

THIAGO RODRIGO ALVES

Polinômios dominados entre espaços de Banach



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2011

THIAGO RODRIGO ALVES

Polinômios dominados entre espaços de Banach

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG
2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU , MG, Brasil

A474p Alves, Thiago Rodrigo, 1985-
 Polinômios dominados entre espaços de Banach / Thiago Rodrigo
 Alves. - 2011.
 74 f. : il.

 Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

 Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
 Inclui bibliografia.

 1. Polinômios - Teses. I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 517.584



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 159
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Thiago Rodrigo Alves.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 100094.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Polinômios dominados entre espaços de Banach.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 24 de Fevereiro de 2011, às 14h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino
UFPB - Universidade Federal da Paraíba - João Pessoa

Prof. Dr. Ariosvaldo Marques Jatobá
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia-MG, 24 de Fevereiro de 2011.

Agradecimentos

Aos meus pais, que sempre estiveram do meu lado. A eles dedico este trabalho.

Ao professor Geraldo Botelho, pela paciência e disponibilidade na orientação deste trabalho.

Aos professores Daniel Marinho Pellegrino e Ariosvaldo Marques Jatobá, pelas correções e sugestões.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFU.

Ao professor Paulo Roberto Bergamaschi da UFG/CaC.

Aos amigos de graduação: Juscelino, Leonardo e Rafael Faria.

Aos companheiros de república: Iego, Keina e Fabiano.

Aos colegas de mestrado: Carlos, Daniela, Flávio, Karla, Lyliane e Túlio.

À FAPEMIG pelo apoio financeiro.

A Deus, por colocar as pessoas supramencionadas em minha vida.

ALVES, T. R. *Polinômios dominados entre espaços de Banach*. 2011. 74 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é estudar teoremas de dominação e de fatoração para polinômios homogêneos dominados entre espaços de Banach. Para isso primeiro estudam-se os polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach, exibindo várias propriedades e exemplos. Posteriormente, volta-se o estudo para os polinômios homogêneos absolutamente somantes e, em particular, para os polinômios homogêneos dominados. Nesse estudo, entre outras coisas é demonstrado o teorema da dominação de Pietsch e exibido um exemplo de polinômio homogêneo dominado que não é fracamente compacto. Em seguida, prova-se que a validade da extensão natural do teorema da fatoração de Pietsch para polinômios dominados implicaria que polinômios dominados sempre seriam fracamente compactos; o que aniquila com a possibilidade da validade de tal extensão. Por fim é demonstrado o teorema de fatoração que diz que um polinômio homogêneo P é p -dominado se e somente se $P = Q \circ u$ onde Q é um polinômio homogêneo contínuo e u é um operador linear absolutamente p -somante.

Palavras-chave: polinômios homogêneos, polinômios p -dominados, polinômios fracamente compactos, teorema de dominação, teorema de fatoração.

ALVES, T. R. *Dominated polynomials between Banach spaces*. 2011. 75 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The main goal of this dissertation is the study of domination and factorization theorems for dominated homogeneous polynomials between Banach spaces. To accomplish this task continuous homogeneous polynomials between Banach spaces are studied first, including main properties and examples. Next we turn our attention to the study of absolutely summing homogeneous polynomials and, in particular, dominated homogeneous polynomials. Among other things, the Pietsch domination theorem is proved and an example of a non-weakly compact dominated polynomial is provided. The next step is the proof that the validity of the natural extension of Pietsch's factorization theorem to dominated polynomials would imply that every dominated polynomial is weakly compact; a fact that shows that there is no such natural extension. At last the following factorization theorem is proved: a homogeneous polynomial P is p -dominated if and only if $P = Q \circ u$ where Q is a continuous homogeneous polynomial and u is an absolutely p -summing linear operator.

Keywords: homogeneous polynomials, p -dominated polynomials, weakly compact polynomials, domination theorem, factorization theorem.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$V_1, \dots, V_m, V, W, U$	espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$
$E_1, \dots, E_m, E$ e F	espaços vetoriais normados ou espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$
e_j	$(0, \dots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, \dots)$
$Im(A)$	imagem da aplicação A
$ker(u)$	núcleo do operador linear u
$L(E_1, \dots, E_m; F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações multilineares de $E_1 \times \dots \times E_m$ em F
E'	dual topológico do espaço vetorial normado E
$B_E[x_0; r]$	bola fechada do espaço normado E com centro em x_0 e raio r
B_E	$B_E[0; 1]$
$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações multilineares contínuas de $E_1 \times \dots \times E_m$ em F
$(\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F), \ \cdot\)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações multilineares contínuas de $E_1 \times \dots \times E_m$ em F munido com a norma usual do sup
$L({}^m E; F)$	$L(E, \overset{(m)}{?}, E; F)$
$\mathcal{L}({}^m E; F)$	$\mathcal{L}(E, \overset{(m)}{?}, E; F)$
$L^s({}^m E; F)$	subespaço vetorial de $L({}^m E; F)$ das aplicações multilineares simétricas
$\mathcal{L}^s({}^m E; F)$	subespaço vetorial de $\mathcal{L}({}^m E; F)$ das aplicações multilineares simétricas
$P({}^m E; F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m -homogêneos que aplicam E em F
$\mathcal{P}({}^m E; F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m -homogêneos contínuos que aplicam E em F

$(\mathcal{P}^m E; F), \ \cdot\ $	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m -homogêneos contínuos que aplicam E em F munido com a norma usual do sup
$(\mathcal{L}^s(m E; F), \ \cdot\)$	subespaço vetorial normado de $(\mathcal{L}(m E; F), \ \cdot\)$ das aplicações multilineares simétricas
$\text{span}\{b_1, \dots, b_p\}$ $(\ell_p, \ \cdot\ _p)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ gerado pelos vetores $b_1, \dots, b_p$ $\{(\lambda_n)_{n=1}^\infty : \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{n=1}^\infty \lambda_n ^p < \infty\}$ onde $\ (\lambda_n)_{n=1}^\infty\ _p = (\sum_{n=1}^\infty \lambda_n ^p)^{1/p}$
$(\ell_\infty, \ \cdot\ _\infty)$	$\{(\lambda_n)_{n=1}^\infty : \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } (\lambda_n)_{n=1}^\infty \text{ é limitado}\}$ onde $\ (\lambda_n)_{n=1}^\infty\ _\infty = \sup\{ \lambda_j : j \in \mathbb{N}\}$
$\ell_p(E)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das sequências $(x_n)_{n=1}^\infty$ cujos termos pertencem ao espaço de Banach E e $(\ x_n\)_{n=1}^\infty \in \ell_p$
$\ell_p^w(E)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das sequências $(x_n)_{n=1}^\infty$ cujos termos pertencem ao espaço de Banach E e $(\ \varphi(x_n)\)_{n=1}^\infty \in \ell_p$ sempre que $\varphi \in E'$
$\ (x_n)_{n=1}^\infty\ _{w,p}$	$\sup\left\{(\sum_{n=1}^\infty \varphi(x_n) ^p)^{1/p} : \ \varphi\ \leq 1\right\}$
$\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_m; F)$	subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ das aplicações contínuas de tipo finito
$\Pi_p(E, F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos operadores absolutamente p -somantes que aplicam E em F
p'	conjugado de p
$W(B_{E'})$	conjunto constituído pelas medidas regulares de probabilidade nos borelianos de $B_{E'}$ com a topologia fraca estrela
$M(X)$	espaço das medidas de Radon complexas nos borelianos de X
$C_0(X)$	$\{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é contínua e se anula no infinito}\}$
$x_1 \otimes \dots \otimes x_m$	tensor elementar definido por $x_1 \otimes \dots \otimes x_m(A) = A(x_1, \dots, x_m)$ para toda aplicação $A \in L(E_1, \dots, E_m; \mathbb{K})$
$E_1 \otimes \dots \otimes E_m$	produto tensorial dos espaços de Banach $E_1, \dots, E_m$, definido como o subespaço de $L(E_1, \dots, E_m; \mathbb{K})^*$ gerado pelos tensores elementares
$\otimes^m E$	$E \otimes^{(m)} E$
$\otimes^{m,s} E$	produto tensorial simétrico de E , definido como o subespaço do produto tensorial $\otimes^m E$ gerado pelos tensores da forma $x \otimes \dots \otimes x, x \in E$
π_s	norma s -tensorial projetiva
$\otimes_{\pi_s}^{m,s} E$	espaço normado $(\otimes^{m,s} E, \pi_s)$
$\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E$	completamento do espaço normado $\otimes_{\pi_s}^{m,s} E$

SUMÁRIO

Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de Símbolos	viii
Sumário	x
Introdução	1
1 Polinômios homogêneos contínuos	2
1.1 Aplicações multilineares	2
1.2 Polinômios homogêneos	4
2 Aplicações absolutamente somantes	13
2.1 Aplicações multilineares absolutamente somantes	13
2.2 Polinômios homogêneos absolutamente somantes	16
2.3 Caracterizações através de desigualdades	18
3 Teorema da dominação de Pietsch para polinômios homogêneos	23
3.1 Preliminares	23
3.2 Validade do teorema da dominação de Pietsch	24
4 Teorema da fatoração de Pietsch para polinômios dominados	30
4.1 Preliminares	30
4.2 Um polinômio dominado que não é fracamente compacto	34
4.3 Não validade do teorema da fatoração de Pietsch	36
4.4 Um teorema de fatoração	39
Referências Bibliográficas	44

INTRODUÇÃO

A Análise Funcional Linear estuda primordialmente operadores lineares contínuos entre espaços normados. Uma generalização natural dessa teoria aponta na direção do estudo de aplicações não lineares entre espaços normados. Nesse sentido, um dos primeiros passos na intenção de sair da linearidade vem com o estudo das aplicações multilineares e dos polinômios homogêneos.

Como as aplicações multilineares e os polinômios homogêneos são generalizações dos operadores lineares, é natural questionar quais propriedades gozadas por estes operadores continuam válidas para aquelas aplicações. Desse modo, é comum buscar propriedades apreciadas para operadores lineares que podem ser estendidas para versões multilinear e polinomial.

Em 1953, A. Grothendieck introduziu em [17] os operadores lineares absolutamente somantes, que foram posteriormente reinterpretados por J. Lindenstrauss e A. Pełczyński em [22]. Esses operadores constituem um subespaço vetorial dos operadores lineares contínuos e têm a grande vantagem de melhorar, em certo sentido, a convergência de séries em espaços normados.

Em 1967, o matemático A. Pietsch explicitou em [28] algumas propriedades fundamentais inerentes aos operadores p -somantes, como por exemplo os teoremas hoje conhecidos como teorema da dominação de Pietsch e teorema da fatoração de Pietsch. Ambos caracterizam os operadores lineares absolutamente p -somantes e tornam tais operadores úteis em aplicações variadas. Além disso, A. Pietsch ainda mostrou que todo operador linear absolutamente p -somante entre espaços de Banach é fracamente compacto.

Aparece em 1983 a primeira extensão da definição de operador linear absolutamente somante para aplicações multilineares, também devida ao matemático A. Pietsch e explicitada em [30]. A partir daí as aplicações multilineares absolutamente somantes são estudadas em vários trabalhos, entre eles Geiss [16], Matos [23] e Schneider [33]. Não obstante, em 1984 aparece em Braunss [6] a primeira definição de polinômio homogêneo absolutamente somante.

Uma vez conhecido que os operadores lineares absolutamente p -somantes satisfazem boas propriedades, fica o desejo de encontrar generalizações desses operadores para os casos multilinear e polinomial. Naturalmente é desejável que essas generalizações também

conservem boas propriedades, como por exemplo teoremas tipo dominação e fatoração de Pietsch. Extensões nesse sentido aparecem nos artigos Matos [23] e Floret-Matos [13], sendo que o primeiro coloca em cena as aplicações multilineares dominadas e o segundo dá origem aos polinômios homogêneos dominados.

Propriedades interessantes inerentes aos operadores p -somantes foram estendidas para o caso de polinômios dominados. Dentre essas, sublinhamos um teorema tipo dominação de Pietsch que pode ser encontrado em [24, Proposition 3.1]. Entretanto, outras propriedades que se esperavam verdadeiras não o são. Por exemplo, polinômios dominados entre espaços de Banach nem sempre são fracamente compactos, o que pode ser comprovado em [3, Example 1].

Teoremas de fatoração para polinômios dominados também são desejáveis. Um teorema desse tipo pode ser encontrado em [4, Proposition 46], que é uma extensão do conhecido teorema da fatoração de Pietsch para operadores p -somantes. No entanto, essa extensão não representa exatamente um teorema tipo fatoração de Pietsch para polinômios dominados, pois nele não se tem um polinômio m -homogêneo p -dominado canônico através do qual todo polinômio m -homogêneo p -dominado se fatora, essência fundamental do teorema da fatoração de Pietsch.

Um legítimo teorema tipo fatoração de Pietsch para polinômios dominados aparece no artigo [5] de G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda. No entanto, esse teorema não representa uma extensão exata do teorema da fatoração de Pietsch, pois alterações foram necessárias para a sua verificação. Essas alterações são deveras necessárias, e isso é comprovado na última seção do artigo, finalizado com a demonstração de que uma extensão natural não é possível.

O foco central desta dissertação é estudar teoremas de dominação e de fatoração para polinômios homogêneos dominados. Os principais resultados são os seguintes: a validade da extensão natural do teorema da dominação de Pietsch para polinômios homogêneos dominados; a impossibilidade da extensão natural do teorema da fatoração de Pietsch para polinômios dominados, e, por fim, a validade de um teorema de fatoração (não do tipo Pietsch) para polinômios homogêneos dominados. Para alcançar tais objetivos faremos um apanhado geral acerca dos principais resultados referentes aos polinômios homogêneos, contínuos, absolutamente somantes e dominados. Para isso introduziremos as aplicações multilineares e, desse modo, exibiremos também algumas propriedades inerentes a essas aplicações.

A dissertação está estruturada da seguinte maneira:

- O Capítulo 1 é dividido em duas seções, a primeira estabelece resultados sobre aplicações multilineares e a segunda fornece resultados acerca dos polinômios homogêneos. As principais referências usadas na construção desse capítulo foram [10], [25] e [34].
- No Capítulo 2 introduzimos as aplicações absolutamente somantes. Concentraremos desde o começo nas aplicações multilineares e nos polinômios homogêneos absolutamente somantes, que generalizam a definição de operador linear absolutamente somante. Na Seção 2.3 fornecemos uma caracterização para aplicações absolutamente somantes através de desigualdades, que é o principal resultado do capítulo. As referências [1], [2], [9], [11] e [15] se fizeram úteis na elaboração desse capítulo.
- No Capítulo 3 surge a definição de polinômio dominado, que exerce papel capital no decorrer da dissertação. Propriedades inerentes aos polinômios dominados também

são verificadas, como por exemplo o teorema de dominação tipo Pietsch, demonstrado na Seção 3.2. Usamos as referências [24] e [29] no desenvolvimento desse capítulo.

- O Capítulo 4 traz consigo alguns dos principais resultados da dissertação. Nele verifica-se a não validade de uma extensão bem natural do teorema da fatoração de Pietsch para polinômios dominados, aquela fornecida em [5]. Para isso será necessário a utilização de um exemplo de polinômio dominado que não é fracamente compacto, encontrado em [3]. O capítulo culminará com um teorema de fatoração para polinômios dominados. Além das duas referências citadas, se fez uso do livro [9].

Algo deve ser deixado claro, a escassez de originalidade. Todos os resultados expostos nesta dissertação já eram conhecidos. Entretanto, resquício de originalidade pode ser encontrado na organização dos temas estudados e em diversas demonstrações referentes aos resultados; assim como na verificação detalhada de pontos que normalmente são negligenciados. Muitas demonstrações foram feitas sem consultas; outras foram organizadas de maneira diferente das demonstrações consultadas, esclarecendo pontos mais obscuros e explicitando resultados auxiliares que se escondiam nas demonstrações.

Deixemos aqui algumas referências para resultados básicos. Para teoria da medida e integração é suficiente o livro [14]. Resultados referentes a Análise Funcional Linear podem ser encontrados em [7], [8] e [19]. Para a teoria de espaços métricos aconselhamos o livro [20], e para Topologia Geral indicamos [21]. Por fim, a teoria básica de aplicações multilineares e polinômios homogêneos pode ser encontrada em [10] e [25].

CAPÍTULO 1

POLINÔMIOS HOMOGÊNEOS CONTÍNUOS

A análise funcional linear tem como principal meta estudar operadores lineares contínuos entre espaços normados. No sentido de empreender um estudo além da linearidade, um dos primeiros passos naturais é o estudo das aplicações multilineares e dos polinômios homogêneos. Vários resultados vindos da análise funcional linear são trivialmente estendidos para essas aplicações. Entretanto o caso não linear tem peculiaridades próprias, e por isso exibiremos neste capítulo propriedades básicas acerca das aplicações multilineares e dos polinômios homogêneos. Estes resultados são devidamente provados para o caso polinomial e, majoritariamente, apenas enunciados no caso multilinear. Tal procedimento se justifica pois no decorrer da dissertação apontaremos gradativamente o estudo na direção dos polinômios homogêneos.

1.1 Aplicações multilineares

Para os nossos propósitos, as aplicações multilineares servirão para definir polinômios homogêneos. Devido a isto apresentaremos nesta seção alguns resultados inerentes a essas aplicações.

Definição 1.1.1 Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $V_1, \dots, V_m, W$ espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma aplicação $A: V_1 \times \dots \times V_m \longrightarrow W$ é dita *multilinear* (ou *m-linear*) se

$$A(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_m) = \lambda A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) + A(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_m),$$

para todos $i = 1, \dots, m$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x_i, x'_i \in V_i$.

Neste capítulo os símbolos $E_1, \dots, E_m, E$ e F representarão espaços vetoriais normados sobre o corpo $\mathbb{K}$, exceto menção explícita em contrário. Os espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ das aplicações multilineares e das aplicações multilineares contínuas $A: E_1 \times \dots \times E_m \longrightarrow F$

serão denotados por $L(E_1, \dots, E_m; F)$ e $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$, respectivamente. Para toda aplicação multilinear $A \in L(E_1, \dots, E_m; F)$ definimos

$$\|A\| := \sup \{ \|A(x_1, \dots, x_m)\| : x_j \in E_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1 \text{ para todo } j = 1, \dots, m \}. \quad (1.1)$$

Apesar da notação de norma, essa expressão não define uma norma em $L(E_1, \dots, E_m; F)$, pois pode ocorrer $\|A\| = \infty$. Por outro lado, essa expressão define uma norma sobre o espaço vetorial $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$, como se pode ver em [34, Proposição 2.11]. O próximo resultado mostra que a multilinearidade de uma aplicação simplifica o seu comportamento topológico.

Proposição 1.1.2 *Sejam $E_1, \dots, E_m$ e F espaços vetoriais normados e $A \in L(E_1, \dots, E_m; F)$ uma aplicação m -linear. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) *A é contínua.*
- (b) *A é contínua na origem.*
- (c) *Existe uma constante $k \geq 0$ tal que $\|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq k \|x_1\| \dots \|x_m\|$ para todo ponto $(x_1, \dots, x_m)$ em $E_1 \times \dots \times E_m$.*
- (d) *$\|A\| < \infty$.*

Demonstração. Veja [34, Proposição 2.7]. ■

A norma de uma aplicação multilinear contínua, definida em (1.1), também pode ser calculada de várias maneiras equivalentes. Uma caracterização especialmente útil dessa norma é dada por

$$\|A\| = \inf \{ C : \|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq C \|x_1\| \dots \|x_m\| \text{ para todos } j = 1, \dots, m \text{ e } x_j \in E_j \},$$

para toda $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$.

É natural questionar em que circunstâncias o espaço vetorial $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$, munido com a norma acima, é um espaço de Banach. A proposição seguinte nos diz que a resposta é afirmativa sempre que F for um espaço de Banach.

Proposição 1.1.3 *Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços vetoriais normados e F um espaço de Banach. O espaço vetorial $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$, munido com a norma definida por (1.1), é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [34, Proposição 2.11]. ■

Proposição 1.1.4 *Sejam $E_1, \dots, E_{m+n}$ espaços de Banach com $m, n \in \mathbb{N}$. Então existe um isomorfismo canônico $I: L(E_1, \dots, E_{m+n}; F) \longrightarrow L(E_1, \dots, E_m; L(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F))$ dado por*

$$I(A)(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) = A(x_1, \dots, x_{m+n}).$$

Mais ainda, esse isomorfismo induz um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_{m+n}; F)$ e $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{L}(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F))$.

Demonstração. Veja [34, Proposição 2.12]. ■

Conforme mencionado acima, as aplicações multilineares simétricas desempenharão um papel de destaque no estudo dos polinômios homogêneos. Com a finalidade de começar a estudar essas aplicações, consideraremos a partir de agora o caso particular das aplicações multilineares em $L(E_1, \dots, E_m; F)$ onde

$$E_1 = E_2 = \dots = E_m = E.$$

Neste caso os espaços vetoriais das aplicações multilineares e das aplicações multilineares contínuas $A: E^m \rightarrow F$ serão denotados por $L(^m E; F)$ e $\mathcal{L}(^m E; F)$, respectivamente. Além disso, adotaremos as seguintes notações simplificadas:

$$L(^1 E; F) = L(E; F), \quad \mathcal{L}(^1 E; F) = \mathcal{L}(E; F),$$

$$L(^m E; \mathbb{K}) = L(^m E), \quad \mathcal{L}(^m E; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(^m E) \text{ e } \mathcal{L}(^1 E; \mathbb{K}) = E'.$$

Definição 1.1.5 Uma aplicação multilinear $A: E^m \rightarrow F$ é dita ser *simétrica* se

$$A(x_1, \dots, x_m) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$$

para todos $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$ e $\sigma \in S_m$, onde S_m denota o conjunto das permutações dos m primeiros números naturais.

Os conjuntos das aplicações multilineares simétricas e das aplicações multilineares simétricas contínuas $A: E^m \rightarrow F$ serão denotados por $L^s(^m E; F)$ e $\mathcal{L}^s(^m E; F)$, respectivamente. Mais ainda, os conjuntos $L^s(^m E; F)$ e $\mathcal{L}^s(^m E; F)$ são subespaços vetoriais de $L(^m E; F)$ e $\mathcal{L}(^m E; F)$, respectivamente.

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ e $A \in L(^m E; F)$. Então para cada $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ e cada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ com $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$, usaremos a notação

$$Ax_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} := A(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{\alpha_n})$$

para todo $m \geq 1$.

Proposição 1.1.6 Para cada $A \in L(^m E; F)$, defina A^s por

$$A^s(x_1, \dots, x_m) := \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}).$$

Então as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (a) $A^s \in L^s(^m E; F)$.
- (b) $A^s = A$ se e somente se $A \in L^s(^m E; F)$.
- (c) $(A^s)^s = A^s$.
- (d) O operador $s: L(^m E; F) \rightarrow L^s(^m E; F)$, definido por $s(A) = A^s$, é linear.
- (e) Se $x \in E$ então $Ax^m = A^s x^m$.

Demonstração. (a) Sejam $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$ e $\sigma' \in S_m$. Assim,

$$\begin{aligned} A^s(x_1, \dots, x_m) &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(\sigma'(1))}, \dots, x_{\sigma(\sigma'(m))}) \\ &= A^s(x_{\sigma'(1)}, \dots, x_{\sigma'(m)}) \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, $A^s \in L^s(E; F)$.

(b) Se $A = A^s$ então A é simétrica, pois A^s é claramente simétrica. Reciprocamente, se $A \in L^s({}^m E; F)$, obtemos

$$\begin{aligned} A^s(x_1, \dots, x_m) &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_1, \dots, x_m) \\ &= \frac{1}{m!} m! A(x_1, \dots, x_m) = A(x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

para todo $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$, o que implica $A^s = A$.

(c) Segue obviamente dos itens (a) e (b).

(d) Pelo item (a), o operador s está bem definido. Além disso, dados $A, B \in L({}^m E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, obtemos

$$\begin{aligned} s(A + \lambda B)(x_1, \dots, x_m) &= (A + \lambda B)^s(x_1, \dots, x_m) \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} (A + \lambda B)(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} [A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) + \lambda B(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})] \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) + \lambda \left[\frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} B(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) \right] \\ &= A^s(x_1, \dots, x_m) + \lambda [B^s(x_1, \dots, x_m)] \\ &= (s(A) + \lambda \cdot s(B))(x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

para todo $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$. Portanto s é linear.

(e) Seja $x \in E$. Então

$$A^s x^m = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A x^m = \frac{1}{m!} m! A x^m = A x^m.$$

■

O operador s na proposição anterior é chamado *operador de simetrização*. Essa proposição, dentre outras consequências, mostra que s é uma projeção de $L(^m E; F)$ sobre $L^s(^m E; F)$.

Finalizaremos esta seção com a Fórmula de Polarização. Esse resultado será de grande valia no estudo de polinômios homogêneos.

Fórmula de Polarização. *Seja $A \in L^s(^m E; F)$. Então para todos $x_0, \dots, x_m \in E$ tem-se a fórmula*

$$A(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m,$$

que será denominada Fórmula de polarização.

A demonstração da Fórmula de Polarização pode ser encontrada em [25, páginas 6-7].

1.2 Polinômios homogêneos

Polinômios homogêneos são indiscutivelmente o principal objeto de estudo desta dissertação. Nesta seção algumas propriedades básicas inerentes aos polinômios homogêneos são demonstradas. A principal delas é uma caracterização da continuidade de polinômios homogêneos que, assim como nos casos linear e multilinear, é um exemplo de como uma estrutura algébrica pode simplificar o comportamento topológico.

Definição 1.2.1 Sejam E e F espaços vetoriais normados. Uma aplicação $P: E \longrightarrow F$ será denominada *polinômio m -homogêneo* ou *polinômio homogêneo de grau m* , se existir uma aplicação $A \in L(^m E; F)$ tal que $P(x) = Ax^m$ para todo ponto x em E .

É fácil ver que o conjunto constituído pelos polinômios m -homogêneos $P: E \longrightarrow F$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de aplicações. Denotaremos esse espaço por $P(^m E; F)$. Neste caso, também é claro que o conjunto dos polinômios m -homogêneos contínuos é um subespaço vetorial de $P(^m E; F)$, esse subespaço será denotado por $\mathcal{P}(^m E; F)$.

