN N. **Robust control of a vibrating plate using μ -synthesis approach**. Thin-Walled Structures. v. 41, p. 937-986. 2003

LIMA, A. M. G.; FARIA, A. W.; RADE, D. A. **Sensitivity analysis of frequency response functions of composite sandwich plates containing viscoelastic layers**. Composites Structures, p. 364-376, 2010.

MANBACHI, A.; COBBOLD, R. S. C. **Development and application of piezoelectric materials for ultrasound generation and detection**. Ultrasound, v. 19 p 187-196. Nov. 2011.

MEIROVITCH, L. **Principles and Techniques of Vibrations**. New Jersey: Prentice-Hall, 2000

MEIROVITCH, L. **Dynamics and Control of Structures**. New Jersey: John Wiley & Sons, 1989.

MAZONI, A. F. 2007. 145p. **Estudo de técnicas de controle H^∞ para estruturas flexíveis com incertezas**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.

Ogata, K. **Engenharia de Controle Moderno**, 4ª Ed., Prentice Hall, São Paulo, 788p. 2003.

OLIVEIRA, V.A.; ARRIFANO, N.S.D. **Controle de Sistemas Incertos**. Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle, APLICON. USP – São Carlos – SP, 2001.

PALHARES, R. M. **Filtragem Robusta: Uma Abordagem por Desigualdades Matriciais Lineares**. 1998. Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, SP.

PEREIRA Jr I. P. **Caracterização Numérica e experimental do dano em materiais**. 2004, 164p. Dissertação de mestrado. Faculdade de engenharia mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, MG.

PIEFORT, V. **Finite Element Modeling of Piezoelectric Active Structures**. 2001. 126p. Tese de Doutorado - Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Bélgica.

RADE, D. A. **Apostila do Curso: Métodos dos Elementos**. Faculdade de Eng. Mecânica, UFU, 2002.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Planes: Theory and Analysis**. 2.ed. Florida: CRC PRESS, 1997

SANTOS, M. M. **Controle H-infinito em suspensões ativas aplicando técnicas baseadas em desigualdades matriciais lineares**. 2010. 214p. Dissertação de Mestrado (Engenharia Mecânica). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SÁNCHEZ-PEÑA, R. S.; E SZNAIER, M. **Robust Systems: Theory and Applications**. John Wiley and Sons, 1998.

SILVA, S. **Projeto de Controladores Robustos para Aplicações em Estruturas Inteligentes Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares**. 2005. 147p. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, UNESP - Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, SP, Brasil.

SILVA, S.; LOPES JR., V. **Active Flutter Suppression in a 2-D Airfoil Using Linear matrix Inequalities Techniques**. IN: Journal of Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2004

SKOGESTAD S.; POSTLETHWAITE I., **Multivariable Feedback Control - Analysis and Design**, John Wiley & Sons, 1996.

SODANO, H. A.; INMAN, D. J.; PARK, G. **A Review of Power Harvesting from Vibration using Piezoelectric Materials**. The Shock and Vibration Digest, V. 36, No. 3, p.197–205, 2004

SUNAR, M.; RAO, S.S. **Recent Advances in Sensing and Control of Flexible Structures via Piezoelectric Materials Technology**. Applied Mechanics Reviews, v. 52: p. 1_16. 1999.

VANANTWERP, J. G.; BRAATZ, R. D. **A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities**. JOURNAL OF PROCESS CONTROL, v. 10, p. 363-385, 2000.

ZHOU K.; DOYLE J. C., **Essentials of Robust Control**, Prentice Hall, 1998.

