

Universidade Federal de Uberlândia

Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

**Uma proposta de ensino por meio do
software GeoGebra: possibilidades
no ensino e aprendizagem da trigonometria
no triângulo retângulo**

por

Anderson de Souza Santos

Licenciatura em Matemática – Ituiutaba - MG

2018

Orientadora: Profa. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira

Uma proposta de ensino por meio do *software* GeoGebra: possibilidades no ensino e aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo

Este exemplar corresponde à redação final do Trabalho de Conclusão de Curso devidamente corrigido e defendido por **Anderson de Souza Santos** e aprovado pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 9 de julho de 2018.

Profa. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira (orientadora)

Profa. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho

Prof. Dr. Rogério Fernando Pires

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) da UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

“Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que a outra estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura”.

(Hermann Hankel)

Dedico este trabalho a minha família e a todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta para a conclusão do mesmo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a **Deus**, por ter me sustentado e guiado pelo caminho árduo que hoje me conduz a minha formação. A Ele seja dada toda honra, toda glória e todo louvor.

Agradeço também aos meus queridos pais, **Valdice de Souza Santos** e **Manoel Pereira Santos (*in memoriam*)**, que forjaram o meu caráter e me ensinaram a seguir pelos caminhos corretos da vida, acreditando sempre nos meus sonhos e no propósito que **Deus** estabeleceu para a minha vida.

Agradeço também aos meus queridos irmãos, **Ivaneide**, **Luciene**, **Eliane**, **Paulo** e **Isac**, e ao meu grande amigo **Silvestre Cardoso**, por me apoiarem e por torcerem por mim, mesmo estando longe.

À professora **Cristiane Coppe de Oliveira**, por suas orientações, amizade, carinho e apreço pelo meu trabalho, que se traduz pelo incentivo ao prosseguimento dos meus estudos.

À professora **Tânia Maria Machado de Carvalho**, pela amizade, companheirismo, incentivo e dedicação, enquanto professora e tutora do **Grupo PET Matemática Pontal**.

Ao professor **Leonardo Silva Costa** pela cordialidade e atenção e ao **IFTM** por me permitir a realização deste trabalho em suas dependências.

À professora **Odaléa Aparecida Viana**, que contribuiu significativamente para que este trabalho se tornasse uma realidade concreta.

Ao professor **Alex Andrade Alves**, por me permitir vislumbrar outras possibilidades de ensino e aprendizagem da Matemática por meio das tecnologias digitais.

À minha grande e querida amiga **Valesca Correa Pereira**, por estar sempre ao meu lado, me incentivando e me dando forças para seguir em frente. Que **Deus** lhe abençoe.

Às minhas queridas amigas **Cássia Maria Oliveira Bisinoto** e **Roneide Maria Gonçalves**, pelo companheirismo e profissionalismo frente à **PROEXC Pontal**.

Estendo meus agradecimentos também as minhas colegas bolsistas **Ana Carla** e **Maísa** e a toda **Equipe PROAE**.

A discente do Curso de Matemática **Quezia Cristiane de Oliveira Maia**, por me apoiar nesta pesquisa e em outras atividades desenvolvidas durante a graduação.

E ao **Grupo PET Matemática Pontal** por me proporcionar o aprimoramento da minha formação para além da graduação, pelo período em que dele fiz parte.

RESUMO

O presente trabalho foi desenvolvido visando propor reflexões acerca do uso das tecnologias digitais com propósitos bem definidos e em consonância com as especificidades de determinados conteúdos matemáticos. Esta pesquisa refere-se a um estudo de caso referente à aplicação de uma proposta didática com ênfase na conceituação de tangente de um ângulo agudo, dentro do tópico da trigonometria no triângulo retângulo. A presente pesquisa foi desenvolvida na disciplina Estágio Supervisionado IV do Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Integradas do Pontal (FACIP), atual Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP), da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). A sua aplicação se deu nas dependências do Instituto Federal do Triângulo Mineiro (IFTM) de Ituiutaba/MG, sob a coordenação do Programa de Educação Tutorial da Matemática (PET Matemática Pontal), no segundo semestre de 2016. Ao todo foram realizadas quatro atividades, todas desenvolvidas dentro da perspectiva da exploração e investigação com o uso das Tecnologias Digitais (TD) voltadas para o ensino e a aprendizagem da Trigonometria no triângulo retângulo. Os resultados obtidos apontam para uma maior facilidade pelos alunos em deduzir, conjecturar e generalizar determinados conceitos a partir da sua interação com o *software* GeoGebra. Neste contexto a presente pesquisa também propõe uma análise das potencialidades deste *software* aliado a atividades de caráter investigativo, conforme defendem diversos autores acerca do assunto.

Palavras-chave: GeoGebra; Proposta didática; Tangente de um ângulo agudo; Trigonometria no triângulo retângulo.

SUMÁRIO

Introdução	11
 Capítulo 1 – Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) na Educação Matemática	14
1.1 Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática.....	14
1.2 O GeoGebra e o ensino de Matemática na perspectiva das produções científicas	19
1.3 Atividades de experimentação e investigação matemática com tecnologias digitais	26
 Capítulo 2 – Trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta de ensino por meio do <i>software</i> GeoGebra.....	30
2.1 Elaborando e planejando a proposta	30
2.1.1 Reformulando a proposta	33
2.1.2 Descrição da atividade 1	34
2.1.3 Descrição das atividades 2 e 3.....	37
2.1.4 Descrição da atividade 4	38
2.1.5 Descrição da atividade 5	39
2.2 O contexto da pesquisa	42
 Capítulo 3 – Apresentação e análise dos dados.....	45
3.1 Apresentação dos dados	45
3.1.1 Atividade 1	46
3.1.2 Atividades 2 e 3	50
3.1.3 Atividade 4.....	54
3.1.4 Atividade 5.....	56
3.2 Análise dos dados	57
 Considerações Finais.....	61
 Referências Bibliográficas.....	63
 Anexos.....	65

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – pirâmide de Quéops.....	33
Figura 2 – reprodução do procedimento utilizado por Tales.....	34
Figura 3 – representação gráfica da Atividade 1	34
Figura 4 – preenchimento da planilha com as medidas dos lados de cada triângulo	35
Figura 5 – determinação da razão de cada triângulo	36
Figura 6 – triângulo retângulo ABC	36
Figura 7 – representação gráfica das atividades 2 e 3	37
Figura 8 – representação gráfica da Atividade 4	38
Figura 9 – reprodução gráfica de um teodolito artesanal	39
Figura 10 – teodolito artesanal	39
Figura 11 – poste de iluminação da escola.....	40
Figura 12 – representação gráfica da situação problema.....	40
Figura 13 – calculadora gráfica de altura	41
Figura 14 – realização das atividades pelos alunos	43
Figura 15 – representação gráfica dos três triângulos usados na Atividade 1	46
Figura 16 – disposição dos triângulos feita por uma dupla de alunos.....	47
Figura 17 – medidas encontradas por uma das duplas	47
Figura 18 – resolução da Atividade 1 pela dupla E.....	48
Figura 19 – resolução da Atividade 1 pela dupla G	49
Figura 20 – resolução da Atividade 1 pela dupla N	49
Figura 21 – reprodução gráfica do triângulo disponível na Atividade 2	50
Figura 22 – preenchimento da planilha por uma das duplas	50
Figura 23 – resolução da Atividade 2 pela dupla B.....	51
Figura 24 – resolução da Atividade 2 pela dupla L.....	51
Figura 25 – resolução da Atividade 2 pela dupla M.....	52
Figura 26 – resolução da Atividade 2 pela dupla O	52
Figura 27 – reprodução gráfica da situação problema da Atividade 4	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – quantitativo de teses de doutorado e dissertações de mestrado sobre o tema GeoGebra	20
Tabela 2 – refinamento dos dados obtidos na Tabela 1	21

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – as quatro fases das tecnologias digitais em Educação Matemática	18
Quadro 2 – produções científicas desenvolvidas em 2018 sobre o tema GeoGebra e ensino de Matemática	21
Quadro 3 – trabalhos de Conclusão de Curso com temáticas sobre o uso das TIC	23
Quadro 4 – objetivos propostos com a realização das atividades	31
Quadro 5 – apresentação das respostas dos alunos ao item “b” da Atividade 3.....	53
Quadro 6 – apresentação das respostas dos alunos ao item “c” da Atividade 3.....	53
Quadro 7 – apresentação das respostas dos alunos à questão 2 da Atividade 4.....	55
Quadro 8 – apresentação das respostas dos alunos à questão 5 da Atividade 4.....	56
Quadro 9 – produções científicas publicadas em 2018 no Banco de teses da CAPES sobre o GeoGebra	65
Quadro 10 – TCC’s do Curso de Matemática da FACIP/UFU no período de 2010 a 2017	70

LISTA DE SIGLAS

TI – Tecnologias Informáticas

TC – Tecnologias Computacionais

MEC – Ministério da Educação

EDUCOM – Educação e Computador

TD – Tecnologias Digitais

TIC – Tecnologias da Informação e Comunicação

GD – Geometria Dinâmica

TDIC – Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação

FACIP – Faculdade de Ciências Integradas do Pontal

UFU – Universidade Federal de Uberlândia

LEMAT – Laboratório de Ensino de Matemática

PET – Programa de Educação Tutorial

IFTM – Instituto Federal do Triângulo Mineiro

PIPE III – Projeto Integrado de Prática Educativa III

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

SEMAP – Semana de Matemática do Pontal

WGP – Workshop de GeoGebra do Pontal

CMACP – Colóquio de Matemática Aplicada e Computacional do Pontal

EEAMP – Encontro de Ensino e Aprendizagem em Matemática do Pontal

ERMAC – Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional do Pontal

ICENP – Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

INTRODUÇÃO

O uso das Tecnologias Digitais (TD) em propostas metodológicas voltadas para o ensino e a aprendizagem da Matemática é algo que vem se fortalecendo muito nos últimos anos, desde as primeiras discussões acerca deste tema em meados dos anos de 1980.

No âmbito da Educação Matemática, diversos autores defendem o uso das TD em atividades matemáticas elaboradas dentro da perspectiva da experimentação com tecnologias. Dentre estes autores podemos citar Borba e Villarreal¹ (2005) *apud* Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 51), que afirmam que tais atividades devem favorecer a “criação e simulação de modelos matemáticos”, a “manipulação dinâmica de objetos construídos”, a “exploração de diversificadas formas de resolução” e a “realização de testes de conjecturas usando um grande número de exemplos”.

Segundo Andrade (2017, p.21), para um professor que esteja preparado e atento ao uso das TD no ambiente escolar, “um bom *software* pode ser uma grande ferramenta para a realização de atividades que proporcionam o pensar e o refletir, mas ele deve estar em constante pesquisa para estar apto para usar essas tecnologias que estão em constante aprimoramento”.

Neste sentido, destacamos as contribuições que um destes *softwares* em específico, o GeoGebra, tem dado ao ensino e a aprendizagem da Matemática, sobretudo pelo seu grande potencial em permitir aos alunos o levantamento de conjecturas, a generalização e a averiguação de hipóteses, dentre outras.

¹ BORBA, Marcelo de Carvalho; VILLARREAL, Mónica Ester. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005. v. 39.

Assim sendo, justificamos a realização desta pesquisa a partir da perspectiva de buscar pela compreensão e verificação das potencialidades do *software* GeoGebra no ensino e aprendizagem da Matemática, abordando especificamente o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo.

Em face disso, estabelecemos a seguinte pergunta norteadora para esta presente pesquisa: *“O software GeoGebra é uma opção viável para o ensino dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo dos alunos do 1º Ano do Ensino Médio, com ênfase na conceituação de tangente de um ângulo agudo em atividades de exploração e investigação?”*.

Com base nesta pergunta, foram desenvolvidas cinco atividades² no *software* GeoGebra, as quais foram criadas dentro da perspectiva da exploração e investigação proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), que destacam a importância das relações entre objetos matemáticos, conhecidos ou desconhecidos, como suporte à compreensão das propriedades matemáticas acerca de um determinado conteúdo.

Para o desenvolvimento desta pesquisa foram estabelecidos os seguintes objetivos:

Objetivo geral

- Identificar as habilidades desenvolvidas pelos alunos do 1º Ano do Ensino Médio em função do uso do *software* GeoGebra em atividades de exploração e investigação acerca das relações trigonométricas no triângulo retângulo;

Objetivos específicos

- Verificar as potencialidades ou limitações do *software* GeoGebra no ensino e aprendizagem da Trigonometria no triângulo retângulo;
- Propor reflexões acerca do uso das tecnologias digitais de forma planejada e em consonância com as especificidades de cada conteúdo.

A metodologia empregada para a realização desta pesquisa consiste na aplicação de uma proposta de ensino que envolve ao todo cinco atividades, das quais apenas uma não foi realizada, conforme justificativa que será dada mais adiante. Também faz parte desta metodologia a apresentação dos dados fornecidos pelos alunos, com a sua posterior análise fundamentada nos autores que embasam esta pesquisa.

² Ao utilizarmos o termo “atividade” estamos nos apoiando no significado desta expressão enquanto “tarefa”.

Quanto à estrutura do presente trabalho, foram definidos ao todo três capítulos cujos títulos são: (a) Cap. 1 – Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) na Educação Matemática; (b) Cap. 2 – Trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta de ensino por meio do software GeoGebra; e (c) Cap. 3 – Apresentação e análise dos dados.

No primeiro capítulo é apresentado todo o referencial teórico que embasa a presente pesquisa, o que contempla: (a) a trajetória histórica evolutiva das TDs no âmbito da Educação Matemática, a qual compreende ao todo quatro fases, que vão desde a década de 1980 até os dias atuais; (b) as concepções de diversos autores acerca do uso do GeoGebra no ensino de Matemática, incluindo também um estudo sobre as produções científicas que foram e vem sendo desenvolvidas ao longo dos últimos anos em relação a este tema, tanto no âmbito da FACIP³/UFU, enquanto Trabalhos de Conclusão de Curso, como em nível nacional, o que inclui as dissertações de mestrado e as teses de doutorado; e também (c) uma abordagem acerca das atividades de experimentação e investigação com o uso das TD.

No segundo capítulo são apresentados os detalhes dos procedimentos metodológicos, o planejamento estabelecido para a sua aplicação e todo o processo de elaboração da proposta didática, com a descrição detalhada de cada uma das atividades.

O terceiro e último capítulo consiste na descrição objetiva de todos os dados obtidos com a aplicação das atividades, o que inclui também a análise fundamentada sobre os resultados apresentados pelos alunos na resolução de cada uma delas.

³ Cumpre-nos destacar que ao usarmos o termo FACIP estamos nos referindo ao atual ICENP, uma vez que a realização desta pesquisa se deu em um momento em que ainda não havia sido realizado o desmembramento da FACIP/UFU em três novas unidades acadêmicas: (a) a Faculdade de Administração, Ciências Contábeis, Engenharia de Produção e Serviço Social (FACES); (b) o Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) e (c) o Instituto de Ciências Humanas (ICH).

CAPÍTULO 1

TECNOLOGIAS DIGITAIS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TDIC) NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentaremos a trajetória histórica evolutiva das principais tecnologias digitais voltadas para o ensino e a aprendizagem de Matemática, num período que compreende ao todo quatro fases. Além disso, será realizado um estudo acerca das potencialidades do *software* GeoGebra no ensino de Matemática e também das contribuições das atividades de caráter exploratório investigativo com o uso de tecnologias.

1.1 Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática

O uso das tecnologias digitais na Educação Matemática compreende um ciclo que vai desde os anos de 1980 aos dias atuais. Neste ciclo podemos destacar especificamente quatro fases, que vão desde as primeiras discussões sobre o uso de calculadoras simples e científicas em Educação Matemática até o uso da internet e das tecnologias digitais móveis e portáteis voltadas para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Cabe salientar que nesta seção cumpre-nos fazer apenas uma breve descrição de cada uma das quatro fases apresentando, resumidamente, os aspectos e as principais características de cada uma delas, conforme descrição dos itens indicados a seguir.

✓ **Primeira fase**

A primeira fase teve início nos anos de 1980 com as primeiras discussões sobre o uso de calculadoras, simples e científicas, e também de computadores no âmbito da Educação Matemática. Foi justamente neste período que começaram a surgir às expressões do tipo Tecnologias Informáticas (TI) ou Tecnologias Computacionais (TC), referindo-se tanto a computadores como aos *softwares*.

Segundo Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 18), esta fase foi “caracterizada fundamentalmente pelo uso do software LOGO, que teve início por volta de 1985”. Dentro deste período os autores destacam os nomes de pesquisadores como José Armando Valente, Janete Frant, Lulu Healy e Léa Fagundes, pela importância dos seus trabalhos para a produção de conhecimentos no âmbito da Educação Matemática, sobretudo, pela investigação das possibilidades de uso das TI como uma nova metodologia de ensino.

Nesta perspectiva, o uso pedagógico do *software* LOGO enfatizava principalmente o caráter construcionista, baseado nas relações entre a linguagem de programação e o pensamento matemático, permitindo aos alunos estabelecer relações entre representações algébricas e geométricas dinâmicas.

De acordo com os autores supracitados, a primeira fase também se caracteriza como sendo o momento em que começaram a surgir as primeiras perspectivas de implantação dos laboratórios de informática nas escolas, o que ganhou força em meados dos anos de 1980 e início dos anos de 1990 com iniciativas do Ministério da Educação (MEC) em promover programas e projetos voltados para a disseminação da informática no âmbito do sistema educacional brasileiro como, por exemplo, o EDUCOM que era

“destinado ao desenvolvimento de pesquisas e metodologias sobre o uso do computador como recurso pedagógico, do qual participavam cinco universidades públicas, nas quais foram implantados centros-piloto para desenvolver investigações voltadas ao uso do computador na aprendizagem” (ALMEIDA⁴, 2004, p. 711-712 *apud* BORBA, SILVA e GADANIDIS, 2014, p. 21).

⁴ ALMEIDA, Maria Elizabeth Bianconcini de. **Tecnologias de informação e comunicação na escola**: novos horizontes na produção escrita. *Avaliação e Políticas Públicas em Educação*, v. 12, n. 43, p. 711-725, 2004.

A principal abordagem de projetos como o EDUCOM estava no uso de tecnologias voltadas para a formação de professores, o que era respaldado pela crença de que as tecnologias poderiam promover mudanças pedagógicas com abordagens inovadoras para a educação, o que poderia permitir a formação de cidadãos críticos e reflexivos, os quais teriam autonomia de explorar as tecnologias em diversas outras situações e também na construção do seu próprio conhecimento.

✓ Segunda fase

A popularização do uso de computadores pessoais e a maior acessibilidade a estes recursos tecnológicos na primeira metade dos anos 1990 foi o marco histórico que estabeleceu o início da segunda fase das tecnologias digitais na Educação Matemática.

Neste período, o uso dos computadores para fins educacionais ainda era visto com muita insegurança e incertezas sobre o que isso poderia implicar na aprendizagem dos alunos, o que alimentava ainda mais os discursos contrários a essa nova forma de ensino. Segundo Borba e Penteado (2010, p. 11), um destes discursos “era o de que o aluno iria só apertar teclas e obedecer à orientação dada pela máquina. Isso contribuiria ainda mais para torná-lo um mero repetidor de tarefas”.

Esta é uma preocupação pertinente e que faz muito sentido, sobretudo quando estas tecnologias digitais são usadas sem um planejamento específico e sem objetivos bem definidos, o que pode acarretar num aprendizado puramente mecânico e sem nenhum significado.

Por outro lado, houve quem se manifestasse a favor do uso das Tecnologias Digitais (TD) para fins educacionais levando em consideração as transformações cognitivas, sociais e culturais que elas poderiam proporcionar, o que despertou o interesse de alguns pela exploração do potencial didático-pedagógico dos recursos de Tecnologia da Informação (TI).

Essa fase foi marcada pelo uso dos *softwares* gráficos que permitiam múltiplas representações de funções como, por exemplo, os *softwares* Winplot, o Fun e o Graphmathica e também pelos *softwares* de geometria dinâmica, dentre os quais podemos destacar o Cabri Géomètre e o Geometricks, além do Maple que pode ser definido como um sistema de computação algébrica caracterizado pela natureza dinâmica, visual e também experimental.

