



**Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica**

ESTUDO DA ASCENSÃO DE UM FLUIDO EM UM CILINDRO ROTATIVO

Saulo Andrade Pinto

**Uberlândia-MG
2025**

Saulo Andrade Pinto

ESTUDO DA ASCENSÃO DE UM FLUIDO EM UM CILINDRO ROTATIVO

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Coorientador: Prof. Dr. Rafael Alves Figueiredo

Uberlândia-MG

2025

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

P659
2025

Pinto, Saulo Andrade, 2000-
Estudo da ascensão de um fluido em um cilindro
rotativo [recurso eletrônico] / Saulo Andrade Pinto. -
2025.

Orientador: Aristeu da Silveira Neto.

Coorientador: Rafael Alves Figueiredo.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Uberlândia, Graduação em
Engenharia Mecânica.

Modo de acesso: Internet.

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Engenharia mecânica. I. Silveira Neto, Aristeu da ,
1955-, (Orient.). II. Figueiredo, Rafael Alves, 1986-,
(Coorient.). III. Universidade Federal de Uberlândia.
Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



**Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica**

Coordenação do Curso de Engenharia Mecânica

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Uberlândia, ____ de _____ de 20____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Dra. Millena Martins Villar

Me. Thiago Fernando Santiago de Freitas

**Uberlândia-MG
2025**

Dedico este trabalho a todos que acreditaram e me apoiaram durante esta trajetória.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda minha família, especialmente aos meus pais, Adélia e Leonardo, e ao meu irmão, Samuel.

Aos meus orientadores, Professor Aristeu e Professor Rafael, pela orientação, que foram de suma importância para a realização deste trabalho.

Aos meus colegas e amigos do PETMEC, em especial, Emelly, Felipe, Frederico, Gustavo, Isabela, Poliana, Raquel, Ríchar, Thiago, Vitor, Wilson, e a tutora Ana Marta. Pelo tempo convívio em reuniões, organização de eventos e confraternizações.

Aos meus colegas e amigos do MFLab, especialmente João Pedro, Thiago e Vitor, pelo tempo dedicados aos estudos e pelos momentos de descontração.

Às amizades construídas durante o curso de graduação, em especial, Emelly, Luís, João.

Aos professores da Faculdade de Engenharia Mecânica, pelo tempo dedicado, aos ensinamentos e conselhos.

E agradeço, por fim, a todos que contribuíram para a minha formação profissional e pessoal.

*"Alguns acreditam que apenas um grande poder
é capaz de manter o mal sob controle.
Mas não é isso que tenho visto.
Eu descobri que são as pequenas ações cotidianas
de pessoas comuns que mantêm a escuridão distante.
Pequenos gestos de gentileza e amor."
(Gandalf)*

RESUMO

O presente trabalho foi desenvolvido com a finalidade de realizar um estudo sobre a ascensão de um fluido em um cilindro rotativo, utilizando a dinâmica computacional dos fluidos para comparação com o resultado analítico. Foram analisadas: a influência da velocidade de rotação do cilindro, o coeficiente de tensão interfacial, viscosidade dinâmica da fase dispersa e ângulo de contato no comportamento da interface neste tipo de escoamento. A metodologia foi dividida em modelo físico, no qual se detalha as hipóteses simplificadoras consideradas, modelo matemático, no qual obteve-se a solução analítica do problema e modelo computacional, o detalhamento dos parâmetros e os métodos utilizados nas simulações numérico-computacionais. Utilizou-se o software Ansys Fluent, com o método de volume de fluidos, e o software MFSim, com os métodos de volume de fluidos e fronteira imersa. Os resultados obtidos através das simulações numérico-computacionais foram comparados com a solução analítica. Explicou-se a influência do coeficiente de tensão interfacial e ângulo de contato no escoamento pelos efeitos das forças de coesão e de molhabilidade. Obteve-se menor erro relativo, em comparação com a solução analítica, cerca de 4 % para um coeficiente de tensão interfacial de $0,001 \text{ N/m}$ e ângulo de contato de 90° , chegando a 30 % para um coeficiente de tensão interfacial de $0,1 \text{ N/m}$ e ângulo de contato de 150° .

Palavras-chave: dinâmica dos fluidos computacional; volume de fluidos; fronteira imersa; tensão interfacial; ângulo de contato.

ABSTRACT

This work was developed with the aim of conducting a study on the rise of a fluid in a rotating cylinder, using computational fluid dynamics for comparison with the analytical result. The influence of the cylinder's rotation speed, surface tension coefficient, dynamic viscosity of the dispersed phase, and contact angle on the behavior of the interface in this type of flow was analyzed. The methodology was divided into physical model, which details the simplifying assumptions considered, mathematical model, in which the analytical solution to the problem was developed, and computational model, which details the parameters and methods used in the numerical-computational simulations. The Ansys Fluent software, with the volume of fluids method, and the MFSim software, with the volume of fluids and immersed boundary methods, were used. The results obtained through the numerical-computational simulations were compared with the analytical solution. The influence of the interfacial tension coefficient and contact angle on the flow was explained through the effects of cohesive and wettability forces. The lowest relative error, compared to the analytical solution, was around 4 % for an interfacial tension coefficient of 0.001 N/m and a contact angle of 90° , reaching 30 % for an interfacial tension coefficient of 0.1 N/m and a contact angle of 150° .

Keywords: computational fluid dynamics; volume of fluids; immersed boundary; surface tension; contact angle.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Geometria computacional do cilindro parcialmente preenchido com um fluido líquido.	2
3.1	Comportamentos reológico de vários materiais viscosos. À esquerda tem-se a tensão versus a taxa de deformação. À direita tem-se o efeito do tempo sobre a tensão aplicada. Retirado de White (2018)[31].	5
3.2	Ilustração do efeito do ângulo de contato. Retirado de Figueiredo (2016)[7].	7
3.3	Ilustração dos três estados possíveis de molhamento de acordo com a equação de Young. Retirado de Bonn <i>et al.</i> (2009)[2].	8
3.4	Volume elementar 3D e seus vizinhos. Retirado de Maliska(2004)[14].	13
3.5	Ilustração da fração de volume. Retirado de Figueiredo (2016)[7].	14
3.6	Ilustração da curvatura da interface, através de uma função indicadora, fração de volume e do método <i>height function</i> . Retirado de Evrard <i>et al.</i> (2020)[6].	15
3.7	Exemplo de malhas independentes utilizadas no método da fronteira imersa. Retirado de Barbi (2012) [1].	16
3.8	Exemplo de malha composta corretamente agrupada com três níveis de refinamento. Retirado de Villar(2007)[30].	17
3.9	Exemplo de sequencia de malhas onde as componentes do erro são reduzidas pelo Método Multigrid. Retirado de Villar(2007)[30].	17
3.10	Representação esquemática dos níveis físicos e virtuais para uma malha refinada localmente. Retirado de Villar(2007)[30].	18
3.11	Exemplo de malha estrutura à esquerda, e malha não estruturada à direita. Retirado de Maliska(2004)[14].	19
3.12	Ilustração de células fantasmas para um domínio unidimensional. Retirado de Maliska(2004)[14].	19
4.1	Ilustração do modelo físico. Adaptado de Çengel(2007)[34]	21
4.2	Malha gerada no software Gmsh.	28
4.3	Código para a VoF.	29
4.4	Visualização do domínio computacional no instante inicial.	30
4.5	Geometria gerada no SpaceClaim.	30
4.6	Geometria gerada no Workbench.	31
5.1	Visualização da densidade no tempo final.	34
5.2	Gráfico com a solução computacional e analítica para o isovalor de massa específica de 505 kg/m^3	35
5.3	Gráfico do erro relativo entre a solução computacional e analítica.	36
5.4	Gráfico da solução computacional com diferentes número de Weber. Retirado de Brady (2012)[4].	36
5.5	Gráfico da solução computacional variando a tensão interfacial realizada no Ansys.	37
5.6	Gráfico do erro relativo para a variação da tensão interfacial realizada no Ansys.	38

5.7	Gráfico da solução computacional variando a velocidade angular.	38
5.8	Gráfico da solução computacional variando a viscosidade dinâmica da fase dispersa.	39
5.9	Gráfico da solução computacional variando a viscosidade dinâmica, visualização ampliada na parede.	40
5.10	Gráfico da solução computacional variando o ângulo de contato para tensão interfacial de 0,05 N/m.	40
5.11	Gráfico da solução computacional variando o ângulo de contato para tensão interfacial de 0,05 N/m, visualização ampliada na parede.	41
5.12	Gráfico do erro relativo variando o ângulo de contato para tensão interfacial de 0,05 N/m, visualização ampliada na parede.	41
5.13	Gráfico da solução computacional variando o ângulo de contato para tensão interfacial de 0,1 N/m.	42
5.14	Gráfico da solução computacional variando o ângulo de contato para tensão interfacial de 0,1 N/m, visualização ampliada na parede.	42
5.15	Gráfico do erro relativo variando o ângulo de contato para tensão interfacial de 0,1 N/m, visualização ampliada na parede.	43
5.16	Gráficos da solução computacional variando o coeficiente de tensão interfacial para θ_e igual a 30°, 45°, 90°, 120°, 150°.	44

LISTA DE TABELAS

4.1	Parâmetros de controle de malha.	25
4.2	Acoplamento pressão-velocidade e métodos de discretização.	25
4.3	Parâmetros de controle do multigrid.	25
4.4	Parâmetros de controle para as duas fases.	26
4.5	Parâmetros de controle da simulação.	26
4.6	Condições de contorno para as componente u,v e w da velocidade.	26
4.7	Condições de contorno para a pressão.	27
4.8	Condição de contorno para a densidade.	27
4.9	Topologia de partição inicial.	27
4.11	Função indicadora da fronteira imersa (IB).	27
4.10	Parâmetros da fronteira imersa.	28
4.12	Condições de contorno VoF.	29
4.13	Parâmetros de controle VoF.	29
4.14	Parâmetros do modelo multifásico.	32
4.15	Condições de contorno.	32
4.16	Parâmetros de referência.	32
4.17	Discretização espacial.	33
5.1	Adimensionais para diferentes valores da tensão interfacial.	37
5.2	Adimensionais para diferentes valores da velocidade angular.	38
5.3	Número de Reynolds para diferentes valores da viscosidade dinâmica da fase dispersa.	39

LISTA DE ABREVIACÕES E SÍMBOLOS

LISTA DE ABREVIACÕES E SIGLAS

cte	Constante
HF	Height function
l_{bot}	Nível mais grosseiro da malha
l_{top}	Nível mais refinado da malha
TNL	Termo não linear
CFD	Computacional Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
CSF	<i>Continuum Surface Force</i>
EDP's	Equações diferenciais parciais
IB	Immersed Boundary
MFLab	Laboratório de Mecânica dos Fluidos
SBDF	Semi Backward Difference Formula
SI	Sistema Internacional de Unidades
SSF	<i>Sharp Surface Force</i>
VoF	Volume of Fluid

LISTA DE SÍMBOLOS

$\bar{\bar{I}}$	Tensor identidade
$\forall$	Volume
Γ	Termo difusivo
μ	Coeficiente de viscosidade dinâmica
μ_c	Viscosidade dinâmica da fase contínua
μ_d	Viscosidade dinâmica da fase dispersa
ν	Viscosidade cinemática

Ω	Velocidade angular
ϕ	Informação genérica
ρ	Massa específica
ρ_c	Massa específica da fase contínua
ρ_d	Massa específica da fase dispersa
σ	Coeficiente de tensão interfacial
σ_{f_1,f_2}	Tensão interfacial entre os fluidos
σ_{s,f_1}	Tensão interfacial entre o sólido e o fluido 1
σ_{s,f_2}	Tensão interfacial entre o sólido e o fluido 2
τ	Tensão de cisalhamento
θ	Interpolação para o termo linear
θ_e	Ângulo de contato estático
$\vec{\nabla}$	Operador nabla
$\vec{f}$	Campo de força interfacial
$\vec{g}$	Campo gravitacional
$\vec{V}$	Vetor velocidade
$\vec{x}$	Vetor deslocamento
$^\circ$	grau
T	Transposto
Ca	Número de Capilaridade
dA	Infinitesimal de área
dL	Infinitesimal de comprimento
f_1	Fluido 1
f_2	Fluido 2
Fr	Número de Froude
g	aceleração da gravidade
g_r	Componente do campo gravitacional na direção radial
g_z	Componente do campo gravitacional na direção axial
g_θ	Componente do campo gravitacional na direção azimutal
h	Altura da interface

h_0	Altura inicial da interface
I	Função indicadora
kg	Quilograma
L	Comprimento característico
m	metro
Ma	Número de Mach
N	newton
p	Pressão
Pa	Pascal
R	Raio
Re	Número de Reynolds
S	Termo fonte
s	segundo
t	Tempo
U	Velocidade linear
u	Componente da velocidade na direção x
v	Componente da velocidade na direção y
v_r	Componente da velocidade na direção radial
v_z	Componente da velocidade na direção axial
v_θ	Componente da velocidade na direção azimutal
w	Componente da velocidade na direção z
We	Número de Weber
z_s	Interface bifásica

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Objetivos	3
3	Fundamentação Teórica	4
3.1	Fluido	4
3.2	Classificação dos Escoamentos	5
3.3	Tensão Interfacial	6
3.4	Ângulo de Contato	7
3.5	Hipótese do Contínuo	8
3.6	Equações de balanço	8
3.7	Adimensionais	9
3.8	Método de Volumes Finitos	10
3.9	Discretização dos termos advectivos	11
3.10	Discretização Temporal	12
3.11	Condições de Contorno	12
3.12	Acoplamento Pressão-Velocidade	13
3.13	Método de Volume de Fluidos	14
3.14	Método da Fronteira Imersa	15
3.15	Refinamento Adaptativo Local de Malha	16
3.16	Método Multigrid-Multinível	17
3.17	Condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)	18
3.18	Malhas Estruturadas e Não Estruturadas	18
3.19	Células Fantasmas	19
4	Metodologia	20
4.1	Modelo Físico	20
4.2	Modelo Matemático em Coordenadas Cilíndricas	21
4.2.1	Modelo Matemático Diferencial	21
4.2.2	Modelo Matemático Analítico	23
4.3	Modelo Numérico-Computacional	24
4.3.1	MFSim	24
4.3.2	Ansys	30
5	Resultados	34
5.1	MFSim	34
5.2	Ansys	36
6	Conclusões	45
	Referências Bibliográficas	46

1. INTRODUÇÃO

A Fluidodinâmica computacional (*Computational fluid dynamics* - CFD, em inglês), segundo Versteeg e Malalasekra (2007)[29], é a análise de sistemas envolvendo escoamentos de fluidos, transferência de energia térmica e fenômenos associados, tais como reações químicas, utilizando simulações computacionais. O cálculo dos campos de concentração, de velocidades, de pressão, de temperaturas e de propriedades do escoamento, é efetuada através de modelos baseados em princípios de balanço de massa, de energia e de quantidade de movimento linear, no domínio do espaço e do tempo e por modelos de fechamento da turbulência. O CFD possui diversas aplicações em problemas de engenharia, e uma delas, que será estudada no presente trabalho, é o problema de ascensão de um fluido no interior de um tubo vertical girante, que tem sua origem no escoamento de fluidos lubrificantes em compressores. Assim, visa-se compreender a origem do efeito do bombeamento através de simulações computacionais, utilizando os softwares MFSim e Ansys Fluent. Os resultados obtidos serão avaliados para avaliar quais parâmetros que influenciam o escoamento do fluido.

Dadas as devidas simplificações, será realizada uma análise comparativa entre as soluções contínua e numérico-computacional do escoamento em um cilindro parcialmente preenchido com um fluido na fase líquida, e com outro fluido de menor massa específica (por exemplo um gás), com rotação constante, tendo como interesse as variáveis que influenciam a ascensão do fluido na parede da geometria. É analisada a influência da velocidade angular, ângulo de contato, tensão interfacial e a viscosidade dinâmica da fase dispersa. A geometria computacional é ilustrada na Figura 1.1.

Um exemplo de aplicação do princípio físico a ser simulado é na lubrificação de compressores herméticos. Neste tipo de compressor o fluido lubrificante é impulsionado através de canais pela ação da força centrífuga. Trabalhos como de Kerpici *et al.* (2013)[11] e Ozdipahi *et al.* (2019)[19], abordam esse tipo de escoamento utilizando geometrias mais complexas, que se aproximam mais das peças utilizadas neste tipo de compressor e com comparações entre soluções numérico-computacionais e experimentos materiais.

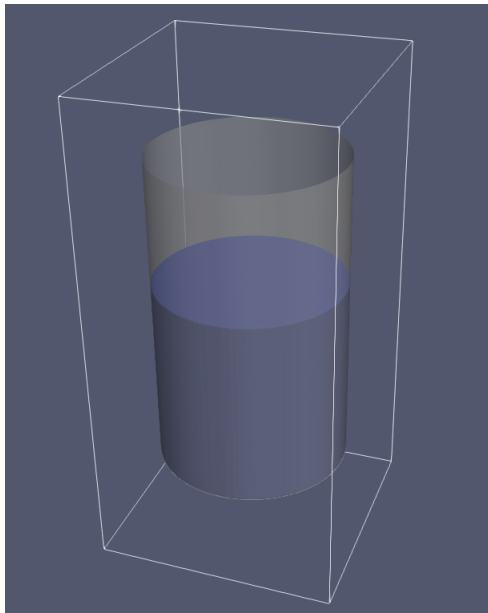


Figura 1.1: Geometria computacional do cilindro parcialmente preenchido com um fluido líquido.

