

ANA PAULA FERNANDES

FUNÇÕES DE GREEN: SOLUÇÕES ANALÍTICAS
APLICADAS A PROBLEMAS INVERSOS EM
CONDUÇÃO DE CALOR



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2009

ANA PAULA FERNANDES

FUNÇÕES DE GREEN: SOLUÇÕES ANALÍTICAS
APLICADAS A PROBLEMAS INVERSOS EM
CONDUÇÃO DE CALOR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Gilmar Guimarães

Uberlândia
2009

F363f Fernandes, Ana Paula, 1975-

Funções de Green: soluções analíticas aplicadas a problemas inversos em condução de calor / Ana Paula Fernandes. - 2009.
130 f. : il.

Orientador: Gilmar Guimarães.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.

1. Calor - Condução - Teses. 2. Calor - Transmissão - Teses. 3. Green, Funções de - Teses. I. Guimarães, Gilmar. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 536.2

ficha de aprovação.

À Inez.

Agradecimentos

À minha família.

Ao Sócrates.

Aos todos amigos da FEMEC, docentes, técnicos-administrativos e discentes.

Aos amigos do LTCM, Aline, Priscila e Valério.

Especialmente, ao Gilmar.

Às agências financiadoras CAPES e CNPq.

Fernandes, A. P. **Funções de Green: Soluções Analíticas Aplicadas a Problemas Inversos em Condução de Calor**. 2009. 130f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Este trabalho dedica-se à obtenção e aplicação de soluções analíticas baseadas em funções de Green (FG) em técnicas de problemas inversos. Especialmente, o estudo é voltado a problemas decorrentes de fonte de calor desconhecidas como a geração de calor devido ao atrito presentes em processos de usinagem ortogonal e, principalmente, à medição de propriedade térmicas usando técnicas de otimização e estimativas de parâmetros. A grande força do uso das FG está na possibilidade de obtenção de soluções de problemas de condução de calor dos tipos mais variados e complexos, como por exemplo, problemas tridimensionais transientes, com termos de geração de calor transientes e não uniformes e que possam ainda estar sujeitos as condições de contorno não homogêneas variando com o tempo e o espaço. Apresentam-se neste trabalho a solução analítica de vários problemas de condução de calor unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais transientes. Além do desenvolvimento destas soluções, apresentam-se também resultados em forma de gráficos permitindo um melhor entendimento físico das soluções e a sua verificação. Dois problemas de otimização são abordados através da aplicação de soluções analíticas. Um dos problemas trata da estimativa de propriedades térmicas enquanto o outro se refere ao desenvolvimento do método de observadores dinâmicos usando funções de Green. O uso das FG na estimativa de parâmetros reduziu drasticamente o tempo computacional gasto enquanto no método dos observadores introduziu maior confiança e estabilidade à técnica.

Palavras-chave: funções de Green, solução analítica, problema inverso, condução de calor

Fernandes, A. P. **Green's function: Analytical Solutions to Be Applied in Inverse Heat Conduction Problems.** 2009. 130p. Master's Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

This work presents the developing of analytical solutions based on Green's function to be applied in inverse problems techniques. Special attention is given to the problems that deals to unknown heat flux input such as the heat generation due to the friction in orthogonal machining processes or to the thermal properties measurement using optimization techniques. The great advantage of using Green's function is the ability of obtaining solutions of complex heat conduction problem that involves transient heat source or non homogenous boundary conditions as heat flux input or prescribed temperature varying with time and space. In this work, analytical solutions of one, two and three-dimensional transient heat conduction problems are presented. A practical application of using analytical solution in optimization problem is also presented. Any inverse or optimization technique has a basic and common characteristic: both of them need to solve the direct solution several times. This characteristic is the cause of the large time consumed. In heat conduction problem, the time consumed is, usually, due to the use of numerical solutions of multidimensional models with refined mesh. In this case, if analytical solutions are available the computational time can be reduced drastically. This study presents the development and application of a 3D-transient analytical solution based on Green's function to obtain thermal properties of solids materials.

Keywords: Green's function, analytical solution, inverse problem, heat conduction

Lista de Figuras

3.1	Problema térmico geral 1D-transiente sujeito à condições de contorno não homogêneas, envolvendo, fluxo calor prescrito e convecção de calor.	14
3.2	Representação gráfica do sistema de numeração (BECK <i>et al.</i> , 1992)	19
3.3	Representação gráfica das condições de contorno dos problemas $X23$; $X23Y33$ e $X23Y33Z22$	20
3.4	Problema térmico clássico: Placa sujeita a um fluxo de calor em uma superfície e isolada na superfície oposta.	20
3.5	Evolução da temperatura de uma parede, em três posições ao longo de sua espessura, sujeita a um fluxo de calor constante em $x = 0$ e isolado em $x = L$	22
3.6	Caso 1D - $X23$	23
3.7	Caso particular $X33$	26
3.8	Caso 2D - $X23Y23$	31
3.9	Geração de calor num processo de usinagem ortogonal	40
3.10	Ferramenta de usinagem de corte ortogonal submetida a fluxo de calor devido ao atrito entre peça-cavaco-ferramenta	41
3.11	Modelo térmico 3D	50
3.12	Representação gráfica dos autovalores, Eq.(3.100)	62
4.1	Casos 1D - $X22$ e $X23$	66
4.2	Comparação entre os casos $X22$ e $X23$, quando $h = 0.001 [W/m^2K]$	67
4.3	Erro entre casos $X22$ e $X23$, quando $h = 0.001 [W/m^2K]$	68
4.4	$X23$, quando $h = 1000 [W/m^2K]$	69
4.5	Problema $X33$	70
4.6	$X33$, em $x = L/2$, quando $h_1 = 10 [W/m^2K]$ e $h_2 = 20 [W/m^2K]$	70
4.7	Problema bidimensional $X22Y33$ também representado por reduções físicas unidimensionais	72
4.8	$X22Y33$, quando $h_1 = 100 [W/m^2K]$ e $h_2 = 100 [W/m^2K]$ (Dados físicos e geométricos similares aos problemas $X22$ e $Y33$)	72
4.9	Linhas isotérmicas do problema $X22Y33$, quando $h_1 = h_2 = 100 [W/m^2K]$	73
4.10	Comparação entre soluções $X22$ e $X22Y33$, $h_1 = h_2 = 0.0001 [W/m^2K]$	74
4.11	Resíduo entre soluções $X22$ e $X22Y33$, considerando $h_1 = h_2 = 0.0001 [W/m^2K]$	74
4.12	Isotérmicas para o problema $X22Y33$, considerando $h_1 = h_2 = 0.0001 [W/m^2K]$	75
4.13	comparação $X33$ $X22Y33$, $x = L/2$	75
4.14	Posições das temperaturas usadas para comparação entre as soluções analíticas	76

4.15	Resíduo entre as soluções analíticas obtidas neste trabalho e na literatura Walker & Beck (2008)	78
5.1	a) Aparato experimental. b) Esquema de montagem do elemento aquecedor resistivo em parte da amostra	81
5.2	Modelo térmico equivalente tridimensional transiente	82
5.3	Fluxo de calor imposto em uma amostra: a) forma arbitrária; b) constante para $n-1$ tempos futuros	84
5.4	Fluxo de calor estimado analítica e numericamente para uma amostra de ferro fundido	88
5.5	Resíduo entre os fluxos estimados analiticamente e numericamente pelo DPT	89
5.6	Temperaturas calculadas analítica e numericamente para uma amostra de ferro fundido a partir dos respectivos fluxo de calor estimados e apresentados na Fig.5.4	90
5.7	Resíduos entre as temperaturas calculadas analítica e numericamente para uma amostra de ferro fundido a partir dos respectivos fluxo de calor estimados e apresentados na Fig.5.4	90
5.8	Diagrama de bloco de um sistema dinâmico	93
5.9	Temperatura experimental simulada numericamente na posição 1 para fluxo de calor senoidal	99
5.10	Temperatura experimental simulada numericamente na posição 1 para fluxo de calor triangular	100
5.11	Componentes do fluxo de calor senoidal estimado e imposto	101
5.12	Resíduo do fluxo de calor senoidal estimado e imposto	101
5.13	Componentes do fluxo de calor triangular estimado e imposto	102
5.14	Resíduo do fluxo de calor triangular estimado e imposto	102
5.15	Comparação entre fluxos de calor senoidal estimado e imposto usando G_H numérica.	103
5.16	Comparação entre fluxos de calor senoidal estimado e imposto usando G_H global obtido numericamente e G_H analítico.	103
5.17	Erro entre os fluxos de calor senoidal estimado e imposto usando G_H global obtido numericamente e G_H analítico.	104
5.18	Esquema da amostra experimental e posição dos termopares.	105
5.19	Evolução da temperatura experimental para os termopares 1, 2 e 3 Tab.5.22.	106
5.20	Estimativa do fluxo de calor usando observadores dinâmicos com G_H analítica.	107
5.21	Comparação entre as temperaturas medida e estimadas	107
5.22	Diferença entre as temperaturas medida e estimadas	108
B.1	Problema auxiliar X_{22}	126

Lista de Tabelas

3.1	Tipos de condição de contorno (BECK <i>et al.</i> , 1992)	19
3.2	Comparação entre os autovalores quando $B \rightarrow 0$	64
3.3	Comparação entre os autovalores obtidos por diferentes métodos para $B=0.1$ e $B=1.0$	64
3.4	Comparação entre os autovalores obtidos por diferentes métodos para $B=10$ e $B=100$	64
4.1	Validação do problema $X23$	69
4.2	Comparação entre soluções analíticas obtidas neste trabalho e na literatura (WALKER; BECK, 2008)	77
5.1	Comparação entre valores estimados e tempo computacional gasto usando-se o DPT com as soluções numéricas e analíticas	89
5.2	Geometria e posições dos termopares simulados para os testes 1	98
5.3	Geometria e posições dos termopares simulados para os testes 2	105

Lista de Símbolos

α	difusividade térmica $\left[\frac{m^2}{s} \right]$
α_m	autovalor
β_n	autovalor
γ_p	autovalor
τ	tempo, variável auxiliar
θ	Variável auxiliar
B_i	Número de Biot
h_i	coeficiente de transferência de calor por convecção $\left[\frac{W}{m^2} \cdot K \right]$
k_i	condutividade térmica $\left[\frac{W}{m} \cdot K \right]$
q_i	fluxo de calor $\left[\frac{W}{m^2} \right]$
S_i	superfície
T_0	Temperatura inicial
X_{ij}	Função de Green para a coordenada x
Y_{ij}	Função de Green para a coordenada y
Z_{ij}	Função de Green para a coordenada z
G	função de Green
L	comprimento em x $[m]$
R	comprimento em z $[m]$
T	temperatura $[K]$
t	tempo $[s]$
W	comprimento em y $[m]$

vi

x', y', z' variáveis auxiliares

x, y, z coordenadas retangulares $[m]$

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão Bibliográfica	5
2.1	Introdução	5
2.2	Literatura Clássica em Condução de Calor	5
2.3	Uma Breve Revisão de Soluções Exatas em Condução de Calor Aplicados a Engenharia	7
3	Fundamentos Teóricos	13
3.1	Introdução	13
3.1.1	Equação-solução baseada em Funções de Green	14
3.1.2	Vantagens do Método de Funções de Green	16
3.2	Sistema de Numeração	17
3.3	Descrição e solução de problemas térmicos 1D-transiente por FG	20
3.3.1	Caso particular X22	20
3.3.2	Caso Particular X23	23
3.3.3	Caso particular X33	26
3.4	Solução Geral 2D	29
3.4.1	Caso Particular X22Y33	30
3.5	Solução Geral 3D	38
3.5.1	Caso Particular X23Y33Z33 - Abordagem Analítica de um Problema de Usinagem	39
3.5.1.1	Identificação do problema térmico na ferramenta de usinagem	40
3.5.2	Caso Particular X22Y22Z22 - Aplicação a estimativas de propriedades térmicas	50
3.6	Autovalores	60
3.6.1	Autovalores para problemas do tipo X11, X12 ou X21, X22	60
3.6.2	Autovalores para problemas do tipo X13 ou X31, X23 ou X32, X33	61
4	Representação gráfica, validação física e comparações	65
4.1	Problemas térmicos 1D-transientes: X22, X23 e X33	65
4.2	Problema térmico 2D-transiente: X22Y33	71
4.3	Problema térmico 3D-transiente X22Y22Z22	76

5	Uso de Soluções Analíticas em Problemas Inversos	79
5.1	Introdução	79
5.2	Uso de Funções de Green na Obtenção de Propriedades Térmicas de Materiais Condutores	80
5.2.1	Descrição da técnica experimental para obtenção da difusividade e condutividade térmica	80
5.2.1.1	Montagem experimental	80
5.2.1.2	Modelo térmico	82
5.2.1.3	Problema inverso: obtenção do fluxo de calor adimensional $\phi(t)$	82
5.2.1.4	Obtenção da difusividade térmica, α	84
5.2.1.5	Obtenção simultânea do fluxo de calor, $q(t)$ e da condutividade térmica, k	85
5.2.1.6	Problema direto	86
5.2.2	Solução exata do modelo térmico usando funções de Green	86
5.2.3	Análise e discussão de resultados	88
5.2.3.1	Obtenção de propriedades térmicas de uma amostra de ferro fundido usando DPT e soluções analíticas	88
5.3	Uso de Soluções Analíticas no Método de Observadores Dinâmicos Baseados em Funções de Green	91
5.3.1	Descrição de Observadores Dinâmicos Baseados em Funções de Green	91
5.3.2	Obtenção analítica do modelo térmico e da função transferência, G_H	95
5.3.3	Análise e discussão de resultados	98
5.3.3.1	Caso simulado: Função de transferência analítica	98
5.3.3.2	Caso Simulado: múltiplos sensores	99
5.3.3.3	Teste experimental: Múltiplos sensores	105
6	Conclusão	109
	Referências Bibliográficas	112
A	Obtenção da equação solução em termos de funções de Green	119
B	Obtenção da forma fechada de uma das séries do problema X22	125

Capítulo 1

Introdução

A muito que a história da humanidade pode ser contada através de suas descobertas científicas. Por exemplo, a invenção da roda, o uso da energia, a revolução industrial ou a chegada do homem à lua em naves tripuladas. Cada época poderia, então, ser identificada por alguma característica importante de nossa evolução.

Uma característica marcante dos tempos atuais pode ser sem dúvida, o uso de computadores ou as grandes simulações numéricas que nos permite construir as diversas realidades virtuais a que nos acostumamos de forma bem natural. Dificilmente nos imaginamos hoje sem um computador e todo o tipo de aparato eletro-eletrônico.

Todavia, se nos atentarmos um pouco mais à essência de cada simulação numérica, de cada cálculo computacional, com certeza no depararíamos com alguma observação físico-experimental ou, em última instância, com alguma lei da natureza descrita matematicamente. Não é por acaso que a matemática e a física representam a base de todo o conhecimento e evolução do homem.

A matemática é uma forte aliada na busca da simplicidade, segurança e confiança desejáveis sempre que qualquer solução numérica ou cálculo computacional proposto não possa ser observado experimentalmente. A física por sua vez, é base importante para a explicação, descrição e previsão dos mais diversos fenômenos da natureza e suas aplicações práticas.

Da união destas duas ciências surgiu o espírito e a motivação deste trabalho.

Propõem-se aqui a obtenção e o uso de soluções matemáticas que possam descrever fenômenos físicos importantes e presentes em aplicações de engenharia, como os problemas térmicos decorrentes de algum processo de fabricação. Podem-se citar, por exemplo, problemas térmicos que surgem devido ao atrito entre duas peças (usinagem, furação, frezamento entre outros), devido a uma fonte externa de calor como na soldagem, ou na aplicação de um processo a laser. Além do estudo destes problemas, dedicam-se também atenção a pro-

blemas térmicos propriamente ditos, como a identificação de propriedades termofísicas ou a contribuição ao desenvolvimento de novas técnicas inversas como os observadores dinâmicos baseados em funções de Green. Ou seja, este trabalho tem a sua atenção voltada à solução de problemas inversos em condução de calor e que por sua natureza são definidos como problemas mal postos matematicamente. O procedimento proposto aqui é o da obtenção de soluções analíticas e seu uso direto em algoritmos numéricos já desenvolvidos e aplicados a diferentes problemas inversos em condução de calor.

A grande meta, no uso de soluções matemáticas exatas e analíticas em algoritmos de otimização é o da contribuição para obtenção de soluções mais simples, mais seguras e mais confiáveis do ponto de vista matemático, agregando aos algoritmos computacionais maior robustez, menor gasto computacional e maior confiança em suas estimativas.

Resumindo, este trabalho dedica-se à obtenção e aplicação direta de soluções analíticas, baseadas em funções de Green, em técnicas de problemas inversos voltados a aplicação de problemas térmicos presentes em engenharia. Especificamente, o estudo é voltado a problemas decorrentes de fonte de fontes de calor desconhecidas como a geração de calor devido ao atrito presentes em processos de usinagem ortogonal e, principalmente, à medição de propriedade térmicas usando técnicas de otimização e estimativas de parâmetros.

Algoritmos inversos usualmente necessitam do cálculo do problema direto várias vezes. O uso de soluções analíticas, neste caso, contribui não só para o aumento da precisão destas técnicas, como também para a redução drástica de tempo computacional. Além disso, as soluções analíticas podem ser usadas para a validação de soluções numéricas.

Neste caso, indica-se o uso do método de Funções de Green uma vez que as condições de contorno variam com o tempo, o que, descarta de imediato o método de separação de variáveis. Uma vez identificada a Função de Green, a solução da equação torna-se um simples problema de integração matemática de cada termo envolvido. Além disso, para cada termo da solução é possível a interpretação física.

Uma outra vantagem no uso de soluções integrais por FG é a possibilidade de se construir, sem dificuldades adicionais, soluções multidimensionais a partir da obtenção das funções de Green unidimensionais. Neste caso, as versões da equação-solução 2D e 3D são absolutamente equivalentes à equação unidimensional e as FG podem ser obtidas a partir de produtos de soluções 1D nas diversas direções.

A grande força do uso de Funções de Green está na possibilidade de obtenção de soluções de problemas de condução de calor dos tipos mais variados e complexos. Por exemplo, citam-se problemas tridimensionais transientes, com termos de geração de calor transientes e não uniformes e que possam ainda estar sujeitos as condições de contorno não homogêneas. Essas

não homogeneidades podem ainda variar com o tempo e o espaço. A aplicação deste potencial de solução de problemas difusivos é na realidade a grande motivação do desenvolvimento deste trabalho.

Apresenta-se no Capítulo 2, uma revisão bibliográfica, parte-se da literatura clássica em condução de calor e do uso de soluções exatas em condução de calor aplicados a engenharia. A intenção deste trabalho é obter soluções, tanto quanto possível, de problemas térmicos com grande aplicação em engenharia e que não tenham sido explorados na literatura clássica.

Observa-se que trabalho não só apresenta a formulação, o desenvolvimento e a obtenção das soluções analíticas, mas também a sua implementação computacional. Este procedimento permite assim análises dos processos físicos, segurança na sua aplicação, entendimento e o domínio completo de passos intermediários importantes. No Capítulo 3 são tratados os fundamentos teóricos das Funções de Green e suas aplicação à problemas térmicos 1D, 2D e 3D. Na sequência, no Capítulo 4, são apresentadas validações de soluções a partir da comparação com outras funções, condições de contorno e comparação com soluções numéricas.

O Capítulo 5 trata-se de duas aplicações. A primeira delas refere-se ao uso soluções analíticas para a estimativa de propriedades térmicas de amostras sólidas de geometria retangular usando o método de aquecimento parcial desenvolvido por Borges, Lima e Silva & Guimarães (2006). A segunda, refere-se ao uso direto de uma solução analítica de um modelo 2D transiente contribuindo para o desenvolvimento da técnica inversa baseada em observadores dinâmicos (SOUSA, 2006).

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Introdução

Dois objetivos norteiam o desenvolvimento deste trabalho: O primeiro busca o desenvolvimento de um material que dê suporte didático a engenheiros ou a profissionais de física ou matemática aplicada que se defrontam com problemas de difusão ou condução de calor; O segundo refere-se à aplicação direta de soluções analíticas no desenvolvimento de técnicas de problemas inversos voltados a aplicação de problemas térmicos. Especificamente a atenção é voltada à problemas térmicos decorrentes de fontes de calor desconhecidas como a geração de calor devido ao atrito presentes em processos de usinagem ortogonal e à medição de propriedade térmicas usando técnicas de otimização e estimativas de parâmetros.

2.2 Literatura Clássica em Condução de Calor

Existem na literatura trabalhos clássicos que representam a base da condução de calor ensinada nas escolas de engenharia. Citam-se os importantes trabalhos de Carslaw & Jaeger (1959) com o livro *Conduction of Heat in Solids*; Arpaci (1966) com o livro *Conduction Heat Transfer*; Özisik (1993) com o texto *Heat Conduction* e Beck *et al.* (1992) com o excelente *Heat Conduction Using Green's Function*.

O trabalho de Carslaw & Jaeger é um dos mais completos de toda a literatura no que se refere à apresentação de soluções de diversos problemas físicos relacionados com a difusão de calor. Entretanto, como a sua atenção é voltada principalmente à compilação dessas soluções, o leitor geralmente não tem acesso aos procedimentos intermediários das obtenções o que, por sua vez, dificulta bastante o seu entendimento. O trabalho de Carslaw & Jaeger pode ser considerado um tratado de soluções analíticas em problemas de difusão de calor e

eletromagnetismo.

Com uma atenção maior no desenvolvimento, tanto da formulação dos problemas físicos como das técnicas de soluções, Arpaci (1966) também apresenta soluções para vários problemas de condução de calor, entretanto, o trabalho de Arpaci tem uma forte componente física, uma vez que ele dedica boa parte de seu conteúdo à formulação dos problemas nas suas diversas possibilidades, ou seja, nas formulações: integral, diferencial e global. Embora várias técnicas de soluções sejam apresentadas, Arpaci (1966) basicamente aborda de forma mais profunda a obtenção de soluções por Separação de Variáveis, Transformadas de Laplace e Teorema de Duhamel. Soluções aproximadas também são apresentadas.

Özişik (1993) é um dos textos mais importantes na obtenção de soluções de condução de calor de problemas homogêneos encontrados na literatura. Apresenta de forma bem completa a técnica de Separação de Variáveis e é uma excelente fonte de consulta quando se busca soluções analíticas baseadas em séries de Fourier. Além da técnica de Separação de Variáveis, Özişik (1993) apresenta também o Teorema de Duhamel, Transformadas de Laplace e soluções baseadas em Funções de Green. De forma sucinta, são abordados, ainda, soluções numéricas, soluções analíticas aproximadas e uma pequena introdução a problemas inversos em condução de calor e mudança de fase.

Comparando-se superficialmente os trabalhos de Özişik (1993) e Arpaci (1966), em termos de conteúdo, percebe-se um maior interesse na abrangência das técnicas de solução apresentadas por Özişik em detrimento do desenvolvimento da formulação física do problema que é apresentada de forma direta. Do ponto de vista didático, infere-se que o trabalho de Arpaci avança mais na formulação e na abordagem de diferentes problemas físicos enquanto o de Özişik detêm-se mais detalhadamente no desenvolvimento das técnicas de solução de problemas em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.

O trabalho de Beck *et al.* (1992) apresenta, por sua vez, características didáticas interessantes, pois além de desenvolver a formulação dos problemas físicos, busca a solução de problemas mais complexos com não homogeneidades presentes tanto na equação de difusão como nas condições de contorno. Tem, portanto, as características de solução de problemas complexos como apresentados em Carslaw & Jaeger (1959), características de formulação de problemas físicos como encontrados em Arpaci (1966) e apresenta a técnicas de solução com um grande interesse didático para o seu entendimento como o buscado por Özişik (1993). A sua grande diferença em relação aos três trabalhos anteriores está na maior atenção voltada a apenas uma técnica de solução que é a baseada em Funções de Green. Beck *et al.* (1992) usam, entretanto, como base para a obtenção das funções de Green os métodos de Separação de Variáveis e o da Transformada de Laplace. Todavia, pouca atenção é dedicada ao

desenvolvimento destas técnicas.

A grande força do uso de Funções de Green está na possibilidade de obtenção de soluções de problemas de condução de calor dos tipos mais variados e complexos. Por exemplo, citam-se problemas tridimensionais transientes, com termos de geração de calor transientes e não uniformes e que possam ainda estar sujeitos as condições de contorno não homogêneas. Essas não homogeneidades podem ainda variar com o tempo e o espaço. Este potencial de solução de problemas difusivos é na realidade a grande motivação do desenvolvimento deste trabalho que, por sua vez, se baseia fundamentalmente nos trabalhos de Beck *et al.* (1992) e Özişik (1993).

A intenção aqui é a de obter soluções, tanto quanto possível, de problemas térmicos com grande aplicação em engenharia e que não tenha sido explorados na literatura clássica. Além disso, de forma diferente das referências citadas, este trabalho não só apresenta a formulação, o desenvolvimento e a obtenção das soluções analíticas, mas também a sua implementação computacional. Isto permite análises dos processos físicos, segurança na sua aplicação, entendimento e o domínio completo de passos intermediários importantes como a obtenção e implementação numérica de autovalores. A validação dessas soluções a partir da comparação com outras funções, condições de contorno e comparação com soluções numéricas também representam uma contribuição ao entendimento da condução de calor analítica em sólidos.

2.3 Uma Breve Revisão de Soluções Exatas em Condução de Calor Aplicados a Engenharia

As soluções analíticas representam uma importante ferramenta para a solução de problemas de engenharia (BECK *et al.*, 2008), uma vez que podem ser usadas para a validação de soluções aproximadas, facilitam a análise e o entendimento de problemas físicos, podem ser usadas na construção de novos algoritmos numéricos em bloco, como o método transiente de elemento superficial (BECK *et al.*, 1992) ou possuem aplicação direta em problemas reais reduzindo o custo computacional e permitindo a obtenção de soluções exatas do modelo estudado.

Exemplos de soluções analíticas desenvolvidas para a verificação ou validação de soluções aproximadas obtidas a partir de métodos numéricos, como algoritmos baseados em diferenças finitas, volumes finitos ou elementos finitos podem ser encontradas nos trabalhos de Beck *et al.* (2004), Beck *et al.* (2006) ou Macmasters *et al.*, (2002) entre outros. Em Beck *et al.*, (2004), desenvolvem-se soluções analíticas para um problema de condução térmica transiente com um

sólido em movimento. Transformações são usadas para eliminar o termo de movimento na equação da difusão. As soluções são baseadas em dois tipos de funções de Green: uma obtida do método de Laplace e a outra por separação de variáveis. O método de solução é eficiente, pois incorpora verificações internas dos resultados numéricos para casos onde o tempo é curto e longo. Condições de contorno do tipo fluxo e temperatura prescrita são estudadas. Em Beck *et al.* (2006) o objetivo principal é o de verificar soluções numéricas baseadas em diferenças finitas. Três soluções para casos transientes e permanentes são testadas em problemas bidimensionais com aquecimento parcial da superfície.

Podem-se citar, ainda, vários modelos térmicos envolvendo condução de calor, como problemas multidimensionais em paralelepípedos (BECK *et al.*, 2004), problemas bidimensionais transiente com aquecimento periódico em barras cilíndricas multicamadas (MILOSEVIC; RAYNOUD, 2004) ou sólidos com aquecimento se movendo (HAJI-SHEIKH; BECK, 2002), (MACMASTERS *et al.*, 2002), (HAJI-SHEIKH; BECK; AGONAFER, 2003) e (HAJI-SHEIKH; AMOS; BECK, 2009).

A complexidade de um modelo térmico, do ponto de vista de obtenção de soluções analíticas, normalmente encontra-se em problemas multidimensionais transientes submetidos a não homogeneidades como condições de contorno de fluxo prescrito, geração de calor ou condições de contorno como temperatura variando com o tempo. Como problemas práticos de engenharia normalmente envolvem todos estes aspectos o procedimento mais usual é o uso de hipóteses simplificativas ou a aplicação de modelos numéricos.

Um exemplo de aplicação em engenharia com forte demanda de modelo térmico pode ser dado pelos problemas térmicos decorrentes de um processo de usinagem ortogonal. A determinação da temperatura máxima e a distribuição de temperatura ao longo da interface de corte peça-ferramenta-cavaco em um processo de usinagem ortogonal é particularmente importante para o cálculo da influência na vida da ferramenta assim como na qualidade da peça usinada com conseqüente impacto no setor de produção.

Vários pesquisadores têm dedicado atenção especial à obtenção de soluções analíticas para o problema térmico decorrente de processos de usinagem ortogonal, sempre a partir do conhecimento prévio do calor gerado na interface cavaco-ferramenta ou de modelos simplificados.

Longbottom & Lanham, (2005) e Abukhshim, Mativenga & Sheikh, (2006) apresentam ótimas revisões sobre a investigação de campos térmicos em processos de usinagem, incluindo neste caso, além dos métodos numéricos e medições experimentais as contribuições em soluções analíticas. Radulescu & Kapoor (1994), por exemplo, apresentam um modelo tridimensional analítico da ferramenta de corte e do cavaco para determinar os campos de temperatura

durante a usinagem com corte interrompido e corte contínuo a partir da simulação de uma fonte de calor conhecida. Todavia, na modelagem da ferramenta, as condições de contorno são simplificadas desprezando-se os efeitos convectivos e de resistência de contato. Além disso, na modelagem do cavaco a formulação só é válida para o regime quase permanente.

Tay (1993) apresenta uma revisão sobre métodos analíticos para a determinação da temperatura durante o processo de torneamento. Na formulação do problema térmico são adotados modelos com fonte de calor móvel e modelos semi-analíticos. Ambas as técnicas fornecem valores médios da temperatura no cavaco e ferramenta de corte a partir uma fonte de calor pré-definida por meio de cálculos envolvendo a força de atrito, velocidade de corte e a área de contato cavaco-ferramenta. A maioria dos modelos térmicos para predição de temperaturas em usinagem usa o método baseado em princípios válidos apenas para dois corpos em movimento relativo, ou seja, somente na interface de corte, desprezando todos os efeitos térmicos adjacentes entre a peça, ferramenta e cavaco. A maioria dos modelos também assumem condições em regime permanente, como no trabalho de Trigger & Chao (1951), Loewen & Shaw (1954) e Venuvinod & Lau, (1986). De forma diferente, Stephenson, Jen & Lavine (1997) desenvolveram um modelo térmico para o cálculo de temperaturas em ferramentas sob condições transientes. Entretanto, para a obtenção da solução, Stephenson, Jen & Lavine (1997) aplicam algumas hipóteses simplificativas como condições de isolamento nas faces expostas a ar.

Observa-se que a distribuição de temperatura na ferramenta de corte é fortemente dependente de várias variáveis, como, as propriedades térmicas ferramenta, da quantidade de calor perdida por radiação e convecção e pelas condições e características de usinagem, tanto da peça a ser usinada como da própria ferramenta.

Um modelo térmico adequado a este tipo de problema, certamente deve considerar as características multidimensionais, transientes e levar em consideração as condições de contorno estabelecidas pela ação de fluidos de corte e meio ambiente (convecção) e a geração de calor por atrito na interface peça/ferramenta. Como já mencionado, a construção de um modelo analítico com estas características é uma das motivações deste trabalho.

Outra aplicação importante é o uso de soluções analíticas em problemas inversos ou problemas de otimização como na estimativa de propriedades térmicas. Observa-se que neste caso, os algoritmos inversos usualmente necessitam do cálculo do problema direto várias vezes. O uso de soluções analíticas, neste caso, contribui não só para o aumento da precisão destas técnicas, mas também para a redução drástica de seu tempo computacional.