✓ Terceira fase

O início da terceira fase ocorreu por volta do ano de 1999 sob a influência do advento da internet, que por sua vez começou “a ser utilizada como fonte de informações e como meio de comunicação entre professores e estudantes e para a realização de cursos à distância para a

formação continuada de professores via e-mails, *chats* e fóruns de discussões, por exemplo.” (BORBA, SILVA e GADANIDIS, 2014, p. 31-32).

Em razão do aspecto informacional e comunicacional da internet, outras expressões começaram a ser utilizadas como, por exemplo, o termo TIC para se referir as Tecnologias da Informação e Comunicação.

Nesta fase, os cursos online à distância voltados para a formação continuada de professores traziam atividades baseadas na investigação matemática coletiva, em que os participantes interagiam em um ambiente virtual de aprendizagem de forma síncrona por videoconferência, de modo que cada um deles poderia manipular o *software* utilizado como ferramenta a partir da disponibilização de determinados recursos específicos como, por exemplo, o “lápiz virtual”, que era habilitado na tela do computador de alguns participantes pelos tutores responsáveis pelo curso.

Com isso, era concedida uma permissão temporária a um dos professores cursistas para que ele pudesse explorar o *software* por meio da utilização de algumas de suas ferramentas, neste mesmo tempo, os demais participantes do curso podiam visualizar em tempo real nas telas dos seus computadores todas as construções e alterações realizadas no *software* pelo professor habilitado a fazer tais manipulações.

✓ Quarta fase

A quarta fase corresponde ao período da nossa atualidade, a qual teve início em meados do ano de 2004, impulsionada pela melhoria da qualidade da internet, tanto do acesso como da velocidade, o que implicou a partir de então em conexões cada vez mais rápidas.

Assim como ocorreu nas outras fases, outras expressões começaram a ser utilizadas como, por exemplo, o uso do termo Tecnologias Digitais (TD), que se tornou um termo comumente utilizado nesta fase, a qual é caracterizada por diversos aspectos, dentre os quais podemos destacar resumidamente:

- (a) GeoGebra: integração entre GD e múltiplas representações de funções; (b) Multimodalidade: uso de vídeos na internet; (c) Novos designs e interatividade: comunicadores online (telepresença – Skype) – ambientes virtuais de aprendizagem (Moodle, ICZ e Second life); (d) Tecnologias móveis ou portáteis: celulares inteligentes, tablets, laptops, dentre outros; (e) Performance: estar online em tempo integral – internet na sala de aula – redes sociais (Facebook) – compartilhamento de vídeos (YouTube); (f) Performance matemática digital: uso das artes na comunicação de ideias matemáticas – ambientes multimodais de aprendizagem (BORBA, SILVA e GADANIDIS, 2014, p. 35-36).

Segundo os autores, estes aspectos suscitam inquietações, questionamentos e perguntas que, embora ainda não tenham sido formuladas, fazem desta fase um ambiente passível de

exploração e propício à realização de investigações e diferentes pesquisas sobre as implicações do uso das TD no âmbito da educação matemática.

✓ **Resumo dos aspectos e características das quatro fases**

Conforme mostra a organização estrutural do Quadro 1, é possível visualizar, resumidamente, os aspectos e principais características de cada uma das quatro fases o que nos leva a compreender as implicações e contribuições das fases iniciais para o alicerce das fases subsequentes:

Quadro 1: as quatro fases das tecnologias digitais em Educação Matemática.

	Tecnologias	Natureza ou base tecnológica das atividades	Perspectivas ou noções teóricas	Terminologia
Primeira fase (1985)	Computadores; calculadoras simples e científicas.	LOGO Programação	Construcionismo; micromundo	Tecnologias informáticas (TI)
Segunda fase (início dos anos 1990)	Computadores (popularização); calculadoras gráficas.	Geometria dinâmica (Cabri Géomètre; Geometriks); múltiplas representações de funções (Winplot, Fun, Mathematica); CAS (Maple); jogos.	Experimentação, visualização e demonstração; zona de risco; conectividade; ciclo de aprendizagem construcionista; seres-humanos-com-mídias.	TI; software educacional; tecnologia educativa
Terceira fase (1999)	Computadores, laptops e internet.	Teleduc; e-mail; chat; forum; google.	Educação à distância online; interação e colaboração online; comunidades de aprendizagem.	Tecnologias da informação e comunicação (TIC)
Quarta fase (2004)	Computadores; laptops; tablets; telefones celulares; internet rápida.	GeoGebra; objetos virtuais de aprendizagem; Applets; vídeos; YouTube; WolframAlpha; Wikipédia; Facebook; ICZ; Second Life; Moodle.	Multimodalidade; telepresença; interatividade; internet em sala de aula; produção e compartilhamento online de vídeos; performance matemática digital.	Tecnologias digitais (TD); tecnologias móveis ou portáteis.

Fonte: Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 39).

Segundo Borba, Silva e Gadanidis (2014), o surgimento de uma fase não exclui e nem substitui a fase anterior, com isso há uma verdadeira “sobreposição” e integração entre elas de tal modo que os aspectos presentes nas três primeiras fases ainda são fundamentais para a quarta fase.

Na perspectiva dos autores supracitados, “uma nova fase surge quando inovações tecnológicas possibilitam a constituição de cenários qualitativamente diferenciados de investigação matemática; quando o uso pedagógico de um novo recurso tecnológico traz originalidade ao *pensar-com-tecnologias*” (BORBA, SILVA e GADANIDIS, 2014, p. 37).

Neste sentido, ao escolhermos como um dos objetos de estudo deste trabalho as potencialidades do *software* GeoGebra (quarta fase) para o ensino e a aprendizagem da Matemática, nos remetemos à segunda fase para analisar e compreender como o surgimento dos *softwares* gráficos e de geometria dinâmica, no início dos anos 1990, serviram de base para o aprimoramento dos *softwares* matemáticos atualmente utilizados, como o GeoGebra, por exemplo.

1.2 O GeoGebra e o ensino de Matemática na perspectiva das produções científicas

O GeoGebra é um *software* matemático de Geometria Dinâmica (GD) criado em 2001 por um professor da Universidade de Salzburgo na Áustria, chamado Markus Hohenwarter, e desde então tem sido apontado por professores e pesquisadores como sendo um *software* inovador na área da educação matemática, sobretudo pelo seu potencial didático-pedagógico no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, tanto no ensino básico quanto no ensino superior.

O seu potencial didático-pedagógico se evidencia pelo seu dinamismo em agregar numa mesma interface os elementos da geometria, da álgebra, do cálculo, da estatística, dos gráficos e de tabelas, os quais podem ser combinados e explorados de diversas maneiras, o que permite o levantamento de conjecturas e a averiguação de hipóteses.

Segundo Lieban e Müller (2012, p.49), as atividades desenvolvidas com o *software* GeoGebra podem favorecer a aprendizagem de Matemática, uma vez que apoiando-se no *software*, o aluno pode perceber “a preservação, ou não, de certas propriedades, o que acaba por estimular sua capacidade em conjecturar e estabelecer relações para, então, construir o processo dedutivo, tão importante não só em geometria como em outras áreas da Matemática”.

No entanto, os autores ressaltam ainda a importância da segurança que o professor precisa ter quanto ao uso destas tecnologias, o que se constitui como sendo um fator essencial para que os *softwares* de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, possam de fato contribuir para a construção de uma aprendizagem matemática significativa, o que não se restringe apenas à disponibilização destas ferramentas como único e suficiente fator para a promoção da aprendizagem, mas que também exige um estudo prévio acerca das suas aplicações.

Neste contexto, as diversas pesquisas e produções científicas desenvolvidas ao longo dos últimos anos, a exemplo de artigos científicos, teses de doutorado e dissertações de mestrado, nos mostram uma gama de possibilidades de utilização dos *softwares* de geometria dinâmica no âmbito escolar.

São justamente estes trabalhos que apontam caminhos para a construção de práticas pedagógicas mais condizentes com a utilização correta de tecnologias no contexto escolar, uma vez que eles colocam em evidência tanto as potencialidades como as limitações destes *softwares*.

Um fato importante que tem ocorrido nos últimos dez anos diz respeito ao aumento expressivo no número de produções científicas com a temática Geometria Dinâmica. Se tomarmos como exemplo apenas o *software* GeoGebra, abordado como fonte de pesquisa em teses de doutorado e dissertações de mestrado publicadas no Banco de Teses da CAPES⁵, podemos verificar um aumento de 5100% no número de trabalhos desenvolvidos no período de 2008 à 2017, conforme podemos ver nos dados apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: quantitativo de teses de doutorado e dissertações de mestrado sobre o tema GeoGebra.

Titulação	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	Total
Doutorado	-	1	-	3	-	5	5	7	6	5	3	35
Mestrado	-	3	5	7	3	9	8	18	14	25	2	94
Mestrado Profissional	-	-	-	-	-	133	150	142	110	123	21	679
Profissionalizante	3	5	19	13	22	-	-	-	-	-	-	62
Total	3	9	24	23	25	147	163	167	130	153	26	870

Fonte: elaboração própria baseada em dados da Plataforma Sucupira da CAPES.

É evidente que o avanço das tecnologias digitais ao longo destes anos contribuiu consideravelmente para que este aumento no número de teses e dissertações fosse tão expressivo. Com isso, podemos presumir que se esta tendência se mantiver pelos próximos anos teremos um número ainda maior de produções científicas sobre esta temática.

Outro dado importante que esta tabela nos mostra, diz respeito ao peso das produções científicas em nível de Mestrado Profissional em relação ao quantitativo total de produções até este presente ano, cerca de 78,04% deste valor, um número expressivo se levarmos em

⁵ Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – Órgão governamental vinculado ao Ministério da Educação (MEC), incumbido de promover a expansão e consolidação da pós-graduação stricto sensu (mestrado e doutorado) em todo território nacional brasileiro.

conta que os dados referentes a esta titulação só começaram a ser registrados apenas a partir de 2013.

Ao aplicarmos alguns filtros⁶ a esta pesquisa, enfatizando dentre outras áreas a “Matemática” e o “Ensino”, podemos perceber que embora o número total de teses e dissertações tenha sido reduzido, as produções em nível de Mestrado Profissional ainda mantém a mesma tendência verificada anteriormente, chegando neste caso a quase 90% do quantitativo total de produções científicas, conforme mostra os dados descritos na Tabela 2.

Tabela 2: refinamento dos dados obtidos na Tabela 1.

Titulação	2013	2014	2015	2016	2017	2018	Total
Doutorado	3	4	2	3	3	2	17
Mestrado	6	3	12	9	11	-	41
Mestrado Profissional	69	130	112	88	98	16	513
Total	78	137	126	100	112	18	571

Fonte: elaboração própria baseada em dados da Plataforma Sucupira da CAPES.

Podemos inferir a partir destes dados que o uso das tecnologias digitais como uma tendência metodológica de ensino, no âmbito das escolas públicas de educação básica, tem se fortalecido muito ao longo dos últimos anos, sobretudo em face da necessidade da promoção de metodologias que, aliadas a um bom planejamento, possam de fato favorecer o aprendizado da Matemática.

De acordo com o banco de teses da CAPES, só neste primeiro semestre de 2018 já foram desenvolvidas 26 pesquisas sobre o uso do GeoGebra, das quais 18 referem-se especificamente sobre o uso deste software em propostas metodológicas voltadas para o ensino de Matemática, conforme podemos ver nos dados organizados no Quadro 2.

Quadro 2: produções científicas desenvolvidas em 2018 sobre o tema GeoGebra e ensino de Matemática.

Teses de Doutorado	
Título do trabalho	Diferentes representações na geometria euclidiana por meio do uso do GeoGebra: um estudo com futuros professores de Matemática.
Autor/Instituição	Idelmar André Zanella – Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Título do trabalho	Matemática e o currículo da era digital: os desafios para a inovação na prática educativa.
Autor/Instituição	Anna Luisa de Castro – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP Bauru)

⁶ Os filtros utilizados nesta pesquisa com respectivo total de produções por área foram os seguintes: (a) Grande área do conhecimento – Ciências exatas e da terra (417), Multidisciplinar (154); (b) Área de conhecimento – Matemática (417), Ensino de ciências e Matemática (130), Ensino (24); (c) Área de avaliação – Matemática/probabilidade e estatística (417), Ensino (154); (d) Área de concentração – Ensino de Matemática (278), Matemática (168), Educação Matemática (68), Ensino de Ciências e Matemática (57).

Dissertações de Mestrado Profissional	
Título do trabalho	Uso de Animações no Ensino da Matemática.
Autor/Instituição	Thais de Barros Silvanly de Andrade – Universidade Federal da Bahia (UFBA)
Título do trabalho	Aplicações da trigonometria ao ensino de ondulatória utilizando o GeoGebra.
Autor/Instituição	Ricardo Sérgio Medeiros Magalhães – Universidade Federal do Maranhão (UFMA)
Título do trabalho	Uma aplicação do GeoGebra no ensino de função quadrática.
Autor/Instituição	Alan Bruno Lopes Barbosa – Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA)
Título do trabalho	Cálculo de áreas: Uma abordagem através do GeoGebra no Ensino Médio.
Autor/Instituição	Vilson Moraes de Sousa – Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)
Título do trabalho	O uso da calculadora gráfica GeoGebra no smartphone como ferramenta para o ensino das funções exponencial e logarítmica.
Autor/Instituição	Eduardo Leandro Peres Nogueira – Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)
Título do trabalho	Aplicações do GeoGebra no ensino das funções polinomiais de primeiro e segundo grau.
Autor/Instituição	Enildo Barbosa das Chagas Silva – Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)
Título do trabalho	A matemática e o futebol: aprendendo Matemática com as cobranças de pênaltis
Autor/Instituição	Fausto Lombardo Zola – Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)
Título do trabalho	Resolução de problemas no ensino de sistemas de equações lineares: um olhar sob as teorias de aprendizagem na realidade da escola contemporânea.
Autor/Instituição	Letsa Fabiola Barbosa Alves – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB)
Título do trabalho	Geometria Analítica: ensino e aprendizagem de tópicos elementares com apoio de malha quadriculada, GeoGebra e geoplano.
Autor/Instituição	Nilson Correia da Silva – Universidade de Brasília (UNB)
Título do trabalho	Limites e derivadas: uma abordagem para o ensino médio.
Autor/Instituição	Anderson Rafael Alves – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP Bauru)
Título do trabalho	A geometria na vila olímpica: uma proposta de atividade de geometria plana no ensino médio.
Autor/Instituição	Jader Soares dos Santos – Universidade Federal do Rio Grande (FURG)
Título do trabalho	Construções geométricas e padrões islâmicos.
Autor/Instituição	Rodnei Eduardo Fialho – Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Título do trabalho	Programação linear no Ensino Médio: uma análise do método gráfico.
Autor/Instituição	André Palomo – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Título do trabalho	O algoritmo de Euclides e uma generalização da sequência de Fibonacci.
Autor/Instituição	Raimundo Jorge Pereira de Matos – Universidade Federal da Bahia (UFBA)
Título do trabalho	Possibilidades para o estudo de otimização no Ensino Médio.
Autor/Instituição	Everson de Moura Ferreira – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Título do trabalho	Cálculo: uso de recursos computacionais para inserir conceitos de limites, derivadas e integrais no Ensino Médio.
Autor/Instituição	Helena Correa Ribeiro – Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Fonte: elaboração própria baseada em dados da Plataforma Sucupira da CAPES.

Ressaltamos que esta abordagem descritiva de todas estas pesquisas de mestrado e doutorado produzidas especificamente em 2018, se deu em função da necessidade de buscarmos indicativos sobre o que tem sido pesquisado sobre GeoGebra na atualidade, e em razão disso descreveremos todas estes trabalhos com maiores detalhes no Quadro 9 disponível

nos anexos deste trabalho, o qual apresenta além destas informações o resumo e as palavras-chave de cada pesquisa.

➤ **As produções científicas no âmbito de Curso de Matemática da FACIP/UFU sobre o tema GeoGebra**

Ao levarmos em consideração as produções científicas em nível de conclusão de curso de graduação das turmas de matemática da FACIP/UFU no período de 2010 a 2017, constatamos que dos 42 trabalhos⁷ apresentados neste período, sendo 27 das turmas de licenciatura e 15 das turmas de bacharelado, somente quatro versavam sobre o uso das TIC, dos quais apenas dois abordavam o tema GeoGebra, conforme podemos ver no Quadro 3.

Quadro 3: trabalhos de Conclusão de Curso com temáticas sobre o uso das TIC.

Trabalhos de Conclusão de Curso – Licenciatura em Matemática FACIP/UFU		
2011	Título	A utilização do software GeoGebra no ensino de Matemática.
	Autor	Leonardo Silva Costa
	Orientador	Profa. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho
	Resumo	O presente trabalho teve por objetivo a investigação do uso do software GeoGebra nas práticas pedagógicas voltadas para o ensino de Matemática, tanto da Educação Básica quanto do Superior. Para isso, foi realizado um levantamento bibliográfico com base nas publicações sobre o tema em três eventos: o ENEM, o maior encontro em Educação Matemática a nível nacional, o CIAEM, conferência de relevância na América Latina e o CNMAC, referência na discussão das pesquisas em Matemática Aplicada no país.
2013	Título	A modelagem matemática no GeoGebra e o ensino de geometria.
	Autor	Lucas Rafael Pereira Silva
	Orientador	Profa. Dra. Odaléia Aparecida Viana
	Resumo	Neste trabalho são descritos o processo de elaboração, aplicação e análise de uma sequência de atividades para o ensino da Geometria Espacial envolvendo a Modelagem Matemática e a utilização do software GeoGebra, na perspectiva da formação de conceitos e do desenvolvimento de habilidades em geometria. O modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico, as habilidades visual e gráfica, aliados à perspectiva da Modelagem Matemática, utilizando-se o software GeoGebra como ferramenta, implementaram o presente processo investigativo.
	Título	As contribuições das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento de projetos de modelagem matemática na educação básica: um estudo a partir de trabalhos disponíveis no CREMM.
	Autor	Mirian Ramos da Silva
	Orientador	Profa. Dra. Mirian Maria Andrade Gonçalves

⁷ Cabe-nos salientar que o Curso de Graduação em Matemática da FACIP/UFU recebeu sua primeira turma no início de 2007, concebendo seus primeiros formandos ao final de 2010. Em função disso é que foi estabelecido o período de 2010 a 2017 para a análise dos 42 trabalhos de TCC apresentados no Curso de Matemática, os quais se encontram todos organizados no Quadro 10 disponível nos anexos deste trabalho.

	Resumo	Nesta pesquisa foram investigados alguns trabalhos que utilizaram as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), mais especificamente o computador, para o desenvolvimento de projetos de Modelagem Matemática. Sob a luz da metodologia da pesquisa qualitativa, foram preenchidas fichas de registro para a análise de 09 trabalhos selecionados, dentre aqueles disponíveis na página virtual do Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino (CREMM), que tratam da utilização da Modelagem Matemática, do computador e suas possíveis relações.
2014	Título	Portal do professor: contribuições na formação docente no ensino de matemática financeira para o Ensino Médio.
	Autor	Heinrich da Solidade Santos
	Orientador	Prof. Dr. Vlademir Marim
	Resumo	Este trabalho foi desenvolvido com intuito de responder ao seguinte questionamento: quais são as contribuições postadas no site Portal do Professor, que visam à formação docente para lecionar Matemática, abordando o conteúdo de Matemática Financeira para o Ensino Médio? Para responder à pergunta, foi estabelecido, como objetivo geral, identificar e analisar as contribuições, para a formação docente, das dezesseis atividades de Matemática Financeira referentes ao tema números e operações do EM, disponibilizadas no site Portal do Professor.

Fonte: elaboração própria.

É importante frisar que na grade curricular do Curso de Matemática da FACIP/UFU, a qual se encontra atualmente em reformulação, existem apenas cinco disciplinas com enfoque no uso das TIC, as quais são: (a) Introdução à Ciência da Computação I e II; (b) Mecânica dos Fluidos Computacional; (c) Métodos Computacionais de Programação Não Linear; e (d) Verificação e Validação de Programas Computacionais.