2. OBJETIVOS

O objetivo geral é o estudo na área de modelagem matemática e computacional, de escoamentos internos a um cilindro, promovido por sua rotação. Para atingir o objetivo geral, tem-se os objetivos específicos. No presente trabalho, busca-se realizar uma introdução aos escoamento bifásicos, apresentando conceitos básicos, desde a definição de fluido, tipos de escoamentos, equações de balanço, à métodos numérico-computacionais para o entendimento dos fenômenos físicos presentes no escoamento e posteriormente os resultados computacionais obtidos através desses métodos.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentados os conceitos fundamentais de mecânica dos fluidos, principalmente os de interesse no escoamento em estudo. Posteriormente são apresentados os modelos numérico-computacionais para a simulação computacional dos fenômenos físicos presente no escoamento.

3.1 FLUIDO

Gomes (2012)[8] define fluido como uma substância que se deforma continuamente, ou seja, escoar sob ação de uma força tangencial por menor que seja. Daí, tem-se que o conceito de fluido abrange líquidos e gases. Um simples conceito para a diferença de líquido e gás pode ser obtido considerando líquido como aquela substância que adquire a forma de um recipiente em que está contido, o qual possui volume definido. Enquanto considera-se gás uma substância que ao estar contida em um recipiente, se expande até preenche-lo totalmente, e não possui uma forma definida.

São chamados de fluidos newtonianos aqueles que seguem a lei de Newton para viscosidade, Eq. 3.1, e de não newtonianos os que não seguem essa lei.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (3.1)$$

Pela lei de Newton para viscosidade, tem-se que a tensão de cisalhamento (τ) aplicada é proporcional ao gradiente de velocidade (du/dy) para os fluidos lineares comuns, e a função de proporcionalidade é o coeficiente de viscosidade dinâmica μ (White, 2018[31]).

Na Figura 3.1 tem-se alguns exemplos de dois tipos de fluidos, de acordo com sua taxa de deformação por cisalhamento. Nos fluidos dilatantes, a resistência à deformação por cisalhamento aumenta com a tensão aplicada. Os fluidos pseudoplásticos possuem um comportamento contrário, ou seja, a resistência à deformação por cisalhamento diminui com o aumento da tensão aplicada. O plástico de Bingham é considerado um caso-limite de uma substância plástica, pois requer uma tensão de escoamento finita para que o escoamento se inicie (White, 2018[31]). Os fluidos reopéticos são os fluidos não newtonianos cuja viscosidade aumenta com o tempo de aplicação de uma força cisalhante. E os fluidos tixotrópicos, ao contrário dos reopéticos, são os que a viscosidade diminui.

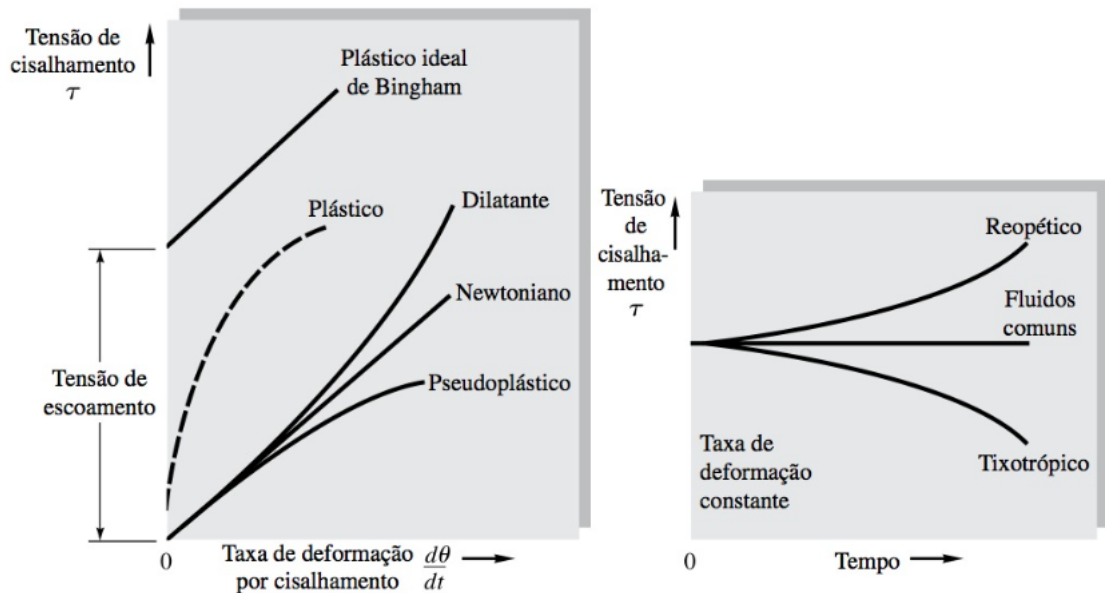


Figura 3.1: Comportamentos reológico de vários materiais viscosos. À esquerda tem-se a tensão versus a taxa de deformação. À direita tem-se o efeito do tempo sobre a tensão aplicada. Retirado de White (2018)[31].

3.2 CLASSIFICAÇÃO DOS ESCOAMENTOS

De acordo com o Dicionário do Petróleo [21], defini-se escoamento como movimento qualquer de um fluido, em estado líquido, pastoso ou gasoso, que se desloca em determinada distância produzindo certa vazão ou deslocamento.

Çengel (2015)[35] descreve uma classificação dos escoamentos de fluidos. Classificando-os em regiões de escoamento viscoso e não viscoso; interno e externo; compressível e incompressível; laminar e turbulento; natural e forçado; estacionário e não estacionário; uni, bi e tridimensionais.

Nos escoamentos viscosos os efeitos do atrito são significativos, enquanto em escoamentos não viscosos os efeitos do atrito são desprezíveis comparados às forças inerciais e de pressão.

Escoamento que não são confinados sobre uma superfície são chamados de escoamentos externos, caso o escoamento esteja em um espaço confinado, ele é interno.

Um escoamento é dito incompressível se não tivermos variação da massa específica com a pressão ao longo do tempo. Caso contrário, são ditos compressíveis. É comumente utilizado o número de Mach (Ma), que é a razão entre velocidade de escoamento e a velocidade do som, para classificar se o escoamento é compressível ou incompressível. Na literatura adota-se que o escoamento será incompressível para $Ma < 0,3$.

Escoamentos em regime laminar são aqueles que o movimento do fluido pode ser caracterizado pela divisão do fluido em camadas suaves. Escoamentos em regime turbulento são caracterizados por terem múltiplas estruturas turbilhonares, ser modelado como um fenômeno contínuo, considerado como caos-determinístico, aceleração da difusão molecular das informações, ocorrência em altos valores do número de Reynolds, ser tridimensional e rotacional, e ser transformativo (Silveira-Neto, 2020 [26]). O número de Reynolds (Re) é definido como a razão

entre os efeitos advectivos (não lineares) e os efeitos difusivos. Um escoamento que se alterna entre o regime laminar e turbulento, diz que ele transiciona à turbulência.

É dito forçado quando seu movimento é inicializado por um agente externo. É denominado natural quando seu movimento é inicializado por meios naturais, como efeitos gravitacionais.

Diz-se que um escoamento é estacionário quando as informações de interesse do escoamento não mudam espacialmente ao longo do tempo. Caso contrário o escoamento é dito não estacionário. Caso não haja mudança da informação em uma localização de uma região específica, é dito uniforme. Cabe ressaltar que o termo transiente é utilizado para escoamentos em desenvolvimento. E o termo periódico (termo que aparece em intervalos regulares) é utilizado para escoamentos não estacionário no qual o escoamento oscila em torno de um valor médio estacionário (White, 2018[31]).

A dimensão de um escoamento é caracterizada pelas componentes do campo de velocidade, ou seja, caso tenha uma componente é dito unidimensional, duas é dito bidimensional, e três é dito tridimensional.

E, por ser de interesse neste trabalho, os escoamentos nos quais duas ou mais fases (gás, líquido, sólido) que escoam simultaneamente em uma região, são ditos escoamentos multifásicos (Dicionário do Petróleo [22]).

3.3 TENSÃO INTERFACIAL

Um líquido formará uma interface com um fluido quando ele não tem a capacidade de se expandir livremente. Dessa maneira, tem-se que as moléculas no interior do líquido se repelem com sua vizinhança e as moléculas que estão na interface se atraem. Disto, surge o efeito mecânico de tensão sobre a interface. White (2018)[31] elabora os seguintes conceitos para a tensão interfacial:

Se for feito um corte de comprimento dL em uma interface, forças iguais e opostas de intensidade σdL estarão presentes normais ao corte e tangente à superfície, em que σ é chamado de coeficiente de tensão interfacial. As dimensões de σ são F/L , com unidades no SI de newton por metro. Um conceito alternativo é abrir o corte a uma área dA ; isso requer que se execute um trabalho de valor σdA . Assim, o coeficiente σ pode ser considerado também a energia da interface por unidade de área da interface, em $(N \cdot m)/m^2$.

Luz e Lima (2007)[13] definem tensão interfacial como o trabalho para aumentar a interface e uma unidade de área por processo isotérmico e reversível. E ressaltam que existem quatro tipos diferentes de pares de fases. Sendo elas os pares líquido e vapor; sólido e vapor; líquido e sólido; líquido e líquido.

Sestari *et al.*(2020)[25] descreve que a tensão interfacial se origina das forças de atração inter-moleculares, as quais são denominadas forças de coesão.

Cabe ressaltar os conceitos de forças coesivas, forças adesivas e ação capilar. Forças coesivas são forças entre moléculas do mesmo tipo, e forças adesivas são forças entre moléculas de

diferentes tipos. Ação capilar é a tendência de um fluido de ser elevado ou suprimido em um tubo estreito (LibreTexts [12]).

3.4 ÂNGULO DE CONTATO

Figueiredo (2016)[7] define o ângulo de contato (θ_e) como o ângulo formado entre a reta tangente à interface e o contorno rígido, no interior do fluido mais denso. Este coeficiente mede o espalhamento de um líquido sobre uma superfície sólida. Tem-se que as propriedades das fases dos fluidos e o substrato do contorno rígido influenciam o ângulo de contato. Conceitualmente, para $\theta_e < 90^\circ$ a superfície é dita hidrofílica (ou molhante) e para $\theta_e > 90^\circ$ é dita hidrofóbica (ou não molhante).

Defini-se molhabilidade como a habilidade de um líquido em manter contato com uma superfície sólida, resultante de interações intermoleculares quando estes estão juntos (Lévy *et al.* (1993) *apud* Wikipédia: Molhabilidade, 2023[32]). O grau de molhabilidade (ou umectação) é determinado pelo equilíbrio das forças coesivas (que fazem com que a interface entre dois fluidos se contraia e assuma a mínima área possível), das forças adesivas, ou determinado pelo ângulo de contato. Ou seja, quanto maior a força coesiva em relação a força adesiva, maior é o ângulo de contato e mais o líquido tende a formar uma gota esférica. Caso contrário, se a força adesiva é maior que a coesiva, tem-se o achatamento da gota (Ribera, 2015[24]). Quando as forças de coesão e adesão estão em equilíbrio, o ângulo de contato correspondente é estático (Mourik, 2002 [16]).

Na Figura 3.2 tem-se a ilustração do efeito do ângulo de contato, em que σ_{s,f_2} é a tensão interfacial entre o sólido e o fluido 2, σ_{s,f_1} é a tensão interfacial entre o sólido e o fluido 1, σ_{f_1,f_2} é a tensão interfacial entre os fluidos. No trabalho de Figueiredo (2016)[7], a relação entre estas tensões é dada pela Eq. 3.2, que se trata de um balanço de forças descrito pela equação de Young.

$$\sigma_{s,f_2} = \sigma_{s,f_1} + \sigma_{f_1,f_2} \cos \theta_e \quad (3.2)$$

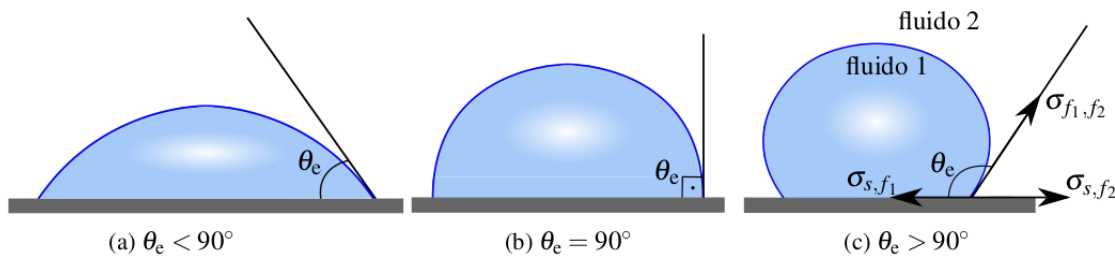


Figura 3.2: Ilustração do efeito do ângulo de contato. Retirado de Figueiredo (2016)[7].

No trabalho de Yuan (2013, *apud* Ribera, 2015)[24], a interface onde sólido, líquido e vapor coexistem é chamada de ponto de contato triplo. Bonn *et al.* (2009)[2] descreve os três estados de molhagem que podem existir em um sistema trifásico sólido-líquido-vapor. Sendo eles o

parcialmente molhado, completamente molhado e completamente seco, Fig. 3.3.

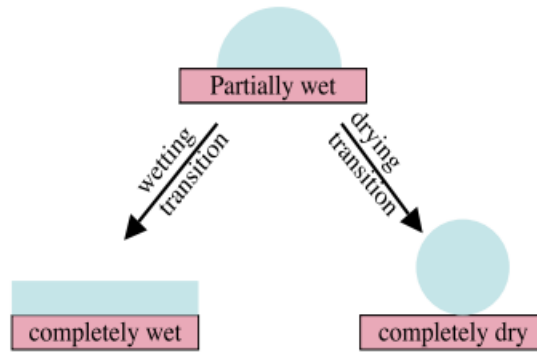


Figura 3.3: Ilustração dos três estados possíveis de molhamento de acordo com a equação de Young. Retirado de Bonn *et al.* (2009)[2].

3.5 HIPÓTESE DO CONTÍNUO

Segundo White (2018)[31], em um fluido, adota-se a hipótese do meio contínuo quando as dimensões físicas são muito maiores que o volume-limite. Disto, a massa específica é tratada como uma função pontual e podemos considerar que as propriedades do fluido podem ser variadas continuamente no espaço. O volume-limite é o qual os efeitos macroscópicos são maiores que os efeitos intermoleculares em um volume de controle. Dessa forma, a hipótese do contínuo garante a suavidade da variação das propriedades dos fluidos para que se possa utilizar o cálculo diferencial.

3.6 EQUAÇÕES DE BALANÇO

Estas equações podem ser obtidas através do balanço de qualquer tipo de informação. O balanço é composto por processos de armazenamento (acúmulo), transportes (advectivo, difusivo, ondulatório) e transformações de informações (Silveira-Neto, 2020[26]).

Na dinâmica dos fluidos, usando a formulação diferencial, a equação da continuidade, que representa balanço de massa sobre uma partícula infinitesimal de fluido, é dada pela Eq. 3.3.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (3.3)$$

De acordo com Silveira-Neto (2020)[26], o termo $\partial \rho / \partial t$ representa a taxa de variação específica da massa contida em uma partícula de fluido. E o termo $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V})$ representa o fluxo líquido advectivo específico de massa. Ambos os termos tendo como unidade de medida $(\text{kg/s})/\text{m}^3$.

A formulação diferencial do balanço da quantidade de movimento linear, com o modelo de fechamento de Stokes é dada pela Eq. 3.4.

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \left[\mu(\vec{\nabla} \vec{V} + (\vec{\nabla} \vec{V})^T) - \frac{2}{3} \mu(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \vec{I} \right] \quad (3.4)$$

O termo $\partial(\rho\vec{V})/\partial t$ representa a taxa de variação da quantidade de movimento linear específica, contida em uma partícula de fluido. O termo $\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V})$ representa o fluxo líquido advectivo específico de quantidade de movimento linear através da superfície de controle que envolve a partícula. O termo $\vec{\nabla}p$ representa o fluxo líquido difusivo específico de quantidade de movimento linear, através da superfície de controle, promovido pelo gradiente de pressão. O termo $\rho\vec{g}$ representa o processo de conversão de efeitos gravitacionais em quantidade de movimento linear. E o termo restante, representa o fluxo líquido difusivo específico de quantidade de movimento linear, através da superfície de controle, promovido por gradientes de velocidade. Os termos possuem unidade de medida $(\text{kg} \cdot \text{m/s})/\text{m}^3/\text{s}$, ou seja, N/m^3 .

Aplicando as hipóteses simplificadoras para escoamentos incompressíveis bifásicos isotérmicos, temos que a equação do balanço de massa é dada pela Eq. 3.5.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.5)$$

E, para a equação do balanço de quantidade de movimento linear temos a Eq. 3.6.