Para cada $P \in P(^m E; F)$, denotaremos

$$\|P\| := \sup\{\|P(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}.$$

Neste instante é bom notar que similarmente ao caso das aplicações multilineares, apesar da notação de norma, essa relação não define uma norma em $P(^m E; F)$, pois pode ocorrer $\|P\| = \infty$. No entanto, usaremos essa notação, pois como veremos mais adiante, essa relação faz com que $(\mathcal{P}(^m E; F), \|\cdot\|)$ seja um espaço normado.

Dentre outras consequências, a proposição seguinte estabelece duas desigualdades que serão úteis na demonstração de resultados posteriores. Antes de enunciar essa proposição, ressaltamos que a notação $\|\cdot\|$ será usada, a partir de agora, para denotar tanto a relação estabelecida no parágrafo precedente para polinômios homogêneos quanto a similar para aplicações multilineares definida na seção anterior (Eq. (1.1)).

Proposição 1.2.2 *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Para cada $A \in L(^m E; F)$ considere a aplicação dada por*

$$\widehat{A}: E \longrightarrow F, \quad \widehat{A}(x) := Ax^m.$$

Desse modo a correspondência $A \longmapsto \widehat{A}$ induz um isomorfismo entre os espaços vetoriais $L^s(^m E; F)$ e $P(^m E; F)$. Mais ainda,

$$\|\widehat{A}\| \leq \|A\| \leq \frac{m^m}{m!} \|\widehat{A}\|.$$

Demonstração. Obviamente a aplicação $A \longmapsto \widehat{A}$ está bem definida. A aplicação é linear pois dados $A, B \in L^s(^m E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos

$$(\widehat{A + \lambda B})(x) = (A + \lambda B)x^m = Ax^m + \lambda Bx^m = \widehat{A}x + \lambda \widehat{B}x = (\widehat{A} + \lambda \widehat{B})x$$

para todo $x \in E$.

Além disso, afirmamos que a aplicação $A \in L^s(^m E; F) \longmapsto \widehat{A} \in P(^m E; F)$ é bijetora. Com efeito, se $P \in P(^m E; F)$, existe $A \in L(^m E; F)$ tal que $P(x) = Ax^m$. De fato,

$$A^s(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}).$$

Logo, como consequência da Proposição 1.1.6, $A^s \in L^s(^m E; F)$ e

$$A^s x^m = Ax^m = P(x).$$

Assim a aplicação é sobrejetora. Por outro lado, se $A \in L^s(^m E; F)$ e $\widehat{A} = 0$, segue que $Ax^m = 0$ para todo ponto x em E . Desse modo, pela fórmula de polarização,

$$A(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m = 0$$

para quaisquer $x_0, \dots, x_m \in E$. Portanto $A = 0$ e, consequentemente, a aplicação é injetora.

Provemos agora as desigualdades enunciadas. Segue trivialmente que

$$\begin{aligned} \|\widehat{A}\| &= \sup\{\|Ax^m\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|A(x_1, \dots, x_m)\| : x_j \in E, \max_j \|x_j\| \leq 1\} = \|A\|. \end{aligned}$$

Resta mostrar a segunda desigualdade. Primeiramente, note que se $A \in L(^m E, F)$ então $\|Ax^m\| \leq \|A\| \|x\|^m$ para todo ponto x em E . Com efeito,

$$\left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \right)^m \right\| \leq \|A\| \quad \text{para todo ponto } x \text{ em } E \setminus \{0\}$$

e, por conseguinte,

$$\frac{1}{\|x\|^m} \|Ax^m\| \leq \|A\| \quad \text{para todo ponto } x \text{ em } E \setminus \{0\}.$$

O caso $x = 0$ é evidente.

Desse modo, pela fórmula de polarização, obtemos

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_m) &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m A(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \hat{A}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m), \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \|A(x_1, \dots, x_m)\| &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \|\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \hat{A}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)\| \\ &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \|\hat{A}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)\| \\ &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \|\hat{A}\| \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m\|^m \\ &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \|\hat{A}\| (\|x_1\| + \cdots + \|x_m\|)^m. \end{aligned}$$

Logo, se $\max_j \|x_j\| \leq 1$, segue que

$$\|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \|\hat{A}\| m^m = \frac{m^m}{m!} \|\hat{A}\|,$$

o que completa a demonstração. ■

Na última Proposição verificamos que para todo polinômio $P \in P(mE; F)$, existe uma única aplicação multilinear simétrica $A \in L^s(mE; F)$ tal que

$$Ax^m = P(x) \quad \text{para todo } x \in E.$$

Nesse caso, denotaremos $\overset{\vee}{P} := A$.

É natural questionar se na proposição anterior a constante $m^m/m!$ é a melhor possível, isto é, será que nessas condições existe uma constante $0 < c < m^m/m!$ tal que ocorra a desigualdade

$$\|A\| \leq c \|\hat{A}\|$$

para todo $A \in L(mE; F)$? O exemplo a seguir mostra que a resposta é negativa.

Exemplo 1.2.3 Sejam $E = \ell_1$ e $F = \mathbb{C}$, onde ℓ_1 denota o espaço das sequências $x = (x_1, \dots, x_m, \dots)$ cujos termos são números complexos e $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty$. Defina a norma em ℓ_1 como $\|x\| = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$.

Dado $m \in \mathbb{N}$ defina $A_m: E^m \rightarrow F$ por

$$A_m(x^1, \dots, x^m) := \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} x_1^{\sigma(1)} \dots x_m^{\sigma(m)},$$

com $x^j = (x_1^j, \dots, x_m^j, \dots) \in \ell_1$ para todo $j = 1, \dots, m$.

Mostremos que A_m é uma aplicação multilinear simétrica. Obviamente A_m é multilinear, pois para cada $\sigma \in S_m$ a aplicação

$$(x^1, \dots, x^m) \mapsto x_1^{\sigma(1)} \dots x_m^{\sigma(m)}$$

é multilinear. Mais ainda, dado $\sigma' \in S_m$ obtemos

$$\begin{aligned} A_m(x^{\sigma'(1)}, \dots, x^{\sigma'(m)}) &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} x_{\sigma'(1)}^{\sigma(1)} \dots x_{\sigma'(m)}^{\sigma(m)} \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} x_1^{\sigma(1)} \dots x_m^{\sigma(m)} \\ &= A_m(x^1, \dots, x^m), \end{aligned}$$

e portanto A_m é simétrica.

Afirmamos que $\|A_m\| = \frac{1}{m!}$. De fato, dados $x^j = (x_1^j, \dots, x_m^j, \dots) \in \ell_1$ para todo $j = 1, \dots, m$, segue que

$$\begin{aligned} \|A_m(x^1, \dots, x^m)\| &\leq \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} |x_1^{\sigma(1)}| \dots |x_m^{\sigma(m)}| \\ &\leq \frac{1}{m!} \left(\sum_{j=1}^m |x_j^1| \right) \dots \left(\sum_{j=1}^m |x_j^m| \right) \\ &\leq \frac{1}{m!} \|x^1\| \dots \|x^m\|. \end{aligned}$$

A penúltima desigualdade é devida ao fato de que o membro da direita, depois de desenvolvido, ser constituído por um somatório cujos termos são todos os termos do somatório do lado esquerdo e mais outros $m^m - m!$ termos positivos.

Desse modo,

$$\begin{aligned} \|A_m\| &= \sup \left\{ \|A_m(x^1, \dots, x^m)\| : x^j \in E, \max_j \|x^j\| \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \frac{1}{m!} \|x^1\| \dots \|x^m\| : x^j \in E, \max_j \|x^j\| \leq 1 \right\} \\ &= \frac{1}{m!}. \end{aligned}$$

Por outro lado, dados $x^1 = (1, 0, \dots)$, $x^2 = (0, 1, 0, \dots)$, $\dots$, $x^m = (0, \dots, 0, \overset{(m)}{1}, 0, \dots)$ em E , obtemos

$$\|A_m(x^1, \dots, x^m)\| = \frac{1}{m!},$$

com $\|x^j\| \leq 1$ para todo $j = 1, \dots, m$. Segue que $\|A_m\| = \frac{1}{m!}$.

Verifiquemos que $\|\hat{A}_m\| = \frac{1}{m^m}$. Segue por definição que

$$\hat{A}_m(x) = A_m x^m = x_1 \cdots x_m$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_m, \dots) \in E = \ell_1$. Desse modo, como a média geométrica é menor do que ou igual à média aritmética, obtemos

$$\|\hat{A}_m(x)\| = |x_1| \cdots |x_m| \leq \frac{(|x_1| + \cdots + |x_m|)^m}{m^m},$$

e portanto

$$\begin{aligned} \|\hat{A}_m\| &= \sup \left\{ \|\hat{A}_m(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \frac{(|x_1| + \cdots + |x_m|)^m}{m^m} : x \in E, \|x\| \leq 1 \right\} \\ &= \frac{1}{m^m}. \end{aligned}$$

Finalmente, ao tomar $x = \left(\frac{1}{m}, \overset{(m)}{\frac{1}{m}}, \frac{1}{m}, 0, \dots\right) \in E$ temos $\|x\| = 1$ e $\|\hat{A}_m(x)\| = \frac{1}{m^m}$. Assim, segue obviamente que $\|\hat{A}_m\| = \frac{1}{m^m}$.

Portanto, segue que $\|A_m\| = \frac{m^m}{m!} \|\hat{A}_m\|$.

Observação 1.2.4 Os polinômios m -homogêneos $\hat{A}_m: E \rightarrow F$ definidos no último exemplo são chamados *polinômios de Nachbin*.

Observação 1.2.5 Na Proposição 1.2.2, a igualdade

$$\|A\| = \frac{m^m}{m!} \|\hat{A}\|$$

ocorre sempre que E é um espaço de Hilbert e $F = \mathbb{K}$ (veja [10, página 52]).

A próxima proposição fornecerá uma série de equivalências que caracterizarão um polinômio homogêneo contínuo. Antes de enunciá-la, vejamos um resultado auxiliar.

Lema 1.2.6 *Sejam E, F espaços normados e $P \in P(^m E; F)$. Se o polinômio P é limitado em alguma bola $B_E[x_0; r] \subseteq E$ para algum $x_0 \in E$ e algum $r > 0$, então o polinômio P é contínuo, a aplicação $\check{P}$ é contínua e $\|P\| < \infty$.*

Demonstração. Suponha $\|P(x)\| \leq b$ para todo $x \in B_E[x_0; r]$. Pela Proposição 1.2.2, existe uma aplicação $A \in L^s(mE; F)$ tal que $Ax^m = P(x)$ para todo ponto x em E . Assim, pela fórmula de polarização

$$P(x) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P(x_0 + (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_m)x),$$

e portanto para $\|x\| \leq \frac{r}{m}$ obtemos

$$\begin{aligned} \|P(x)\| &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \|P(x_0 + (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_m)x)\| \\ &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} b = \frac{b}{m!}. \end{aligned}$$

Se $\|x\| \leq 1$, faça $y = \frac{x}{m/r}$. Assim, $\|y\| \leq \frac{r}{m}$ e, por conseguinte,

$$\|P(y)\| \leq \frac{b}{m!} \implies \frac{1}{m^m/r^m} \|P(x)\| \leq \frac{b}{m!} \implies \|P(x)\| \leq \frac{b}{m!} \frac{m^m}{r^m}.$$

Logo $\|P\| < \infty$ e, pela Proposição 1.2.2,

$$\|\overset{\vee}{P}\| \leq \frac{m^m}{m!} \|P\| < \infty.$$

Portanto a aplicação $\overset{\vee}{P}$ é contínua pela Proposição 1.1.2. Como o polinômio P é uma restrição de $\overset{\vee}{P}$, segue que P também é contínuo. ■

Proposição 1.2.7 *Sejam E e F espaços normados e $P \in P(mE; F)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) P é contínuo.
- (b) P é contínuo em algum ponto de E .
- (c) P é contínuo na origem.
- (d) $\|P\| < \infty$.
- (e) Existe $k \geq 0$ tal que $\|P(x)\| \leq k \|x\|^m$ para todo ponto x em E .
- (f) $P(A)$ é limitado em F sempre que A for limitado em E .
- (g) P é limitado em toda bola $B_E[x_0, r] \subseteq E$.
- (h) P é limitado em alguma bola $B_E[x_0, r] \subseteq E$.
- (i) $\overset{\vee}{P}$ é contínua.
- (j) Existe $A \in \mathcal{L}(mE, F)$ tal que $P(x) = Ax^m$ para todo ponto x em E .

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) É óbvio.

(b) $\Rightarrow$ (c) Suponha que o polinômio P seja contínuo em $x_0 \in E$. Segue que existe $r > 0$ tal que $\|P(x)\| \leq 1 + \|P(x_0)\|$ para todo $x \in B_E[x_0; r]$. Pelo Lema 1.2.6, temos que P é contínuo. Em particular, P é contínuo na origem.

(c) $\Rightarrow$ (d) Como o polinômio P é contínuo na origem, existe $r > 0$ tal que $\|P(x)\| \leq 1$ para todo ponto $x \in B_E[0; r]$. Logo, pelo Lema 1.2.6 obtemos naturalmente que $\|P\| < \infty$.

(d) $\Rightarrow$ (e) Faça $k = \|P\|$. Dado $x \in E \setminus \{0\}$, segue que

$$\left\| P \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq k \implies \frac{1}{\|x\|^m} \|P(x)\| \leq k \implies \|P(x)\| \leq k \|x\|^m.$$

Para $x = 0$ a desigualdade é trivialmente satisfeita.

(e) $\Rightarrow$ (f) Com efeito, seja A limitado em E . Então existe $c \geq 0$ tal que $\|x\| \leq c$ para todo $x \in A$. Daí e por (e) tem-se obviamente $\|P(x)\| \leq k \|x\|^m < \infty$.

(f) $\Rightarrow$ (g) É óbvio.

(g) $\Rightarrow$ (h) É trivialmente verificada.

(h) $\Rightarrow$ (i) Por hipótese existe $b > 0$ tal que $\|P(x)\| \leq b$ para todo $x \in B_E[x_0, r]$. Pelo Lema 1.2.6, segue que a aplicação $\check{P}$ é contínua.

(i) $\Rightarrow$ (j) Basta tomar $A = \check{P}$.

(j) $\Rightarrow$ (a) Se existe $A \in \mathcal{L}(^m E; F)$ tal que $Ax^m = P(x)$ para todo ponto x em E , então obviamente o polinômio P é contínuo, pois P é uma restrição de A . ■

Agora é possível mostrar algo que havia sido mencionado sem demonstração.

Proposição 1.2.8 *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Então $(\mathcal{P}(^m E; F), \|\cdot\|)$ é um espaço normado.*

Demonstração. Primeiro note que se $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ então, pela Proposição 1.2.7, $\|P\| < \infty$. Desse modo, a função $\|\cdot\| : \mathcal{P}(^m E; F) \rightarrow \mathbb{R}$ está bem definida.

Obviamente $\|P\| \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$. Além disso, se $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ então $\|P\| = 0$ se e somente se $\sup\{\|P(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} = 0$. Mas como o conjunto $\{\|P(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$ é constituído por números reais positivos, segue que

$$\begin{aligned} \sup\{\|P(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} = 0 &\iff \|P(x)\| = 0 \text{ sempre que } x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1 \\ &\iff P(x) = 0 \text{ sempre que } x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1 \\ &\iff P\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = 0 \text{ sempre que } y \in E \setminus \{0\} \\ &\iff P(y) = 0 \text{ sempre que } y \in E \\ &\iff P = 0. \end{aligned}$$

Assim $\|P\| = 0$ se e somente se $P = 0$.

Por outro lado, dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$,

$$\begin{aligned} \|\lambda P\| &= \sup\{\|\lambda P(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\lambda| \|P(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\ &= |\lambda| \sup\{\|P(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\ &= |\lambda| \|P\|. \end{aligned}$$

Por fim, é válida a desigualdade triangular. Com efeito, sejam $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(^m E; F)$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\|P_1 + P_2\| &= \sup\{\|(P_1 + P_2)(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\|P_1(x) + P_2(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|P_1(x)\| + \|P_2(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|P_1(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} + \sup\{\|P_2(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\
&= \|P_1\| + \|P_2\|,
\end{aligned}$$

e portanto a desigualdade triangular é realmente satisfeita. ■

Analogamente ao caso das aplicações multilineares, existe uma caracterização para a norma de um polinômio homogêneo contínuo bastante utilizada, a saber:

$$\|P\| = \inf \{C : \|P(x)\| \leq C \|x\|^m \text{ para todo } x \in E\}$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$. Da mesma forma que se faz no caso linear, prova-se que se $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ então

$$\|P(x)\| \leq \|P\| \cdot \|x\|^m \text{ para todo } x \in E.$$

A proposição a seguir, além do seu valor intrínseco, será de grande valia para a verificação de que o par $(\mathcal{P}(^m E; F), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach sempre que F for espaço de Banach.

Proposição 1.2.9 *A correspondência $A \mapsto \hat{A}$ definida na Proposição 1.2.2 induz um isomorfismo topológico entre os espaços vetoriais normados $\mathcal{L}^s(^m E; F)$ e $\mathcal{P}(^m E; F)$.*

Demonstração. Primeiro mostremos que a aplicação

$$A \in \mathcal{L}^s(^m E; F) \mapsto \hat{A} \in \mathcal{P}(^m E; F)$$

está bem definida. Com efeito, se $A \in \mathcal{L}^s(^m E; F)$, então pela desigualdade obtida na Proposição 1.2.2 e usando as Proposições 1.2.7(d) e 1.1.2(d), segue que $\hat{A} \in \mathcal{P}(^m E; F)$.

Novamente pela Proposição 1.2.2, obtemos obviamente que a aplicação

$$A \in \mathcal{L}^s(^m E; F) \mapsto \hat{A} \in \mathcal{P}(^m E; F)$$

é linear e injetora. Por outro lado, dado $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$, ainda pela Proposição 1.2.2, existe $B \in \mathcal{L}^s(^m E; F)$ tal que $\hat{B} = P$. Mas como $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$, pela Proposição 1.2.7(d), $\|P\| < \infty$. Logo, pela desigualdade da Proposição 1.2.2 e pela Proposição 1.1.2(d), segue que B é contínua e, por conseguinte, a aplicação

$$A \in \mathcal{L}^s(^m E; F) \mapsto \hat{A} \in \mathcal{P}(^m E; F)$$

é sobrejetiva. Resta mostrar que esta aplicação e sua inversa são contínuas. Mas isso segue trivialmente das desigualdades da Proposição 1.2.2, visto que já sabemos que $(\mathcal{P}(^m E; F), \|\cdot\|)$ e $(\mathcal{L}^s(^m E; F), \|\cdot\|)$ são espaços normados. ■

Proposição 1.2.10 *Sejam E um espaço normado e F um espaço de Banach. Então o espaço normado $(\mathcal{P}^m E; F), \|\cdot\|$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Pela Proposição 1.2.8 sabe-se que $(\mathcal{P}^m E; F), \|\cdot\|$ é um espaço normado.

Afirmamos que $(\mathcal{L}^s(mE; F), \|\cdot\|)$ é de Banach. Para provar isso, vejamos que $\mathcal{L}^s(mE; F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(mE; F)$: dada uma sequência $(L_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{L}^s(mE; F)$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n - L\| = 0$, para algum $L \in \mathcal{L}(mE; F)$, como

$$\|L_n(x_1, \dots, x_m) - L(x_1, \dots, x_m)\| \leq \|L_n - L\| \|x_1\| \cdots \|x_m\| \longrightarrow 0,$$

segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x_1, \dots, x_m) = L(x_1, \dots, x_m)$$

para todo $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$. Desse modo, dado $\sigma \in S_m$ temos

$$\begin{aligned} L(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(m)}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(m)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &= L(x_1, x_2, \dots, x_m), \end{aligned}$$

e portanto $L \in \mathcal{L}^s(mE; F)$. Assim, como $(\mathcal{L}(mE; F), \|\cdot\|)$ é espaço de Banach e $(\mathcal{L}^s(mE; F), \|\cdot\|)$ é fechado em $(\mathcal{L}(mE; F), \|\cdot\|)$, temos que $(\mathcal{L}^s(mE; F), \|\cdot\|)$ é também espaço de Banach. Por outro lado, como $\mathcal{L}^s(mE; F)$ e $\mathcal{P}^m E; F$ são isomorfos topologicamente (Proposição 1.2.9), segue que $(\mathcal{P}^m E; F), \|\cdot\|$ é espaço de Banach. ■

Definição 1.2.11 Sejam E e F espaços vetoriais normados. Diremos que o espaço E contém uma *cópia isomorfa* do espaço F se existe um subespaço G de E isomorfo (topologicamente) a F .

Proposição 1.2.12 *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Então o espaço vetorial normado $\mathcal{P}^m E; (\mathcal{P}^n E; F), \|\cdot\|$ contém uma cópia isomorfa do espaço normado $\mathcal{P}^{m+n} E; F$.*

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{P}^{m+n} E; F &\longrightarrow \mathcal{P}^m E; (\mathcal{P}^n E; F), \|\cdot\| \\ P &\longmapsto \Phi(P) = \tilde{P} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{P}: E &\longrightarrow \mathcal{P}^n E; F \\ x &\longmapsto \tilde{P}(x): E \longrightarrow F \\ \tilde{P}(x)(y) &:= \bigvee_P x^m y^n. \end{aligned}$$

Primeiro mostraremos que Φ está bem definida. Para isso deve-se ter $\tilde{P}(x) \in \mathcal{P}(^n E; F)$ e $\tilde{P} \in \mathcal{P}(^m E; (\mathcal{P}(^n E; F), \|\cdot\|))$ para todos $P \in \mathcal{P}(^{m+n} E; F)$ e $x \in E$. Com efeito, dados $P \in \mathcal{P}(^{m+n} E; F)$ e $x \in E$, defina $A: E^n \rightarrow F$ por

$$A(x_1, \dots, x_n) = \check{P}(x, \overset{(m)}{\cdot}, x, x_1, \dots, x_n)$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in E$. É fácil verificar que $A \in \mathcal{L}(^n E; F)$ e, além disso,

$$\tilde{P}(x)(y) = \check{P} x^m y^n = Ay^n.$$

Isso prova que $\tilde{P}(x) \in \mathcal{P}(^n E; F)$. Por outro lado, definindo

$$\begin{aligned} B: E^m &\rightarrow \mathcal{P}(^n E; F) \\ (x_1, \dots, x_m) &\mapsto B(x_1, \dots, x_m): E \rightarrow F \\ B(x_1, \dots, x_m)(y) &:= \check{P}(x_1, \dots, x_m, y, \overset{(n)}{\cdot}, y), \end{aligned}$$

conclui-se facilmente que $B \in L(^m E; F)$, pois $\check{P} \in L(^{m+n} E; F)$. Vejamos que

$$Bx^m = \tilde{P}(x) \text{ para todo } x \in E.$$

De fato, dados $x, y \in E$,

$$Bx^m(y) = \check{P} x^m y^n = \tilde{P}(x)(y).$$

Desse modo, $\tilde{P} \in P(^m E, \mathcal{P}(^n E; F))$, pois já vimos que a imagem de $\tilde{P}$ está contida em $\mathcal{P}(^n E; F)$. Assim, para concluir que Φ está de fato bem definida, basta mostrar que o polinômio $\tilde{P}$ é contínuo. Para isso note que

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}(x)\| &= \sup \left\{ \|\tilde{P}(x)(y)\| : y \in E, \|y\| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \|\check{P} x^m y^n\| : y \in E, \|y\| \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \|\check{P} \|x\|^m \|y\|^n : y \in E, \|y\| \leq 1 \right\} \\ &= \|\check{P}\| \|x\|^m \cdot \sup \{\|y\|^n : y \in E, \|y\| \leq 1\} \\ &= \|\check{P}\| \|x\|^m \end{aligned}$$

para todo $x \in E$. A continuidade de $\check{P}$ nos garante que $\|\check{P}\| < \infty$. Desse modo, pela Proposição 1.2.7(e) segue que $\tilde{P} \in \mathcal{P}(^m E; \mathcal{P}(^n E; F))$.

Vejamos que Φ é linear. Com efeito, dados $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(^{m+n} E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} (\lambda \widetilde{P_1} + \widetilde{P_2})(x)(y) &= (\lambda \check{P_1} + \check{P_2}) x^m y^n \\ &= \lambda \check{P_1} x^m y^n + \check{P_2} x^m y^n \\ &= \lambda \tilde{P_1}(x)(y) + \tilde{P_2}(x)(y) \\ &= (\lambda \tilde{P_1} + \tilde{P_2})(x)(y) \end{aligned}$$

para quaisquer $x, y \in E$. Portanto,

$$\Phi(\lambda P_1 + P_2) = \widetilde{\lambda P_1 + P_2} = \lambda \widetilde{P_1} + \widetilde{P_2} = \lambda \Phi(P_1) + \Phi(P_2)$$

e, conseqüentemente, Φ é linear. Verifiquemos que Φ é injetiva. Seja $P \in \mathcal{P}^{(m+n}E; F)$ com $P \in \ker \Phi$. Então

$$\begin{aligned} \Phi(P) = 0 &\implies \Phi(P)(x) = 0 \text{ para todo } x \in E \\ &\implies \Phi(P)(x)(y) = 0 \text{ para todos } x, y \in E \\ &\implies \bigvee P x^{m+n} = 0 \text{ para todo } x \in E \\ &\implies P = 0, \end{aligned}$$

e portanto Φ é realmente injetiva.