Nenhuma das disciplinas citadas possui uma abordagem que preze pelas metodologias voltadas para o ensino de Matemática na Educação Básica, uma vez que o principal enfoque de cada uma delas está na linguagem de programação. Assim sendo, podemos presumir que o desenvolvimento das pesquisas descritas no Quadro 3 podem não ter sido motivadas por estas disciplinas, mas que podem ter encontrado respaldo nas atividades extracurriculares ofertadas pelo curso como, por exemplo, as iniciações científicas desenvolvidas por estes alunos durante a graduação, os minicursos ofertados pelos programas PET e PIBID da Matemática além dos trabalhos desenvolvidos nas oito edições da Semana de Matemática do Pontal (SEMAP), realizada desde 2010.

Entretanto, há que se enfatizar as contribuições que diversos outros atores tem dado no sentido de manter viva as discussões sobre o uso do GeoGebra e das TIC na educação, no âmbito do Curso de Graduação em Matemática da FACIP/UFU, dentre os quais podemos destacar: (a) o Núcleo de Matemática Aplicada e Computacional (NMAC)⁸; (b) a II SEMAP e

⁸ Grupo de pesquisa do Curso de Matemática da FACIP/UFU (atualmente inativo).

I WGP⁹; (c) a III SEMAP e I CMAP¹⁰; (d) o II WGP e I EEAMP¹¹; (e) a IV SEMAP e III WGP¹²; (f) a VIII SEMAP e I ERMAC¹³; (g) o Grupo de Estudo e Aplicação do GeoGebra ao Ensino da Matemática (GEAGEM)¹⁴; e (h) as diversas produções científicas sobre as experiências com o *software* GeoGebra realizadas por docentes do Curso de Matemática da FACIP/UFU, que inclusive culminaram na produção de um livro, intitulado “*GeoGebra: interface entre o ensino, a pesquisa e a extensão*”¹⁵, cuja publicação se deu no ano de 2013.

Em face disso, salientamos que a importância deste estudo acerca de todas estas produções científicas, encontram respaldo na justificativa da relevância do uso do *software* GeoGebra na Educação Matemática, o que nos leva a refletir e a compreender os espaços escolares como verdadeiros celeiros de pesquisa.

Abar (2012), ao citar Soares¹⁶ (1989), afirma que:

Essa compreensão do estado de conhecimento sobre um tema, em determinado momento, é necessária no processo de evolução da ciência, a fim de que se ordene periodicamente o conjunto de informações e resultados já obtidos, ordenação que permita indicação das possibilidades de integração de diferentes perspectivas, aparentemente autônomas, a identificação de duplicações ou contradições, e a determinação de lacunas e vieses (SOARES, 1989, p. 3).

Neste sentido, conhecer o que já foi construído e produzido nos leva a refletir sobre outras possibilidades de pesquisa que ainda não foram contempladas, e assim permitindo que o estudo do tema se torne o mais abrangente possível em suas múltiplas dimensões.

⁹ II Semana de Matemática do Pontal (II SEMAP) e I Workshop de GeoGebra do Pontal (I WGP) – 2011.

¹⁰ III Semana de Matemática do Pontal (III SEMAP) e o I Colóquio de Matemática Aplicada e Computacional do Pontal (I CMAP) – 2012.

¹¹ II Workshop de GeoGebra do Pontal (II WGP) e I Encontro de Ensino e Aprendizagem em Matemática do Pontal (EEAMP) – 2012.

¹² IV Semana de Matemática do Pontal (IV SEMAP) e III Workshop de GeoGebra do Pontal (III WGP) – 2013.

¹³ VIII Semana de Matemática do Pontal (VIII SEMAP) e I Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional do Pontal (I ERMAC) – 2017.

¹⁴ Grupo de estudo criado em 2009 por iniciativa de um grupo de professores da FACIP/UFU.

¹⁵ CARVALHO, Tânia Maria Machado de; MARIM, Vlademir. (Org.). **GeoGebra: interface entre o ensino, a pesquisa e a extensão**. 2ª ed. Ituiutaba: Editora EGIL, 2013.

¹⁶ SOARES, Magda. **Alfabetização no Brasil** – O Estado do conhecimento. Brasília: INEP/MEC, 1989.

1.3 Atividades de experimentação e investigação matemática com tecnologias digitais

O uso das tecnologias digitais em atividades de investigação matemática, ao longo das quatro fases, tem sido apontado por pesquisadores e estudiosos como sendo uma tendência metodológica de ensino no âmbito da Educação Matemática.

Esta tendência abrange atualmente uma série de propostas pedagógicas, que segundo Micotti (1999),

ao invés de transferência de conteúdos prontos, acentuam a interação do aluno com o objeto de estudo, a pesquisa, a construção dos conhecimentos para o acesso ao saber. As aulas são consideradas como situações de aprendizagem, de mediação; nestas são valorizados o trabalho dos alunos (pessoal e coletivo) na apropriação do conhecimento e a orientação do professor para o acesso ao saber (MICOTTI, 1999, p. 158).

Prezando por estes princípios, a presente pesquisa foi desenvolvida objetivando a construção do conhecimento matemático a partir da interação, exploração e investigação das relações e propriedades da trigonometria no triângulo retângulo por meio do *software* GeoGebra.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 13), “investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades”. Nesta perspectiva, as atividades de investigação matemática podem favorecer a exploração e compreensão de ideias e conceitos matemáticos, propiciando ao mesmo tempo o estabelecimento de conjecturas e generalizações a partir do conteúdo abordado.

No contexto de ambientes de aprendizagem Baldini e Cyrino (2012, p. CLI), defendem a integração entre a investigação matemática e o uso de *softwares* como, por exemplo, o GeoGebra, “que pode oportunizar a criação, a manipulação, a exploração de situações, análise, a elaboração de conjecturas, a verificação de regularidades, a discussão de resultados e a generalização”.

No entanto, as autoras ressaltam a necessidade da promoção de cursos de formação docente que suscitem discussões sobre as potencialidades destes *softwares* e sobre as diferentes metodologias de ensino que visem incluí-los nas práticas pedagógicas, objetivando com isso a sua integração no âmbito da sala de aula.

Pinheiro e Carreira (2013, p.149), por sua vez defendem que os ambientes de geometria dinâmica devem ser utilizados “em contextos que permitam explorar ideias, que conduzam à

discussão, reflexão e comunicação das descobertas matemáticas. Como tal, é fundamental repensar a natureza das tarefas a realizar em sala de aula”.

Para as autoras, outro fator também importante diz respeito à criação de um ambiente em sala de aula que “potencie a explicação matemática das conclusões que os alunos vão retirando da sua atividade matemática” (PINHEIRO e CARREIRA, 2013, p.149).

Segundo Borba, Silva e Gadanidis (2014), ao citarem Borba e Villarreal (2005), as atividades de experimentação com tecnologias devem ser elaboradas buscando oferecer meios que propiciem o (a):

(a) criação e simulação de modelos matemáticos; (b) geração de conjecturas matemáticas; (c) exploração de diversificadas formas de resoluções; (d) manipulação dinâmica de objetos construídos; (e) realização de testes de conjecturas usando um grande número de exemplos, modificando representações de objetos, simulando componentes de construções, etc.; (f) convencimento sobre a veracidade de conjecturas; (g) elaboração de novos tipos de problemas e construções matemáticas; (h) criação e conexões entre diferentes (e múltiplos) tipos de representações de objetos matemáticos; (i) exploração do caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos; (j) incentivo à combinação de raciocínios intuitivo, indutivo ou abduutivo, que podem contribuir ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo; (k) criação de atividades matemáticas “abertas controladas”, ou seja, com direcionalidade ao seu objetivo; (l) ensinar e aprender matemática de forma alternativa; (m) compreensão de conceitos; (n) conhecimento de novas dinâmicas, formas de conectividade e relações de poder em sala de aula; (o) envolvimento com um novo tipo de linguagem (informática) na comunicação matemática, além da escrita; (p) criação de diferentes tipos de símbolos e notações matemáticas; (q) aprofundamento em variados níveis de rigor matemático; (r) identificação de incoerências conceituais e/ou aprimoramento do enunciado (BORBA e VILLARREAL, 2005, *apud* BORBA, SILVA e GADANIDIS, 2014, p. 51-52).

Na concepção dos autores, estes aspectos da experimentação com tecnologias estão sustentados por uma perspectiva em que a produção do conhecimento matemático se dá por meio de descobertas, o que no contexto de ensino e aprendizagem da Matemática se constitui como sendo um fator devidamente necessário e apropriado.

Uma vez que o presente trabalho apresenta uma análise de atividades propostas que abordam a trigonometria no triângulo retângulo por meio de investigações geométricas no *software* GeoGebra, este poderia ser visto como um exemplo de aplicação das teorias citadas.

Nesta perspectiva foram elaboradas atividades de investigação geométrica pautadas no princípio da descoberta por exploração, seja pelo estabelecimento de relações entre as medidas dos ângulos, dos lados e das tangentes dos ângulos agudos de triângulos retângulos ou por situações problemas que poderiam ser resolvidas com a simples aplicação do conhecimento adquirido com o *software* GeoGebra nas atividades anteriores.

Quanto às atividades formuladas com auxílio dos *softwares* de representação gráfica, Borba e Penteado (2010) afirmam que estas,

além de naturalmente trazer a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: a experimentação. As novas mídias, como os computadores com *softwares* gráficos e as calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas experimentais de biologia ou de física (BORBA e PENTEADO, 2010, p. 37).

Neste contexto Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 71), afirmam que “a exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas [...]”.

Isso é algo que pôde ser evidenciado em uma das atividades propostas neste trabalho que, embora não tenha sido efetivamente realizada, foi elaborada sob a perspectiva da exploração dos conceitos matemáticos em uma situação real, objetivando com isso uma abordagem do conteúdo proposto de forma mais significativa ao aliar no mesmo contexto a teoria com a prática.

Segundo Gonçalves e Reis (2013), ao citarem Gravina e Santarosa¹⁷ (1998),

a presença das ferramentas computacionais nas aulas de Matemática não implica no abandono de outros instrumentos educacionais. A informática é um recurso auxiliar que possibilita o alcance dos resultados na aprendizagem, por meio do seu uso adequado e conciliação das diversas formas de se ensinar e aprender, com o professor e o aluno desempenhando seus papéis. Tudo isso considerando que, sozinha, a ferramenta computacional não produz conhecimento (GONÇALVES e REIS, 2013, p. 426).

Neste sentido, é importante frisar que o uso das tecnologias digitais dentro da sala de aula por si só não são suficientes para garantir o estabelecimento de práticas pedagógicas cem por cento exitosas, assim, consideramos como sendo de extrema importância a determinação de objetivos com propósitos bem definidos, que aliado a um bom planejamento, possa de fato contribuir para o aprendizado dos alunos.

Com as atividades de investigação isso também não poderia ser diferente, sendo crucial o estabelecimento de um bom planejamento, atrelado a objetivos passíveis de serem alcançados. Mas isso é algo que antes perpassa pela compreensão de como as atividades de investigação habitualmente se desenvolvem.

¹⁷ GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. **A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados**. In: IV Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, 1998, Brasília. Anais. Brasília: RIBIE, 1998. Disponível em: <http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/aprendizagem_mat.pdf>. Acesso em: 23 mai. 2018.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), as atividades de investigação normalmente ocorrem em três fases, as quais podem ser realizadas em apenas uma aula ou em um conjunto de aulas. Estas fases, de acordo com os autores, são definidas como:

(a) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito; (b) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma; e (c) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. Essas fases podem ser concretizadas de muitas maneiras (PONTE, BROCARDIO e OLIVEIRA, 2006, p. 25).

Para os autores, os procedimentos adotados atualmente pela maioria dos professores envolve uma breve introdução do conteúdo com a posterior realização da investigação em pequenos grupos, que depois de finalizada deverá ter os seus resultados discutidos com a participação de todos os grupos.

Essas discussões são de extrema importância, sobretudo por nos darem subsídios para a compreensão não só dos acertos, mas também dos erros cometidos pelos alunos. Segundo Lorenzato (2010), os erros cometidos pelos alunos revelam os diferentes modos que eles utilizam para pensar, escrever e agir.

Nesta perspectiva, o autor aponta ainda distintas causas para a ocorrência do erro, o qual pode ocorrer por:

falta de atenção, pressa, chute, falha de raciocínio, falta de estudo, mau uso ou má interpretação da linguagem oral ou escrita da matemática, deficiência de conhecimento da língua materna ou conceitos matemáticos. Detectar a(s) causa(s) de cada erro, na maioria das vezes, não é fácil (LORENZATO, 2010, p. 50).

E quando o assunto em questão envolve tecnologias, é necessário se ter um cuidado a mais para que os erros cometidos pelos alunos sejam o mínimo possível. Neste sentido, Gonçalves e Reis (2013), ao citarem Gravina e Santarosa (1998), ressaltam alguns cuidados a serem tomados em função da utilização da informática em sala de aula, os quais enfatizam que as atividades não podem ficar restritas a mera repetição de exercícios e que o desconhecimento das ferramentas do *software* não pode dificultar a realização de uma determinada tarefa.

Nesta perspectiva o professor acaba por desempenhar um grande papel ao subsidiar os alunos com todas as informações necessárias para a realização de suas tarefas, sendo por assim ser um elemento-chave nas aulas de investigação, “cabendo-lhe ajudar o aluno a compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo” (PONTE, BROCARDIO e OLIVEIRA, 2006, p. 26).

CAPÍTULO 2

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: UMA PROPOSTA DE ENSINO POR MEIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Neste capítulo será descrita toda a metodologia desenvolvida para a realização deste trabalho, o que inclui a descrição de como foi elaborada e planejada a proposta de pesquisa e o contexto em que ela ocorreu, bem como a descrição detalhada de cada uma das atividades propostas e realizadas com o auxílio do *software* GeoGebra.

2.1 Elaborando e planejando a proposta

O conjunto de atividades propostas para a realização desta pesquisa foi desenvolvido no primeiro semestre de 2016, objetivando com isso a dispensa da disciplina Estágio Supervisionado IV do Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Integradas do Pontal (FACIP) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU).

Para isso foram realizados encontros semanais com a professora da disciplina de estágio supervisionado, em que foram discutidas algumas das possibilidades de ensino do conteúdo

Trigonometria no triângulo retângulo, por meio do *software* GeoGebra, com ênfase na conceituação de tangente de ângulos agudos.

As atividades propostas foram pensadas em um nível compatível com o conhecimento prévio acerca do assunto, de alunos do 1º Ano do Ensino Médio. Neste caso, vale ressaltar que o desenvolvimento deste conjunto de atividades não tinha como pretensão a realização de uma abordagem inicial do conteúdo, mas sim a sua (re)apresentação sob um novo enfoque e na perspectiva do uso das TD voltadas para o ensino e aprendizagem da matemática.

É importante frisar que estas atividades foram criadas apenas com intuito de compor uma proposta didática de ensino sem a necessidade de aplicação imediata, a qual deveria ficar disponível em uma mídia digital no Laboratório de Ensino de Matemática (LEMAT) da FACIP/UFU, e acessível a qualquer um que se interessasse pelo conteúdo abordado e pela sua aplicação em alguma turma do 1º Ano do Ensino Médio.

No planejamento desta proposta foram estabelecidos os objetivos Geral e Específicos, os quais foram delimitados tendo em vista a criação de um material que pudesse ser aproveitado da melhor maneira possível, conforme as indicações descritas na organização estrutural do Quadro 2:

Quadro 4: objetivos propostos com a realização das atividades.

Objetivos	Descrição dos objetivos
Geral	Conceituar tangente de um ângulo agudo no triângulo retângulo.
Específicos	Relacionar o conhecimento matemático visto em sala de aula com situações problemas vivenciadas em nosso cotidiano.
	Estimular o espírito crítico, investigativo e de curiosidade dos alunos a fim de lhes proporcionar um aprendizado significativo dos conceitos e definições da trigonometria no triângulo retângulo.
	Incentivar o uso dos recursos tecnológicos, a exemplo do software matemático GeoGebra, em que o aluno passa a ser o principal agente na construção do seu próprio conhecimento por meio de atividades que permitem a simulação de inúmeras possibilidades dentro do contexto de uma situação problema.
	Determinar os valores das tangentes dos ângulos de medidas variadas: $tg(5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ, 55^\circ, 60^\circ, 65^\circ, 70^\circ, 75^\circ, 80^\circ, 85^\circ)$.
	Verificar o intervalo de variação das medidas da tangente de um ângulo.
	Aplicar o conceito de tangente na solução de problemas.

Fonte: elaboração própria.

Dentre estes objetivos, aqueles que de fato podem ser considerados como a verdadeira essência pela qual se constituiu o presente trabalho reforçam a ideia de que a matemática vista em sala de aula deve se relacionar com as situações vivenciadas em contextos reais, estimulando o espírito crítico e investigativo dos alunos ao mesmo tempo em que devem contribuir para que eles se tornem o principal agente na construção do seu próprio conhecimento.

Partindo desta perspectiva foram elaboradas ao todo cinco atividades, das quais quatro deveriam ser realizadas dentro de um laboratório de informática, sendo exploradas individualmente por cada aluno por meio do *software* GeoGebra. Estas atividades serão descritas em maiores detalhes nos subitens de 2.1.1 a 2.1.4, com isso cumpre-nos fazer, até este momento, apenas uma breve descrição de cada uma delas.

A primeira atividade foi elaborada visando à conceituação da tangente de um ângulo agudo a partir do estabelecimento de regularidades da razão cateto oposto a 30° sobre cateto adjacente a 30° de três triângulos retângulos, todos com ângulos internos medindo 30°, 60° e 90°.

Estas regularidades poderiam ser verificadas por meio do preenchimento de uma planilha disponível no menu **Exibir** do *software* GeoGebra e que por sua vez tem funcionalidades bem similares ao do programa Excel da Microsoft.

A segunda e a terceira atividade foram pensadas objetivando a verificação do comportamento da tangente dos ângulos compreendidos na escala que vai dos 5° aos 85°, utilizando para isso uma planilha com as mesmas características da que foi criada para a primeira atividade.

Na elaboração da quarta atividade foram propostas cinco questões que abordavam uma situação problema, a qual poderia ser resolvida com base na aplicação do conhecimento adquirido nas três atividades anteriores.

Por fim, discutiu-se na quinta atividade a possibilidade de reproduzir em um contexto real a mesma situação problema descrita na quarta atividade, utilizando para a medição dos ângulos um teodolito¹⁸ construído artesanalmente com materiais simples como, por exemplo, um transferidor de 180°, um fio de nylon, um tubo cilíndrico de caneta e um peso qualquer.

Em razão do pouco tempo destinado para a realização das cinco atividades, cerca de duas aulas geminadas de 50 min cada uma, foi proposto que o teodolito artesanal fosse previamente construído em uma aula a parte ou em casa, ficando a cargo do professor levar para a sala de aula pelo menos três exemplares prontos e repassar para os alunos as orientações concernentes aos materiais a serem utilizados e as técnicas de montagem deste instrumento, conforme as orientações descritas no material didático.

¹⁸ Instrumento de precisão utilizado para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos geodésicos, topográficos e também em diversos setores como na navegação, na construção civil, na agricultura e na meteorologia.

2.1.1 Reformulando a proposta

Conforme aquilo que foi exposto anteriormente, ficou definido que esta proposta didática de ensino se delimitaria apenas à sua elaboração e planejamento, estando isenta da obrigatoriedade de sua aplicação em um contexto prático. Entretanto, no segundo semestre de 2016 surgiu a possibilidade de aplicação desta proposta didática pelo Programa de Educação Tutorial (PET) da Matemática (PET Matemática Pontal), em uma instituição pública de Ensino Médio do município de Ituiutaba/MG.

Com isso, viu-se a necessidade de reformular a proposta inicial por meio do acréscimo de alguns elementos como, por exemplo, uma apresentação em PowerPoint do contexto histórico acerca do conteúdo abordado, uma reprodução gráfica e dinâmica do teodolito artesanal na interface do GeoGebra, bem como a reprodução gráfica de uma calculadora de altura construída com base especificamente naquilo que foi proposto com a realização da quinta atividade, só que agora em um contexto real.

Vale ressaltar que, tanto o teodolito como a calculadora de altura construídos graficamente no GeoGebra serão expostos em maiores detalhes na explicitação da quinta atividade, que será descrita mais adiante.