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \vec{\nabla} \cdot [\mu(\vec{\nabla}\vec{V} + \vec{\nabla}\vec{V}^T)] + \vec{f}(\vec{x}, t) \quad (3.6)$$

Em que $\vec{f}$ é, para este problema, o campo de força interfacial que aparece entre os fluidos imiscíveis. É utilizada uma função indicadora para especificação da massa específica e da viscosidade dinâmica para as fases contínua e dispersa. Esta função está definida $0 \leq I(\vec{x}, t) \leq 1$, em que $I = 0$ representa a fase contínua, $I = 1$ a fase dispersa e $0 < I(\vec{x}, t) < 1$ contém as duas fases. A massa específica e a viscosidade dinâmica estão em função do tempo, e pela Eq. 3.7 e pela Eq. 3.8 tem-se sua modelagem utilizando a função indicadora.

$$\rho(\vec{x}, t) = I(\vec{x}, t)\rho_d + (1 - I(\vec{x}, t))\rho_c \quad (3.7)$$

$$\mu(\vec{x}, t) = I(\vec{x}, t)\mu_d + (1 - I(\vec{x}, t))\mu_c \quad (3.8)$$

Onde o subíndice c representa a propriedade na fase contínua e o subíndice d representa a propriedade na fase dispersa.

3.7 ADIMENSIONAIS

Os números adimensionais são parâmetros que não possuem dimensão. Estes podem relacionar-se as característica de um escoamento, facilitando na análise e comparação entre resultados. Alguns adimensionais que são utilizados em escoamentos com tensão interfacial e fluidos newtonianos são o número de Reynolds, número de Capilaridade e o número de Weber.

O número de Reynolds (Re) relaciona os efeitos advectivos com os efeitos viscosos, ambos de quantidade de movimento linear definido na Eq. 3.9.

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu}. \quad (3.9)$$

O número de capilaridade (Ca) relaciona as forças viscosas com a tensão interfacial, definido na Eq. 3.10.

$$Ca = \frac{\mu U}{\sigma}. \quad (3.10)$$

O número de Weber (We) relaciona os efeitos advectivos com a tensão interfacial, definido na Eq. 3.11.

$$We = \frac{\rho LU^2}{\sigma}. \quad (3.11)$$

O parâmetro ρ é a massa específica, U a velocidade linear, L o comprimento característico, μ a viscosidade dinâmica e σ a tensão interfacial.

De acordo com Figueiredo (2016)[7], é recomendado utilizar Ca para $Re \ll 1$ e We para $Re \gg 1$. Pois para valores de $Re \ll 1$, os efeitos da capilaridade são mais evidentes no escoamento. Enquanto para $Re \gg 1$, os efeitos da capilaridade são desprezíveis.

Brady e Herrmann (2012)[4] mostram uma análise em um escoamento confinado de dois fluidos em uma geometria cilíndrica, com movimento rotativo da parede inferior do cilindro. Para essa análise defini-se neste trabalho os adimensionais Re , Fr (número de Froude, que relaciona os efeitos de inercia a um campo externo) e We na Eq. 3.12, Eq. 3.13 e Eq. 3.14, respectivamente.

$$Re = \frac{\rho_d R^2 \Omega}{\mu_d}, \quad (3.12)$$

$$Fr = \frac{\Omega^2 R^2}{gh_0}, \quad (3.13)$$

$$We = \frac{\rho_d R^3 \Omega^2}{\sigma}. \quad (3.14)$$

O parâmetro Ω é a velocidade angular da parede do cilindro, R é o raio do cilindro, g é o campo gravitacional e h_0 é a altura inicial do fluido no cilindro sem nenhuma rotação.

3.8 MÉTODO DE VOLUMES FINITOS

De acordo com Maliska(2004)[14], todo método que satisfaz o balanço da propriedade em nível de volumes elementares, para a obtenção de equações aproximadas, é um método de volumes finitos. Neste método as equações aproximadas podem ser obtidas de duas maneiras. Através de balanço em um volume de controle ou pela integração sobre o volume de controle elementar, na forma divergente.

Os termos da equação de balanço na forma divergente são integrados no tempo e no espaço. A integração temporal pode ser realizada na formulação explícita, semi-implícita, ou implícita.

Na formulação explícita, as informações são avaliadas no instante anterior. Na formulação implícita as informações são avaliadas no instante atual. E na formulação semi-implícita as informações são avaliadas usando as duas formulações anteriores combinadas.

Por exemplo, considere em um domínio unidimensional, a integração da equação de balanço de uma informação ϕ , sobre o volume de controle P, dada pela equação Eq. 3.15, resultando na Eq. 3.16.

$$\int_{\forall,t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) d\forall dt + \int_{\forall,t} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) d\forall dt = \int_{\forall,t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) d\forall dt + \int_{\forall,t} S^\phi d\forall dt \quad (3.15)$$

Em que, Γ^ϕ é uma função que modela o termo difusivo da informação ϕ , e S^ϕ é um termo fonte.

$$\frac{\Delta x_P \phi_P - \Delta x_P^0 \phi_P^0}{\Delta t} + \rho u|_e \phi_e^\theta - \rho u|_w \phi_w^\theta = \Gamma^\phi|_e \frac{\partial \phi}{\partial x}|_e^\theta - \Gamma^\phi|_w \frac{\partial \phi}{\partial x}|_w^\theta + L[S^\phi]^\theta \quad (3.16)$$

Em que o sobre índice 0 indica o tempo precedente, variáveis sem sobre índice indicam o tempo atual e o sobre índice θ indica uma interpolação linear para o termo.

Na Eq. 3.17 tem-se uma função interpolação no tempo para a informação ϕ . Para $\theta = 0$ temos a formulação explícita, para $\theta = 1$ temos a formulação implícita e para $0 < \theta < 1$ tem-se a formulação semi-implícita.

$$\phi^\theta = \theta \phi + (1 - \theta) \phi^0 \quad (3.17)$$

3.9 DISCRETIZAÇÃO DOS TERMOS ADVECTIVOS

Os termos advectivos da Eq. 3.15 são termos não lineares. Daí surge a necessidade da escolha de um método de discretização e funções de interpolação para esses termos. Exemplos mais simples de esquemas desse tipo são os de diferenças centrais e *upwind*. Para diferenças centradas, a interpolação é dada pela Eq. 3.18.

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2}; \phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \quad (3.18)$$

E para *upwind*, a interpolação é dada pela Eq. 3.19.

$$\begin{aligned} \phi_w &= \phi_W; \phi_e = \phi_P, u > 0 \\ \phi_w &= \phi_P; \phi_e = \phi_E, u < 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Outro exemplo é o modelo advectivo *weno* (Jiang e Shu, 1996[10]), de quinta ordem. Aplicações recentes do método *weno* utilizando *machine learning* para dinâmica dos fluidos computacional é encontrada no trabalho de Nogueira *et al.* (2024)[17].

3.10 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

De acordo com Cetel:Libs [5], "discretização temporal corresponde ao grau de refinamento (intervalos de tempo) para os quais estarão associadas as decisões a serem determinadas com os modelos. A partir da discretização temporal é que são definidos os períodos de tempo do estudo". Ou seja, de como será definida as equações discretizadas a serem resolvidas a cada passo de tempo.

Um exemplo de discretização temporal é o método SBDF (*Semi Backward Difference Formula*), no qual a discretização é semi-implícita. O termo difusivo é discretizado de forma implícita e o termo advectivo na forma explícita. A escolha deste método se deve a menor quantidade de iterações por passo de tempo que outros métodos semi-implícitos quando utilizado em conjunto com os métodos multigrid e espectral, descrito no trabalho de Villar (2007)[30].

Definida, a escolha do método de discretização temporal, o passo de tempo pode ser constante ou dinâmico. No passo de tempo contante, a cada iteração, o espaçamento temporal é o mesmo. Para o passo de tempo dinâmico, são utilizados critérios de estabilidade e convergência na resolução do sistema linear, na qual é escolhido o valor máximo de passo de tempo para que todos os critérios sejam satisfeitos.

3.11 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Condições de contorno são condições impostas na fronteira para que se obtenha uma solução particular na resolução do sistema de equações diferenciais parciais. De acordo com Fortuna (2000)[18], em problemas que envolvam equações diferenciais parciais (EDP), podemos especificar três tipos básicos de condições sobre a variável dependente ϕ na fronteira da região R . São elas:

- Condição de contorno de Dirichlet (ou de primeira espécie): o valor de ϕ é especificado em ∂R .
- Condição de contorno de Neumann (ou de segunda espécie): o gradiente normal $\partial\phi/\partial n = f$ ou tangencial $\partial\phi/\partial s = g$ é especificado na fronteira. Quando $f = 0$, diz-se que a condição utilizada é uma condição de contorno natural ou homogênea.
- Condição de contorno de Robin (ou de terceira espécie): uma combinação linear das duas condições de contorno anteriores, especificada em ∂R .

Diz-se que um problema tem condições de contorno mista quando este problema possui uma mistura desses três tipos de condição de contorno.

Na Figura 3.4 tem-se a representação de um volume de um elemento tridimensional. Esta mesma notação será usada para as condições de contorno. Ou seja, N(*north*) e S(*south*) para o eixo y, E(*east*) e W(*west*) para o eixo x, F(*front*) e B(*back*) para o eixo z.

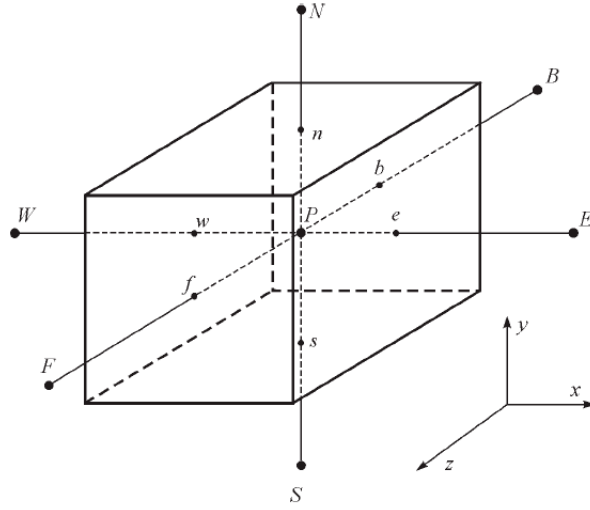


Figura 3.4: Volume elementar 3D e seus vizinhos. Retirado de Maliska(2004)[14].

3.12 ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE

Para escoamentos incompressíveis, tem-se que as equações de balanço nos fornecem equações as quais suas incógnitas são as componentes da velocidade u , v , w e a pressão p , no caso deste trabalho. Os balanços da quantidade movimento linear fornecem as equações para as componentes do velocidade. Também tem-se uma equação para o balanço de massa, mas esta não possui a variável p . Portanto, surge o problema de não ter-se uma equação em que a pressão seja dependente do tempo. Daí surge os métodos de acoplamento de pressão-velocidade para resolver este problema. Um dos métodos existentes é o método dos passos fracionados.

O método dos passos fracionados é desenvolvido da seguinte maneira: seja a Eq. 3.20 o balanço de massa e a Eq. 3.21 o balanço de quantidade de movimento linear com as devidas simplificações.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V}\vec{V}) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\vec{\nabla}^2\vec{V} \quad (3.21)$$

Discretizando a Eq. 3.21, onde o índice $*$ indica uma estimativa inicial, n o passo de tempo atual, $n - 1$ o passo de tempo precedente, TNL indica a discretização do termo não linear, e ν a viscosidade cinemática.

$$\frac{\vec{V}^{*n} - \vec{V}^{n-1}}{\Delta t} + TNL^{n-1} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p^{n-1} + \nu\vec{\nabla}^2\vec{V}^{n-1} \quad (3.22)$$

O campo de velocidade no tempo n ($\vec{V}^n$) depende diretamente do campo de pressão também no tempo n (p^n). Contudo não há equação para obtenção direta desse campo de pressão. Assim, faz-se uma estimativa para o campo de velocidade (V^*) utilizando o campo de pressão no tempo $n - 1$ (p^{n-1}).

Na Eq. 3.23 tem-se a discretização da Eq. 3.21 sem a utilização de uma estimativa inicial para a velocidade.

$$\frac{\vec{V}^n - \vec{V}^{n-1}}{\Delta t} + T\vec{N}L^{n-1} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p^n + \nu\nabla^2\vec{V}^{n-1} \quad (3.23)$$

Subtraindo a Eq. 3.23 pela E. 3.22, tem-se

$$\vec{V}^n - \vec{V}^{*n} = -\frac{\Delta t}{\rho}\vec{\nabla}p'. \quad (3.24)$$

Onde $p' = p^n - p^{n-1}$.

Aplicando o operador divergente na Eq. 3.24, e pela Eq. 3.20, tem-se

$$\nabla^2 p' = \frac{\rho}{\Delta t}\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^{*n}. \quad (3.25)$$

Portanto, da Eq. 3.25 obtemos uma equação para a pressão. O processo iterativo é repetido até que se atinja um critério de parada pré-estabelecido.

3.13 MÉTODO DE VOLUME DE FLUIDOS

O método de volumes de fluidos (*Volume of Fluid* - VoF) foi introduzido por Hirt e Nichols(1981)[9]. Este método é usado para realizar aproximações de interfaces entre regiões de fluidos em simulações computacionais. Figueiredo(2016)[7] descreve como um método de fácil representação, pois para cada passo de tempo, a quantidade de fluido em cada célula é a única informação necessária. Considere para cada célula da malha computacional uma função $f \in [0, 1]$, chamada de fração de volume, que terá valor 0 para um fluido, e 1 para outro fluido. Para valores entre 0 e 1 a célula contém ambos os fluidos. Daí, a interface entre os fluidos é atualizada resolvendo uma equação de advecção para f . Na Figura 3.5 tem-se a ilustração de um exemplo de fração de volume.

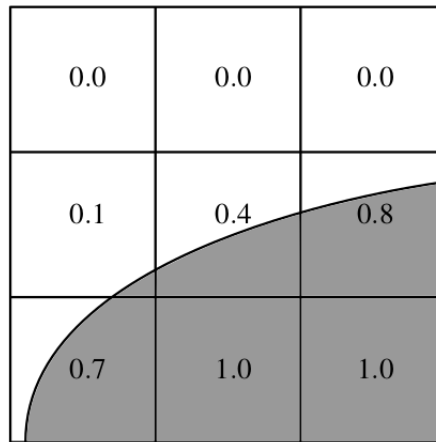


Figura 3.5: Ilustração da fração de volume. Retirado de Figueiredo (2016)[7].

Na modelagem utilizando VoF, busca-se estimar com precisão a curvatura da interface entre os fluidos, para que seja contabilizado corretamente os efeitos capilares e evitar a geração de

correntes espúrias (Evrard *et al.*, 2020[6]). Um dos vários tipos de métodos para o cálculo da curvatura é o método *height function* (HF), que estima a curvatura por meio da altura da interface. Na Figura 3.6 tem-se uma exemplificação da utilização desse método para a estimativa da curvatura. Mais detalhes e implementação deste método se encontra no trabalho de Evrard *et al.*, 2020[6]).

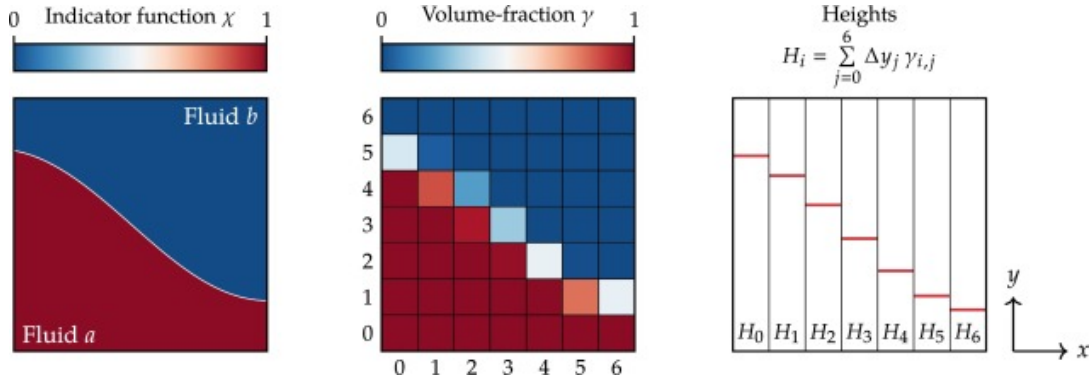


Figura 3.6: Ilustração da curvatura da interface, através de uma função indicadora, fração de volume e do método *height function*. Retirado de Evrard *et al.*(2020)[6].

Outro fator importante para a utilização do método de volumes de fluidos são os modelos de tensão interfacial. São exemplos os modelos CSF (*Continuum Surface Force*), proposto por Brackbill *et al.*(1992)[3], e *Smoothed CSF*, proposto por Ubbink (1997)[27], e SSF (*Sharp Surface Force*), proposto por Raeini *et al.*(2012)[23]. Vachaparambil e Einarsrud (2019)[28] realizam a análise e a validação desses métodos no software OpenFOAM, para uma bolha em ascensão, e também expõem a visão de cálculo de curvatura e tensão interfacial de outros métodos desenvolvidos para VoF.

3.14 MÉTODO DA FRONTEIRA IMERSA

O método da fronteira imersa (*Immersed Boundary* - IB) modela o efeito de certas condições de contorno, causadas pelas forças normais e tangenciais à superfície através da aplicação de uma força externa (Petri, 2010 [20]). Ou seja, é possível simular um escoamento com fronteira imersa impondo forças que caracterizam esta fronteira. Essas forças podem ser modeladas através de um termo fonte adicionado às equações de quantidade de movimento linear.