A maioria das técnicas experimentais que determinam propriedades térmicas usa soluções analíticas. Podem-se citar, por exemplo, as técnicas clássicas para a medição de pro-

priedades como o método flash (PARKER *et al.*, 1961) e suas variações (DEGIOVANNI, 1988), (SRAMKOVA; LOG, 1995), (THERMITUS; LAURENT, 1997), (ALBERS *et al.*, 2001), (MAILLET; MOYNE; REAMY, 2000), para a estimativa da difusividade térmica o método do fio quente proposto por Blackwell, (1954) e aplicado por diversos autores para a estimativa da condutividade térmica de sólidos (GRAZZINI; BALOCCO; LUCIA, 1996), (GROSS; LE-THANH-SON, 2004), (ABU-HAMDEH; KHAIR; REEDER, 2001), (XIE *et al.*, 2006), (COQUARD; BAILLIS; QUENARD, 2006). Podem-se citar ainda vários trabalhos que utilizam soluções analíticas para a estimativa de propriedades como Guimarães, Philippi & Thery, (1995), Nicolau, Güths & Silva, (2002) e Lima e Silva, Ong & Guimarães, (2003). Entretanto, todas estas técnicas são aplicadas à medição de propriedades térmicas de materiais não condutores a partir de modelos térmicos unidimensionais.

A hipótese de um modelo unidimensional normalmente é garantida por um valor alto da razão geométrica (área/espessura). Neste caso, o gradiente térmico necessário à obtenção das propriedades térmicas é obtido na direção do fluxo de calor imposto. Este procedimento, por sua vez, encontra dificuldade de aplicação em materiais condutores devido à baixa sensibilidade das propriedades térmicas em relação à variação de temperatura na direção do fluxo, exigindo-se equipamentos muito potentes ou amostras de grandes espessuras. (BORGES; LIMA E SILVA; GUIMARÃES, 2006).

A limitação quanto a investigação de amostras finas ou materiais condutores representa um dos motivos da tendência de se buscar modelos térmicos mais complexos que se aproximem mais das condições reais de um experimento e que, por isso mesmo, permitam o desenvolvimento de projetos experimentais mais simples, menos onerosos e com uma maior flexibilidade em relação à geometria das amostras. Assim modelos multidimensionais com soluções numéricas tem sido introduzidos e incorporados à técnicas experimentais como no trabalhos de Dowding, Beck & Blackwell, (1996), Aviles-Ramos *et al.*, (2001), Murphy *et al.*, (2005) e Borges, Lima e Silva & Guimarães, (2006).

A técnica desenvolvida por Borges, Lima e Silva & Guimarães (2006) baseia-se na metodologia do aquecimento parcial e na construção de um algoritmo numérico eficiente, o DPT, e que entre outras atribuições, possui uma alta capacidade de adaptação e solução de modelos térmicos complexos. Por exemplo, o algoritmo possibilita a medição de propriedades térmicas a partir de modelo tridimensional transiente e com condições de contorno transientes como fluxo de calor imposto variando com o tempo e o espaço. Esta técnica é do ponto de vista de otimização bastante robusta e competitiva em termos de faixa de aplicação (materiais condutores e não condutores) de geometria (amostras em forma de disco, retangulares e irregulares). A incorporação de soluções analíticas e exatas com características multidi-

mensionais e de não homogeneidades temporais e espaciais no DPT representa, assim, uma grande contribuição no sentido de diminuição efetiva do tempo computacional, de estabilidade numérica e de estimativas mais precisas sem, contudo onerar o projeto experimental. Esta aplicação é apresentada no Capítulo 5.

Apresenta-se a seguir o desenvolvimento de soluções analíticas de vários modelos térmicos 1D, 2D e 3D transientes. Os modelos térmicos desenvolvidos têm sempre a motivação do ganho de conhecimento físico, do uso em validações de modelos numéricos e da possibilidade de aplicação na modelagem térmica de uma ferramenta de corte ortogonal ou em técnicas de estimativas de propriedades térmicas.

Capítulo 3

Fundamentos Teóricos

3.1 Introdução

Apresenta-se, inicialmente, a equação-solução de um problema de condução de calor baseada em funções de Green (FG) através da abordagem de um problema geral de condução de calor unidimensional transiente com geração de calor variando com espaço e tempo e sujeito a condições de contorno não homogêneas. Embora este problema geral não seja resolvido integralmente (apenas a equação-solução é apresentada), vários aspectos físicos, matemáticos e as principais características das soluções por FG são discutidos. Resolve-se a seguir, para exemplificar, um problema particular clássico cujas características térmicas são descritas pelo problema geral.

Nas seções seguintes, vários problemas térmicos são, então, propostos e resolvidos, sempre em ordem crescente de dificuldade, ou seja, problemas uni, bi e tridimensionais transientes. Várias combinações entre as condições de contorno são analisadas para obter-se uma maior generalização das soluções encontradas.

Conclui-se o capítulo apresentando-se as obtenções matemáticas dos autovalores necessários para cada tipo de solução. O grande interesse na apresentação de soluções por funções de Green seguindo certa ordem de dificuldade é o de permitir, a princípio, uma maior familiaridade com os conceitos matemáticos inerentes a essas funções juntamente com o auxílio à percepção de seu poder de solução. Por se tratar de um conceito fundamental e clássico, muitos detalhes matemáticos são omitidos neste trabalho deixando, ao interessado, a consulta aos trabalhos de Beck *et al.*, (1992) e Özişik (1993). Entretanto, para uma maior completude deste trabalho, algumas propriedades importante das FG, suas interpretações físicas e uma demonstração da obtenção matemática da equação-solução para um problema térmico geral unidimensional transiente são apresentadas no Anexo A.

3.1.1 Equação-solução baseada em Funções de Green

Considere uma placa de grandes dimensões, inicialmente a uma temperatura $T(x, 0) = F(x)$ sendo subitamente submetida a um meio convectivo e um fluxo de calor radiante em suas duas superfícies. A Figura 3.1 representa esquematicamente este problema. A parede é também sujeita à geração de calor interna, não uniforme $g(x, t)$. Admite-se, neste caso, que todos os termos não homogêneos possam variar com o tempo.

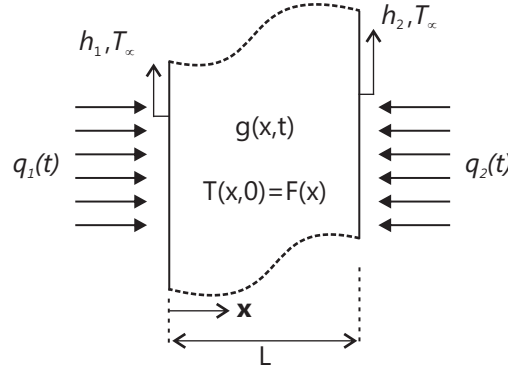


Figura 3.1: Problema térmico geral 1D-transiente sujeito à condições de contorno não homogêneas, envolvendo, fluxo calor prescrito e convecção de calor.

O problema representado pela Figura 3.1 pode ser descrito pela equação da difusão de calor como sendo:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{k} g(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (3.1a)$$

Sujeito às condições de contorno, em $x=0$

$$k_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} + h_1 T(0, t) = f_1(t) = -(q_1(t) + h_1 T_\infty) \quad (3.1b)$$

em $x=L$

$$k_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} + h_2 T(L, t) = f_2(t) = q_2(t) + h_2 T_\infty \quad (3.1c)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = F(x) \quad (3.1d)$$

Observa-se que o problema (3.1) envolve os três tipos de condições de contorno não

homogêneos possíveis em um problema de condução de calor clássico. Por exemplo, obtém-se na face esquerda, a condição de fluxo de calor prescrito fazendo $h_1 = 0$; a condição de convecção fazendo $q_1 = 0$ e; a condição de temperatura prescrita considerando $k_1 = 0$.

A equação-solução integral baseada em funções de Green para o problema (3.1) pode ser escrita como (BECK *et al.*, 1992)

$$\begin{aligned}
 T(x, t) = & \int_{x'=0}^L G(x, t|x', 0) F(x') dx' \\
 & + \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L G(x, t|x', \tau) \frac{g(x', \tau)}{k} dx' d\tau \\
 & + \alpha \int_{\tau=0}^t G(x, t|0, \tau) \frac{f_1(\tau)}{k_1} d\tau \\
 & + \alpha \int_{\tau=0}^t G(x, t|L, \tau) \frac{f_2(\tau)}{k_2} d\tau
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Observa-se que todas as não homogeneidades presentes no problema térmico (3.1) tem sua influência expressa de forma independente nos vários termos que aparecem na Equação-solução (3.2).

O primeiro termo representa a influência da condição inicial $F(x)$, o segundo a geração de calor interna transiente e não uniforme $g(x, t)$. O terceiro e quarto termos representam, respectivamente, as diversas combinações possíveis de fluxo de calor prescrito, exposição ao meio convectivo ou temperatura prescrita, nas duas faces. O caso de temperatura prescrita deve ser modificado levemente considerando na Eq.(3.2) $-\frac{\partial G}{\partial x'}|_{x'=0} f_i(\tau)$ no lugar de $G|_{x'=0} \frac{f_i(\tau)}{k_i}$ sendo $i = 1$ ou 2 . (BECK *et al.*, 1992).

Por exemplo, se a face direita do problema (3.1) estiver submetida a evolução de uma temperatura prescrita $T_2(t)$, ao invés do fluxo de calor prescrito com convecção, o último termo da Eq.(3.2).

$$+ \alpha \int_{\tau=0}^t G(x, t|L, \tau) \frac{f_2(\tau)}{k_2} d\tau \tag{3.3}$$

será trocado por

$$- \alpha \int_{\tau=0}^t f_2(\tau) \left. \frac{\partial G}{\partial x'} \right|_{x'=L} d\tau \tag{3.4}$$

onde $f_2 = T_2$.

Na equação (3.2) o termo $G(x, t/x', \tau)$ representa a Função de Green associada ao problema térmico, e $\frac{\partial G}{\partial x'}$ a sua derivada. Observe que $G(x, t/x', \tau)$ nada mais é do que a solução de um problema auxiliar cuja definição é dada pela versão homogênea do problema original (3.1), ou seja,

$$\frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G(x, t)}{\partial t} \quad (3.5a)$$

Sujeito às condições de contorno, em $x=0$

$$+k_1 \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=0} + h_1 G(0, t) = 0 \quad (3.5b)$$

em $x=L$

$$-k_2 \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=L} + h_2 G(L, t) = 0 \quad (3.5c)$$

e à condição inicial

$$G(x, 0) = F(x) \quad (3.5d)$$

Tanto as técnicas de obtenção das Funções de Green (FG) como a demonstração da equação-solução, Eq.(3.2), são apresentadas no Anexo A. Como já mencionado, outros detalhes podem ser encontrados em Beck *et al.* (1992) para a obtenção das equações-soluções 2D e 3D.

3.1.2 Vantagens do Método de Funções de Green

Uma vez que as condições de contorno variam com o tempo, descarta-se de imediato a solução deste problema usando-se o método de separação de variáveis. Além da vantagem aparente do ponto de vista de interpretação física de cada termo na Eq.(3.2), uma vez identificado a FG, a solução da equação torna-se um simples problema de integração matemática de cada termo envolvido. Assim, caso a integral não possa ser resolvida analiticamente, o uso de funções numéricas ou métodos numéricos de integração podem ser aplicados sem perdas que comprometam a exatidão do problema.

Problemas mais simples, onde as não homogeneidades não estão presentes podem ser imediatamente obtidos da Equação (3.2), simplesmente anulando-os na equação. Ou seja,

as influências de termos homogêneos só são observadas na obtenção das FG e não aparecem explicitamente na equação-solução. De fato esta vantagem é extremamente relevante e simplifica bastante a solução final de problemas que envolvem condições de contorno homogêneas, como mostrado nos exemplos a seguir.

Cabe ainda ressaltar, neste ponto, que a determinação das FG é bem estabelecida sendo facilmente encontradas em tabelas na literatura. Várias referências tratam deste tópico, sendo que o usuário de FG pode encontrar em Beck *et al.*, (1992) a maioria das FG presentes em problemas de condução de calor.

Uma outra vantagem no uso de soluções integrais por FG é a possibilidade de se construir, sem dificuldades adicionais, soluções multidimensionais a partir da obtenção das funções de Green unidimensionais. Neste caso, as versões da equação-solução 2D e 3D são absolutamente equivalentes à equação unidimensional e as FG podem ser obtidas a partir de produtos de soluções 1D nas diversas direções. Os modelos 2D e 3D, assim como as FG multidimensionais são apresentadas ainda neste capítulo em seções subseqüentes.

Uma vez familiarizados com a equação-solução em termos de FG, apresenta-se a seguir a descrição e solução de um problema clássico 1D em condução de calor por meio dessas funções.

Antes porém, apresenta-se um sistema de numeração cuja finalidade é o de simplificar a notação o uso das FG nos vários problemas.

3.2 Sistema de Numeração

Como o número de soluções exatas em condução de calor transiente é grande devido as diversas combinações das condições de contorno e suas geometrias, Beck *et al.* (1992) propôs um sistema de notação. O principal objetivo é o de facilitar e identificar rápida e facilmente o problema térmico em questão. Embora as geometrias cilíndrica e esféricas sejam contempladas neste sistema, este trabalho apresentará apenas o sistema de numeração cartesiano.

Para um sistema de coordenadas retangulares, serão usados os símbolos X , Y e Z para as coordenadas x , y , e z respectivamente e neste caso a equação da difusão pode ser escrita como

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.6)$$

A Eq.(3.6) pode estar sujeita às seguintes condições de contorno:

- Condição natural ou seja geometria infinita;
- Temperatura prescrita;

$$T(r_i, t) = f_i(r, t) \quad (3.7)$$

- Fluxo de calor prescrito;

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{r_i} = f_i(r_i, t) \quad (3.8)$$

- Condição de contorno de convecção;

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{r_i} + h_i T|_{r_i} = f_i(r_i, t) \quad (3.9)$$

- Condição de contorno do quarto tipo;

Para um filme fino colado a uma superfície com fluxo de calor prescrito f_i para a superfície, pode-se escrever

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{r_i} = f_i(r_i, t) - (\rho cb)_i \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{r_i} \quad (3.10)$$

O produto $(\rho cb)_i$ é para o filme na i -ésima superfície, e b é a sua espessura. Um exemplo físico deste tipo de condição de contorno é transferência de calor entrando em um grande objeto cerâmico com uma fina camada de metal em sua superfície.

- Condição de contorno do quinto tipo;

A condição de contorno em uma superfície com um filme colado e permitindo-se perdas de calor por convecção do filme pode ser

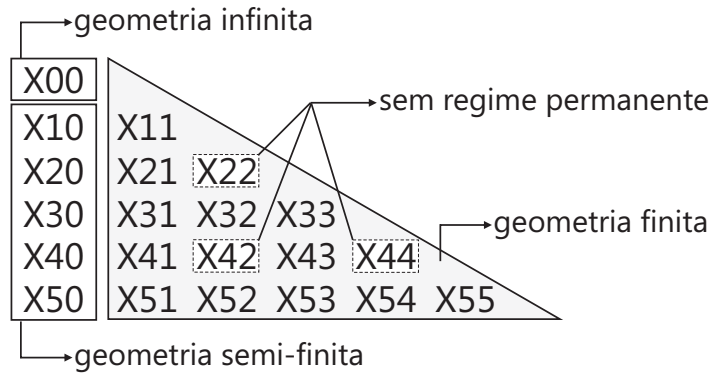
$$k \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{r_i} + h_i T_i = f_i(r_i, t) - (\rho cb)_i \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{r_i} \quad (3.11)$$

O produto $(\rho cb)_i$ é para o filme na i -ésima superfície, e b é a sua espessura. Um exemplo físico deste tipo de condição de contorno é transferência de calor entrando em um grande objeto cerâmico com uma fina camada de metal em sua superfície.

Assim, considerando as coordenadas retangulares, define-se a numeração das seis diferentes condições de contorno possíveis, como mostra a Tabela 3.1 e a Figura 3.2.

Tabela 3.1: Tipos de condição de contorno (BECK *et al.*, 1992)

Notação	nome da condição de contorno	descrição da condição de contorno
0	zero (natural)	nenhum tipo de condição física (infinito)
1	Dirichlet	temperatura prescrita, (3.7)
2	Neumann	fluxo de calor prescrita, (3.8)
3	Robin	condição de convecção, (3.9)
4	quatro tipo (Carlaw)	espessura fina (sem convecção), (3.10)
5	quinto tipo (Jaeger)	espessura fina (com convecção), (3.11)

Figura 3.2: Representação gráfica do sistema de numeração (BECK *et al.*, 1992)

Por exemplo, representa-se a Função de Green 1D, com condições de contorno do tipo fluxo prescrita, em $x=0$, e convecção de calor do lado oposto, como G_{X23} . No caso de uma Função de Green 2D representada por G_{X23Y33} , identifica-se as condições de contorno do tipo fluxo prescrita e convecção de calor na direção do eixo x e convecção de calor na direção do eixo y . Para a Função de Green 3D representada por $G_{X23Y33Z22}$, identifica-se o acréscimo da coordenada z com condições de contorno do tipo fluxo prescrita nas duas faces.

A Figura 3.3 é a representação gráfica das condições de contorno das Funções de Green G_{X23} ; G_{X23Y33} e $G_{X23Y33Z22}$, para o caso 3D o fluxo prescrita é dado por

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{e por} \quad -k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=R} = 0. \quad (3.12)$$

Para casos em coordenadas cilíndricas, outras geometrias e condições de contorno modificadas consulte Beck *et al.*, (1992).

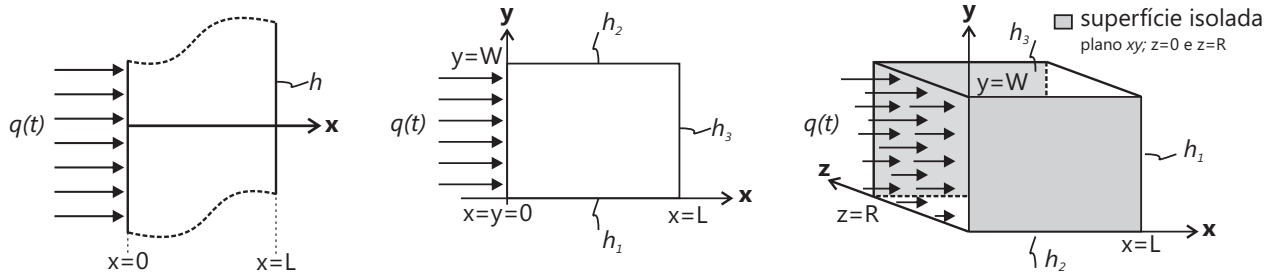


Figura 3.3: Representação gráfica das condições de contorno dos problemas $X23$; $X23Y33$ e $X23Y33Z22$

3.3 Descrição e solução de problemas térmicos 1D-transiente por FG

3.3.1 Caso particular X22

O problema de uma placa sendo submetida a um fluxo de calor constante e isolada na superfície oposta é um dos problemas clássicos em condução com maior aplicação, principalmente em modelos térmicos para a obtenção de propriedades térmicas. Como já mencionado, citam-se neste caso o método Flash (PARKER *et al.*, 1961) ou o método de impedância generalizada (GUIMARÃES; PHILIPPI; THERY, 1995).

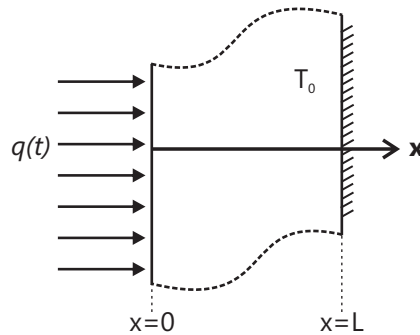


Figura 3.4: Problema térmico clássico: Placa sujeita a um fluxo de calor em uma superfície e isolada na superfície oposta.

O Problema representado pela Fig. 3.4 pode ser descrito por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.13a)$$

Sujeito às condições de contorno

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t); \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.13b)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = F(x) = T_0 \quad (3.13c)$$

A equação-solução, Eq.(3.2), pode assim ser aplicada para a solução do problema térmico (3.13) em termos de funções de Green considerando

$$h_1 = 0; \quad f_1(t) = q(t); \quad h_2 = 0; \quad \text{e} \quad f_2(t) = 0 \quad (3.14)$$

Ou seja, aplicando-se a Eq.(3.13) na Eq.(3.2) obtém-se

$$T(x, t) = T_0 + \alpha \int_0^t G_{X22}(x, t|x', t - \tau) \frac{q(\tau)}{k} \Big|_{x'=0} d\tau \quad (3.15)$$

Verifica-se que, para este caso que

$$\int_{x'=0}^L G(x, t|x', 0) F(x') dx' = T_0 \quad (3.16)$$

A $G_{X22}(x, t|x', t - \tau)$ representa a função de Green do problema auxiliar 1D que é a versão homogênea do problema (3.13). A FG, $G_{X22}(x, t|x', t - \tau)$, pode ser facilmente encontrada (Apêndice X, Beck *et al.* (1992)) e escrita como

$$G_{X22}(x, t) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_m^\infty e^{-(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \quad (3.17)$$

sendo $n = 1, 2, 3, \dots$

Avaliando-se a integral temporal na Eq.(3.15) obtém-se

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q\alpha}{k} \left[\int_0^t \frac{1}{L} d\tau + \frac{2}{L} \sum_m^\infty e^{-(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \int_0^\tau e^{(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha \tau} d\tau \right] \quad (3.18)$$

Assim

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q\alpha}{k} \frac{1}{L} t + \frac{q}{k} \frac{2}{L} \sum_m^\infty \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} - \frac{q}{k} \frac{2}{L} \sum_m^\infty \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{e^{(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha t}}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} \quad (3.19)$$

Observa-se que parte do segundo termo da Eq.(3.19) pode ser substituído por sua forma fechada (Anexo B).

$$\frac{2}{L} \sum_m \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{(m\pi)^2} = \frac{L}{3} - x + \frac{x^2}{2L} \quad (3.20)$$

E assim, substituindo a Eq.(3.20) na Eq.(3.19) obtém-se a solução como

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q\alpha}{k} \frac{1}{L} t + \frac{q}{k} L^2 \left(\frac{L}{3} - x + \frac{x^2}{2L} \right) - \frac{q}{k} \frac{2}{L} \sum_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{e^{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t}}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} \quad (3.21)$$

A solução dada pela Eq.(3.21) pode ser representada graficamente, Fig.3.5, para um caso particular onde o fluxo de calor prescrito é igual $100000 [W/m^2]$, $T_0 = 30[^\circ C]$, $L = 0.01 [m]$, $\alpha = 3.95 \times 10^{-6} [m^2/s]$ e $k = 14.9 [W/mk]$.

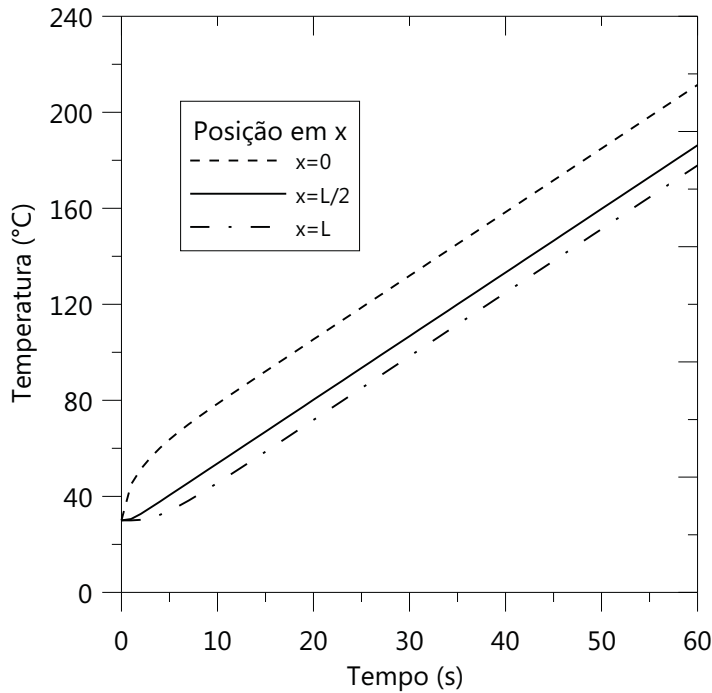


Figura 3.5: Evolução da temperatura de uma parede, em três posições ao longo de sua espessura, sujeita a um fluxo de calor constante em $x = 0$ e isolado em $x = L$.

Observa-se a validade da Eq.(3.15) para qualquer fluxo de calor variando temporalmente. Ou seja, qualquer que fosse a dependência com o tempo, como por exemplo periódica, exponencial ou polinomial, o problema a ser resolvido seria dado pela solução da integral, que pode ser analítica ou numérica, dependendo da dificuldade matemática.

3.3.2 Caso Particular X23

O problema térmico representado pela Fig.3.6, uma placa a uma temperatura inicial é sujeita a um fluxo de calor prescrito $q(t)$ enquanto o lado oposto é exposto a um meio com um coeficiente de convecção h e temperatura ambiente T_∞ .

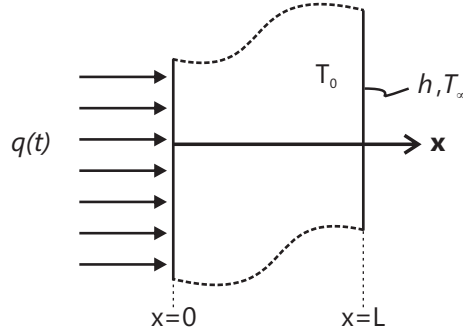


Figura 3.6: Caso 1D - X23

Considerando que não há geração de energia, ou seja, $g(x, t) = 0$, da Eq.(3.1) tem-se

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.22a)$$

sujeito às condições de contorno

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t) \quad (3.22b)$$

e

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h(T - T_\infty) \quad (3.22c)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = F(x) \quad (3.22d)$$

Observa-se que a condição de contorno em $x = L$ expressa pela Eq.(3.22c) é não homogênea. Esta condição pode então ser homogeneizada definindo-se uma nova variável, ou seja, fazendo

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_\infty \quad (3.23)$$

Assim, substituindo a Eq.(3.37) nas Eqs.(3.22) obtém-se

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3.24a)$$

sujeito à

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t); \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = h\theta \quad (3.24b)$$

e à condição inicial

$$\theta(x, 0) = T(x, 0) - T_\infty \quad (3.24c)$$

Observa-se que, neste caso particular, a Eq.(3.2) é reduzida a

$$\theta(x, t) = \int_{x'=0}^L G(x, t|x', 0) \theta(x', 0) dx' + \alpha \int_{\tau=0}^t d\tau \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, t|x_i, \tau) \right] \quad (3.25)$$

Observando na Eq.(3.25) que $f_1(\tau) = q(t)$ e $f_2(\tau) = 0$, obtém-se

$$\theta(x, t) = \int_{x'=0}^L G(x, t|x', 0) \theta(x', 0) dx' + \alpha \int_{\tau=0}^t \frac{q(\tau)}{k} G(x, t|0, \tau) d\tau \quad (3.26)$$

Como já mencionado, a Função de Green $G(x, t|x', \tau)$ pode ser obtida no Apêndice X de Beck *et al.* (1992). Neste caso, a função $G(x, t|x', \tau) = G_{X23}$ é dada por (BECK *et al.*, 1992)

$$G_{X23}(x, t|x', \tau) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha(t-\tau)/L^2} \frac{\beta_m^2 + B^2}{\beta_m^2 + B^2 + B} \cos(\beta_m \frac{x}{L}) \cos(\beta_m \frac{x'}{L}) \quad (3.27)$$

sendo $\beta_m \tan \beta_m = B$ e $B = \frac{hL}{k}$. A obtenção dos autovalores β_m da equação transcendental são descritas na seção 3.12.

Avaliando a Eq.(3.27) para $x' = 0$ e $\tau = 0$ respectivamente obtém-se

$$G(x, t|0, \tau) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha(t-\tau)/L^2} \frac{\beta_m^2 + B^2}{\beta_m^2 + B^2 + B} \cos(\beta_m \frac{x}{L}) \quad (3.28)$$

$$G(x, t|x', 0) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t/L^2} \frac{\beta_m^2 + B^2}{\beta_m^2 + B^2 + B} \cos(\beta_m \frac{x}{L}) \cos(\beta_m \frac{x'}{L}) \quad (3.29)$$

Portanto, a obtenção da distribuição de temperatura $\theta(x, t)$ dada pela Eq.(3.25) depende somente da integração espacial e temporal dos termos representados pelas Eqs.(3.28) e (3.29) respectivamente.

De fato, esta característica representa uma grande vantagem do uso da técnica de Funções de Green. Ou seja, caso $\theta(x', \tau)$ ou $f(x, \tau)$ sejam funções matematicamente complicadas, as integração das respectivas equações podem ser realizadas numericamente. Como no caso representado por este exemplo, $\theta(x', \tau)$ e $f(x, \tau)$ são assumidas por funções constantes, ou seja, $\theta(x, 0) = \theta_0$ e $f(x, \tau) = q$ as respectivas integrais são prontamente obtidas.

Integrar as Equações (3.28) e (3.29) conforme os termos de (3.26) para este caso é bastante simples, caso contrário a integração pode ser realizada numericamente. Assim,

$$\int_{x'=0}^L G(x, t|x', 0)\theta(x', 0)dx' = \frac{2\theta_0}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t/L^2} \frac{\beta_m^2 + B^2}{\beta_m^2 + B^2 + B} \cos(\beta_m \frac{x}{L}) \int_{x'=0}^L \cos(\beta_m \frac{x'}{L}) dx' \quad (3.30)$$

e ainda

$$\int_{x'=0}^L G(x, t|x', 0)d\theta(x', 0)x' = \frac{2\theta_0}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t/L^2} \frac{\beta_m^2 + B^2}{\beta_m^2 + B^2 + B} \cos(\beta_m \frac{x}{L}) \sin(\beta_m) (\frac{L}{\beta_m}) \quad (3.31)$$

e

$$\int_{\tau=0}^t \frac{f(\tau)}{k} G(x, t|0, \tau) d\tau = \frac{2q}{kL} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + B^2}{\beta_m^2 + B^2 + B} \cos(\beta_m \frac{x}{L}) e^{-\beta_m^2 \alpha t/L^2} \int_{\tau=0}^t e^{\beta_m^2 \alpha \tau/L^2} d\tau \quad (3.32)$$

obtendo-se

$$\int_{\tau=0}^t G(x, t|0, \tau) \frac{f(\tau)}{k} d\tau = \frac{2q}{kL} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + B^2}{\beta_m^2 + B^2 + B} \cos(\beta_m \frac{x}{L}) \frac{L^2}{\beta_m^2 \alpha} \left[1 - e^{-\frac{\beta_m^2 \alpha t}{L^2}} \right] \quad (3.33)$$

Assim, a solução analítica do problema (3.24) é obtida substituindo-se as Eqs. (3.31) e (3.33) na equação (3.26), ou seja

$$\begin{aligned} \theta(x, t) = & 2\theta_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + B^2}{\beta_m^2 + B^2 + B} \cos(\beta_m \frac{x}{L}) \sin(\beta_m) (\frac{1}{\beta_m}) e^{-\beta_m^2 \alpha t/L^2} \\ & + 2L \frac{q}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + B^2}{\beta_m^2 + B^2 + B} \cos(\beta_m \frac{x}{L}) \frac{1}{\beta_m^2} \left[1 - e^{-\frac{\beta_m^2 \alpha t}{L^2}} \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Retornando à variável original obtém-se

$$\begin{aligned}
 T(x, t) = & 2(T_0 - T_\infty) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + B^2}{\beta_m^2 + B^2 + B} \cos(\beta_m \frac{x}{L}) \sin(\beta_m) (\frac{1}{\beta_m}) e^{-\beta_m^2 \alpha t / L^2} \\
 & + 2L \frac{q}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + B^2}{\beta_m^2 + B^2 + B} \cos(\beta_m \frac{x}{L}) \frac{1}{\beta_m^2} \left[1 - e^{-\frac{\beta_m^2 \alpha t}{L^2}} \right] + T_\infty
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Cumpre-se observar, neste ponto, que o problema descrito pelas Eqs.(3.22) pode também ser resolvido sem o auxílio da variável $\theta(x, t)$. Neste sentido caso haja mais de um meio convectivo (com temperaturas diferentes), basta considerar o termo não homogêneo f_i como sendo $\frac{hT_\infty}{k}$ na Eq.(3.22c).