Portanto, existe um isomorfismo linear entre o subespaço $\text{Im } \Phi$ de $\mathcal{P}^m E; \mathcal{P}^n E; F)$ e o espaço vetorial $\mathcal{P}^{(m+n}E; F)$. Resta apenas mostrar que esse isomorfismo é um isomorfismo topológico. Para isso, note que

$$\begin{aligned} \|\Phi(P)\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|\Phi(P)(x)\| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} \|\Phi(P)(x)(y)\| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} \left\| \bigvee P x^m y^n \right\| \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} \left\| \bigvee P \right\| \|x\|^m \|y\|^n \\ &= \left\| \bigvee P \right\| \\ &\leq \frac{(m+n)^{(m+n)}}{(m+n)!} \|P\| \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sup_{\|z\| \leq 1} \|P(z)\| \\ &= \sup_{\|z\| \leq 1} \left\| \bigvee P z^m z^n \right\| \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|z\| \leq 1} \left\| \bigvee P x^m z^n \right\| \\ &= \|\Phi(P)\|. \end{aligned}$$

Desse modo, pela Proposição 1.2.7(e) segue que as aplicações Φ e $\overline{\Phi}: \text{Im } \Phi \longrightarrow \mathcal{P}^{(m+n}E; F)$, a segunda definida de tal forma que $(\Phi \circ \overline{\Phi})(x) = x$ para todo $x \in \text{Im } \Phi$, são contínuas. Isto finaliza a demonstração. $\blacksquare$

Observação 1.2.13 O operador Φ da demonstração da Proposição 1.2.12 não é sobrejetor. Para nos convencer disso, consideremos o caso $m = n = 1$, isto é,

$$\Phi: \mathcal{P}^2 E; F) \longrightarrow \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F)) , \quad \Phi(P)(x)(y) = \bigvee P(x, y).$$

Como $\overset{\vee}{P}$ é uma aplicação bilinear simétrica,

$$\Phi(P)(x)(y) = \overset{\vee}{P}(x, y) = \overset{\vee}{P}(y, x) = \Phi(P)(y)(x)$$

para todos $x, y \in E$. Isso quer dizer que todo operador linear na imagem de Φ é *simétrico*. Basta então mostrar a existência de um operador $T \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$ que não é simétrico, isto é, para o qual existem $x, y \in E$ tais que

$$T(x)(y) \neq T(y)(x).$$

Façamos isso no caso em que $E = \ell_2$, $F = \mathbb{K}$ e para o operador

$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2 = (\ell_2)' = \mathcal{L}(\ell_2, \mathbb{K}), \quad T((x_1, x_2, \dots)) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Fazendo a identificação canônica de $(\ell_2)'$ com ℓ_2 , é verdade que

$$T((x_j)_{j=1}^\infty)((y_j)_{j=1}^\infty) = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + \dots$$

para todas sequências $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_2$. Em particular, tomando $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ e $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$, segue que

$$T(e_1)(e_2) = 1 \neq 0 = T(e_2)(e_1).$$

Corolário 1.2.14 *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Então o espaço vetorial normado $\mathcal{L}(E; (\mathcal{P}^{(n-1)}E; F), \|\cdot\|)$ contém uma cópia isomorfa do espaço normado $\mathcal{P}^{(n)}E; F)$. Para cada $P \in \mathcal{P}^{(n)}E; F)$, chamando de $I(P)$ seu correspondente em $\mathcal{L}(E; \mathcal{P}^{(n-1)}E; F)$, tem-se que*

$$I(P)(x)(y) = \overset{\vee}{P} xy^{n-1} \text{ e } \|P\| \leq \|I(P)\| \leq \frac{n^n}{n!} \|P\|.$$

Demonstração. É trivialmente verificado através da proposição precedente e de sua demonstração. ■

Encerraremos o capítulo com alguns exemplos de polinômios m -homogêneos. Para o entendimento desses exemplos, precisamos conhecer a definição seguinte.

Definição 1.2.15 Um polinômio $P \in \mathcal{P}^{(m)}E; F)$ é dito ser *contínuo de tipo finito* se é da forma

$$P(x) = \sum_{j=1}^p (\varphi_j(x))^m b_j$$

com $\varphi_j \in E'$ e $b_j \in F$ para $j = 1, 2, \dots, p$.

É fácil ver que o subconjunto de todos os polinômios contínuos de tipo finito é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}^{(m)}E; F)$. Denotaremos esse subespaço por $\mathcal{P}_f^{(m)}E; F)$.

Começaremos os exemplos com um caso particular de polinômio contínuo de tipo finito.

Exemplo 1.2.16 Sejam E e F espaços normados, $\varphi \in E'$, $b \in F$ e $m \in \mathbb{N}$. Defina

$$P: E \longrightarrow F, P(x) = (\varphi(x))^m b.$$

Obviamente $P \in \mathcal{P}_f(mE; F)$. Afirmamos que $\|P\| = \|\varphi\|^m \|b\|$. Com efeito

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sup\{\|P(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|(\varphi(x))^m b\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)|^m \|b\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)|^m : x \in E, \|x\| \leq 1\} \|b\| \\ &= (\sup\{|\varphi(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\})^m \|b\| \\ &= \|\varphi\|^m \|b\|. \end{aligned}$$

Exemplo 1.2.17 Sejam E e F espaços normados, $\varphi \in E'$, $u \in \mathcal{L}(E; F)$ e $m \in \mathbb{N}$. Considere a aplicação

$$P: E \longrightarrow F, P(x) = (\varphi(x))^{m-1} u(x).$$

Obviamente P está bem definida. Verifiquemos que $P \in \mathcal{P}(mE; F)$. Para isso, basta tomar a aplicação $A: E^m \longrightarrow F$ dada por

$$A(x_1, x_2, \dots, x_m) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_{m-1})u(x_m),$$

para quaisquer $x_1, x_2, \dots, x_m \in E$. É fácil ver que $A \in \mathcal{L}(mE; F)$ e $P(x) = Ax^m$ para todo $x \in E$. Assim, segue que $P \in \mathcal{P}(mE; F)$.

Além disso, note que

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sup\{\|P(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|(\varphi(x))^{m-1} u(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)|^{m-1} \|u(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\ &= (\sup\{|\varphi(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\})^{m-1} \cdot \sup\{\|u(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\ &= \|\varphi\|^{m-1} \|u\|. \end{aligned}$$

Forneceremos a seguir um exemplo de um polinômio m -homogêneo que não é de tipo finito. Para o entendimento desse exemplo será necessário o seguinte lema.

Lema 1.2.18 Sejam V um espaço vetorial de dimensão infinita e $\varphi: V \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear não nulo. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um conjunto linearmente independente $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq V$ com $\varphi(x_1) \neq 0$, $\varphi(x_2) \neq 0$, $\dots$, $\varphi(x_n) \neq 0$.

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre n . Para $n = 1$ é claramente verdadeiro, pois como φ é não nulo então existe $x_1 \in V \setminus \{0\}$ tal que $\varphi(x_1) \neq 0$.

Suponha que exista um conjunto linearmente independente $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq V$ com $\varphi(x_1) \neq 0, \varphi(x_2) \neq 0, \dots, \varphi(x_n) \neq 0$. Como $\dim V = \infty$, existe $x_{n+1} \in V$ tal que

$\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ é linearmente independente. Se $\varphi(x_{n+1}) \neq 0$ não há mais nada o que fazer. Caso $\varphi(x_{n+1}) = 0$, tome

$$x'_{n+1} := \varphi(x_n)x_{n+1} + x_n.$$

Desse modo, tem-se que $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x'_{n+1}\}$ é linearmente independente e

$$\varphi(x'_{n+1}) = \varphi(x_n)\varphi(x_{n+1}) + \varphi(x_n) = \varphi(x_n) \neq 0.$$

Isto conclui a demonstração. ■

Exemplo 1.2.19 Sejam $m \in \mathbb{N}$, E um espaço normado de dimensão infinita e $\varphi \in E'$ um funcional linear não nulo. Defina a aplicação $P: E \rightarrow F$ por

$$P(x) = (\varphi(x))^{m-1} x,$$

para todo $x \in E$. Conforme visto no Exemplo 1.2.17, $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$. Mostremos que $P \notin \mathcal{P}_f({}^m E; F)$. Para isso suponha, por absurdo, que $P \in \mathcal{P}_f({}^m E; F)$. Neste caso existem $p \in \mathbb{N}$, $b_1, \dots, b_p \in F$ e $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E'$ tais que

$$P(x) = \sum_{j=1}^p (\varphi_j(x))^m b_j$$

para todo $x \in E$. Observe que $\text{Im } P \subseteq \text{span}\{b_1, \dots, b_p\}$. Como E tem dimensão infinita, pelo Lema 1.2.18 existe um conjunto linearmente independente $\{x_1, \dots, x_{p+1}\} \subseteq E$ tal que $\varphi(x_1) \neq 0, \dots, \varphi(x_{p+1}) \neq 0$. Vejamos que o conjunto $\{P(x_1), \dots, P(x_{p+1})\}$ é linearmente independente. Com efeito, dados $a_1, \dots, a_{p+1} \in \mathbb{K}$ tais que

$$a_1 P(x_1) + \dots + a_{p+1} P(x_{p+1}) = 0,$$

segue que

$$a_1 (\varphi(x_1))^{m-1} x_1 + \dots + a_{p+1} (\varphi(x_{p+1}))^{m-1} x_{p+1} = 0.$$

Como $\{x_1, x_2, \dots, x_{p+1}\}$ é um conjunto linearmente independente, concluímos que

$$a_1 = \dots = a_{p+1} = 0.$$

Como consequência a imagem de P contém $p+1$ vetores linearmente independentes, o que obviamente contradiz a inclusão $\text{Im } P \subseteq \text{span}\{b_1, \dots, b_p\}$ provada acima. Portanto $P \notin \mathcal{P}_f({}^m E; F)$.

CAPÍTULO 2

APLICAÇÕES ABSOLUTAMENTE SOMANTES

Conforme veremos neste capítulo, os operadores lineares absolutamente somantes são aqueles que melhoram a convergência de séries num sentido que ficará claro no momento oportuno. O sucesso da teoria dos operadores lineares absolutamente somantes motivou a extensão dessa propriedade para aplicações não lineares, em particular para aplicações multilineares e polinômios homogêneos. Este capítulo apresentará uma extensão desse tipo, que colocará em cena as aplicações multilineares absolutamente somantes e os polinômios homogêneos absolutamente somantes. O capítulo culminará com um teorema que caracterizará tanto as aplicações multilineares quanto os polinômios homogêneos absolutamente somantes.

A partir deste capítulo, os símbolos $E_1, \dots, E_m, E$ e F representarão exclusivamente espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$.

2.1 Aplicações multilineares absolutamente somantes

Seja $p \in (0, \infty)$. A sequência de vetores $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E será dita ser *fortemente p -somável* se a sequência de escalares $(\|x_n\|)_{n=1}^\infty$ pertencer a ℓ_p . O conjunto constituído por todas essas sequências é um espaço vetorial e será denotado por $\ell_p(E)$. Nesse caso, a função $\|\cdot\|_p: \ell_p(E) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p := \left(\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p \right)^{1/p},$$

se torna uma p -norma para $p \in (0, 1)$ e uma norma para $p \in [1, \infty)$. Além disso, o par $(\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$ é um espaço quasi-Banach para $p \in (0, 1)$ e um espaço de Banach para $p \in [1, \infty)$.

Seja ainda $p \in (0, \infty)$. Diz-se que a sequência de vetores $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E é *fracamente p -somável* se para todo funcional linear $\varphi \in E'$, a sequência de escalares $(|\varphi(x_n)|)_{n=1}^\infty$

pertencer ao espaço ℓ_p . Analogamente ao caso das sequências fortemente p -somáveis, o conjunto formado pelas sequências fracamente p -somáveis é um espaço vetorial que será denotado por $\ell_p^w(E)$. Mais ainda, a função $\|\cdot\|_{w,p} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_n)|^p \right)^{1/p},$$

é tal que o par $(\ell_p^w(E), \|\cdot\|_{w,p})$ é um espaço quasi-Banach para $p \in (0, 1)$ e um espaço de Banach para $p \in [1, \infty)$.

É claro que o espaço das sequências fortemente p -somáveis é um subespaço vetorial do espaço das sequências fracamente p -somáveis. Com efeito, se $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p(E)$, segue que

$$\begin{aligned} \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_n)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sup_{\varphi \in B_{E'}} \|\varphi\| \right) \left(\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p \right)^{1/p} = \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p < \infty, \end{aligned}$$

e, por conseguinte, temos $\ell_p(E) \subseteq \ell_p^w(E)$. Mais ainda a inclusão $\ell_p(E) \hookrightarrow \ell_p^w(E)$ é linear e tem norma 1. É interessante notar que essa inclusão pode ser estrita. Para ver isso pode-se tomar o caso específico em que $E = \ell_2$ e $p = 2$. Neste caso, temos que $(e_j)_{j=1}^\infty \in \ell_2^w(\ell_2)$ mas $(e_j)_{j=1}^\infty \notin \ell_2(\ell_2)$. Esta última afirmação será demonstrada em um contexto mais geral no Exemplo 2.2.6.

Apesar de historicamente o estudo de operadores lineares absolutamente somantes preceder o estudo das aplicações multilineares absolutamente somantes, começaremos aqui com a definição da segunda, pois a primeira se tornará um caso particular desta.

Definição 2.1.1 Sejam $s, r_1, r_2, \dots, r_m \in (0, \infty)$. Diz-se que a aplicação multilinear $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ é *absolutamente $(s; r_1, \dots, r_m)$ -somante* (ou simplesmente $(s; r_1, \dots, r_m)$ -somante), se ocorrer $(A(x_{j,1}, \dots, x_{j,m}))_{j=1}^\infty \in \ell_s(F)$ sempre que $(x_{j,k})_{j=1}^\infty \in \ell_{r_k}^w(E_k)$, para todo $k = 1, 2, \dots, m$.

Denotaremos o conjunto de todas as aplicações absolutamente $(s; r_1, \dots, r_m)$ -somantes por $\mathcal{L}^{(s; r_1, \dots, r_m)}(E_1, \dots, E_m; F)$. Esse conjunto é claramente um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ devido ao fato de que $\ell_s(F)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Observação 2.1.2 No estudo das aplicações multilineares $(s; r_1, \dots, r_m)$ -somantes, o caso em que $\frac{1}{s} > \frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_m}$ não é interessante, pois neste caso teremos

$$\mathcal{L}^{(s; r_1, \dots, r_m)}(E_1, \dots, E_m; F) = \{0\}.$$

Com efeito, caso existisse $A \in \mathcal{L}^{(s; r_1, \dots, r_m)}(E_1, \dots, E_m; F) \setminus \{0\}$, teríamos $A(x_1, \dots, x_m) \neq 0$ para algum $(x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \dots \times E_m$. Façamos $u = \frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_m}$. Tomando $\varphi \in E'$ e $u_k = \frac{1}{r_k s u}$, com $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \varphi \left(\frac{x_k}{j^{u_k}} \right) \right|^{r_k} = |\varphi(x_k)|^{r_k} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{u_k r_k}} \right) = |\varphi(x_k)|^{r_k} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\frac{1}{su}}} \right) < \infty,$$

sendo a última desigualdade oriunda do fato de $su < 1$. Segue que $\left(\frac{x_k}{j^{u_k}} \right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{r_k}^w(E_k)$ para todo $k = 1, 2, \dots, m$. Em contrapartida, como

$$s(u_1 + \dots + u_m) = s \left(\frac{1}{r_1 s u} + \dots + \frac{1}{r_m s u} \right) = \frac{1}{r_1 u} + \dots + \frac{1}{r_m u} = 1,$$

então

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left\| A \left(\frac{x_1}{j^{u_1}}, \dots, \frac{x_m}{j^{u_m}} \right) \right\|^s &= \|A(x_1, \dots, x_m)\|^s \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{(u_1 + \dots + u_m)s}} \right) \\ &= \|A(x_1, \dots, x_m)\|^s \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \right) = \infty, \end{aligned}$$

e portanto $\left(A \left(\frac{x_1}{j^{u_1}}, \dots, \frac{x_m}{j^{u_m}} \right) \right)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_s(F)$, o que contradiz a condição da aplicação multilinear A ser $(s; r_1, \dots, r_m)$ -somante.

Observação 2.1.3 Tomando $n = 1$ e $s, r > 0$ na Definição 2.1.1 obtemos a definição de *operador linear absolutamente $(s; r)$ -somante*. Assim um operador $T \in \mathcal{L}(E; F)$ é absolutamente $(s; r)$ -somante se

$$(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_s(F) \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_r^w(E).$$

No caso em que $s = r$, um operador $T \in \mathcal{L}(E; F)$ é $(r; r)$ -somante (neste caso dizemos apenas r -somante) se T transforma sequências fracamente r -somáveis em sequências fortemente r -somáveis. Como em geral $\ell_r(F)$ está contido propriamente em $\ell_r^w(F)$, é nesse sentido que um operador absolutamente r -somante melhora a convergência de séries.

O espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos operadores lineares absolutamente p -somantes $T: E \rightarrow F$ será denotado por $\Pi_p(E, F)$.

Para finalizar a seção, apresentaremos um exemplo de aplicações multilineares absolutamente somantes. Antes do exemplo, vejamos uma definição que será necessária.

Definição 2.1.4 Uma aplicação $A \in L(E_1, \dots, E_m; F)$ é denominada *contínua de tipo finito* se é da forma

$$A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^p \varphi_1^j(x_1) \cdots \varphi_m^j(x_m) b_j,$$

sendo $\varphi_i^j \in E'_i$ e $b_j \in F$ para $j = 1, \dots, p$ e $i = 1, \dots, m$.

É fácil ver que o conjunto de todas as aplicações multilineares contínuas de tipo finito é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$, que será denotado por $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_m; F)$. Além dessa definição, usaremos no exemplo uma forma da desigualdade de Hölder generalizada. Na demonstração dessa desigualdade será usado o seguinte lema.

Lema 2.1.5 *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $a_1, a_2, \dots, a_m, p_1, p_2, \dots, p_m$ números reais positivos com $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$. Então $a_1^{p_1} \dots a_m^{p_m} \leq p_1 a_1 + \dots + p_m a_m$.*

Demonstração. Veja [15, página 26]. ■

Proposição 2.1.6 (Desigualdade de Hölder generalizada) *Sejam $s, r_1, r_2, \dots, r_m \in [1, \infty)$ com $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_m}$. Se $(x_{j,1})_{j=1}^\infty \in \ell_{r_1}, \dots, (x_{j,m})_{j=1}^\infty \in \ell_{r_m}$ então*

$$(x_{j,1} \dots x_{j,m})_{j=1}^\infty \in \ell_s \text{ e } \|(x_{j,1} \dots x_{j,m})_{j=1}^\infty\|_s \leq \|(x_{j,1})_{j=1}^\infty\|_{r_1} \dots \|(x_{j,m})_{j=1}^\infty\|_{r_m}.$$

Demonstração. Se $\|(x_{j,k})_{j=1}^\infty\|_{r_k} = 0$ para algum $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, a desigualdade é trivialmente verificada. Podemos supor então $\|(x_{j,k})_{j=1}^\infty\|_{r_k} \neq 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, m$. Inicialmente verificaremos a veracidade do resultado para o caso em que $\frac{1}{s} = \frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_m}$. Usando o Lema 2.1.5, neste caso com

$$a_k = \frac{|x_{i,k}|^{r_k}}{\|(x_{j,k})_{j=1}^\infty\|_{r_k}^{r_k}} \text{ e } p_k = \frac{s}{r_k}$$

para todo $k = 1, 2, \dots, m$ e $i \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\prod_{k=1}^m \frac{|x_{i,k}|^s}{\|(x_{j,k})_{j=1}^\infty\|_{r_k}^s} \leq \sum_{k=1}^m \frac{s}{r_k} \frac{|x_{i,k}|^{r_k}}{\|(x_{j,k})_{j=1}^\infty\|_{r_k}^{r_k}}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^\infty |x_{i,1} \dots x_{i,m}|^s}{\|(x_{j,1})_{j=1}^\infty\|_{r_1}^s \dots \|(x_{j,m})_{j=1}^\infty\|_{r_m}^s} &\leq \frac{s}{r_1 \|(x_{j,1})_{j=1}^\infty\|_{r_1}^{r_1}} \left(\sum_{i=1}^\infty |x_{i,1}|^{r_1} \right) + \dots \\ &\quad + \frac{s}{r_m \|(x_{j,m})_{j=1}^\infty\|_{r_m}^{r_m}} \left(\sum_{i=1}^\infty |x_{i,m}|^{r_m} \right) \\ &= \frac{s}{r_1} + \dots + \frac{s}{r_m} = 1. \end{aligned}$$

Desse modo, chegamos na desigualdade

$$\left(\sum_{i=1}^\infty |x_{i,1} \dots x_{i,m}|^s \right)^{1/s} \leq \|(x_{j,1})_{j=1}^\infty\|_{r_1} \dots \|(x_{j,m})_{j=1}^\infty\|_{r_m},$$

e portanto $(x_{j,1} \cdots x_{j,m})_{j=1}^\infty \in \ell_s$ e

$$\|(x_{j,1} \cdots x_{j,m})_{j=1}^\infty\|_s \leq \|(x_{j,1})_{j=1}^\infty\|_{r_1} \cdots \|(x_{j,m})_{j=1}^\infty\|_{r_m}.$$

Isto completa a demonstração para o caso $\frac{1}{s} = \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m}$.

Como a desigualdade é verificada sempre que $\frac{1}{s} = \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m}$, o caso da desigualdade estrita $\frac{1}{s} < \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m}$ segue da inclusão $\ell_p \subseteq \ell_q$ e da desigualdade $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$ sempre que $q \geq p$. ■

Vejamos finalmente o exemplo.

Exemplo 2.1.7 Sejam $s, r_1, \dots, r_m \in [1, \infty)$. Vejamos que o espaço $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_m; F)$ é um subespaço vetorial do espaço $\mathcal{L}^{(s; r_1, \dots, r_m)}(E_1, \dots, E_m; F)$. Para isso basta mostrar que dados $b \in F$ e funcionais não nulos $\varphi_1 \in E'_1, \dots, \varphi_m \in E'_m$, a aplicação multilinear de tipo finito $A: E_1 \times \cdots \times E_m \rightarrow F$, definida por

$$A(x_1, \dots, x_m) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_m(x_m)b$$

pertence a $\mathcal{L}^{(s; r_1, \dots, r_m)}(E_1, \dots, E_m; F)$. Para isso sejam $(x_{j,k})_{j=1}^\infty \in \ell_{r_k}^w(E_k)$ para todo $k = 1, 2, \dots, m$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^\infty \|A(x_{j,1}, \dots, x_{j,m})\|^s &= \sum_{j=1}^\infty \|\varphi_1(x_{j,1}) \cdots \varphi_m(x_{j,m})b\|^s \\ &= \|b\|^s \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi_1(x_{j,1}) \cdots \varphi_m(x_{j,m})|^s \right) \\ &\leq \|b\|^s \left\| (\varphi_1(x_{j,1}))_{j=1}^\infty \right\|_{r_1}^s \cdots \left\| (\varphi_m(x_{j,m}))_{j=1}^\infty \right\|_{r_m}^s \\ &= \|b\|^s \|\varphi_1\|^s \left\| \left(\frac{\varphi_1(x_{j,1})}{\|\varphi_1\|} \right)_{j=1}^\infty \right\|_{r_1}^s \cdots \|\varphi_m\|^s \left\| \left(\frac{\varphi_m(x_{j,m})}{\|\varphi_m\|} \right)_{j=1}^\infty \right\|_{r_m}^s \\ &\leq \|b\|^s \|\varphi_1\|^s \cdots \|\varphi_m\|^s \|(x_{j,1})_{j=1}^\infty\|_{w, r_1}^s \cdots \|(x_{j,m})_{j=1}^\infty\|_{w, r_m}^s \\ &< \infty, \end{aligned}$$

sendo a primeira desigualdade devida à desigualdade de Hölder generalizada. Segue que $(A(x_{j,1}, \dots, x_{j,m}))_{j=1}^\infty \in \ell_s(F)$ e, consequentemente, a aplicação A é absolutamente $(s; r_1, \dots, r_m)$ -somante.

2.2 Polinômios homogêneos absolutamente somantes

Como mencionado na seção anterior, o estudo de operadores lineares absolutamente somantes antecedeu e deu origem ao estudo das aplicações não lineares absolutamente somantes. Conforme visto na Observação 2.1.3, um operador linear $T: E \rightarrow F$ é absolutamente $(s; r)$ -somante se $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_s(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_r^w(E)$. Assim fica

claro que a definição de aplicação multilinear absolutamente somante é uma generalização natural da definição de operador linear absolutamente somante. Similarmente a essa generalização, a definição de polinômios homogêneos absolutamente somantes também se torna natural:

Definição 2.2.1 Sejam $s, r \in (0, \infty)$. Diz-se que o polinômio m -homogêneo $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é *absolutamente $(s; r)$ -somante* (ou simplesmente *$(s; r)$ -somante*), se ocorrer $(P(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_s(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_r^w(E)$.

O conjunto constituído por todos os polinômios m -homogêneos absolutamente $(s; r)$ -somantes é denotado por $\mathcal{P}^{(s;r)}(^m E; F)$. Analogamente ao caso das aplicações multilineares absolutamente somantes, verifica-se que o conjunto $\mathcal{P}^{(s;r)}(^m E; F)$ é um subespaço vetorial do espaço $\mathcal{P}(^m E; F)$.

Outro evento similar ao das aplicações multilineares absolutamente somantes é que ocorre $\mathcal{P}^{(s;r)}(^m E; F) = \{0\}$ quando $ms < r$. De fato, caso tivéssemos $P \in \mathcal{P}^{(s;r)}(^m E; F) \setminus \{0\}$, existiria $x \in E$ com $P(x) \neq 0$. Nesse caso, dado $\varphi \in E'$,

$$\sum_{j=1}^\infty \left| \varphi \left(\frac{x}{j^{1/ms}} \right) \right|^r = |\varphi(x)|^r \left(\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^{r/ms}} \right) < \infty,$$

sendo a última desigualdade devido a $ms < r$. Assim obtemos que $\left(\frac{x}{j^{1/ms}} \right) \in \ell_r^w(E)$. Por outro lado,

$$\sum_{j=1}^\infty \left\| P \left(\frac{x}{j^{1/ms}} \right) \right\|^s = \|P(x)\|^s \left(\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j} \right) = \infty,$$

e isso contradiz a suposição de P ser absolutamente $(s; r)$ -somante. Por essa razão iremos considerar apenas o caso em que $ms \geq r$.

Observação 2.2.2 É interessante notar que todo polinômio homogêneo contínuo leva sequência fortemente r -somável em sequência fortemente r -somável. Com efeito, dados $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_r(E)$,

$$\sum_{j=1}^\infty \|P(x_j)\|^r \leq \|P\|^r \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^{mr} \right) \leq \|P\|^r \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^r \right)^m < \infty,$$

pois $r \leq mr$.