De acordo com Barbi (2012)[1], a principal característica deste método é a existência de duas malhas independentes que interagem entre si. A solução do escoamento é realizada na malha Euleriana, enquanto a malha Lagrangeana é responsável pela representação do corpo imerso no escoamento. Na Figura 3.7 tem-se um exemplo apresentado por Barbi, em que a casca esférica é descrita por uma malha Lagrangeana e o escoamento por uma malha Euleriana.

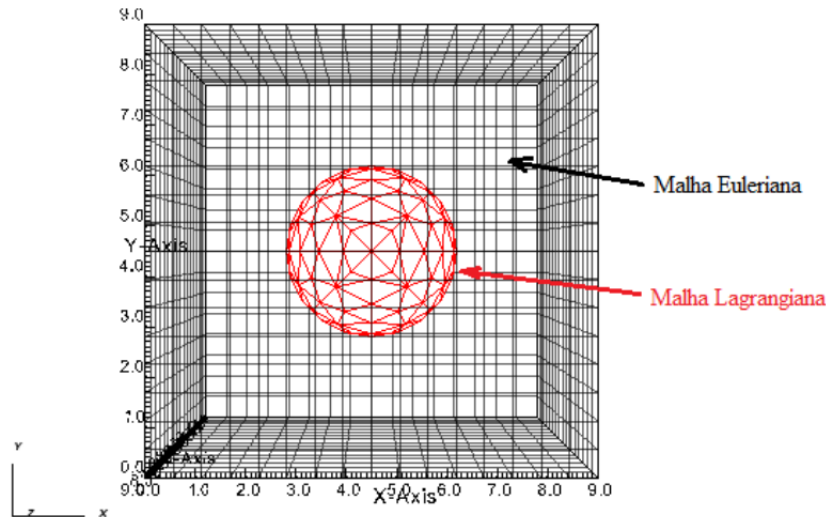


Figura 3.7: Exemplo de malhas independentes utilizadas no método da fronteira imersa. Retirado de Barbi (2012) [1].

3.15 REFINAMENTO ADAPTATIVO LOCAL DE MALHA

O refinamento adaptativo local de malha é utilizado em escoamentos cuja região de interesse é pequena em comparação com o domínio computacional. Daí, este método se torna eficaz na captura de fenômenos físicos locais, ou a obtenção de maior precisão em regiões com alta curvatura ou ângulos estreitos (Villar, 2007[30]). Desse modo tem-se a redução do custo computacional, comparado a simulações em que todo o domínio é refinado. As malhas adaptativas refinadas localmente são dadas pela união de blocos de malhas retangulares orientadas com espaçamento sequencial menores. E algumas propriedades precisam ser satisfeitas entre os diferentes níveis de malha. Sendo elas:

- Os cantos de uma malha mais fina coincidem com os cantos das células pertencentes a um nível imediatamente abaixo;
- Malhas mais finas devem estar no interior da união das malhas do nível abaixo, exceto quando tocam as bordas do nível físico.

Na Figura 3.8, tem-se um exemplo de malha com refinamento adaptativo local cuja malha esta agrupada corretamente de acordo com os itens anteriormente citados.

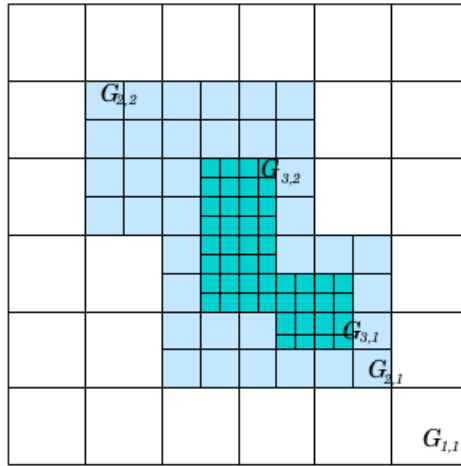


Figura 3.8: Exemplo de malha composta corretamente agrupada com três níveis de refinamento. Retirado de Villar(2007)[30].

3.16 MÉTODO MULTIGRID-MULTINÍVEL

O método Multigrid tem como premissa a suavização das faixas de frequência de erro de acordo com o espaçamento mais adequado (Villar, 2007[30]). Este método trabalha com uma sequência de malhas, para que comprimentos de onda longos em malhas finas sejam suavizados em malhas grossas (McCormick, 1987[15]). Na Figura 3.9 tem a ilustração de um exemplo de sequência de malhas onde as componentes do erro são reduzidas pelo Método Multigrid, onde os níveis $l-1$ e $l-2$ indicam os níveis de malha mais grossa.

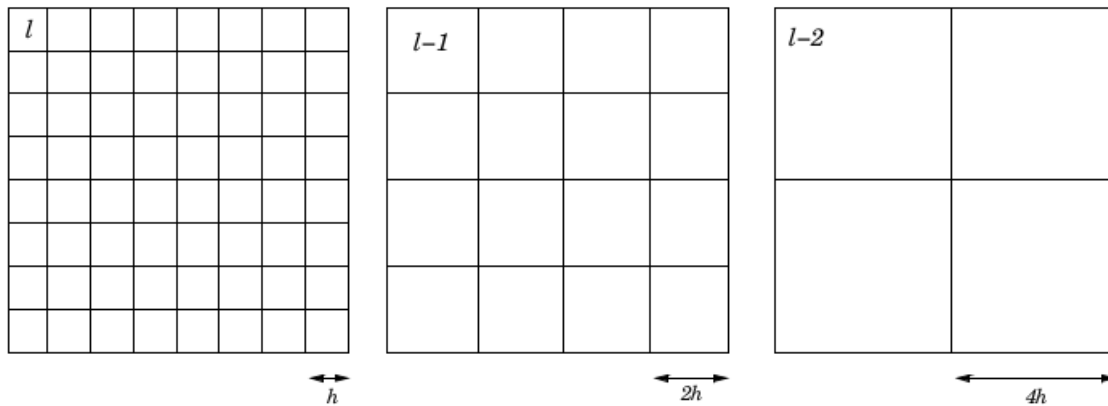


Figura 3.9: Exemplo de sequência de malhas onde as componentes do erro são reduzidas pelo Método Multigrid. Retirado de Villar(2007)[30].

O método multigrid-multinível é aplicado em malhas refinadas localmente. Daí termos níveis de malhas virtuais, devido ao método multigrid, e níveis de malha físicos devido ao refinamento localizado de malha (Villar, 2007[30]). Na Figura 3.10 tem-se a representação esquemática para um exemplo com 3 níveis físicos e 2 níveis virtuais.

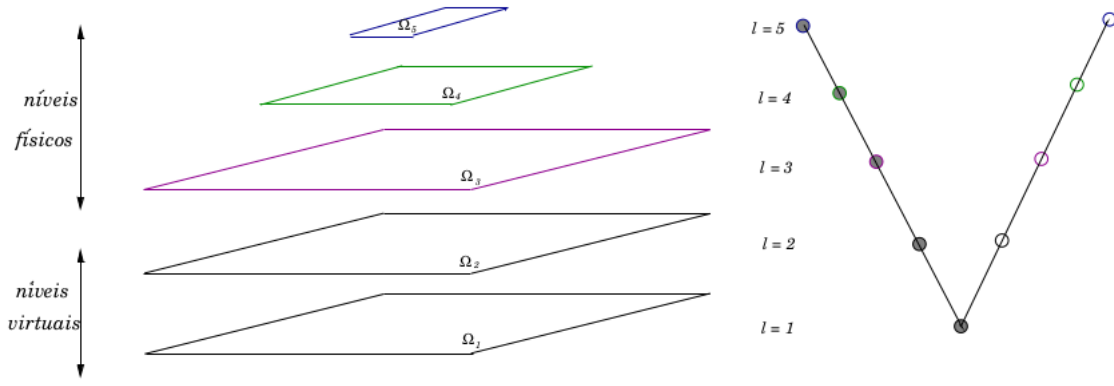


Figura 3.10: Representação esquemática dos níveis físicos e virtuais para uma malha refinada localmente. Retirado de Villar(2007)[30].

3.17 CONDIÇÃO DE COURANT-FRIEDRICHS-LEWY (CFL)

A condição de convergência de Courant-Friedrichs-Lewy é uma condição necessária para a convergência numérica de um sistema de equações algébricas, em que os seus termos serão integrados de forma explícita, ou semi-implícita. Daí, por uma análise numérica, determina-se um limite superior para o passo de tempo para que a resolução do sistema linear, em cada passo de tempo, não sejam instáveis. A condição CFL permite a estabilidade do processo de resolução do sistema de equações.

Por exemplo, para o caso de transferência de energia térmica em uma barra unidimensional, que pode ser modelado com a Eq.3.26.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.26)$$

O termo T é a temperatura, t é o tempo, x é a posição e α é o coeficiente de difusão térmica do material. Neste caso a condição CFL é dada pela Eq. 3.27.

$$C = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq C_{max} \quad (3.27)$$

O termo C é chamado de Número de Courant e o termo C_{max} é influenciado pelo método de discretização utilizado (Wikipedia: Condição Courant-Friedrichs-Lewy, 2024[33]).

3.18 MALHAS ESTRUTURADAS E NÃO ESTRUTURADAS

Maliska (2004)[14], utilizando uma definição que considera apenas os aspectos geométricos da malha, diz que malha estruturada é aquela em que os volumes da malha, em um sistema de coordenadas globais, possuem uma determinada lei de construção, em que os elementos são numerados de forma ordenada. Caso contrário, é dita não estruturada. Na Figura 3.11 tem a exemplificação de uma malha estruturada e de uma malha não estruturada. Ressalta-se que a malha estruturada é um caso particular da malha não estruturada.

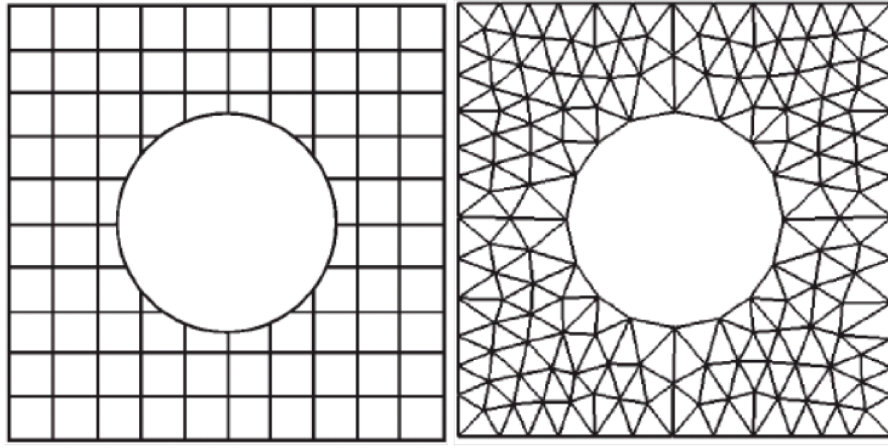


Figura 3.11: Exemplo de malha estrutura à esquerda, e malha não estruturada à direita. Retirado de Maliska(2004)[14].

3.19 CÉLULAS FANTASMAS

Células fantasmas são células adicionadas nas bordas da malha. Elas permitem armazenar os valores para a condição de contorno de tal maneira que evite a redefinição dos operadores diferenciais nas bordas das malhas. Estas podem ser fornecidas para as células fantasmas por meio de interpolações, injeção ou substituição dos valores que tocam o domínio pelos valores reais das condições de contorno (Villar, 2007[30]).

Na Figura 3.12 tem-se um exemplo de utilização de células fantasmas em um domínio computacional unidimensional. Neste exemplo é conhecido as condições de contorno na fronteira, e os valores das variáveis nas células fantasmas são obtidos por meio de interpolações.

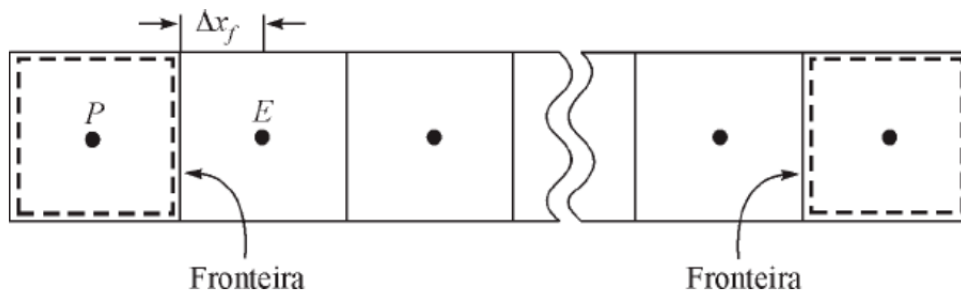


Figura 3.12: Ilustração de células fantasmas para um domínio unidimensional. Retirado de Maliska(2004)[14].

4. METODOLOGIA

Neste capítulo são descritos os modelos físico, matemático em coordenadas cilíndricas e o computacional utilizado para os softwares MFSim e Ansys.

4.1 MODELO FÍSICO

Çengel(2007)[34] descreve o modelo físico para o fenômeno físico de interesse considerando um contêiner cilíndrico vertical parcialmente preenchido com um líquido. Este cilindro possui velocidade angular constante em relação ao seu eixo. Disso, conclui-se que em regime permanente o líquido se movimentará tendo o comportamento de corpo rígido, juntamente com o cilindro. Daí, o fluido dentro do contêiner se moverá com a mesma velocidade angular. Neste modelo é assumida a hipótese de "superfície livre", desta maneira é considerada para as equações de balanço somente a fase dispersa.

Na Figura 4.1 tem-se a ilustração do modelo físico. As hipóteses assumidas são de fluidos newtonianos, escoamento incompressível, escoamento laminar e regime permanente. O parâmetro h_0 é a altura inicial do fluido no contêiner sem nenhuma rotação, h_c é a altura da interface no seu ponto de mínimo, Ω é a velocidade angular do contêiner, R é o raio do contêiner, $\vec{g}$ é o campo gravitacional, μ_c, ρ_c e μ_d, ρ_d são as viscosidades dinâmicas e massas específicas das fases contínuas e dispersas, respectivamente, e z_s é a interface bifásica.

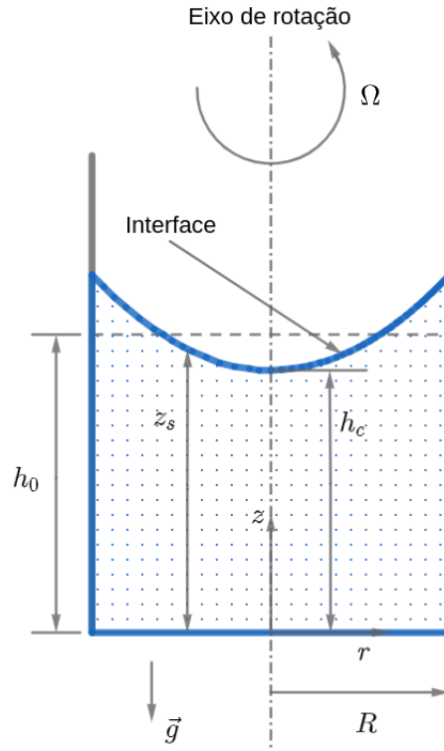


Figura 4.1: Ilustração do modelo físico. Adaptado de Çengel(2007)[34]

4.2 MODELO MATEMÁTICO EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

A solução analítica é desenvolvida em Çengel(2007)[34]. Neste trabalho desenvolve-se a solução a partir da equação de balanço de quantidade de movimento linear, em coordenadas cilíndricas, aplicando posteriormente as cabíveis hipóteses simplificadoras.

4.2.1 MODELO MATEMÁTICO DIFERENCIAL

Pela Eq.4.1, tem-se a equação de quantidade de movimento linear em r .

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \quad (4.1)$$

Aplicando as hipóteses simplificadoras, tem-se a Eq.4.2.

$$\begin{aligned} -\frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \Rightarrow \frac{(\Omega r)^2}{r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho r \Omega^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pela Eq.4.3, tem-se a equação da quantidade de movimento linear em θ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} &= g_\theta - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ &\nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Aplicando as hipóteses simplificadoras, tem-se a Eq.4.4.

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} \right) \right] \\ \Rightarrow \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\Omega r)}{\partial r} \right) \right] = \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} 2\Omega r \right) \right] = \nu \left[\frac{\partial 2\Omega}{\partial r} \right] \\ &\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Pela Eq.4.5, tem-se a equação de quantidade de movimento linear em z .