3.3.3 Caso particular X33

No problema térmico, representado pela Fig.3.7 e pelas Eqs.(3.36), tem-se uma placa a uma temperatura inicial que está sujeita a meios convectivos, cujos coeficientes de convecção são h_1 e h_2 e temperatura ambiente T_∞ .

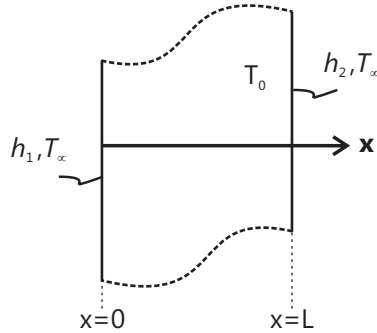


Figura 3.7: Caso particular X33

Este problema pode ser descrito pela equação da difusão de calor unidimensional

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.36a}$$

sujeito às condições de contorno

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 (T - T_\infty) \tag{3.36b}$$

e

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2(T - T_\infty) \quad (3.36c)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = F(x) \quad (3.36d)$$

Observa-se que as condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$ expressas pelas Eqs.(3.36b) e (3.36c) não são homogêneas. Assim, definindo-se uma nova variável

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_\infty \quad (3.37)$$

e substituindo a Eq.(3.37) nas Eqs.(3.36) obtém-se o problema homogêneo

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3.38a)$$

sujeito à

$$k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 \theta; \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2 \theta \quad (3.38b)$$

e à condição inicial

$$\theta(x, 0) = T(x, 0) - T_\infty \quad (3.38c)$$

Observa-se que, neste caso particular, a Eq.(3.1) é reduzida a

$$\theta(x, t) = \int_{x'=0}^L G(x, t|x', 0) \theta(x', 0) dx' \quad (3.39)$$

onde $f_1(\tau) = 0$ e $f_2(\tau) = 0$.

Neste caso, a função $G(x, t|x', \tau) = G_{X33}$ é dada por (BECK *et al.*, 1992)

$$G_{X33}(x, t|x', \tau) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha(t-\tau)/L^2} \left[\beta_m \cos\left(\frac{\beta_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_m x}{L}\right) \right] \quad (3.40)$$

$$\times \left[\frac{\beta_m \cos\left(\frac{\beta_m x'}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_m x'}{L}\right)}{(\beta_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right]$$

sendo $\tan \beta_m = \frac{\beta_m(B_1+B_2)}{\beta_m^2 - B_1 B_2}$, $B_1 = \frac{h_1 L}{k}$ e $B_2 = \frac{h_2 L}{k}$. A obtenção dos autovalores β_m da equação transcendental são descritas na seção 3.12.

Avaliando a Eq.(3.40) em $\tau = 0$ obtém-se

$$G_{X33}(x, t|x', 0) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t/L^2} \left[\beta_m \cos\left(\frac{\beta_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_m x}{L}\right) \right] \quad (3.41)$$

$$\times \left[\frac{\beta_m \cos\left(\frac{\beta_m x'}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_m x'}{L}\right)}{(\beta_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right]$$

e para $x' = 0$

$$G_{X33}(x, t|0, \tau) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha(t-\tau)/L^2} \left[\beta_m \cos\left(\frac{\beta_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_m x}{L}\right) \right] \quad (3.42)$$

$$\times \left[\frac{\beta_m}{(\beta_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right]$$

Portanto, a obtenção da distribuição de temperatura $\theta(x, t)$ dada pela Eq.(3.39) depende somente da integração espacial e temporal dos termos representados pelas Eqs.(3.41) e (3.42) respectivamente.

Integrar a Equações (3.41) e (3.42) conforme os termos de (3.39) para este caso é bastante simples, caso contrário a integração pode ser realizada numericamente.

Obtém-se assim, a solução analítica do problema

$$\begin{aligned} \theta(x, t) = 2\theta_0 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t / L^2} \left[\beta_m \cos\left(\frac{\beta_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_m x}{L}\right) \right] \\ \times \left[\frac{1}{(\beta_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \left[L \sin \beta_m - \frac{B_1 L}{\beta_m} (\cos(\beta_m) - 1) \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

Retornando à variável original obtém-se

$$\begin{aligned} T(x, t) = 2(T_0 - T_{\infty}) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t / L^2} \left[\beta_m \cos\left(\frac{\beta_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_m x}{L}\right) \right] \\ \times \left[\frac{1}{(\beta_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_m^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \left[L \sin \beta_m - \frac{B_1 L}{\beta_m} (\cos(\beta_m) - 1) \right] + T_{\infty} \end{aligned} \quad (3.44)$$

A representação gráfica deste problema é apresentada no capítulo 4.

3.4 Solução Geral 2D

Analogamente, o problema geral de condução de calor bidimensional, transiente e com geração de calor interna, pode ser representado pela equação de difusão de calor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{k} g(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.45a)$$

sujeito às condições de contorno

$$k_i \frac{\partial T}{\partial n_i} \Big|_{s_i} + h_i T|_{s_i} = f_i(x, y, t) - (\rho c b)_i \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{s_i} \quad (3.45b)$$

e à condição inicial

$$T(x, y, 0) = F(x, y) \quad (3.45c)$$

onde n_i é a direção perpendicular ao contorno e s_i representa os contornos ($i=1, 2, 3, 4$). Similarmente ao caso 1D a Equação (3.45b) representa os diferentes tipos de condições de

contorno mostrados na seção 3.2.

A versão bidimensional da solução do problema (3.45) em termos de Funções de Green pode ser escrita como (BECK *et al.*, 1992)

$$T(x, y, t) = \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W G(x, y, t|x', y', 0) F(x', y') dx' dy' \quad (a)$$

$$+ \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \frac{\alpha}{k} G(x, y, t|x', y', \tau) g(x', y', \tau) dx' dy' d\tau \quad (b)$$

$$+ \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^W \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, t|x_i, y, \tau) \right] dy' d\tau \quad (c)$$

(3.46)

$$+ \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, t|x, y_i, \tau) \right] dx' d\tau \quad (d)$$

$$- \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^W \sum_{i=1}^2 \left[f_i(\tau) \left. \frac{\partial G}{\partial n'_i} \right|_{x'=x_i} \right] dy' d\tau \quad (e)$$

$$- \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \sum_{i=1}^2 \left[f_i(\tau) \left. \frac{\partial G}{\partial n'_i} \right|_{y'=y_i} \right] dx' d\tau \quad (f)$$

A Função de Green, $G(x, y, t|x', y', \tau)$, será diferente para cada conjunto de condições de contorno. Em coordenadas retangulares faz-se o uso da propriedade $G(x, y, t|x', y', \tau) = G(x, t|x', \tau)G(y, t|y', \tau)$ para obtê-la.

3.4.1 Caso Particular X22Y33

Analogamente, a solução geral para um problema 2D é também facilmente aplicada para um caso particular de problema de condução de calor, como mostra a Fig. 3.8. Neste exemplo uma placa é submetida a um fluxo de calor prescrito $q(t)$ em $x = 0$ enquanto a sua superfície oposta ($x = L$) é isolada. Na direção y , ambas as superfícies encontram-se expostas a meios convectivos, com coeficiente de troca de calor h_1 e h_2 , respectivamente.

Considerando que não há geração de energia, o problema representado pela Fig. 3.8 pode

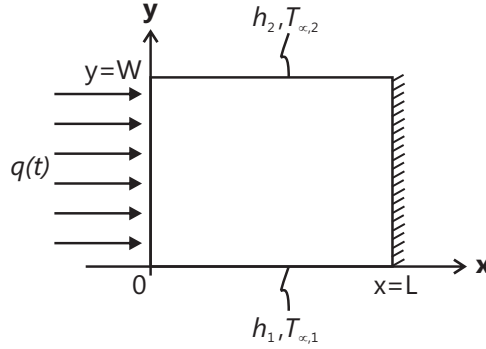


Figura 3.8: Caso 2D - X23Y23

ser escrito como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.47a)$$

sujeito às condições de contorno na direção x

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t), \quad +k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.47b)$$

e às condições de contorno na direção y

$$+k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h_1 (T - T_{\infty,1}) \quad (3.47c)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=W} = h_2 (T - T_{\infty,2}) \quad (3.47d)$$

e à condição inicial

$$T(x, y, 0) = F(x, y) \quad (3.47e)$$

Observa-se que as condições de contorno em $y = 0$ e $y = W$ expressas respectivamente pela equações (3.47c) e (3.47d) não são homogêneas. Da mesma forma, definindo-se uma nova variável $\theta = T - T_{\infty}$ e considerando $T_{\infty} = T_{\infty,1} = T_{\infty,2}$ obtém-se, como no caso 1D, a equação solução do problema homogêneo

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3.48a)$$

sujeito às condições de contorno

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t), \quad +k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad (3.48b)$$

$$+k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = h_1 \theta, \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=W} = h_2 \theta \quad (3.48c)$$

e à condição inicial

$$\theta(x, y, 0) = F(x, y) - T_\infty \quad (3.48d)$$

Assim, observa-se que neste caso a Eq.(3.46) é reduzida a

$$\begin{aligned} \theta(x, y, t) = & \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W G(x, y, t|x', y', 0) \theta(x, y, 0) dx' dy' \\ & + \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^W \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, t|x_i, y, \tau) \right] dy' d\tau \quad (a) \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$+ \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, t|x, y_i, \tau) \right] dx' d\tau \quad (b)$$

E ainda considerando um caso particular onde $f_1(\tau) = q$ e $f_2(\tau) = 0$ em (a) e que $f_1(\tau) = 0$ e $f_2(\tau) = 0$ em (b), e θ_0 constante pode-se escrever

$$\theta(x, y, t) = \theta_0 \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W G(x, y, t|x', y', 0) dx' dy' + \alpha \frac{q}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^W G(x, y, t|0, y', \tau) dy' d\tau \quad (3.50)$$

A Função de Green $G(x, y, t|x', y', \tau)$ pode então ser obtida observando-se os tipos de condições de contorno, nas direções de x e y . Assim obtém-se a função $G(x, y, t|x', y', \tau)$ como o produto $G(x, y, t|x', y', \tau) = G_{X22}G_{Y33}$ onde

$$G_{X22}(x, t|x', \tau) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha_m^2 \alpha(t-\tau)/L^2} \cos\left(\alpha_m \frac{x}{L}\right) \cos\left(\alpha_m \frac{x'}{L}\right) \quad (3.51)$$

sendo $\alpha_m = m\pi$, e

$$\begin{aligned} G_{Y33}(y, t|y', \tau) &= \frac{2}{W} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 \alpha(t-\tau)/W^2} \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \right] \\ &\quad \times \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde $\tan \beta_n = \frac{\beta_n(B_1+B_2)}{\beta_n^2 - B_1 B_2}$, $B_1 = \frac{h_1 L}{k}$ e $B_2 = \frac{h_2 L}{k}$. Como já mencionado, a obtenção dos autovalores α_m e β_n é descrita em detalhes na seção 3.12, no final deste capítulo.

Assim,

$$\begin{aligned} G_{X22}G_{Y33}(x, y, t|x', y', \tau) &= \\ &\frac{2}{LW} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 \alpha(t-\tau)/W^2} \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \right] \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \\ &+ \frac{4}{LW} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2})\alpha(t-\tau)} \cos\left(\alpha_m \frac{x}{L}\right) \cos\left(\alpha_m \frac{x'}{L}\right) \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \right] \\ &\quad \times \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

logo para $\tau = 0$ tem-se

$$\begin{aligned}
G_{X22}G_{Y33}(x, y, t|x', y', 0) = \\
\frac{2}{LW} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 \alpha t / W^2} \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \right] \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \\
+ \frac{4}{LW} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2}) \alpha t} \cos\left(\alpha_m \frac{x}{L}\right) \cos\left(\alpha_m \frac{x'}{L}\right) \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \right] \\
\times \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right]
\end{aligned} \tag{3.54}$$

e para qualquer τ e $x' = 0$ tem-se

$$\begin{aligned}
G_{X22}G_{Y33}(x, y, t|0, y', \tau) = \\
\frac{2}{LW} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 \alpha (t-\tau) / W^2} \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \right] \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \\
+ \frac{4}{LW} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2}) \alpha (t-\tau)} \cos\left(\alpha_m \frac{x}{L}\right) \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \right] \\
\times \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right]
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Faz-se, então, a substituição da Eqs.(3.54) e (3.55) na Eq.(3.58) e a sua conseqüente integração. Observa-se novamente que as integrais podem ser realizadas, conforme as dificuldades matemáticas, analiticamente ou numericamente. No exemplo, aqui apresentado,

obtem-se prontamente as integrais analíticas como

$$\int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W G_{X22} G_{Y33}(x, y, t|x', y', 0) dx' dy' =$$

$$\frac{2}{LW} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 \alpha t / W^2} \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \left[W \sin(\beta_n) - \frac{B_1 W}{\beta_n} (\cos(\beta_n) - 1) \right]$$

(3.56)

e a integral em $dy' d\tau$ é obtida como

$$\int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^W G_{X22} G_{Y33}(x, y, t|0, y', \tau) dy' d\tau =$$

$$\frac{2}{LW} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-\beta_n^2 \alpha t / W^2}}{\beta_n^2 \alpha / W^2} \right) \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \left[W \sin(\beta_n) - \frac{B_1 W}{\beta_n} (\cos(\beta_n) - 1) \right]$$

$$+ \frac{4}{LW} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2}) \alpha t}}{(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2}) \alpha} \right) \cos\left(\alpha_m \frac{x}{L}\right)$$

$$\times \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \left[W \sin(\beta_n) - \frac{B_1 W}{\beta_n} (\cos(\beta_n) - 1) \right]$$

(3.57)

Obtém-se assim a solução do problema térmico dados pelas Eqs (3.63) como

$$\begin{aligned}
\theta(x, y, t) = & 2\theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 \alpha t / W^2} \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \left[\sin(\beta_n) - \frac{B_1}{\beta_n} (\cos(\beta_n) - 1) \right] \\
& \times \frac{\alpha 2q}{Lk} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-\beta_n^2 \alpha t / W^2}}{\beta_n^2 \alpha / W^2} \right) \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \left[\sin(\beta_n) - \frac{B_1}{\beta_n} (\cos(\beta_n) - 1) \right] \\
& \times \frac{\alpha 4q}{Lk} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2}) \alpha t}}{(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2}) \alpha} \right) \cos\left(\alpha_m \frac{x}{L}\right) \\
& \times \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \left[\sin(\beta_n) - \frac{B_1}{\beta_n} (\cos(\beta_n) - 1) \right]
\end{aligned} \tag{3.58}$$

retornando à variável original obtém-se

$$\begin{aligned}
T(x, y, t) = & \\
& 2(T_0 - T_\infty) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 \alpha t / W^2} \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \left[\sin(\beta_n) - \frac{B_1}{\beta_n} (\cos(\beta_n) - 1) \right] \\
& \times \frac{\alpha 2q}{Lk} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-\beta_n^2 \alpha t / W^2}}{\beta_n^2 \alpha / W^2} \right) \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \left[\sin(\beta_n) - \frac{B_1}{\beta_n} (\cos(\beta_n) - 1) \right] \\
& \times \frac{\alpha 4q}{Lk} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2}) \alpha t}}{(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2}) \alpha} \right) \cos\left(\alpha_m \frac{x}{L}\right) \\
& \times \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \left[\sin(\beta_n) - \frac{B_1}{\beta_n} (\cos(\beta_n) - 1) \right]
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Da mesma forma anterior a representação gráfica desta solução é também apresentada no capítulo 4.

3.5 Solução Geral 3D

Um problema geral de condução de calor tridimensional, transiente, com geração interna de calor pode ser descrito pela equação da difusão de calor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{k}g(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.60a)$$

sujeito às condições de contorno

$$k_i \frac{\partial T}{\partial n_i} \Big|_{s_i} + h_i T|_{s_i} = f_i(x, y, z, t) - (\rho cb)_i \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{s_i} \quad (3.60b)$$

e à condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = F(x, y, z) \quad (3.60c)$$

onde n_i é a direção perpendicular ao contorno e s_i representa os contornos ($i=1,2,3,4,5,6$). Analogamente, a Eq. (3.60b) representa os diferentes tipos de condições de contorno.

A solução geral das Eqs.(3.60) pode ser expresso em termos de Funções de Green como (BECK *et al.*, 1992)

$$T(x, y, z, t) = \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R G(x, y, z, t|x', y', 0) F(x', y', z') dx' dy' dz' \quad (a)$$

$$+ \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R \frac{\alpha}{k} G(x, y, z, t|x', y', z', \tau) g(x', y', z', \tau) dx' dy' dz' d\tau \quad (b)$$

$$+ \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, z, t|x, y, z_i, \tau) \right] dx' dy' d\tau \quad (c)$$

$$+ \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{z'=0}^R \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, z, t|x, y_i, z, \tau) \right] dx' dz' d\tau \quad (d)$$

$$+ \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, z, t|x_i, y, z, \tau) \right] dy' dz' d\tau \quad (e)$$

$$- \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \sum_{i=1}^2 \left[f_i(\tau) \frac{\partial G}{\partial n'_i} \Big|_{z'=z_i} \right] dx' dy' d\tau \quad (\text{f})$$

$$- \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{z'=0}^R \sum_{i=1}^2 \left[f_i(\tau) \frac{\partial G}{\partial n'_i} \Big|_{y'=y_i} \right] dx' dz' d\tau \quad (\text{g})$$

$$- \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R \sum_{i=1}^2 \left[f_i(\tau) \frac{\partial G}{\partial n'_i} \Big|_{x'=x_i} \right] dy' dz' d\tau \quad (\text{h})$$

(3.61)

Similarmente aos casos 1D e 2D, os termos (a) a (h) da Eq.(3.61) representam os efeitos físicos da:

- (a) condição inicial
- (b) geração de energia
- (c) das condições de contorno, em $z = 0$ e $z = R$, do tipo dois à cinco, no plano xy
- (d) das condições de contorno, em $y = 0$ e $y = W$, do tipo dois à cinco, no plano xz
- (e) das as condições de contorno, em $x = 0$ e $x = L$, do tipo dois à cinco, no plano yz
- (f) das as condições de contorno tipo um, em $z = 0$ e $z = R$, para o plano xy
- (g) das as condições de contorno tipo um, em $y = 0$ e $y = W$, para o plano xz
- (h) das as condições de contorno tipo um, em $x = 0$ e $x = L$, para o plano yz

3.5.1 Caso Particular X23Y33Z33 - Abordagem Analítica de um Problema de Usinagem

O problema térmico criado por um processo de usinagem pode ser representado na Figura 3.9. Nota-se nesta figura um material sendo deformado plasticamente com uma conseqüente quantidade de energia sendo convertida em calor. Na usinagem, o material é submetido a tensões extremamente altas e a deformação elástica representa uma pequena parcela na

proporção da deformação total. Usualmente, assume-se que toda a energia é convertida em calor (BOOTHROYD, 1963).

A conversão em calor ocorre em duas regiões principais de deformação plástica (Fig.3.9). A zona de cisalhamento, ou zona primária de deformação, AB e a zona secundária de deformação BC. Se a ferramenta de usinagem apresenta algum desgaste de flanco ou se o ângulo de folga (α_0) for pequeno, uma terceira fonte de calor BD pode estar presente, originária do atrito entre a ferramenta e parte da superfície da peça usinada (BOOTHROYD, 1963).

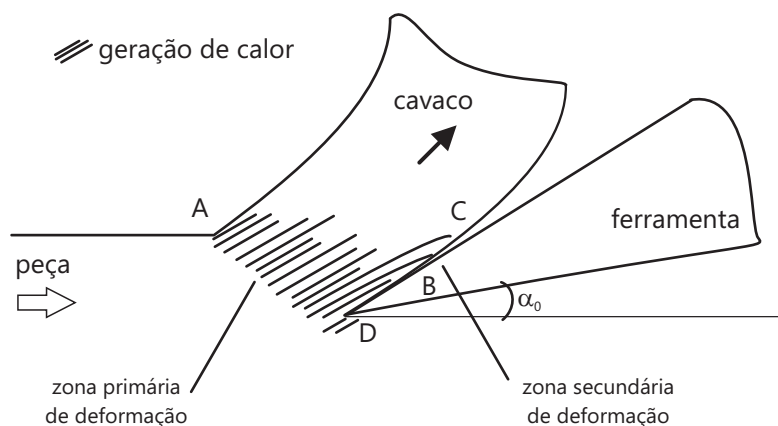


Figura 3.9: Geração de calor num processo de usinagem ortogonal

3.5.1.1 Identificação do problema térmico na ferramenta de usinagem

Identifica-se, na Figura 3.9, do ponto de vista da transferência de calor, a presença de pelo menos três domínios, todos, conectados à mesma interface: i) transferência de calor para a peça; ii) transferência de calor para o cavaco e; iii) transferência de calor para a ferramenta. Embora os três domínios sejam importantes, voltamos inicialmente o nosso interesse ao estudo da ferramenta, ou seja, à zona secundária da deformação plástica (Fig.3.9).

Assim, numa primeira aproximação, a ferramenta pode ser vista como sendo um material submetido a um fluxo de calor superficial, sendo a superfície oposta submetida a um meio convectivo (ambiente), como mostrado na Fig.3.10.

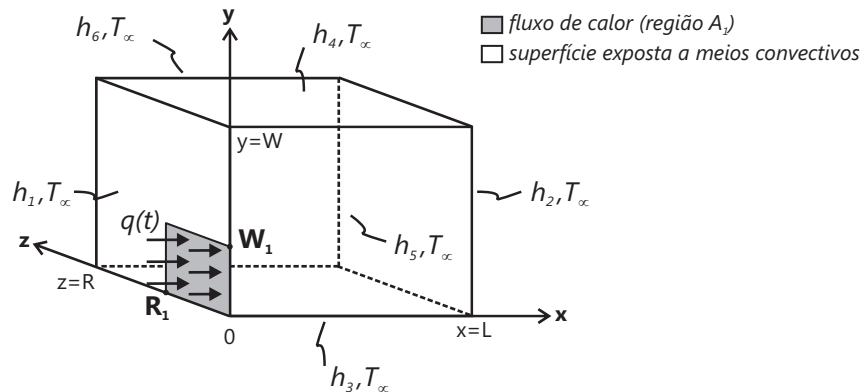


Figura 3.10: Ferramenta de usinagem de corte ortogonal submetida a fluxo de calor devido ao atrito entre peça-cavaco-ferramenta

Observa-se que todas as faces, exceto a região de contato entre peça, ferramenta e o cavaco estão sujeitas à uma troca de calor por convecção. Este procedimento, por sua vez, procura dar uma maior generalidade ao modelo térmico proposto. Em um processo de usinagem pode-se identificar claramente que as superfícies laterais e parte da superfície superior estão, de fato, expostas ao meio ambiente. Entretanto as demais superfícies estão em contato com o suporte porta ferramenta. Neste caso, os coeficientes de troca de calor, h_i podem representar o efeito desta troca, permitindo-se que se obtenha experimentalmente valores equivalentes à resistência térmica deste suporte. Por fugir do escopo deste trabalho, a abordagem do problema inverso de uma ferramenta de usinagem não será tratada aqui. Ou seja, para a obtenção da solução do problema direto, tanto o fluxo de calor imposto, como as propriedades térmicas e os diversos parâmetros como os coeficientes h_i que aparecem na equação são considerados conhecidos. Além disso, nesta simulação, a troca de calor entre a superfície inferior da ferramenta em contato com o suporte será considerada nula. Esta condição pode ser obtida experimentalmente através do uso de uma superfície isolante entre a ferramenta e o suporte.

O problema térmico dado pela Fig.3.10 pode então ser descrito pela equação da difusão de calor como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.62a)$$

sujeito às condições de contorno na direção x

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = -q(t) - h_1(T - T_\infty); \quad (3.62b)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2(T - T_\infty) \quad (3.62c)$$

e às condições de contorno na direção y

$$k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h_3(T - T_\infty) \quad (3.62d)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=W} = h_4(T - T_\infty) \quad (3.62e)$$

e às condições de contorno na direção z

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = h_5(T - T_\infty) \quad (3.62f)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=W} = h_6(T - T_\infty) \quad (3.62g)$$

e à condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = F(x, y, z) - T_\infty \quad (3.62h)$$

Observa-se que as condições de contorno onde ocorre convecção, expressas respectivamente pela equações (3.62b) - (3.62g), não são homogêneas. Da mesma forma, definindo-se a variável $\theta = T - T_\infty$ e aplicando-a nas Eqs. (3.77) obtém-se

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3.63a)$$

sujeito às condições de contorno

$$k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = -q(t) - h_1 \theta; \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2 \theta; \quad (3.63b)$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = h_3 \theta; \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=W} = h_4 \theta; \quad (3.63c)$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{z=0} = h_5 \theta; \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{z=R} = h_6 \theta \quad (3.63d)$$

e à condição inicial

$$\theta(x, y, z, 0) = F(x, y, z) - T_\infty \quad (3.63e)$$

Assim, observa-se que neste caso a Eq.(3.61) é reduzida a

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z, t) = & \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R G(x, y, z, t | x', y', z', 0) \theta(x, y, z, 0) dx' dy' dz' \\ & + \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, z, t | x, y, z_i, \tau) \right] dx' dy' d\tau \quad (a) \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$+ \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{z'=0}^R \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, z, t | x, y_i, z, \tau) \right] dx' dz' d\tau \quad (b)$$

$$+ \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, z, t | x_i, y, z, \tau) \right] dy' dz' d\tau \quad (c)$$

Considerando que $f_i(\tau) = 0$ em (a) e (b) e que $f_1(\tau) = q$, constante, na região dada por $0 \leq y \leq W_1; 0 \leq z \leq R_1$ e $f_2(\tau) = 0$ em (c)

$$\begin{aligned}
\theta(x, y, z, t) &= \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R G(x, y, z, t|x', y', z', 0) \theta(x, y, z, 0) dx' dy' dz' \\
&+ \alpha \frac{q}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^{W_1} \int_{z'=0}^{R_1} [G(x, y, z, t|0, y', z', \tau)] dy' dz' d\tau
\end{aligned} \tag{3.65}$$

A Função de Green $G(x, y, z, t|x', y', z', \tau)$ pode então ser obtida (BECK *et al.*, 1992) observando-se os tipos de condições de contorno, nas direções de x , y e z . Assim obtém-se a função $G(x, y, z, t|x', y', z', \tau)$ como o produto $G(x, y, z, t|x', y', z', \tau) = G_{X33}G_{Y33}G_{Z33}$ onde

$$\begin{aligned}
G_{X33}(x, t|x', \tau) &= \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha_m^2 \alpha(t-\tau)/L^2} \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) \right] \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) \right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} + B_1 \right]}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

onde $\tan \alpha_m = \frac{\alpha_m(B_1+B_2)}{\alpha_m^2 - B_1 B_2}$ e $B_1 = \frac{h_1 L}{k}$ e $B_2 = \frac{h_2 L}{k}$.

$$\begin{aligned}
G_{Y33}(y, t|y', \tau) &= \frac{2}{W} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 \alpha(t-\tau)/W^2} \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \right] \\
&\times \frac{\left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) \right]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} + B_3 \right]}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

onde $\tan \beta_n = \frac{\beta_n(B_3+B_4)}{\beta_n^2 - B_3 B_4}$ e $B_3 = \frac{h_3 W}{k}$ e $B_4 = \frac{h_4 W}{k}$.

$$\begin{aligned}
G_{Z33}(z, t|z', \tau) &= \frac{2}{R} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\gamma_p^2 \alpha(t-\tau)/R^2} \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) \right] \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) \right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} + B_5 \right]}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

onde $\tan \gamma_p = \frac{\gamma_p(B_5+B_6)}{\gamma_p^2-B_5B_6}$ e $B_5 = \frac{h_5R}{k}$ e $B_6 = \frac{h_6R}{k}$.

Novamente, como já mencionado, a obtenção dos autovalores α_m , β_n e γ_p é descrita em detalhes na seção 3.12, no final deste capítulo.

Assim,

$$\begin{aligned}
 G_{X33}G_{Y33}G_{Z33}(x, y, z, t|x', y', z', \tau) &= \frac{8}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha(t-\tau)} \\
 &\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right)\right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} + B_1\right]} \frac{\left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right)\right]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} + B_3\right]} \\
 &\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right)\right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} + B_5\right]} \tag{3.69} \\
 &\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)\right] \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)\right] \\
 &\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)\right]
 \end{aligned}$$

Logo para $\tau = 0$ tem-se

$$\begin{aligned}
G_{X33}G_{Y33}G_{Z33}(x, y, z, t|x', y', z', 0) &= \frac{8}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right)\right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} + B_1\right]} \frac{\left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right)\right]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} + B_3\right]} \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right)\right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} + B_5\right]} \tag{3.70} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)\right] \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)\right] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)\right]
\end{aligned}$$

e avaliando a função em $x' = 0$ obtém-se

$$\begin{aligned}
G_{X33}G_{Y33}G_{Z33}(x, y, z, t|0, y', z', \tau) &= \frac{8}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha(t-\tau)} \\
&\times \frac{\alpha_m}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} + B_1\right]} \frac{\left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right)\right]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} + B_3\right]} \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right)\right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} + B_5\right]} \tag{3.71} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)\right] \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)\right] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)\right]
\end{aligned}$$

Desta forma, substitui-se as Eqs.(3.70) e (3.71) na Eq.(3.65) para a resolução das integrais. Porém, mesmo para o caso 3D apresentado, as integrais analíticas são facilmente obtidas. Analogamente restam a resolução das integrais prevista na Eq.(3.65).

Assim, obtém-se para o primeiro termo

$$\begin{aligned}
& \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R G(x, y, z, t|x', y', z', 0) \theta_0 dx' dy' dz' = \\
& \frac{8\theta_0}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t} \\
& \times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} + B_1\right]} \frac{[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} + B_3\right]} \frac{[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} + B_5\right]} \\
& \times \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) \right] \\
& \times \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) \right] \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) \right] dx' dy' dz' \\
& \tag{3.72}
\end{aligned}$$

e resolvendo a integral

$$\begin{aligned}
& \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) \right] \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) \right] \\
& \times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) \right] dx' dy' dz' = \frac{LWR}{\alpha_m \beta_n \gamma_p} \\
& \times [\alpha_m \sin \alpha_m - B_1(\cos \alpha_m - 1)] [\beta_n \sin \beta_n - B_3(\cos \beta_n - 1)] [\gamma_p \sin \gamma_p - B_5(\cos \gamma_p - 1)] \\
& \tag{3.73}
\end{aligned}$$

O mesmo procedimento para o segundo termo produz

$$\begin{aligned}
& \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^{W_1} \int_{z'=0}^{R_1} G(x, y, z, t|0, y', z', \tau) dy' dz' d\tau = \frac{8}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t} \\
& \times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)] \alpha_m [\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)] [\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_4 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} + B_1\right] (\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} + B_3\right] (\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} + B_5\right]} \\
& \times \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^{W_1} \int_{z'=0}^{R_1} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha \tau} \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) \right] \\
& \times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) \right] dy' dz' d\tau
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Integrando espacialmente e temporalmente obtém-se

$$\begin{aligned}
& \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R G(x, y, z, t|0, y', z', \tau) dy' dz' d\tau = \frac{8}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)] \alpha_m}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} + B_1\right]} \\
& \times \frac{[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)] [\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} + B_3\right] (\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} + B_5\right]} \\
& \times \frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t}\right)}{\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha} \frac{1}{\beta_n \gamma_p} \left[\beta_n \sin\left(\frac{\beta_n W_1}{W}\right) - B_3 (\cos\left(\frac{\beta_n W_1}{W}\right) - 1) \right] \\
& \left[\gamma_p \sin\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) - B_5 (\cos\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) - 1) \right]
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Portanto, substituindo (3.72) e (3.75) na Eq.(3.65), obtém-se a solução analítica para este

caso.

$$\theta(x, y, z, t) =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{8\theta_0}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t} \\
& \times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)\right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} + B_1\right]} \frac{\left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)\right]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} + B_3\right]} \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)\right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} + B_5\right]} \\
& \times \frac{LWR}{\alpha_m \beta_n \gamma_p} [\alpha_m \sin \alpha_m - B_1(\cos \alpha_m - 1)] [\beta_n \sin \beta_n - B_3(\cos \beta_n - 1)] [\gamma_p \sin \gamma_p - B_5(\cos \gamma_p - 1)] \\
& + \frac{8\alpha q}{Lk} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)\right] \alpha_m}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} + B_1\right]} \\
& \times \frac{\left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)\right]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} + B_3\right]} \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)\right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} + B_5\right]} \\
& \times \frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t}\right)}{\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha} \frac{1}{\beta_n \gamma_p} \left[\beta_n \sin\left(\frac{\beta_n W_1}{W}\right) - B_3(\cos\left(\frac{\beta_n W_1}{W}\right) - 1) \right] \\
& \left[\gamma_p \sin\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) - B_5(\cos\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) - 1) \right]
\end{aligned} \tag{3.76}$$

A solução em termos da variável original T é dada por $T = \theta + T_{\infty}$.