Na apresentação do contexto histórico seria relatado um fato que ocorreu por volta de 600 anos antes de Cristo com o comerciante, filósofo e matemático grego Tales de Mileto (624 a. C. – 558 a. C.), quando em uma de suas viagens ao Egito foi desafiado a medir a altura da grande pirâmide de Quéops, que media em torno de 146,6 metros quando foi construída o equivaleria hoje a um edifício de 48 andares.

Figura 1: pirâmide de Quéops.

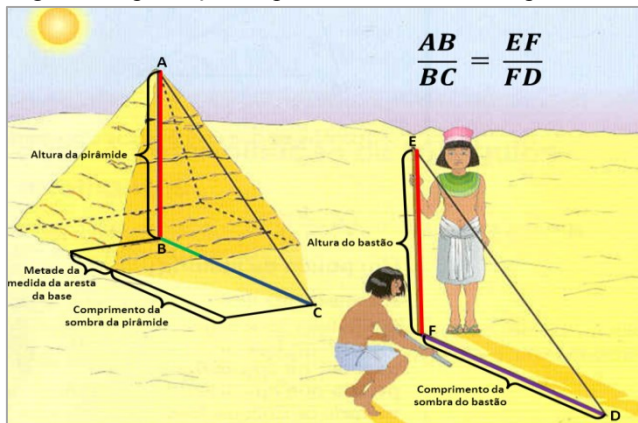


Fonte: <http://viagensinspiradoras.com.br/egito/04pq/>

Segundo conta a história, Tales conseguiu vencer o desafio por meio da utilização de um procedimento simples baseado na projeção de sombras e na semelhança de triângulos retângulos, o que por sua vez ajudou a desenvolver a geometria e também a trigonometria.

Na Figura 2 é possível visualizar uma representação gráfica do procedimento utilizado por Tales que enfatiza justamente a aplicação dos conceitos matemáticos em uma situação problema passível de ser reproduzida em um contexto real.

Figura 2: reprodução do procedimento utilizado por Tales.



Fonte: elaboração própria adaptada do site:

<https://sites.google.com/site/vidaeobradetalesdemileto/o-teorema-de-tales>.

A partir daí seriam formuladas algumas perguntas para os alunos sobre como este mesmo problema poderia ser resolvido de outras formas, utilizando para isso procedimentos simples envolvendo conceitos matemáticos, mas sem necessariamente recorrer à mesma técnica de projeção de sombras.

2.1.2 Descrição da atividade 1

A atividade 1 consistia no estabelecimento de relações entre três triângulos retângulos, todos com ângulos congruentes entre si. Na figura 1 é mostrada uma representação gráfica de como esta atividade foi estruturada.

Figura 3: representação gráfica da Atividade 1.

Atividade 1

- Modifique as dimensões dos três triângulos abaixo de modo que tenhamos na mesma Janela de Visualização um triângulo pequeno, um médio e um grande.
- Verifique em cada triângulo as medidas dos catetos oposto e adjacente e transcreva para a tabela ao lado as medidas encontradas.
- Determine nos triângulos construídos a medida da razão: $\frac{\text{cateto oposto a } 30^\circ}{\text{cateto adjacente a } 30^\circ}$

	A	B	C	D
1	Triângulo	Cat. Oposto a 30°	Cat. Adjacente a 30°	Razão
2	Δ ABC			
3	Δ DEF			
4	Δ GHI			
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				

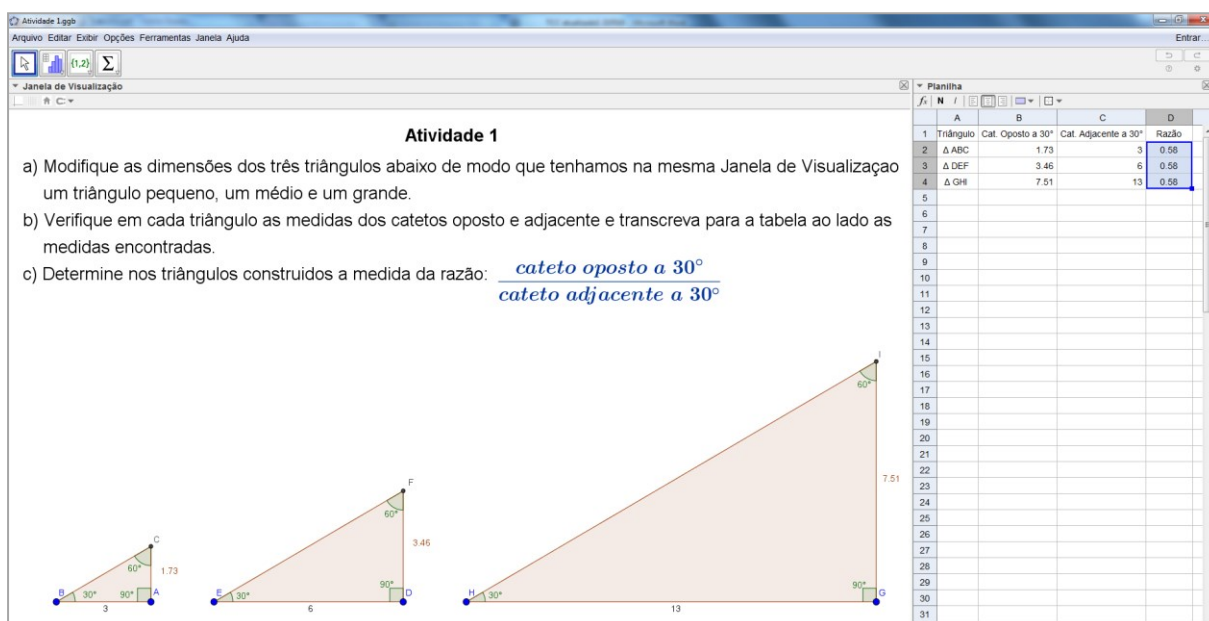
Fonte: elaboração própria.

Inicialmente seria realizada uma pergunta aos alunos sobre as propriedades comuns aos três triângulos dispostos na Janela de Visualização do GeoGebra, abrangendo as medidas dos lados de cada triângulo e seus respectivos ângulos. Em seguida, eles seriam orientados a responder o item “a” desta atividade, modificando as dimensões de cada triângulo.

A partir disso se abriria um espaço para uma discussão em que os alunos argumentariam sobre a preservação da característica de semelhança destes triângulos, ou seja, eles deveriam justificar se os triângulos ainda continuavam sendo semelhantes ou não, após a alteração das suas dimensões.

No item “b” desta atividade eles deveriam indicar as medidas dos lados de cada um dos triângulos, transcrevendo para a Planilha anexa à atividade as medidas dos catetos oposto e adjacente ao ângulo de 30° de cada triângulo, e a partir disso responder ao item “c”, determinando a medida da razão cateto oposto a 30° sobre cateto adjacente a 30° , conforme podemos ver na Figura 4.

Figura 4: preenchimento da planilha com as medidas dos lados de cada triângulo.



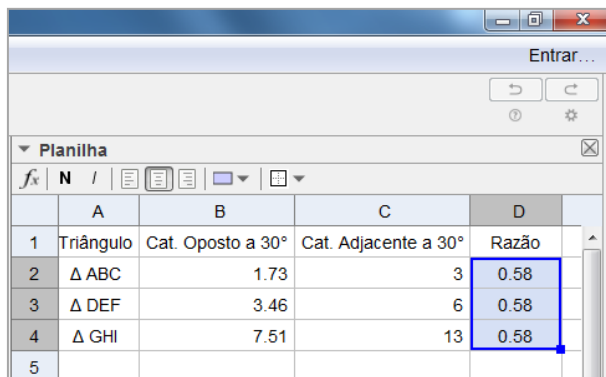
Fonte: elaboração própria.

Para determinar a medida desta razão nos três triângulos, bastaria utilizar as mesmas fórmulas utilizadas em planilhas como a do Excel, ou seja, para calcularmos a razão dos catetos oposto e adjacente do triângulo ABC, seria necessário digitar na célula D2 da Planilha do GeoGebra a fórmula B2/C2.

Preenchidos todos os valores correspondentes da coluna Razão, teríamos em comum o mesmo valor para as três razões, independente das dimensões dos triângulos. Conforme

podemos ver na Figura 5, este valor ficaria em torno de (0.58) o que equivale aproximadamente ao mesmo valor da razão $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Figura 5: determinação da razão de cada triângulo.



	A	B	C	D
1	Triângulo	Cat. Oposto a 30°	Cat. Adjacente a 30°	Razão
2	Δ ABC	1.73	3	0.58
3	Δ DEF	3.46	6	0.58
4	Δ GHI	7.51	13	0.58
5				

Fonte: elaboração própria.

Com isso, seria enfatizado que esta razão tem um nome específico chamado de “tangente”, que neste caso em específico seria representada por:

$$tg 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto a } 30^\circ}{\text{cateto adjacente a } 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

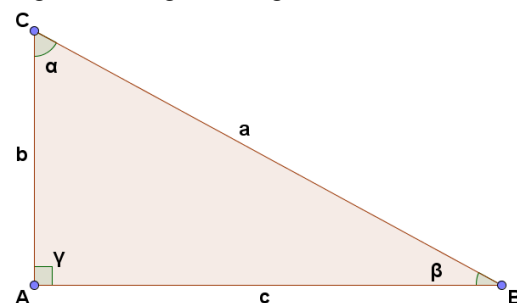
A partir disso seriam formalizadas algumas definições como, por exemplo:

- **Semelhança de triângulos:** “Dizemos que dois triângulos são semelhantes entre si quando os seus ângulos internos são congruentes e os seus lados correspondentes são proporcionais”.
- **Tangente de um ângulo agudo:** “Dado um triângulo retângulo ABC definimos como tangente de um ângulo agudo a razão entre o cateto oposto a esse ângulo e o cateto adjacente a ele”. Ou seja:

$$tg \beta = \frac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{cateto adjacente a } \beta} = \frac{b}{c}$$

$$tg \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{c}{b}$$

Figura 6: triângulo retângulo ABC.



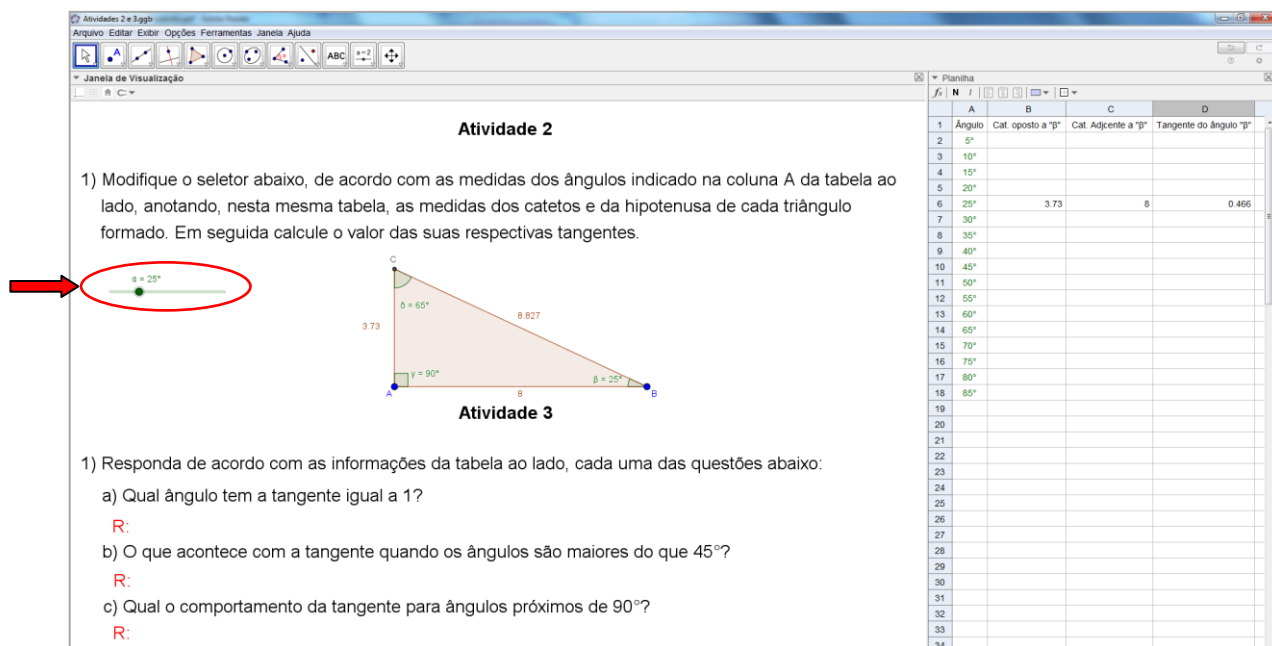
Fonte: elaboração própria.

Depois de formalizadas estas definições, partiríamos então para a generalização do conceito de tangente para outros ângulos diferentes de 30°. Essa foi a proposta adotada na elaboração das Atividades 2 e 3, conforme veremos a seguir na descrição detalhada de cada uma delas.

2.1.3 Descrição das atividades 2 e 3

A Atividade 2 consistia em determinar a tangente de ângulos de medidas variadas como, por exemplo, $tg\ 5^\circ$, $tg\ 10^\circ$, $tg\ 15^\circ$ até a $tg\ 85^\circ$. Para isso, os alunos seriam orientados a transcrever para a Planilha da Figura 7, as medidas dos catetos oposto e adjacente ao ângulo β do triângulo ABC, conforme a variação do Controle Deslizante indicado na Janela de Visualização.

Figura 7: representação gráfica das atividades 2 e 3.



Fonte: elaboração própria.

A partir dessas informações seria possível calcular a medida da tangente do ângulo β por meio dos mesmos procedimentos indicados na Atividade 1, ou seja, no exemplo da Figura 7 a determinação da tangente do ângulo de 25° foi feita calculando a razão entre o valor indicado na célula B6 pelo valor indicado na célula C6, assim temos, $B6/C6 = 0,466$, sendo este o valor aproximado da tangente do ângulo de 25° .

Depois de preenchida toda a Planilha com a indicação do valor das tangentes dos ângulos de 5° a 85° , os alunos deveriam responder, com base nos valores obtidos, as seguintes perguntas:

- Qual ângulo tem a tangente igual a 1?
- O que acontece com a tangente quando os ângulos são maiores do que 45° ?
- Qual o comportamento da tangente para ângulos próximos de 90° ?

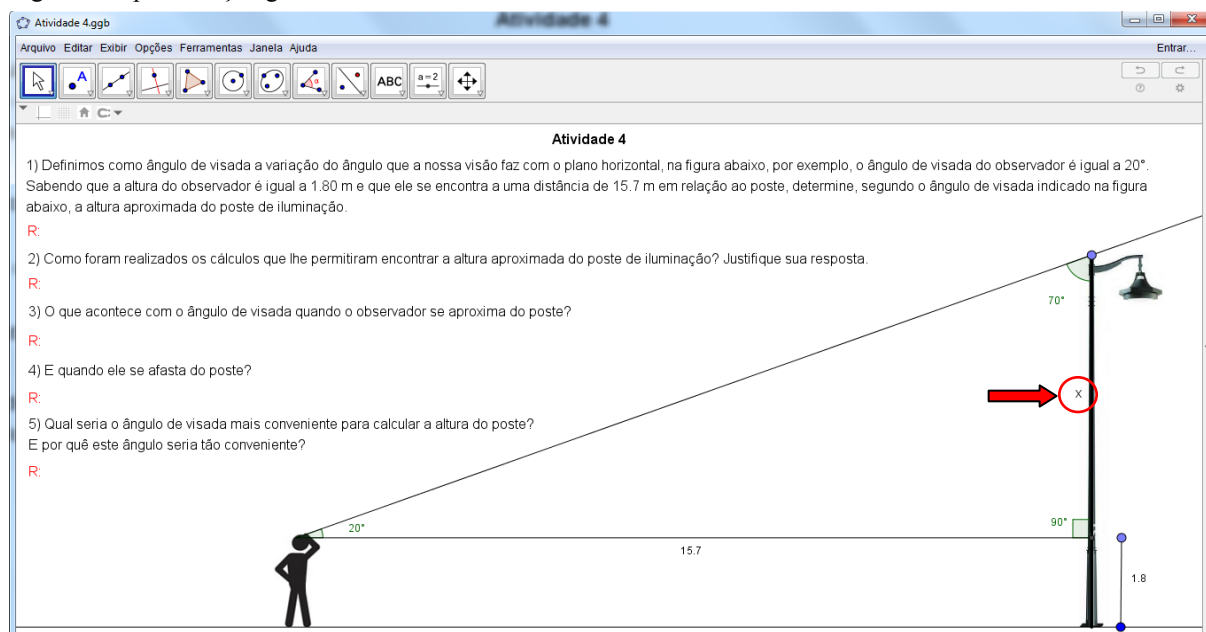
Isso justifica a junção das duas atividades em um mesmo arquivo, uma vez que as informações obtidas na segunda atividade subsidiaria a resolução da terceira.

2.1.4 Descrição da atividade 4

Na Atividade 4 os alunos deveriam responder a cinco questões, a primeira consistia em calcular a altura aproximada de um poste de iluminação sendo conhecidas a altura de um observador, a distância dele em relação ao poste e o ângulo de visada, que por sua vez é definido como sendo a variação do ângulo que a nossa visão faz com o plano horizontal à altura dos nossos olhos.

Nesta questão, a altura do observador é igual a $1,80m$, a sua distância em relação ao poste em torno de $15,7m$ e o ângulo de visada em relação ao topo do poste igual a 20° . De acordo com estas informações os alunos seriam instigados a calcular a medida x indicada na Figura 8, utilizando todo conhecimento por ele adquirido nas atividades anteriores.

Figura 8: representação gráfica da Atividade 4.



Fonte: elaboração própria.

Esperava-se que nesta atividade eles tivessem o seguinte entendimento:

i. A tangente de 20° do triângulo retângulo da figura é dada por:

$$\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{x}{15,7} \quad \rightarrow \quad x = \operatorname{tg} 20^\circ * 15,7$$

ii. Conforme os valores obtidos com a planilha da Atividade 2, a tangente de 20° é igual a $0,363$, com isso o valor de x seria calculado da seguinte forma:

$$x = \operatorname{tg} 20^\circ * 15,7 \quad \rightarrow \quad x = 0,363 * 15,7 \cong 5,69$$

iii. Logo, a altura do poste seria igual à soma da altura do observado com o valor encontrado para x , ou seja:

$$\text{altura do poste} = 1,80 + 5,69 \cong 7,5$$

Era justamente este entendimento que os alunos deveriam expor na resolução da segunda questão, que por sua vez foi criada com intuito de compreendermos o raciocínio e as técnicas utilizadas por eles na resolução da questão anterior.

Quanto às questões de 3 a 5, estas consistiam em ampliar a compreensão dos alunos acerca desta situação problema, para isso eles deveriam responder aos seguintes questionamentos:

- 3) *O que acontece com o ângulo de visada quando o observador se aproxima do poste?*
- 4) *E quando ele se afasta do poste?*
- 5) *Qual seria o ângulo de visada mais conveniente para calcular a altura do poste? E por que este ângulo seria tão conveniente?*

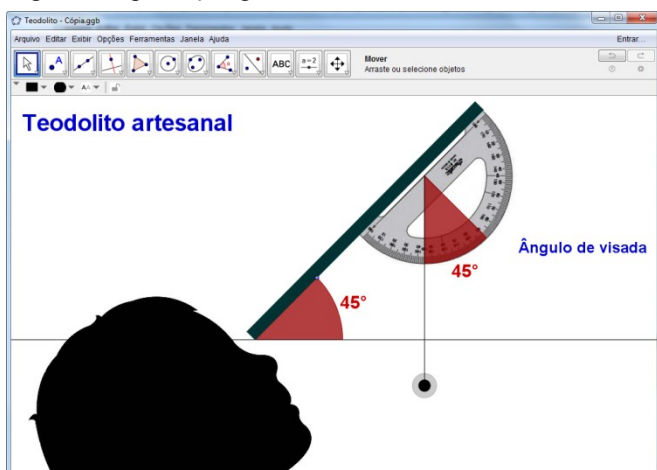
Para que as questões 4 e 5 fossem respondidas, os alunos precisariam mover o observador para frente e para trás e descrever as suas impressões acerca da variação do ângulo de visada.