Apêndice I

Código para MatLab® dos controladores robustos H_∞ e LQR (via LMI)

```

nnnn=length(Bu1(1,:));
[bobo,tam]=size(Bw1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               Controle utilizando Norma Hoo
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

n=length(A1);
setlmis([]);           %Inicio da montagem das LMIs
mi=lmivar(1,[1 1]);    %Declaração que Gama e uma variavel escalar
Z=lmivar(2,[nnnn n]);  %Declaração que Z e uma matriz retangular 1 x n
W=lmivar(1,[n 1]);     %Declaração que W e uma matriz simetrica nx n

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

lmiterm([1 1 1 W],A1,1,'s');           % LMI #1: +A*W+W*A'
lmiterm([1 1 1 Z],Bu1,-1,'s');         % LMI #1: Bu*Z+Z'*Bu'
lmiterm([1 2 1 0],Bw1');               % LMI #1: Bw'
lmiterm([1 3 1 W],C1,1);                % LMI #1: C*W
lmiterm([1 3 1 Z],D1,1);                % LMI #1: DZ
lmiterm([1 2 2 0],[-eye(tam)]);         % LMI #1: 1
lmiterm([1 3 3 mi],[-1,eye(tam)]);      % LMI #1: 1*mi

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

lmiterm([11 1 1 W],A2,1,'s');           % LMI #1: A*W+W*A'
lmiterm([11 1 1 Z],Bu2,-1,'s');         % LMI #1: Bu*Z+Z'*Bu'
lmiterm([11 2 1 0],Bw2');               % LMI #1: Bw'
lmiterm([11 3 1 W],C2,1);                % LMI #1: CW
lmiterm([11 3 1 Z],D2,1);                % LMI #1: DZ
lmiterm([11 2 2 0],[-eye(tam)]);         % LMI #1: 1
lmiterm([11 3 3 mi],[-1,eye(tam)]);      % LMI #1: 1*mi

%
lmiterm([12 1 1 W],A2,1,'s');           % LMI #1: A*W+W*A'
lmiterm([12 1 1 Z],Bu2,-1,'s');         % LMI #1: Bu*Z+Z'*Bu'
lmiterm([12 2 1 0],Bw2');               % LMI #1: Bw'
lmiterm([12 3 1 W],C2,1);                % LMI #1: CW
lmiterm([12 3 1 Z],D2,1);                % LMI #1: DZ
lmiterm([12 2 2 0],[-eye(tam)]);         % LMI #1: 1
lmiterm([12 3 3 mi],[-1,eye(tam)]);      % LMI #1: 1*mi
%
```

```

lmiterm([-2 1 1 W],1,1); % LMI #2: W

lmiterm([-3 1 1 W],1,1); % LMI #1: w
lmiterm([-3 2 1 Z],1,1); % LMI #1: Z
lmiterm([-3 2 2 0],alfa^2*eye(tam)); % LMI #1: Bw'

lmicontroloo=getlmis; %Termino da montagem das LMIs

nvar1=decnabr(lmicontroloo); %Numero de variaveis de decisao das LMIs
objc1=zeros(nvar1,1); %Definindo a variavel a ser otimizada
objc1(1)=1; %Variavel de otimizacao: gama

[objcopt,xopt]=mincx(lmicontroloo,objc1);
miopt=dec2mat(lmicontroloo,xopt,mi);
Wf=dec2mat(lmicontroloo,xopt,W);
Zf=dec2mat(lmicontroloo,xopt,Z);
K_sistema_c_pole=Zf*inv(Wf); %Ganho do controlador

minHoo=sqrt(miopt); %Norma Hoo do sistema a malha fechada

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               Controle utilizando LQR/LMI
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

nn=length(A1);
Q=1000*eye(nn);
R=0.001*eye(length(Bu1(1,:)));
B=Bu1;
E=Bw1;

B2=Bu2;

B3=Bu3;

nstate=size(A1,1);

setlmis([]); % Assim se inicia todos os algoritmos via LMI

% definindo as variaveis da LMI
S=lmivar(1,[nstate,1]);
X=lmivar(2,[1,1]);
Y=lmivar(2,[size(B,2),nstate]);

%*****

% Subject function, LMI #1

```

```

lmiterm([1 1 1 S],A1,1,'s');           % LMI #1: A*S+S*A'
lmiterm([1 1 1 Y],B,-1,'s');           % LMI #1: -B*Y-Y'*B'
lmiterm([1 1 1 0],E*E');               % LMI #1: E*E'

lmiterm([11 1 1 S],A2,1,'s');           % LMI #1: A*S+S*A'
lmiterm([11 1 1 Y],B2,-1,'s');          % LMI #1: -B*Y-Y'*B'
lmiterm([11 1 1 0],E*E');               % LMI #1: E*E'

lmiterm([12 1 1 S],A3,1,'s');           % LMI #1: A*S+S*A'
lmiterm([12 1 1 Y],B3,-1,'s');          % LMI #1: -B*Y-Y'*B'
lmiterm([12 1 1 0],E*E');               % LMI #1: E*E'

%*****
% Subject function, LMI #2
lmiterm([-2 1 1 X],1,1);                 % LMI #2: X
lmiterm([-2 2 1 -Y],1,sqrt(R));          % LMI #2: Y'*sqrt(R)
lmiterm([-2 2 2 S],1,1);                 % LMI #2: S

lmiterm([-3 1 1 S],1,1);
lmiterm([-3 2 1 Y],1,1);
lmiterm([-3 2 2 0],alfa^2*eye(1));
% Create the LMI system
lmisys=getlmis;

n=decnbr(lmisys);
c=zeros(n,1);

for i=1:n;
    [Sj,Xj,Yj]=defcx(lmisys,i,S,X,Y);
    % c(i)=trace(Q*Sj)+trace(Xj)-trace(Yj*N)-trace(N'*Yj');
    c(i)=trace(Q*Sj)+trace(Xj); % Considerando sem ruído (N=0)
end

% Solving LMIs

[copt,xopt]=mincx(lmisys,c,options);

% Results
Xopt=dec2mat(lmisys,xopt,X);
Yopt=dec2mat(lmisys,xopt,Y);
Sopt=dec2mat(lmisys,xopt,S);

K_sistema_c_pole=Yopt*inv(Sopt); %Ganho do controlador

```