Esta solução pode ser aplicada diretamente a um problema de usinagem de corte ortogonal desde que os coeficientes de troca de calor h_i sejam conhecidos. Obviamente, o problema térmico seria descrito em dois domínios. Um dado pela ferramenta e outro pelo suporte. Os coeficientes de troca de calor na região de contato ferramenta/suporte representariam,

de fato, a influência térmica do suporte. Neste trabalho não se abordará a solução deste problema, porém todas as condições analíticas estão disponíveis para futuras aplicações.

3.5.2 Caso Particular X22Y22Z22 - Aplicação a estimativas de propriedades térmicas

Apresenta-se nesta seção a formulação e a solução de um problema térmico tridimensional transiente relativo a um problema de estimativas de parâmetros termofísicos a ser explorado no Capítulo 5. De fato este problema representa uma amostra sólida de geometria retangular sendo submetida a um fluxo de calor em parte de sua superfície enquanto todas as outras são mantidas perfeitamente isoladas do ambiente. A obtenção do campo de temperatura deste problema representa a solução de um problema direto associado à técnica de otimização a ser empregada para obtenção das propriedades: condutividade e difusividade térmica. A aplicação da solução analítica nesta técnica, que é descrita no Capítulo 5 representa uma das contribuições propostas neste trabalho.

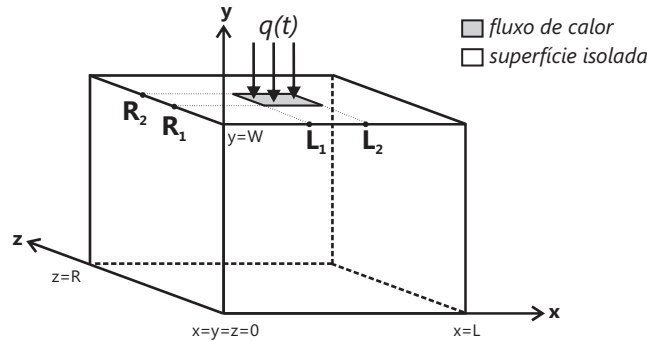


Figura 3.11: Modelo térmico 3D

Assim, considerando que não há geração de energia, o problema anteriormente descrito e representado pela Fig. 3.11 pode ser dado pela equação de difusão como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.77a)$$

sujeito às condições de contorno na direção x

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad +k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.77b)$$

e às condições de contorno na direção y

$$+k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=W} = q(t) \quad \text{na região } L_1 \leq x \leq L_2 \text{ e } R_1 \leq Z \leq R_2 \quad (3.77c)$$

e às condições de contorno na direção z

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=R} = 0 \quad (3.77d)$$

e à condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = F(x, y, z) = T_0 \quad (3.77e)$$

A solução geral em termos de Função de Green é dada por

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) = & \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R G(x, y, z, t|x', y', z', 0) T(x, y, z, 0) dx' dy' dz' \\ & + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} [q(\tau) G(x, y, z, t|x', W, z', \tau)] dx' dz' d\tau \end{aligned} \quad (3.78)$$

sendo $G(x, y, z, t|x', y', z', \tau) = G_{X22} \cdot G_{Y22} \cdot G_{Z22}$, onde

$$G_{X22} = \frac{1}{L} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2}{L^2} \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \right] \quad (3.79)$$

$$G_{Y22} = \frac{1}{W} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{W^2} \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{W}\right) \right] \quad (3.80)$$

$$G_{Z22} = \frac{1}{R} \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{R^2} \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right) \right] \quad (3.81)$$

Logo obtém-se o produto das FG como sendo

$$\begin{aligned}
G(x, y, z, t | x', y', z', \tau) &= G_{X22} \cdot G_{Y22} \cdot G_{Z22} = \frac{1}{LWR} \\
&+ \frac{2}{LWR} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2}{L^2} \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \\
&+ \frac{2}{LWR} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{W^2} \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{W}\right) \\
&+ \frac{2}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{R^2} \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right) \\
&+ \frac{4}{LWR} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2}\right) \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{W}\right) \quad (3.82) \\
&+ \frac{4}{LWR} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right) \\
&+ \frac{4}{LWR} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{W}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right) \\
&+ \frac{8}{LWR} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha(t-\tau)} \\
&\times \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{W}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right)
\end{aligned}$$

Avaliando a FG em $\tau = 0$ tem-se

$$\begin{aligned}
G(x, y, z, t|x', y', z', 0) &= \frac{1}{LWR} \\
&+ \frac{2}{LWR} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2}{L^2}\pi^2\alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \\
&+ \frac{2}{LWR} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{W^2}\pi^2\alpha t} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{W}\right) \\
&+ \frac{2}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{R^2}\pi^2\alpha t} \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right) \\
&+ \frac{4}{LWR} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2}\right)\pi^2\alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{W}\right) \quad (3.83) \\
&+ \frac{4}{LWR} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{p^2}{R^2}\right)\pi^2\alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right) \\
&+ \frac{4}{LWR} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right)\pi^2\alpha t} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{W}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right) \\
&+ \frac{8}{LWR} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right)\pi^2\alpha t} \\
&\times \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{W}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right)
\end{aligned}$$

$$\text{E em } y' = W$$

$$G(x, y, z, t|x', W, z', \tau) = \frac{1}{LWR}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{LWR} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2}{L^2} \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \\
& + \frac{2}{LWR} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{W^2} \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \\
& + \frac{2}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{R^2} \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right) \\
& + \frac{4}{LWR} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2}\right) \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \quad (3.84) \\
& + \frac{4}{LWR} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right) \\
& + \frac{4}{LWR} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right) \\
& + \frac{8}{LWR} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha(t-\tau)} \\
& \times \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right)
\end{aligned}$$

Resolvendo as integrais da eq. (3.78) separadamente pode-se demonstrar que

$$\int_0^L \int_0^W \int_0^R G(x, y, z, t|x', y', z', 0) T_0 dx' dy' dz' = T_0 \quad (3.85)$$

Uma vez que somente o primeiro termo da Eq.(3.83) apresenta contribuição não nula na integral espacial contida no primeiro termo dessa equação.

$$T_0 \int_0^L \int_0^W \int_0^R \frac{1}{LWR} dx' dy' dz' = T_0 \quad (3.86)$$

Integrando o segundo termo da Eq.(3.78)

$$\int_{\tau=0}^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} [q(\tau) G(x, y, z, t|x', W, z', \tau)] dx' dz' d\tau \quad (3.87)$$

E considerando isoladamente cada termo da Eq.(3.84) obtêm-se as seguintes integrais parciais $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7$ e I_8 .

Ou seja,

$$I_1 = \int_{\tau=0}^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} \left[q(\tau) \frac{1}{LWR} \right] dx' dz' d\tau = \frac{1}{LWR} [L_2 - L_1] [R_2 - R_1] \int_0^t q(\tau) d\tau \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\tau=0}^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} \left[q(\tau) \frac{2}{LWR} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2}{L^2} \pi^2 \alpha (t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \right] dx' dz' d\tau \\ &= \frac{2}{WR} [R_2 - R_1] \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2}{L^2} \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\sin\left(\frac{m\pi L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{m\pi L_1}{L}\right) \right] \frac{1}{m\pi} \\ &\quad \times \int_0^t \left[q(\tau) \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{m^2}{L^2} \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\tau=0}^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} \left[q(\tau) \frac{2}{LWR} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{W^2} \pi^2 \alpha (t-\tau)} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \right] dx' dz' d\tau \\
&= \frac{2}{LWR} [L_2 - L_1] [R_2 - R_1] \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{W^2} \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \quad (3.90)
\end{aligned}$$

$$\times \int_0^t \left[q(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{n^2}{W^2} \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{\tau=0}^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} \left[q(\tau) \frac{2}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{R^2} \pi^2 \alpha (t-\tau)} \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right) \right] dx' dz' d\tau \\
&= \frac{2}{LW} [L_2 - L_1] \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{R^2} \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \left[\sin\left(\frac{p\pi R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{p\pi R_1}{R}\right) \right] \frac{1}{p\pi} \quad (3.91)
\end{aligned}$$

$$\times \int_0^t \left[q(\tau) \sum_{p=1}^{\infty} e^{\frac{p^2}{R^2} \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_{\tau=0}^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} \left[q(\tau) \frac{4}{LWR} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2}\right) \pi^2 \alpha (t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \right. \\
&\quad \left. \times \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \right] dx' dz' d\tau \\
&= \frac{4}{WR} [R_2 - R_1] \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2}\right) \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\sin\left(\frac{m\pi L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{m\pi L_1}{L}\right) \right] \\
&\quad \times \frac{1}{m\pi} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \int_0^t \left[q(\tau) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2}\right) \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \quad (3.92)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_{\tau=0}^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} \left[q(\tau) \frac{4}{LWR} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \right. \\
&\quad \times \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right) \left. \right] dx' dz' d\tau \\
&= \frac{4}{W} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\sin\left(\frac{m\pi L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{m\pi L_1}{L}\right) \right] \frac{1}{m\pi} \quad (3.93)
\end{aligned}$$

$$\times \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \left[\sin\left(\frac{p\pi R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{p\pi R_1}{R}\right) \right] \frac{1}{p\pi}$$

$$\times \int_0^t \left[q(\tau) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau$$

$$\begin{aligned}
I_7 &= \int_{\tau=0}^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} \left[q(\tau) \frac{4}{LWR} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \right. \\
&\quad \times \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right) \left. \right] dx' dz' d\tau
\end{aligned}$$

(3.94)

$$= \frac{4}{LW} [L_2 - L_1] \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right)$$

$$\times \left[\sin\left(\frac{p\pi R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{p\pi R_1}{R}\right) \right] \frac{1}{p\pi} \int_0^t \left[q(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{\left(\frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau$$

$$\begin{aligned}
I_8 &= \int_{\tau=0}^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} \left[q(\tau) \frac{8}{LWR} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha (t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \right. \\
&\quad \times \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right) \left. \right] dx' dz' d\tau \\
&= \frac{8}{W} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\sin\left(\frac{m\pi L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{m\pi L_1}{L}\right) \right] \frac{1}{m\pi} \\
&\quad \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \left[\sin\left(\frac{p\pi R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{p\pi R_1}{R}\right) \right] \frac{1}{p\pi} \\
&\quad \times \int_0^t \left[q(\tau) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Desta forma, a solução analítica do problema (3.77) é obtida somando-se as respectivas integrais parciais, ou seja,

$$\begin{aligned}
T(x, y, z, t) &= T_0 \\
&+ \frac{\alpha}{k} \frac{1}{LWR} [L_2 - L_1] [R_2 - R_1] \int_0^t q(\tau) d\tau \\
&+ \frac{\alpha}{k} \frac{2}{WR} [R_2 - R_1] \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2}{L^2} \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\sin\left(\frac{m\pi L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{m\pi L_1}{L}\right) \right] \\
&\times \frac{1}{m\pi} \int_0^t \left[q(\tau) e^{\frac{m^2}{L^2} \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha}{k} \frac{2}{LWR} [L_2 - L_1] [R_2 - R_1] \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{W^2} \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \int_0^t \left[q(\tau) e^{\frac{n^2}{W^2} \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \\
& + \frac{\alpha}{k} \frac{2}{LW} [L_2 - L_1] \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{R^2} \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \left[\sin\left(\frac{p\pi R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{p\pi R_1}{R}\right) \right] \\
& \times \frac{1}{p\pi} \int_0^t \left[q(\tau) e^{\frac{p^2}{R^2} \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \\
& + \frac{\alpha}{k} \frac{4}{WR} [R_2 - R_1] \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2}\right) \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\sin\left(\frac{m\pi L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{m\pi L_1}{L}\right) \right] \\
& \times \frac{1}{m\pi} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \int_0^t \left[q(\tau) e^{\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2}\right) \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \\
& + \frac{\alpha}{k} \frac{4}{W} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\sin\left(\frac{m\pi L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{m\pi L_1}{L}\right) \right] \frac{1}{m\pi} \\
& \times \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \left[\sin\left(\frac{p\pi R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{p\pi R_1}{R}\right) \right] \frac{1}{p\pi} \int_0^t \left[q(\tau) e^{\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \\
& + \frac{\alpha}{k} \frac{4}{LW} [L_2 - L_1] \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \\
& \times \left[\sin\left(\frac{p\pi R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{p\pi R_1}{R}\right) \right] \frac{1}{p\pi} \int_0^t \left[q(\tau) e^{\left(\frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \\
& + \frac{\alpha}{k} \frac{8}{W} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\sin\left(\frac{m\pi L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{m\pi L_1}{L}\right) \right] \frac{1}{m\pi} \\
& \times \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \left[\sin\left(\frac{p\pi R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{p\pi R_1}{R}\right) \right] \frac{1}{p\pi}
\end{aligned}$$

$$\times \int_0^t \left[q(\tau) e^{\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2} \right) \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \quad (3.96)$$

3.6 Autovalores

Observa-se que para a obtenção computacional de todas as soluções apresentadas até aqui é necessário a obtenção dos respectivos autovalores, quaisquer que sejam os exemplos 1D, 2D ou 3D.

Felizmente, nota-se, porém, que para a obtenção dos autovalores apenas problemas unidimensionais precisam ser considerados, pois a solução de problemas bidimensionais e tridimensionais, em coordenadas retangulares, são obtidas a partir do produto das Funções de Green para cada direção.

Assim, sem perda de generalidade é suficiente o cálculo dos autovalores para os problemas unidimensionais que possuam as possíveis combinações de condição de contorno: do primeiro (temperatura prescrita), segundo (fluxo prescrito) e terceiro tipo (condição de convecção).

Esta seção dedica-se a obtenção de todos os possíveis autovalores presentes em um problema unidimensional, ou seja, problemas $X11$, $X12$, $X13$, $X22$, $X23$ e $X33$.

3.6.1 Autovalores para problemas do tipo $X11$, $X12$ ou $X21$, $X22$

Em problemas homogêneos do tipo $X11$, ou seja onde a condição de contorno é de temperatura igual a zero em todas as faces ou $X22$ onde a condição é de isolamento em todas as superfícies, os autovalores são obtidos aplicando-se diretamente as condições de contorno na equação de Sturm-Liouville (ÖZİŞIK, 1993). Nestes casos, obtém-se como condição de solução não trivial que $\cos(\alpha_m) = 0$ e portanto os autovalores são determinados por

$$\alpha_m = m\pi \quad m=1,2,\dots \quad (3.97)$$

Deve-se observar ainda que para o caso $X22$, $\alpha = 0$ também representa um autovalor.

Para problemas homogêneos mistos como $X12$ ou $X21$ a aplicação das condições de contorno homogêneas resultam na imposição de $\sin(\alpha_m) = 0$, o que implica também na

obtenção direta dos autovalores

$$\alpha_m = (2m - 1)\frac{\pi}{2} \quad m=1,2 \quad (3.98)$$

3.6.2 Autovalores para problemas do tipo X13 ou X31, X23 ou X32, X33

Embora o procedimento para a obtenção dos autovalores para problemas envolvendo convecção ou seja X13, X23 ou X33 seja o mesmo, a aplicação das condições de contorno homogêneas no problema de Sturm-Liouville não é suficiente para suas obtenções. O problema adicional se deve à característica transcendental das respectivas equações, ou seja, para problemas do tipo X13 ou X31, os autovalores α_m são obtidos resolvendo-se a equação transcendental

$$\alpha_m \cot \alpha_m = -B \quad \text{onde} \quad B \equiv \frac{hL}{k} \quad (3.99)$$

Para problemas do tipo X23 ou X32 obtém-se os autovalores resolvendo

$$\alpha_m \tan \alpha_m = B \quad B \equiv \frac{hL}{k} \quad (3.100)$$

E para o caso de convecção em ambas as faces, X33, resolvendo a equação

$$\tan \alpha_m = \frac{\alpha_m(B_1 + B_2)}{\alpha_m^2 - B_1 B_2} \quad B_1 \equiv \frac{h_1 L}{k} \quad \text{e} \quad B_2 \equiv \frac{h_2 L}{k} \quad (3.101)$$

As soluções das equações dadas pelas Eqs.(3.99)-(3.101) podem ser obtidas aplicando-se vários métodos matemáticos, Neste sentido Özişik (1993) sugere várias técnicas clássicas como o método de Newton-Raphson, Bisseção e Secante. Na verdade qualquer um destes métodos são suficientes para obtenção das raízes destas equações. Entretanto um cuidado especial deve ser tomado em relação a obtenção de todas as raízes. Observa-se como os métodos são iterativos, corre-se algum risco de se perder o primeiro autovalor dependendo das características físicas e geométricas do problema e do primeiro autovalor estimado.

Beck *et al.* (1992) e Haji-Sheik & Beck (2000) apresentam soluções para a equação transcendental baseadas em aproximações assintóticas que evitam estes problemas.

Para um melhor entendimento do comportamento destas raízes é importante a visualização de suas representações gráficas, conforme apresenta-se na Fig.3.12.

A Figura 3.12 apresenta o comportamento das raízes da Eq.(3.100) onde a intersecção

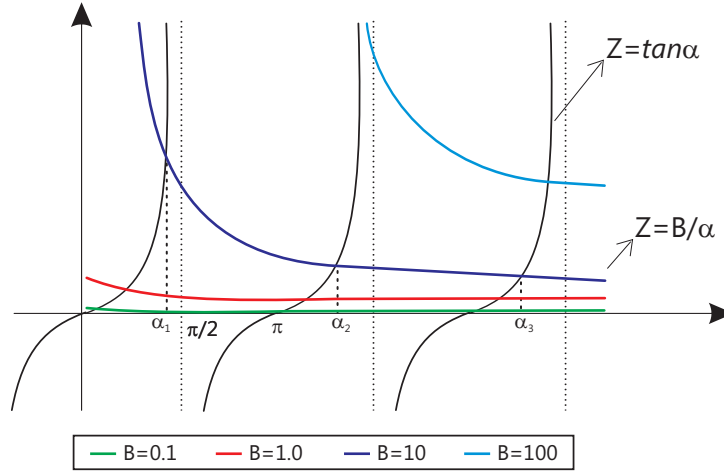


Figura 3.12: Representação gráfica dos autovalores, Eq.(3.100)

das curvas $Z = \tan \alpha$ e $Z = \frac{B}{\alpha_m}$ representam os autovalores da equação.

Observando-se a Fig.3.12 conclui-se que se $B \rightarrow 0$, ou seja, se $h \rightarrow 0$, os autovalores tendem a $\alpha_m \rightarrow m\pi$, que representam os autovalores obtidos para o caso de superfícies isoladas (Eq.(3.97)).

Neste trabalho optou-se pelo uso das aproximações sugeridas por Beck *et al.* (1992) para os casos X23 ou X32, devido a facilidade de implementação, segurança e precisão no cálculo destas raízes.

A aproximação proposta por Beck *et al.* (1992), com erro de 0,08% para os casos X23 ou X32 são dados por

Para $0 \leq B \leq 2$

$$\beta_1 \approx \left[\frac{3B}{3+B} \left(1 - \frac{1}{45} \left(\frac{3B}{3+B} \right)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.102)$$

Para $m \geq 2$ e B pequeno

$$\beta_m \approx \frac{(m-1)\pi}{2(B+3)} \left[2B + 3 + 3 \left[1 + \frac{4B(B+3)}{3(m-1)^2\pi^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.103)$$

Para $m \geq 1$ e B grande, isto, é $B > 2$

$$\beta_1 \approx \frac{(2m-1)\pi B}{2(B+1)} \left[1 + \frac{[(2m-1)\pi]^2}{12(B+1)^3 + [(2m-1)\pi]^2(2B-1)} \right] \quad (3.104)$$

Para validação dessas aproximações foram implementadas também cálculos usando pacotes matemáticos para solução de raízes transcendentais como o descrito pela função *FZERO* do MATLAB®.

As Tabelas 3.2, 3.3 e 3.4 apresentam comparações entre os autovalores obtidos para os casos *X23* usando-se as aproximações de Beck *et al.* (1992), de Haji-Sheik & Beck (2000) e da função *FZERO* do MATLAB®.

Os resultados apresentam um resíduo na nona casa decimal o que garante o uso da aproximação de Beck *et al.* (1992) neste trabalho e da função *FZERO* para os casos *X13* e *X33*.

Tabela 3.2: Comparação entre os autovalores quando $B \rightarrow 0$

m	B=0.000001			B=0.001		
	$f_{zero} MATLAB^{\odot}$	Beck <i>et al.</i>	$(m-1)\pi$	$f_{zero} MATLAB^{\odot}$	Beck <i>et al.</i>	$(m-1)\pi$
1	0.00099999833333	0.00099999833333	0	0.031617507105062	0.031617507105095	0
2	3.141592971899647	3.141592971899647	3.141592653589793	3.141910931220231	3.141910931220230	3.141592653589793
3	6.283185466334525	6.283185466334525	6.283185307179586	6.283344458090097	6.283344458090097	6.283185307179586
4	9.424778066872674	9.424778066872673	9.424777960769379	9.424884062869902	9.424884062869902	9.424777960769379
5	12.566370693936642	12.566370693936641	12.566370614359172	12.566450191326625	12.566450191326625	12.566370614359172

Tabela 3.3: Comparação entre os autovalores obtidos por diferentes métodos para B=0.1 e B=1.0

m	B=0.1			B=1.0		
	$f_{zero} MATLAB^{\odot}$	Beck <i>et al.</i>	Haji-Sheik & Beck	$f_{zero} MATLAB^{\odot}$	Beck <i>et al.</i>	Haji-Sheik & Beck
1	0.311052848200298	0.311053135714069	0.311052791	0.860333589019380	0.860595723902925	0.860333589
2	3.173097176692870	3.173097177375619	3.173097177	3.425618459481728	3.425655837072917	3.425618473
3	6.299059359895646	6.299059359917988	6.299059360	6.437298179171947	6.437300056027874	6.437298159
4	9.435375975760847	9.435375975763813	9.435375976	9.529334405361963	9.529334679336659	9.529334370
5	12.574323161037867	12.574323161038574	12.574323161	12.645287223856643	12.645287291355469	12.645287193

Tabela 3.4: Comparação entre os autovalores obtidos por diferentes métodos para B=10 e B=100

m	B=10			B=100		
	$f_{zero} MATLAB^{\odot}$	Beck <i>et al.</i>	Haji-Sheik & Beck	$f_{zero} MATLAB^{\odot}$	Beck <i>et al.</i>	Haji-Sheik & Beck
1	1.428870011214077	1.428868825239976	1.428870010	1.555245129256167	1.555245129236148	1.555245130
2	4.305801413119223	4.305537999786911	4.305801409	4.665765141727248	4.665765136865395	4.665765142
3	7.228109771627249	7.225255083446526	7.228109772	7.776374077846953	7.776374015391134	7.776374078
4	10.200262588295907	10.188108771492677	10.200262588	10.887130102147713	10.887129766802230	10.887130102
5	13.214185683842919	13.181684868850841	13.214185684	13.998089735155082	13.998088559627332	13.998089735

Capítulo 4

Representação gráfica, validação física e comparações

Neste capítulo apresentam-se as representações gráficas dos casos particulares 1D, 2D e 3D descritos no capítulo 3 relativos aos problemas $X22$, $X23$ e $X33$, $X22Y33$ e $X22Y22Z22$. Tais modelos são essenciais para as análises dos processos físicos a partir das soluções analíticas computacionais. Apresenta-se a validação das soluções a partir da comparação com outras funções, avaliando-se as condições de contorno além da comparação com soluções numéricas. Observa-se ainda que tais representações gráficas são também uma contribuição ao entendimento da condução de calor analítica em sólidos.

4.1 Problemas térmicos 1D-transientes: $X22$, $X23$ e $X33$

As soluções para os casos particulares, 1D, mostrados nas seções anteriores e representados pelas Fig. 4.1 podem ser comparadas entre si, nas posições $T_1 = T(x)|_{x=0}$, $T_2 = T(x)|_{x=\frac{L}{2}}$ e $T_3 = T(x)|_{x=L}$, fazendo-se o coeficiente de convecção $h \rightarrow 0$.

As soluções para estes dois problemas, $X22$ e $X23$, reescritas pelas Eqs. (4.1) e (4.2), respectivamente, para possibilitar uma melhor análise, são apresentadas na Fig.4.1.

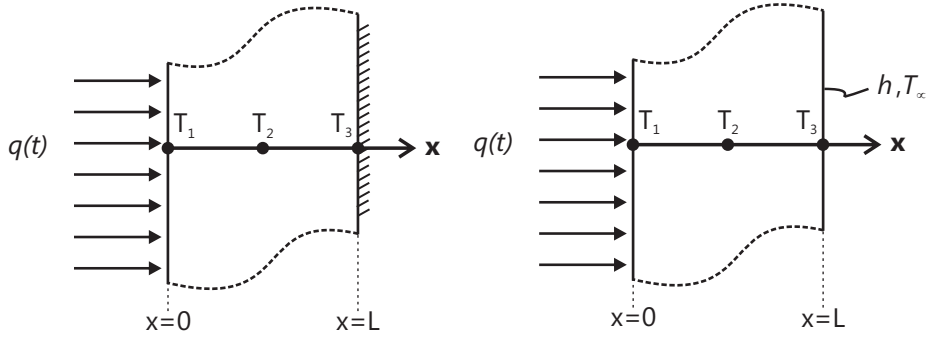


Figura 4.1: Casos 1D - X22 e X23

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q\alpha}{k} \frac{1}{L} t + \frac{q}{k} \frac{2}{L} \sum_m \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} - \frac{q}{k} \frac{2}{L} \sum_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{e^{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t}}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} \quad (4.1)$$

e

$$T(x, t) = 2(T_0 - T_\infty) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + B^2}{\beta_m^2 + B^2 + B} \cos(\beta_m \frac{x}{L}) \sin(\beta_m) \left(\frac{1}{\beta_m}\right) e^{-\beta_m^2 \alpha t / L^2} \quad (4.2)$$

$$+ 2L \frac{q}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + B^2}{\beta_m^2 + B^2 + B} \cos(\beta_m \frac{x}{L}) \frac{1}{\beta_m^2} \left[1 - e^{-\frac{\beta_m^2 \alpha t}{L^2}} \right] + T_\infty$$

Observa-se na Fig.4.1 que mesmo possuindo funções de Green completamente diferentes a distribuição de temperatura $T(x, t)$ do problema exposto à convecção tende à mesma solução do problema cuja superfície é isolada quando o coeficiente de convecção h tende a zero.

Para uma melhor visualização apresenta-se o desvio entre as temperaturas em três posições (Fig.4.1) na Fig.4.3. Observa-se ainda, que neste caso, o maior desvio situa-se próximo ao instante inicial, $t = 0$, com o seu valor máximo próximo a 0,008% o que indica a consistência física entre as soluções.

Por sua vez, a comprovação computacional da temperatura para o problema (4.1) é apresentado na Tabela 4.1 comparando-se os resultados com soluções disponíveis na literatura (BECK *et al.*, 1992).

Analogamente, as soluções são comparadas nas posições $x = 0$, $x = \frac{L}{2}$ e $x = L$ (Fig.4.1). Ainda nesta comparação são fixados os valores das variáveis $q(t) = 10^5 [W/m^2]$, $L = 0.01 [m]$, $\alpha = 3.95 \times 10^{-6} [m^2/s]$, $k = 14.9 [W/mK]$, $h = 0.001 [W/m^2K]$, $T_0 = 30[^\circ C]$ e $T_\infty = 10[^\circ C]$. Observa-se, neste caso, que a solução disponível na literatura para comparação encontra-se

em forma adimensional definidas por

$$T^+ \equiv \frac{T - T_0}{qL/k}, \quad t^+ \equiv \frac{\alpha t}{L^2}, \quad x^+ \equiv \frac{x}{L} \quad (4.3)$$

Pode-se observar, ainda, a perfeita concordância entre os resultados. A pequena dispersão se deve aos valores de t^+ não serem exatamente os termos de t^{+*} ;

A Figura 4.6 apresenta fisicamente o efeito do coeficiente de convecção ($h = 1000[W/m^2K]$) na temperatura para as três posições observadas. Observa-se que enquanto o problema (4.1) não admite solução em regime permanente o efeito convectivo é observado na diminuição dos níveis de temperatura e no alcance do regime permanente nestas temperaturas.

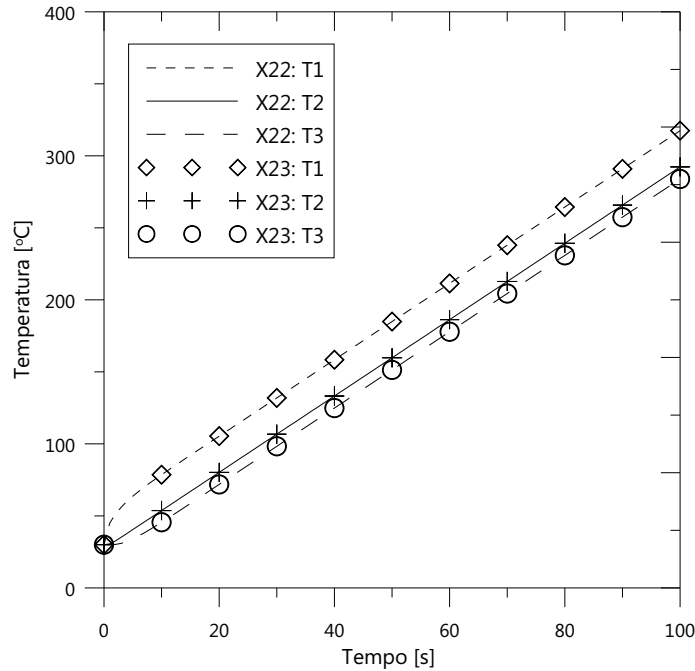


Figura 4.2: Comparação entre os casos X22 e X23, quando $h = 0.001 [W/m^2K]$

Concluindo a análise dos problemas unidimensionais apresenta-se na Fig.4.6 as temperaturas calculadas para o problema X33 (Fig.4.5 e Eq.(4.4)) em $x = L/2$ usando os mesmos dados físicos e geométricos do problema X23 acrescentando os coeficientes de convecção $h_1 = 10 [W/m^2K]$ e $h_2 = 20 [W/m^2K]$.