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ &\nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aplicando as hipóteses simplificadoras, tem-se a Eq.4.6.

$$\begin{aligned} 0 &= g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho g_z \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g \end{aligned} \quad (4.6)$$

Daí, pelas Eq. 4.2, 4.4, 4.6, temos que o diferencial total de p ,

$$\begin{aligned} dp &= \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) d\theta + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) dz \\ \Rightarrow dp &= \rho r \Omega^2 dr - \rho g dz \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para $dp = 0$ e substituindo z por $z_{isobarica}$, temos a equação para superfícies a pressão

constante. Logo,

$$\begin{aligned}
 0 &= \rho r \Omega^2 dr - \rho g dz_{isobarica} \\
 \Rightarrow r \Omega^2 dr &= g dz_{isobarica} \\
 \Rightarrow \frac{dz_{isobarica}}{dr} &= \frac{r \Omega^2}{g}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.2.2 MODELO MATEMÁTICO ANALÍTICO

Integrando a Eq.4.8.

$$z_{isobarica} = \frac{\Omega^2}{2g} r^2 + C_1 \tag{4.9}$$

Para $r = 0$, na interface, temos

$$\begin{aligned}
 z_{isobarica} &= h_c = C_1 \\
 \Rightarrow z_{isobarica} &= \frac{\Omega^2}{2g} r^2 + h_c
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Assume-se a hipótese de que há líquido suficiente no contêiner para que toda a superfície inferior permaneça coberta com líquido. Logo,

$$z_s = \frac{\Omega^2}{2g} r^2 + h_c \tag{4.11}$$

O volume de um elemento de casca cilíndrico ($\forall$) de raio r , altura z_s , e espessura dr é $d\forall = 2\pi r z_s dr$. Assim, o volume do parabolóide formado pela superfície livre é:

$$\begin{aligned}
 \forall &= \int_{r=0}^R 2\pi z_s r dr = 2\pi \int_{r=0}^R \left(\frac{\Omega^2}{2g} r^2 + h_c \right) r dr \\
 &= 2\pi \int_{r=0}^R \frac{\Omega^2}{2g} r^3 + h_c r dr = 2\pi \left(\frac{\Omega^2}{2g} \frac{r^4}{4} + h_c \frac{r^2}{2} \right)_{r=0}^R \\
 &\Rightarrow \forall = \pi R^2 \left(\frac{\Omega^2 R^2}{4g} + h_c \right)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Pelas hipóteses de $\rho = cte$ e pela conservação da massa,

$$\forall = \pi R^2 h_0 \tag{4.13}$$

Igualando Eq.4.12 e Eq.4.13 tem-se,

$$\begin{aligned}
 \pi R^2 h_0 &= \pi R^2 \left(\frac{\Omega^2 R^2}{4g} + h_c \right) \\
 \Rightarrow h_c &= h_0 - \frac{\Omega^2 R^2}{4g}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Logo, a equação da interface é dada pela Eq. 4.15.

$$\begin{aligned} z_s &= \frac{\Omega^2}{2g}r^2 + h_c = \frac{\Omega^2}{2g}r^2 + h_0 - \frac{\Omega^2 R^2}{4g} \\ \Rightarrow z_s &= h_0 - \frac{\Omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2) \end{aligned} \quad (4.15)$$

A diferença máxima de altura é calculada pela Eq.4.16

$$\begin{aligned} \Delta z_{s,max} &= z_s(R) - z_s(0) \\ &= \left[h_0 - \frac{\Omega^2}{4g}(R^2 - 2R^2) \right] - \left[h_0 - \frac{\Omega^2}{4g}(R^2 - 0) \right] \\ \Rightarrow \Delta z_{s,max} &= \frac{2\Omega^2 R^2}{4g} = \frac{\Omega^2 R^2}{2g} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Quando $\rho = cte$, a diferença de pressão entre dois pontos 1 e 2 do fluido é determinada pela integração da Eq.4.7, resultando em

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho\Omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) - \rho g(z_2 - z_1) \quad (4.17)$$

Tomando o ponto 1 como a origem ($r = 0, z = 0$), onde a pressão é p_0 e o ponto 2 como qualquer ponto do fluido (sem subscrito), a distribuição da pressão pode ser expressa como:

$$p = p_0 + \frac{\rho\Omega^2}{2}r^2 - \rho g z \quad (4.18)$$

4.3 MODELO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL

Para as simulações numérico-computacionais foram utilizados dois softwares, o MFSim desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) - Universidade Federal de Uberlândia, e o software Ansys Fluent. No MFSim foi trabalhado em malha estruturada, em que cada célula do domínio possui-se a forma de um cubo. A malha da fronteira imersa foi gerada no software Gmsh, com elementos triangulares. No Ansys fluent é trabalhado com malha não estruturada.

4.3.1 MFSIM

Neste modelo computacional foi utilizado o software MFSim, com simulação em regime transiente. Nas tabelas a seguir estão os dados de entrada que serão utilizados na simulação computacional. As informações foram divididas em tabelas seguindo a estrutura de entrada estruturada pelo software.

Na Tabela 4.1 tem-se os parâmetros utilizados para o controle da malha.

Tabela 4.1: Parâmetros de controle de malha.

Domínio (m)	[0; 0,03] X [0; 0,06] X [0; 0,03]
Razão de refinamento	2 X 2 X 2
Número de células fantasmas	1
Número de níveis físicos	5
Número de células no nível lbot	16 X 32 X 16
Cutoff	0,99
Remalhagem inicial	Sim
Remalhagem dinâmica	Sim
Numero de iterações para a remalhagem	100
Tipo de remalhagem	Standard Interp+Project
Critério de remalhagem	VoF + IB
Coornadadas iniciais para a remalhagem	[0,003; 0,027] X [0,01; 0,041] X [0,003; 0,027]

Na Tabela 4.2 tem-se os modelos utilizados para a discretização e acoplamento da pressão e velocidade.

Tabela 4.2: Acoplamento pressão-velocidade e métodos de discretização.

Tipo de acoplamento pressão-velocidade	Passo fracionado
Modelo de discretização temporal	Semi-implicito
Discretização temporal	SBDF
Formulação	Divergente
Modelo advectivo	weno
Discretização do fluxo da equação da quantidade de movimento linear	malalasekera
Courant–Friedrichs–Lewy condition (CFL)	0,2
Passo de tempo	Dinâmico

Na Tabela 4.3 tem-se os parâmetros de controle do multigrid. Mais detalhes sobre os parâmetros utilizados são encontrados na dissertação de Villar (2007)[30].

Tabela 4.3: Parâmetros de controle do multigrid.

Numero máximo de v-cycles ou w-cycles	50
smoothers pressure	sip
over relaxation parameter at pressure multigrid	1
over relaxation parameter at velocity multigrid	1,3
solver pressure	v cycle
solver velocity	SIP
number of smoothness in the 2x2x2 level (relax base)	5 5 5

Na Tabela 4.4 tem-se os parâmetros de controle para as fases contínua e dispersa.

Tabela 4.4: Parâmetros de controle para as duas fases.

Massa específica para a fase contínua (kg/m ³)	10
Massa específica para a fase dispersa (kg/m ³)	1000
Viscosidade dinâmica para a fase contínua (Pa · s)	0,001
Viscosidade dinâmica para a fase dispersa (Pa · s)	0,1
Tensão interfacial (N/m)	0,01
Campo gravitacional em Y (m/s ²)	-9,81

Na Tabela 4.5 tem-se os parâmetros de controle referente ao número de iterações para salvar as variáveis, formato de arquivo e tempo final.

Tabela 4.5: Parâmetros de controle da simulação.

Número de iterações para salvar arquivos da iteração	1000
Número máximo de iterações	100000
Tempo final de simulação (s)	0,5
Formato do arquivo salvo	hdf5

Na Tabela 4.6 tem-se as condições de contorno para as componentes da velocidade. Na Tabela 4.7 tem-se as condições de contorno da pressão e na Tabela 4.8 tem-se as condições de contorno para a densidade. Tem-se que as condições de contorno são definidas por uma função dada pela Eq. 4.19.

$$\alpha \cdot U + \beta \cdot dU/dn + \gamma \cdot dU/dt = G \quad (4.19)$$

Onde U representa a variável em que esta sendo aplicada a condição de contorno, e G o valor dessa função. Daí, tem-se que $\alpha = 1$ representa a condição de primeira espécie, $\beta = 1$ representa a condição de segunda espécie e $\gamma = 1$ representa a variação temporal da informação. Caso a função G não seja definida, assume-se valor zero.

Tabela 4.6: Condições de contorno para as componente u, v e w da velocidade.

Condição de contorno da face oeste (WEST) (α, β, γ)	0, 1, 0
Condição de contorno da face leste (EAST) (α, β, γ)	0, 1, 0
Condição de contorno da face sul (SOUTH) (α, β, γ)	0, 0, 1
Condição de contorno da face norte (NORTH) (α, β, γ)	0, 0, 1
Condição de contorno da face posterior (BACK) (α, β, γ)	0, 1, 0
Condição de contorno da face frontal (FRONT) (α, β, γ)	0, 1, 0

Tabela 4.7: Condições de contorno para a pressão.

Condição de contorno da face oeste (WEST) (α, β, γ)	1, 0, 0
Condição de contorno da face leste (EAST) (α, β, γ)	1, 0, 0
Condição de contorno da face sul (SOUTH) (α, β, γ)	1, 0, 0
Condição de contorno da face norte (NORTH) (α, β, γ)	1, 0, 0
Condição de contorno da face posterior (BACK) (α, β, γ)	1, 0, 0
Condição de contorno da face frontal (FRONT) (α, β, γ)	1, 0, 0

Tabela 4.8: Condição de contorno para a densidade.

Condição de contorno da face oeste (WEST) (α, β, γ)	0, 1, 0
Condição de contorno da face leste (EAST) (α, β, γ)	0, 1, 0
Condição de contorno da face sul (SOUTH) (α, β, γ)	0, 1, 0
Condição de contorno da face norte (NORTH) (α, β, γ)	0, 1, 0
Condição de contorno da face posterior (BACK) (α, β, γ)	0, 1, 0
Condição de contorno da face frontal (FRONT) (α, β, γ)	0, 1, 0

Na Tabela 4.9 tem-se a divisão do número de processadores para cada eixo coordenado. Utilizou-se em conjunto os métodos de fronteira imersa e de volume de fluidos.

Tabela 4.9: Topologia de partição inicial.

Eixo	numero de processadores
x	2
y	2
z	1

FRONTEIRA IMERSA

Na Tabela 4.10 tem-se os parâmetros utilizados para a fronteira imersa e na Tabela 4.11 informações sobre a função indicadora. O ponto triplo na fronteira imersa não foi modelado.

Tabela 4.11: Função indicadora da fronteira imersa (IB).

Função indicadora da Fronteira imersa	Sim
Opção de indicador	Distância com sinal
Escoamento externo a fronteira imersa	Não

A malha da fronteira imersa foi gerada no software Gmsh, com elementos triangulares, com vetores normais na direção externa da superfície. Os tamanhos dos elementos triangulares são

Tabela 4.10: Parâmetros da fronteira imersa.

Número máximo de ciclos no esquema de forçamento direto	5
ϵ de força de direção - para corpo rígido	0,001
Tipo de arquivo	stl ascii file
Número de fronteiras imersas	1
Movimentação da fronteira imersa	Sim
Velocidade linear (X,Y,Z) (m/s)	0 0 0
Velocidade angular (X,Y,Z) (rad/s)	0 50 0
Posição de referência para rotação (X,Y,Z)	0,015 0,01 0,015
Nível da fronteira imersa	5
Tipo de função de distribuição/interpolação	Gauss
Estratégia para a construção do volume lagrangeano	$L^2 * \sqrt{3}/4 * L = dx^3$

próximos ao tamanho das células do domínio físico. A fronteira imersa está centrada no ponto 0,015 no eixo X, 0,01 no eixo Y e 0,015 no eixo Z. Com altura de 0,05 no eixo Y. Esta malha possui 168.038 nós e 335.587 elementos.

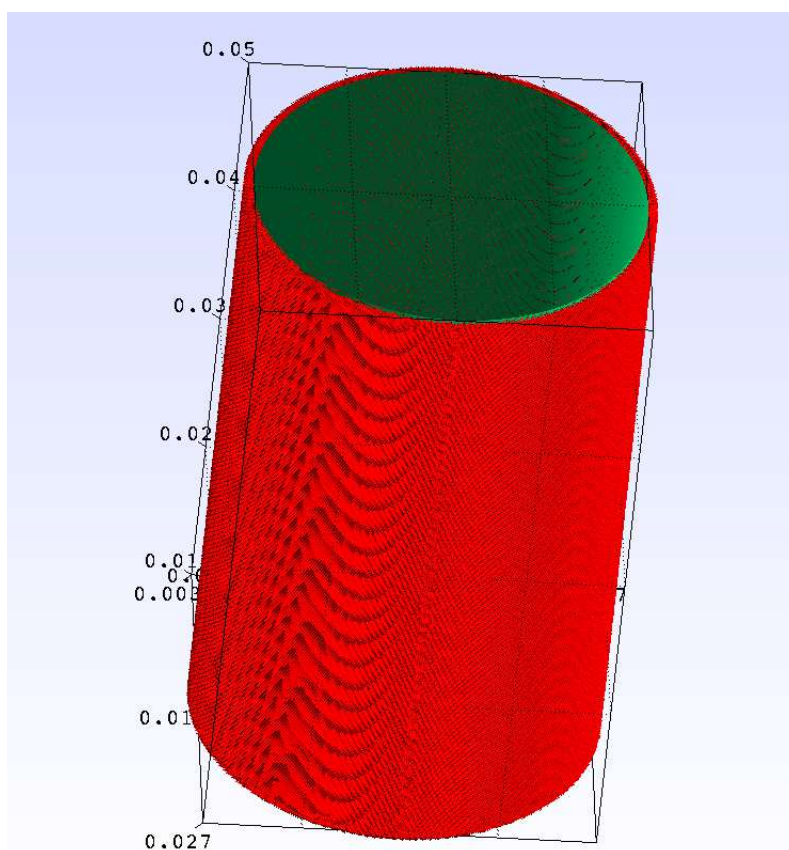


Figura 4.2: Malha gerada no software Gmsh.

VOLUME DE FLUIDO - VoF

Na Tabela 4.12 tem-se as condições de contorno utilizadas no método de volumes de fluidos e na Tabela 4.13, os parâmetros de controle.

Tabela 4.12: Condições de contorno VoF.

Condição de contorno da face oeste (WEST) (α, β, γ)	0, 1, 0
Condição de contorno da face leste (EAST) (α, β, γ)	0, 1, 0
Condição de contorno da face sul (SOUTH) (α, β, γ)	0, 1, 0
Condição de contorno da face norte (NORTH) (α, β, γ)	0, 1, 0
Condição de contorno da face posterior (BACK) (α, β, γ)	0, 1, 0
Condição de contorno da face frontal (FRONT) (α, β, γ)	0, 1, 0

Tabela 4.13: Parâmetros de controle VoF.

Modelo de tensão interfacial VoF	CSF
Modelo de curvatura	Height function + Shirani
Número de corpos para inicialização	1
x_c	0,015
z_c	0,015
raio	0,012
Modelo de inicialização VoF	Sussman

Na Figura 4.3 tem-se a parte do código, escrito em Fortran, da definição da fase dispersa no instante inicial. A fase dispersa esta definida entre as coordenadas 0,01 e 0,034 do eixo Y. E limitada por uma circunferência de raio 0,012 m centrada em 0,015 m nos eixos X e Y. Ou seja, a fase dispersa tem a geometria de um cilindro de diâmetro e altura de 0,024 m.

```

if(y <=0.034d0 .and. y>= 0.010d0)then
  vof_selectdist=sqrt((x-xc)**2 + (z-zc)**2 ) - raio
elseif(y<0.010d0)then
  vof_selectdist = 0.01d0-y
elseif(y>=0.034d0)then
  vof_selectdist = y-0.034d0
endif

```

Figura 4.3: Código para a VoF.

Na Figura 4.4 tem-se a visualização do domínio computacional com a fase dispersa e a geometria do cilindro.

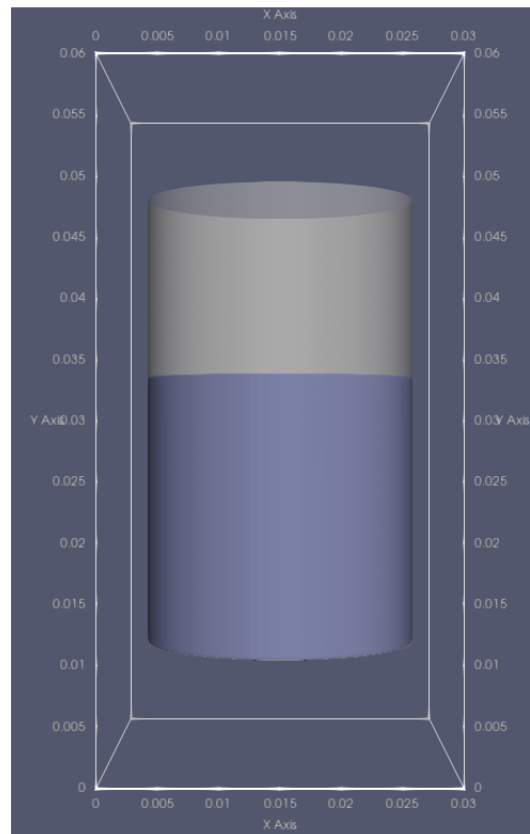


Figura 4.4: Visualização do domínio computacional no instante inicial.

4.3.2 ANSYS

Para a simulação no Ansys é utilizado o Fluid Flow Fluent. O detalhamento da modelagem realizada neste software é dividida em geometria, malha, configuração e solução. Seguindo nesta ordem que é estruturada pelo software.

GEOMETRIA

A geometria é construída no SpaceClaim. A circunferência da base do cilindro está centrada na origem dos planos X,Y e Z, com diâmetro de 24 milímetros. E o cilindro possui altura de 50 milímetros em relação ao plano XY.