Para o caso de sequências fracamente somáveis, é verdade que todo operador linear contínuo leva sequência fracamente r -somável em sequência fracamente r -somável: dados $u \in \mathcal{L}(^m E; F)$, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_r^w(E)$ e $\varphi \in F'$,

$$\sum_{j=1}^\infty \|\varphi(u(x_j))\|^r = \|u\|^r \left(\sum_{j=1}^\infty \left\| \left(\varphi \circ \frac{u}{\|u\|} \right) (x_j) \right\|^r \right) < \infty,$$

pois $\varphi \circ \frac{u}{\|u\|} \in E'$. É claro que este argumento não se adapta a polinômios homogêneos, pois a composição de um polinômio homogêneo com um funcional linear é um polinômio homogêneo a valores escalares, e não um funcional linear. E de fato não é verdade que todo polinômio homogêneo contínuo leva sequência fracamente r -somável em sequência fracamente r -somável. Os polinômios homogêneos que satisfazem essa propriedade foram estudados em [35].

A conexão entre as teorias polinomial e multilinear é realizada pela seguinte caracterização:

Proposição 2.2.3 *Sejam $s, r \in (0, \infty)$ e $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$. Então o polinômio P é absolutamente $(s; r)$ -somante se e somente se a aplicação $\check{P}$ é absolutamente $(s; r, \binom{m}{\cdot}, r)$ -somante.*

Demonstração. Sejam P um polinômio absolutamente $(s; r)$ -somante e $(x_{j,k})_{j=1}^\infty \in \ell_r^w(E)$ para todo $k = 1, \dots, m$. Pela fórmula de polarização,

$$\check{P}(x_{j,1}, \dots, x_{j,m}) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x_{j,1} + \cdots + \varepsilon_m x_{j,m})$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, o que implica

$$(\check{P}(x_{j,1}, \dots, x_{j,m}))_{j=1}^\infty = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m (P(\varepsilon_1 x_{j,1} + \cdots + \varepsilon_m x_{j,m}))_{j=1}^\infty.$$

Como $\ell_r^w(E)$ é um espaço vetorial, segue que $(\varepsilon_1 x_{j,1} + \cdots + \varepsilon_m x_{j,m})_{j=1}^\infty \in \ell_r^w(E)$ para quaisquer $\varepsilon_i = \pm 1$, com $i = 1, \dots, m$. Logo,

$$(P(\varepsilon_1 x_{j,1} + \cdots + \varepsilon_m x_{j,m}))_{j=1}^\infty \in \ell_s(F)$$

para quaisquer $\varepsilon_i = \pm 1$, com $i = 1, \dots, m$. Consequentemente,

$$\frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m (P(\varepsilon_1 x_{j,1} + \cdots + \varepsilon_m x_{j,m}))_{j=1}^\infty \in \ell_s(F),$$

pois $\ell_s(F)$ é um espaço vetorial.

Reciprocamente, sejam $\check{P}$ uma aplicação absolutamente $(s; r, \binom{m}{\cdot}, r)$ -somante e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_r^w(E)$. Segue trivialmente que

$$(P(x_j))_{j=1}^\infty = (\check{P} x_j^m)_{j=1}^\infty \in \ell_s(F),$$

o que completa a demonstração. ■

Vejamos agora alguns exemplos acerca de polinômios homogêneos absolutamente somantes. Semelhantemente ao caso das aplicações multilineares contínuas de tipo finito, os primeiros exemplos de polinômios homogêneos absolutamente $(s; r)$ -somantes, para quaisquer $s, r \in [1, \infty)$, são os polinômios homogêneos de tipo finito.

Exemplo 2.2.4 Sejam $s, r \in [1, \infty)$ com $ms \geq r$. Mostraremos que $\mathcal{P}_f(^mE; F) \subseteq \mathcal{P}^{(s;r)}(^mE; F)$. Como já sabemos que $\mathcal{P}^{(s;r)}(^mE; F)$ é um espaço vetorial, basta mostrar que o polinômio da forma

$$P: E \longrightarrow F, \quad P(x) = (\varphi(x))^m b,$$

onde $b \in F$ e $\varphi \in E'$, é $(s; r)$ -somante. Para isso seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_r^w(E)$. Desse modo segue que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^\infty \|P(x_j)\|^s \right)^{1/ms} &= \left(\sum_{j=1}^\infty \|b(\varphi(x_j))^m\|^s \right)^{1/ms} \\ &= \|b\|^{1/m} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^{ms} \right)^{1/ms} \\ &\leq \|b\|^{1/m} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^r \right)^{1/r} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

sendo a penúltima desigualdade oriunda de $ms \geq r$. Portanto $P \in \mathcal{P}^{(s;r)}(^mE; F)$.

O exemplo precedente nos fornece polinômios homogêneos absolutamente somantes. Os próximos dois exemplos terão o intuito de apresentar exemplos de polinômios homogêneos que não são $(s; r)$ -somantes para determinados $s, r \in [1, \infty)$. Nestes dois exemplos denotaremos o conjugado de $p \in [1, \infty]$ por p' , isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Além disso, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in \mathbb{K}^\infty$ e $i \in \mathbb{N}$, escreveremos

$$\pi_i((x_j)_{j=1}^\infty) = x_i.$$

Relembremos ainda o isomorfismo isométrico canônico entre $\ell_{p'}$ e $(\ell_p)'$ dado por

$$\begin{aligned} \ell_{p'} &\longrightarrow (\ell_p)' \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \varphi: \ell_p \longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi((y_j)_{j=1}^\infty) &= \sum_{j=1}^\infty x_j y_j. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.5 Considere o polinômio m -homogêneo

$$\begin{aligned} P: \ell_p &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \sum_{j=1}^\infty x_j^m, \end{aligned}$$

onde $p \in [1, \infty)$ e $m \geq p$. Para verificar que a aplicação $P: \ell_p \longrightarrow \mathbb{K}$ é de fato um polinômio m -homogêneo, basta notar que a aplicação multilinear

$$\begin{aligned} A: \ell_p \times \cdots \times \ell_p &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} x_{j,1} \cdots x_{j,m}, \end{aligned}$$

onde $m \geq p$ e $x_k = (x_{j,k})_{j=1}^{\infty}$ para todo $k = 1, 2, \dots, m$, é tal que $Ax^m = P(x)$ para todo ponto x em ℓ_p . Além disso, pela desigualdade de Hölder generalizada, segue que $A: \ell_p \times \cdots \times \ell_p \longrightarrow \mathbb{K}$ está bem definida, isto é, $A(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}$ para todo ponto $(x_1, \dots, x_m)$ em $\ell_p \times \cdots \times \ell_p$.

Verifiquemos que se $r \geq p'$ então o polinômio P não é $(s; r)$ -somante. Com efeito, considerando a sequência $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ formada pelos vetores unitários canônicos de ℓ_p , segue que $(P(e_j))_{j=1}^{\infty} \notin \ell_s$, uma vez que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|P(e_j)\|^s = \sum_{j=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Por outro lado, se $r \geq p'$, então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} y_i \pi_i(e_j) \right|^r = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^r < \infty$$

para toda sequência $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p'}$. Pelo isomorfismo isométrico existente entre $\ell_{p'}$ e $(\ell_p)'$, segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(e_j)|^r < \infty$$

sempre que $\varphi \in (\ell_p)'$ e $r \geq p'$. Desse modo, se $r \geq p'$, obtemos $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_r^w(\ell_p)$ e consequentemente P não é $(s; r)$ -somante nesse caso.

Exemplo 2.2.6 Seja

$$P: \ell_p \longrightarrow \ell_q, \quad P((x_j)_{j=1}^{\infty}) = (x_j^m)_{j=1}^{\infty},$$

onde $p, q \in [1, \infty)$ e $mq \geq p$. A aplicação P assim definida é um polinômio m -homogêneo. De fato, a aplicação $A: \ell_p \times \cdots \times \ell_p \longrightarrow \ell_q$ definida por

$$A(x_1, \dots, x_m) = (x_{j,1} \cdots x_{j,m})_{j=1}^{\infty},$$

onde $x_k = (x_{j,k})_{j=1}^{\infty}$ para todo $k = 1, 2, \dots, m$ e $mq \geq p$, é multilinear e $Ax^m = P(x)$ para todo ponto x em ℓ_p . A verificação de que a aplicação A está bem definida é consequência direta da desigualdade de Hölder generalizada.

Mostremos que o polinômio P não é $(s; r)$ -somante se tivermos $r \geq p'$. Para isso tome novamente a sequência $(e_j)_{j=1}^\infty$ dos vetores unitários canônicos de ℓ_p . Então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|P(e_j)\|_q^s = \sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|_q^s = \sum_{j=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

o que mostra que $(P(e_j))_{j=1}^\infty \notin \ell_s(\ell_q)$. Por outro lado, se $r \geq p'$, então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} y_i \pi_i(e_j) \right|^r = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^r < \infty$$

para toda sequência $(y_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{p'}$. Desse modo, usando o isomorfismo isométrico entre $\ell_{p'}$ e $(\ell_p)'$ obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(e_j)|^r < \infty$$

para todo $\varphi \in (\ell_p)'$ e $r \geq p'$. Portanto $(e_j)_{j=1}^\infty \in \ell_r^w(\ell_p)$ e assim P não é $(s; r)$ -somante no caso em que $r \geq p'$.

2.3 Caracterizações através de desigualdades

Apresentaremos nesta seção uma caracterização das aplicações multilineares e dos polinômios homogêneos absolutamente somantes através de desigualdades. Essa caracterização, além de simplificar a identificação das aplicações multilineares e polinômios homogêneos que são absolutamente somantes, nos permitirá normar os espaços vetoriais $\mathcal{L}^{(s; r_1, \dots, r_m)}(E_1, \dots, E_m; F)$ e $\mathcal{P}^{(s; r)}(^m E; F)$, para $1 \leq r, s, r_1, \dots, r_m < \infty$, que com tais normas se tornarão espaços de Banach.

Antes de demonstrar essa caracterização por desigualdades para aplicações multilineares e polinômios homogêneos absolutamente somantes, é necessário conhecer o lema seguinte.

Lema 2.3.1 *Se $E_1, E_2, \dots, E_m, F$ são espaços de Banach e $A: E_1 \times \dots \times E_m \longrightarrow F$ é uma aplicação m -linear com gráfico fechado, então A é contínua.*

Esse último lema é conhecido como teorema do gráfico fechado para aplicações multilineares. Sua demonstração pode ser encontrada em [11]. Voltemos para o teorema de caracterização.

Teorema 2.3.2 *(i) Sejam $s, r \in [1, \infty)$. Um polinômio m -homogêneo $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é absolutamente $(s; r)$ -somante se e somente se existe $C \geq 0$ tal que*

$$\|(P(x_j))_{j=1}^k\|_s \leq C \left(\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w, r} \right)^m \quad (2.1)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e todos $x_1, \dots, x_k \in E$. Nesse caso, denotando por $\|P\|_{as,(s;r)}$ o ínfimo das constantes C para as quais sempre vale (2.1), então $(\mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E; F), \|\cdot\|_{as,(s;r)})$ é um espaço de Banach.

(ii) Sejam $s, r_1, \dots, r_m \in [1, \infty)$. Uma aplicação multilinear $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ é absolutamente $(s; r_1, \dots, r_m)$ -somante se e somente se existe $C \geq 0$ tal que independentemente de $k \in \mathbb{N}$ e $x_{j,1} \in E_1, \dots, x_{j,m} \in E_m$, com $j = 1, \dots, k$, tivermos

$$\|(A(x_{j,1}, \dots, x_{j,m}))_{j=1}^k\|_s \leq C \prod_{n=1}^m \|(x_{j,n})_{j=1}^k\|_{w,r_n} \quad (2.2)$$

Nesse caso, denotando por $\|A\|_{as,(s;r_1,\dots,r_m)}$ o ínfimo das constantes C para as quais sempre vale (2.2), então $(\mathcal{L}^{(s;r_1,\dots,r_m)}(E_1, \dots, E_m; F), \|\cdot\|_{as,(s;r_1,\dots,r_m)})$ é um espaço de Banach.

Demonstração. (i) Suponha que exista uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\|(P(x_j))_{j=1}^k\|_s \leq C \left(\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r} \right)^m$$

para todos $x_1, \dots, x_k \in E$ e $k \in \mathbb{N}$. Para toda sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_r^w(E)$, aplicando a desigualdade acima para cada parte finita $(x_j)_{j=1}^k$ e fazendo $k \rightarrow \infty$, segue imediatamente que P é $(s; r)$ -somante.

Reciprocamente, supondo que $P \in \mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E; F)$, a aplicação

$$\begin{aligned} Q: \ell_r^w(E) &\longrightarrow \ell_s(F) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto (P(x_j))_{j=1}^\infty \end{aligned}$$

é claramente bem definida. Basta mostrar que $Q \in \mathcal{P}({}^m \ell_r^w(E); \ell_s(F))$, pois neste caso a veracidade da recíproca será consequência da Proposição 1.2.7. Para isso considere a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{Q}: \ell_r^w(E) \times \dots \times \ell_r^w(E) &\longrightarrow \ell_s(F) \\ ((x_{j,1})_{j=1}^\infty, \dots, (x_{j,m})_{j=1}^\infty) &\longmapsto (\bigvee (x_{j,1}, \dots, x_{j,m}))_{j=1}^\infty. \end{aligned}$$

Vejamos que $\tilde{Q}$ é multilinear e $\tilde{Q}x^m = Q(x)$ para todo $x \in \ell_r^w(E)$. Com efeito, dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x_k = (x_{j,k})_{j=1}^\infty$, $x'_i = (x'_{j,i})_{j=1}^\infty \in \ell_r^w(E)$ para $k = 1, 2, \dots, m$ e $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, segue que

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_m) &= (\bigvee (x_{j,1}, \dots, \lambda x_{j,i} + x'_{j,i}, \dots, x_{j,m}))_{j=1}^\infty \\ &= (\lambda \bigvee (x_{j,1}, \dots, x_{j,i}, \dots, x_{j,m}) + \bigvee (x_{j,1}, \dots, x'_{j,i}, \dots, x_{j,m}))_{j=1}^\infty \\ &= \lambda (\bigvee (x_{j,1}, \dots, x_{j,i}, \dots, x_{j,m}))_{j=1}^\infty + (\bigvee (x_{j,1}, \dots, x'_{j,i}, \dots, x_{j,m}))_{j=1}^\infty \\ &= \lambda \tilde{Q}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) + \tilde{Q}(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Além disso

$$\tilde{Q}x_1^m = (\bigvee (x_{j,1}, \dots, x_{j,1}))_{j=1}^\infty = (P(x_{j,1}))_{j=1}^\infty = Q(x_1).$$

Desse modo Q é um polinômio m -homogêneo e portanto basta apenas mostrar que Q é contínuo. Mostremos que $\overset{\vee}{Q}$ tem gráfico fechado. Para isso sejam

$$x_{j,1} \longrightarrow x_1, \dots, x_{j,m} \longrightarrow x_m$$

sequências convergentes em $\ell_r^w(E)$ tais que $\overset{\vee}{Q}(x_{j,1}, \dots, x_{j,m}) \longrightarrow y$ em $\ell_s(F)$. Devemos mostrar que $\overset{\vee}{Q}(x_1, \dots, x_m) = y$. Escrevamos

$$x_{j,k} = (x_{j,k,n})_{n=1}^{\infty} \quad \text{e} \quad x_k = (x_k^n)_{n=1}^{\infty}$$

para todo $k = 1, 2, \dots, m$. Como $x_{j,k} \longrightarrow x_k$ em $\ell_r^w(E)$ para todo $k = 1, 2, \dots, m$, então fixado $n \in \mathbb{N}$ temos $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{j,k,n} = x_k^n$ em E para todo $k = 1, 2, \dots, m$. Portanto

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \lambda_k x_{j,k,n} = \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k^n \text{ em } E,$$

para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, da continuidade de P e pela fórmula de polarização,

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{Q}(x_1, \dots, x_m) &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m Q \left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_k x_k \right) \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m Q \left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_k (x_k^n)_{n=1}^{\infty} \right) \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m Q \left(\left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_k x_k^n \right)_{n=1}^{\infty} \right) \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \left(P \left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_k x_k^n \right) \right)_{n=1}^{\infty} \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \left(P \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \varepsilon_k x_{j,k,n} \right) \right)_{n=1}^{\infty} \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \left(\lim_{j \rightarrow \infty} P \left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_k x_{j,k,n} \right) \right)_{n=1}^{\infty} \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \lim_{j \rightarrow \infty} \left(P \left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_k x_{j,k,n} \right) \right)_{n=1}^{\infty} \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \lim_{j \rightarrow \infty} Q \left(\left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_k x_{j,k,n} \right)_{n=1}^{\infty} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \lim_{j \rightarrow \infty} Q \left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_k x_{j,k} \right) \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m Q \left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_k x_{j,k} \right) \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \overset{\vee}{Q} (x_{j,1}, \dots, x_{j,m}) = y.
\end{aligned}$$

Está provado que $\overset{\vee}{Q}$ tem gráfico fechado. Pelo Lema 2.3.1 segue que $\overset{\vee}{Q}$ é contínua. Consequentemente, pela Proposição 1.2.7 conclui-se que o polinômio Q é contínuo. Isso mostra que a recíproca é verdadeira.

Finalmente, verifiquemos que $(\mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E; F), \|\cdot\|_{as,(s;r)})$ é um espaço de Banach. Primeiramente vejamos que a função $\|\cdot\|_{as,(s;r)}: \mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E; F) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma norma. Para isso sejam $P_1, P_2 \in \mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. É fácil ver que

$$\|(P_1(x_j))_{j=1}^k\|_s \leq \frac{\|\lambda P_1\|_{as,(s;r)}}{|\lambda|} \left(\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r} \right)^m$$

e

$$\|(\lambda P_1(x_j))_{j=1}^k\|_s \leq |\lambda| \|P_1\|_{as,(s;r)} \left(\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r} \right)^m,$$

para todos $x_1, \dots, x_k \in E$ e $k \in \mathbb{N}$. Como consequência, temos

$$|\lambda| \|P_1\|_{as,(s;r)} \leq \|\lambda P_1\|_{as,(s;r)} \text{ e } \|\lambda P_1\|_{as,(s;r)} \leq |\lambda| \|P_1\|_{as,(s;r)}.$$

Portanto obtemos $\|\lambda P_1\|_{as,(s;r)} = |\lambda| \|P_1\|_{as,(s;r)}$. Por outro lado, como

$$\|(P_1(x_j))_{j=1}^k\|_s \leq \|P_1\|_{as,(s;r)} \left(\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r} \right)^m$$

e

$$\|(P_2(x_j))_{j=1}^k\|_s \leq \|P_2\|_{as,(s;r)} \left(\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r} \right)^m,$$

para todos $x_1, \dots, x_k \in E$ e $k \in \mathbb{N}$, então usando a desigualdade de Minkowski (desigualdade triangular para as normas $\|\cdot\|_p$), obtemos

$$\|(P_1(x_j))_{j=1}^k + (P_2(x_j))_{j=1}^k\|_s \leq \left(\|P_1\|_{as,(s;r)} + \|P_2\|_{as,(s;r)} \right) \left(\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r} \right)^m,$$

para todos $x_1, \dots, x_k \in E$ e $k \in \mathbb{N}$. Isto implica que

$$\|P_1 + P_2\|_{as,(s;r)} \leq \|P_1\|_{as,(s;r)} + \|P_2\|_{as,(s;r)}.$$

Falta mostrar que $\mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E; F)$ é completo. Para isso vejamos inicialmente que

$$\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{as,(s;r)}.$$

De fato, para todo polinômio m -homogêneo $P \in \mathcal{P}^{(s;r)}({}^mE; F)$ é verdade que

$$\|P(x)\| \leq \|P\|_{as,(s;r)} \left(\sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| \right)^m \leq \|P\|_{as,(s;r)} \|x\|^m,$$

para todo $x \in E$. Então é imediato que

$$\|P\| = \inf \{C : \|P(x)\| \leq C \|x\|^m \text{ para todo } x \in E\} \leq \|P\|_{as,(s;r)}.$$

Visto isso, seja $(P_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência $\|\cdot\|_{as,(s;r)}$ -Cauchy, cujos termos são naturalmente polinômios m -homogêneos absolutamente $(s;r)$ -somantes. Da desigualdade $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{as,(s;r)}$ que acabamos de verificar segue imediatamente que a sequência $(P_n)_{n=1}^\infty$ é $\|\cdot\|$ -Cauchy. Como $(\mathcal{P}({}^mE; F), \|\cdot\|)$ é espaço de Banach, existe $P \in \mathcal{P}({}^mE; F)$ tal que $\|P_n - P\| \rightarrow 0$. Devemos mostrar que

$$P \in \mathcal{P}^{(s;r)}({}^mE; F) \text{ e } \|P_n - P\|_{as,(s;r)} \rightarrow 0.$$

Para isso sejam $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_k \in E$. Como $(P_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência $\|\cdot\|_{as,(s;r)}$ -Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|P_n - P_i\|_{as,(s;r)} < \varepsilon$$

para todos $n, i \geq n_0$. Além disso, como $(P_n - P_i) \in \mathcal{P}^{(s;r)}({}^mE; F)$ para quaisquer $n, i \in \mathbb{N}$, é verdade que

$$\left(\sum_{j=1}^k \|P_n(x_j) - P_i(x_j)\|^s \right)^{1/s} \leq \|P_n - P_i\|_{as,(s;r)} \left(\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r} \right)^m < \varepsilon \left(\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r} \right)^m$$

para todos $n, i \geq n_0$. Fazendo $i \rightarrow \infty$ obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^k \|P_n(x_j) - P(x_j)\|^s \right)^{1/s} \leq \varepsilon \left(\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r} \right)^m \quad (2.3)$$

para todo $n \geq n_0$. Segue que $(P_{n_0} - P) \in \mathcal{P}^{(s;r)}({}^mE; F)$ para todo $n \geq n_0$, o que nos fornece

$$P = [(P - P_{n_0}) + P_{n_0}] \in \mathcal{P}^{(s;r)}({}^mE; F).$$

A desigualdade (2.3) nos informa ainda que

$$\|P_n - P\|_{as,(s;r)} \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Como $\varepsilon > 0$ foi escolhido arbitrariamente, segue que

$$\|P_n - P\|_{as,(s;r)} \rightarrow 0,$$

completando a demonstração da parte (i) do teorema.

(ii) Em linhas gerais, a demonstração dessa parte é análoga à demonstração da parte (i), sendo até menos trabalhosa. Com efeito, para demonstrar a validade da desigualdade (2.2) sabendo que $T \in \mathcal{L}^{(s;r_1,\dots,r_m)}(E_1, \dots, E_m; F)$, usa-se a aplicação multilinear

$$\begin{aligned} B: \ell_{r_1}^w(E_1) \times \dots \times \ell_{r_m}^w(E_m) &\longrightarrow \ell_s(F) \\ ((x_{j,1})_{j=1}^\infty, \dots, (x_{j,m})_{j=1}^\infty) &\mapsto (T(x_{j,1}, \dots, x_{j,m}))_{j=1}^\infty \end{aligned}$$

de modo similar ao que foi feito com o polinômio homogêneo Q no caso anterior. Entretanto, diferentemente do caso anterior, é possível usar o Lema 2.3.1 para mostrar, de maneira direta, a continuidade da aplicação multilinear B supracitada. Ressalta-se que no caso (i) não é possível fazer o mesmo pois não se conhece resultado semelhante ao do teorema do gráfico fechado para polinômios homogêneos.

Pois bem, explicitemos o que difere, isto é, mostremos que a aplicação B tem gráfico fechado. Para isso sejam $x_{j,1} \longrightarrow x_1$ em $\ell_{r_1}^w(E_1), \dots, x_{j,m} \longrightarrow x_m$ em $\ell_{r_m}^w(E_m)$ tais que $B(x_{j,1}, \dots, x_{j,m}) \longrightarrow y$ em $\ell_s(F)$. Devemos mostrar que $B(x_1, \dots, x_m) = y$. Com esse intuito, escreva

$$x_{j,k} = (x_{j,k,n})_{n=1}^\infty \text{ e } x_k = (x_k^n)_{n=1}^\infty,$$

para todo $k = 1, 2, \dots, m$. Similarmente ao caso (i), como $x_{j,k} \longrightarrow x_k$ em $\ell_{r_k}^w(E_k)$ para todo $k = 1, 2, \dots, m$, então fixado $n \in \mathbb{N}$ obtemos $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{j,k,n} = x_k^n$ em E_k para todo $k = 1, 2, \dots, m$. Desse modo, da continuidade de T segue que

$$\begin{aligned} B(x_1, \dots, x_m) &= B((x_1^n)_{n=1}^\infty, \dots, (x_m^n)_{n=1}^\infty) \\ &= (T(x_1^n, \dots, x_m^n))_{n=1}^\infty \\ &= (T(\lim_{j \rightarrow \infty} x_{j,1,n}, \dots, \lim_{j \rightarrow \infty} x_{j,m,n}))_{n=1}^\infty \\ &= (\lim_{j \rightarrow \infty} T(x_{j,1,n}, \dots, x_{j,m,n}))_{n=1}^\infty \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} (T(x_{j,1,n}, \dots, x_{j,m,n}))_{n=1}^\infty \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} B(x_{j,1}, \dots, x_{j,m}) = y, \end{aligned}$$

e, por conseguinte, B tem gráfico fechado. ■

Observação 2.3.3 Na demonstração acima provamos que $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{as,(s;r)}$. Isso diz, em particular, que poderíamos ter definido a condição de ser absolutamente somante para polinômios não necessariamente contínuos que, mesmo assim, teríamos que todo polinômio absolutamente somante é contínuo. Mais ainda, a inclusão

$$\mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E; F) \hookrightarrow \mathcal{P}({}^m E; F)$$

é linear, contínua e tem norma 1.