Na quinta questão, se subentende que eles deveriam ser capazes de compreender que o ângulo de visada mais conveniente é o de 45° , pois a razão entre a medida x e a distância do observador é igual a 1, o que significa que a medida x seria exatamente igual a distância do observador em relação ao poste.

2.1.5 Descrição da atividade 5

A quinta atividade, de caráter prático, tinha por objetivo a aplicação dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo vistos em sala de aula em um contexto real. Uma forma interessante de se fazer isso seria por meio da utilização de um teodolito construído artesanalmente, conforme podemos ver nas Figuras 9 e 10.

Figura 9: reprodução gráfica de um teodolito artesanal.



Fonte: elaboração própria.

Figura 10: teodolito artesanal



Fonte: arquivo pessoal do autor.

Para a construção deste instrumento seria necessário a utilização de materiais bem simples como, um transferidor de 180° , cerca de 20cm de fio de nylon, um peso qualquer e um cilindro de uma caneta esferográfica.

Cabe-nos salientar que no protótipo mostrado na Figura 10 foram utilizados alguns materiais diferentes do recomendado como, uma haste em alumínio de uma antena UHF/VHF estilo espinha de peixe, e uma pedra envolta em fita isolante e presa ao fio de nylon.

Quanto à reprodução gráfica do teodolito mostrado na Figura 9, esta serviria apenas para que os alunos compreendessem o funcionamento deste instrumento a partir da sua manipulação gráfica para diferentes ângulos.

Depois de repassadas todas estas orientações, os alunos deveriam se dirigir até a área externa da escola e medir, com auxílio do teodolito artesanal, a altura do poste de iluminação mostrado na Figura 11.

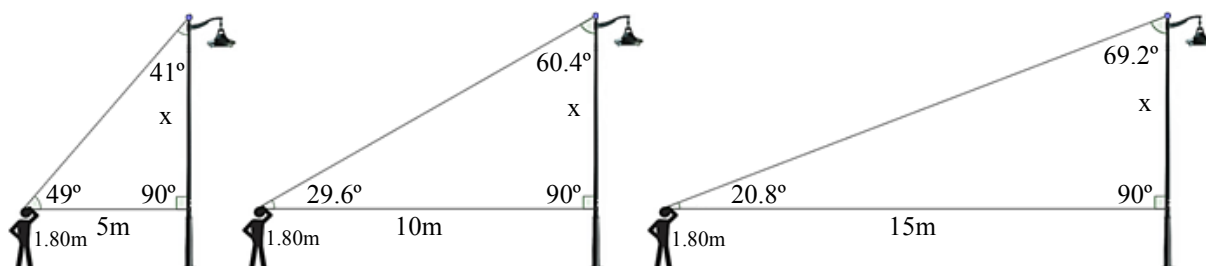
Figura 11: poste de iluminação da escola.



Fonte: arquivo pessoal do autor.

Para isso, seria necessário que os alunos se organizassem em grupos de três e realizassem pelo menos três medições com distâncias de 5, 10 e 15 metros em relação à base do poste. Na Figura 12 é possível visualizar uma representação gráfica de como isso de fato poderia ser feito.

Figura 12: representação gráfica da situação problema.



Fonte: elaboração própria.

Tomando como exemplo a ilustração representada na Figura 12, os dados a serem registrados pelo primeiro grupo de alunos seriam os seguintes: (a) 1º Observador: altura (1.80m), distância (5m), ângulo (49°); (b) 2º Observador: altura (1.80m), distância (10m), ângulo (29.6°); (c) 3º Observador: altura (1.80m), distância (15m), ângulo (20.8°).

Cabe ressaltar que neste exemplo foram utilizadas as mesmas alturas por se tratar de um mesmo observador, mas numa situação real teríamos possivelmente três observadores com diferentes alturas.

Assim, cada um dos grupos, após finalizadas todas as suas medições, seria orientado a utilizar neste primeiro momento a calculadora dos seus celulares para estimar a altura aproximada do poste de iluminação, registrando para isso todos os seus cálculos.

Em seguida, eles deveriam voltar ao laboratório de informática e validar os seus cálculos por meio da utilização da calculadora gráfica de altura, que por sua vez foi projetada no GeoGebra especificamente para esta finalidade, conforme podemos ver na Figura 13 mostrada a seguir.

Figura 13: calculadora gráfica de altura.

Calculadora de altura

Insira nos campos abaixo as informações solicitadas:

Ângulo de visada: 49°
 Distância em relação ao poste: 5
 Altura do 1º observador: 1.8
1ª Altura aproximada: 7.6 metros.

Ângulo de visada: 29.6°
 Distância em relação ao poste: 10
 Altura do 2º observador: 1.8
2ª Altura aproximada: 7.5 metros.

Ângulo de visada: 20.8°
 Distância em relação ao poste: 15
 Altura do 3º observador: 1.8
3ª Altura aproximada: 7.5 metros.

A altura do poste é de aproximadamente: 7.5 metros.
☒ Exibir resultado

Fonte: elaboração própria.

Por fim, se abriria um pequeno espaço de tempo para discussões, em que os alunos poderiam argumentar sobre as suas impressões acerca da realização destas atividades, se o aprendizado para eles foi significativo ou não e quais foram os pontos positivos e negativos que eles conseguiram perceber. Para concluir, o professor poderia enfatizar a importância da Matemática estar presente em tudo, e que independente do tempo ela se mantém prática e eficiente como sempre.

2.2 O contexto da pesquisa

Conforme aquilo que foi relatado no início deste capítulo, o desenvolvimento desta pesquisa não se deu em razão da produção de um trabalho de conclusão de curso, mas sim visando atender a uma exigência do colegiado do Curso de Matemática da FACIP/UFU para a concessão da dispensa da disciplina Estágio Supervisionado IV, cujo relator do processo encaminhado à coordenação de curso havia conferido parecer favorável a dispensa dela, impondo para isso apenas uma condição, a de que fosse produzido um material didático para o LEMAT como forma de complementação de conteúdo da disciplina.

Após a finalização da proposta didática, segundo orientações da professora da disciplina, foi entregue ao LEMAT um versão desta proposta salva em mídia digital (CD-ROM), contendo além dos arquivos das atividades também algumas orientações de como proceder com sua aplicação.

No final do segundo semestre de 2016, surgiu a possibilidade de aplicação desta proposta didática por meio do grupo PET da Matemática, cujo planejamento elaborado para este ano incluía em uma de suas atividades de extensão a realização de uma atividade chamada “UFU vai à escola”.

Esta atividade tinha como principal fundamento a integração da FACIP/UFU com a comunidade externa do município de Ituiutaba/MG, por meio da realização de propostas didáticas de ensino desenvolvidas no âmbito deste grupo PET e da UFU, voltadas especificamente para as escolas públicas do município.

Neste mesmo período, diversas escolas estaduais, municipais e universidades de todo Brasil, incluindo a UFU, estavam com as suas atividades escolares e acadêmicas paralisadas em função de uma greve geral, o que acabou abrangendo diversos estados do território nacional.

Algumas das escolas da rede estadual de ensino chegaram a ser ocupadas por estudantes do Ensino Médio, a exemplo da Escola Estadual Coronel Tonico Franco no município de Ituiutaba, que apesar disso se encontrava aberta para a promoção de atividades, como palestras e minicursos voltadas para estes alunos.

Em meio a este cenário e com poucas alternativas, viu-se nesta escola uma possibilidade de aplicação desta atividade, o que nos levou a entrar em contato com as lideranças deste movimento para verificar a viabilidade de aplicação desta proposta didática a partir das condições em que se encontrava o laboratório de informática da escola.

Por fim, chegamos a conclusão de que as condições em que a escola se encontrava não eram favoráveis a realização desta atividade nos moldes que havíamos planejado, além disso ficou constado uma quantidade de computadores insuficiente para a realização da atividade.

Com isso, tivemos que procurar outra instituição em que fosse viável a aplicação desta proposta didática, foi assim que entramos em contato com um professor de Matemática do Instituto Federal do Triângulo Mineiro (IFTM), cuja formação em licenciatura se deu justamente pela FACIP/UFU.

O primeiro contato que havíamos mantido com este professor se deu no primeiro semestre de 2016 em razão da realização de uma entrevista para a disciplina Projeto Integrado de Prática Educativa III (PIPE III), que buscava investigar como se dava a sua prática pedagógica no cotidiano escolar.

A partir disso ficou mais fácil levar esta proposta didática para o IFTM, uma vez que este professor demonstrou uma boa receptividade em aplicar esta atividade em uma de suas turmas do Ensino Médio, mesmo com o conteúdo diferente daquele que estava em seu planejamento.

Assim, na manhã do dia 30 de novembro de 2016 foi possível realizar esta atividade em um dos laboratórios de informática do IFTM com cerca de 32 alunos do 1º Ano do Ensino Médio Técnico do curso de Química. Na Figura 14 é possível verificar como ficou disposta e organizada uma determinada parte da turma dentro do laboratório de informática.

Figura 14: realização das atividades pelos alunos.



Fonte: arquivo pessoal do autor.

Inicialmente tivemos alguns contratempos que fizeram com que a atividade atrasasse por alguns minutos como, por exemplo, a instalação do *software* GeoGebra que não havia sido realizada em tempo hábil em todos os computadores, bem como a instalação de um *Datashow* para a projeção dos slides referentes ao contexto histórico da pesquisa.

É importante salientar que a pesquisa aqui realizada refere-se a um estudo de caso qualitativo com o propósito específico de investigar as potencialidades do *software* GeoGebra quanto ao ensino da trigonometria no triângulo retângulo. Essa questão será tratada mais adiante por meio da análise dos dados e diagnóstico a partir da descrição das informações obtidas.

Segundo Lüdke e André (1986, p. 18), o estudo de caso qualitativo “é o que se desenvolve numa situação natural, é rico em dados descritivos, tem um plano aberto e flexível e focaliza a realidade de forma complexa e contextualizada”.

Neste sentido, definem ainda o estudo de caso como sendo “naturalístico”, segundo o qual possui as seguintes características fundamentais: (a) visam à descoberta; (b) enfatizam a “interpretação em contexto”; (c) buscam retratar a realidade de forma completa e profunda; (d) usam uma variedade de fontes de informação; (e) revelam experiência vicária e permitem generalizações naturalísticas; (f) procuram representar os diferentes e às vezes conflitantes pontos de vista presentes numa situação social; e (g) utilizam uma linguagem e uma forma mais acessível do que os outros relatórios de pesquisa.

CAPÍTULO 3

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Com base no referencial teórico e na metodologia empregada no desenvolvimento desta pesquisa, apresentaremos neste capítulo todos os dados obtidos com a realização das atividades propostas e também a análise fundamentada sobre cada uma delas. Esta análise será realizada por meio do cruzamento dos dados levantados em face do referencial teórico apresentado no primeiro capítulo.

3.1 Apresentação dos dados

Inicialmente foi realizada uma apresentação em PowerPoint sobre a vida do filósofo e matemático grego Tales de Mileto, abordando um fato histórico ocorrido com ele por volta de 600 anos antes de Cristo, fato este que por sua vez também contribuiu para o desenvolvimento da trigonometria.

Segundo conta a história, ao realizar uma de suas viagens ao Egito para fazer comércio Tales foi desafiado pelos escribas fariseus a medir a altura da grande pirâmide de Quéops, a qual media em torno de 146,6 metros quando foi construída na necrópole de Gizé juntamente com outras duas pirâmides, a pirâmide de Quéfren e a pirâmide de Miquerinos.

A partir disso, foram feitos dois questionamentos aos alunos, o primeiro era sobre como Tales conseguiu vencer o desafio e o segundo sobre como a mesma pirâmide poderia ter a sua altura medida com outra técnica diferente da utilizada por Tales.

Poucos foram os que se arriscaram a propor uma solução para o problema, e todos sem exceção, acreditavam que para medir a altura da pirâmide de Quéops, Tales havia subido até o topo da pirâmide e utilizado algum instrumento auxiliar para fazer a devida medição.

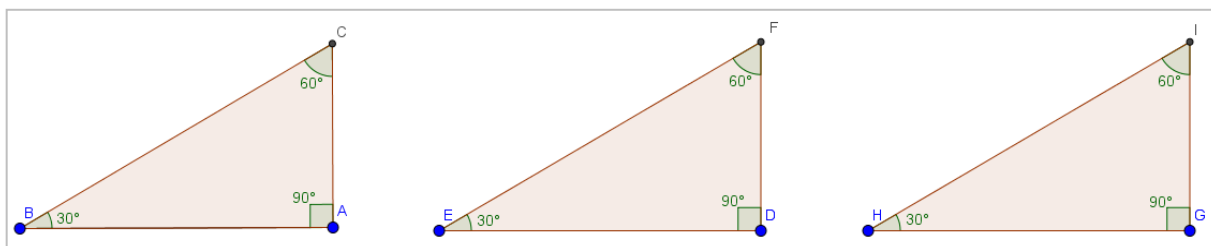
Em razão do atraso com o início da aplicação desta proposta didática não foi possível aprofundarmos as discussões acerca deste problema, com isso foram dadas as primeiras orientações para a realização da primeira atividade.

Cabe-nos salientar que embora as atividades tenham sido planejadas para serem realizadas individualmente por cada aluno, não foi possível realiza-las nestes moldes, uma vez que o número de computadores disponíveis no laboratório de informática não era suficiente para todos os 32 alunos presentes, assim ficou decidido que todas as atividades propostas seriam realizadas em duplas.

3.1.1 Atividade 1

A primeira atividade consistia no estabelecimento do conceito de tangente de um ângulo agudo a partir da relação cateto oposto sobre cateto adjacente ao ângulo de 30° , de três triângulos semelhantes entre si, conforme podemos ver na Figura 15.

Figura 15: representação gráfica dos três triângulos usados na Atividade 1.

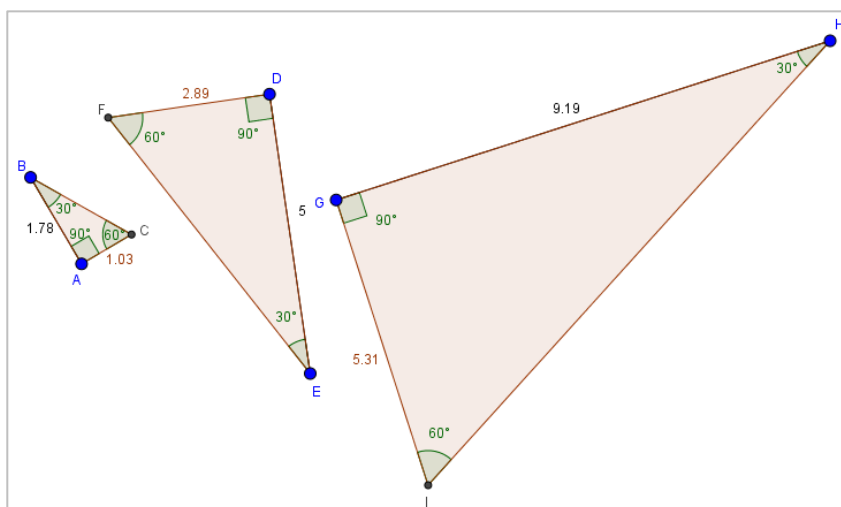


Fonte: elaboração própria.

Antes de qualquer manipulação que pudesse ser feita no GeoGebra, foi perguntado aos alunos se todos os três triângulos dispostos na Janela de Visualização eram semelhantes entre si. A grande maioria respondeu que sim, tomando como base especificamente a igualdade de medidas dos três triângulos e também a congruência dos seus ângulos internos.

Em seguida eles foram orientados a responder a primeira questão, que consistia em mudar as dimensões dos três triângulos, de modo que tivéssemos um triângulo pequeno, um médio e um grande, tal qual podemos ver na Figura 16 mostrada a seguir.

Figura 16: disposição dos triângulos feita por uma dupla de alunos.



Fonte: arquivo pessoal do autor.

A partir disso foi feita a mesma pergunta aos alunos sobre a semelhança dos três triângulos, só que desta vez enfatizando as mudanças realizadas em cada um deles. Cerca de três alunos responderam que sim, que os triângulos continuavam sendo semelhantes mesmo após terem sofrido modificações em seus tamanhos, enquanto o restante da turma, a grande maioria, respondeu que não.

Os tamanhos dos triângulos foram o fator determinante para a mudança de opinião de grande parte dos alunos, os quais acreditavam que os critérios de semelhança de triângulos se resumiam apenas em “*mesmas dimensões*”, tanto de lados como de ângulos.

Como o intuito era de que eles chegassem à resposta correta a partir de suas próprias deduções, em face das propriedades e relações estabelecidas entre os três triângulos, partimos então para a resolução dos itens “b” e “c” desta atividade.

No item “b” os alunos deveriam determinar as medidas dos catetos oposto e adjacente ao ângulo de 30° de cada triângulo, conforme podemos ver no exemplo da Figura 16, utilizando para isso o comando **Distância, Comprimento ou Perímetro** disponível no GeoGebra. Em seguida eles precisariam transcrever para a planilha anexa à atividade todas as medidas encontradas, procedendo depois com a resolução do item “c”, que consistia na determinação da razão cateto oposto a 30° sobre cateto adjacente a 30° , conforme podemos ver na Figura 17.

Figura 17: medidas encontradas por uma das duplas.

Planilha				
	A	B	C	D
1	Triângulo	Cat. Oposto a 30°	Cat. Adjacente a 30°	Razão
2	$\triangle ABC$	1.03	1.78	0.58
3	$\triangle DEF$	2.89	5	0.58
4	$\triangle GHI$	5.31	9.19	0.58
5				

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Com exceção de apenas três duplas, todas as outras conseguiram chegar ao mesmo resultado no cálculo da razão, cerca de (0.58) o que equivale aproximadamente ao mesmo valor da tangente de 30° que é igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Foi a partir disso que eles conseguiram compreender que os três triângulos eram semelhantes entre si, pelo fato de terem os ângulos internos congruentes e os lados correspondentes proporcionais, sendo esta a definição precisa da semelhança de triângulos.

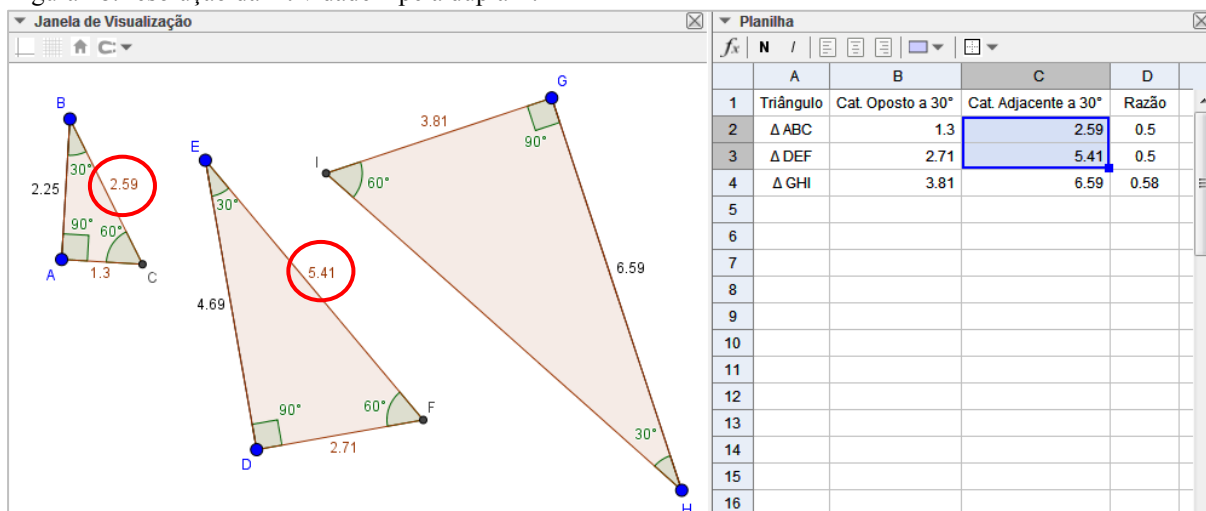
Outra definição que também pôde ser formalizada a partir destes dados foi a da tangente de um ângulo agudo, que por sua vez é dada pela razão entre o cateto oposto a esse ângulo e o cateto adjacente a ele. Com isso eles puderam perceber que a razão que eles mesmos haviam calculado não era uma razão qualquer, mas sim a tangente de um ângulo agudo, mais especificamente a tangente do ângulo de 30° .