Figura 4.5: Geometria gerada no SpaceClaim.

MALHA

A malha foi gerada utilizando a configuração padrão do software, com a restrição de que o maior elemento de malha possuir 0,0005 m. Na Figura 4.6 tem-se a visualização da malha gerada. Esta malha possui 308.346 nós e 298.556 elementos.

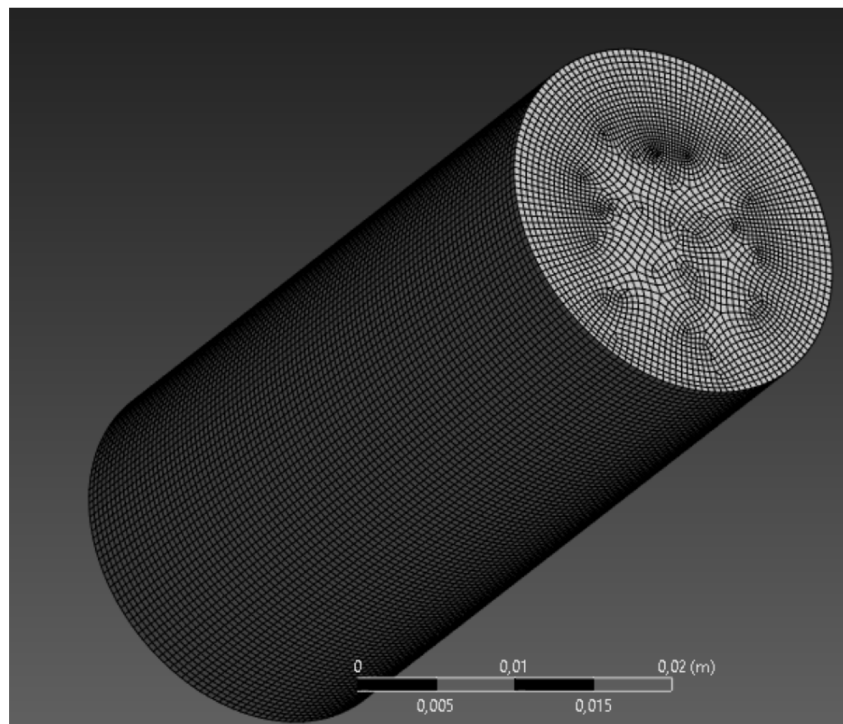


Figura 4.6: Geometria gerada no Workbench.

CONFIGURAÇÕES

O *solver* utilizado é do tipo baseado na pressão, com formulação absoluta da velocidade. Foi simulado em regime permanente. O campo gravitacional foi de $-9,81 \text{ m/s}^2$ no eixo Y.

Utilizou-se o modelo multifásico (VoF), com duas fases eulerianas. A formulação implícita com *cutoff* de 10^{-6} . O tipo *sharp* foi utilizado para modelar a interface entre as fases. O modelo de tensão interfacial foi ativado em conjunto com a modelagem do ângulo de contato. Na Tabela 4.14 tem-se os valores utilizado para as propriedades do modelo multifásico.

Tabela 4.14: Parâmetros do modelo multifásico.

Modelo	VoF
Formulação	Implícita
<i>Cutoff</i> da fração de volume	10^{-6}
Modelagem da interface	<i>Sharp</i>
Modelagem da tensão interfacial	<i>Continuum Surface Force + Wall Adhesion</i>
Ângulo de contato	30°, 45°, 90°, 120° e 150°
Coefficiente de tensão interfacial (N/m)	0,001; 0,01; 0,05 e 0,1
Massa específica da fase contínua (kg/m ³)	10
Viscosidade dinâmica da fase contínua (Pa · s)	0,001
Massa específica da fase dispersa (kg/m ³)	1000
Viscosidade dinâmica da fase dispersa (Pa · s)	0,01; 0,05; 0,1 e 0,5

Na Tabela 4.15 tem-se as condições de contorno. A fronteiras possuem rotação em relação ao eixo Y.

Tabela 4.15: Condições de contorno.

Movimento da parede	Relativo a zona de célula adjacente + Rotacional
Condição de cisalhamento	Sem deslizamento
Velocidade angular (rad/s)	20, 30, 40, 50 e 60

Utilizou-se os parâmetros da Tabela 4.16 como referência para comparação dos resultados. Caso não esteja explícito qual parâmetro foi utilizado, considera-se os parâmetros dessa tabela.

Tabela 4.16: Parâmetros de referência.

Viscosidade da fase dispersa (Pa · s)	0,1
Coefficiente da tensão interfacial (N/m)	0,01
Velocidade angular (rad/s)	50
Ângulo de contato	90°

Os métodos para solução são divididos em acoplamento da pressão e velocidade, na qual foi escolhido o esquema acoplado, e a discretização espacial, descrita na Tabela 4.17.

Tabela 4.17: Discretização espacial.

<i>Gradient</i>	<i>Least Squares Cell Based</i>
Pressão	PRESTO
Quantidade de movimento	<i>Upwind</i> de segunda ordem
Fração de volume	Compressível
Método de pseudo tempo	Passo de tempo global

Os resíduos para a continuidade, componentes da velocidade e VoF foram de 10^{-4} . A fase dispersa no instante inicial esta definida como um cilindro de raio de 12 mm e 24 mm de altura em relação ao eixo Y, a partir da origem.

5. RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos utilizando os softwares MFSim e Ansys, realizando a comparação dos resultados entre as variáveis descritas no modelo computacional.

5.1 MFSIM

Na Figura 5.1 tem-se a visualização da massa específica, para o isovalor de 505 kg/m^3 , no tempo final. O corte foi feito no plano Z , na coordenada $0,015 \text{ m}$. Nesta figura é possível observar o comportamento parabólico da interface na solução computacional conforme esperado.

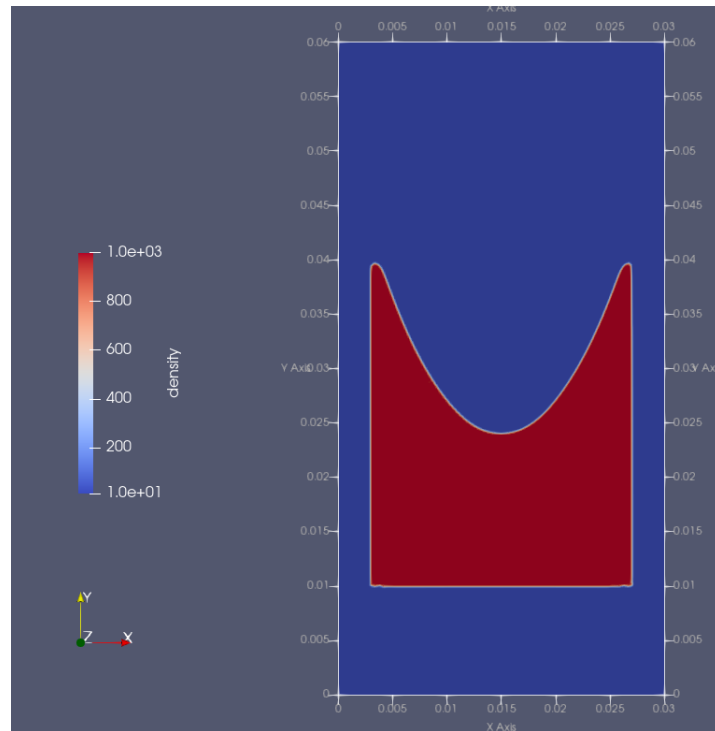


Figura 5.1: Visualização da densidade no tempo final.

Na Figura 5.2 tem-se o gráfico da solução analítica e computacional. Devido a fronteira imersa não estar no centro do domínio, os termos no eixo X são transladados em $-x_c$ na Eq. 4.15, resultando na Eq. 5.1. Os resultados obtidos foram para $Re = 72$, $Fr = 1,079$ e $We = 432$. Utilizando as definições da Eq. 3.12, Eq. 3.13 e Eq. 3.14.

$$y_s = h_0 - \frac{\Omega^2}{4g}(R^2 - 2(x - x_c)^2) \quad (5.1)$$

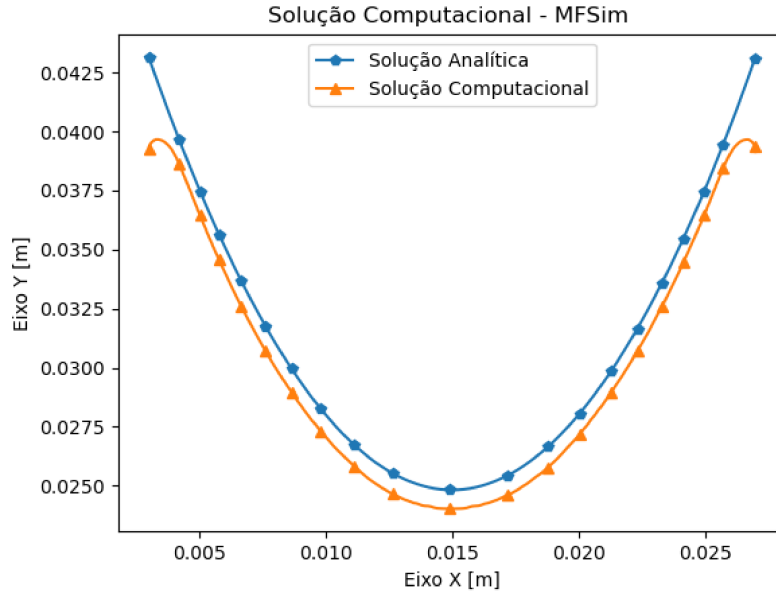


Figura 5.2: Gráfico com a solução computacional e analítica para o isovalor de massa específica de 505 kg/m³.

Na Figura 5.3 tem-se a visualização do erro relativo entre as soluções. Afastado da parede do cilindro, a solução na interface apresentou erros menores que 4%, e próximo à parede, erros menores que 10 %. O erro relativo é definido como a divisão de dois termos, no numerador tem-se o modulo da subtração da solução analítica (S_a) pela solução computacional (S_c), e no denominador tem-se a solução analítica. De acordo com a Eq. 5.2.

$$E_r = \frac{|S_a - S_c|}{S_a} \quad (5.2)$$

Brady (2012)[4] analisa os efeitos do número de Weber na solução computacional, Figura 5.4. Neste estudo são utilizados outros fluidos e geometria para domínio computacional. Mas cabe ressaltar o efeito do número de Weber na solução computacional quando esta próxima da parede da parede do cilindro, a qual apresenta uma curvatura. Os eixos r e z estão adimensionalizados. De acordo com o resultado descrito em seu trabalho, quando maior o número de Weber, ou quanto menor o valor para tensão interfacial, a solução computacional se aproximará da solução analítica.

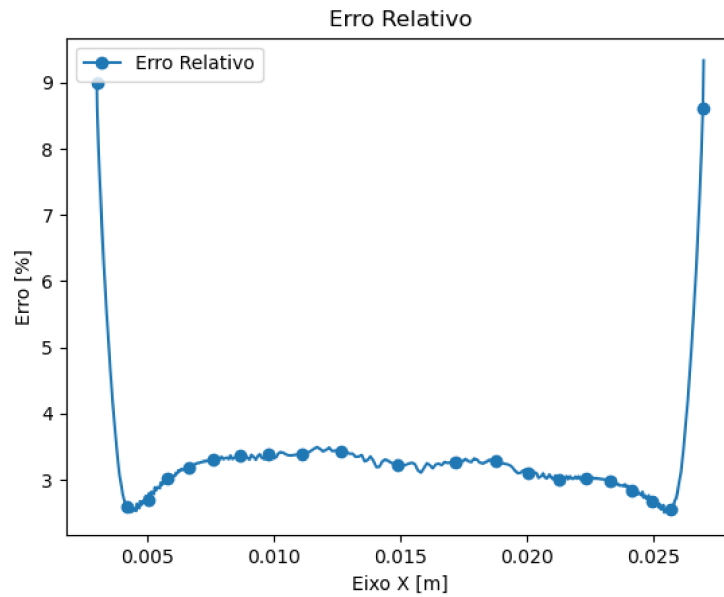


Figura 5.3: Gráfico do erro relativo entre a solução computacional e analítica.

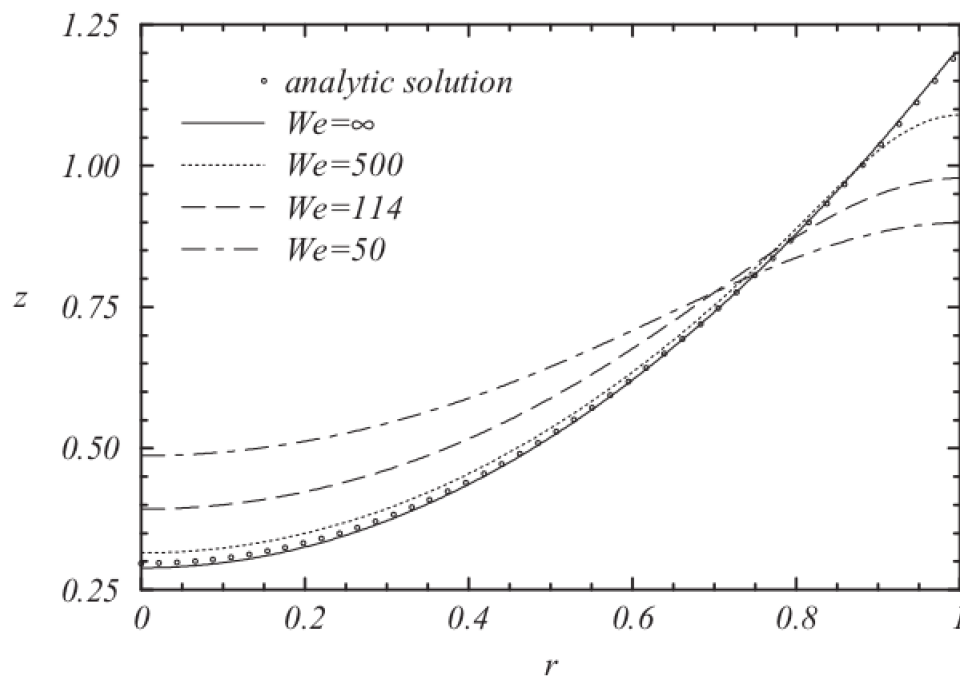


Figura 5.4: Gráfico da solução computacional com diferentes número de Weber. Retirado de Brady (2012)[4].

5.2 ANSYS

Nesta seção tem-se os resultados obtidos no Ansys. Os resultados foram analisados para o isovalor para massa específica de 505 kg/m^3 .

Na Figura 5.5 tem-se os resultados obtidos variando os valores da tensão interfacial. Na Tabela 5.1 tem-se os respectivos valores dos adimensionais para cada valor da tensão interfacial. De acordo com esta figura, quanto maior o valor da tensão interfacial, ou maior número

de Weber, maior o distanciamento da solução computacional da solução analítica na parede e no centro do cilindro. Resultado semelhante ao obtido por Brady na Figura 5.4. Esse distanciamento se deve as forças coesivas, que quanto maior o coeficiente de tensão interfacial, maior a força de atração das moléculas do mesmo tipo (fase dispersa). Causando o distanciamento da solução analítica, que não leva em sua elaboração a modelagem da tensão interfacial. Na Figura 5.6 tem-se a relação do erro relativo com a variação da tensão interfacial. Tendo o erro relativo aumentado com o aumento da tensão interfacial.

Tabela 5.1: Adimensionais para diferentes valores da tensão interfacial.

σ (N/m)	Re	We	Fr
0,001	72	4320	1,529
0,01	72	432	1,529
0,05	72	86,4	1,529
0,1	72	43,2	1,529

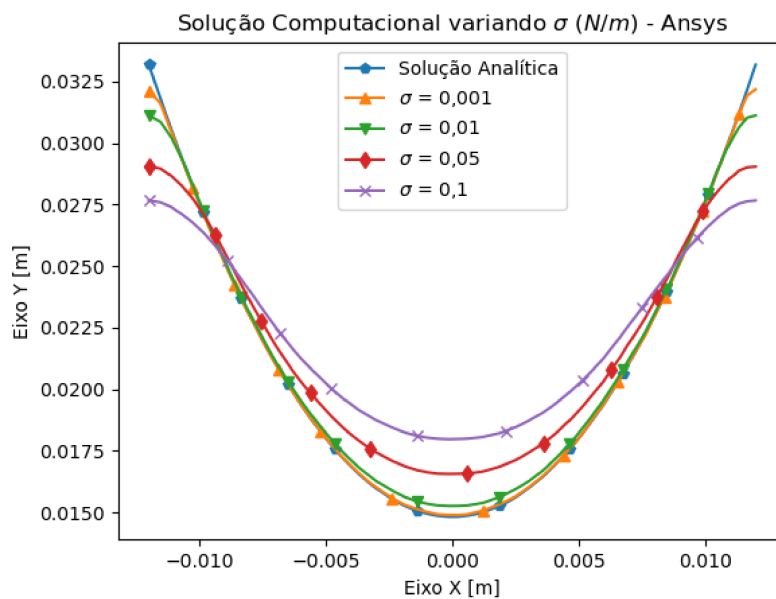


Figura 5.5: Gráfico da solução computacional variando a tensão interfacial realizada no Ansys.