Observação 2.3.4 A caracterização por desigualdades do teorema anterior continua verdadeira para $s, r \in (0, 1)$ no caso (i) e para $s, r_1, \dots, r_m \in (0, 1)$ no caso (ii). Mais ainda, a demonstração fornecida na comprovação dessa caracterização não se altera. Entretanto, a afirmação de que $(\mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E; F), \|\cdot\|_{as,(s;r)})$ e $(\mathcal{L}^{(s;r_1,\dots,r_m)}(E_1, \dots, E_m; F), \|\cdot\|_{as,(s;r_1,\dots,r_m)})$

são espaços normados não é mais verdadeira se $s \in (0, 1)$. Isto ocorre pois a desigualdade triangular deixa de ser satisfeita. Apesar desta perda, consegue-se mostrar que $\|\cdot\|_{as,(s;r)}$ e $\|\cdot\|_{as,(s;r_1,\dots,r_m)}$ são s -normas para todo $s \in (0, 1)$. Além disso, as métricas induzidas por estas s -normas, a saber,

$$d_1(P_1, P_2) := \|P_1 - P_2\|_{as,(s;r)}^s \quad \text{e} \quad d_2(T_1, T_2) := \|T_1 - T_2\|_{as,(s;r_1,\dots,r_m)}^s$$

para todos $P_1, P_2 \in \mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E; F)$ e $T_1, T_2 \in \mathcal{L}^{(s;r_1,\dots,r_m)}(E_1, \dots, E_m; F)$, os tornam espaços métricos completos.

Vejam os alguns detalhes, mais especificamente verifiquemos que $\|\cdot\|_{as,(s;r)}$ é de veras uma s -norma e que o espaço métrico resultante $(\mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E; F), d_1)$ é completo sempre que $s \in (0, 1)$. Das propriedades desejadas para $\|\cdot\|_{as,(s;r)}$ ser uma s -norma, basta mostrar a s -desigualdade triangular, pois as demais verificações são idênticas àsquelas oferecidas no teorema anterior. Com esse intuito, lembre-se de como a desigualdade de Minkowski foi usada na demonstração do teorema para mostrar que $\|\cdot\|_{as,(s;r)}$ é uma norma. Como essa desigualdade não pode ser aplicada se $s \in (0, 1)$, use a s -desigualdade triangular

$$\|(P_1(x_j))_{j=1}^k + (P_2(x_j))_{j=1}^k\|_s^s \leq \|(P_1(x_j))_{j=1}^k\|_s^s + \|(P_2(x_j))_{j=1}^k\|_s^s,$$

que é válida para todo $s \in (0, 1)$. Assim, segue que

$$\|(P_1(x_j))_{j=1}^k + (P_2(x_j))_{j=1}^k\|_s^s \leq \left(\|P_1\|_{as,(s;r)}^s + \|P_2\|_{as,(s;r)}^s\right) \left(\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r}\right)^{sm},$$

para todos $x_1, \dots, x_k \in E$ e $k \in \mathbb{N}$, e portanto

$$\|P_1 + P_2\|_{as,(s;r)}^s \leq \|P_1\|_{as,(s;r)}^s + \|P_2\|_{as,(s;r)}^s.$$

Mostremos a completude de $(\mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E; F), d_1)$. Para isso seja $(P_n)_{n=1}^\infty$ sequência d_1 -Cauchy cujos termos estão em $\mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E; F)$. Nesse caso,

$$\lim_{n,u \rightarrow \infty} d_1(P_n, P_u) = \lim_{n,i \rightarrow \infty} \|P_n - P_i\|_{as,(s;r)}^s = 0$$

e, conseqüentemente,

$$\lim_{n,i \rightarrow \infty} \|P_n - P_i\|_{as,(s;r)} = 0.$$

Da mesma forma com que foi feito na demonstração do teorema anterior, concluímos que

$$\lim_{n,i \rightarrow \infty} \|P_n - P_i\| = 0,$$

e mais uma vez como antes isso implica a existência de $P \in \mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E; F)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - P\|_{as,(s;r)} = 0.$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_1(P_n - P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - P\|_{as,(s;r)}^s = 0,$$

e portanto $(\mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E; F), d_1)$ é completo.

CAPÍTULO 3

TEOREMA DA DOMINAÇÃO DE PIETSCH PARA POLINÔMIOS HOMOGÊNEOS

Ficou claro no último capítulo que a definição de polinômio homogêneo absolutamente somante é bastante semelhante à definição de operador linear absolutamente somante. Igualmente, veremos neste capítulo uma propriedade fundamental que ficou conhecida inicialmente para operadores lineares e, posteriormente, encontrou-se uma similar para polinômios homogêneos. Essa propriedade é conhecida como teorema da dominação de Pietsch. Nesse caso, os polinômios homogêneos r -dominados, $0 < r < \infty$, que são um tipo específico de polinômios absolutamente somantes, assumirão o mesmo papel dos operadores lineares absolutamente r -somantes.

3.1 Preliminares

Sejam X um espaço de Hausdorff localmente compacto, μ uma medida sobre os borelianos de X e A um boreliano de X . A medida μ é denominada *exteriormente regular* sobre A se

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supset A, U \text{ aberto}\}$$

e é denominada *internamente regular* sobre A se

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}.$$

A próxima definição será relevante no desenvolvimento deste capítulo.

Definição 3.1.1 Sejam X um espaço de Hausdorff localmente compacto, μ uma medida sobre os borelianos de X e A um boreliano de X . A medida μ é denominada *medida regular* se for exteriormente regular e internamente regular sobre os borelianos. Por outro lado, dizemos que μ é uma *medida de Radon* se for finita sobre os conjuntos compactos,

exteriormente regular sobre os borelianos e internamente regular sobre os conjuntos abertos.

Observação 3.1.2 O espaço das medidas regulares de probabilidade nos borelianos de $B_{E'}$, com a topologia fraca estrela, será denotado por $W(B_{E'})$.

Neste capítulo E e F continuam sendo espaços de Banach, exceto menção explícita em contrário. O resultado a seguir é central na construção da teoria dos operadores lineares absolutamente somantes.

Teorema 3.1.3 [*Teorema da dominação de Pietsch para operadores lineares*]
Um operador $u \in \mathcal{L}(E; F)$ é absolutamente r -somante, $0 < r < \infty$, se e somente se existem uma constante $C \geq 0$ e $\mu \in W(B_{E'})$ tais que

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^r d\mu(\varphi) \right)^{1/r},$$

para todo $x \in E$. Neste caso,

$$\pi_p(u) := \|u\|_{as,(r;r)} = \min C.$$

À luz do teorema da dominação de Pietsch, é natural indagar se os polinômios homogêneos absolutamente somantes gozam de caracterização semelhante. Veremos neste capítulo que a resposta é afirmativa. Na próxima seção enunciaremos o teorema da dominação de Pietsch para polinômios homogêneos e o demonstraremos. A demonstração que será oferecida é uma adaptação da demonstração fornecida por Pietsch em [29, página 232] para o caso de operadores lineares. Essa adaptação é bem conhecida, e pode ser encontrada em [24, Proposition 3.1].

Antes de prosseguir para o caso polinomial do teorema da dominação de Pietsch, definamos algumas noções que serão necessárias.

Definição 3.1.4 Seja E um espaço vetorial. Uma função $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *convexa* se

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in (0, 1)$.

Definição 3.1.5 Seja X um espaço topológico. Uma função $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ é chamada *semicontínua inferiormente* se o conjunto

$$\{x \in X : f(x) > a\}$$

é aberto para todo ponto $a \in \mathbb{R}$.

Definição 3.1.6 Uma coleção $\mathfrak{F}$ de funções reais ϕ definidas sobre um conjunto K é denominada *côncava* se, para $n \in \mathbb{N}$, $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathfrak{F}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ tais que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$, existe $\phi \in \mathfrak{F}$ que satisfaz

$$\phi(x) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x)$$

para todo $x \in K$.

Definição 3.1.7 Sejam X um conjunto não vazio, M uma sigma álgebra de X e x_0 algum ponto em X . Denomina-se *medida de Dirac em x_0* , a medida $\mu: M \rightarrow [0, \infty]$ definida por

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 \in A \\ 0, & \text{se } x_0 \notin A \end{cases}$$

para todo $A \in M$.

Definição 3.1.8 Sejam X um espaço topológico e $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Se para todo $\varepsilon \geq 0$ o conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ é compacto, diremos que f *se anula no infinito*. Denotamos

$$C_0(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é contínua e se anula no infinito}\}.$$

3.2 Validade do teorema da dominação de Pietsch

Com a finalidade de demonstrar um teorema da dominação de Pietsch para polinômios homogêneos absolutamente somantes, a próxima definição é crucial, pois - como veremos - isola a classe dos polinômios homogêneos para os quais vale tal teorema.

Definição 3.2.1 Sejam $r \in (0, \infty)$ e $m \in \mathbb{N}$. Diz-se que um polinômio homogêneo $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$ é *r -dominado* se for absolutamente $(\frac{r}{m}; r)$ -somante.

Como visto na última seção, o teorema da dominação de Pietsch para operadores lineares fornece uma caracterização para operadores absolutamente r -somantes. No teorema da dominação de Pietsch para polinômios homogêneos, os polinômios r -dominados assumirão o papel desses operadores. Isto justifica a última definição e as seguintes notações particulares:

$$\|\cdot\|_{as,(\frac{r}{m};r)} = \|\cdot\|_{d,r} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}^{(\frac{r}{m},r)}({}^m E; F) = \mathcal{P}_{d,r}({}^m E; F).$$

Antes de enunciar o teorema da dominação de Pietsch para polinômios homogêneos, vejamos uma série de lemas que serão úteis para a sua demonstração.

Lema 3.2.2 (Lema de Ky Fan) *Seja K um subconjunto compacto e convexo de um espaço vetorial topológico de Hausdorff, e seja $\mathfrak{F}$ uma família côncava de funções reais, convexas e semicontínuas inferiormente, definidas sobre K . Seja $\rho \in \mathbb{R}$ e suponha que para cada $\phi \in \mathfrak{F}$ existe $x \in K$ com $\phi(x) \leq \rho$. Então é possível encontrar $x_0 \in K$ tal que $\phi(x_0) \leq \rho$ para todo $\phi \in \mathfrak{F}$.*

Demonstração. Veja [29, páginas 40-41]. ■

O lema de Ky Fan será a principal ferramenta para a demonstração que faremos. Como veremos na demonstração, será imprescindível na verificação das hipóteses do lema de Ky Fan o lema posterior. Neste lema, e no restante da dissertação, o símbolo $M(X)$

representará o espaço das medidas de Radon complexas definidas nos borelianos do espaço topológico X . Além disso, a correspondência

$$\mu \in M(X) \longmapsto \|\mu\| := |\mu|(X),$$

onde $|\mu|$ é a variação total de μ , define uma norma em $M(X)$ (veja [14, Proposition 7.16]).

Lema 3.2.3 (Teorema da representação de Riesz) *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \Psi: M(X) &\longrightarrow (C_0(X))' \\ \mu &\longmapsto I_\mu: C_0(X) \longrightarrow \mathbb{K} \\ I_\mu(f) &= \int f d\mu \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico.

Demonstração. Veja [14, Proposition 7.17]. ■

O teorema da representação de Riesz já se fará útil na demonstração do nosso próximo resultado auxiliar.

Lema 3.2.4 *Considere E' e $(C(B_{E'}))'$ munidos com as respectivas topologias fraca estrela. Então $W(B_{E'})$, visto como subconjunto de $(C(B_{E'}))'$ de acordo com o teorema da representação de Riesz, é compacto.*

Demonstração. Pelo Teorema de Alaoglu sabemos que $B_{E'}$ é compacto, logo $C(B_{E'}) = C_0(B_{E'})$. Mantendo a notação do nosso enunciado do teorema da representação de Riesz, como Ψ é isomorfismo isométrico,

$$\Psi(W(B_{E'})) \subseteq B_{(C(B_{E'}))'}.$$

Como $(C(B_{E'}))'$ está munido com a topologia fraca estrela, uma nova aplicação do Teorema de Alaoglu nos diz que $B_{(C(B_{E'}))'}$ é compacto. Logo basta mostrar que $\Psi(W(B_{E'}))$ é fechado em $B_{(C(B_{E'}))'}$ na topologia fraca estrela. Para isso seja $(\Psi(\mu_\lambda))_\lambda$ uma rede contida em $\Psi(W(B_{E'}))$ tal que $\Psi(\mu_\lambda) \xrightarrow{w^*} \varphi \in B_{(C(B_{E'}))'}$. Pelo teorema da representação de Riesz existe $\mu \in M(B_{E'})$ tal que $\Psi(\mu) = \varphi$ e, além disso, da convergência na topologia fraca estrela,

$$\int_{B_{E'}} f d\mu_\lambda = \Psi(\mu_\lambda)(f) \longrightarrow \varphi(f) = \Psi(\mu)(f) = \int_{B_{E'}} f d\mu$$

para toda $f \in C(B_{E'})$. Em particular, tomando a função constante igual a 1,

$$1 = \mu_\lambda(B_{E'}) = \int_{B_{E'}} d\mu_\lambda \longrightarrow \int_{B_{E'}} d\mu = \mu(B_{E'}),$$

o que implica $\mu(B_{E'}) = 1$. Por outro lado, dado $A \in \mathfrak{B}(B_{E'})$, existe uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ em $C(B_{E'})$ tal que $f_n \rightarrow \chi_A$ em $L_1(\mu)$ (veja [14, Proposition 7.9]). Logo, fixado $n \in \mathbb{N}$ e novamente aplicando o teorema da representação de Riesz, obtemos

$$\int_{B_{E'}} |f_n| d\mu_\lambda \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \int_{B_{E'}} |f_n| d\mu,$$

o que implica $\int_{B_{E'}} |f_n| d\mu \in \mathbb{R}^+$. Mas como $f_n \rightarrow \chi_A$ em $L_1(\mu)$, então $|f_n| \rightarrow |\chi_A|$ em $L_1(\mu)$; assim

$$\int_{B_{E'}} |f_n| d\mu \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \int_{B_{E'}} |\chi_A| d\mu = \int_{B_{E'}} \chi_A d\mu = \mu(A)$$

e, por conseguinte, $\mu(A) \in \mathbb{R}^+$. Isto completa a prova. ■

Agora sim estamos em condições de demonstrar a versão polinomial do teorema da dominação de Pietsch:

Teorema 3.2.5 (Teorema da dominação de Pietsch para polinômios homogêneos)

Seja $r \in (0, \infty)$. Um polinômio homogêneo $P \in \mathcal{P}^m(E; F)$ é r -dominado se e somente se existem uma constante $C \geq 0$ e uma medida $\mu \in W(B_{E'})$ tais que

$$\|P(x)\| \leq C \left[\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^r d\mu(\varphi) \right]^{\frac{m}{r}}, \quad (3.1)$$

para todo ponto x em E . Nesse caso,

$$\|P\|_{d,r} = \inf\{C : C \text{ satisfaz (3.1)}\}.$$

Demonstração. Primeiramente assumamos a veracidade da desigualdade (3.1) com C e μ como supracitados. Então

$$\begin{aligned} \|(P(x_j))_{j=1}^k\|_{\frac{r}{m}} &= \left(\sum_{j=1}^k \|P(x_j)\|^{r/m} \right)^{\frac{m}{r}} \\ &\leq C \left(\sum_{j=1}^k \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^r d\mu(\varphi) \right)^{\frac{m}{r}} \\ &= C \left(\int_{B_{E'}} \sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^r d\mu(\varphi) \right)^{\frac{m}{r}} \\ &\leq C \left(\int_{B_{E'}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left\{ \sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^r \right\} d\mu(\varphi) \right)^{\frac{m}{r}} \\ &= C \left(\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left\{ \sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^r \right\} \right)^{\frac{m}{r}} \left(\int_{B_{E'}} d\mu(\varphi) \right)^{\frac{m}{r}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C \left(\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left\{ \sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^r \right\} \right)^{\frac{m}{r}} \\
&= C \left\| (x_j)_{j=1}^k \right\|_{w,r}^m
\end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e $x_j \in E$, com $j = 1, 2, \dots, k$. Portanto o polinômio homogêneo P é r -dominado pelo Teorema 2.3.2 e

$$\|P\|_{d,r} \leq C. \quad (3.2)$$

Para mostrar a recíproca, sejam $P \in \mathcal{P}_{d,r}(^m E; F)$ e $D := \|P\|_{d,r}$. Considere o espaço vetorial topológico $(C(B_{E'}))'$, munido com a topologia fraca estrela. Pelo Lema 3.2.4 sabemos que $W(B_{E'})$ é um subconjunto compacto desse espaço. Para cada família finita $(x_j)_{j=1}^k$ constituída por elementos de E , defina a função associada $\phi_{(x_j)_{j=1}^k} : W(B_{E'}) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi_{(x_j)_{j=1}^k}(\mu) = \sum_{j=1}^k \left[\|P(x_j)\|^{\frac{r}{m}} - D^{\frac{r}{m}} \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^r d\mu(\varphi) \right].$$

Consideremos agora o conjunto formado por todas essas funções:

$$\mathfrak{F} := \{ \phi_{(x_j)_{j=1}^k} : (x_j)_{j=1}^k \text{ é uma família finita com elementos em } E \}.$$

Com o intuito de aplicar o Lema de Ky Fan, passamos agora à verificação de suas hipóteses.

(a) A família de funções $\mathfrak{F}$ é côncava. Com efeito, dados $\phi_{(x_{j,1})_{j=1}^{k_1}}, \dots, \phi_{(x_{j,n})_{j=1}^{k_n}} \in \mathfrak{F}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ tais que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_{(x_{j,i})_{j=1}^{k_i}}(\mu) &= \sum_{i=1}^n \left[\alpha_i \left(\sum_{j=1}^{k_i} \|P(x_{j,i})\|^{\frac{r}{m}} - D^{\frac{r}{m}} \int_{B_{E'}} |\varphi(x_{j,i})|^r d\mu(\varphi) \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \left[\left\| P(\alpha_i^{\frac{1}{r}} x_{j,i}) \right\|^{\frac{r}{m}} - D^{\frac{r}{m}} \int_{B_{E'}} \left| \varphi(\alpha_i^{\frac{1}{r}} x_{j,i}) \right|^r d\mu(\varphi) \right] \\
&= \phi_{(\alpha_i^{\frac{1}{r}} x_{j,i})_{j=1, i=1}^{k_i, n}}(\mu) \in \mathfrak{F}.
\end{aligned}$$

(b) Verifiquemos que cada função $\phi_{(x_j)_{j=1}^k} \in \mathfrak{F}$ é convexa. Com o intuito de aplicar o teorema da representação de Riesz, mostraremos primeiramente que a aplicação

$$\varphi \in B_{E'} \rightarrow |\varphi(x)|^r \in \mathbb{R}$$

pertence a $C_0(B_{E'})$, para todo ponto x em E . Para isso lembre da imersão isométrica linear entre E e E'' definida por

$$\begin{aligned}
J_E : E &\rightarrow E'' \\
x &\mapsto J_E(x) : E' \rightarrow \mathbb{K} \\
J_E(x)(\varphi) &= \varphi(x)
\end{aligned}$$

e note que E' é munido com a topologia fraca estrela. Desse modo, seja $(\varphi_\lambda)_\lambda$ uma rede convergindo na topologia fraca estrela para φ em $B_{E'}$. Então

$$|\varphi_\lambda(x)|^r = |J_E(x)(\varphi_\lambda)|^r \longrightarrow |J_E(x)(\varphi)|^r = |\varphi(x)|^r,$$

e portanto a aplicação $\varphi \in B_{E'} \longrightarrow |\varphi(x)|^r$ é contínua. Sejam $\varepsilon > 0$ arbitrário e $x \in E$. Da continuidade que acabamos de provar segue que o conjunto

$$\{\varphi \in B_{E'} : |\varphi(x)|^r \geq \varepsilon\}$$

é fechado em $B_{E'}$. Mas como E' é munido da topologia fraca estrela, temos que $B_{E'}$ é compacto e, consequentemente, $\{\varphi \in B_{E'} : |\varphi(x)|^r \geq \varepsilon\}$ é compacto em $B_{E'}$. Portanto a aplicação $\varphi \in B_{E'} \longrightarrow |\varphi(x)|^r$ está em $C_0(B_{E'})$, para todo ponto x em E .

Mostremos finalmente a convexidade de $\phi_{(x_j)_{j=1}^k}$. Para isso sejam $\mu_1, \mu_2 \in W(B_{E'})$ e $\lambda \in (0, 1)$. Segue assim que

$$\begin{aligned} & \phi_{(x_j)_{j=1}^k}(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2) \\ &= \sum_{j=1}^k \left[\|P(x_j)\|^{\frac{r}{m}} - D^{\frac{r}{m}} \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^r d(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2)(\varphi) \right] \\ &= \sum_{j=1}^k \left[\|P(x_j)\|^{\frac{r}{m}} - D^{\frac{r}{m}} \left(\lambda \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^r d\mu_1(\varphi) + (1-\lambda) \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^r d\mu_2(\varphi) \right) \right] \\ &= \lambda \sum_{j=1}^k \left[\|P(x_j)\|^{\frac{r}{m}} - D^{\frac{r}{m}} \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^r d\mu_1(\varphi) \right] + \\ & \quad (1-\lambda) \sum_{j=1}^k \left[\|P(x_j)\|^{\frac{r}{m}} - D^{\frac{r}{m}} \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^r d\mu_2(\varphi) \right] \\ &= \lambda \phi_{(x_j)_{j=1}^k}(\mu_1) + (1-\lambda) \phi_{(x_j)_{j=1}^k}(\mu_2). \end{aligned}$$

Observe que a segunda igualdade é mais uma aplicação do teorema da representação de Riesz.

(c) Mostraremos agora que cada função $\phi_{(x_j)_{j=1}^k} \in \mathfrak{F}$ é contínua e, consequentemente, semicontínua inferiormente. Para isso seja $(\mu_\lambda)_\lambda$ uma rede convergindo para μ em $W(B_{E'}) \subseteq M(B_{E'})$. Como visto no item (b), a aplicação

$$\varphi \in B_{E'} \longrightarrow |\varphi(x)|^r \in \mathbb{R},$$

onde $x \in E$, pertence a $C_0(B_{E'})$. Aplicando o teorema da representação de Riesz uma vez mais, segue que

$$\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^r d\mu_\lambda(\varphi) \longrightarrow \int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^r d\mu(\varphi),$$

para todo ponto x em E . Logo,

$$\sum_{j=1}^k \left[\|P(x_j)\|^{\frac{r}{m}} - D^{\frac{r}{m}} \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^r d\mu_\lambda(\varphi) \right] \longrightarrow \sum_{j=1}^k \left[\|P(x_j)\|^{\frac{r}{m}} - D^{\frac{r}{m}} \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^r d\mu(\varphi) \right]$$

e, por conseguinte, $\phi_{(x_j)_{j=1}^\infty}$ é contínua.

(d) Dada uma família finita $(x_j)_{j=1}^k$, da compacidade de $B_{E'}$ na topologia fraca estrela podemos escolher $\varphi_0 \in B_{E'}$ tal que

$$\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r} = \|(\varphi_0(x_j)_{j=1}^k)\|_r.$$

Se δ_{φ_0} denota a medida de Dirac em φ_0 , temos

$$\begin{aligned} \phi_{(x_j)_{j=1}^k}(\delta_{\varphi_0}) &= \sum_{j=1}^k \left[\|P(x_j)\|_{\frac{r}{m}}^{\frac{r}{m}} - D_{\frac{r}{m}} \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^r d\delta_{\varphi_0}(\varphi) \right] \\ &= \sum_{j=1}^k \left[\|P(x_j)\|_{\frac{r}{m}}^{\frac{r}{m}} - D_{\frac{r}{m}} \left(\int_{B_{E'} \setminus \{\varphi_0\}} |\varphi(x_j)|^r d\delta_{\varphi_0}(\varphi) + \int_{\{\varphi_0\}} |\varphi(x_j)|^r d\delta_{\varphi_0}(\varphi) \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^k \left[\|P(x_j)\|_{\frac{r}{m}}^{\frac{r}{m}} - D_{\frac{r}{m}} |\varphi_0(x_j)|^r \right] \\ &= \left(\|(P(x_j))_{j=1}^k\|_{\frac{r}{m}}^{\frac{r}{m}} - D_{\frac{r}{m}} \sum_{j=1}^k |\varphi_0(x_j)|^r \right) \\ &= \left(\|(P(x_j))_{j=1}^k\|_{\frac{r}{m}}^{\frac{r}{m}} - D_{\frac{r}{m}} \left(\|(\varphi_0(x_j))_{j=1}^k\|_r \right)^r \right) \\ &= \left(\|(P(x_j))_{j=1}^k\|_{\frac{r}{m}}^{\frac{r}{m}} - D_{\frac{r}{m}} \left(\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r} \right)^r \right). \end{aligned}$$

Como $P \in \mathcal{P}_{d,r}(^m E; F)$, pelo Teorema 2.3.2 segue que

$$\left(\|(P(x_j))_{j=1}^k\|_{\frac{r}{m}}^{\frac{r}{m}} \right) \leq D_{\frac{r}{m}} \left(\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r} \right)^r,$$

o que implica $\phi(\delta_{\varphi_0}) \leq 0$.

Com as hipóteses do Lema de Ky Fan verificadas, podemos usar este resultado para garantir a existência de uma medida $v \in W(B_{E'})$ tal que $\phi(v) \leq 0$ para todo $\phi \in \mathfrak{F}$. Segue então que

$$\|P(x)\|_{\frac{r}{m}}^{\frac{r}{m}} - D_{\frac{r}{m}} \int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^r dv(\varphi) = \phi_{(x)}(v) \leq 0$$

para todo ponto x em E . Consequentemente,

$$\|P(x)\| \leq D \left[\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^r dv(\varphi) \right]^{\frac{m}{r}}, \quad (3.3)$$

para todo ponto x em E . Além disso, das desigualdades (3.2) e (3.3) segue que $\|P\|_{d,r}$ é a menor das constantes que satisfazem a desigualdade (3.1). ■

Observação 3.2.6 Faça $m = 1$ no Teorema 3.2.5 para obter o teorema da dominação de Pietsch para operadores lineares (Teorema 3.1.3).