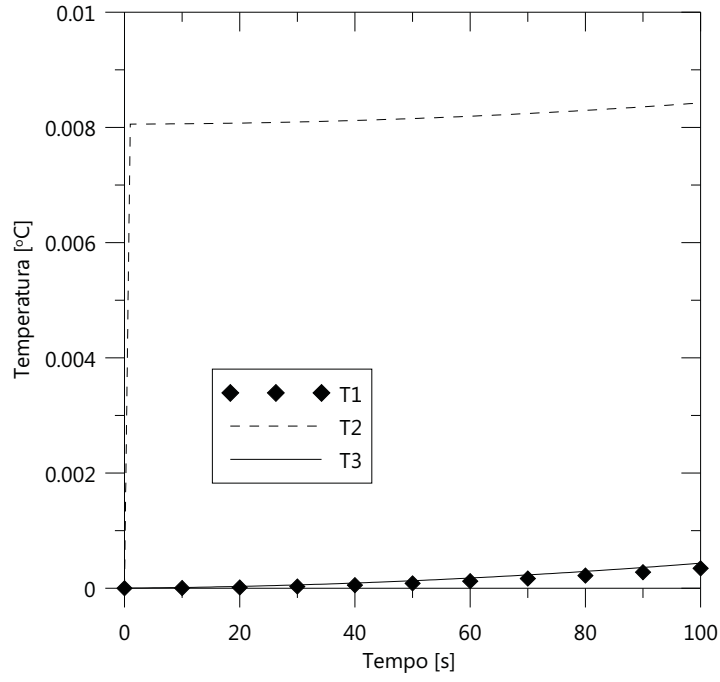


Figura 4.3: Erro entre casos $X22$ e $X23$, quando $h = 0.001 [W/m^2 K]$

$$\begin{aligned}
 T(x, t) = & 2(T_0 - T_\infty) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t / L^2} \left[\beta_m \cos\left(\frac{\beta_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_m x}{L}\right) \right] \\
 & \times \left[\frac{1}{(\beta_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_m^2 + B_2^2} \right]} + B_1 \right] \left[L \sin \beta_m - \frac{B_1 L}{\beta_m} (\cos(\beta_m) - 1) \right] + T_\infty
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Como esperado, a medida que o tempo evolui a temperatura em $x = L/2$. Assim com todas as outras tendem a temperatura de equilíbrio representada por $T_\infty = 10^\circ C$

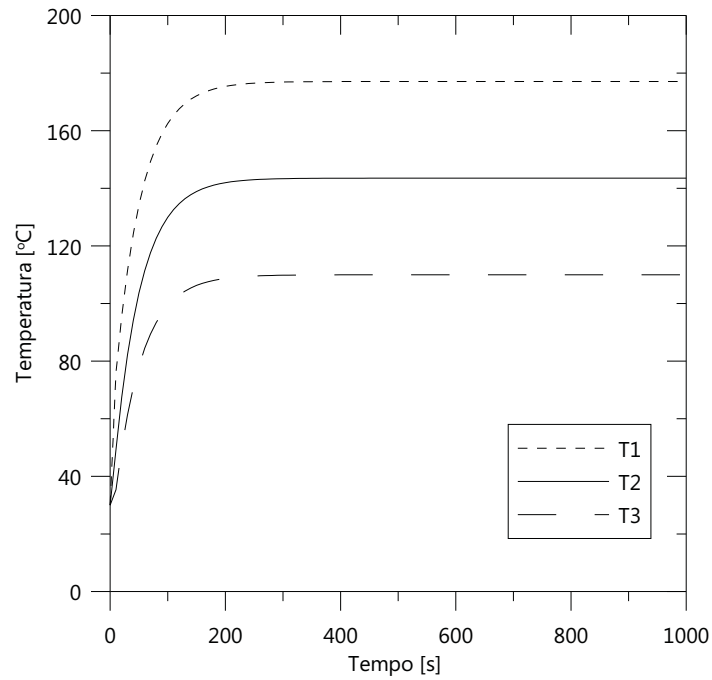


Figura 4.4: X23, quando $h = 1000 [W/m^2K]$

Tabela 4.1: Validação do problema X23

t^+	$T1$	$T2$	$T3$	$T1^*$	$T2^*$	$T3^*$	$T1 - T1^*$	$T2 - T2^*$	$T3 - T3^*$
0,1	0,356824	0,059431	0,007885	0,356826	0,059311	0,007885	-0,000002	0,000120	0,000000
0,2	0,505163	0,158472	0,061464	0,505165	0,158352	0,061464	-0,000002	0,000120	0,000000
0,3	0,622839	0,258454	0,143824	0,622842	0,258334	0,143824	-0,000003	0,000120	0,000000
0,4	0,729421	0,358453	0,237244	0,729423	0,358333	0,237244	-0,000002	0,000120	0,000000
0,5	0,831874	0,458453	0,334791	0,831876	0,458333	0,334791	-0,000002	0,000120	0,000000
0,6	0,932788	0,558453	0,433877	0,932790	0,558333	0,433877	-0,000002	0,000120	0,000000
0,7	1,033129	0,658453	0,533536	1,033131	0,658333	0,533536	-0,000002	0,000120	0,000000
0,8	1,133256	0,758453	0,633409	1,133258	0,758333	0,633409	-0,000002	0,000120	0,000000
0,9	1,233303	0,858453	0,733361	1,233305	0,858333	0,733361	-0,000002	0,000120	0,000000
1,0	1,333321	0,958453	0,833344	1,333323	0,958333	0,833344	-0,000002	0,000120	0,000000

(*) (BECK *et al.*, 1992)

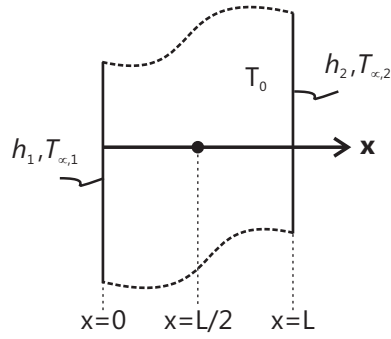


Figura 4.5: Problema $X33$

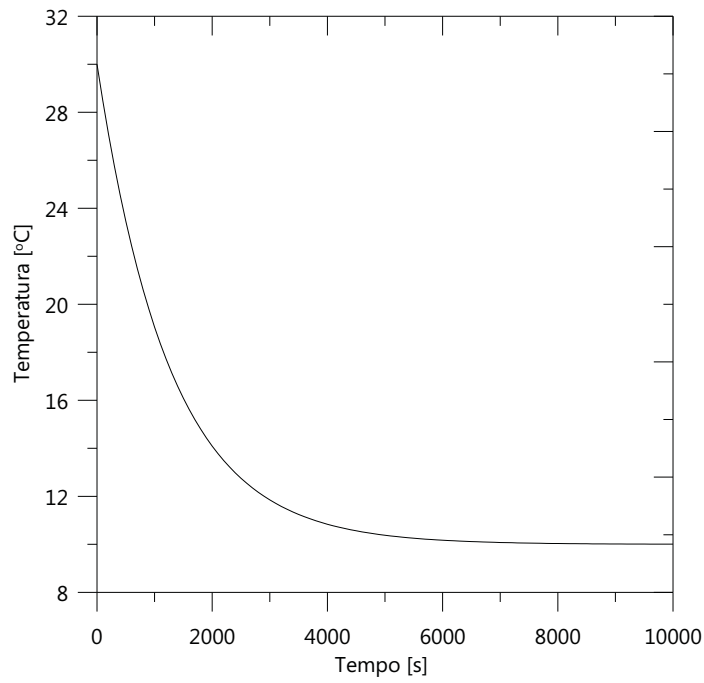


Figura 4.6: $X33$, em $x = L/2$, quando $h_1 = 10 [W/m^2K]$ e $h_2 = 20 [W/m^2K]$

4.2 Problema térmico 2D-transiente: $X22Y33$

Analisa-se nesta seção o problema bidimensional $X22Y33$ mostrado esquematicamente na Fig.4.7.

Observa-se na Fig.4.8 que a solução do problema (Eq.(4.5)) produz efeito em ambas as direções devido a influência dos coeficientes de calor h_1 e h_2 .

Observa-se ainda que como $h_1 = h_2$ o perfil de temperatura deve ser absolutamente simétrico em relação a uma linha ortogonal que divide a altura W (direção y) ao meio. Esta simetria é melhor verificada na Fig.4.9.

A verificação física da solução de $X22Y33$ expressa pela Eq.(4.5)

$$\begin{aligned}
 T(x, y, t) = & \\
 & 2(T_0 - T_\infty) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 \alpha t / W^2} \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \left[\sin(\beta_n) - \frac{B_1}{\beta_n} (\cos(\beta_n) - 1) \right] \\
 & \times \frac{\alpha 2q_0}{Lk} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-\beta_n^2 \alpha t / W^2}}{\beta_n^2 \alpha / W^2} \right) \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \left[\sin(\beta_n) - \frac{B_1}{\beta_n} (\cos(\beta_n) - 1) \right] \\
 & \times \frac{\alpha 4q_0}{Lk} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2}) \alpha t}}{(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2}) \alpha} \right) \cos\left(\alpha_m \frac{x}{L}\right) \\
 & \times \left[\frac{\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)}{(\beta_n^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{\beta_n^2 + B_2^2}\right] + B_1} \right] \left[\sin(\beta_n) - \frac{B_1}{\beta_n} (\cos(\beta_n) - 1) \right]
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

pode se dar através da redução do problema bidimensional, sob certas condições, a dois problemas unidimensionais distintos, descritos a seguir.

Observa-se que se h_1 e h_2 forem muito pequenos o problema $X22Y33$ adquire características unidimensionais uma vez que o calor aplicado em $x = 0$ será forçado a ser conduzido apenas na direção x . Outro problema unidimensional oriundo do problema térmico $X22Y33$ é aquele cujo fluxo de calor imposto for muito pequeno ou igual a zero. Neste caso somente

haverá gradiente de temperatura na direção y .

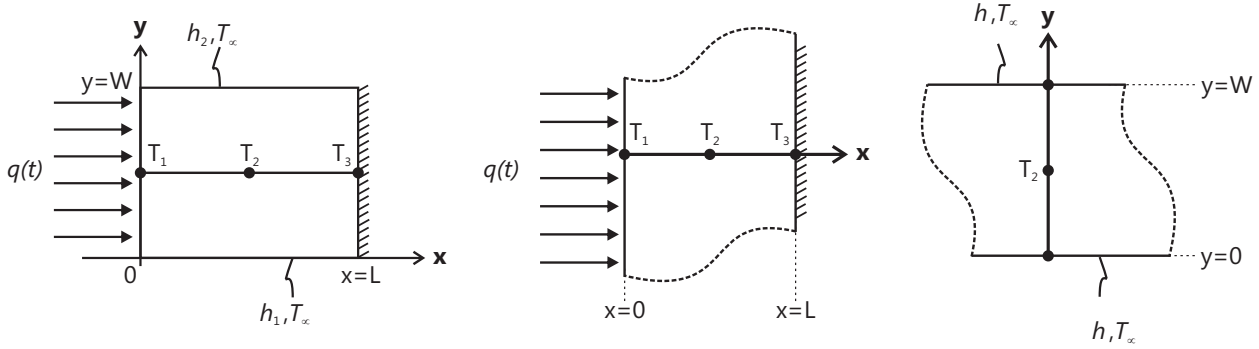


Figura 4.7: Problema bidimensional $X22Y33$ também representado por reduções físicas unidimensionais

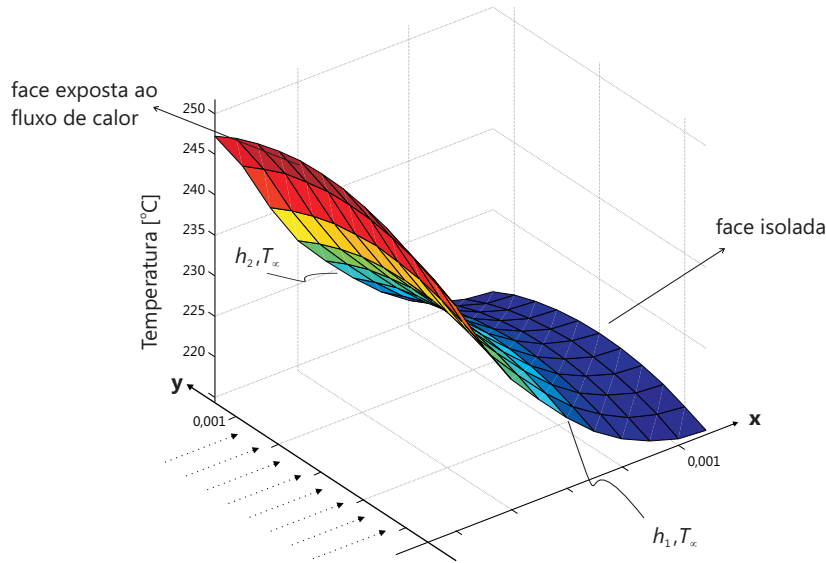


Figura 4.8: $X22Y33$, quando $h_1 = 100 [W/m^2K]$ e $h_2 = 100 [W/m^2K]$ (Dados físicos e geométricos similares aos problemas $X22$ e $Y33$)

Analogamente ao caso anterior faz-se uma comparação entre as temperaturas do problema bidimensional com as respectivas soluções unidimensionais $X33$ e $Y33$, considerando *i)* $h_1 = h_2 = 0$; e *ii)* $q = 0$, respectivamente. Os resultados são apresentados nas Figuras 4.10-4.12.

A figura 4.11 mostra o erro obtido para cada uma das posições $T_1(x = 0) = 0$, $T_2(x = L/2) = \frac{L}{2}$ e $T_3(x = L) = L$.

Como o problema 2D se reduz ao mesmo problema 1D, observa-se uma perfeita concórdia entre os resultados para a evolução de temperatura nas três posições. O resíduo

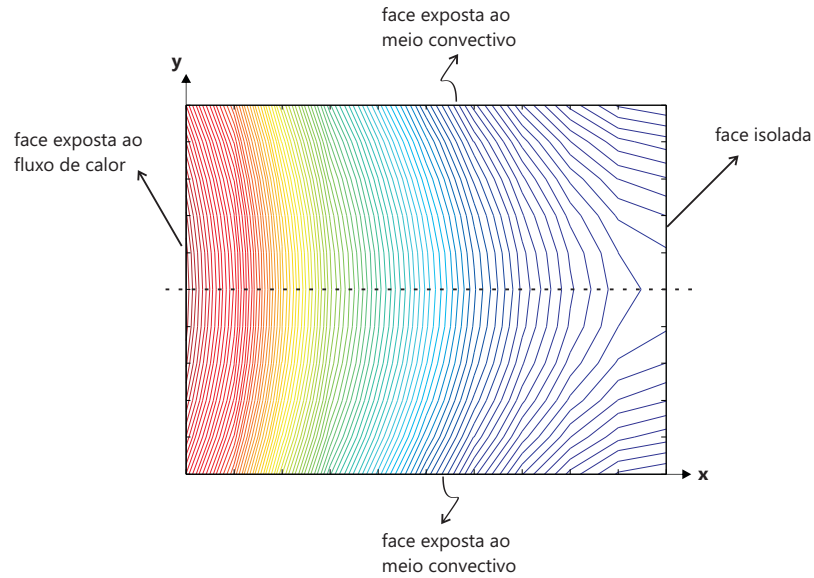


Figura 4.9: Linhas isotérmicas do problema $X22Y33$, quando $h_1 = h_2 = 100 [W/m^2K]$

máximo obtido é de $0,08^\circ C$ para a temperatura T_2 .

O efeito do fluxo de calor igual a zero com a conseqüente redução a um problema unidimensional na direção x é mostrado na Fig.4.12.

Como o problema 1D reduzido é equivalente ao caso $Y33$ apresenta-se, na Fig.4.13, uma comparação para temperaturas calculadas em $y = W/2$. Neste caso, não se observa nenhum desvio entre as soluções $X22Y33$ e $Y33$. Esta concordância perfeita se deve à obtenção das mesmas expressões matemáticas quando se aplica $q = 0$. Ou seja, Eq.(4.5) se reduz à Eq.(4.4).

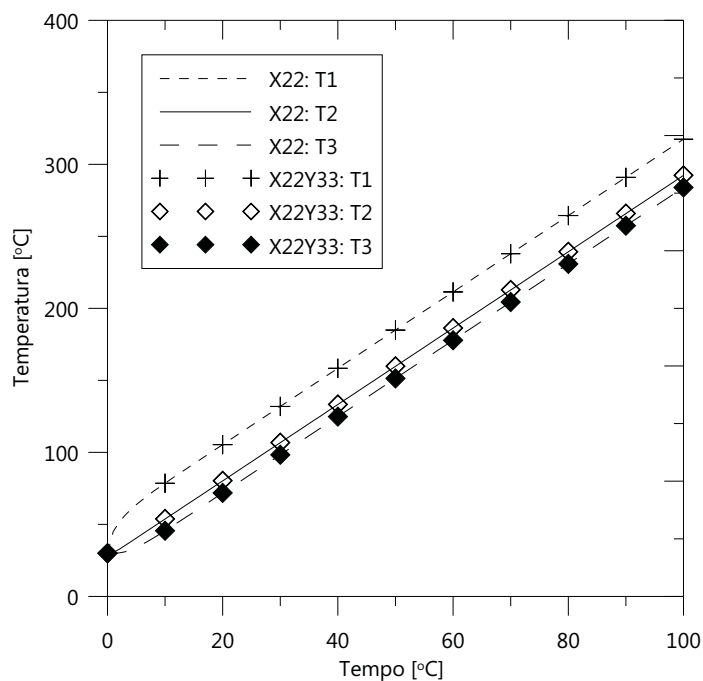


Figura 4.10: Comparação entre soluções $X22$ e $X22Y33$, $h_1 = h_2 = 0.0001 [W/m^2 K]$

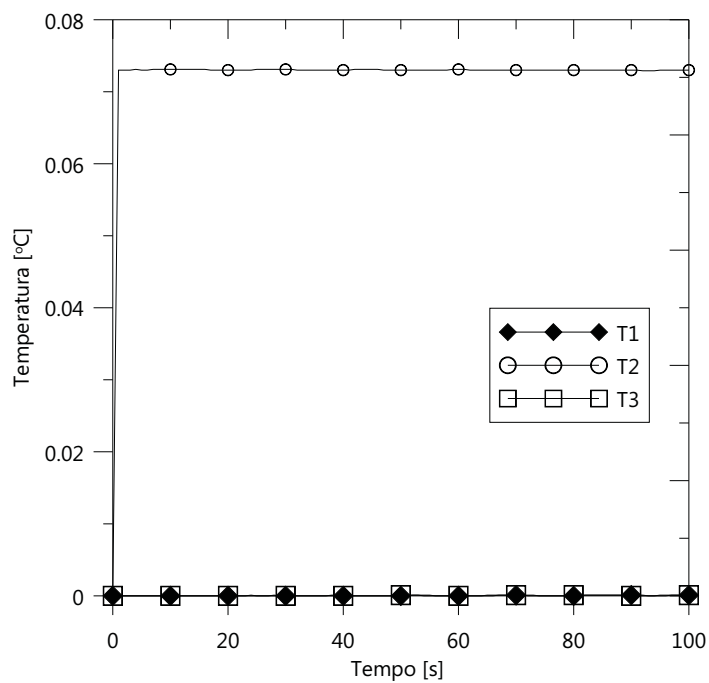


Figura 4.11: Resíduo entre soluções $X22$ e $X22Y33$, considerando $h_1 = h_2 = 0.0001 [W/m^2 K]$

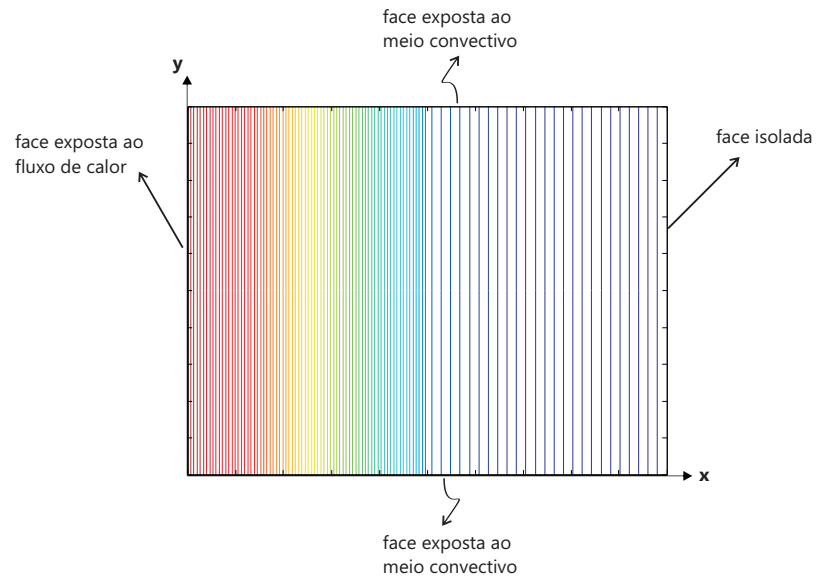


Figura 4.12: Isotérmicas para o problema X22Y33, considerando $h_1 = h_2 = 0.0001 [W/m^2 K]$

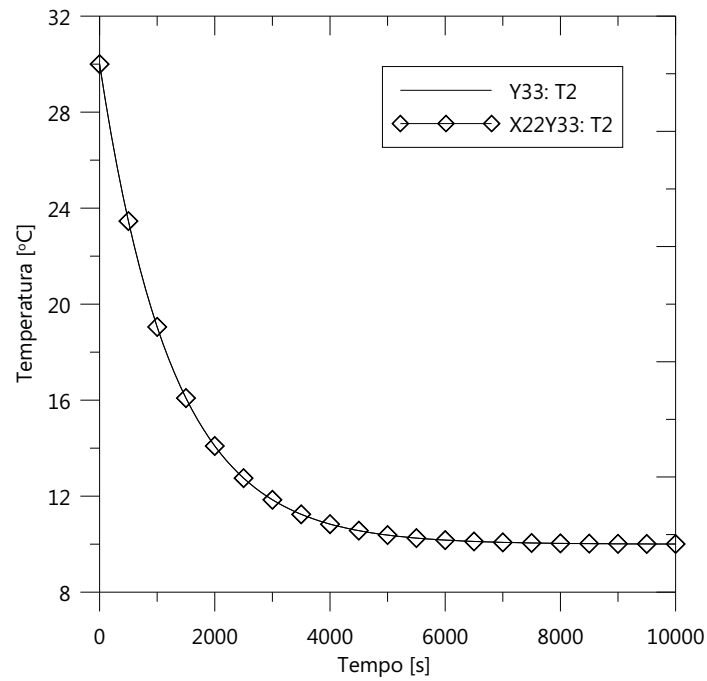


Figura 4.13: comparação X33 X22Y33, $x = L/2$

4.3 Problema térmico 3D-transiente $X22Y22Z22$

Os resultados obtidos durante o desenvolvimento do modelo térmico tridimensional $X22Y22Z22$, descrito pela Eq.(3.96) apresentada na seção 3.5.2, são apresentados. Comparações com soluções analíticas já estabelecidas para problemas mais simples são apresentadas como forma de assegurar a precisão da solução analítica obtida. Uma comparação com a solução numérica do problema em questão, assim como o resultado de sua aplicação na técnica de estimativas de propriedades térmicas são apresentadas no Capítulo 5.

A solução apresentada pela Eq.(3.96) comporta um problema particular cuja área de aquecimento pode ser representada por toda a superfície superior. Neste caso, a literatura dispõe de valores já consolidados (WALKER; BECK, 2008). Analogamente aos casos testes simulados são usados os mesmos parâmetros físicos geométricos com a adição da terceira dimensão $R = L = W = 10^{-2} [m]$. A Figura 4.14 representa esquematicamente o posicionamento das posições usadas para a comparação das temperaturas. Enquanto os resultados são apresentados na Tab.5.2 e Fig.4.3.

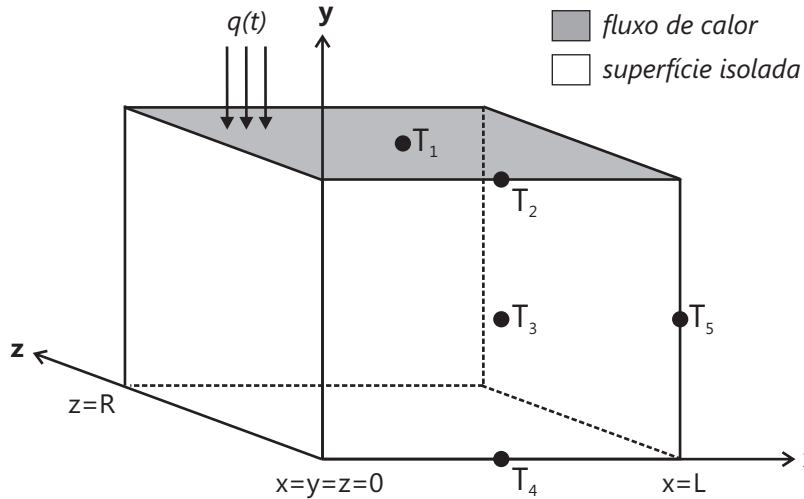


Figura 4.14: Posições das temperaturas usadas para comparação entre as soluções analíticas

Tabela 4.2: Comparação entre soluções analíticas obtidas neste trabalho e na literatura (WALKER; BECK, 2008)

Tempo[s]	$T_1[^\circ C]$	$T_1^*[^\circ C]$	$T_2[^\circ C]$	$T_2^*[^\circ C]$	$T_3[^\circ C]$	$T_3^*[^\circ C]$	$T_4[^\circ C]$	$T_4^*[^\circ C]$	$T_5[^\circ C]$	$T_5^*[^\circ C]$
0	30,00000	30,00000	30,00000	30,00000	30,00000	30,00000	30,00000	30,00000	30,00000	30,00000
20	105,38577	105,38591	105,38577	105,38591	80,22371	80,22371	71,84004	71,84004	80,22371	80,22371
40	158,41149	158,41163	158,41149	158,41163	133,24385	133,24385	124,85459	124,85459	133,24385	133,24385
60	211,43163	211,43177	211,43163	211,43177	186,26398	186,26398	177,87472	177,87472	186,26398	186,26398
80	264,45177	264,45190	264,45177	264,45190	239,28412	239,28412	230,89485	230,89485	239,28412	239,28412
100	317,47190	317,47204	317,47190	317,47204	292,30425	292,30425	283,91499	283,91499	292,30425	292,30425

(*) (WALKER; BECK, 2008)

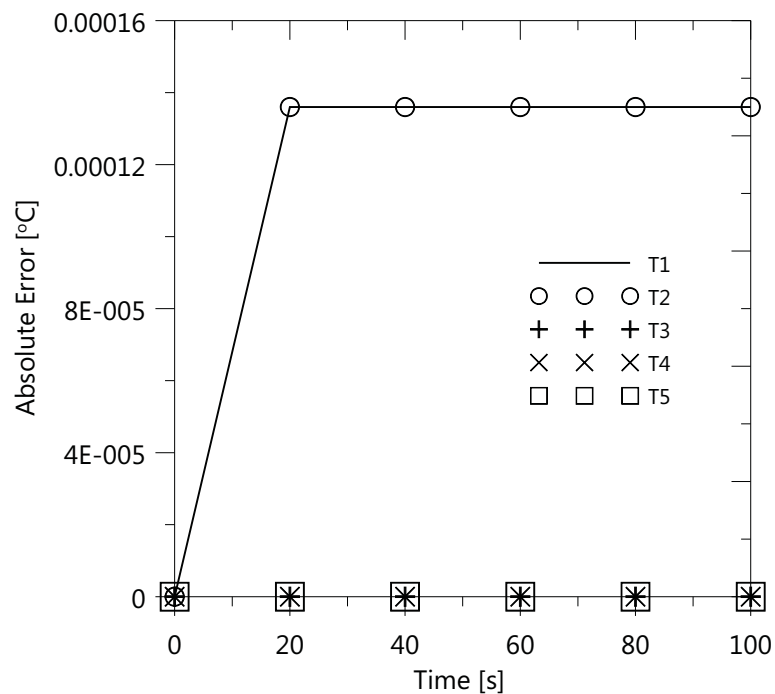


Figura 4.15: Resíduo entre as soluções analíticas obtidas neste trabalho e na literatura Walker & Beck (2008)

Observando-se a Tabela 5.2 e a Fig.4.3 obtém-se resultados com desvios inferiores a $0,00015^{\circ}C$ o que comprova a precisão do cálculo computacional da temperatura do problema $X22Y22Z22$ a ser usado para estimativas de parâmetros no próximo Capítulo.

Capítulo 5

Uso de Soluções Analíticas em Problemas Inversos

5.1 Introdução

Como já mencionado, uma das motivações deste trabalho refere-se à aplicação de soluções analíticas no desenvolvimento de técnicas de problemas inversos voltados a aplicação de problemas térmicos. Neste capítulo, a atenção é voltada à aplicação em técnicas experimentais para a obtenção de propriedades térmicas e para as estimativas de fluxo de calor em problemas inversos de condução de calor.

Observa-se que neste caso, os algoritmos inversos usualmente necessitam do cálculo do problema direto várias vezes. O uso de soluções analíticas, neste caso, contribui não só para o aumento da precisão destas técnicas, mas também para a redução drástica de seu gasto computacional.

Uma aplicação típica destas soluções é a incorporação de soluções analíticas ao software DPT, código de otimização para a **D**eterminação de **P**ropriedades **T**érmicas de amostras sólidas de geometria retangular, que utiliza o método de aquecimento parcial desenvolvido por Borges, Lima e Silva & Guimarães, (2006).

Outra aplicação, refere-se ao uso direto de uma solução analítica de um modelo 2D transiente contribuindo para o desenvolvimento de uma técnica inversa baseada em observadores dinâmicos. A solução analítica, neste caso, contribui para o aumento da robustez e da precisão da técnica.

5.2 Uso de Funções de Green na Obtenção de Propriedades Térmicas de Materiais Condutores

A técnica desenvolvida por Borges, Lima e Silva & Guimarães (2006) é bastante robusta e competitiva graças principalmente à capacidade de adaptação e solução de modelos térmicos mais complexos. Por exemplo um modelo tridimensional transiente e com condições de contorno transientes como fluxo de calor imposto variando com o tempo e o espaço. A possibilidade de incorporação de soluções analíticas e exatas com estas características térmicas representa uma grande contribuição para a diminuição efetiva do tempo computacional gasto, para a estabilidade numérica e para estimativas mais precisas sem, contudo onerar o projeto experimental.

5.2.1 Descrição da técnica experimental para obtenção da difusividade e condutividade térmica

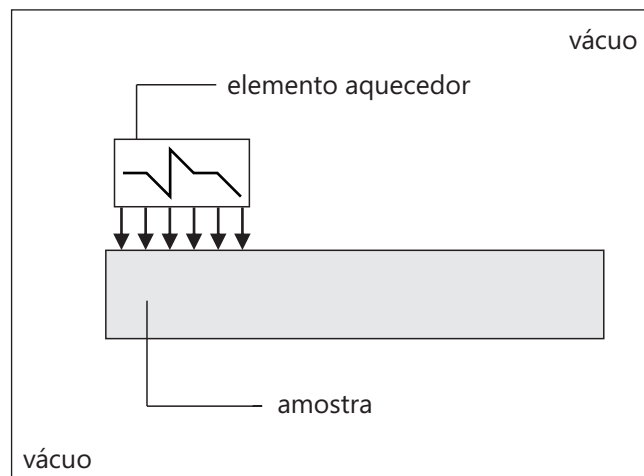
O princípio básico do procedimento é dividido em cinco passos distintos: i) desenvolvimento de um aparato experimental que permite a imposição do fluxo de calor em uma parte da amostra enquanto as superfícies remanescentes permanecem isoladas do meio; ii) obtenção de um modelo térmico deste aparato; iii) obtenção de uma grandeza proporcional ao fluxo de calor imposto na amostra, $q^+(t)$, usando o método seqüencial com função especificada (BECK; BLACKWELL; ST. CLAIR, 1995); iv) obtenção da difusividade térmica; v) comparação entre a taxa de calor total fornecida pelo elemento de aquecimento e a grandeza proporcional ao fluxo de calor imposto na amostra durante o ciclo de liga/desliga de aquecimento e a consequente obtenção da condutividade térmica.