Na Tabela 5.2 tem-se os valores dos adimensionais para diferentes valores de velocidade angular. Na Figura 5.7 tem-se o comportamento da interface de acordo com os valores de velocidade angular dessa tabela. De acordo com os resultados obtidos, quanto maior a velocidade angular, maior a ascensão do fluido na parede do cilindro. O que condiz com o comportamento do escoamento de acordo com a solução analítica.

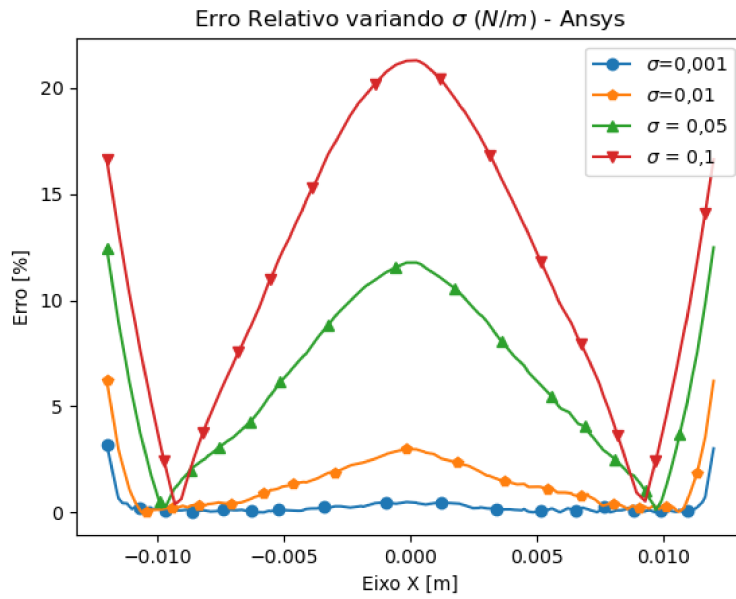


Figura 5.6: Gráfico do erro relativo para a variação da tensão interfacial realizada no Ansys.

Tabela 5.2: Adimensionais para diferentes valores da velocidade angular.

$\Omega(\text{rad/s})$	Re	We	Fr
20	28,8	69,1	0,245
30	43,2	155,5	0,550
40	57,6	276,5	0,979
50	72	432	1,529
60	86,4	622,1	2,202

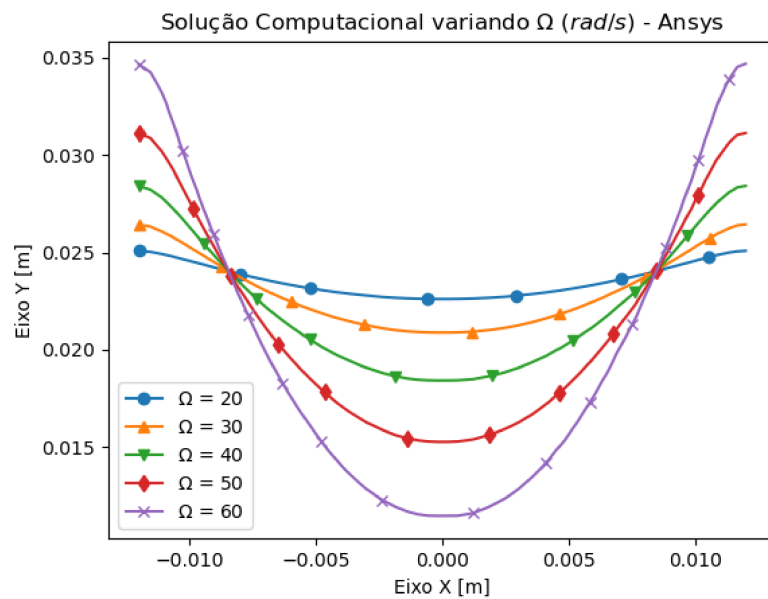


Figura 5.7: Gráfico da solução computacional variando a velocidade angular.

Na Tabela 5.3 tem-se os valores dos adimensionais para os respectivos valores da viscosidade dinâmica da fase dispersa. Na Figura 5.8 tem-se os resultados para a variação deste parâmetro, e na Figura 5.9 a ampliação desses resultados na região próxima a fronteira da parede. Tem-se que a variação deste parâmetro pouco influencia nos resultados. Comparando os resultados da variação da velocidade angular com este, temos que mesmo com a alteração do número de Reynolds, a velocidade angular apresenta maior significância para o comportamento da interface. Nota-se que a variação do número de Reynolds não é suficiente para indicar uma mudança no comportamento da interface, sendo necessário a utilização de outro adimensional, como o número de Weber, para a análise dos resultados.

Tabela 5.3: Número de Reynolds para diferentes valores da viscosidade dinâmica da fase dispersa.

$\mu_d \text{ (Pa} \cdot \text{s)}$	Re	We	Fr
0,01	720	432	1,529
0,05	144	432	1,529
0,1	72	432	1,529
0,5	14,4	432	1,529

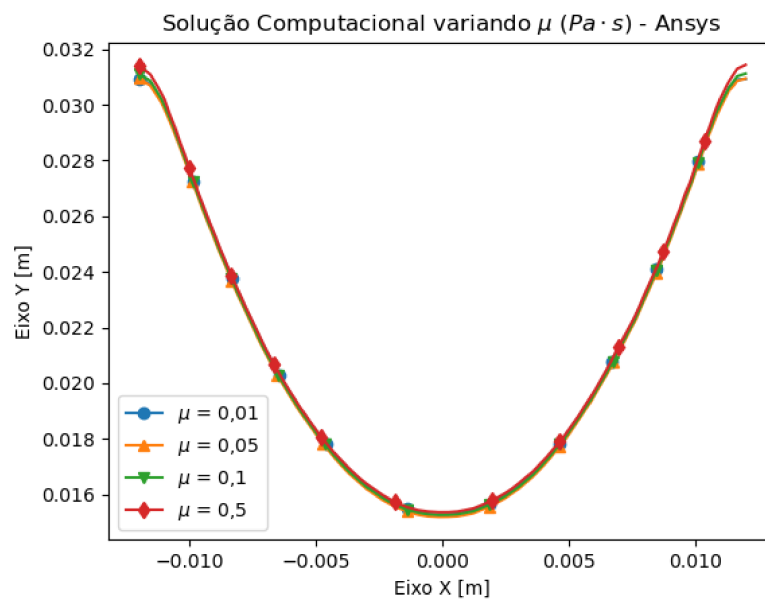


Figura 5.8: Gráfico da solução computacional variando a viscosidade dinâmica da fase dispersa.

Na Figura 5.10 tem-se os resultados obtidos variando o ângulo de contato para uma tensão interfacial de 0,05 N/m. Quanto maior o ângulo de contato, maior o distanciamento da interface da solução analítica, maior o erro relativo nas regiões da parede e no centro do cilindro, Figura 5.12. Na Figura 5.11 tem-se o resultado na região próxima a fronteira da parede. O distanciamento é explicado pela molhabilidade. Para ângulos de contato menores que 90° , tem-se o espalhamento da fase dispersa, pois o fluido é molhante. Para ângulos maiores que 90° temos

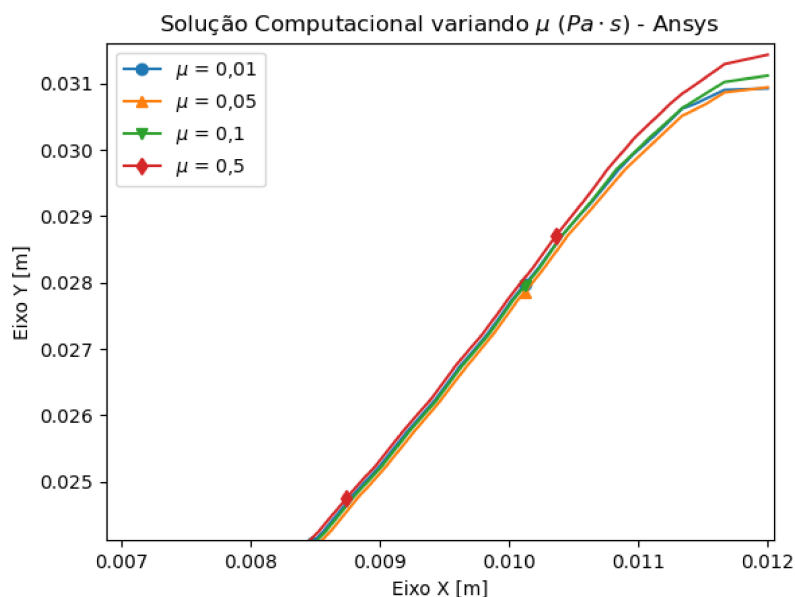


Figura 5.9: Gráfico da solução computacional variando a viscosidade dinâmica, visualização ampliada na parede.

que o espalhamento do fluido é baixo na região de ponto triplo. Este efeito fica acentuado com o aumento do ângulo de contato, pois a superfície possui baixa molhabilidade.

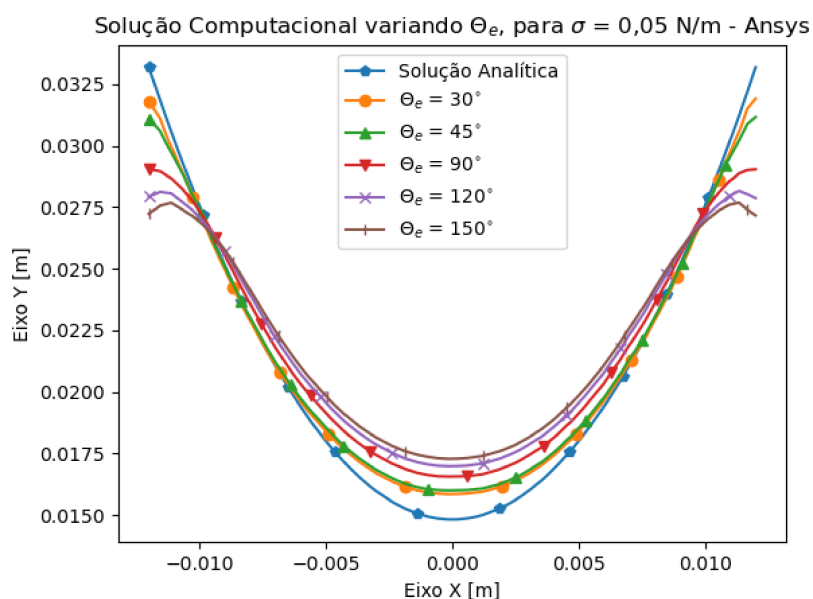


Figura 5.10: Gráfico da solução computacional variando o ângulo de contato para tensão interfacial de 0,05 N/m.

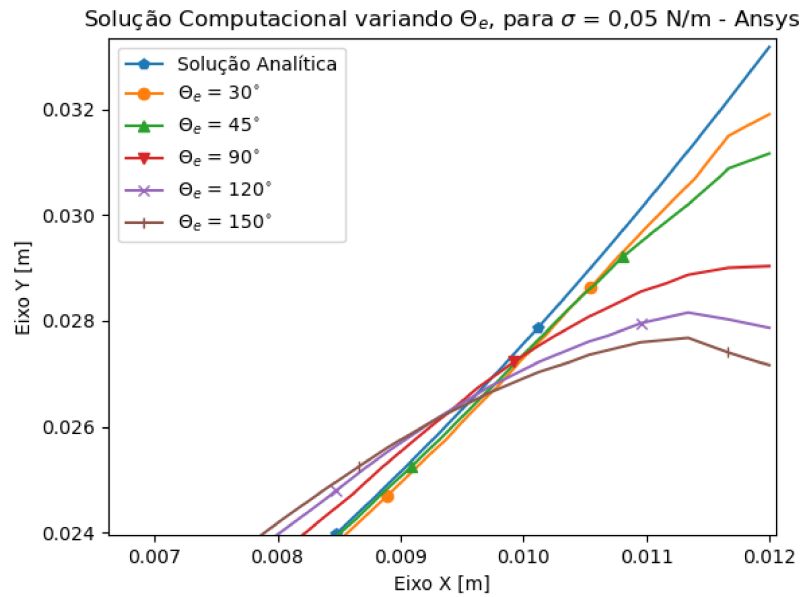


Figura 5.11: Gráfico da solução computacional variando o ângulo de contato para tensão interfacial de $0,05 \text{ N/m}$, visualização ampliada na parede.

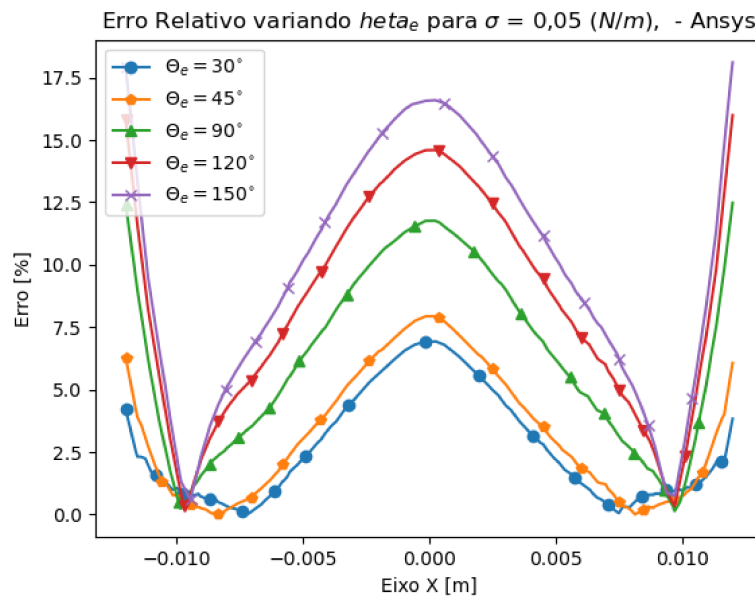


Figura 5.12: Gráfico do erro relativo variando o ângulo de contato para tensão interfacial de $0,05 \text{ N/m}$, visualização ampliada na parede.

Na Figura 5.13 tem-se os resultados obtidos variando o ângulo de contato para um valor da tensão interfacial de $0,1 \text{ N/m}$. Observa-se o mesmo comportamento da interface, de se afastar da solução analítica, comparado a resultado obtido para a tensão interfacial de $0,05 \text{ N/m}$. E na Figura 5.15 tem-se o erro relativo referente a essa variação do ângulo de contato. Na Figura 5.14 tem-se os resultados na região próxima a parede. Comparando os resultados das Figura 5.11 e Figura 5.14, observa-se que para a tensão interfacial de $0,1 \text{ N/m}$ as forças coesivas na interface são maiores, disso temos que a mudança do ângulo de contato causará uma mudança

maior no deslocamento da interface.

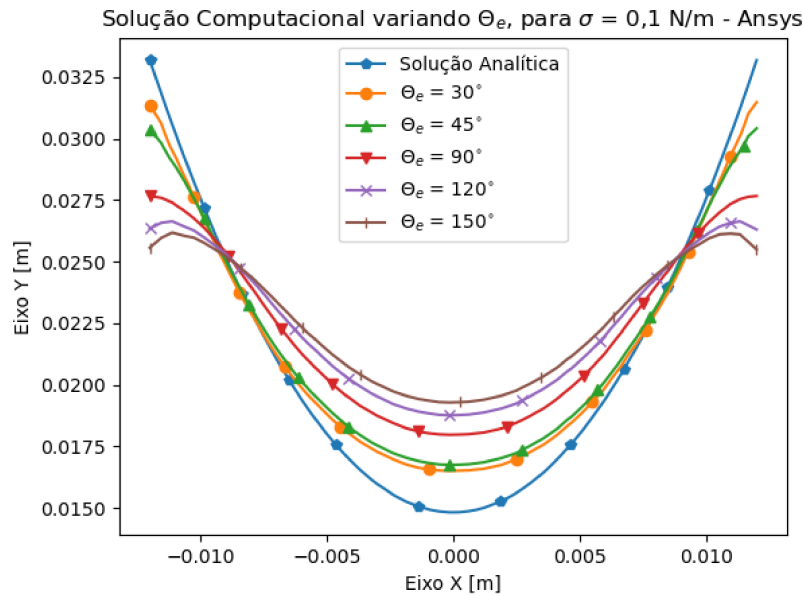


Figura 5.13: Gráfico da solução computacional variando o ângulo de contato para tensão interfacial de $0,1 \text{ N/m}$.

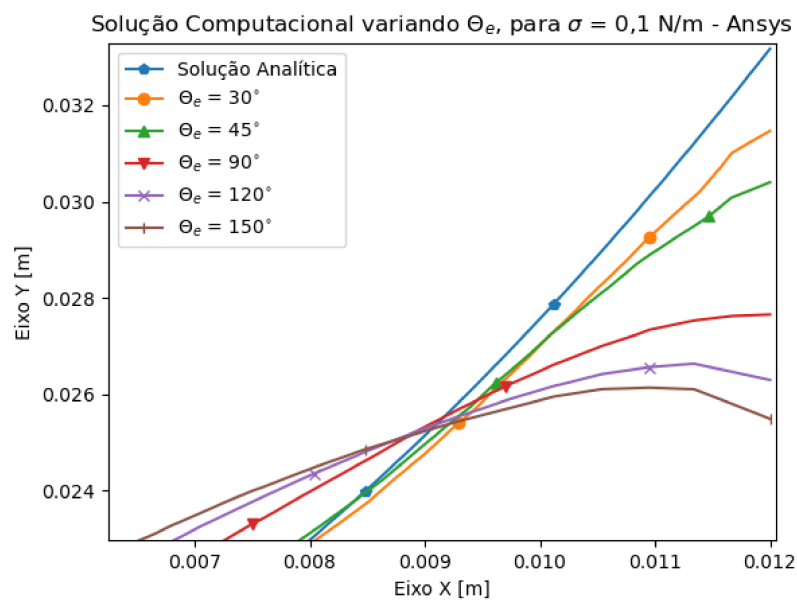


Figura 5.14: Gráfico da solução computacional variando o ângulo de contato para tensão interfacial de $0,1 \text{ N/m}$, visualização ampliada na parede.