Corolário 3.2.7 *Sejam $0 < r_1 \leq r_2 < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Então $\mathcal{P}_{d,r_1}(^m E; F) \subseteq \mathcal{P}_{d,r_2}(^m E; F)$, com $\|P\|_{d,r_2} \leq \|P\|_{d,r_1}$ para todo $P \in \mathcal{P}_{d,r_1}(^m E; F)$.*

Demonstração. Seja $P \in \mathcal{P}_{d,r_1}(^m E; F)$. Então, pelo Teorema 3.2.5 existe uma medida $\mu \in W(B_{E'})$ tal que

$$\|P(x)\| \leq \|P\|_{d,r_1} \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^{r_1} d\mu(\varphi) \right)^{\frac{m}{r_1}},$$

para todo ponto x em E . Como μ é uma medida de probabilidade segue que $L_{r_2}(\mu) \subseteq L_{r_1}(\mu)$ e $\|\cdot\|_{r_1} \leq \|\cdot\|_{r_2}$. Portanto,

$$\|P(x)\| \leq \|P\|_{d,r_1} \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^{r_1} d\mu(\varphi) \right)^{\frac{m}{r_1}} \leq \|P\|_{d,r_1} \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^{r_2} d\mu(\varphi) \right)^{\frac{m}{r_2}},$$

para todo ponto x em E . Aplicando novamente o Teorema 3.2.5 obtemos que $P \in \mathcal{P}_{d,r_2}(^m E; F)$ e $\|P\|_{d,r_2} \leq \|P\|_{d,r_1}$. ■

Encerraremos o capítulo com dois exemplos.

Exemplo 3.2.8 Seja $m \in \mathbb{N}$. Considere o polinômio m -homogêneo e contínuo $P: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ definido por

$$P((x_j)_{j=1}^\infty) = (x_j^m)_{j=1}^\infty.$$

Pelo Exemplo 2.2.6, $P: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ é de veras polinômio m -homogêneo, contínuo e está bem definido. Afirmamos que P não é r -dominado para todo $r \in (0, \infty)$. Com efeito, novamente pelo Exemplo 2.2.6 sabemos que P não é r -dominado sempre que $r \in [2, \infty)$. Portanto, pelo Corolário 3.2.7 segue que P não é r -dominado para todo $r \in (0, \infty)$.

No próximo exemplo usaremos a desigualdade

$$\left(\sum_{i=1}^m \|a_i\|_1^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \|A\|, \quad (3.4)$$

onde $A = (a_{ij})$ é uma matriz escalar de ordem $m \times n$, $a_i = (a_{ij})_{j=1}^n$ e

$$\|A\| = \sup_{|t_j| \leq 1} \left\{ \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right| \right\}.$$

A validade dessa desigualdade pode ser confirmada em [15, página 303].

Exemplo 3.2.9 Sejam $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, F espaço de Banach e $(t_k)_{k=1}^\infty \in \ell_p(F)$, $1 \leq p < \infty$. Considere a aplicação $P: \ell_1 \rightarrow F$ definida por

$$P((x_k)_{k=1}^\infty) = \sum_{k=1}^\infty x_k^m t_k.$$

Afirmamos que P é um polinômio m -homogêneo. Com efeito, a aplicação $T: \ell_1 \times \cdots \times \ell_1 \longrightarrow F$, definida por

$$T((x_{k,1})_{k=1}^\infty, \dots, (x_{k,m})_{k=1}^\infty) = \sum_{k=1}^\infty x_{k,1} \cdots x_{k,m} t_k,$$

está bem definida pela desigualdade de Hölder generalizada, é claramente multilinear e $Tx^m = P(x)$ para todo x em ℓ_1 . Visto isto, mostremos que

P é 1-dominado se e somente se P é contínuo.

Ora, se $P: \ell_1 \longrightarrow F$ é 1-dominado, segue da Observação 2.3.3 que $P: \ell_1 \longrightarrow F$ é contínuo. Reciprocamente, se $P: \ell_1 \longrightarrow F$ é contínuo, temos $\sup_{x \in B_{\ell_1}} \|P(x)\| < \infty$. Mas como $e_k \in B_{\ell_1}$ sempre que $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$\|t_k\| = \|P(e_k)\| \leq \sup_{x \in \ell_1} \|P(x)\|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, $\sup_k \|t_k\| < \infty$. Dados $n \in \mathbb{N}$ e $x_1 = (x_{k,1})_{k=1}^\infty, \dots, x_n = (x_{k,n})_{k=1}^\infty$ em ℓ_1 ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \|P(x_j)\|^{1/m} &= \sum_{j=1}^n \left\| \sum_{k=1}^\infty (x_{k,j})^m t_k \right\|^{1/m} \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^\infty |x_{k,j}|^m \|t_k\| \right)^{1/m} \\ &\leq \left(\sup_k \|t_k\|^{1/m} \right) \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^\infty |x_{k,j}|^m \right)^{1/m} \right] \\ &\leq \left(\sup_k \|t_k\|^{1/m} \right) \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^\infty |x_{k,j}|^2 \right)^{1/2} \right] = (*). \end{aligned}$$

Além disso, pela desigualdade (3.4),

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^p |x_{k,j}|^2 \right)^{1/2} &\leq \sqrt{2} \left[\sup_{|\alpha_k| \leq 1} \left\{ \sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^p x_{k,j} \alpha_k \right| \right\} \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\sup_{(\alpha_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_\infty}} \left\{ \sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^p x_{k,j} \alpha_k \right| \right\} \right] \end{aligned}$$

para todo $p \in \mathbb{N}$. Fazendo $p \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k,j}|^2 \right)^{1/2} &\leq \sqrt{2} \left[\sup_{(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in B_{\ell_{\infty}}} \left\{ \sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_{k,j} \alpha_k \right| \right\} \right] \\
&= \sqrt{2} \left[\sup_{\varphi \in B_{\ell'_1}} \left\{ \sum_{j=1}^m |\varphi(x_j)| \right\} \right] \\
&= \sqrt{2} \left\| (x_j)_{j=1}^m \right\|_{w,1},
\end{aligned}$$

sendo a penúltima igualdade devida ao isomorfismo isométrico entre ℓ_{∞} e ℓ'_1 . Segue consequentemente que

$$(*) \leq \sqrt{2} \left(\sup_k \|t_k\|^{1/m} \right) \left\| (x_j)_{j=1}^m \right\|_{w,1}.$$

Portanto $P \in \mathcal{P}_{d,1}(^m E; F)$ pelo Teorema 2.3.2.

CAPÍTULO 4

TEOREMA DA FATORAÇÃO DE PIETSCH PARA POLINÔMIOS DOMINADOS

Vimos no capítulo precedente uma extensão do teorema da dominação de Pietsch para o caso polinomial. No caso linear o teorema da dominação tem uma contrapartida na forma de teorema de fatoração (veja Teorema 4.1.4) que complementa o teorema da dominação e expande as possibilidades de aplicações. Dessa forma é natural investigar a validade de um tal teorema de fatoração no caso polinomial. No presente capítulo veremos que uma extensão bem natural do teorema da fatoração de Pietsch para polinômios dominados não é possível. Para isso será explicitado um exemplo de polinômio dominado que não é fracamente compacto e, posteriormente, verificaremos que a existência dessa extensão bem natural faria com que todos os polinômios dominados fossem fracamente compactos.

Finalizaremos o capítulo com um teorema de fatoração para polinômios dominados que, apesar de não ser uma fatoração tipo Pietsch, também tem muitas aplicações.

4.1 Preliminares

Esta seção apresentará vários resultados que serão úteis no desenvolver do capítulo. Além disso, fornecerá o teorema da fatoração de Pietsch para operadores lineares p -somantes. Começamos com uma proposição que nos apresentará a um operador linear absolutamente somante que desempenha papel central no teorema de fatoração.

Proposição 4.1.1 *Sejam E espaço de Banach, E' munido com a topologia fraca estrela, $\mu \in W(B_{E'})$ e $0 < p < \infty$. Então o operador inclusão*

$$j_p: C(B_{E'}) \longrightarrow L_p(\mu) , \quad j_p(f) := f$$

é absolutamente p -somante e $\pi_p(j_p) = 1$.

Demonstração. É claro que a aplicação j_p está bem definida e é linear. Verifiquemos que j_p é absolutamente p -somante. Para isso, observe que a cada funcional $w \in B_{E'}$ corresponde um funcional $\delta_w \in B_{(C(B_{E'}))'}$ dado por

$$\delta_w(f) = f(w) \text{ para todo } f \in C(B_{E'}).$$

Com efeito, dados $f_1, f_2 \in C(B_{E'})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\delta_w(f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)(w) = f_1(w) + \lambda f_2(w) = \delta_w(f_1) + \lambda \delta_w(f_2),$$

provando que δ_w é linear. Por outro lado,

$$|\delta_w(f_1)| = |f_1(w)| \leq \sup_{u \in B_{E'}} |f_1(u)| = \|f_1\|_\infty,$$

provando que δ_w é contínua e que

$$\|\delta_w\| = \sup\{|\delta_w(f)| : \|f\|_\infty \leq 1\} \leq 1.$$

Visto isto, dados $m \in \mathbb{N}$ e $f_1, \dots, f_m \in C(B_{E'})$,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^m \|j_p(f_k)\|_p^p \right)^{1/p} &= \left(\sum_{k=1}^m \int_{B_{E'}} |f_k(w)|^p d\mu(w) \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{B_{E'}} \sum_{k=1}^m |f_k(w)|^p d\mu(w) \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{B_{E'}} d\mu(w) \right)^{1/p} \sup_{w \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^m |f_k(w)|^p \right)^{1/p} \\ &= \mu(B_{E'})^{1/p} \cdot \sup_{w \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^m |\delta_w(f_k)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sup_{\varphi \in B_{(C(B_{E'}))'}} \left(\sum_{k=1}^m |\varphi(f_k)|^p \right)^{1/p} \\ &= \|(f_k)_{k=1}^m\|_{w,p}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.3.2 e pela Observação 2.3.4 concluímos que o operador j_p é de veras absolutamente p -somante e $\pi_p(j_p) \leq 1$. Por outro lado,

$$\pi_p(j_p) \geq \|j_p\| \geq \|j_p(1)\|_p = \left(\int_{B_{E'}} d\mu \right)^{1/p} = (\mu(B_{E'}))^{1/p} = 1.$$

Portanto $\pi_p(j_p) = 1$. ■

Agora, vejamos uma proposição que nos fornecerá uma imersão isométrica que, assim como o operador da proposição precedente, aparecerá explicitamente no teorema da fatoração de Pietsch.

Proposição 4.1.2 *Sejam E espaço de Banach e E' munido com a topologia fraca estrela. O operador linear*

$$i_E: E \longrightarrow C(B_{E'}) , \quad i_E(x)(\varphi) := \varphi(x)$$

é uma imersão isométrica.

Demonstração. Vejamos que i_E está bem definido, isto é, $i_E(x) \in C(B_{E'})$ para todo $x \in E$. Da definição da topologia fraca estrela sabe-se que os funcionais

$$J_E(x): E' \longrightarrow \mathbb{K} , \quad J_E(x)(\varphi) = \varphi(x),$$

são contínuos nesta topologia para todo ponto x em E . Segue assim que a função $i_E(x): B_{E'} \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínua, uma vez que coincide com a restrição do funcional $J_E(x)$ ao conjunto $B_{E'}$ e E' está munido com a topologia fraca estrela. O operador i_E está então bem definido.

Vejamos que i_E é linear. Dados $x_1, x_2 \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} i_E(x_1 + \lambda x_2)(\varphi) &= \varphi(x_1 + \lambda x_2) \\ &= \varphi(x_1) + \lambda \varphi(x_2) \\ &= i_E(x_1)(\varphi) + \lambda i_E(x_2)(\varphi) \\ &= (i_E(x_1) + \lambda i_E(x_2))(\varphi) \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in B_{E'}$, o que comprova a linearidade de i_E .

A aplicação i_E é obviamente uma imersão isométrica, pois

$$\|i_E(x)\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \|x\|$$

para todo ponto x em E , sendo a última igualdade uma consequência do Teorema de Hahn-Banach. ■

Observação 4.1.3 A restrição do operador linear $j_p: C(B_{E'}) \longrightarrow L_p(\mu)$ ao conjunto $i_E(E)$ será denotado por j_p^E . Assim,

$$j_p^E: i_E(E) \longrightarrow L_p(\mu) , \quad j_p^E(i_E(x))(\varphi) = i_E(x)(\varphi) = \varphi(x).$$

Agora já temos todos os ingredientes necessários para a compreensão do Teorema da fatoração de Pietsch para operadores lineares p -somantes:

Teorema 4.1.4 (Teorema da fatoração de Pietsch) *Sejam E e F espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$. Um operador $u \in \mathcal{L}(E; F)$ é absolutamente p -somante se e somente se existem $\mu \in W(B_{E'})$, um subespaço fechado X_p de $L_p(\mu)$ contendo $(j_p^E \circ i_E)(E)$ e um operador $\hat{u} \in \mathcal{L}(X_p; F)$ tal que o diagrama seguinte comute:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ i_E \downarrow & & \uparrow \hat{u} \\ i_E(E) & \xrightarrow{j_p^E} & X_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(B_{E'}) & \xrightarrow{j_p} & L_p(\mu) \end{array}$$

Além disso, pode-se escolher μ e $\hat{u}$ tais que $\|\hat{u}\| = \pi_p(u)$.

Demonstração. Mais adiante forneceremos uma extensão deste teorema (confira o Teorema 4.4.4). Desse modo, o presente teorema se tornará um caso particular dessa extensão. Como a demonstração desta extensão se encaixa perfeitamente com a demonstração que faríamos para o caso atual, exceto por alguns detalhes que se simplificam, omitiremos a demonstração em questão. ■

Caminharemos agora no sentido de mostrar que não vale um teorema análogo no caso polinomial. Para isso precisaremos de algumas noções e alguns resultados. A próxima proposição será usada com certa frequência no decorrer deste capítulo.

Proposição 4.1.5 (Propriedade de ideal) *Se $u \in \mathcal{L}(E_1; E)$, $P \in \mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E; F)$ e $v \in \mathcal{L}(F; F_1)$, então $v \circ P \circ u \in \mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E_1; F_1)$ e*

$$\|v \circ P \circ u\|_{as,(s;r)} \leq \|v\| \|P\|_{as,(s;r)} \|u\|^m.$$

Demonstração. Obviamente a aplicação $v \circ P \circ u: E_1 \longrightarrow F_1$ está bem definida. Para verificar que $v \circ P \circ u$ é deveras um polinômio m -homogêneo, basta notar que a aplicação multilinear dada por

$$\begin{aligned} T: E_1 \times \cdots \times E_1 &\longrightarrow F_1 \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto (v \circ \overset{\vee}{P})(u(x_1), \dots, u(x_m)), \end{aligned}$$

é tal que $Tx^m = (v \circ P \circ u)(x)$ para todo ponto x em E .

Vejamos que $v \circ P \circ u$ é absolutamente $(s; r)$ -somante. Como o caso $u = 0$ é trivial, considere $u \neq 0$. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_k \in E_1$. Fazendo uso das hipóteses, segue da Proposição 1.1.2, do Teorema 2.3.2 e da Observação 2.3.4 que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^k \|(v \circ P \circ u)(x_j)\|^s \right)^{1/s} &\leq \|v\| \left(\sum_{j=1}^k \|(P \circ u)(x_j)\|^s \right)^{1/s} \\ &\leq \|v\| \|P\|_{as,(s;r)} \left[\sup_{\varphi_0 \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^k |(\varphi_0 \circ u)(x_j)|^r \right)^{1/r} \right]^m \\ &= \|v\| \|P\|_{as,(s;r)} \|u\|^m \left[\sup_{\varphi_0 \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^k \left| \left(\varphi_0 \circ \frac{u}{\|u\|} \right)(x_j) \right|^r \right)^{1/r} \right]^m \\ &\leq \|v\| \|P\|_{as,(s;r)} \|u\|^m \left[\sup_{\varphi_0 \in B_{E'}} \left(\sup_{\varphi \in B_{E'_1}} \sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^r \right)^{1/r} \right]^m \\ &= \|v\| \|P\|_{as,(s;r)} \|u\|^m \left[\left(\sup_{\varphi \in B_{E'_1}} \sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^r \right)^{1/r} \right]^m \\ &= \|v\| \|P\|_{as,(s;r)} \|u\|^m \left[\sup_{\varphi \in B_{E'_1}} \left(\sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^r \right)^{1/r} \right]^m \end{aligned}$$

$$= \|v\| \|P\|_{as,(s;r)} \|u\|^m \left(\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r} \right)^m.$$

Aplicando novamente o Teorema 2.3.2 e Observação 2.3.4 segue que $v \circ P \circ u \in \mathcal{P}^{(s;r)}({}^m E_1; F_1)$ e $\|v \circ P \circ u\|_{as,(s;r)} \leq \|v\| \|P\|_{as,(s;r)} \|u\|^m$. ■

A noção de aplicações fracamente compactas será imprescindível para comprovar a não validade do caso polinomial do teorema da fatoração de Pietsch.

Definição 4.1.6 O operador linear $u \in \mathcal{L}(E; F)$ é denominado *operador linear fracamente compacto* se o conjunto $u(B_E)$ é relativamente fracamente compacto em F , isto é, o fecho do conjunto $u(B_E)$ na topologia fraca é um conjunto fracamente compacto em F .

Teorema 4.1.7 (Eberlein-Šmulian) *Sejam E um espaço de Banach e A um subconjunto de E . Então A é relativamente fracamente compacto se e somente se cada sequência em A admite uma subsequência que converge fracamente para algum ponto em E . Em particular, um subconjunto de um espaço de Banach é fracamente compacto se e somente se é sequencialmente fracamente compacto.*

Demonstração. Veja [18, Teorema 3.4.4]. ■

Lembre que um espaço normado E é denominado *reflexivo* se a imersão isométrica

$$J_E: E \longrightarrow E'' : J_E(x)(\varphi) := \varphi(x)$$

é sobrejetiva.

Proposição 4.1.8 *Sejam E, F espaços de Banach e $u \in \mathcal{L}(E; F)$.*

- (a) *Se E é reflexivo então u é um operador linear fracamente compacto.*
- (b) *Se F é reflexivo então u é um operador linear fracamente compacto.*

Demonstração. (a) Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em B_E . Como o espaço E é reflexivo, segue pelo Teorema de Kakutani que a bola unitária B_E é fracamente compacta. Pelo Teorema de Eberlein-Šmulian existe uma subsequência $(x_{n_j})_{j=1}^\infty$ de $(x_n)_{n=1}^\infty$ tal que $(x_{n_j})_{j=1}^\infty$ converge fracamente em E ; digamos, $x_{n_j} \xrightarrow{w} a \in E$. No entanto, como $u: (E, \|\cdot\|) \longrightarrow (F, \|\cdot\|)$ é contínuo, então $u: (E, w) \longrightarrow (F, w)$ é contínuo, o que implica $u(x_{n_j}) \xrightarrow{w} u(a) \in F$. Novamente pelo Teorema de Eberlein-Šmulian segue que o conjunto $u(B_E)$ é relativamente fracamente compacto. Portanto o operador u é fracamente compacto.

(b) Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em B_E . Como o operador linear $u: E \longrightarrow F$ é contínuo, existe $C > 0$ tal que a sequência $(u(x_n)/C)_{n=1}^\infty$ está contida em B_F . Por outro lado, como o espaço F é reflexivo, segue novamente por Kakutani que a bola unitária B_F é fracamente compacta. Desse modo, usando o Teorema de Eberlein-Šmulian uma vez mais, existe uma subsequência $(u(x_{n_j})/C)_{j=1}^\infty$ de $(u(x_n)/C)_{n=1}^\infty$ tal que $(u(x_{n_j})/C)_{j=1}^\infty$ converge fracamente em F , o que implica que a subsequência $(u(x_{n_j}))_{j=1}^\infty$ de $(u(x_n))_{n=1}^\infty$ converge fracamente em F . Uma última aplicação do Teorema de Eberlein-Šmulian nos diz que o conjunto $u(B_E)$ é relativamente fracamente compacto em F , comprovando a compacidade fraca do

operador u . ■

A definição seguinte é uma extensão natural da definição de operadores fracamente compactos para polinômios homogêneos.

Definição 4.1.9 Um polinômio homogêneo $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é denominado *polinômio homogêneo fracamente compacto* se o conjunto $P(B_E)$ é relativamente fracamente compacto em F .

Observação 4.1.10 Como polinômios homogêneos contínuos levam conjuntos limitados em conjuntos limitados, a segunda parte da demonstração da Proposição 4.1.8 prova o seguinte resultado: se F é reflexivo, então todo polinômio $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é fracamente compacto, qualquer que seja o espaço de Banach E .

A propriedade de ideal também vale para polinômios homogêneos fracamente compactos, e portanto para operadores lineares fracamente compactos:

Proposição 4.1.11 *Sejam $u \in \mathcal{L}(E_1; E)$, $v \in \mathcal{L}(F; F_1)$ e $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$. Se P é um polinômio homogêneo fracamente compacto, então a aplicação $v \circ P \circ u : E_1 \rightarrow F_1$ é um polinômio m -homogêneo fracamente compacto.*

Demonstração. Obviamente a aplicação $v \circ P \circ u : E_1 \rightarrow F_1$ está bem definida. Além disso, é fácil ver que a aplicação

$$\begin{aligned} T : E_1 \times \overset{(m)}{\dots} \times E_1 &\longrightarrow F_1 \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto (v \circ \overset{\vee}{P})(u(x_1), \dots, u(x_m)), \end{aligned}$$

é multilinear, contínua e $Tx^m = (v \circ P \circ u)(x)$ para todo ponto x em E_1 . Segue assim que $v \circ P \circ u$ é um polinômio m -homogêneo e contínuo.

Mostremos que o polinômio $v \circ P \circ u : E_1 \rightarrow F_1$ é deveras fracamente compacto. Para isso, seja uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ contida em B_{E_1} . Como o operador linear u é contínuo, existe $C > 0$ tal que a sequência $(u(x_n)/C)_{n=1}^\infty$ está contida em B_E . Como o polinômio P é fracamente compacto, então, pelo Teorema de Eberlein-Šmulian, existe uma subsequência $(P(u(x_{n_j})))_{j=1}^\infty$ de $(P(u(x_n)))_{n=1}^\infty$ tal que $P(u(x_{n_j}))_{j=1}^\infty$ converge fracamente em F ; digamos

$$P(u(x_{n_j})) \xrightarrow{w} a \in F.$$

Por outro lado, como o operador linear $v : (F, \|\cdot\|) \rightarrow (F_1, \|\cdot\|)$ é contínuo, então $v : (F, w) \rightarrow (F_1, w)$ é contínuo; e portanto $v(P(u(x_{n_j}))) \xrightarrow{w} v(a) \in F_1$. Novamente pelo Teorema de Eberlein-Šmulian, o conjunto $(v \circ P \circ u)(B_{E_1})$ é relativamente fracamente compacto, comprovando a compacidade fraca do polinômio homogêneo $v \circ P \circ u$. ■

Proposição 4.1.12 *Sejam $u \in \mathcal{L}(F_1; F)$ e $P \in \mathcal{P}(^m E; F_1)$. Se u é um operador linear fracamente compacto, então a aplicação $u \circ P : E \rightarrow F$ é um polinômio m -homogêneo fracamente compacto.*

Demonstração. De modo análogo ao que foi feito na demonstração da última proposição, verifica-se que $u \circ P: E \longrightarrow F$ é de veras um polinômio m -homogêneo.

Verifiquemos que o polinômio $u \circ P$ é fracamente compacto. Para isso seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em B_E . Desse modo existe uma constante $C \geq 0$ tal que a sequência $(P(x_n)/C)_{n=1}^\infty$ está inteiramente contida em B_{F_1} . Ora, como u é um operador linear fracamente compacto, então pelo Teorema de Eberlein-Šmulian a sequência $(u(P(x_n))/C)_{n=1}^\infty$ possui uma subsequência $(u(P(x_{n_j}))/C)_{j=1}^\infty$ fracamente convergente em F_1 . Portanto, aplicando novamente o Teorema de Eberlein-Šmulian segue que $u \circ P$ é um polinômio fracamente compacto. ■

O próximo resultado, que é uma consequência de vários resultados anteriores, nos será muito útil na próxima seção.

Proposição 4.1.13 *Seja $u: E \longrightarrow F$ um operador linear absolutamente p -somante, $0 < p < \infty$. Então u é um operador linear fracamente compacto.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.2.7 basta mostrar o resultado no caso em que $1 < p < \infty$. Como o operador linear u é absolutamente p -somante, então pelo Teorema 4.1.4 existem uma medida $\mu \in W(B_{E'})$, um subespaço fechado X_p de $L_p(\mu)$ e um operador linear $\hat{u} \in \mathcal{L}(X_p; F)$ tais que

$$u = \hat{u} \circ j_p^E \circ i_E.$$

Logo, pela Proposição 4.1.11 basta mostrar que o operador $j_p^E: i_E(E) \longrightarrow X_p$ é fracamente compacto. Como $L_p(\mu)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$, e X_p é subespaço fechado de $L_p(\mu)$, então X_p é reflexivo. Portanto, pela Proposição 4.1.8 segue que j_p^E é um operador fracamente compacto. Isto completa a demonstração. ■

4.2 Um polinômio dominado que não é fracamente compacto

Na Proposição 4.1.13 vimos que todo operador linear absolutamente somante é fracamente compacto. Desse modo, como os polinômios dominados assumem o papel desempenhado pelos operadores absolutamente somantes, é natural indagar se o mesmo ocorre com esses. Ou seja, é verdade que todo polinômio homogêneo dominado é fracamente compacto?

Essa pergunta foi respondida primeiramente por G. Botelho [3] com um exemplo de um polinômio dominado que não é fracamente compacto. Com o intuito de descrever esse exemplo na presente seção, iniciemos com a introdução das funções de Rademacher.