5.2.1.1 Montagem experimental

Observa-se que as condições de contorno presentes no modelo teórico devem ser garantidas experimentalmente. Isto significa que a condição de isolamento em todas as superfícies que não estão em contato (amostra e aquecedor) deve ser alcançada para que a técnica obtenha sucesso. Uma forma eficiente de se obter isolamento experimental do ponto de vista de perdas de calor por convecção é a obtenção de um ambiente exposto a vácuo. A Figura 5.1 apresenta um aparato experimental que é constituído basicamente de um forno a vácuo que proporciona ao conjunto aquecedor e amostra um ambiente sem troca de calor por convecção. O sistema de aquisição de dados é comandado por computador.



a)



b)

Figura 5.1: a) Aparato experimental. b) Esquema de montagem do elemento aquecedor resistivo em parte da amostra

5.2.1.2 Modelo térmico

O problema térmico proposto a ser reproduzido experimentalmente é dado por uma amostra inicialmente a uma temperatura uniforme T_0 . A amostra é então submetida a um fluxo de calor $\left[\frac{W}{m^2}\right]$ enquanto todas as outras superfícies mantêm-se isoladas. A Figura 5.2 apresenta o modelo térmico.

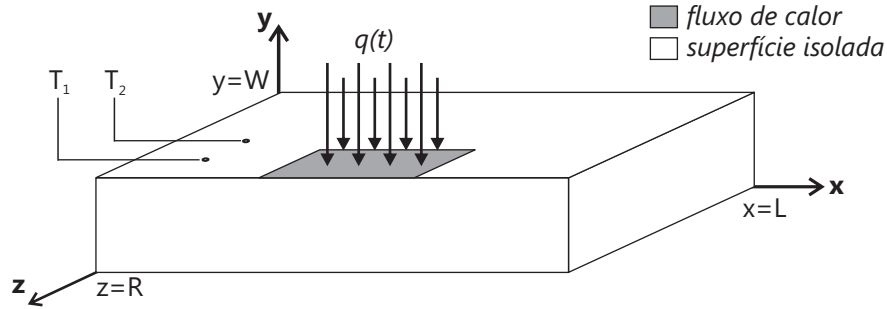


Figura 5.2: Modelo térmico equivalente tridimensional transiente

5.2.1.3 Problema inverso: obtenção do fluxo de calor adimensional $\phi(t)$

Várias técnicas de problemas inversos podem ser usadas para a estimativa do fluxo de calor imposto. A grande dificuldade, no entanto, reside no fato em que as propriedades térmicas da amostra são também desconhecidas. Neste caso, a técnica proposta por Borges, Lima e Silva & Guimarães (2006) propõe a adimensionalização do problema térmico e a obtenção do fluxo de calor q^+ , proporcional ao fluxo realmente imposto, $q(t)$. Posteriormente, o fluxo de calor, $q(t)$, real é então identificado. Este trabalho usa o método sequencial baseado em função especificada descrita por Beck, Blackwell & St. Clair (1995) para a estimativa desse fluxo.

Na literatura, uma variedade de aproximações analíticas e numéricas são propostas para a solução dos problemas inversos em condução de calor. Beck, Blackwell & St. Clair (1995) desenvolveram o método da função especificada sequencial, que é até hoje uma das técnicas de solução de problemas inversos mais usada. A técnica consiste na minimização sucessiva do erro quadrático entre temperaturas calculadas e medidas para apenas o tempo atual e alguns passos de tempo futuros, ou seja, na minimização de

$$S = \sum_{i=1}^r (T(t_{M+i-1}) - Y(t_{M+i-1}))^2 \quad (5.1)$$

onde T e Y são as temperaturas teóricas e medidas experimentalmente, respectivamente, num ponto qualquer da amostra (nesse caso, como indicado na Figura 5.2). A minimização se faz em relação a fluxo de calor $q''(i)$ que se deseja estimar.

O procedimento seqüencial pode ser resumido nos seguintes passos

1. Uma forma funcional para $q(t)$ é assumida para tempos $t_{M+1}, t_{M+2}, t_{M+3}, \dots, t_{M+r-1}$ sendo que para $t < t_{M+1}$ o fluxo de calor é conhecido;
2. A minimização de uma função erro quadrático é usada para esses tempos;
3. Componentes de fluxos de calor são estimados para a forma funcional assumida;
4. Somente a primeira componente q_M é retida;
5. M é aumentado em um passo e o procedimento é repetido.

Uma vez que a estimação se dá para cada tempo discreto (i), pode-se representar o valor $q(t)$ por q_M , onde M representa o tempo (i) com $i = 1, 2, 3, \dots, M, M+1, M+2, \dots, N$ sendo N o número total de tempos de medição Beck, Blackwell & St. Clair (1995). A Figura 5.3a representa a discretização da história do fluxo de calor imposto a ser estimado enquanto a Fig. 5.3b representa a discretização do fluxo de calor com r tempos futuros onde as componentes $q_M, q_{M+1}, q_{M+2}, \dots, q_{M+r-1}$ são feitas constantes temporariamente.

Assim derivando a Equação (5.1) em relação a q_M obtém-se a equação de recorrência para q_M como sendo

$$q_M = \sum_{i=1}^r K_i \left(Y_{M+i-1} - T_{M+i-1}^* \Big|_{q_M=\dots=0} \right)^2 \quad (5.2a)$$

com

$$K_i = \frac{\phi_i}{\sum_{j=1}^r \phi_j^2} \quad (5.2b)$$

onde

$$\phi_{i-j} = \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \quad i \geq j \quad e \quad \phi_{i-j} = 0 \quad i < j \quad (5.2c)$$

sendo $\Delta\phi_j = \sum_{i=j}^{j-1} \Delta\phi_i$ e T as temperaturas teóricas calculadas a partir do conhecimento de q_i com $i < M + i - 1$.

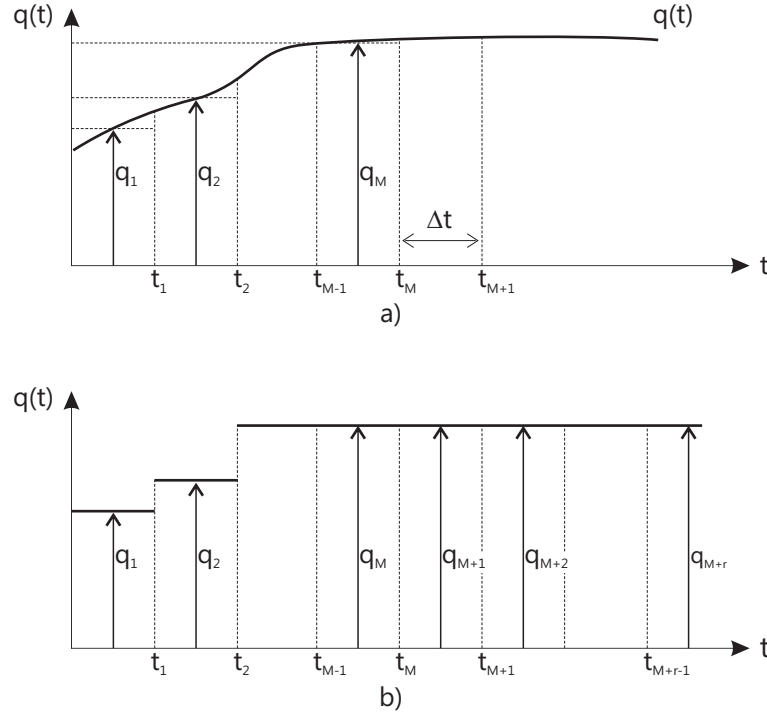


Figura 5.3: Fluxo de calor imposto em uma amostra: a) forma arbitrária; b) constante para $r-1$ tempos futuros

O método seqüencial será aplicado na solução do problema inverso proposto diretamente, não sendo proposta nenhuma alteração. A princípio é aplicado para a estimativa de proporcional ao fluxo de calor $q(t)$ (Figura 5.2), cuja definição é dada por

$$q^+(t) = \frac{q(t)}{k} \frac{k_{ref}}{q_{ref}} \quad (5.3)$$

onde k_{ref} e q_{ref} são valores de referência para a condutividade térmica e densidade de fluxo de calor, respectivamente, podendo assumir, a priori, qualquer valor como, por exemplo, o valor unitário.

A solução do problema direto adimensional é descrita e apresentada na próxima seção.

5.2.1.4 Obtenção da difusividade térmica, α

Para a obtenção da difusividade térmica escolheu-se um sistema dinâmico, equivalente ao modelo térmico apresentado na Fig. 5.2. O sistema tem a característica de uma entrada cujo sinal, $X(t)$, é dado pelo fluxo de calor adimensional, $X(t) = q^+(t)$, e por uma saída, representada pela diferença de temperatura entre duas posições distintas na amostra, $Y(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$, onde θ é definido como $T - T_0$.

A resposta em frequência, $H(f)$, deste sistema pode então ser definida por

$$H(f) = \frac{\theta_1(f) - \theta_2(2)}{\phi(f)} \quad (5.4)$$

E seu fator de fase, φ , pode então ser calculado como

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\Im H(f)}{\Re H(f)} \right) \quad (5.5)$$

onde $\Im H(f)$ e $\Re H(f)$ são a parte imaginária e real de $H(f)$, respectivamente.

Guimarães, Philippi & Thery (1995) observaram que o atraso entre o fluxo de calor e a diferença entre as respostas das temperaturas, ou seja, o fator de fase, φ , é uma função exclusiva da difusividade térmica. Este fato representa a base do procedimento para a obtenção da difusividade térmica através da minimização de uma função objetivo baseada na diferença entre os valores calculados e experimentais de φ . Esta função pode, então, ser escrita por:

$$S_\varphi = \sum_{i=1}^{Nf} (\varphi_e(i) - \varphi(i))^2 \quad (5.6)$$

onde φ_e e φ são os valores experimentais e calculados do fator de fase de $H(f)$, respectivamente. Os valores de α serão então os valores que minimizam a Eq.(5.5), sendo aplicado neste caso o método da seção áurea com aproximação polinomial (VANDERPLAATS, 1984).

5.2.1.5 Obtenção simultânea do fluxo de calor, $q(t)$ e da condutividade térmica, k

Uma vez determinado a difusividade térmica e a taxa de calor adimensional $q^+(t)$, resta, a obtenção fluxo de calor absorvido pela superfície, $q(t)$ e da condutividade térmica da amostra, k .

O princípio consiste na aplicação de um fluxo de calor, fornecido por efeito Joule de um elemento resistivo diretamente colado à superfície da amostra de interesse. Para que todo o calor gerado pelo elemento seja totalmente imposto à amostra, exige-se que o ambiente esteja evacuado. Desta forma o calor total fornecido à amostra pode ser obtido simplesmente multiplicando-se a tensão pela corrente imposta na resistência elétrica.

Conclui-se que o fluxo de calor será totalmente absorvido pela superfície somente depois de decorrido um determinado tempo t_f . Ou seja, se $P(t)$ representa a potência por unidade de área do aquecedor $\left[\frac{W}{m^2}\right]$ dissipada pelo elemento resistivo e $q(t)$ representa o fluxo de calor efetivamente entregue à amostra então, aplicando-se o princípio da conservação da energia

após um determinado tempo, t_f , pode-se escrever:

$$\int_0^{t_f} q(t) A dt = \int_0^{t_f} V(t) I(t) dt \quad (5.7)$$

onde $V(t)$ e $I(t)$ representam a tensão e a corrente imposta no aquecedor elétrico resistivo. Mas da definição dada pela Eq. (5.3) pode-se obter a condutividade térmica k , como

$$k = \int_0^{t_f} V(t) I(t) \left[\frac{q_{ref}}{k_{ref}} \int_0^{t_f} q^+(t) dt \right] dt \quad (5.8)$$

5.2.1.6 Problema direto

Observa-se que o procedimento usado para a obtenção final das propriedades envolve dois problemas de otimização (Problema inverso) que são definidos pela obtenção de $q^+(t)$ e de α através da minimização da Eq.(5.2) e Eq.(5.6) respectivamente. Ambas estimativas envolvem, por sua vez, a avaliação das temperaturas calculadas pelo modelo térmico, $T_1(t)$ e $T_2(t)$ e que representam na realidade a solução do problema direto.

Assim, do ponto de vista da aplicação da técnica experimental proposta por Borges, Lima e Silva & Guimarães (2006) não existe nenhuma imposição quanto a escolha entre método de solução do problema direto. Ou seja, pode-se usar, sem perda de generalidade, qualquer método numérico como volumes finitos ou elementos finitos, ou também, se possível soluções analíticas. Como já mencionado, este trabalho propõe a incorporação de soluções analíticas na técnica experimental de determinação da condutividade térmica e difusividade térmica usando o método de aquecimento de parte da superfície sem transdutor de fluxo de calor proposto por Borges, Lima e Silva & Guimarães (2006) diminuindo o custo computacional e aumentando a precisão nos cálculos numéricos.

Descreve-se a seguir, o modelo térmico, representado pela Fig. 5.2 e a obtenção de sua solução analítica usando-se Funções de Green.

5.2.2 Solução exata do modelo térmico usando funções de Green

O problema térmico proposto a ser reproduzido experimentalmente é dado por uma amostra inicialmente a uma temperatura uniforme T_0 , Fig. 5.2. A amostra é então submetida a um fluxo de calor $\left[\frac{W}{m^2}\right]$ enquanto todas as outras superfícies mantêm-se isoladas.

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial w^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} \quad (5.9a)$$

Na região A e $\mu^+ > 0$, sujeita as condições de contorno:

$$-\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right|_{v=W} = q^+(t) \quad \text{na região } A_1: \frac{L_1}{L} \leq u \leq \frac{L_2}{L} \text{ e } \frac{R_1}{R} \leq w \leq \frac{R_2}{R} \quad (5.9b)$$

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right|_{v=W} = 0 \quad \text{em } A - A_1 \quad (5.9c)$$

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right|_{u=0} = \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right|_{u=L} = \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right|_{v=0} = \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right|_{w=0} = \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right|_{w=W} = 0 \quad (5.9d)$$

e à condição inicial,

$$\vartheta(u, v, w, 0) = 0 \quad (5.9e)$$

sendo que A é definido por $(0 \leq u \leq 1, 0 \leq w \leq 1)$ e A_1 é a região onde o fluxo de calor é aplicado. Nas Equações (5.9) os grupos adimensionais são definidos como:

$$u = \frac{x}{L}; \quad v = \frac{y}{W}; \quad w = \frac{z}{R} \quad (5.10a)$$

$$\mu = \frac{\alpha_{ref} t}{W^2}; \quad \vartheta(u, v, w, \mu) = \frac{T(x, y, z, t) - T_0}{\frac{q_{ref} L}{k_{ref}}} \quad q^+ = \frac{q(t)}{k} \frac{k_{ref}}{q_{ref}} \quad (5.10b)$$

Observa-se que as Eqs.(5.9) representam um problema direto de condução de calor desde que a função densidade de fluxo de calor adimensional q^+ seja especificada. Por sua vez, o problema inverso é estabelecido quando este valor é desconhecido. As várias técnicas de solução de problemas inversos ou problemas de otimização têm como procedimento a avaliação de problemas diretos, várias vezes, sempre a partir de valores estimados ou calculados das densidades de fluxo de calor em um processo iterativo. Assim, a solução do problema direto dados pelas Eqs.(5.9) pode ser obtida diretamente da solução do problema (3.77) descrito no Capítulo 3 considerando-se um fluxo de calor transiente, q^+ , qualquer, porém conhecido.

Neste caso, uma vez conhecido q^+ as evoluções das temperaturas $T_1(x_1, y_1, z_1, t)$ e $T_2(x_2, y_2, z_2, t)$ são prontamente obtidas avaliando-se as integrais envolvidas na Eq.(3.78).

5.2.3 Análise e discussão de resultados

5.2.3.1 Obtenção de propriedades térmicas de uma amostra de ferro fundido usando DPT e soluções analíticas

Apresenta-se a seguir uma comparação entre resultados obtidos numericamente e analiticamente usando o algoritmo de estimação DPT. Como as temperaturas calculadas representam a solução do problema direto, para essa comparação são usados o fluxo de calor estimado no último passo do algoritmo de Borges, Lima e Silva & Guimarães (2006). O teste experimental analisado é representado por uma amostra de ferro fundido com largura de $65 [mm]$ e dimensões laterais $80,5 [mm] \times 80 [mm]$ com temperatura inicial $30^\circ C$ é submetida a um fluxo de calor unidirecional e uniforme. A taxa total de fluxo é fornecida por aquecedor de resistência elétrica de 318Ω , revestido por uma borracha de silicone, com dimensões laterais de $50 \times 50 [mm]$ e de espessura $0,3 [mm]$.

A Figura 5.4 apresenta os fluxos estimados a partir das soluções numéricas e analíticas e a Figura 5.5 os respectivos resíduos.

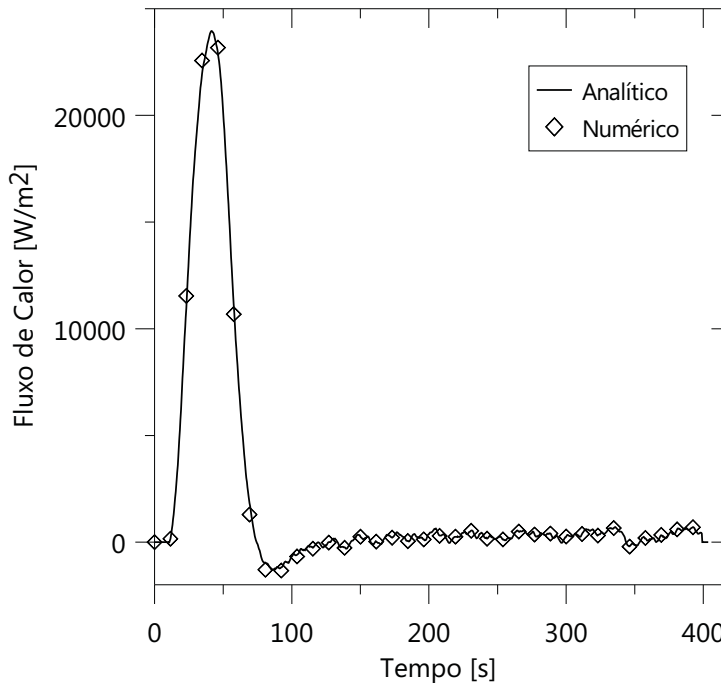


Figura 5.4: Fluxo de calor estimado analítica e numericamente para uma amostra de ferro fundido

Observa-se a boa concordância entre elas, verificando-se um desvio máximo entre os fluxos estimados em 3% (Fig.5.5). Na Figura 5.6 apresenta-se o cálculo da temperatura final, usando-se os dois métodos, a partir do respectivo fluxo estimado. Observa-se neste caso um

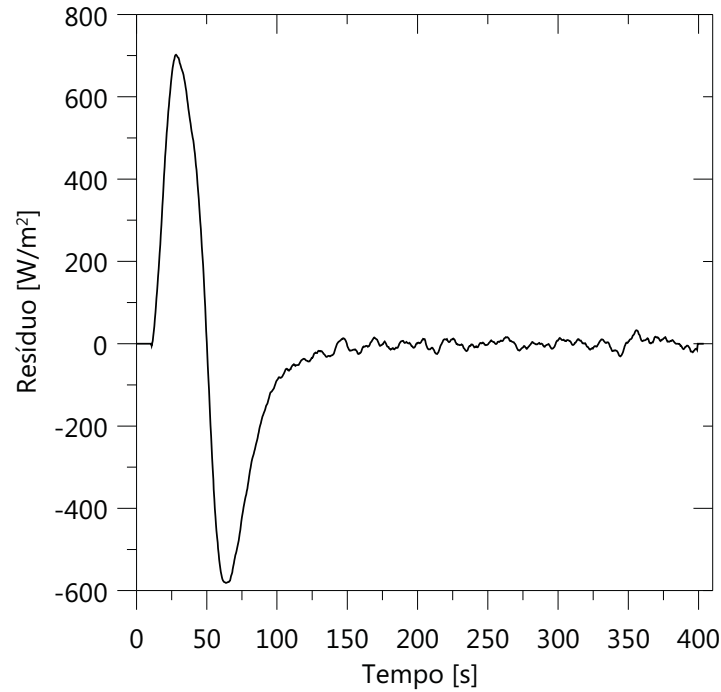


Figura 5.5: Resíduo entre os fluxos estimados analiticamente e numericamente pelo DPT

desvio máximo de 0,12K (0.4%) que inclui não só efeitos da dispersão numérica, mas também a influência de cada fluxo na solução (Figs.5.4-5.5).

Neste caso, a grande contribuição, pode então ser verificada no tempo computacional gasto usando-se a solução analítica, apresentada na Tabela 5.1. Observa-se, inicialmente que o desvio nas temperaturas e no fluxo de calor foram responsáveis por valores estimados para a condutividade e difusividade térmica, com um desvio de 1,7% e 2,6% respectivamente. Entretanto, a diferença entre os tempos computacionais obtidos nas estimativas para os dois procedimentos é da ordem de 7600 %. Observa-se que as propriedades térmicas são estimadas com o procedimento padrão (numérico) com um tempo computacional gasto de 6,4 horas. Uma vez implementada a solução analítica o tempo total gasto cai para 5 minutos. Este tempo corresponde a todos os procedimentos intermediários para a obtenção das propriedades, incluindo o processo de iterativo de otimização.

Tabela 5.1: Comparação entre valores estimados e tempo computacional gasto usando-se o DPT com as soluções numéricas e analíticas

Solução	Difusividade térmica [m^2/s]	Condutividade térmica [W/mK]	Tempo [s]
<i>Analítica</i>	$1.13 \times 10^{-5} \pm 0.023 \times 10^{-5}$	42.59 ± 0.51	305.00s (0.085h)
<i>Numérica</i>	$1.10 \times 10^{-5} \pm 0.017 \times 10^{-5}$	43.32 ± 0.39	23040.00s (6.4h)

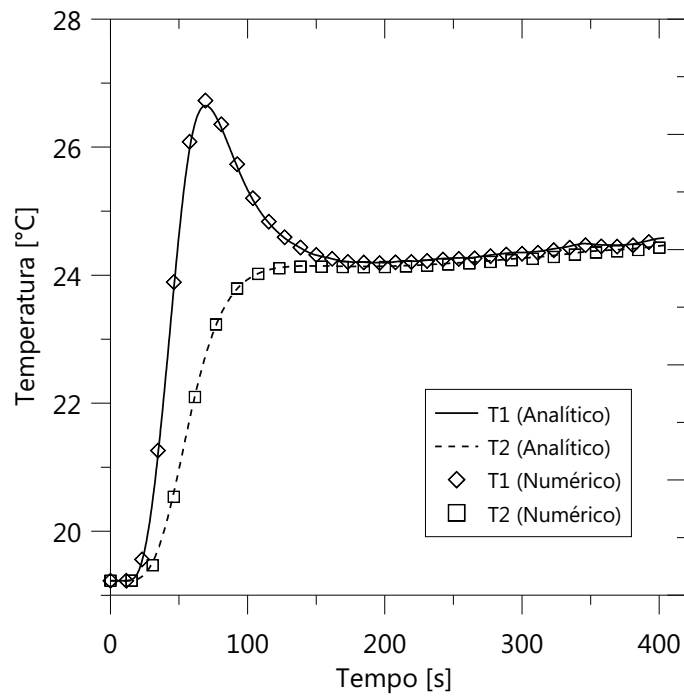


Figura 5.6: Temperaturas calculadas analítica e numericamente para uma amostra de ferro fundido a partir dos respectivos fluxo de calor estimados e apresentados na Fig.5.4

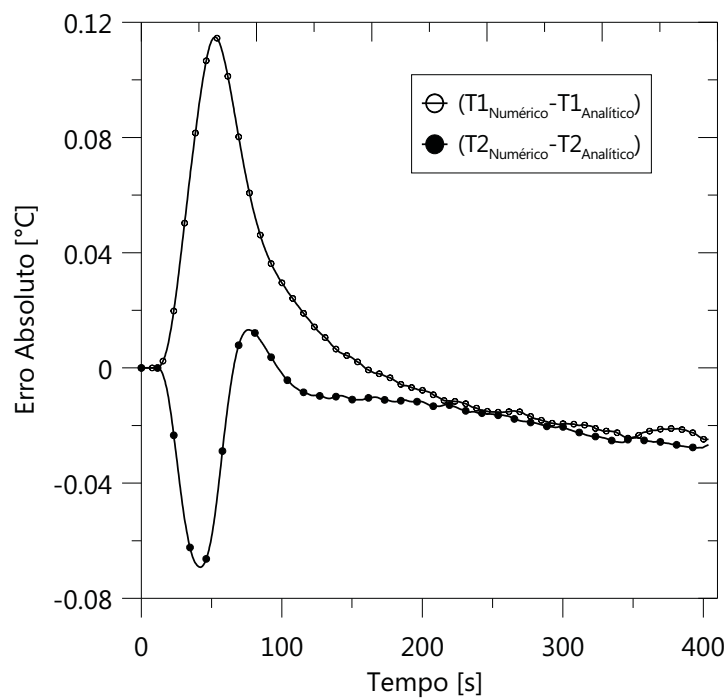


Figura 5.7: Resíduos entre as temperaturas calculadas analítica e numericamente para uma amostra de ferro fundido a partir dos respectivos fluxo de calor estimados e apresentados na Fig.5.4

5.3 Uso de Soluções Analíticas no Método de Observadores Dinâmicos Baseados em Funções de Green

Em muitos casos de engenharia, a solução do problema direto pode ser complexa, uma vez que alguns parâmetros do processo necessários à solução podem ser de difícil identificação. Neste caso, o uso de técnicas de problemas inversos surgem como alternativa.

Os problemas inversos possuem aplicações relevantes em várias áreas de atuação humana, com especial destaque para engenharia e medicina, podendo ser aplicados sob diversas formas. A principal característica deste tipo de abordagem é a obtenção da solução do problema físico de maneira indireta, como por exemplo, a determinação de campos térmicos em superfícies sem acesso. O problema é então resolvido a partir de informações oriundas de sensores localizados em pontos acessíveis. Descreve-se nesta seção o uso de soluções analíticas na técnica de observadores dinâmicos baseados em funções de Green desenvolvida por Sousa (2006).

A técnica dos observadores pode ser dividida em dois passos distintos: *i*) obtenção da função transferência do modelo térmico, G_H e; *ii*) obtenção das funções transferência G_Q , G_N e do algoritmo de identificação. A função transferência, G_H , é obtida de um sistema dinâmico usando a teoria de funções de Green. Neste caso, a modificação reside na obtenção analítica da função transferência ao invés da obtenção numérica. A grande contribuição do uso de soluções analíticas encontra-se na simplificação do procedimento inverso e na minimização de erros dando maior robustez e estabilidade à técnica.

5.3.1 Descrição de Observadores Dinâmicos Baseados em Funções de Green

A técnica baseada em funções de Green e observadores dinâmicos (SOUSA, 2006) baseia-se na obtenção da função transferência através do uso de funções de Green e da definição de sistemas dinâmicos equivalentes. A aplicação em problemas multidimensionais é imediata e permite a abordagem indistinta de um problema térmico uni, bi ou tridimensional, desde que as condições de contorno não ativas sejam homogêneas e o fluxo de calor desconhecido seja imposto em uma determinada região. A técnica inversa ainda incorpora parâmetros de ajuste que variam dependendo do nível de ruído presente nos dados experimentais. O algoritmo interpreta o problema inverso de condução de calor como um filtro passa-baixo das componentes do sinal de fluxo verdadeiro, enquanto rejeita as componentes de alta frequência evitando uma excessiva amplificação do efeito do ruído na estimação.

Dentre as características desta técnica inversa, citam-se o baixo custo operacional, sendo robusta quanto à sensibilidade a ruídos presentes nas medições experimentais. Além disso, a técnica apresenta um processo simples de implementação e é competitiva, se comparada às técnicas conhecidas de otimização do ponto de vista da obtenção de resultados Sousa (2006). Para melhor entender o funcionamento da técnica, faz-se uso de um problema 2D de condução de calor, mostrado a seguir.

Seja o problema térmico bidimensional transiente descrito pela equação da difusão de calor,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (5.11a)$$

na região R ($0 < x < L$, $0 < y < W$) e $t > 0$, sujeita às condições de contorno,

$$-k \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = q(t) \quad \text{em } S_1 \quad (0 \leq y \leq Y_H) \quad (5.11b)$$

$$-k \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad \text{em } S_2 \quad (0 \leq y \leq Y_H) \quad (5.11c)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=L} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=W} = 0 \quad (5.11d)$$

E condição inicial

$$\theta(x, y, 0) = T(x, y, t) - T_0 \quad (5.11e)$$

onde S é definido por ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq z \leq c$) e X_H e Z_H são os limites da região S_1 onde a taxa de calor é aplicada.

A solução das Eqs.(5.11) pode ser dada em termos de função de Green como

$$T(x, y, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \left[\int_0^{Y_H} G_H^+(x, y, t|x', y', \tau) q(\tau) dy' \right] d\tau \quad (5.12)$$

ou ainda

$$T(x, y, t) = \int_{\tau=0}^t [G_H^+(x, y, t/\tau) q(\tau)] d\tau \quad (5.13)$$

onde

$$G_H(x, y, t/\tau) = \frac{\alpha}{k} \int_0^{X_H} \int_0^{Y_H} G_H^+(x, y, t|x', y', \tau) \Big|_{y'=0} dx' dy' \quad (5.14)$$

então aplicando-se a definição de convolução (ÖZİŞİK, 1993), representada pelo símbolo (*), a Eq.(5.13) para uma temperatura localizada na superfície oposta da amostra, pode ser escrita como

$$T(x, y, t) = G_H(x, y, t - \tau) * q(\tau) \quad (5.15)$$

Se ainda, o modelo térmico da Fig.5.8 puder ser representado por um sistema dinâmico do tipo entrada/saída (BLUM; MARQUARDT, 1997) então aplicando transformada de Laplace (ÖZİŞİK, 1993) em ambos os lados da Eq.(5.15) obtém-se

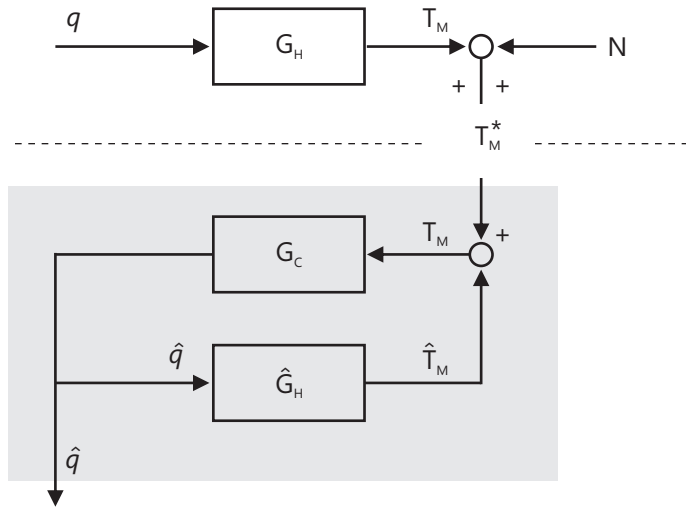


Figura 5.8: Diagrama de bloco de um sistema dinâmico

$$\overline{T}(x, y, s) = \overline{G}_H(x, y, s) \overline{q}(s) \quad (5.16)$$

Pode ser observado do diagrama de bloco que:

i) o fluxo de calor desconhecido $q(s)$ é aplicado ao condutor (modelo térmico), G_H , o que resulta em um sinal medido de temperatura θ_M que é corrompido por um ruído de medição

N ,

$$\theta_M = \theta + N = G_H \cdot q + N \quad (5.17)$$

ii) O valor estimado $\hat{q}$ é, assim, calculado do sinal de saída θ_M .

Neste caso, o estimador pode ser representado em forma de uma função transferência como

$$\hat{q} = \frac{G_c}{1 + G_c G_H} \theta_M \quad (5.18)$$

que caracteriza o comportamento do algoritmo de solução.