Na Figura 5.16, temos a influência da tensão interfacial de $0,05$ e $0,1 \text{ N/m}$, para ângulos de contato de 30° , 45° , 90° , 120° e 150° . Evidenciando o comportamento da interface em relação a variação da tensão interfacial comentados anteriormente. Portanto, evidencia-se a mudança para um perfil não parabólico quando se aumenta o coeficiente de tensão interfacial, e a diminuição da molhabilidade com o aumento do ângulo de contato.

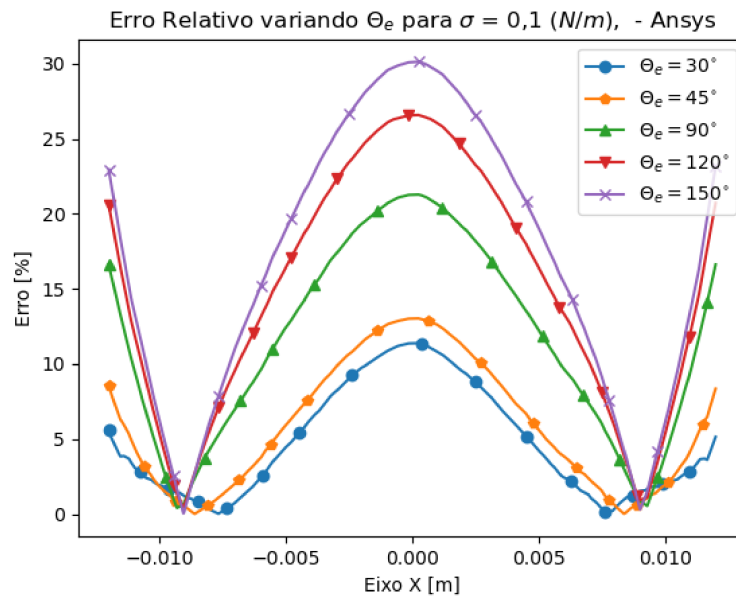


Figura 5.15: Gráfico do erro relativo variando o ângulo de contato para tensão interfacial de 0,1 N/m, visualização ampliada na parede.

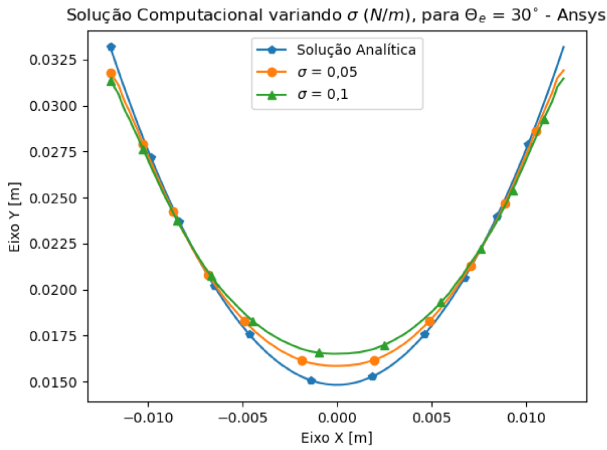
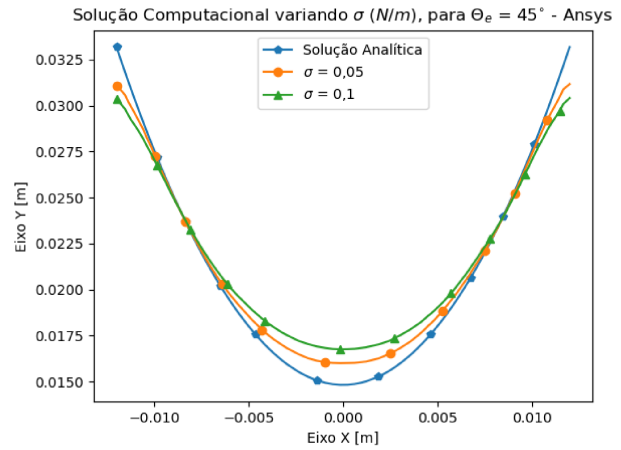
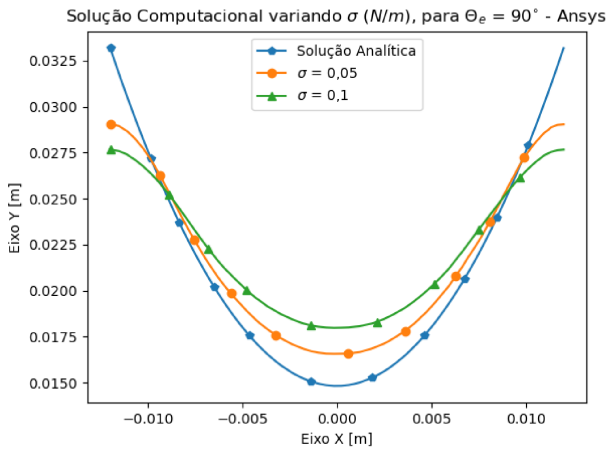
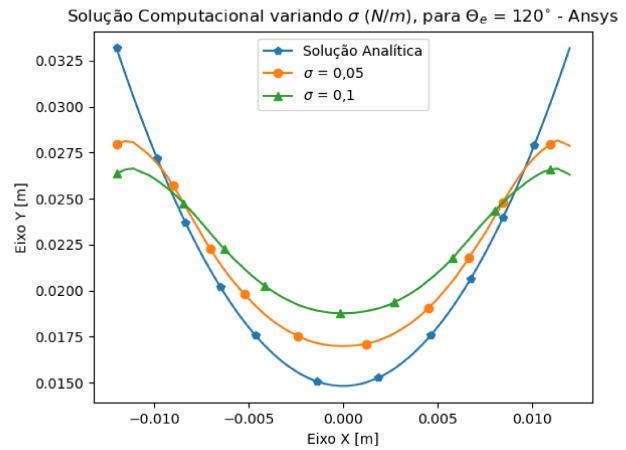
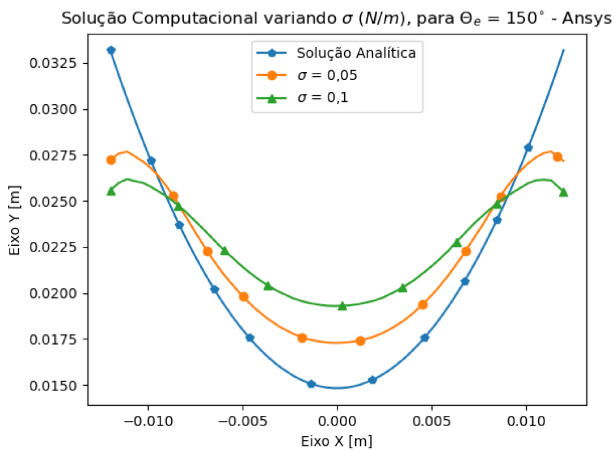
(a) Solução computacional para $\theta_e = 30^\circ$.(b) Solução computacional para $\theta_e = 45^\circ$.(c) Solução computacional para $\theta_e = 90^\circ$.(d) Solução computacional para $\theta_e = 120^\circ$.(e) Solução computacional para $\theta_e = 150^\circ$.

Figura 5.16: Gráficos da solução computacional variando o coeficiente de tensão interfacial para θ_e igual a 30° , 45° , 90° , 120° , 150° .

6. CONCLUSÕES

No presente trabalho desenvolveu-se e apresentou uma modelagem para a análise da ascensão de um fluido em um cilindro rotativo.

Os resultados mostraram a influência da modelagem da tensão interfacial e do ângulo de contato no comportamento da interface em relação ao modelo deduzido para a solução analítica, a qual não leva em conta esses efeitos. Teve-se que com o aumento da tensão interfacial e do ângulo de contato, aumentava o distanciamento da interface nas regiões próxima as paredes no centro do cilindro, ou seja, um aumento do erro relativo. Estes erros sendo menores que 5 % para o coeficiente de tensão interfacial de $0,001 \text{ N/m}$ e ângulo de contato de 90° , Figura 5.6, e chegando a 30 % para o coeficiente de tensão interfacial de $0,1 \text{ N/m}$ e ângulo de contato de 150° , Figura 5.15.

Analísado-se a relação da variação do ângulo de contato com o efeito de molhabilidade, Figura 5.10 e Figura 5.13. Os resultados obtido foram de acordo com o esperado para os efeitos de espalhamento da fase dispersa na parede do cilindro. Para valores do ângulo de contato menores que 90° os efeitos de molhabilidade são maiores, tendo um maior espalhamento da fase dispersa. Para valores do ângulo de contato maiores que 90° , a molhabilidade é reduzida, diminuindo o espalhamento dessa fase.

Também observou-se que quanto maior a velocidade angular, maior será a ascensão da fase dispersa, Figura 5.7, condizente com a equação para a solução analítica. Constatou-se que a variação da viscosidade dinâmica da fase dispersa pouco influência o comportamento da interface, Figura 5.9. E que somente a utilização do número de Reynolds para a comparação dos resultados não é suficiente, sendo necessária a utilização em conjunto do número de Weber.

E apresentado o resultado para o regime transiente e sem a modelagem do ângulo de contato, Figura 5.2. Neste caso, o erro relativo foi menor que 4 %, exceto nas regiões próximas a fronteira imersa, cerca de 9 %, Figura 5.3.

Portanto, os resultado computacionais estão condizentes com a física do problema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Barbi, F.: *Modelagem Numérica do Escoamento em Válvulas de Compressores Alternativos pelo Método da Fronteira Imersa com Refinamento Adaptativo*. Dissertação de Mestrado, 2012.
- [2] Bonn, D., Eggers, J., Indekeu, J., Meunier, J. e Rolley, E.: *Wetting and spreading*. *Reviews of Modern Physics*, 81:739–805, 2009.
- [3] Brackbill, J., Kothe, D. e Zemach, C.: *A continuum method for modeling surface tension*. *Journal of Computational Physics*, 100(2):335–354, 1992, ISSN 0021-9991. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002199919290240Y>.
- [4] Brady, P. T. e Herrmann, M.: *Two-fluid confined flow in a cylinder driven by a rotating end wall*. *American Physical Society*, 85:016308, 2012.
- [5] Cepel:Libs: *Discretização Temporal*, 2024. https://see.cepel.br/manual/libs/latest/representacao_temporal/representacao_temporal.html#:~:text=A%20discretiza%C3%A7%C3%A3o%20temporal%20corresponde%20ao,de%20longo%20e%20curt%C3%ADssimo%20prazos., acessado em 12/12/2024.
- [6] Evrard, F., Denner, F. e Wachem, B. van: *WHeight-function curvature estimation with arbitrary order on non-uniform Cartesian grids*. *Journal of Computational Physics*: X, 7, 2020.
- [7] Figueiredo, R. A.: *Simulação numérica de escoamentos viscoelásticos multifásicos complexos*. Tese de Doutorado, 2016.
- [8] Gomes, M. H. R.: *Apostila de Mecânica dos Fluidos*. Apostila de Mecânica dos Fluidos, 2012.
- [9] Hirt, C. W. e Nichols, B. D.: *Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries*. *Journal of Computational Physics*, 39:201–225, 1981.
- [10] Jiang, G. S. e Shu, C. W.: *Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes*. *Journal of Computational Physics*, 126:202–228, 1996.
- [11] Kerpicci, H., Yagci, A. e Onbasioglu, S. U.: *Investigation of oil flow in a hermetic reciprocating compressor*. *International Journal of Refrigeration*, 36:215–221, 2013.

-
- [12] LibreTexts: *Coesão e adesão em líquidos - tensão superficial e ação capilar*, 2024. [https://query.libretexts.org/Idioma_Portugues/F%C3%ADsica_Universit%C3%A1ria_\(OpenStax\)/11%3A_Est%C3%A1tica_de_flu%C3%ADdos/11.08%3A_Coes%C3%A3o_e_adese%C3%A3o_em_l%C3%ADquidos_-_tens%C3%A3o_superficial_e_a%C3%A7%C3%A3o_capilar](https://query.libretexts.org/Idioma_Portugues/F%C3%ADsica_Universit%C3%A1ria_(OpenStax)/11%3A_Est%C3%A1tica_de_flu%C3%ADdos/11.08%3A_Coes%C3%A3o_e_adese%C3%A3o_em_l%C3%ADquidos_-_tens%C3%A3o_superficial_e_a%C3%A7%C3%A3o_capilar), acessado em 12/12/2024.
- [13] Luz, J. A. M. e Lima, R. M. F.: *Medida da tensão superficial*. IN: *Tratamento de Minérios: práticas laboratoriais*. CETEM/MCTI, 1ª ed., 2007.
- [14] Maliska, C. R.: *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. LTC, 2ª ed., 2004.
- [15] McCormick, S. F.: *Multigrid Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2ª ed., 1987.
- [16] Mourik, S. van: *Numerical modelling of the dynamic contact angle*. Tese de Doutorado, 2002.
- [17] Nogueira, X., Fernández-Fidalgo, J., Ramos, L., Couceiro, I. e Ramírez, L.: *Machine learning-based WENO5 scheme*. *Computers and Mathematics with Applications*, 168:84–99, 2024.
- [18] Oliveira Fortuna, A. de: *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações*. Edusp, 1ª ed., 2000.
- [19] Ozsipahi, M., Kose, H. A., Cadirci, S., Kerpici, H. e Gunes, H.: *Experimental and numerical investigation of lubrication system for reciprocating compressor*. *International Journal of Refrigeration*, 108:224–233, 2019.
- [20] Petri, L. A.: *Métodos de fronteira imersa em mecânica dos fluidos*. Dissertação de Mestrado, 2010.
- [21] Petróleo, D. do: *escoamento / flow*, 2024. <https://dicionariopetroleoegas.com.br/dictionary/escoamento/#:~:text=1%20Movimento%20qualquer%20de%20um,produzindo%20certa%20vaz%C3%A3o%20ou%20deslocamento.>, acessado em 18/11/2024.
- [22] Petróleo, D. do: *escoamento multifásico / multiphase flow.*, 2024. [https://dicionariopetroleoegas.com.br/dictionary/escoamento-multifasico/#:~:text=1%20Escoamento%20no%20qual%20duas,\(poeira\)%20em%20g%C3%A1s%20etc.](https://dicionariopetroleoegas.com.br/dictionary/escoamento-multifasico/#:~:text=1%20Escoamento%20no%20qual%20duas,(poeira)%20em%20g%C3%A1s%20etc.), acessado em 25/11/2024.
- [23] Q. Raeini, A., Blunt, M. e Bijeljic, B.: *Modelling two-phase flow in porous media at the pore scale using the volume-of-fluid method*. *Journal of Computational Physics*, 231:5653–5668, 2012.
- [24] Ribera, R. L.: *Understanding the Dynamics of Gas-Liquid-Solid Contact Points*. Tese de Doutorado, 2015.
-

- [25] Sestari, F. B., Garcia, I. K. e Santarosa, M. C. P.: *Integração de conceitos no contexto do ensino técnico integrado ao ensino médio a partir de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS)*. Research, Society and Development, 9(4), 2020. <http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i4.2855>.
- [26] Silveira Neto, A. da: *Escoamento turbulentos: análise física e modelagem teórica*. Compuser, 1ª ed., 2020.
- [27] Ubbink, O.: *Numerical prediction of two fluid systems with sharp interfaces*. Tese de Doutorado, 1997.
- [28] Vachaparambil, K. J. e Einarsrud, K.: *Comparison of Surface Tension Models for the Volume of Fluid Method*. Processes, 7:542, ago. 2019.
- [29] Versteeg, H. K. e Malalasekera, W.: *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Pearson Education Limited, 2ª ed., 2007.
- [30] Villar, M. M.: *Análise Numérica Detalhada de Escoamentos Multifásicos Bidimensionais*. Tese de Doutorado, 2007.
- [31] White, F. M.: *Mecânica dos Fluidos*. Porto Alegre: ArtMed, 8ª ed., 2018.
- [32] Wikipedia: *Molhabilidade*, 2023. <https://pt.wikipedia.org/wiki/Molhabilidade>, acessado em 11/12/2024.
- [33] Wikipedia: *Condição Courant-Friedrichs-Lewy*, 2024. https://en.wikipedia.org/wiki/Courant%E2%80%93Friedrichs%E2%80%93Lewy_condition, acessado em 16/12/2024.
- [34] Çengel, Y. A. e Cimbala, J.: *Mecânica dos Fluidos: fundamentos e aplicações*. McGraw Hill, 2ª ed., 2007.
- [35] Çengel, Y. A. e Cimbala, J. M.: *Mecânica dos fluidos*. Porto Alegre: AMGH, 3ª ed., 2015.