Definição 4.2.1 *Seja X um conjunto. O sinal de uma função $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função $\text{sign}(f): X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\text{sign}(f)(t) := \text{sign}(f(t)) := \begin{cases} 1, & \text{se } f(t) > 0 \\ 0, & \text{se } f(t) = 0 \\ -1, & \text{se } f(t) < 0 \end{cases}$$

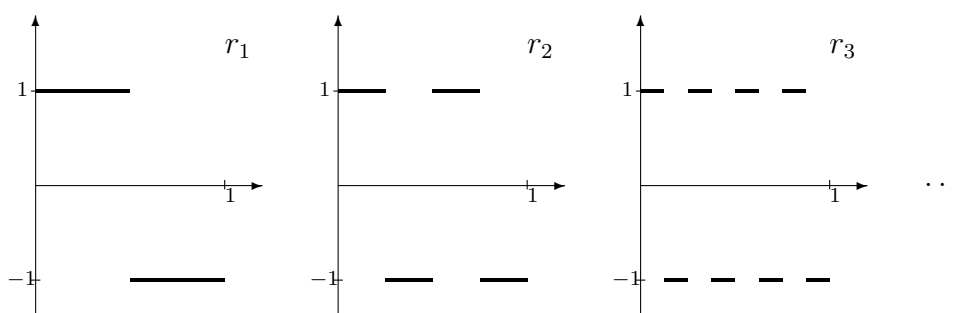
para todo ponto t em X .

Definição 4.2.2 Seja $n \in \mathbb{N}$. A função $r_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$r_n(t) := \text{sign}(\sin(2^n \pi t)),$$

é denominada de *n-ésima função de Rademacher*.

Em seguida estão esboçados os gráficos das três primeiras funções de Rademacher r_1, r_2 e r_3 . Essa representação gráfica fornece uma ideia intuitiva de como as funções de Rademacher são construídas, e também de suas principais propriedades. Em muitos casos, é conveniente pensar nas funções de Rademacher na perspectiva dessa construção gráfica.



Uma propriedade interessante das funções de Rademacher, e que nos será de grande valor, é que tais funções formam uma sequência ortonormal em $L_2[0, 1]$. Explicitemos essa propriedade na proposição seguinte.

Proposição 4.2.3 Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ e $r_n, r_m: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funções de Rademacher. Então

$$\int_0^1 r_n(t)r_m(t)dt = \begin{cases} 1, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}.$$

Demonstração. No caso $n = m$ segue obviamente que

$$\int_0^1 r_n(t)r_m(t)dt = \int_0^1 1dt = 1.$$

Por outro lado, se $n \neq m$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $m < n$. Neste caso afirmamos que

$$\int_{\frac{j}{2^m}}^{\frac{j+1}{2^m}} r_n(t)dt = 0$$

para todo $j = 0, 1, \dots, 2^m - 1$. Com efeito, pela forma como as funções de Rademacher são construídas, tem-se que a função r_n restrita ao intervalo $[j/2^m, (j+1)/2^m]$, para $j = 0, 1, \dots, 2^m - 1$, assume valores ± 1 em quantidades iguais de intervalos com comprimento

igual a $1/2^n$. Segue assim que

$$\begin{aligned} \int_0^1 r_n(t)r_m(t)dt &= \sum_{j=0}^{2^m-1} \int_{\frac{j}{2^m}}^{\frac{j+1}{2^m}} r_n(t)r_m(t)dt \\ &= \sum_{j=0}^{2^m-1} (-1)^j \int_{\frac{j}{2^m}}^{\frac{j+1}{2^m}} r_n(t)dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ■

Depois de estudar as funções de Rademacher, vejamos uma proposição que também será útil na verificação da existência de um polinômio dominado que não é fracamente compacto. Antes dessa proposição, as duas próximas definições são indispensáveis.

Definição 4.2.4 Seja E um espaço normado. Diz-se que E goza da *propriedade de Schur* - ou E é um *espaço de Schur* - se sequências fracamente convergentes em E convergem na topologia da norma.

Exemplo 4.2.5 (a) Espaços de dimensão finita gozam da propriedade de Schur, pois nesses espaços a topologia fraca coincide com a topologia da norma.

(b) O espaço de Banach $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ satisfaz a propriedade de Schur. Esse resultado é conhecido como Teorema de Schur (veja [9, Theorem 1.7]).

(c) Espaços reflexivos de dimensão infinita não gozam da propriedade de Schur: de fato, seja E é um espaço reflexivo de dimensão infinita. Por ser reflexivo, toda sequência na bola unitária de E tem subsequência fracamente convergente. Se E gozasse da propriedade de Schur, toda sequência na bola unitária de E teria subsequência convergente em norma, e neste caso a bola unitária de E seria compacta. Como isso não ocorre em espaços de dimensão infinita segue que E não satisfaz a propriedade de Schur.

Definição 4.2.6 Um polinômio homogêneo $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$ é dito *compacto* se o conjunto $P(B_E)$ é relativamente compacto em F .

Agora chegamos ao resultado desejado:

Proposição 4.2.7 *Sejam F um espaço normado que satisfaz a propriedade de Schur e $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$. Então o polinômio P é compacto se e somente se é fracamente compacto.*

Demonstração. Seja $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$ um polinômio compacto. Logo, dada uma sequência $(y_n)_{n=1}^\infty$ em $P(B_E)$, segue que existe uma subsequência $(y_{n_j})_{j=1}^\infty$ de $(y_n)_{n=1}^\infty$ que converge na topologia da norma para algum ponto em F . Como convergência na topologia da norma implica convergência na topologia fraca, obtemos que a sequência $(y_{n_j})_{j=1}^\infty$ converge fracamente para algum ponto em F . Portanto, pelo Teorema de Eberlein-Šmulian, o conjunto $P(B_E)$ é relativamente fracamente compacto e, por conseguinte, o polinômio P é fracamente compacto.

Reciprocamente, sejam $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ um polinômio fracamente compacto e $(y_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $P(B_E)$. Como o polinômio P é fracamente compacto, então, pelo Teorema de Eberlein-Šmulian, existe uma subsequência $(y_{n_j})_{j=1}^\infty$ de $(y_n)_{n=1}^\infty$ que converge fracamente em F . Como F satisfaz a propriedade de Schur, segue que $(y_{n_j})_{j=1}^\infty$ converge na topologia da norma. Logo o conjunto $P(B_E)$ é relativamente compacto e, por conseguinte, o polinômio P é compacto. ■

Corolário 4.2.8 *Sejam E um espaço de Banach e $P: E \longrightarrow \ell_1$ um polinômio m -homogêneo. Então P é compacto se e somente se P é fracamente compacto.*

Demonstração. Basta usar o Exemplo 4.2.5(b) e aplicar a proposição precedente. ■

Pois bem, vejamos o referido exemplo de polinômio dominado que não é fracamente compacto.

Exemplo 4.2.9 Seja $m \geq 2$. Considere o polinômio m -homogêneo $P_m: \ell_1 \longrightarrow \ell_1$, definido por

$$P_m((\alpha_i)_{i=1}^\infty) = ((\alpha_i)^m)_{i=1}^\infty.$$

Pelo Exemplo 2.2.6, a aplicação P_m é deveras um polinômio m -homogêneo. Verifiquemos assim que o polinômio m -homogêneo P_m é m -dominado. Para isso sejam $(r_j)_{j=1}^\infty$ a sequência de funções de Rademacher, $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_k$ vetores em ℓ_1 ; digamos, $x_j = (x_{j,i})_{i=1}^\infty$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \|P_m(x_j)\|_1 &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^\infty |x_{j,i}|^m \\ &= \sum_{j=1}^k \left[\left(\sum_{i=1}^\infty |x_{j,i}|^m \right)^{1/m} \right]^m \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \sum_{j=1}^k \left[\sum_{i=1}^\infty |x_{j,i}|^2 \right]^{m/2} \\ &\stackrel{(**)}{=} \sum_{j=1}^k \left[\sum_{p,n=1}^\infty x_{j,p} \overline{x_{j,n}} \int_0^1 r_p(t) r_n(t) dt \right]^{m/2} \\ &= \sum_{j=1}^k \left[\left(\sum_{i=1}^\infty x_{j,i} r_i \right) \left(\sum_{i=1}^\infty x_{j,i} r_i \right) \right]^{m/2} \\ &= \sum_{j=1}^k \left[\left\| \sum_{i=1}^\infty x_{j,i} r_i \right\|_2^2 \right]^{m/2} \\ &\stackrel{(***)}{\leq} \sum_{j=1}^k \left\| \sum_{i=1}^\infty x_{j,i} r_i \right\|_m^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^k \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{\infty} r_i(t) x_{j,i} \right|^m dt \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^k \left| \sum_{i=1}^{\infty} r_i(t) x_{j,i} \right|^m dt \\
&\leq \sup_{t \in [0,1]} \sum_{j=1}^k \left| \sum_{i=1}^{\infty} r_i(t) x_{j,i} \right|^m \\
&\leq \sup_{(\alpha_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{\infty}}} \sum_{j=1}^k \left| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_{j,i} \right|^m \\
&\stackrel{****}{=} \sup_{\varphi \in B_{(\ell_1)'}} \sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^m \\
&= \left[\sup_{\varphi \in B_{(\ell_1)'}} \left(\sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^m \right)^{\frac{1}{m}} \right]^m.
\end{aligned}$$

(*): $\ell_2 \subseteq \ell_m$ e $\|\cdot\|_m \leq \|\cdot\|_2$ pois $m \geq 2$.

(**): Proposição 4.2.3.

(***): $L_m[0, 1] \subseteq L_2[0, 1]$ e $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_m$ pois $m \geq 2$.

(****): Devido o isomorfismo isométrico canônico entre ℓ_{∞} e $(\ell_1)'$.

Assim, pelo Teorema 2.3.2 temos que o polinômio P_m é m -dominado.

Finalmente vejamos que P_m não é fracamente compacto. Pelo Corolário 4.2.8 basta mostrar que P_m não é compacto. Para isso suponha, por absurdo, que $P_m(B_{\ell_1})$ seja relativamente compacto. Com essa suposição, obrigatoriamente a sequência $(P_m(e_j))_{j=1}^{\infty} = (e_j)_{j=1}^{\infty}$, por ser limitada, deve ter uma subsequência convergente na topologia da norma. Mas isso não ocorre pois

$$\|P_m(e_j) - P_m(e_k)\|_1 = \|e_j - e_k\|_1 = 2$$

para todos $j \neq k$. Segue assim que o polinômio P_m não é fracamente compacto.

4.3 Não validade do teorema da fatoração de Pietsch

No Capítulo 3 vimos que o teorema da dominação de Pietsch pode ser estendido de maneira natural para polinômios homogêneos; e que nessa extensão natural os polinômios dominados assumem o papel dos operadores lineares absolutamente somantes. O objetivo desta seção é provar que uma extensão igualmente natural do teorema da fatoração de Pietsch não é possível. Similarmente ao capítulo anterior, os polinômios p -dominados representarão o papel dos operadores absolutamente p -somantes. O material desta seção está baseado no artigo [5] de G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda.

Começamos com uma proposição que fornecerá o polinômio dominado canônico que naturalmente assumiria o papel do operador absolutamente somante j_p na desejada eventual versão natural do teorema da fatoração de Pietsch para polinômios dominados.

Proposição 4.3.1 *Sejam E um espaço de Banach, E' munido com a topologia fraca estrela, $\mu \in W(B_{E'})$, $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Então a aplicação*

$$\left(j_{\frac{p}{m}}\right)^m : C(B_{E'}) \longrightarrow L_{\frac{p}{m}}(\mu) : \left(j_{\frac{p}{m}}\right)^m(f) := j_{\frac{p}{m}}(f^m)$$

é um polinômio m -homogêneo p -dominado.

Demonstração. Como o operador linear $j_{\frac{p}{m}} : C(B_{E'}) \longrightarrow L_{\frac{p}{m}}(\mu)$ é bem definido, então obviamente a aplicação em questão, $\left(j_{\frac{p}{m}}\right)^m : C(B_{E'}) \longrightarrow L_{\frac{p}{m}}(\mu)$, também está bem definida. Além disso, é fácil ver que a aplicação

$$\begin{aligned} T : C(B_{E'}) \times \cdots \times C(B_{E'}) &\longrightarrow L_{\frac{p}{m}}(\mu) \\ (f_1, \dots, f_m) &\longmapsto j_{\frac{p}{m}}(f_1) \cdots j_{\frac{p}{m}}(f_m) \end{aligned}$$

está bem definida, é multilinear e $Tf^m = \left(j_{\frac{p}{m}}\right)^m(f)$ para todo ponto f em $C(B_{E'})$. Logo a aplicação $\left(j_{\frac{p}{m}}\right)^m : C(B_{E'}) \longrightarrow L_{\frac{p}{m}}(\mu)$ é deveras um polinômio m -homogêneo.

Verifiquemos que o polinômio m -homogêneo $\left(j_{\frac{p}{m}}\right)^m$ é p -dominado. Para isso sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f_1, \dots, f_n \in C(B_{E'})$. Então

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \left\| \left(j_{\frac{p}{m}}\right)^m(f_k) \right\|_{\frac{p}{m}}^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{m}{p}} &= \left(\sum_{k=1}^n \left\| j_{\frac{p}{m}}(f_k^m) \right\|_{\frac{p}{m}}^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{m}{p}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \int_{B_{E'}} |f_k|^p d\mu\right)^{\frac{m}{p}} \\ &= \left[\left(\sum_{k=1}^n \|j_p(f_k)\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^m \\ &\leq \| (f_k)_{k=1}^n \|_{w,p}^m, \end{aligned}$$

sendo a última desigualdade devida à Proposição 4.1.1. Portanto, pelo Teorema 2.3.2 o polinômio $\left(j_{\frac{p}{m}}\right)^m$ é verdadeiramente p -dominado. ■

Observação 4.3.2 A restrição do polinômio $\left(j_{\frac{p}{m}}\right)^m$ ao subespaço $i_E(E)$ de $C(B_{E'})$ será denotada por $(j_{p/m}^E)^m$.

Conhecido o polinômio dominado da proposição anterior, é possível explicitar a desejada extensão natural do teorema da fatoração de Pietsch para polinômios dominados. Pois bem, uma extensão desse tipo afirmaria o seguinte:

Um polinômio m -homogêneo $P \in \mathcal{P}^m(E; F)$ é p -dominado, $1 \leq p < \infty$, se e somente se existem uma medida $\mu \in W(B_{E'})$, um subespaço fechado $X_{\frac{p}{m}}$ de $L_{\frac{p}{m}}(\mu)$ contendo $((j_{p/m}^E)^m \circ i_E)(E)$ e um operador $u \in \mathcal{L}(X_{\frac{p}{m}}; F)$ tais que

$$P = u \circ (j_{p/m}^E)^m \circ i_E.$$

Ou seja, o seguinte diagrama seria comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{P} & F \\
i_E \downarrow & & \uparrow u \\
i_E(E) & \xrightarrow{(j_{p/m}^E)^m} & X_{\frac{p}{m}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
C(B_{E'}) & \xrightarrow{(j_{\frac{p}{m}})^m} & L_{p/m}(\mu)
\end{array}$$

Antes de mostrar que esse resultado não é válido, vejamos uma série de definições e resultados preliminares.

Primeiramente veremos que é possível, em certo sentido, linearizar os polinômios homogêneos contínuos. Para isso, dados $m \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_m$ espaços de Banach e $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$, é fácil ver que a aplicação

$$\begin{aligned}
x_1 \otimes \dots \otimes x_m &: L(E_1, \dots, E_m; \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\
A &\longmapsto (x_1 \otimes \dots \otimes x_m)(A) := A(x_1, \dots, x_m)
\end{aligned}$$

é linear. Desse modo segue que $x_1 \otimes \dots \otimes x_m \in L(E_1, \dots, E_m; \mathbb{K})^*$. Usando essa notação, vejamos as primeiras definições.

Definição 4.3.3 Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $E_1, \dots, E_m$ espaços de Banach. Denominamos por *produto tensorial* de $E_1, \dots, E_m$ o subespaço vetorial de $L(E_1, \dots, E_m; \mathbb{K})^*$ gerado pelo conjunto

$$D := \{x_1 \otimes \dots \otimes x_m : x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m\}.$$

Este subespaço será denotado por $E_1 \otimes \dots \otimes E_m$. Em particular, se $E_1 = \dots = E_m = E$, o produto tensorial de $E_1, \dots, E_m$ será denotado por $\otimes^m E$.

Os elementos do produto tensorial $E_1 \otimes \dots \otimes E_m$ são chamados *tensores*, e os tensores da forma $x_1 \otimes \dots \otimes x_m$ serão denominados *tensores elementares*. Estes tensores elementares satisfazem algumas propriedades úteis e de verificação imediata, a saber:

- (i) $x_1 \otimes \dots \otimes (x_i + x'_i) \otimes \dots \otimes x_m = x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_m + x_1 \otimes \dots \otimes x'_i \otimes \dots \otimes x_m$ para todo $i = 1, \dots, m$.
- (ii) $\lambda(x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_m) = x_1 \otimes \dots \otimes (\lambda x_i) \otimes \dots \otimes x_m$ para todo $i = 1, \dots, m$.
- (iii) Se $x_i = 0$ para algum $i \in \{1, \dots, m\}$, então $x_1 \otimes \dots \otimes x_m = 0$.

Para a teoria de produtos tensoriais veja [31] ou, em português, [34].

Vejamos a seguir um subespaço do produto tensorial que será imprescindível na linearização de polinômios homogêneos contínuos.

Definição 4.3.4 Sejam $m \in \mathbb{N}$ e E um espaço de Banach. O subespaço do produto tensorial $\otimes^m E$ gerado pelos tensores da forma

$$x \otimes \dots \otimes x, \quad x \in E,$$

será denominado *produto tensorial simétrico* de E . Este subespaço será denotado por $\otimes^{m,s} E$.

Explicitemos agora uma norma para o produto tensorial simétrico $\otimes^{m,s}E$. Denominaremos essa norma por *norma s-tensorial projetiva* π_s e a definiremos como

$$\pi_s(z) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^k |\lambda_j| \|x_j\|^m : k \in \mathbb{N}, z = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \otimes \cdots \otimes x_j \right\}$$

para $z \in \otimes^{m,s}E$. Denotaremos assim o espaço normado $(\otimes^{m,s}E, \pi_s)$ por $\otimes_{\pi_s}^{m,s}E$. Mais ainda, o completamento do espaço normado $\otimes_{\pi_s}^{m,s}E$ será representado por $\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s}E$ e denominado *produto tensorial simétrico projetivo de E* . Para a teoria dos produtos tensoriais simétricos veja [12] e [32].

Antes de enunciarmos o resultado que nos diz em que sentido os polinômios homogêneos contínuos são linearizados, tomemos contato com um polinômio homogêneo e contínuo que aparecerá explicitamente nesse resultado. A proposição a seguir diz que a aplicação natural de um espaço E no seu produto tensorial simétrico projetivo é um polinômio homogêneo contínuo.

Proposição 4.3.5 *Seja $m \in \mathbb{N}$. A aplicação*

$$\delta_m: E \longrightarrow \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s}E, \quad \delta_m(x) := x \otimes \cdots \otimes x,$$

é um polinômio m -homogêneo e contínuo.

Demonstração. Primeiramente vejamos que a aplicação

$$\begin{aligned} A: E \times \cdots \times E &\longrightarrow \otimes^m E \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \end{aligned}$$

é multilinear. Com efeito, dados $\lambda \in \mathbb{K}$, $i \in \{1, \dots, m\}$ e $x_i, x'_i \in E$, segue que

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_m) &= x_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda x_i + x'_i) \otimes \cdots \otimes x_m \\ &= \lambda(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_m) + x_1 \otimes \cdots \otimes x'_i \otimes \cdots \otimes x_m \\ &= \lambda A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) + A(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_m) \end{aligned}$$

e, por conseguinte, a aplicação A é deveras multilinear. Desse modo, a simetrização da aplicação multilinear A ,

$$\begin{aligned} A^s: E \times \cdots \times E &\longrightarrow \otimes^m E \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(m)} \end{aligned}$$

é obviamente multilinear (relembre que S_m é o conjunto de todas as permutações do conjunto $\{1, \dots, m\}$). Como a imagem da aplicação A^s é justamente o produto tensorial simétrico $\otimes^{m,s}E$ (veja [32, Proposition 1.4]), a aplicação

$$B: E^m \longrightarrow \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s}E, \quad B(x_1, \dots, x_m) := A^s(x_1, \dots, x_m),$$

está bem definida e é multilinear. Mais ainda, $Bx^m = \delta_m(x)$ para todo ponto x em E , logo a aplicação δ_m é um polinômio m -homogêneo.

Para comprovar que o polinômio m -homogêneo δ_m é contínuo, basta notar que

$$\pi_s(\delta_m(x)) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^k |\lambda_j| \|x_j\|^m : k \in \mathbb{N}, z = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \otimes \cdots \otimes x_j \right\} \leq \|x\|^m$$

para todo ponto x em E , sendo a desigualdade devida à igualdade

$$\delta_m(x) = x \otimes \cdots \otimes x.$$

A continuidade do polinômio m -homogêneo δ_m segue agora da Proposição 1.2.7. ■

Enfim, vejamos em que sentido os polinômios homogêneos contínuos são linearizados. Essa linearização dos polinômios homogêneos através do produto tensorial simétrico projetivo é devida a Ryan [32].

Proposição 4.3.6 *Sejam E e F espaços de Banach. Se $P: E \longrightarrow F$ é um polinômio m -homogêneo contínuo, então existe um único operador linear $P^L \in \mathcal{L}(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E; F)$ tal que*

$$P(x) = P^L(x \otimes \cdots \otimes x) \text{ para todo } x \in E,$$

ou seja, o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{P} & F \\ & \searrow \delta_m & \nearrow P^L \\ & \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E & \end{array}$$

Mais ainda, a correspondência $P \longleftrightarrow P^L$ é um isomorfismo isométrico entre os espaços de Banach $\mathcal{P}^m(E; F)$ e $\mathcal{L}(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E; F)$.

Demonstração. Veja [32, Proposition 2.1]. ■

Definição 4.3.7 O operador linear contínuo P^L da proposição precedente é denominado *linearização* do polinômio m -homogêneo P .

Estabelecido o último resultado, caminhemos para a conclusão de que uma extensão natural do teorema da fatoração de Pietsch para polinômios dominados, da forma como já foi explicitada, não existe. Com esse intuito, introduzamos agora mais um polinômio homogêneo.

Proposição 4.3.8 *Sejam E um espaço de Banach, E' munido com a topologia fraca estrela e $m \in \mathbb{N}$. A aplicação*

$$\begin{aligned} \Delta: E &\longrightarrow C(B_{E'}) \\ x &\longmapsto \Delta(x): B_{E'} \longrightarrow \mathbb{K} \\ &\Delta(x)(\varphi) := \varphi(x)^m \end{aligned}$$

é um polinômio m -homogêneo contínuo.

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} A: E \times \cdots \times E &\longrightarrow C(B_{E'}) \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto A(x_1, \dots, x_m): B_{E'} \longrightarrow \mathbb{K} \\ A(x_1, \dots, x_m)(\varphi) &:= \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_m). \end{aligned}$$

Esta aplicação está bem definida, é multilinear e é contínua. Com efeito, a aplicação

$$A(x_1, \dots, x_m): B_{E'} \longrightarrow \mathbb{K}$$

é contínua pois o espaço E' está munido com a topologia fraca estrela. Segue assim que a aplicação A está bem definida. Verifiquemos a multilinearidade: dados $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i, x'_i \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_m)(\varphi) &= \varphi(x_1) \cdots \varphi(\lambda x_i + x'_i) \cdots \varphi(x_m) \\ &= \lambda[\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_i) \cdots \varphi(x_m)] + \varphi(x_1) \cdots \varphi(x'_i) \cdots \varphi(x_m) \\ &= \lambda A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)(\varphi) + A(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_m)(\varphi) \\ &= [\lambda A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) + A(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_m)](\varphi) \end{aligned}$$

para toda aplicação $\varphi \in B_{E'}$, o que implica na multilinearidade da aplicação A . Por fim, a continuidade da aplicação A segue de

$$\begin{aligned} \|A(x_1, \dots, x_m)\|_\infty &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} A(x_1, \dots, x_m)(\varphi) \\ &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_m) \\ &\leq \|x_1\| \cdots \|x_m\| \end{aligned}$$

para todo ponto $(x_1, \dots, x_m)$ em E^m e da Proposição 1.1.2. Portanto, para finalizar a demonstração basta notar que $Ax^m = \Delta(x)$ para todo ponto x em E . ■

A partir de agora denotaremos a linearização do polinômio Δ , explicitado na última proposição, como δ . Desse modo, o operador linear contínuo $\delta: \hat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E \longrightarrow C(B_{E'})$ é tal que

$$\delta(x \otimes \cdots \otimes x)(\varphi) = \varphi(x)^m$$

para todo ponto x em E e toda aplicação φ em $B_{E'}$.

A próxima proposição exercerá papel crucial na verificação de que a desejada extensão natural do teorema da fatoração de Pietsch para polinômios dominados não é válida.

Proposição 4.3.9 *Sejam $1 \leq p < \infty$, $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$, $\mu \in W(B_{E'})$, $X_{\frac{p}{m}}$ um subespaço fechado de $L_{\frac{p}{m}}(\mu)$ contendo $((j_{p/m}^E)^m \circ i_E)(E)$ e $u \in \mathcal{L}(X_{\frac{p}{m}}; F)$ tais que $P = u \circ (j_{p/m}^E)^m \circ i_E$. Então P é fracamente compacto.*

Demonstração. Pela forma como são definidas as aplicações $(j_{p/m}^E)^m, i_E, j_{\frac{p}{m}}, \delta$ e δ_m , segue imediatamente que

$$(j_{p/m}^E)^m \circ i_E = j_{\frac{p}{m}} \circ \delta \circ \delta_m.$$

Por conseguinte temos $P = u \circ j_{\frac{p}{m}} \circ \delta \circ \delta_m$. Como a aplicação $u \circ j_{\frac{p}{m}} \circ \delta$ é contínua, então pela Proposição 4.3.6 temos $P^L = u \circ j_{\frac{p}{m}} \circ \delta$. Pela Proposição 4.1.1 sabemos que a inclusão $j_{\frac{p}{m}}$ é um operador absolutamente $\frac{p}{m}$ -somante. Assim, aplicando o Teorema 2.3.2 obtemos trivialmente que a inclusão $j_{\frac{p}{m}}$ restrita a qualquer subespaço de $C(B_{E'})$ é um operador absolutamente $\frac{p}{m}$ -somante. Segue assim pela propriedade de ideal (Proposição 4.1.5), que o operador P^L é absolutamente $\frac{p}{m}$ -somante. Logo, pelo Corolário 4.1.13 o operador linear P^L é fracamente compacto. Mas como $P = P^L \circ \delta_m$, então pela Proposição 4.1.12 concluímos que o polinômio P é fracamente compacto. ■

Concluídas as definições e demonstrados os resultados preliminares, justifiquemos agora o motivo da não existência de uma extensão natural do teorema da fatoração de Pietsch para polinômios dominados. Primeiramente, relembremos qual é a extensão que estamos em mente: um polinômio $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$ é p -dominado, $1 \leq p < \infty$, se e somente se existem $\mu \in W(B_{E'})$, um subespaço fechado $X_{\frac{p}{m}}$ de $L_{\frac{p}{m}}(\mu)$ contendo $((j_{p/m}^E)^m \circ i_E)(E)$ e um operador $u \in \mathcal{L}(X_{\frac{p}{m}}; F)$ tais que $P = u \circ (j_{p/m}^E)^m \circ i_E$ (relembre o diagrama comutativo da página 61).