Substituindo a Eq.(5.17) na Eq.(5.18) obtém-se

$$\hat{q} = \frac{G_c G_H}{1 + G_c G_H} q + \frac{G_c}{1 + G_c G_H} N \quad (5.19)$$

ou

$$\hat{q} = G_Q q + G_N N \quad (5.20)$$

onde

$$G_Q = \frac{G_c G_H}{1 + G_c G_H} \quad \text{e} \quad G_N = \frac{G_c}{1 + G_c G_H} \quad (5.21)$$

A função transferência G_Q é escolhida ter um comportamento de um filtro *Chebyshev* tipo I cuja magnitude da resposta em frequência assume a forma

$$G_Q(s) = \frac{k_{cheb}}{(s - s_{cheb,1})(s - s_{cheb,2}) \dots (s - s_{cheb,n_Q})} \quad (5.22)$$

Por sua vez a função G_N é identificada pela Eq.(5.13) desde que G_H seja então obtida.

Assim, da Eq.(5.18) resulta o algoritmo de estimativa de q como sendo

$$\hat{q}(s) = G_N(s) \theta_M(s) \quad (5.23)$$

ou no domínio da frequência

$$\hat{q}(jw) = G_N(jw) \theta_M(jw) \quad (5.24)$$

Observa-se da Eq.(5.24) que se o algoritmo estima o fluxo de calor corretamente, G_Q deve ser igual a unidade, $G_Q = 1$, e a frequência w permanece dentro da banda de análise. Neste caso, a função transferência G_N é igual ao inverso da função transferência do condutor (modelo térmico) (G_H^{-1}).

Como o observador é um esquema "*on-line*", isto é, estima o fluxo requerido com base em medidas de temperaturas do tempo, atual e passado, isso acarreta uma mudança ou atraso de fase, interferindo nos valores estimados. Se o problema inverso for resolvido "*off-line*", o atraso de fase pode ser removido, adaptando uma filtragem de trás para frente. Neste caso, propõe-se a estimativa do fluxo através das equações no domínio do plano transformado z .

$$q(k) = \sum_{i=0}^{n_n} b_i Y_M(k-i) - \sum_{i=0}^{n_n} a_i q(k-i) \quad (5.25)$$

e

$$\hat{q}(k) = \sum_{i=0}^{n_n} b_i Y_M(k-i) - \sum_{i=0}^{n_n} a_i \hat{q}(k-i) \quad (5.26)$$

Os coeficientes a_i e b_i que aparecem nas Eqs.(5.25) e (5.26) são obtidas usando-se Eq.(5.21). Neste caso, o procedimento inverso é concluído com a identificação de $\overline{G}_H(x, y, s)$.

Um trabalho anterior apresentado por Sousa (2006) propõe a identificação de $\overline{G}_H(x, y, s)$ baseada na correlação cruzada de duas funções randômicas e no ajuste polynomial de funções em um determinado intervalo de amostragem. Embora eficiente, esta técnica requer alguma habilidade e conhecimentos matemáticos mais profundos devido à complexidade do procedimento de otimização.

Um procedimento mais simples e direto é proposto aqui. Ou seja, propõe-se a obtenção da função transferência $\overline{G}_H(x, y, s)$ de forma exata e analítica.

5.3.2 Obtenção analítica do modelo térmico e da função transferência, G_H

Se o sistema dinâmico é linear e fisicamente invariável a resposta da função de transferência $G_H(r_i, s)$ é a mesma. Observa-se que como r_i é uma representação generalizada para coordenadas cartesianas, pode-se representar um problema uni, bi ou tridimensional, independente do par entrada/saída (SOUSA, 2006). Assim, a função de transferência do modelo ($G_H(r_i, s)$) pode ser obtida através de um problema auxiliar que é uma versão homogênea do problema original. O problema auxiliar é então resolvido para a mesma região com, tem-

peratura inicial zero e uma fonte de impulso unitário localizada na mesma região da fonte de calor no problema original. A solução obtida para o problema auxiliar é representada por $\bar{T}^+(r_i, s)$ (obtido na seção anterior) e portanto $G_H(r_i, s)$ pode ser obtida usando a relação:

$$\bar{G}_H(r_i, s) = s\bar{T}^+(r_i, s) \quad (5.27)$$

onde s e $\bar{T}^+(r_i, s)$ representam, respectivamente, a transformada no domínio de Laplace de uma constante unitária e o calor imposto no problema auxiliar.

A solução analítica para o problema auxiliar definido pela imposição de um fluxo unitário, na mesma região onde do fluxo de calor do problema original e com temperatura inicial igual a zero.

Ou seja,

$$q = 1 \frac{W}{m^2} \quad \text{na superfície } S_1 \text{ e } q = 0 \text{ na superfície } S_2 \quad (5.28)$$

pode ser escrita em termos de funções de Green e usando-se um procedimento similar àquele empregado no Capítulo 3

$$\theta^+(x, y, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{y'}^{Y_H} \int_{\tau=0}^t G_{XY}(x, y, t|x', y', t - \tau)|_{x'=0} d\tau dy' \quad (5.29)$$

onde

$$G_{XY}(x, y, t|x', y', t - \tau) = G_X(x, t|x', \tau)G_Y(y, t|y', \tau) \quad (5.30)$$

Como as condições de contorno são homogêneas e iguais em ambas as direções x e y , as funções de Green em cada direção podem ser escritas como,

$$G_X = \frac{1}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-A_m t} \frac{\cos\left(\frac{\beta_m x}{L}\right) \cos\left(\frac{\beta_m x'}{L}\right)}{N_1} \quad (5.31)$$

e

$$G_Y = \frac{1}{W} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-B_n t} \frac{\cos\left(\frac{\gamma_n y}{W}\right) \cos\left(\frac{\gamma_n y'}{W}\right)}{N_2} \quad (5.32)$$

onde $\frac{1}{N_1} = \frac{2}{L}$, $\frac{1}{N_2} = \frac{2}{W}$, $\beta_m = m\pi$, $\gamma_n = n\pi$, $A_m = \left(\frac{\beta_m}{L}\right)^2$ e $B_n = \left(\frac{\gamma_n}{W}\right)^2$

Substituindo as Eqs.(5.31) e (5.32) na Eq.(5.29) tem-se

$$\begin{aligned} \theta^+(x, y, t) = & \left[\sum_{m=1}^{\infty} AX_m + \sum_{n=1}^{\infty} AY_n + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} AXY_{mn} \right] + A_1 t \\ & - \left[\sum_{m=1}^{\infty} AX_m e^{-A_m t} + \sum_{n=1}^{\infty} AY_n e^{-B_n t} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} AXY_{mn} e^{-F_{mn} t} \right] \end{aligned} \quad (5.33)$$

onde

$$\begin{aligned} AX_m &= \frac{1}{kL} W_1 W^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\beta_m^2 x/L)}{N_1 \beta_n}; \\ AY_n &= \frac{\alpha}{kL} \cos(\gamma_n y/W) W \frac{\sin(\gamma_n^2 W_1/W)}{N_2 \gamma_n^2} \frac{1}{B_n}; \\ A_1 &= \frac{\alpha}{k} \frac{W_1}{WL}; \\ AXY_{mn} &= \frac{\alpha}{k} \left(\frac{\cos(\beta_n x/L)}{N_1} \frac{\cos(\gamma_n y/W)}{N_2} \right) W \frac{\sin(\gamma_n W_1/W)}{\gamma_n} \frac{1}{F_n} \\ F_{mn} &= A_m + B_n = \left(\frac{\beta_m^2}{L^2} + \frac{\gamma_n^2}{W^2} \right) \alpha; \end{aligned}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace na Eq.(5.33) obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^+(x, y, s) = & \left[T_0 + \sum_{m=1}^{\infty} AX_m + \sum_{n=1}^{\infty} AY_n + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} AXY_{mn} \right] \frac{1}{s} + A_1 \frac{1}{s^2} \\ & - \left[\sum_{m=1}^{\infty} AX_m \frac{1}{s + A_m} + \sum_{n=1}^{\infty} AY_n \frac{1}{s + B_n} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} AXY_{mn} \frac{1}{s + F_{mn}} \right] \end{aligned} \quad (5.34)$$

E, assim, a função de transferência no domínio de Laplace pode ser obtida substituindo Eq.(5.34) na Eq.(5.27), ou seja

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^+(x, y, s) = s\bar{\theta}^+(x, y, s) = & \left[T_0 + \sum_{m=1}^{\infty} AX_m + \sum_{n=1}^{\infty} AY_n + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} AXY_{mn} \right] + A_1 \frac{1}{s} \\ & - \left[\sum_{m=1}^{\infty} AX_m \frac{s}{s + A_m} + \sum_{n=1}^{\infty} AY_n \frac{s}{s + B_n} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} AXY_{mn} \frac{s}{s + F_{mn}} \right] \end{aligned} \quad (5.35)$$

Uma vez que, a Eq.(5.35) não apresenta nenhum pólo para $s > 0$, esta inversão é estável, o que garante mais robustez ao algoritmo inverso.

5.3.3 Análise e discussão de resultados

Esta seção apresenta alguns testes experimentais, simulados e controlados, que visam explorar a técnica inversa apresentada por Sousa (2006) a partir do uso de soluções analíticas.

5.3.3.1 Caso simulado: Função de transferência analítica

O problema 2D (Eq.(5.11)) é revisto nesta seção. A distribuição de temperatura para o problema direto é gerada através da solução da Eq.(5.12), considerando uma evolução de fluxo de calor conhecida ($q(t)$). Erros aleatórios são adicionados a estas temperaturas. As temperaturas corrompidas são então usadas como dados de entrada, no algoritmo inverso, para reconstruir o fluxo de calor imposto. As temperaturas simuladas são calculadas a partir da seguinte equação.

$$Y(L, t) = T(L, t) + \varepsilon_j \quad (5.36)$$

onde ε_j representa um número randômico com distribuição uniforme no intervalo de $[0, 1]$.

Os testes simulam uma amostra de aço inox AISI 304 exposta a uma fonte de calor. Dois fluxos diferentes de calor são impostos a amostra: *i)* fluxo de calor senoidal e, *ii)* fluxo de calor triangular. O parâmetro ε_j assume valores na faixa de $\pm 5^\circ C$ para o caso senoidal e, na faixa de $\pm 1^\circ C$ no caso de fluxo triangular. Ambos os ruídos representam 5% da temperatura máxima em cada caso.

As Figuras 5.9 e 5.10 apresentam as temperaturas experimentais simuladas para a posição 1, e obtidas com os diferentes fluxos de calor senoidal e triangular, respectivamente. As posições dos quatro termopares virtuais são denominadas 1, 2, 3 e 4 e apresentadas na Tabela 5.2. Apresentam-se inicialmente as estimativas obtidas a partir de um único perfil de temperatura (sensor 1) e em seguida com todos os "sensores".

Tabela 5.2: Geometria e posições dos termopares simulados para os testes 1

$Y_H = 0.01 [m]$	$L = 0.01 [m]$	$W = 0.03 [m]$
Posição	$x_i 10^{-3} [m]$	$y_i 10^{-3} [m]$
1	5.0	0.0
2	0.0	15.0
3	10.0	15.0
4	5.0	30.0

As estimativas usando-se a solução analítica e numérica são comparadas nas Figuras 5.11 a 5.14 para os dois tipos de fluxo testados (senoidal e triangular) respectivamente. Observa-se

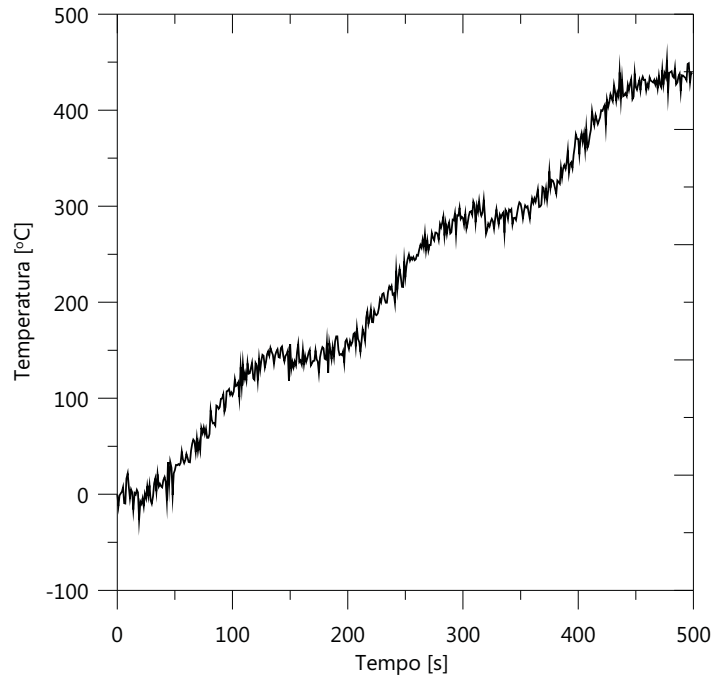


Figura 5.9: Temperatura experimental simulada numericamente na posição 1 para fluxo de calor senoidal

uma a boa concordância entre eles, sendo um desvio máximo obtido de 18% e 3% para os fluxos senoidal e triangular. As figuras apresentam, também, o fluxo de calor real imposto em cada teste.

A grande vantagem, neste caso, do uso da forma analítica da G_H é a facilidade em se obter os valores de temperatura para qualquer posição no modelo, enquanto que na técnica original, com aproximação numérica, cada termopar deve ser tratado individualmente, o que requer mais passos e com isso maior tempo computacional. Além disso, a estimativa, obtida com a função analítica, é mais aproximada que a obtida com a técnica original, como pode ser observado nas (Fig.5.11 e Fig.5.13). Em ambos os testes o fluxo estimado com a técnica modificada, ou seja, usando a G_H analítica, fornece melhores resultados.

5.3.3.2 Caso Simulado: múltiplos sensores

Sabe-se que o uso de informações de mais de uma temperatura simultâneas atenua os efeitos de ruídos e a baixa sensibilidade das medições, proporcionando uma estimativa mais precisa (BECK; ARNOLD, 1977). Estas informações, por sua vez, podem ser obtidas do modelo analítico sem qualquer esforço adicional, uma vez que a solução é válida para qualquer posição e instante.

Apenas para demonstrar a melhoria do uso de mais de uma informação de temperatura,

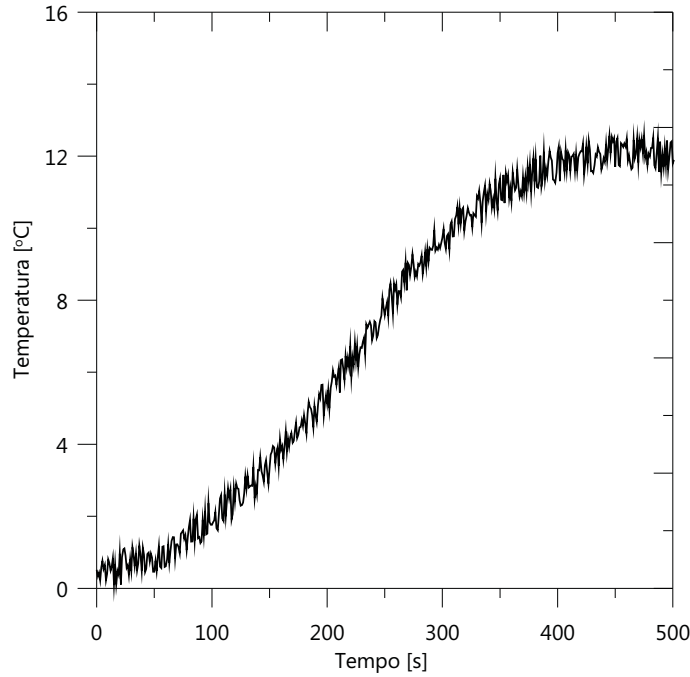


Figura 5.10: Temperatura experimental simulada numericamente na posição 1 para fluxo de calor triangular

apresenta-se na Figura 5.15 uma comparação entre a estimação do fluxo de calor obtida a partir de informações de um único sensor e a estimação, para o fluxo de calor, obtida usando uma função de transferência global, ou seja, equivalente aos quatro termopares simultaneamente, denominada função global (SOUSA *et al.*, 2008).

Observa-se que usando a função de transferência global, resultados melhores podem ser obtidos. A Figura 5.16 apresenta a comparação entre o fluxo de calor calculado com a G_H analítica e o fluxo de calor estimado usando a função de transferência global, obtida com aproximação numérica. A Figura 5.17 mostra o desvio residual. Os bons resultados obtidos demonstram a flexibilidade da técnica para lidar com um problema real onde vários termopares podem estar localizados na amostra. Nota-se que apesar de ambos os resultados estarem bem próximos do fluxo de calor real imposto, o fluxo de calor estimado usando a função de transferência analítica ainda apresenta resultados mais precisos. Este comportamento fica claro na análise do resíduo, Fig.5.17.

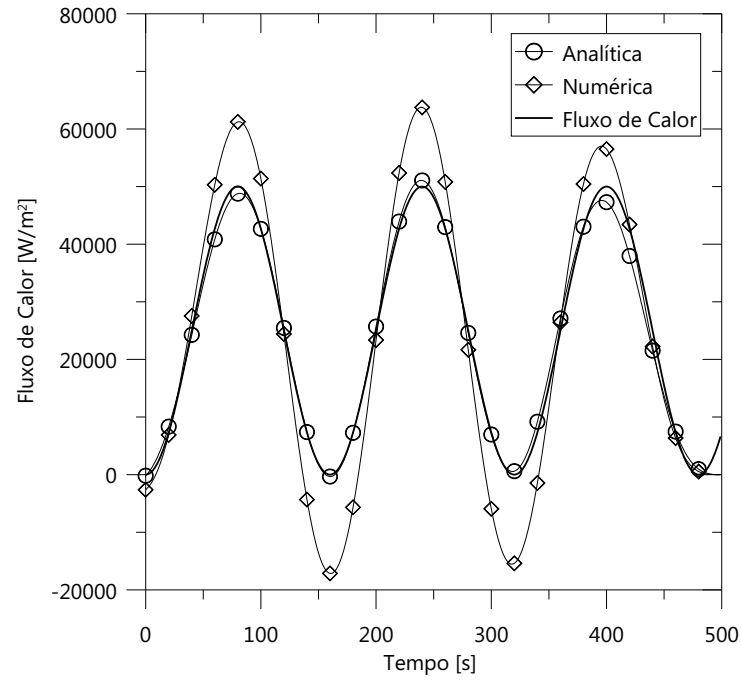


Figura 5.11: Componentes do fluxo de calor senoidal estimado e imposto

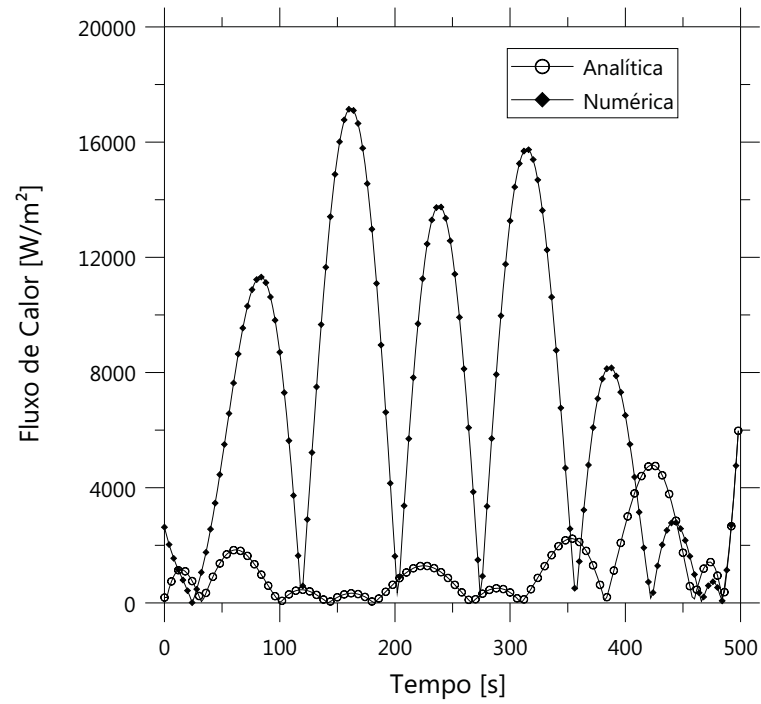


Figura 5.12: Resíduo do fluxo de calor senoidal estimado e imposto

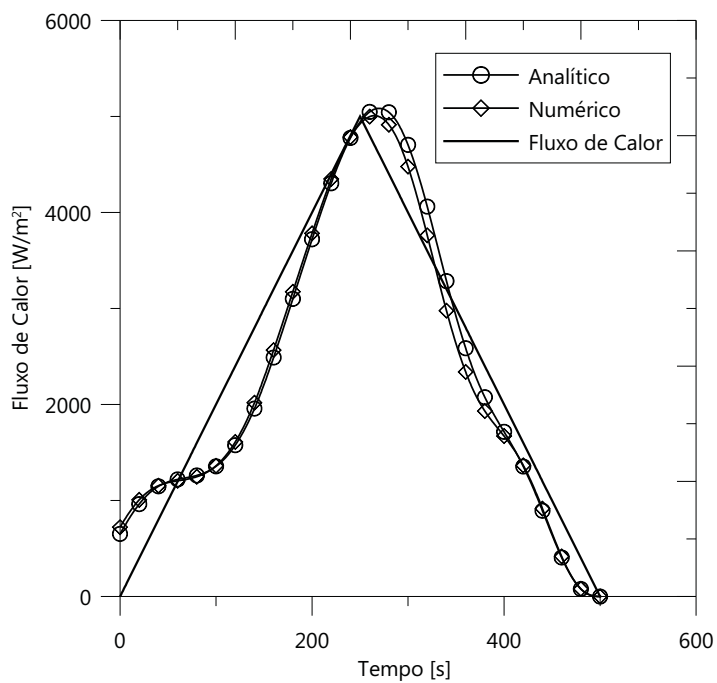


Figura 5.13: Componentes do fluxo de calor triangular estimado e imposto

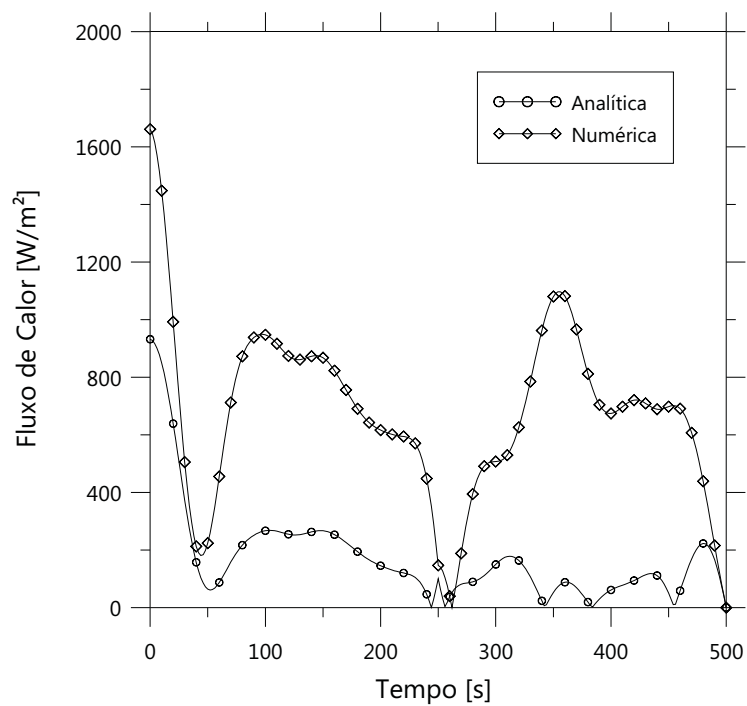


Figura 5.14: Resíduo do fluxo de calor triangular estimado e imposto

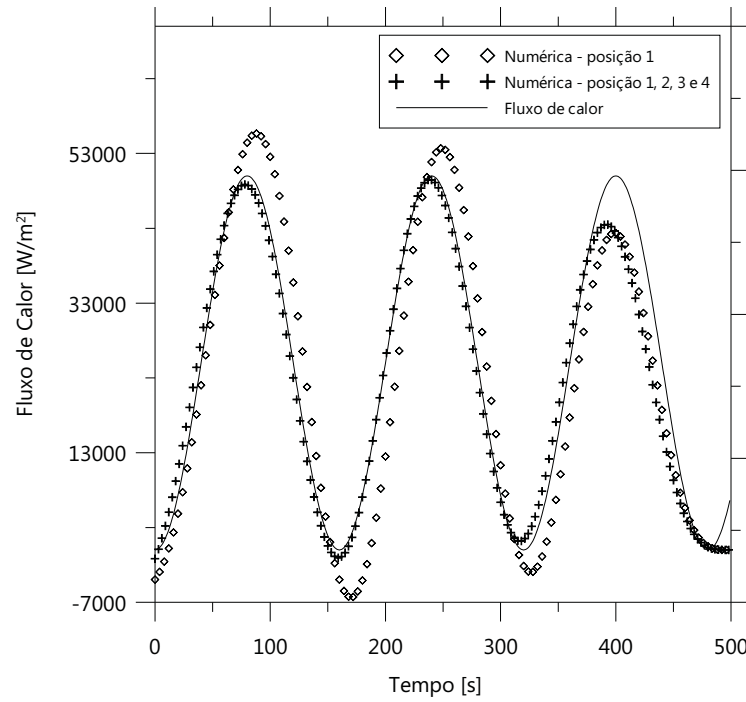


Figura 5.15: Comparação entre fluxos de calor senoidal estimado e imposto usando G_H numérica.

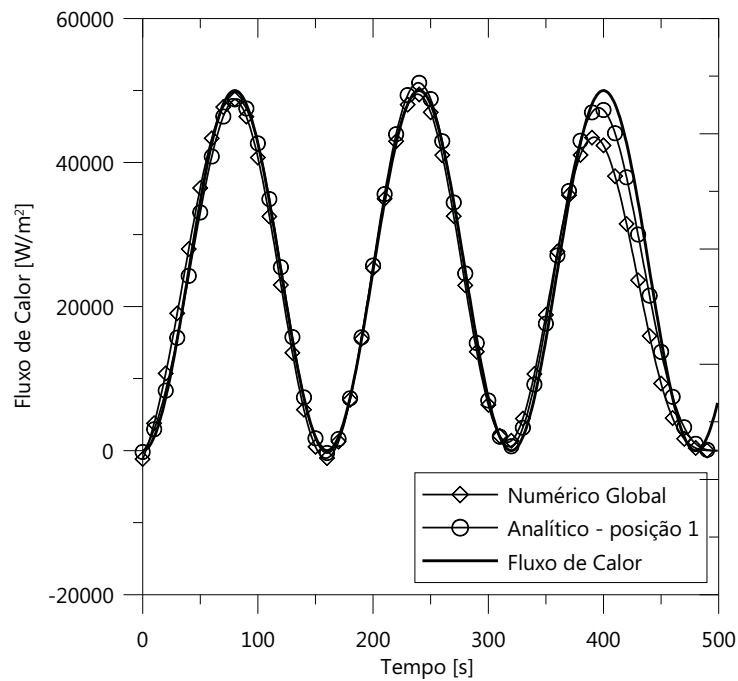


Figura 5.16: Comparação entre fluxos de calor senoidal estimado e imposto usando G_H global obtido numericamente e G_H analítico.

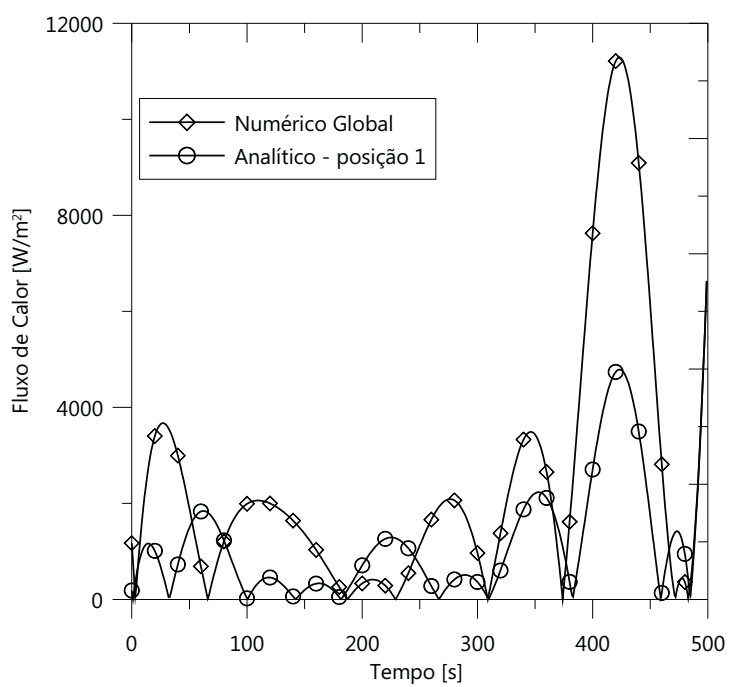


Figura 5.17: Erro entre os fluxos de calor senoidal estimado e imposto usando G_H global obtido numericamente e G_H analítico.

5.3.3.3 Teste experimental: Múltiplos sensores

A Figura 5.18 e Tabela 5.3 apresentam, respectivamente, a geometria e a posição dos termopares na amostra de aço, AISI 304, que fez parte do experimento controlado desenvolvido no LTCM/UFU.

Tabela 5.3: Geometria e posições dos termopares simulados para os testes 2

$Y_H = 0.01 [m]$	$L = 0.006 [m]$	$W = 0.138 [m]$	$t = 0.05 [m]$
Posição	$x_i 10^{-3} [m]$	$y_i 10^{-3} [m]$	$z_i 10^{-3} [m]$
1	11.5	62.5	25
2	0.0	62.5	25
3	10.0	86.0	25

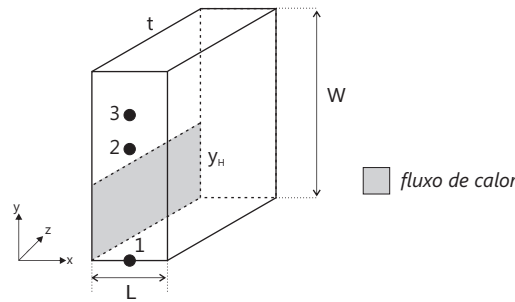


Figura 5.18: Esquema da amostra experimental e posição dos termopares.

A amostra de aço inoxidável AISI304, usada no experimento, tem espessura de 6 mm e dimensões laterais de $50 \times 138 \text{ mm}$. A amostra, inicialmente em equilíbrio térmico a uma temperatura T_0 , é então submetida a um fluxo de calor unidirecional. O fluxo de calor é alimentado por um aquecedor de resistência elétrica de 318Ω , coberto por borracha de silicone, com dimensões laterais de $50 \times 50 \text{ mm}$ e espessura de 0.3 mm . As temperaturas são medidas usando termopares de contato (tipo k). Os sinais de tensão e temperatura são adquiridos por um sistema de aquisição de dados HP Series 75000 com voltímetro E1326B controlado por computador pessoal. Três termopares foram fixados na amostra. O sinal adquirido para cada termopar é mostrado na Fig.5.19.

A Figura 5.20 mostra o fluxo de calor estimado usando os observadores com a função analítica. Visando avaliar os resultados, as temperaturas obtidas experimentalmente foram comparadas com as temperaturas estimadas, obtidas através da solução do problema direto considerando o fluxo de calor estimado como entrada. Esta comparação é mostrada na Fig. 5.20. O resíduo, fruto da diferença entre a temperatura experimental e temperatura estimada pela técnica de observadores dinâmicos é apresentado na Fig. 5.21. Os resultados

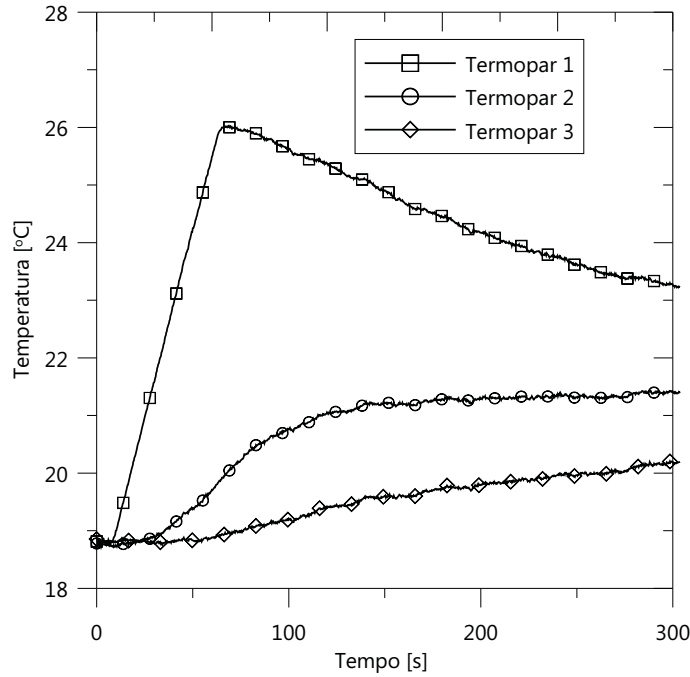


Figura 5.19: Evolução da temperatura experimental para os termopares 1, 2 e 3 Tab.5.22.

mostram uma diferença menor que $0,3^{\circ}C$ que é igual à incerteza dos termopares usados no experimento.