Quanto às três duplas citadas anteriormente, vejamos a seguir em que consistiu o erro de cada uma delas, mas para tanto, as identificaremos apenas como “Dupla E”, “Dupla G” e “Dupla N”.

➤ Dupla E

No item “b” desta atividade foi solicitada a determinação, **apenas**, dos catetos oposto e adjacente de cada triângulo. No entanto, esta dupla acabou por também determinar a medida da hipotenusa dos triângulos ABC e DEF, o que fez com que eles se confundissem na hora de transcrever as medidas dos lados dos triângulos para a planilha, assim, ao invés de inserir nesta planilha as medidas dos catetos adjacentes ao ângulo de 30° dos triângulos ABC e DEF, eles acabaram transcrevendo, equivocadamente, as medidas das hipotenusas destes triângulos, conforme podemos ver na Figura 18 mostrada a seguir.

Figura 18: resolução da Atividade 1 pela dupla E.

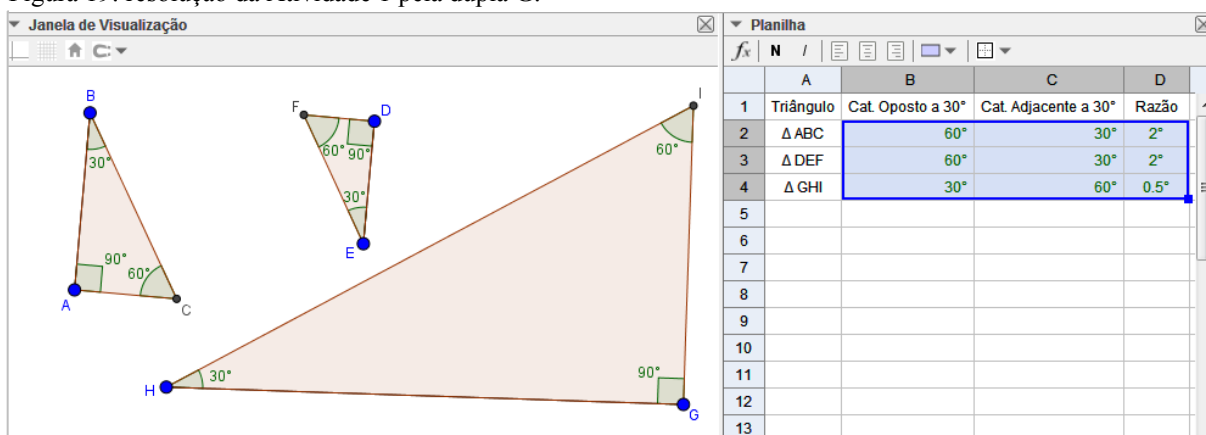


Fonte: arquivo pessoal do autor.

➤ Dupla G

O principal erro na resolução desta atividade pela dupla G se deu em razão de dois motivos, o primeiro ocorreu por não determinarem as medidas dos catetos oposto e adjacente de cada triângulo e o segundo pelo fato de transcreverem para a planilha as medidas dos ângulos ao invés das medidas destes catetos.

Figura 19: resolução da Atividade 1 pela dupla G.

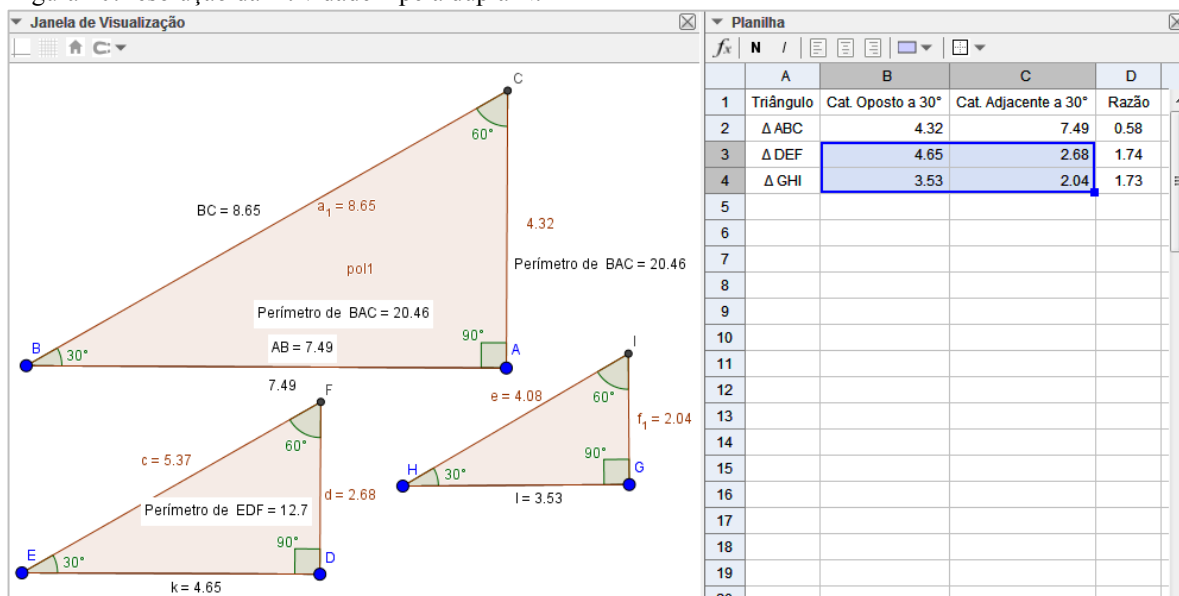


Fonte: arquivo pessoal do autor.

➤ Dupla N

Na resolução feita pela dupla N foram inseridas informações que não haviam sido solicitadas na atividade como, por exemplo, o cálculo do perímetro dos triângulos. Na Figura 20 podemos perceber que além de terem sido feitas mais de uma medição para um mesmo cateto, as informações inseridas na planilha foram realizadas de maneira errada, uma vez que as medidas dos catetos opostos dos triângulos DEF e GHI foram trocadas pelas medidas dos catetos adjacentes, e vice versa.

Figura 20: resolução da Atividade 1 pela dupla N.

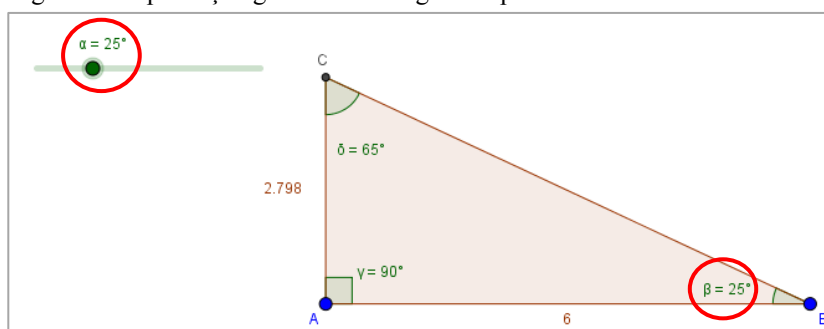


Fonte: arquivo pessoal do autor.

3.1.2 Atividades 2 e 3

A atividade 2 consistia na verificação do comportamento da tangente para diversos outros ângulos, numa escala compreendida entre 5° e 85° . Para isso foi utilizado apenas um triângulo, que variava os seus ângulos internos e as suas medidas em função de um Controle Deslizante disponível da Janela de Visualização do GeoGebra, tal qual podemos ver na Figura 21.

Figura 21: reprodução gráfica do triângulo disponível na Atividade 2.



Fonte: elaboração própria.

Com isso, foram realizados os mesmos procedimentos adotados para o preenchimento da planilha anexa à Atividade 1, foi possível verificar o comportamento da tangente do ângulo β em diversos momentos, conforme podemos ver na resolução feita por uma das duplas mostrada na Figura 22.

Figura 22: preenchimento da planilha por uma das duplas.

Planilha				
	A	B	C	D
1	Ângulo	Cat. Oposto a "β"	Cat. Adjacente a "β"	Tangente do ângulo "β"
2	5°	0.525	6	0.088
3	10°	1.058	6	0.176
4	15°	1.608	6	0.268
5	20°	2.215	6.086	0.364
6	25°	2.838	6.086	0.466
7	30°	3.513	6.086	0.577
8	35°	4.261	6.086	0.7
9	40°	5.106	6.086	0.839
10	45°	5.88	5.88	1
11	50°	7.008	5.88	1.192
12	55°	8.398	5.88	1.428
13	60°	12.752	7.363	1.732
14	65°	15.789	7.363	2.144
15	70°	20.229	7.363	2.747
16	75°	27.478	7.363	3.732
17	80°	41.756	7.363	5.671
18	85°	84.155	7.363	11.429
19				

Fonte: arquivo pessoal do autor.

De modo geral, todas as duplas conseguiram encontrar os mesmos valores dispostos na coluna D desta planilha, com exceção de apenas quatro duplas, as quais denominaremos como dupla "B", "L", "M" e "O", conforme veremos a seguir na descrição dos resultados obtidos por cada uma delas.

➤ Dupla B

No preenchimento da planilha pelos integrantes da dupla B podemos perceber uma informação incorreta quanto ao cálculo da tangente de 75° , que é de aproximadamente 3.732. Na célula B16 foi inserido o valor 7304 ao invés de 7.304, com isso o valor encontrado foi mil vezes superior ao valor exato, conforme mostram os dados apresentados na Figura 23.

Figura 23: resolução da Atividade 2 pela dupla B.

N	A	B	C	D
1	Ângulo	"Cat. Oposto a β "	"Cat. Adjacente a β "	"Tangente do ângulo β "
2	5°	0.525	6	0.088
3	10°	1.058	6	0.176
4	15°	1.608	6	0.268
5	20°	2.184	6	0.364
6	25°	2.798	6	0.466
7	30°	3.464	6	0.577
8	35°	4.201	6	0.7
9	40°	5.035	6	0.839
10	45°	6	6	1
11	50°	7.151	6	1.192
12	55°	8.569	6	1.428
13	60°	10.392	6	1.732
14	65°	12.867	6	2.145
15	70°	5.377	1.957	2.748
16	75°	7304	1.957	3732.243
17	80°	11.099	1.957	5.671
18	85°	22.369	?	
19				

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Além disso, ficou faltando inserir a medida do cateto adjacente ao ângulo β na célula C18, o que impossibilitou o cálculo da tangente do ângulo de 85° .

➤ Dupla L

Vejamos na planilha da Figura 24 como se deu a organização dos dados pela dupla L, e a partir disso especificaremos os principais erros cometidos por esta dupla.

Figura 24: resolução da Atividade 2 pela dupla L.

N	A	B	C	D
1	Ângulo	"Cat. Oposto a β "	"Cat. Adjacente a β "	"Tangente do ângulo β "
2	5°	0.525	6	0.088
3	10°	1.058	6	0.176
4	15°	1.068	6	0.178
5	20°	2.183	5.999	0.364
6	25°	2.788	5.978	0.466
7	30°	3.452	5.978	0.577
8	35°	4.186	5.978	0.7
9	40°	5.017	5.978	0.839
10	45°	5.976	5.976	1
11	50°	5.976	7.122	0.839
12	55°	5.976	8.535	0.7
13	60°	?	?	?
14	65°	?	?	?
15	70°	2.138	5.875	0.364
16	75°	?	?	?
17	80°	0.596	33.984	0.018
18	85°	0.596	68.311	0.009
19		?	?	?
20		5.875	2.138	2.748
21				

Fonte: arquivo pessoal do autor.

O primeiro erro cometido por esta dupla foi na inserção do valor presente na célula B4, que foi igual a 1.068 ao invés de 1.608, com isso o valor da tangente do ângulo de 15° foi calculado de forma errada. Outro erro que também pôde ser constatado ocorreu a partir do cálculo do ângulo de 50°, quando diversos números foram inseridos de forma errada nas colunas B e C, alguns até fora do seu lugar correspondente.

➤ Dupla M

O principal erro cometido pela dupla M ocorreu a partir do cálculo da tangente de 60°, quando as medidas dos catetos oposto e adjacente foram trocadas, acarretando assim em valores incorretos para as tangentes de 60° à 85°, tal qual podemos ver na Figura 25.

Figura 25: resolução da Atividade 2 pela dupla M.

	A	B	C	D
1	Ângulo	"Cat. Oposto a "β"	"Cat. Adjacente a "β"	"Tangente do ângulo "β"
2	5°	0.525	6	0.088
3	10°	1.058	6	0.176
4	15°	1.608	6	0.268
5	20°	2.184	6	0.364
6	25°	2.798	6	0.466
7	30°	3.464	6	0.577
8	35°	4.201	6	0.7
9	40°	2.535	3.021	0.839
10	45°	3.021	3.021	1
11	50°	3.6	3.021	1.192
12	55°	4.315	3.021	1.428
13	60°	3.021	5.233	0.577
14	65°	3.021	6.479	0.466
15	70°	3.021	8.3	0.364
16	75°	3.021	11.275	0.268
17	80°	3.021	17.133	0.176
18	85°	2.287	26.135	0.088
19				

Fonte: arquivo pessoal do autor.

➤ Dupla O

Quanto à resolução feita pela dupla O, foi verificado apenas um erro, que foi referente ao cálculo do ângulo de 85°, cujo valor apresentado estava muito acima do valor real.

Figura 26: resolução da Atividade 2 pela dupla O.

	A	B	C	D
1	Ângulo	"Cat. Oposto a "β"	"Cat. Adjacente a "β"	"Tangente do ângulo "β"
2	5°	0.525	6	0.088
3	10°	1.058	6	0.176
4	15°	1.608	6	0.268
5	20°	2.184	6	0.364
6	25°	2.798	6	0.466
7	30°	3.464	6	0.577
8	35°	4.201	6	0.7
9	40°	5.035	6	0.839
10	45°	6	6	1
11	50°	7.151	6	1.192
12	55°	8.569	6	1.428
13	60°	10.392	6	1.732
14	65°	12.867	6	2.145
15	70°	16.485	6	2.748
16	75°	22.392	6	3.732
17	80°	34.028	6	5.671
18	85°	68.58	0.661	103.752
19				

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Com base nos dados apresentados nestas planilhas, todas as duplas foram orientadas a responder a Atividade 3, que consistia em apenas três itens. No item “a” as duplas deveriam responder qual ângulo possui a tangente igual 1, todos responderam corretamente dizendo que este ângulo era o de 45° .

Nos itens “b” e “c” as duplas deveriam interpretar o comportamento da tangente para ângulos maiores do que 45° e também próximos de 90° . Neste sentido, para que a nossa análise seja a mais fidedigna possível ao que as duplas responderam, organizamos no Quadro 5 descrito a seguir, todas as respostas formuladas pelos alunos na resolução do item “b”, tal qual foram escritas e registradas nas atividades de cada um deles.

Quadro 5: apresentação das respostas dos alunos ao item “b” da Atividade 3.

Item B – O que acontece com a tangente quando os ângulos são maiores do que 45°?	
Dupla A	R: aumentando a partir do ultimo numero.
Dupla B	R: Maiores que 1.
Dupla C	R: São maiores que 1.
Dupla D	R: As tangentes se tornam maiores do que 1.
Dupla E	R: É maior que um.
Dupla F	R: As razões serão maiores que 1.
Dupla G	R: A partir do ângulo de 45° a razão vai ser maior que 1.
Dupla H	R: Eles são maiores que 1.
Dupla I	R: Eles são maiores que 1.
Dupla J	R: vão aumentando a partir do 1.
Dupla K	R: A tangente é maior que um.
Dupla L	R: Os ângulos se repetem em ordem decrescente.
Dupla M	R: os ângulos se repetem em ordem decrescente.
Dupla N	R: São maiores que 1.000.
Dupla O	R: a tangente fica maior que 1.
Dupla P	R: O valor se torna maior que 1.

Fonte: elaboração própria a partir dos dados obtidos com a aplicação da atividade.

De igual maneira procedemos no Quadro 6 com a descrição das respostas formuladas por cada dupla na resolução do item “c” desta atividade. Conforme podemos ver neste quadro, apenas duas duplas de abstiveram de responder este item.

Quadro 6: apresentação das respostas dos alunos ao item “c” da Atividade 3.

Item C – Qual o comportamento da tangente para ângulos próximos de 90°?	
Dupla A	R: aumentam de uma maneira maior do que aos que ficam longe.
Dupla B	R: Maiores que 10.
Dupla C	R: São maiores que 10.
Dupla D	R: As tangentes vão ficando cada vez maiores à medida que vão se aproximando de 90° .
Dupla E	R: São todos maiores que 10.
Dupla F	R: Será maior que 10.
Dupla G	R: A razão vai aumentar cada vez mais.
Dupla H	R: Vai aumentar drasticamente.
Dupla I	R: Ela aumenta de uma forma significativa.
Dupla J	R: vão aumentando cada vez mais.
Dupla K	R: Ela aumenta cada vez mais drasticamente.
Dupla L	Sem resposta.
Dupla M	Sem resposta.

Dupla N	R: Aumenta.
Dupla O	R: Aumenta muito.
Dupla P	R: Ela aumenta muito mais do que havia aumentado com os ângulos menores.

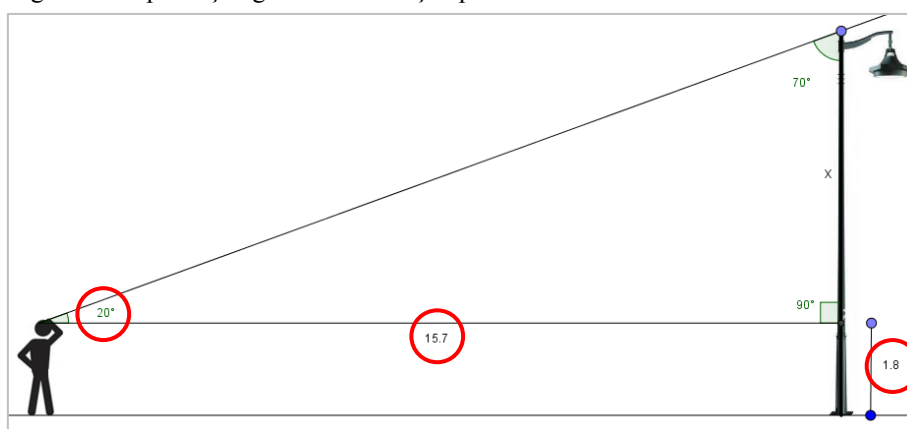
Fonte: elaboração própria a partir dos dados obtidos com a aplicação da atividade.

De modo geral podemos afirmar que a aplicação destas duas atividades foi bem sucedida, uma vez que os alunos compreenderam a proposta de verificação do comportamento da tangente para diferentes ângulos, o que serviu de subsidio para a resolução da quarta atividade, conforme veremos a seguir.

3.1.3 Atividade 4

Na quarta atividade foi reproduzida uma situação problema em que os alunos deveriam utilizar os conhecimentos e as informações obtidas por eles nas atividades anteriores. Este problema consistia em uma situação hipotética em que a altura de um poste de iluminação deveria ser calculada em função de três dados: (a) a altura de um observador; (b) o ângulo de visada¹⁹ deste observador em relação ao topo do poste; e (c) a distância deste observador em relação ao poste, conforme podemos ver na Figura 27.

Figura 27: reprodução gráfica da situação problema da Atividade 4.



Fonte: elaboração própria.

A altura aproximada deste poste é igual a $7,5m$, mesmo valor encontrado pela maioria das duplas, com exceção de apenas quatro: a dupla E, que encontrou o valor $7,26m$, a dupla H, que por sua vez encontrou o valor $7,3m$, e as duplas L e M, que não conseguiram resolver a questão.

¹⁹ Entende-se como ângulo de visada a variação do ângulo que a nossa visão faz com o plano horizontal à altura dos nossos olhos.

Na segunda questão os alunos deveriam justificar como foram realizados todos os procedimentos que lhes permitiram calcular a altura aproximada do poste de iluminação. No Quadro 7 descrito a seguir, estão organizadas as respostas de todas as duplas a esta questão, as quais foram transcritas de forma literal, tal qual foram formuladas e registradas pelos próprios alunos.