Ora, se o resultado explicitado no parágrafo precedente fosse verdadeiro, teríamos, pela Proposição 4.3.9, que todo polinômio dominado seria fracamente compacto. Mas obviamente isso é um absurdo, pois conforme visto no Exemplo 4.2.9, existem polinômios dominados que não são fracamente compactos.

4.4 Um teorema de fatoração

Nesta seção exibiremos um teorema de fatoração para polinômios p -dominados. Essa fatoração é conhecida desde o início da teoria, pois aparece implicitamente em [30]. A demonstração apresentada nesta seção se baseia na dissertação [26] e na tese [27], ambas de D. Pérez-García.

Para demonstrar o teorema de fatoração necessitaremos dos três lemas seguintes.

Lema 4.4.1 *Sejam $E_1, \dots, E_m, F$ espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$. Então A é uniformemente contínua sobre os limitados.*

Demonstração. Seja X um subconjunto limitado de $E_1 \times \dots \times E_m$ e considere a norma da soma $\|\cdot\|_1$ em $E_1 \times \dots \times E_m$. Assim existe $r > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq r$ para todo $x \in X$. Para $(x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m) \in X$,

$$\begin{aligned} \|A(x_1, \dots, x_m) - A(y_1, \dots, y_m)\| &= \|A(x_1, \dots, x_m) - A(y_1, x_2, \dots, x_m) \\ &\quad + A(y_1, x_2, \dots, x_m) - A(y_1, y_2, x_3, \dots, x_m) \\ &\quad + A(y_1, y_2, x_3, \dots, x_m) - \dots - A(y_1, \dots, y_{m-1}, x_m) \\ &\quad + A(y_1, \dots, y_{m-1}, x_m) - A(y_1, \dots, y_m)\| \\ &\leq \|A(x_1, \dots, x_m) - A(y_1, x_2, \dots, x_m)\| \\ &\quad + \|A(y_1, x_2, \dots, x_m) - A(y_1, y_2, x_3, \dots, x_m)\| + \\ &\quad \dots + \|A(y_1, \dots, y_{m-1}, x_m) - A(y_1, \dots, y_m)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|A(x_1 - y_1, \dots, x_m)\| + \|A(y_1, x_2 - y_2, \dots, x_m) + \\
&\quad \dots + \|A(y_1, \dots, y_{m-1}, x_m - y_m)\| \\
&\leq m\|A\|r^{m-1}(\|x_1 - y_1\| + \dots + \|x_m - y_m\|) \\
&= m\|A\|r^{m-1}\|(x_1, \dots, x_m) - (y_1, \dots, y_m)\|.
\end{aligned}$$

Como m , $\|A\|$ e r não dependem de $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_m)$ segue que a aplicação A é uniformemente contínua em X . $\blacksquare$

Lema 4.4.2 *Sejam E espaço normado, F espaço de Banach, X um subespaço denso de E e $P \in \mathcal{P}({}^m X; F)$. Então existe um único polinômio $\hat{P} \in \mathcal{P}({}^m E; F)$ tal que $\hat{P}|_X = P$ e $\|\hat{P}\| = \|P\|$.*

Demonstração. Considere a aplicação $\hat{P}: E \longrightarrow F$ definida por

$$\hat{P}(x) := \lim_n P(x_n)$$

para todo ponto x em E , onde $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência contida em X e convergindo para x . Mostremos que a aplicação $\hat{P}$ está bem definida e é um polinômio m -homogêneo contínuo. Para isso seja a aplicação $A: E^m \longrightarrow F$, definida por

$$A(x_1, \dots, x_m) := \lim_n \check{P}(x_{n,1}, \dots, x_{n,m})$$

para todo ponto $(x_1, \dots, x_m)$ em E^m , onde $(x_{n,1}, \dots, x_{n,m})_{n=1}^\infty$ é uma sequência contida em X^m e convergindo para $(x_1, \dots, x_m)$. Afirmamos que a aplicação A está bem definida. Com efeito, temos:

- (i) Como o subespaço X é denso em E , segue que para todo ponto $(x_1, \dots, x_m)$ em E^m existe uma sequência $(x_{n,1}, \dots, x_{n,m})_{n=1}^\infty$ contida em X^m e convergindo para $(x_1, \dots, x_m)$.
- (ii) Sejam $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$ e $(x_{n,1}, \dots, x_{n,m})_{n=1}^\infty, (y_{n,1}, \dots, y_{n,m})_{n=1}^\infty$ sequências contidas em X^m tais que

$$(x_{n,1}, \dots, x_{n,m}) \longrightarrow (x_1, \dots, x_m) \text{ e } (y_{n,1}, \dots, y_{n,m}) \longrightarrow (x_1, \dots, x_m).$$

Então existem $r > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tais que $(y_{n,1}, \dots, y_{n,m}) \in B_{E^m}[0; r]$ e $(x_{n,1}, \dots, x_{n,m}) \in B_{E^m}[0; r]$ para todo $n \geq n_1$, onde $B_{E^m}[0; r] = \{x \in E^m : \|x\|_1 < r\}$. Pelo Lema 4.4.1 sabemos que a aplicação $\check{P}$ é uniformemente contínua em $B_{E^m}[0; r]$. Assim, como as sequências $(x_{n,1}, \dots, x_{n,m})_{n=1}^\infty$ e $(y_{n,1}, \dots, y_{n,m})_{n=1}^\infty$ são de Cauchy, uma vez que são convergentes, e como aplicações uniformemente contínuas transformam sequências de Cauchy em sequências de Cauchy, segue que as sequências

$$(\check{P}(x_{n,1}, \dots, x_{n,m}))_{n=1}^\infty \text{ e } (\check{P}(y_{n,1}, \dots, y_{n,m}))_{n=1}^\infty$$

são de Cauchy em F . Desse modo, como F é completo, concluímos que as sequências $(\check{P}(x_{n,1}, \dots, x_{n,m}))_{n=1}^\infty$ e $(\check{P}(y_{n,1}, \dots, y_{n,m}))_{n=1}^\infty$ são convergentes em F . Verifiquemos agora que

$$\lim_n \check{P}(x_{n,1}, \dots, x_{n,m}) = \lim_n \check{P}(y_{n,1}, \dots, y_{n,m}). \quad (4.1)$$

Para isso lembre que $\check{P}$ é uniformemente contínua em $B_{E^m}[0, r]$ e tome $\varepsilon > 0$ arbitrário. Segue assim que existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in B_{E^m}[0; r]$ e $\|x - y\|_1 < \delta$ então

$$\|\check{P}(x) - \check{P}(y)\| < \varepsilon.$$

Ora, como

$$[(x_{n,1}, \dots, x_{n,m}) - (y_{n,1}, \dots, y_{n,m})] \longrightarrow (x_1, \dots, x_n) - (x_1, \dots, x_n) = 0,$$

existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(x_{n,1}, \dots, x_{n,m}) - (y_{n,1}, \dots, y_{n,m})\|_1 < \delta$$

sempre que $n \geq n_2$. Assim, fazendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, obtemos

$$\|\check{P}(x_{n,1}, \dots, x_{n,m}) - \check{P}(y_{n,1}, \dots, y_{n,m})\| < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Daí, conclui-se que a igualdade (4.1) está satisfeita e portanto a aplicação A está bem definida.

Mostremos que a aplicação A é multilinear. Para isso sejam $\lambda \in \mathbb{K}$, $x_j \in E$, $x'_i \in E$ e $(x_{n,j})_{n=1}^\infty, (x'_{n,i})_{n=1}^\infty$ seqüências em X tais que $x_{n,j} \longrightarrow x_j$ e $x'_{n,i} \longrightarrow x'_i$, para quaisquer $j = 1, 2, \dots, m$ e $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Então

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_m) &= \lim_n \check{P}(x_{n,1}, \dots, \lambda x_{n,i} + x'_{n,i}, \dots, x_{n,m}) \\ &= \lambda \lim_n \check{P}(x_{n,1}, \dots, x_{n,i}, \dots, x_{n,m}) \\ &\quad + \lim_n \check{P}(x_{n,1}, \dots, x'_{n,i}, \dots, x_{n,m}) \\ &= \lambda A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) + A(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_m) \end{aligned}$$

e, por conseguinte, a aplicação A é deveras multilinear.

Portanto, como $Ax^m = \hat{P}(x)$ para todo $x \in E$ temos que a aplicação $\hat{P}$ está bem definida e é um polinômio m -homogêneo. Para comprovar a continuidade de $\hat{P}$, sejam $x \in E$ e $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma seqüência em X tais que $x_n \longrightarrow x$. Da desigualdade

$$\|\hat{P}(x)\| = \|\lim_n P(x_n)\| \leq \|P\| \cdot \lim \|x_n\|^m = \|P\| \cdot \|x\|^m \quad (4.2)$$

e da Proposição 1.2.7 segue que o polinômio $\hat{P}$ é contínuo. Além disso, ainda por (4.2) temos que $\|\hat{P}\| \leq \|P\|$. É imediato que $\hat{P}|_X = P$, daí segue naturalmente que

$$\|P\| = \sup_{x \in B_X} \|P(x)\| = \sup_{x \in B_X} \|\hat{P}(x)\| \leq \sup_{x \in B_E} \|\hat{P}(x)\| = \|\hat{P}\|,$$

o que completa a demonstração. ■

Nosso último lema pode ser interpretado como um refinamento da informação contida na Observação 2.2.2.

Lema 4.4.3 *Sejam E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$. Se $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p(E)$ então $(P(x_n))_{n=1}^\infty \in \ell_{\frac{p}{m}}(F)$.*

Demonstração. Basta notar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|P(x_n)\|^{\frac{p}{m}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\|P\| \cdot \|x_n\|^m)^{\frac{p}{m}} = \|P\|^{\frac{p}{m}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right) < \infty.$$

■

Vejamos o teorema de fatoração.

Teorema 4.4.4 *Sejam E e F espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$. Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é p -dominado se e somente se existem uma medida $\mu \in W(B_{E'})$, um subespaço fechado X_p de $L_p(\mu)$ contendo $(j_p^E \circ i_E)(E)$ e um polinômio $\hat{P} \in \mathcal{P}(^m X_p; F)$ tais que o diagrama ulterior seja comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{P} & F \\ i_E \downarrow & & \uparrow \hat{P} \\ i_E(E) & \xrightarrow{j_p^E} & X_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(B_{E'}) & \xrightarrow{j_p} & L_p(\mu) \end{array}$$

Além disso, pode-se escolher a medida μ e o polinômio m -homogêneo $\hat{P}$ tais que $\|\hat{P}\| = \|P\|_{d,p}$.

Demonstração. Seja $P: E \rightarrow F$ um polinômio m -homogêneo e p -dominado. Pelo teorema da dominação de Pietsch (Teorema 3.2.5) existe uma medida $\mu \in W(B_{E'})$ tal que

$$\|P(x)\| \leq \|P\|_{d,p} \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{m}{p}} \quad (4.3)$$

para todo ponto x em E . Denotemos $S := (j_p^E \circ i_E)(E)$ e definamos $\tilde{P}: S \rightarrow F$ por

$$\tilde{P}(j_p^E(i_E(x))) = P(x)$$

para todo ponto x em E . Considere S como subespaço de $L_p(\mu)$ e verifiquemos que a aplicação $\tilde{P}$ é um polinômio m -homogêneo. Para isso basta notar que a aplicação

$$\begin{aligned} A: S \times \cdots \times S &\longrightarrow F \\ (j_p^E(i_E(x_1)), \dots, j_p^E(i_E(x_m))) &\longmapsto \tilde{P}(x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

com $x_1, \dots, x_m$ pontos em S , está bem definida, é multilinear e $Ay^m = \tilde{P}(y)$ para todo $y \in S$. Primeiramente vejamos que a aplicação A está bem definida. Para isso note que dado $(y_1, \dots, y_m) \in S^m$, existe $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$ tal que

$$(j_p^E(i_E(x_1)), \dots, j_p^E(i_E(x_m))) = (y_1, \dots, y_m),$$

pois $S = (j_p^E \circ i_E)(E)$, e portanto pode-se tomar $\bigvee P(x_1, \dots, x_m) \in F$. Outrossim, se $(x_1, \dots, x_m), (x'_1, \dots, x'_m) \in E^m$ são tais que

$$(j_p^E(i_E(x_1)), \dots, j_p^E(i_E(x_m))) = (j_p^E(i_E(x'_1)), \dots, j_p^E(i_E(x'_m))),$$

como j_p e i_E são ambas injetivas, temos que $x_j = x'_j$ para todo $j = 1, 2, \dots, m$, e portanto $(x_1, \dots, x_m) = (x'_1, \dots, x'_m)$. Isto finaliza a verificação de que a aplicação A está bem definida.

Mostremos agora que a aplicação A é multilinear. Para isso sejam $\lambda \in \mathbb{K}$, $y_j \in S$ e $y'_i \in S$ para quaisquer $j = 1, 2, \dots, m$ e $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Assim, existem $x_j \in E$ e $x'_i \in E$ tais que $j_p^E(i_E(x_j)) = y_j$ e $j_p^E(i_E(x'_i)) = y'_i$ para quaisquer $j = 1, 2, \dots, m$ e $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Logo,

$$\begin{aligned} A(y_1, \dots, \lambda y_i + y'_i, \dots, y_m) &= A(j_p^E(i_E(x_1)), \dots, \lambda j_p^E(i_E(x_i)) \\ &\quad + j_p^E(i_E(x'_i)), \dots, j_p^E(i_E(x_m))) \\ &= A(j_p^E(i_E(x_1)), \dots, j_p^E(i_E(\lambda x_i + x'_i)), \dots, j_p^E(i_E(x_m))) \\ &= \bigvee P(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_m) \\ &= \lambda \bigvee P(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) + \bigvee P(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_m) \\ &= \lambda A(j_p^E(i_E(x_1)), \dots, j_p^E(i_E(x_i)), \dots, j_p^E(i_E(x_m))) \\ &\quad + A(j_p^E(i_E(x_1)), \dots, j_p^E(i_E(x'_i)), \dots, j_p^E(i_E(x_m))) \\ &= \lambda A(y_1, \dots, y_i, \dots, y_m) + A(y_1, \dots, y'_i, \dots, y_m), \end{aligned}$$

o que mostra que a aplicação A é multilinear.

Finalmente, vejamos que $Ay^m = \tilde{P}(y)$ para todo $y \in S$. Dado $y \in S$, existe $x \in E$ tal que $j_p^E(i_E(x)) = y$. Temos assim que

$$Ay^m = A(j_p^E(i_E(x)))^m = \bigvee P x^m = P(x) = \tilde{P}(j_p^E(i_E(x))) = \tilde{P}(y).$$

Concluimos que a aplicação $\tilde{P}$ é deveras um polinômio m -homogêneo.

Agora verifiquemos que o polinômio $\tilde{P}$ é contínuo. Para isso basta notar que

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}(j_p^E(i_E(x)))\| = \|P(x)\| &\leq \|P\|_{d,p} \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{m}{p}} \\ &= \|P\|_{d,p} \left(\int_{B_{E'}} |i_E(x)(\varphi)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{m}{p}} \\ &= \|P\|_{d,p} \left(\int_{B_{E'}} |(j_p^E(i_E(x)))(\varphi)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{m}{p}} \\ &= \|P\|_{d,p} (\|j_p^E(i_E(x))\|_p)^m, \end{aligned}$$

onde a desigualdade segue de (4.3), e fazer uso da Proposição 1.2.7. Além disso, note que a conta acima também prova que $\|\tilde{P}\| \leq \|P\|_{d,p}$.

Visto isto, chamemos $X_p = \bar{S}$. Assim, pelo Lema 4.4.2 existe um polinômio $\hat{P} \in \mathcal{P}(^m X_p; F)$ tal que $\hat{P}|_S = \tilde{P}$ e $\|\hat{P}\| = \|\tilde{P}\|$. Segue assim que $\hat{P}(j_p^E(i_E(x))) = P(x)$ para todo $x \in E$ e

$$\|\hat{P}\| \leq \|P\|_{d,p}. \quad (4.4)$$

Caminhemos agora na direção da comprovação de que a recíproca é verdadeira. Exibiremos duas demonstrações distintas para essa recíproca:

Primeira demonstração da recíproca. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$. Como i_E é uma aplicação linear e contínua, segue da Observação 2.2.2 que $(i_E(x_n))_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(i_E(E))$. Por outro lado, como j_p^E é um operador absolutamente p -somante (veja Proposição 4.1.1), temos que $(j_p^E(i_E(x_n)))_{n=1}^\infty \in \ell_p(X_p)$. Por fim, pelo Lema 4.4.3, obtemos

$$(P(x_n))_{n=1}^\infty = (\hat{P}(j_p^E(i_E(x_n))))_{n=1}^\infty \in \ell_{\frac{p}{m}}(F),$$

o que prova que polinômio P é p -dominado.

Segunda demonstração da recíproca. Lembrando que o polinômio $\hat{P} \in \mathcal{P}(^m X_p; F)$ e que o operador j_p^E é absolutamente p -somante, segue que

$$\begin{aligned} \|P(x)\| = \|\hat{P}(j_p^E(i_E(x)))\| &\leq \|\hat{P}\| \|(j_p^E \circ i_E)(x)\|^m \\ &\leq \|\hat{P}\| (\pi_p(j_p^E))^m \|i_E\|^m \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)| d\mu(\varphi) \right)^{\frac{m}{p}} \\ &\leq \|\hat{P}\| \left(\int_{B_{E'}} |i_E(x)(\varphi)| d\mu(\varphi) \right)^{\frac{m}{p}} \end{aligned}$$

para todo $x \in E$, sendo a segunda desigualdade devida à propriedade de ideal e ao teorema da dominação de Pietsch. Assim, pelo teorema da dominação de Pietsch para polinômios dominados (Teorema 3.2.5) temos que P é p -dominado e

$$\|P\|_{d,p} \leq \|\hat{P}\|. \quad (4.5)$$

Das desigualdades (4.4) e (4.5) segue que $\|P\|_{d,p} = \|\hat{P}\|$. Isto completa a demonstração. ■

Corolário 4.4.5 *Sejam E e F espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$. Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é p -dominado se e somente se existem um espaço de Banach G , um polinômio $Q \in \mathcal{P}(^m G; F)$ e um operador $u \in \Pi_p(E; G)$ tais que $P = Q \circ u$. Isto é, o diagrama a seguir é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{P} & F \\ & \searrow u & \nearrow Q \\ & G & \end{array}$$

Neste caso,

$$\|P\|_{d,p} = \inf \{ \|Q\| \pi_p(u) : Q \in \mathcal{P}_{d,p}(^m G; F), u \in \Pi_p(E; G) \text{ e } P = Q \circ u \}.$$

Demonstração. Suponha $P \in \mathcal{P}_{d,p}(^m E; F)$. Neste caso basta aplicar o Teorema 4.4.4 e tomar $u = j_p^E \circ i_E$, $G = X_p$ e $Q = \widehat{P}$. Reciprocamente, dada $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$, como $u \in \Pi_p(E; G)$, segue que $(u(x_n))_{n=1}^\infty \in \ell_p(G)$. Por outro lado, como $Q \in \mathcal{P}(^m G; F)$, pelo Lema 4.4.3 temos que $(Q(u(x_n)))_{n=1}^\infty \in \ell_{\frac{p}{m}}(F)$. Segue assim que o polinômio $P = Q \circ u$ é p -dominado.

Provemos agora a expressão para a norma p -dominada de P . Suponha $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_k \in E$, $u \in \Pi_p(E; G)$ e $Q \in \mathcal{P}(^m G; F)$ tais que $P = Q \circ u$. Segue assim que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^k \|P(x_j)\|_{\frac{p}{m}} \right)^{\frac{m}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^k \|(Q \circ u)(x_j)\|_{\frac{p}{m}} \right)^{\frac{m}{p}} \\ &\leq \|Q\| \left[\left(\sum_{j=1}^k \|u(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^m \\ &\leq \|Q\| \pi_p(u) \left[\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^m \end{aligned}$$

e, por conseguinte, $\|P\|_{p,d} \leq \|Q\| \pi_p(u)$. Logo

$$\|P\|_{d,p} \leq \inf \{ \|Q\| \pi_p(u) : Q \in \mathcal{P}_{d,p}(^m G; F), u \in \Pi_p(E; G) \text{ e } P = Q \circ u \}. \quad (4.6)$$

Por outro lado, pelo Teorema 4.4.4 existem um espaço de Banach X_p e um polinômio $\widehat{P} \in \mathcal{P}(X_p; F)$ tais que $P = Q \circ (j_p^E \circ i_E)$, com $j_p^E \circ i_E \in \Pi_p(E; X_p)$ e $\|P\|_{d,p} = \|\widehat{P}\|$. Como

$$\pi_p(j_p^E \circ i_E) \leq \pi_p(j_p^E) \|i_E\| \leq \pi_p(j_p) \|i_E\| \leq 1,$$

então $\|\widehat{P}\| \pi_p(j_p^E) \|i_E\| \leq \|P\|_{d,p}$. Daí e pela desigualdade (4.6) segue que

$$\|P\|_{d,p} = \inf \{ \|Q\| \pi_p(u) : Q \in \mathcal{P}_{d,p}(^m G; F), u \in \Pi_p(E; G) \text{ e } P = Q \circ u \}.$$

■

Observação 4.4.6 Apesar de serem teoremas de fatoração para polinômios dominados, os dois resultados acima não são teoremas de fatoração tipo Pietsch. Isso porque em um teorema de fatoração tipo Pietsch todo polinômio dominado deveria fatorar através de um polinômio dominado canônico; enquanto que nesses resultados todo polinômio se fatora através de um *operador linear absolutamente somante* canônico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] G. BOTELHO, *Tipo e cotype: caracterização via funções de Rademacher generalizadas e contribuições à teoria de aplicações multilineares e polinômios homogêneos em espaços de Banach*, Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 1995.
- [2] G. BOTELHO, *Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Proceedings of the Royal Irish Academy, **97** (1997) 145-153.
- [3] G. BOTELHO, *Weakly compact and absolutely summing polynomials*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **265** (2002) 458-462.
- [4] G. BOTELHO, *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note di Matematica, **25** (2005) 69-102.
- [5] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO AND P. RUEDA, *Pietsch's factorization theorem for dominated polynomials*, Journal of Functional Analysis, **243** (2007) 257-269.
- [6] H. BRAUNSS, *Ideale multilinearer Abbildungen und Räume holomorpher Funktionen*, Dissertation, 1984.
- [7] H. BRÉZIS, *Analyse Fonctionnelle: Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [8] J. B. CONWAY, *A Course in Functional Analysis*, Springer, 1990.
- [9] J. DIESTEL, H. JARCHOW AND A. TONGE, *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press, 1995.
- [10] S. DINEEN, *Complex analysis on infinite dimensional spaces*, Springer, 1999.
- [11] C. S. FERNANDEZ, *The closed graph theorem for multilinear mappings*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, **19** (1996) 407-408.
- [12] K. FLORET, *Natural norms on symmetric tensor products of normed spaces*, Note Mat. **17** (1997), 153-188.

- [13] K. FLORET AND M.C. MATOS, *Applications of a Khintchine inequality to holomorphic mappings*, Math. Nachr. **176** (1995), 65-72.
- [14] G. B. FOLLAND, *Real Analysis: Modern techniques and their applications*, John Wiley and Sons, Inc., 1999.
- [15] D. J. H. GARLING, *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press, 2007.
- [16] S. GEISS, *Ideale multilinearer Abbildungen*, Diplomarbeit, 1984.
- [17] A. GROTHENDIECK, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. São Paulo **8** (1953) 1-79.
- [18] A. JATOBÁ, *Fatoração de operadores fracamente compactos entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, 2005.
- [19] E. KREYSZIG, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.
- [20] E. LIMA, *Espaços Métricos*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2007 (Projeto Euclides).
- [21] E. LIMA, *Elementos de Topologia Geral*, SBM, 2009.
- [22] J. LINDENSTRAUSS AND A. PELCZNSKI, *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ -spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1983), 257-326.
- [23] M. C. MATOS, *On multilinear mappings of nuclear type*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **6** (1993), no. 1, 61-81.
- [24] M. C. MATOS, *Absolutely summing holomorphic mappings*, Anais da Academia Brasileira de Ciências, **68** (1996), 1-13.
- [25] J. MUJICA, *Complex analysis in Banach spaces*, North-Holland, 1986.
- [26] D. PÉREZ-GARCÍA, *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Tesina, Universidad Complutense de Madrid, 2002.
- [27] D. PÉREZ-GARCÍA, *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Tese de Doutorado, Universidad Complutense de Madrid, 2003.
- [28] A. PIETSCH, *Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math. **28** (1967) 333-353.
- [29] A. PIETSCH, *Operator Ideals*, North-Holland Publishing Company, 1980.
- [30] A. PIETSCH, *Ideals of multilinear functionals (designs of a theory)*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals, and their Applications in Theoretical Physics (Leipzig), Teubner-Texte, 1983, pp.185-199.
- [31] R. RYAN, *Introduction to tensor products of Banach spaces*, Springer, 2002.

- [32] R. RYAN, *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy*, Thesis - Trinity College, 1980.
- [33] B. SCHNEIDER, *On absolutely p -summing and related multilinear mappings*, Brandenburgische Landeshochschule Wissenschaftliche Zeitschrift **35** (1991), 105-117.
- [34] A. R. SILVA, *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e ideais de composição*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2010.
- [35] C. A. S. SOARES, *Aplicações multilineares e polinômios misto somantes*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 1998.