Para assegurar a confiança dos resultados, a energia total imposta pela resistência elétrica durante o tempo total do experimento, $368J$, foi comparada com faixa total de calor estimada, ou seja, a energia estimada, que é obtida integrando o fluxo de calor estimado no tempo de duração do experimento que foi calculada em $390J$. Neste caso, a incerteza foi menor que 3% para a técnica de observadores com funções analíticas.

Resíduo entre temperaturas medida experimentalmente e estimada usando o fluxo de calor estimado pela técnica de observadores e G_H global.

A grande vantagem da técnica baseada em observadores dinâmicos modificada é a facilidade e rapidez de implementação numérica para qualquer tipo de problema, 1D, 2D ou 3D (SOUSA *et al.*, 2008). O uso das funções analíticas e global, garantem um resultado mais preciso, aumentando a robustez e mantendo o baixo custo computacional. A obtenção da função de transferência 3D analítica (apresentada para a primeira aplicação deste capítulo) pode ser implementada imediatamente.

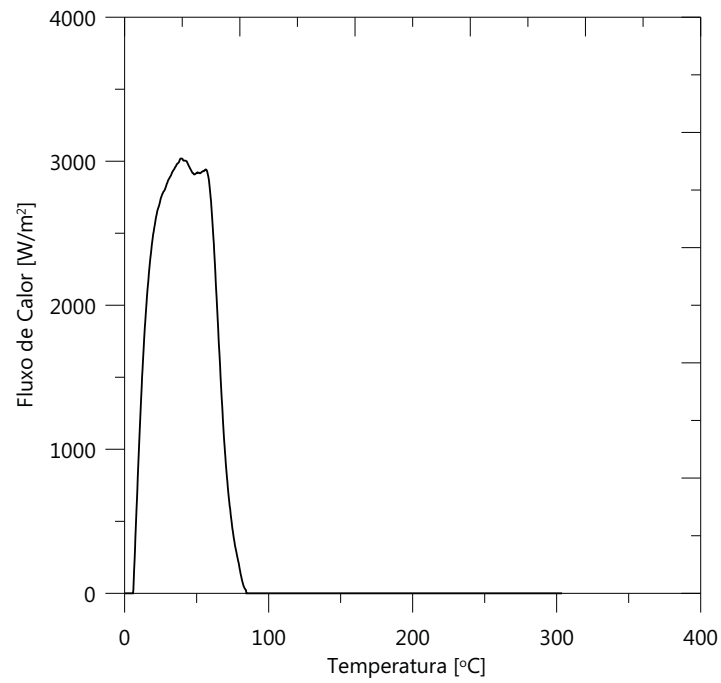


Figura 5.20: Estimativa do fluxo de calor usando observadores dinâmicos com G_H analítica.

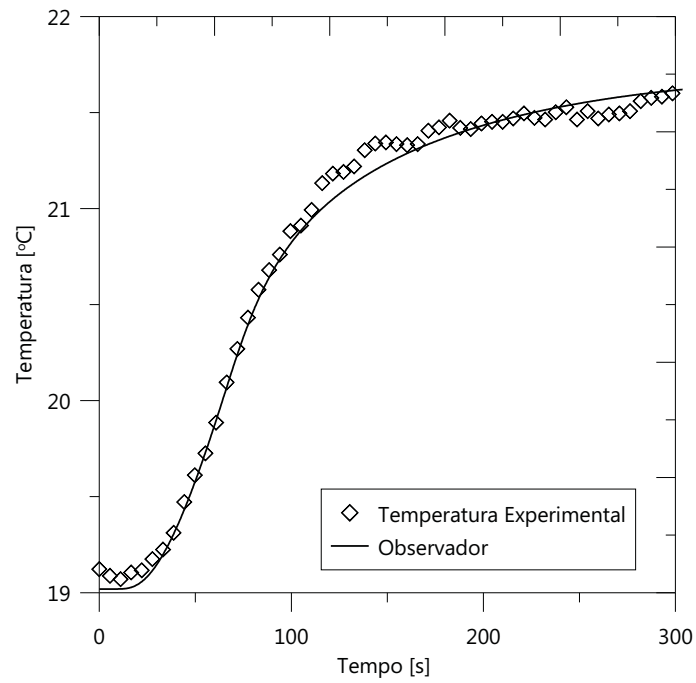


Figura 5.21: Comparação entre as temperaturas medida e estimadas

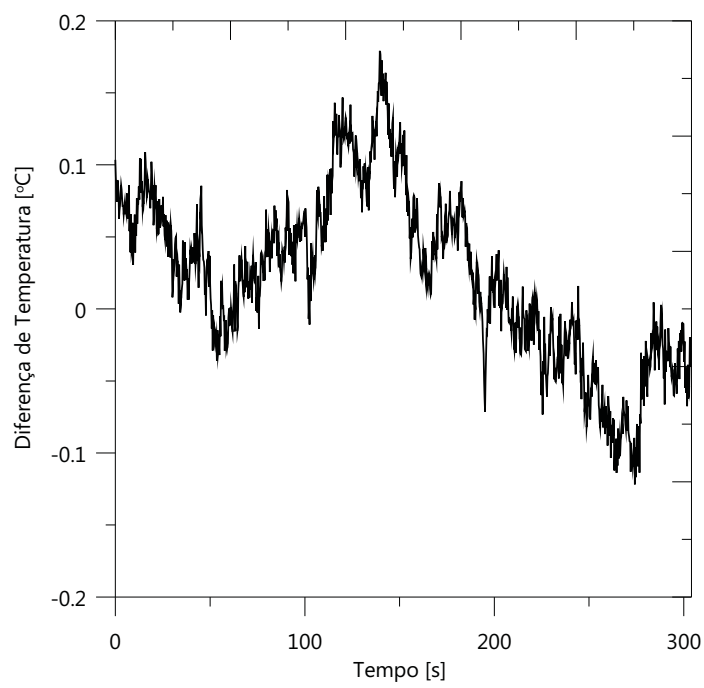


Figura 5.22: Diferença entre as temperaturas medida e estimadas

Capítulo 6

Conclusão

Propôs-se aqui a obtenção e o uso de soluções matemáticas que descrevessem fenômenos físicos importantes e presentes em aplicações de engenharia, como os problemas térmicos decorrentes de um processo de usinagem ortogonal em uma peça. Além disso, também se propôs o uso destas soluções em problemas de identificação de propriedades termofísicas e sua aplicação em técnicas de otimização. Um objetivo secundário, também proposto foi uma apresentação didática das obtenções das soluções analíticas propriamente ditas. Observa-se, por meio de uma análise dos resultados apresentados ao longo deste trabalho que os objetivos iniciais foram alcançados de forma satisfatória.

Inicialmente apresentou-se a equação-solução de um problema de condução de calor baseada em funções de Green (FG) através da abordagem de um problema geral de condução de calor unidimensional transiente com geração de calor variando com espaço e tempo e sujeito a condições de contorno não homogêneas. Embora este problema geral não tenha sido resolvido integralmente vários aspectos físicos, matemáticos e as principais características das soluções por FG foram discutidas. Posteriormente, vários problemas térmicos foram propostos e resolvidos, em ordem crescente de dificuldade, sendo apresentado também um rápido estudo das obtenções matemáticas dos autovalores. Observa-se que sempre que a convecção de calor esteja presente, existe alguma dificuldade na obtenção destes parâmetros. Um método prático e eficiente foi apresentado para a sua obtenção.

A aplicação direta de soluções analíticas no desenvolvimento de técnicas de problemas inversos voltados a aplicação de problemas térmicos foi realizada com sucesso. Especificamente, foram introduzidas soluções analíticas em técnicas experimentais para a obtenção de propriedades térmicas e para as estimativas de fluxo de calor em problemas inversos de condução de calor. Uma vez que os algoritmos inversos usualmente necessitam do cálculo do problema direto várias vezes, o uso de soluções analíticas, neste caso, contribuiu não só para

o aumento da precisão destas técnicas, mas também para a redução drástica de seu tempo computacional. A aplicação apresentada neste trabalho referiu-se a incorporação de soluções analíticas no código de otimização DPT para a estimativa de propriedades térmicas de amostras sólidas de geometria retangular usando o método de aquecimento parcial desenvolvido por Borges et al, (2006). Esta aplicação permitiu uma redução da ordem de 1600% (o tempo gasto de 6h foi reduzido a 5 minutos) no tempo computacional gasto em relação ao uso do algoritmo com soluções numéricas. A inserção das soluções analíticas permitiu também uma maior precisão nas estimativas.

A outra aplicação, referiu-se ao uso direto de uma solução analítica de um modelo 2D transiente em uma técnica inversa baseada em observadores dinâmicos. A solução analítica, neste caso, contribuiu para o aumento da robustez, da precisão da técnica e com, certeza, com o seu desenvolvimento.

A modelagem analítica de um problema de usinagem ortogonal foi também abordada neste trabalho, embora, neste caso, não tenha sido completamente explorada. Porém, o modelo térmico desenvolvido neste trabalho tem todas as possibilidades de ser aplicado à uma ferramenta de usinagem e ser acoplado a um modelo mais completo, em dois domínios, que envolva também o porta ferramentas.

Propostas de trabalhos futuros

O uso de soluções analíticas em diversos problemas térmicos demonstrou ser uma grande alternativa, principalmente quando se trata de sua aplicação em problemas inversos ou de otimização. Portanto, propõe-se como trabalhos futuros a investigação destas soluções e sua aplicação em:

1. Problemas de soldagem ou problemas térmicos que envolvam fontes móveis. Observa-se que neste caso as soluções analíticas existentes baseiam-se em modelos extremamente modificados, havendo neste campo grandes possibilidades de contribuição no desenvolvimento de modelos térmicos mais completos como as soluções analíticas baseadas em funções de Green.;
2. Desenvolvimento e concepção de soluções inversas usando Funções de Green e o método quadrupolo que possibilitem a inversão direta de funções transferência analítica. Um exemplo destas técnicas pode ser o desenvolvimento da técnica dos observadores dinâmicos baseados em funções de Green;
3. Modelagem completa de problemas térmicos decorrentes de usinagem ortogonal. Neste caso, devem ser desenvolvidas soluções em mais de um domínio para se abordar de maneira completa este problema;
4. Desenvolvimento de técnicas inversas que possibilitem a estimativa de mais de uma componente de fluxo de calor.

Referências Bibliográficas

ABU-HAMDEH, N. H.; KHDAIR, A. I.; REEDER, R. C. A comparison of two methods used to evaluate thermal conductivity for some soils. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 44, n. 5, p. 1073–1078, 2001.

ABUKHSHIM, N. A.; MATIVENGA, P. T.; SHEIKH, M. A. Heat generation and temperature prediction in metal cutting: A review and implications for high speed machining. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, v. 46, n. 7-8, 2006.

ALBERS, A. P. F. *et al.* Effect of testing conditions on the laser flash thermal diffusivity measurements of ceramics. *thermochimica acta* 370. *Thermochimica Acta*, v. 370, n. 1-2, p. 111–118, 2001.

ARPACI, V. S. *Conduction Heat Transfer*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1966.

AVILES-RAMOS, C. *et al.* Estimation of thermophysical properties by the spectral method-deveopment and evaluation. *Journal of Heat Transfer*, v. 123, n. 24, p. 24–30, 2001.

BECK, J. V.; ARNOLD, K. J. *Parameter estimation in engineering and science*. New York, NY: Wiley, 1977.

BECK, J. V.; BLACKWELL, B.; ST. CLAIR, C. R. *Inverse Heat Conduction: Ill-posed Problems*. New York, NY: Wiley-Interscience, 1995.

BECK, J. V. *et al.* *Heat Conduction Using Green's Function*. Washington, DC: Hemisphere Publishing, 1992.

BECK, J. V. *et al.* Verification solution for partial heating of rectangular solids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 47, n. 19-20, p. 4243–4255, 2004.

BECK, J. V. *et al.* Intrinsic verification methods in linear heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 49, p. 2984–2994, 2006.

BECK, J. V. *et al.* Conduction in rectangular plates with boundary temperatures specified. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 51, n. 19-20, p. 4676–4690, 2008.

BLACKWELL, J. H. A transient-flow method for determination of thermal constants of insulating materials in bulk Part I - Theory. *Journal of Applied Physics*, AIP, v. 25, n. 2, p. 137–144, 1954.

BLUM, J. W.; MARQUARDT, W. An optimal solution to inverse heat conduction problems based on frequency-domain interpretation and observers. *Numerical Heat Transfer. Part B, fundamentals*, v. 32, n. 4, p. 453–478, 1997.

BOOTHROYD, G. Temperatures in orthogonal metal cutting. *Proceedings - Institution of Mechanical Engineers*, v. 177, n. 29, p. 789–802, 1963.

BORGES, V. L.; LIMA E SILVA, S. M. M.; GUIMARÃES, G. A dynamic thermal identification method applied to conductor and nonconductor materials. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 14, n. 5, p. 511–527, 2006.

CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. *Conduction of Heat in Solids*. 2. ed. Oxford: Clarendon Press, 1959.

COQUARD, R.; BAILLIS, D.; QUENARD, D. Experimental and theoretical study of the hot-wire method applied to low-density thermal insulators. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 49, n. 23-24, p. 4511–4524, 2006.

DEGIOVANNI, A. Conduction dans un mur multicouche avec sources: extension de la notion de quadripoles. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 31, n. 3, p. 553–557, 1988.

DOWDING, K. J.; BECK, J. V.; BLACKWELL, B. F. Estimation of directional-dependent thermal properties in a carbon-carbon composite hr. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 39, n. 15, p. 3157–3164, 1996.

GRAZZINI, G.; BALOCCO, C.; LUCIA, U. Measuring thermal properties with the parallel wire method: a comparison of mathematical models. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 39, n. 10, p. 2009–2013, 1996.

GROSS, U.; LE-THANH-SON, T. Radiation effects on transient hot-wire measurements in absorbing and emitting porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 47, n. 14-16, p. 3279–3290, 2004.

GUIMARÃES, G.; PHILIPPI, P. C.; THERY, P. Use of parameters estimation method in the frequency domain for the simultaneous estimation of thermal diffusivity and conductivity. *Review of Scientific Instruments*, v. 66, n. 3, p. 2582–2588, 1995.

HAJI-SHEIK, A.; BECK, J. V. An efficient method of computing eigenvalues in heat conduction. *Numerical heat transfer. Part B, fundamentals*, v. 38, n. 2, p. 133–156, 2000.

HAJI-SHEIKH, A.; AMOS, D. E.; BECK, J. V. Temperature field in a moving semi-infinite region with a prescribed wall heat flux. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 7-8, 2009.

HAJI-SHEIKH, A.; BECK, J. V. Temperature solution in multidimensional multi-layer bodies. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 45, n. 9, p. 1865–1877, 2002.

HAJI-SHEIKH, A.; BECK, J. V.; AGONAFER, D. Steady-state heat conduction in multi-layer bodies. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 46, n. 13, p. 2363–2379, 2003.

LIMA E SILVA, S. M. M.; ONG, T. H.; GUIMARÃES, G. Thermal properties estimation of polymers using only one active surface. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 25, n. 1, 2003.

LOEWEN, E. G.; SHAW, M. C. On the analysis of cutting tool temperatures. *Trans. ASME*, n. 76, p. 217–231, 1954.

LONGBOTTOM, J. M.; LANHAM, J. D. Cutting temperature measurement while machining - a review. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, v. 77, n. 2, p. 122–130, 2005.

MACMASTERS, R. L. *et al.* Methodology to generate accurate solutions for verification in transient three-dimensional heat conduction. *Numerical Heat Transfer. Part B, fundamentals*, v. 41, n. 6, p. 521–541, 2002.

MAILLET, D.; MOYNE, C.; REAMY, B. Effect of a thin layer on the measurement of the thermal diffusivity of a material by a flash method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, n. 43, p. 4057–4060, 2000.

MILOSEVIC, N. D.; RAYNOUD, M. Analytical solution of transient heat conduction in a two-layer anisotropic cylindrical slab excited superficially by a short laser pulse. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 47, n. 8-9, 2004.

MURPHY, F. *et al.* Development of an algorithm to extract thermal diffusivity for the radial converging wave technique. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 48, n. 7, p. 1395–1402, 2005.

NICOLAU, V. P.; GÜTHS, S.; SILVA, M. G. Medição da condutividade térmica e do calor específico de materiais isolantes. In: 9 (Ed.). *Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas*. Caxambu-MG: ABCM - Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, 2002. CIT02-0529.

ÖZİŞİK, M. N. *Heat Conduction*. 2. ed. Nova Iorque, NY: John Wiley & Sons, 1993.

PARKER, W. J. *et al.* Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity. *Journal of Applied Physics*, v. 32, n. 9, p. 1679–1684, 1961.

RADULESCU, R.; KAPOOR, S. G. An analytical model for prediction of tool temperature fields during continuous and interrupted cutting. *Journal of engineering for industry*, v. 116, n. 2, p. 135–143, 1994.

SOUSA, P. F. B. *Development of Dynamic Observers Based on Green's Functions to be Applied in Inverse Heat Conduction Problem*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2006.

SOUSA, P. F. B. *et al.* Dynamic observer method based on modified green's functions for robust and more stable inverse algorithms. In: *Proceedings of the 2008 International Design Engineering Technical Conference & Computers and Information and Information in Engineering Conference*. [S.l.: s.n.], 2008.

SRAMKOVA, T.; LOG, T. Using non-linear x2 fit in flash method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 38, n. 15, p. 2885–2891, 1995.

STEPHENSON, D. A.; JEN, T. C.; LAVINE, A. S. Cutting tool temperature in contour turning: transient analysis and experimental verification. *Journal of manufacturing science and engineering*, v. 119(a), n. 4, p. 494–501, 1997.

TAY, A. A. O. A review of methods of calculating machining temperature. *Journal of Material Processing Technology*, v. 36, n. 3, p. 225–257, 1993.

THERMITUS, M.-A.; LAURENT, M. New logarithmic technique in the flash method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 40, n. 17, p. 4183–4190, 1997.

TRIGGER, K. J.; CHAO, B. T. An analytical evaluation of metal cutting temperature. *Trans. ASME*, n. 73, p. 57–65, 1951.

VANDERPLAATS, G. N. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. New York, NY: McGraw-Hill College, 1984.

VENUVINOD, P. K.; LAU, W. S. Estimation of rake temperatures in free oblique cutting. *International journal of machine tool design & research*, v. 26, n. 1, 1986.

WALKER, G.; BECK, J. V. *Analytic conduction solutions*. Feb 2008. Disponível em: <http://thermalhub.org/resources/46>.

XIE, H. *et al.* Short hot wire technique for measuring, thermal conductivity and thermal diffusivity of various materials. *Measurement Science & Technology*, v. 17, n. 1, p. 208–214, 2006.

Anexo A

Obtenção da equação solução em termos de funções de Green

Seja o seguinte problema de difusão de calor

$$\nabla^2 T(r, t|r', \tau) + \frac{g(r, t)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.1a})$$

sujeito às condições de contorno

$$+k \frac{\partial T}{\partial \eta} + h_i T = f_i(r, t) \quad \text{em } S_i \quad (\text{A.1b})$$

e condição inicial

$$T(r, t) = F(r) \quad \text{para } t = 0 \quad (\text{A.1c})$$

Considere o seguinte problema auxiliar

$$\nabla^2 G(r, t|r', \tau) + \frac{\delta(r - r')\delta(t - \tau)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t} \quad (\text{A.2a})$$

sujeito às condições de contorno

$$+k \frac{\partial G}{\partial \eta} + h_i G = 0 \quad \text{em } S_i \quad (\text{A.2b})$$

e condição inicial

$$G(r, t|r', \tau) = 0 \quad \text{para } t = 0 \quad (\text{A.2c})$$

Da propriedade de reciprocidade tem-se que

$$G(r, t|r', \tau) = G(r', -\tau|r, -t) \quad (\text{A.3})$$

esta relação de reciprocidade implica que o efeito em uma posição r devido a um impulso em r' a um tempo $\tau < t$ é igual ao efeito em r' a um tempo $-\tau$ devido a um impulso em r em um tempo $-t$.

Define-se que ∇_0^2 é a aplicação do laplaciano em r' , e ainda se trocando t por $-\tau$ pode se escrever

$$\nabla_0^2 G + \frac{\delta(r - r')\delta(t - \tau)}{k} = \frac{-1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t} \quad (\text{A.4})$$

onde o sinal menos indica a troca de t por $-\tau$, ou seja

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{\partial G}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{\partial G}{\partial t} \quad \text{pois se} \quad t \rightarrow -\tau \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = -1 \quad (\text{A.5})$$

Trocando t por τ e r' por r na Eq.(A.1a) obtém-se

$$\nabla_0^2 T(r', \tau|r, t) + \frac{g(r', \tau)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r', \tau|r, t)}{\partial \tau} \quad (\text{A.6})$$

Multiplicando (A.4) por T e (A.6) por G

$$G\nabla_0^2 T + G\frac{g(r', \tau)}{k} = G\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (\text{A.7a})$$

$$T\nabla_0^2 G + T\frac{\delta(r - r')\delta(t - \tau)}{\alpha} = T\frac{-1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial \tau} \quad (\text{A.7b})$$

e subtraindo a Eq.(A.7a) de (A.7b)

$$G\nabla_0^2 T - T\nabla_0^2 G + G\frac{g(r', \tau)}{k} - T\frac{\delta(r - r')\delta(t - \tau)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \left[G\frac{\partial T}{\partial \tau} + T\frac{\partial G}{\partial \tau} \right] \quad (\text{A.8})$$

ou

$$G\nabla_0^2 T - T\nabla_0^2 G + G\frac{g(r', \tau)}{k} - T\frac{\delta(r - r')\delta(t - \tau)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} [G \times T] \quad (\text{A.9})$$

Integrando a Eq.(A.9) sobre a região R e em um intervalo de tempo $\tau = 0$ até $t^* = t + \varepsilon$

$$\begin{aligned} & \int_{\tau=0}^{t^*} d\tau \int_R [G \nabla_0^2 T - T \nabla_0^2 G] d\nu' + \int_{\tau=0}^{t^*} d\tau \int_R \left[G \frac{g(r', \tau)}{k} - T \frac{\delta(r - r') \delta(t - \tau)}{\alpha} \right] d\nu' \\ &= \int_{\tau=0}^{t^*} d\tau \int_R \left[\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} [G \times T] \right] d\nu' \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Usando as propriedades da função Delta de Dirac

$$\int_{\tau=0}^{t^*} \int_R T(r', \tau) \delta(r - r') \delta(t - \tau) d\tau d\nu' = \int_{\tau=0}^{t^*} T(r, \tau) \delta(t - \tau) d\tau = T(r, t^*) \quad (\text{A.11})$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(r, t^*) &= \alpha \int_{\tau=0}^{t^*} d\tau \int_R [G \nu_0^2 T - T \nu_0^2 G] d\nu' \\ &+ \alpha \int_{\tau=0}^{t^*} d\tau \int_R G \frac{g(r', \tau)}{k} d\nu' + \int_{\tau=0}^{t^*} d\tau \alpha \int_R \frac{\partial}{\partial t} [G \times T] d\nu' \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Do teorema de Green obtém-se que

$$\int_R [G \nabla_0^2 T - T \nabla_0^2 G] d\nu' = \sum_{s=1}^S \int_{S_i} \left[G \frac{\partial T}{\partial \eta_i} - T \frac{\partial G}{\partial \eta_i} \right] dS_i \quad (\text{A.13})$$

Logo

$$\begin{aligned} T(r, t^*) &= \alpha \int_{\tau=0}^{t^*} d\tau \int_R \frac{\partial}{\partial \tau} [G(r, t | r', \tau) T(r', \tau)] d\nu' \\ &+ \alpha \int_{\tau=0}^{t^*} d\tau \int_R G(r, t | r', \tau) \frac{g(r', \tau)}{k} d\nu' \\ &+ \alpha \int_{\tau=0}^{t^*} d\tau \sum_{s=1}^S \int_{S_i} \left[G(r, t | r', \tau) \frac{\partial T}{\partial \nu_i} - T(r', \tau) \frac{\partial G}{\partial \nu_i} \right] dS_i \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Tem-se que

$$\int_{\tau=0}^{t^*} d\tau \int_R \frac{\partial}{\partial \tau} [G(r, t|r', \tau)T(r', \tau)] d\nu' = \int_R \frac{\partial}{\partial \tau} [G(r, t|r', \tau)T(r', \tau)]_0^{t^*} d\nu' = \quad (\text{A.15})$$

$$\int_R G(r, t|r', \tau)|_{\tau=0} F(r') d\nu'$$

E a Eq.(A.14) se torna

$$\begin{aligned} T(r, t^*) &= \alpha \int_R G(r, t|r', \tau)|_{\tau=0} F(r') d\nu' \\ &+ \alpha \int_{\tau=0}^{t^*} d\tau \int_R G(r, t|r', \tau) \frac{g(r', \tau)}{k} d\nu' \\ &+ \alpha \int_{\tau=0}^{t^*} d\tau \sum_{s=1}^S \int_{S_i} \left[G(r, t|r', \tau) \frac{\partial T}{\partial \eta_i} - T(r', \tau) \frac{\partial G}{\partial \eta_i} \right] dS_i \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

O último termo da Eq.(A.14) pode ser obtido através das condições de contorno.

Assim, multiplicando as condições de contorno por T e G respectivamente, tem-se

$$\left[+k \frac{\partial T}{\partial \eta} + h_i T \right] G = f_i(r, t) G \quad (\text{A.17})$$

$$\left[+k \frac{\partial G}{\partial \eta} + h_i G \right] T = 0 \quad (\text{A.18})$$

e subtraindo

$$+k \frac{\partial T}{\partial \eta} G - k \frac{\partial G}{\partial \eta} T = f_i(r, t) G \quad (\text{A.19})$$

ou ainda

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} G - \frac{\partial G}{\partial \eta} T = \frac{f_i(r, t)}{k} G \quad (\text{A.20})$$

Portanto a solução do problema original pode ser escrita em termos de Funções de Green

como

$$\begin{aligned}
T(r, t) &= \alpha \int_R G(r, t|r', \tau)|_{\tau=0} F(r') d\nu' \\
&+ \alpha \int_{\tau=0}^{t^*} d\tau \int_R G(r, t|r', \tau) \frac{g(r', \tau)}{k} d\nu' \\
&+ \alpha \int_{\tau=0}^{t^*} d\tau \sum_{s=1}^S \int_{S_i} \frac{f_i(r', \tau)}{k} G(r, t|r', t - \tau) dS_i
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Anexo B

Obtenção da forma fechada de uma das séries do problema X22

Observa-se que parte do segundo termo da Eq.(3.19) pode ser substituído por sua forma fechada:

$$\frac{2}{L} \sum_m^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{(m\pi)^2} = \frac{L}{3} - x + \frac{x^2}{2L} \quad (\text{B.1})$$

Como essa série é independente do tempo pode ser de difícil sua convergência. Por isso, uma boa alternativa é a obtenção deste somatório (se existir) em termos de forma fechada.

A primeira tentativa para a obtenção de uma forma alternativa para a (B.1) é através da solução do problema (B.2) em sua versão homogênea (problema auxiliar).

Esse procedimento garante que os autovalores e a autofunção do problema auxiliar sejam os mesmos do problema original, o que por sua vez também garante a validade da existência de um eventual somatório de interesse.

Assim, define-se o problema auxiliar,

Este problema pode ser escrito como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{B.2a})$$

sujeito às condições de contorno

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (\text{B.2b})$$

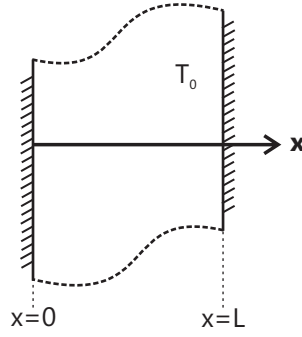


Figura B.1: Problema auxiliar X22

e à condição inicial

$$T(x, 0) = F(x) = T_0 \quad (\text{B.2c})$$

A solução desse problema por separação de variáveis é dada por

$$T(x, t) = \int_0^L \frac{1}{L} F(x') dx' + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{L} e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) F(x') dx' \quad (\text{B.3})$$

Se $t = 0$ e $F(x) = T_0$ então

$$F(x) = T_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) T_0 dx' \quad (\text{B.4})$$

e pode-se escrever

$$T_0 = T_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) T_0 I_1 \quad (\text{B.5})$$

onde

$$I_1 = \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) dx' = 0 \quad (\text{B.6})$$

portanto

$$T_0 = T_0 \quad (\text{B.7})$$

Neste caso, I_1 não apresentou qualquer resultado interessante. Porém, este mesmo procedimento pode ser usado para funções diferentes. Ou seja, observa-se que a Eq.(B.3) é válida

para qualquer função de x . Nesse caso, pode-se aplicá-la para as funções

$$F(x) = x; \quad F(x) = x^2 \quad (\text{B.8})$$

Assim, obtém-se

$$x = \sum_m^{\infty} \frac{1}{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) x' dx' = 0 \quad (\text{B.9})$$

ou

$$x^2 = \sum_m^{\infty} \frac{1}{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) x'^2 dx' = 0 \quad (\text{B.10})$$

As Eqs.(B.9) e (B.10) podem fornecer a formas fechadas da Eq.(B.1).

Calculando a integral

$$I_2 = \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) x' dx' = \frac{\cos(m\pi)}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} \quad (\text{B.11})$$

e resolvendo para $F(x) = x$ tem-se da Eq.(B.3) quando $t = 0$ então

$$\begin{aligned} x &= \int_0^L \frac{1}{L} x' dx' + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) x' dx' \\ &= \frac{L}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\frac{\cos(m\pi)}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} \right] \\ &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{\cos(m\pi)}{m^2} - \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{1}{m^2} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

portanto

$$\sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{1}{m^2} = \frac{L}{2} - x + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{\cos(m\pi)}{m^2} \quad (\text{B.13})$$

Observa-se que a Eq.(B.13) possui, ainda, um somatório independente do tempo a ser

determinado. Assim, repete-se o procedimento para $F(x) = x^2$

$$x^2 = \int_0^L \frac{1}{L} x'^2 dx' + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) x'^2 dx' \quad (\text{B.14})$$

Resolvendo a integral

$$I_3 = \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) x'^2 dx' = \frac{2L}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} \cos(m\pi) \quad (\text{B.15})$$

Desta forma

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{L^2}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{2L}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} \cos(m\pi) \\ &= \frac{L^2}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4L^2}{\pi^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{\cos(m\pi)}{m^2} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

portanto

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4L^2}{\pi^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{\cos(m\pi)}{m^2} = x^2 - \frac{L^2}{3} \quad (\text{B.17})$$

ou seja,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2L}{\pi^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{\cos(m\pi)}{m^2} = \frac{x^2}{2L} - \frac{L}{6} \quad (\text{B.18})$$

Assim, substituindo a Eq.(B.18) na Eq.(B.13) obtém-se

$$\frac{2}{L} \sum_m \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{(m\pi)^2} = \frac{L}{3} - x + \frac{x^2}{2L} \quad (\text{B.19})$$