Quadro 7: apresentação das respostas dos alunos à questão 2 da Atividade 4.

Questão 2 – Como foram realizados os cálculos que lhe permitiram encontrar a altura aproximada do poste de iluminação? Justifique sua resposta.	
Dupla A	R: Fois se feito regra de 3 com os numeros que tinha a minha disponibilidade, tal como adjacente e cateto oposto, e aom termino foi juntado com a autura do cara.
Dupla B	R: Peguei o cateto opsoto e dividi pelo cateto adjacente, depois somei com a altura da pessoa.
Dupla C	R: Pegou se a tangente de vinte que é 0.364 e se igualou ao cateto oposto (x) sobre o cateto adjacente (15.7).
Dupla D	R: $15,7 \times 0,364 + 1,8 = 5,7148 + 1,8 = 7,5148$.
Dupla E	R: Dividiu-se o x pelo cateto adjacente (15.7), e igualei a 0.364, obtendo 5.46 e somei a 1.8.
Dupla F	R: Usamos os valores da atividade anterior mais a soma da altura do homem, e chegamos nesse valor.
Dupla G	R: Somamos os valores dos catetos opostos e adjacentes.
Dupla H	R: Primeiro descobrimos a tangete de 20 graus que é 0.466, sabemos entao que tangente é igual cateto oposto pelo cateto adjacente, assim calculamos o cateto oposto (valor X) e soma or fim mais 1.8m de altura do individuo. Por fim, o total da altura do poste é 9.1 m.
Dupla I	R: Fazendo cateto oposto de 70° dividido por cateto adjacente 20°, chegou a tal resultado.
Dupla J	R: a razão dos catetos igual a tangente de 20°.
Dupla K	R: calculei a tangente de 20° e disse que ela era igual a x dividido por 15,7.
Dupla L	Sem resposta.
Dupla M	R: Para sabermos que permmti encontra a altura do poste é : pegar o 20 que seria o tangente e fazer x sobre o 15,7 .
Dupla N	R: Regra de três.
Dupla O	R: multipliquei a tangente de 20° pelo seu cateto adjacente e somei x com a altura do boneco (1,8).
Dupla P	R: Foi mutiplicado o cateto oposto de 20(igual a 0.364) por 15,7. O resultado foi somado a 1,8.

Fonte: elaboração própria a partir dos dados obtidos com a aplicação da atividade.

As questões 3 e 4 consistiam na observação do comportamento do ângulo de visada em função da aproximação ou do afastamento do observador em relação ao poste de iluminação, para isso, bastava movimentar o observador da Figura 27 para frente e para trás.

Apenas as duplas D e I não conseguiram compreender as modificações sofridas por este ângulo em face das modificações realizadas, e demonstraram percepções erradas ao que de fato acontecia com a imagem.

Na questão 3 afirmaram que o ângulo de visada diminuía na medida em que o observador se aproximava do poste, já na questão 4 eles afirmaram justamente o contrário, a de que o ângulo de visada aumentava quando o observador de afastava do poste.

Na questão 5 os alunos deveriam responder, com base nesta variação do ângulo de visada, qual seria o ângulo mais conveniente para se calcular a altura aproximada do poste, justificando o por quê do ângulo escolhido ser tão conveniente.

No Quadro 8, estão organizadas todas as respostas formuladas pelos alunos na resolução desta questão, as quais também foram transcritas de forma literal.

Quadro 8: apresentação das respostas dos alunos à questão 5 da Atividade 4.

Questão 5 – Qual seria o ângulo de visada mais conveniente para calcular a altura do poste? E por quê este ângulo seria tão conveniente?	
Dupla A	R: porque ele já tem um resultado para se pesquisar.
Dupla B	R: 45 pois a tangente é 1.
Dupla C	R: 45 graus pois a tangente é um.
Dupla D	R: O ângulo de 45°, pois sua tangente é um número inteiro(1), o que seria mais cômodo de se calcular.
Dupla E	R: O ângulo de 45°, pois a razão seria 1.
Dupla F	R: Seria 45°, pois o cateto oposto e adjacente seriam iguais.
Dupla G	R: 45° porque o cateto oposto e adjacente vão ser iguais.
Dupla H	R: O ângulo de 45 graus, porque sua tangente é 1 (um), logo cateto oposto é igual ao adjacente.
Dupla I	R: ângulo de 45,1° pois se somar o valor do seu cateto adjacente com o valor da altura dará exatamente o valor do poste. Ex: $5.7+1.8=7.5$.
Dupla J	R: ângulo de 45°, porque sua tangente daria 1, ficando mais fácil de calcular, pela razão que daria exata.
Dupla K	R: 45°, por causa que sua tangente é um número arredondado (natural), sendo assim mais fácil de trabalhar.
Dupla L	Sem resposta.
Dupla M	Sem resposta.
Dupla N	R: 45, pq a tangente é 1
Dupla O	R: 45°, já que sua tangente é 1.
Dupla P	R: O ângulo 45° pois sua tangente é igual a 1.

Fonte: elaboração própria a partir dos dados obtidos com a aplicação da atividade.

Apenas as duplas L e M não responderam a esta questão, o que não é algo de se estranhar muito se levarmos em consideração que estas duplas também apresentaram dificuldades quanto a resolução das atividades anteriores.

3.1.4 Atividade 5

Salientamos que a atividade 5, que consistia na aplicação dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo em uma situação real, não pôde ser aplicada em razão do tempo que se mostrou insuficiente para a realização de todas as atividades.

Neste contexto, ressaltamos que a representação mostrada na Figura 11 foi realizada por alunos monitores que auxiliaram na aplicação das quatro primeiras atividades e não por alunos da turma participante da pesquisa, como queríamos de fato. Esta representação serviu apenas para dar alguns indicativos aos leitores deste trabalho de como esta atividade foi pensada e planejada para ser aplicada.

Em face disso, mantemos a descrição desta atividade neste trabalho, uma vez que ela foi formulada como parte integrante da pesquisa, mas sem apresentar os dados e a análise de sua efetiva aplicação.

3.2 Análise dos dados

Em face dos resultados obtidos com esta pesquisa e da dinâmica estabelecida para o processo de aplicação de todas as atividades, podemos afirmar que as ações apresentadas neste trabalho encontram respaldo na definição das atuais propostas pedagógicas defendidas por Micotti (1999), que propõe a interação do aluno com o objeto de estudo, neste caso o *software* GeoGebra, para a apropriação do saber a partir da construção orientada do seu próprio conhecimento.

Partindo desses princípios, analisemos a primeira situação apresentada na Atividade 1, que consistia na compreensão dos critérios de semelhança de três triângulos retângulos. No primeiro momento os alunos afirmaram que os três triângulos eram semelhantes pelo simples fato de terem as mesmas dimensões, mas quando foram modificadas estas dimensões eles já não mais os concebiam como sendo semelhantes entre si.

Neste sentido, o *software* GeoGebra favoreceu o aprendizado do conceito de semelhança de triângulos, conforme destacam Lieban e Müller (2012), ao permitir que os alunos percebessem a preservação de certas propriedades como, por exemplo, a medida da razão cateto oposto a 30° sobre cateto adjacente a 30°, que por sua vez era a mesma para os três triângulos dispostos na Janela de Visualização, independente das suas dimensões. Este sem dúvida nenhuma foi um ponto chave para a formalização do conceito de semelhança de triângulos.

Outra questão que também pôde ser evidenciada com o uso GeoGebra nesta atividade, e que os autores ressaltam como sendo uma das potencialidades deste software, diz respeito ao estímulo que os alunos tiveram para conjecturar e construir o processo dedutivo a partir das informações que eles mesmos haviam produzidos em suas atividades. Neste sentido, podemos destacar a formalização do conceito de tangente de um ângulo agudo, que foi construído por meio do estabelecimento da razão cateto oposto a 30° sobre cateto adjacente a 30°.

No que diz respeito à segunda atividade, na qual os alunos deveriam determinar as tangentes de diferentes ângulos por meio da variação de um Controle Deslizante, percebemos que o processo investigativo proposto por esta atividade, na qual os alunos precisariam estabelecer uma relação entre o ângulo e a medida da sua tangente como subsídio à resolução da terceira atividade, está respaldado pela definição de investigação proposto por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), que concebem a investigação como sendo um meio pelo qual é

possível descobrir as relações entre objetos matemáticos, conhecidos ou desconhecidos, com o propósito claro e objetivo de verificar as suas respectivas propriedades.

Neste contexto, as relações estabelecidas pelos alunos entre cada ângulo e a sua respectiva tangente, lhes permitiram responder os itens “b” e “c” da Atividade 3, que consistia na verificação do comportamento da tangente para ângulos, respectivamente, maiores do que 45° e próximo de 90° .

Conforme a descrição das respostas dos alunos ao item “b” da Atividade 3, disponíveis no Quadro 5 deste trabalho, podemos perceber que das 16 duplas que responderam a esta atividade, 13 conseguiram compreender que a partir do ângulo de 45° a tangente é maior do que 1.

No que diz respeito à resolução da dupla A, não ficou claro as percepções que estes alunos tiraram da variação da tangente para diferentes ângulos, ao afirmarem que a partir do ângulo de 45° a tangente vai *“aumentando a partir do último número”*.

Quanto à resolução das duplas L e M, que afirmaram que a partir do ângulo de 45° a tangente se comporta de modo que *“os ângulos se repetem em ordem decrescente”*, podemos perceber que o erro por eles cometido foi motivado pelo preenchimento incorreto da planilha anexa à atividade 2, uma vez que a inserção dos valores das medidas dos catetos oposto e adjacente ocorreu de forma incorreta e incompleta pelos alunos da dupla L (a partir do ângulo de 50°) e de forma trocada pelos alunos da dupla M (a partir do ângulo de 60°), conforme mostram as Figuras 24 e 25.

Estes erros cometidos por estes alunos podem ser justificados pela falta de atenção, falha de raciocínio e pressa, dentre outros fatores, conforme bem destaca Lorenzato (2010). Segundo o autor, na maioria das vezes a detecção das causas de cada erro não é uma tarefa tão fácil, conforme podemos comprovar na resolução dada pela dupla A descrita anteriormente.

Das 14 duplas que responderam ao item “c” da Atividade 3, conforme descrição das respostas disponíveis no Quadro 6, apenas 9 conseguiram compreender o real comportamento da tangente quando os ângulos estão próximos de 90° , ao afirmarem que *“as tangentes vão ficando cada vez maiores”* ou que irão aumentar cada vez mais *“significativamente”* ou *“drasticamente”*. Esta é uma vantagem da experimentação com tecnologias, cuja produção do conhecimento matemático se dá por meio de descobertas, conforme defendem Borba, Silva e Gadanidis (2014).

Quanto às respostas dadas por 4 das outras 5 duplas, podemos perceber que todas as informações colocadas à disposição deles na planilha anexa à Atividade 2, não foram

suficientes para que eles estabelecessem generalizações a partir dos dados que eles mesmos produziram, em função disso afirmaram apenas que as tangentes seriam “*maiores que 10*”, para ângulos próximos de 90° . Quanto a resposta dada pela dupla A, não ficou muito claro as percepções que tiveram ao afirmarem que as tangentes “*aumentam de uma maneira maior do que aos que ficam longe*”.

Prezando por aquilo que defendem Borba e Villarreal (2005) *apud* Borba, Silva e Gadanidis (2014), de que as atividades de experimentação com tecnologias devem ser elaboradas objetivando, dentre outras coisas, pela criação e simulação de modelos matemáticos e pela manipulação dinâmica de objetos construídos, podemos afirmar que a Atividade 4, desenvolvida dentro desta perspectiva, favoreceu a assimilação do conhecimento adquirido pelos alunos nas atividades anteriores, uma vez que 12 das 16 duplas conseguiram resolver corretamente a primeira questão do problema proposto nesta atividade, que consistia no cálculo da altura aproximada de um poste de iluminação.

Entretanto, apenas 1 das 15 duplas que responderam a segunda questão sob justificar com cem por cento de precisão os cálculos que lhes permitiram chegar a resposta correta, que foi a dupla D, cuja resposta dada a esta questão foi “ $15,7 \times 0,364 + 1,8 = 5,7148 + 1,8 = 7,5148$ ”.

As demais duplas, que por sua vez justificaram textualmente as suas respostas, apresentaram poucas incoerências como, por exemplo, atribuição de valor errado a tangente de 20° (dupla H) e a não referência à altura do observador como um dos elementos essenciais para o cálculo da altura do poste (duplas C, J, K, M e N), dentre outros, conforme podemos ver em maiores detalhes no Quadro 7 deste trabalho.

Segundo Baldini e Cyrino (2012), a exploração de situações e a verificação de regularidades são algumas das potencialidades do *software* GeoGebra, as quais serviram de subsídio para a resolução correta das questões 3 e 4 desta atividade, por 14 das 16 duplas, as quais responderam corretamente sobre a variação do ângulo de visada em função do afastamento ou da aproximação do observador em relação ao poste.

No que diz respeito a dinâmica da aplicação das atividades no laboratório de informática do IFTM, percebemos que isso favoreceu as explicações matemáticas das conclusões que os alunos abstraíram das suas atividades, conforme defendem Pinheiro e Carreira (2013).

Neste contexto, tomemos como exemplo a resposta dada por uma das duplas a questão 5, que por sua vez trazia o seguinte questionamento: “Qual seria o ângulo de visada mais conveniente para calcular a altura do poste? E por quê este ângulo seria tão conveniente?”.

Como resposta, a dupla H fez a seguinte argumentação: *“O ângulo de 45 graus, porque sua tangente é 1 (um), logo cateto oposto é igual ao adjacente”*.

Uma explicação simples e ao mesmo tempo perfeita para esta questão, cuja fundamentação matemática foi abstraída das conclusões desta dupla em face dos dados produzidos por eles na resolução de suas atividades, o que vai ao encontro daquilo que propõem Pinheiro e Carreira (2013).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática é considerada, dentre todas as ciências, como uma das mais importantes e ao mesmo tempo uma das mais injustiçadas. Aprender e ensinar Matemática por muitas vezes se constitui como uma tarefa verdadeiramente complexa quando levamos em consideração os processos construção do conhecimento, isso explica em grande parte a aversão de muitos por esta ciência.

Neste contexto, consideramos como de extrema importância as diversas metodologias que visam apresentar a Matemática de forma dinâmica e que preze pela atribuição de significado sobre aquilo que é ensinado. Em face disso, o uso das TD voltadas para o ensino e a aprendizagem da Matemática tem demonstrado significativas contribuições para a ressignificação dos conceitos, propriedades e definições matemáticas, conforme mostram as diversas produções científicas acerca do assunto.

Entretanto, é importante frisar que as TD por si só não são suficientes para resolver todos os problemas de aprendizagem que permeiam o ambiente escolar. Neste sentido, atribuímos um valor especial aos planejamentos que contemplem a determinação de objetivos com propósitos bem definidos, respeitando, sobretudo, as especificidades de cada conteúdo e também as limitações dos recursos tecnológicos utilizados.

Mas para que isso possa de fato ocorrer com o melhor aproveitamento possível, se faz necessária a promoção de cursos de formação docente que suscitem discussões acerca do uso das TD no ambiente escolar, abrangendo também as diferentes metodologias de ensino que procuram integrá-las no âmbito da sala de aula por meio da sua inclusão nas práticas pedagógicas, conforme defendem Baldini e Cyrino (2012).

Esta é uma recomendação de extrema importância, sobretudo, quando estes cursos oferecem aos professores todo subsídio necessário para que eles possam compreender, não só as potencialidades destes *softwares*, mas também as suas limitações no processo de ensino e

aprendizagem da Matemática, o que inclui também, neste contexto, as atividades elaboradas dentro da perspectiva da experimentação e investigação com tecnologias.

De modo geral, podemos afirmar que o desenvolvimento desta pesquisa, como um todo, cumpriu com os objetivos inicialmente propostos, agregando algumas contribuições ao processo de discussão e reflexão sobre as potencialidades do uso das Tecnologias Digitais no ensino e aprendizagem da Trigonometria no triângulo retângulo.

Neste sentido, ao retomarmos novamente a pergunta norteadora para esta pesquisa, podemos afirmar que o *software* GeoGebra se constitui sim com um instrumento viável e também apropriado para o ensino da Trigonometria no triângulo retângulo, uma vez que os resultados obtidos apontam para uma maior facilidade dos alunos em fazer deduções, conjecturações e generalizações acerca do conteúdo abordado.

As falhas que por ventura ocorreram durante o processo de desenvolvimento e aplicação da pesquisa nos servem de subsídio para repensarmos a nossa prática, objetivando com isso o aprimoramento do nosso planejamento com vistas ao alcance de resultados mais exitosos e em consonância com aquilo que de fato nos motiva a seguir por estes caminhos, que é a busca por um ensino de qualidade que contribua efetivamente para o aprendizado dos alunos, e que, sobretudo, possa de fato mostrar que a Matemática é uma ciência viva que se reinventa a todo momento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAR, Celina A. A. P. **Aportes teóricos de pesquisas que utilizaram o GeoGebra**. In: Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra. Uruguay, 2012. p. 1-13. Acesso em: jun. 2018. Disponível em: <<http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/procesadas1367284106/69.pdf>>.

ANDRADE, Pedro Paulo Tavares de. **O uso do GeoGebra para o ensino de geometria**. 2017. 87f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

BALDINI, Loreni Aparecida Ferreira; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. **Função seno** - uma experiência com o software GeoGebra na formação de professores de Matemática. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v.1, p. CL-CLXIV, 2012.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. 4ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia R. da; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. Coleção Tendências em Educação Matemática. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

GONÇALVES, Daniele Cristina; REIS, Frederico da Silva. **Atividades investigativas de aplicações das derivadas utilizando o GeoGebra**. *Bolema*, Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 417-432, ago. 2013.

LIEBAN, Diego Eduardo; MÜLLER, Thaísa Jacintho. **Construção de utilitários com o software GeoGebra**: uma proposta de divulgação da geometria dinâmica entre professores e alunos. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v. 1, p. 37-50. 2012.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. Coleção formação de professores. 3ª ed. Campinas: Autores associados, 2010.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação Matemática**: abordagens qualitativas. Coleção Temas Básicos de Educação e Ensino. São Paulo: EPU, 1986.

MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. **O ensino e as propostas pedagógicas**. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

PINHEIRO, Alexandra; CARREIRA, Susana. **O desenvolvimento do raciocínio geométrico no tópico triângulos e quadriláteros**. *Investigação em Educação Matemática. Raciocínio Matemático*, p. 146-169, 2013. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Coleção Tendências em Educação Matemática. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ANEXOS

➤ Publicações científicas do Banco de teses da CAPES.

Quadro 9: produções científicas publicadas em 2018 no Banco de teses da CAPES sobre o GeoGebra.

Teses de Doutorado	
Título do trabalho	Diferentes representações na geometria euclidiana por meio do uso do GeoGebra: um estudo com futuros professores de Matemática.
Autor/Instituição	Idelmar Andre Zanella – Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Resumo	Esta pesquisa teve por objetivo compreender como a coordenação de diferentes representações semióticas possibilitada pelo uso do GeoGebra influencia a apreensão de objetos geométricos e suas propriedades por futuros professores de Matemática. Participaram da investigação onze estudantes do Curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática de uma universidade ao norte do Estado do Paraná, que constituíram uma turma da disciplina de Geometria Euclidiana, e resolveram tarefas de geometria com o apoio do GeoGebra. A investigação seguiu uma abordagem qualitativa na perspectiva do paradigma interpretativo, e a modalidade de pesquisa foi o estudo de caso sobre essa turma de estudantes. Os dados recolhidos foram analisados à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e incluem as produções matemáticas dos participantes da pesquisa. Os resultados deste estudo mostram que a apreensão dos objetos geométricos e de suas propriedades ocorre em virtude da sinergia entre: fatores cognitivos; conhecimentos geométricos; tarefas matemáticas; meios fenomenológicos de produção de representações semióticas; apreensões perceptiva, sequencial, operatória e discursiva relativas a uma figura geométrica e a função de objetivação. Inferimos que esses elementos foram influenciados pela coordenação de diferentes representações semióticas suscitada pelos participantes da pesquisa.
Palavras-chave	Geometria Euclidiana; GeoGebra; Tarefas; Representações; Coordenação. Apreensão.
Título do trabalho	Matemática e o currículo da era digital: os desafios para a inovação na prática educativa
Autor/Instituição	Anna Luisa de Castro – Universidade Estadual Paulista Júlio De Mesquita Filho (UNESP Bauru)
Resumo	A presente investigação teve por objetivo identificar subsídios, diretrizes, mecanismos e procedimentos essenciais para a construção do currículo da era digital, em particular o currículo da Matemática para o Ensino Fundamental. No intuito de atingir os objetivos propostos para essa investigação, foi realizada uma interação formativa, um curso no molde extensionista, o qual fundamentou-se nas ideias de Ponte (1992), Nóvoa (2002), Gatti (2008), Lévy (1999); Moran (2012), Valente (2012) e Kenski (2007), dentre outros. Ao longo dessa formação buscou-se conhecer as concepções de um grupo de professores de Matemática da Diretoria de Ensino da Região de Registro -SP sobre o uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC). No que tange aos procedimentos investigativos, adotou-se uma abordagem qualitativa, seguindo os pressupostos dos estudos exploratório, empírico e bibliográfico, os quais favoreceram uma interpretação mais detalhada e uma melhor compreensão da intervenção pretendida. Por um lado, a intervenção buscou subsidiar os professores para o uso integrado das Tecnologias Digitais

	da Informação e Comunicação (TDIC), em particular o GeoGebra, nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. Por outro lado, a partir da prática e por meio dos dados produzidos nessa formação (formulários, rascunhos, respostas questionários, memoriais de formação, relatórios, gravação audiovisual, diário de bordo, registro de interação entre os envolvidos, entre outras produções), buscou-se entender quais são os desafios para se estabelecer o currículo da era digital. Os principais materiais que compõem o currículo do Estado de São Paulo, com as devidas delimitações desta investigação, também se constituíram como dados importantes de análise. Utilizou-se para a análise de dados a teoria da análise de conteúdo de Bardin (2009), desvelando alguns pontos cruciais para a implantação das TDIC nas salas de aula das escolas públicas brasileiras, em especial nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática. No que diz respeito ao currículo apresentado por meio dos materiais didáticos fornecidos pelos órgãos centrais e oficiais, constatou-se que são pouco relevantes os subsídios para a integração do uso das TDIC no processo educativo. Nesse sentido, como contribuição desta investigação, apresenta-se caminhos a serem trilhados pela política curricular no que tange ao plasmar do Currículo de Matemática da era digital.
Palavras-chave	Educação Matemática; Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação; Currículo da era digital.
Dissertações de Mestrado Profissional	
Título do trabalho	Uso de Animações no Ensino da Matemática
Autor/Instituição	Thais de Barros Silvanly de Andrade – Universidade Federal da Bahia (UFBA)
Resumo	Este trabalho mostra a importância do uso das animações no ensino da matemática e oferece um passo a passo sobre como utilizá-las. Com base nas dificuldades encontradas pelos alunos para compreenderem determinados assuntos matemáticos e pelos professores para oferecerem aulas mais dinâmicas, verificou-se que as animações seriam uma ferramenta de grande utilidade na resolução dessas dificuldades. Com o auxílio do software GeoGebra animações foram produzidas e aplicadas em sala e verificou-se uma melhora significativa nos resultados dos alunos. Observaram-se também algumas dificuldades para a aplicação de determinadas atividades com animações. O passo a passo na descrição das atividades tem como objetivo facilitar o entendimento por parte dos professores para uma futura aplicação. Com este trabalho, espera-se que os professores possam utilizar mais atividades com animações para a elaboração de aulas mais dinâmicas e que proporcionem uma maior participação dos alunos.
Palavras-chave	Animação; Matemática; GeoGebra.
Título do trabalho	Aplicações da trigonometria ao ensino de ondulatória utilizando o GeoGebra
Autor/Instituição	Ricardo Sergio Medeiros Magalhaes – Universidade Federal do Maranhão (UFMA)
Resumo	Este trabalho propõe uma metodologia de ensino de Trigonometria e Ondulatória, abordando a teoria da aprendizagem significativa utilizando o software GeoGebra e um simulador de ondas. A base da pesquisa é a comparação dos fenômenos físicos periódicos e as funções trigonométricas harmônicas. A proposta é executada através de aplicações no cotidiano dos alunos dos cursos Eletrônica-turma 2016 e Edificações-turma 2016 do Instituto Federal de Tecnologia de Santa Inês no Maranhão.
Palavras-chave	Tecnologias e ensino; Trigonometria e ondulatória; GeoGebra
Título do trabalho	Uma aplicação do GeoGebra no ensino de função quadrática.
Autor/Instituição	Alan Bruno Lopes Barbosa – Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA)
Resumo	Este trabalho aponta estratégias a ser consideradas no ensino de matemática quanto à necessidade de maior atenção que se deve ter ao tratar de certos conceitos matemáticos nas escolas brasileiras. Registra informações a respeito de como ajudar na construção da aprendizagem do estudante, abordar a questão do contexto e aprendizagem significativa. A ideia é se valer de elementos da prática cotidiana. O trabalho aborda a importância de laboratórios de matemática, em particular do software matemático (GeoGebra) que dará maior motivação ao estudante por meio de um modo mais descontraído de ensino e maior abordagem geométrica do assunto, trazendo a matéria para a realidade do estudante, proporcionando-lhe maior visão sobre todo o conteúdo. Tal ensino gera oportunidades de uma aprendizagem de qualidade com boa capacitação e metodologia que lhe deixe com mais segurança no assunto.
Palavras-chave	Educação; Metodologia; Laboratório de Matemática; GeoGebra.
Título do trabalho	Cálculo de áreas: Uma abordagem através do GeoGebra no Ensino Médio

Autor/Instituição	Vilson Moraes de Sousa – Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)
Resumo	A dificuldade na interpretação de ideias geométricas, muitas vezes tratadas de maneira demasiadamente abstrata ou sem uma boa representação gráfica, faz com que o aprendizado da Geometria seja frágil. Partindo da hipótese de que o uso da tecnologia em sala de aula pode ser um grande aliado para superar dificuldades, trazer representações claras, possibilitar a interatividade e uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos, este trabalho apresentara uma proposta de abordagem de alguns tópicos do cálculo de áreas, por meio de atividades desenvolvidas através do software GeoGebra. A proposta aborda conceitos que vão desde a noção intuitiva de área, passando por áreas clássicas como a área do triângulo, até o cálculo de áreas de figuras por meio de ideias relacionadas a noção de limite, noção que inclusive é pouco abordada no ensino básico e que através do GeoGebra pode facilmente ser assimilada, pelo menos intuitivamente. Como forma de validar a proposta, foi realizado um minicurso, com um grupo de 30 estudantes da primeira série do ensino médio, com este grupo foram apresentados conceitos e atividades, por meio de um estudo dirigido com foco em atividades dinâmicas e iterativas, possibilitadas pelo GeoGebra.
Palavras-chave	Áreas; Matemática dinâmica; GeoGebra; Geometria plana.
Título do trabalho	O uso da calculadora gráfica GeoGebra no smartphone como ferramenta para o ensino das funções exponencial e logarítmica.
Autor/Instituição	Eduardo Leandro Peres Nogueira – Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)
Resumo	Este trabalho tem como objetivo analisar o uso da Calculadora Gráfica GeoGebra no Smartphone para o ensino das Funções Exponencial e Logarítmica, verificando a capacidade do aplicativo em conduzir o aluno às definições e algumas propriedades dessas funções e a reflexão, translação vertical e função inversa através da visualização do comportamento dos seus gráficos. Para analisar o aplicativo, foram elaboradas duas atividades com questões discursivas que verificavam a influência de cada parâmetro nos gráficos das funções Exponencial e Logarítmica e foram aplicadas à cinco turmas de 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Prof. Anísio Teixeira. As respostas obtidas nas atividades e as opiniões dos alunos nos levaram a verificar que a Calculadora Gráfica GeoGebra realmente foi capaz de facilitar a compreensão do conteúdo trabalhado, além de aumentar o interesse dos alunos, sendo uma ferramenta de grande potencial que serve de benefício para o trabalho do docente e para o aprendizado do aluno.
Palavras-chave	Calculadora gráfica GeoGebra; Função exponencial; Função logarítmica; Celular smartphone.
Título do trabalho	Aplicações do GeoGebra no ensino das funções polinomiais de primeiro e segundo grau.
Autor/Instituição	Enildo Barbosa das Chagas Silva – Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)
Resumo	A pesquisa desenvolvida neste trabalho mede a capacidade de solucionar situações problemas, bem como a afinidade dos discentes com a disciplina de matemática. A aplicação do GeoGebra R é utilizada como instrumento de construção didático pedagógica aos alunos de diversas subáreas de exatas, diminuindo a retenção nas disciplinas de matemática, geometria e vetores, além de possibilitar um aumento na capacidade de solucionar problemas. As metodologias utilizadas são o minicurso voltado a aplicações do GeoGebra R e uma monitoria. Os alunos são escolhidos aleatoriamente, oriundos das turmas dos Cursos Integrados ao Ensino Médio de uma instituição pública de ensino. Durante o minicurso aplicou-se o software ao conteúdo de Funções Polinomiais de Primeiro e Segundo Grau, enquanto outro grupo submeteu-se a uma monitoria de matemática. Ambas as atividades contaram com uma carga horária de 40 horas. Este trabalho traçou um paralelo entre discentes participantes dos dois grupos, medindo o desempenho destes alunos nas soluções dos exercícios por eles apresentadas. A pesquisa também verificou mudanças na percepção e afinidade dos alunos participantes do mini curso, no que diz respeito às aulas de Matemática.
Palavras-chave	Software; GeoGebra; Ensino de Matemática; Tecnologias aplicadas ao ensino.
Título do trabalho	A matemática e o futebol aprendendo matemática com as cobranças de pênaltis
Autor/Instituição	Fausto Lombardo Zola – Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)
Resumo	Neste trabalho, tendo como fio condutor as cobranças de pênaltis no futebol, apresentamos a idealização, a construção, a aplicação e a análise dos resultados de uma sequência didática para o ensino e a retomada de alguns conteúdos matemáticos. Como produto final, obtivemos um simulador de cobrança de pênaltis no GeoGebra e cinco fichas de atividades,

	as quais foram aplicadas em duas turmas do segundo ano do Ensino Médio de 2017 de uma escola particular de Bebedouro/SP.
Palavras-chave	Ensino de matemática; Cobranças de pênaltis; GeoGebra; Porcentagem; Razão; Probabilidade; Gráficos.
Título do trabalho	Resolução de problemas no ensino de sistemas de equações lineares: um olhar sob as teorias de aprendizagem na realidade da escola contemporânea
Autor/Instituição	Letsa Fabiola Barbosa Alves – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB)
Resumo	O presente trabalho aborda Sistemas de Equações Lineares, o método de resolução pela Eliminação de Gauss, bem como a interpretação geométrica do conjunto solução de sistemas lineares em duas variáveis, com fulcro nas teorias de aprendizagem, o uso das Tecnologias de Informação, especificamente o software GeoGebra e o uso de resolução de problemas para ensino-aprendizagem de matemática. Por fim, descreve um relato de uma experiência com alunos do ensino médio na qual se investiga a eficiência na melhoria da aprendizagem do método da Eliminação de Gauss com auxílio do software GeoGebra e a resolução de problemas.
Palavras-chave	Sistemas de equações lineares; Eliminação de Gauss; Teoria de aprendizagem; Resolução de problemas; Software GeoGebra.
Título do trabalho	Geometria Analítica: ensino e aprendizagem de tópicos elementares com apoio de malha quadriculada, GeoGebra e Geoplano
Autor/Instituição	Nilson Correia da Silva – Universidade de Brasília (UNB)
Resumo	Esta dissertação tem como objetivo apresentar uma proposta de sequência didática na abordagem da Geometria Analítica (no estudo do ponto, da reta e da circunferência) utilizando como recursos folhas quadriculadas (caderno quadriculado), Geoplano, software GeoGebra, além de régua, compasso e transferidor. Essa sequência tem sido aplicada em oito turmas de 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública, com as quais trabalhamos e uma turma usada como grupo de controle. Quanto ao método de trabalho, inicialmente realiza-se um questionário com os estudantes e, através deste, busca-se traçar o perfil sócio econômico de cada um deles, e levantar suas condições quanto aos conhecimentos básicos de geometria, o que acaba, também, revelando as dificuldades apresentadas pelos estudantes, em relação aos conceitos e de noções dos entes geométricos e suas aplicações no plano cartesiano. A partir dessas condições prévias dos alunos, essa proposta de sequência didática pode ser desenvolvida, ao longo do 3º bimestre do ano letivo, na qual, opta-se por uma abordagem mais geométrica (gráfica) do que algébrica, no tratamento dos principais tópicos de geometria analítica, presentes no currículo de Matemática do Ensino Médio das escolas públicas do Distrito Federal. A ideia principal é que cada atividade seja resolvida geometricamente, no caderno quadriculado, para que os alunos consigam, ao final, utilizar soluções analíticas (deduzir fórmulas, por exemplo). Para isso, é importante que as resoluções dos problemas sejam feitas no caderno quadriculado e depois, refeitas no GeoGebra. Algumas atividades também podem ser realizadas com o uso do Geoplano e depois, transcritas para a folha quadriculada. Ao final desse processo, é aplicado outro questionário aos alunos para sondar suas impressões quanto às atividades desenvolvidas e aos recursos utilizados e, juntamente com as avaliações formais e os apontamentos e observações feitos ao longo das aulas, verificar o quanto eles evoluíram em relação às condições iniciais neste trabalho, utilizando-se para isto, como parâmetros, as teorias de Hiele e de Ausubel. Por fim, utilizando estes elementos citados além de depoimentos e entrevistas feitas com alunos e professores, como dados, uma análise qualitativa por triangulação de métodos, para avaliar este trabalho, é aplicada e, a partir de seus resultados conclui-se que o objetivo da proposta é alcançado.
Palavras-chave	Geometria analítica; Escolas públicas do DF; GeoGebra; Geoplano; Caderno quadriculado e sequência didática.
Título do trabalho	Limites e derivadas: uma abordagem para o Ensino Médio
Autor/Instituição	Anderson Rafael Alves – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP Bauru)
Resumo	Nesta dissertação abordamos os conceitos básicos de algumas funções elementares, limites, continuidade, além do conceito de derivada e sua aplicabilidade. Esse material apresenta uma formação sólida no que diz respeito aos pré-requisitos necessários para um aluno do ensino médio ingressar num curso superior, em que o mesmo trabalhará, eventualmente, com aspectos relacionados ao Cálculo. Como uma proposta didática introduziremos os

	conceitos de limite e derivada utilizando ferramentas computacionais, neste, caso o software GeoGebra e apresentação em Beamer.
Palavras-chave	Função; Limite; Continuidade; Derivada.
Título do trabalho	A geometria na vila olímpica: uma proposta de atividade de geometria plana no Ensino Médio
Autor/Instituição	Jader Soares dos Santos – Universidade Federal do Rio Grande (FURG)
Resumo	Neste trabalho, são propostas duas atividades contendo um total de quatro problemas envolvendo um Complexo Esportivo da cidade de Osório. Os problemas englobam os conceitos fundamentais da Geometria Plana e suas resoluções são obtidas com o auxílio do software GeoGebra. As atividades foram desenvolvidas com duas turmas do curso técnico em informática do Instituto Federal de Osório, durante duas semanas. Os objetivos principais são: tornar os conceitos geométricos de perímetro e área, no triângulo e em outras figuras geométricas planas, mais compreensíveis através das construções na janela de visualização e, dispondo dos valores encontrados na janela de álgebra do software, apresentar a resolução de problemas como uma atividade mais dinâmica para o aluno.
Palavras-chave	Geometria Plana; Triângulos; Área; Perímetro.
Título do trabalho	Construções Geométricas e Padrões Islâmicos
Autor/Instituição	Rodnei Eduardo Fialho – Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Resumo	Este trabalho é o início da produção de um material didático com foco em construções geométricas de padrões islâmicos utilizando régua não graduada e compasso. Nesse material didático tratou-se -se da parte histórica dos padrões geométricos islâmicos; de construções geométricas elementares como bissetrizes, mediatrizes retas perpendiculares e paralelas e de polígonos do triângulo ao decágono e por fim de construções de padrões islâmicos todos utilizando somente régua não graduada e compasso. Todas as construções apresentadas nesse trabalho foram feitas com o auxílio do programa GeoGebra.
Palavras-chave	Padrão islâmico; Construção geométrica; Régua e compasso.
Título do trabalho	Programação linear no Ensino Médio: um análise do método gráfico
Autor/Instituição	André Palomo – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Resumo	Neste trabalho são apresentados inicialmente o conteúdo de inequações polinomiais de primeiro grau. Em seguida, apresentaremos a Programação Linear, com enfoque no Método Gráfico, muito útil para exploração no Ensino Médio, pois trabalha apenas com duas variáveis. Posteriormente apresentaremos algumas aplicações envolvendo inequações e o Método Gráfico. Como apoio tecnológico, utilizaremos o software GeoGebra, utilizado para a montagem de uma aplicação didática sugerida nesse trabalho.
Palavras-chave	Programação linear; Otimização; Desigualdade; Método gráfico; Inequação linear.
Título do trabalho	O algoritmo de Euclides e uma generalização da sequência de Fibonacci.
Autor/Instituição	Raimundo Jorge Pereira de Matos – Universidade Federal da Bahia (UFBA)
Resumo	Nesta dissertação baseada no artigo [1], vamos mostrar que os pares de números de Fibonacci adjacentes, $f_n - 1$ e $f_n - 2$ (sendo que $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$), são os menores pares de suas ordens e que são os menores pares quando aplicamos o algoritmo de Euclides para eles. Definimos também os ternos de números de Fibonacci adjacentes, $g_n - 1$, $g_n - 2$, $g_n - 3$ (sendo que $g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + g_{n-3}$) e vamos mostrar que os menores ternos de suas ordens são de fato, os menores ternos. Sabemos que a razão entre dois números de Fibonacci adjacentes f_n/f_{n-1} converge para um número chamado de “razão áurea”. Vamos provar neste trabalho que a razão entre ternos de números de Fibonacci adjacentes g_n/g_{n-1} também converge para um número. Este número no caso de ternos de números de Fibonacci é um pouco maior do que a razão áurea. Daremos uma aplicação usando GeoGebra para ilustrar os pares de números e os pares de números adjacentes de Fibonacci.
Palavras-chave	Números de Fibonacci; Ordem de pares (ternos); MDC; Algoritmo de Euclides.
Título do trabalho	Possibilidades para o estudo de otimização no ensino médio
Autor/Instituição	Everson de Moura Ferreira – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Resumo	Este trabalho tem como objetivo oferecer algumas possibilidades para potencializar o Professor do Ensino Médio de Matemática no ensino de otimização. São apresentados alguns conceitos essenciais para o estudo da otimização sem o uso do cálculo como função quadrática, desigualdade das médias e uma visão geral sobre o Método Simplex (interpretação gráfica). Também são expostas algumas definições e teoremas fundamentais para o estudo da otimização com o uso do cálculo com uma ou mais variáveis, além de um

	panorama geral sobre a história do cálculo, o método de Newton e o método do gradiente. Foi elaborada uma sequência didática como sugestão para que o Professor do Ensino Médio de Matemática possa utilizar o GEOGEBRA nas aulas tornando-as mais atrativas e dinâmicas através dos recursos visuais que o referido software proporciona.
Palavras-chave	Otimização sem uso do cálculo; Otimização com uso do cálculo; Educação matemática no Ensino Médio.
Título do trabalho	Cálculo: uso de recursos computacionais para inserir conceitos de limites, derivadas e integrais no Ensino Médio.
Autor/Instituição	Helena Correa Ribeiro – Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Resumo	O presente trabalho tem como objetivo auxiliar professores de Educação Básica a abordar alguns conceitos básicos de Cálculo Diferencial e Integral no terceiro ano do ensino médio, utilizando os softwares wxMaxima e GeoGebra. Nossa proposta visa resgatar o ensino do Cálculo no âmbito escolar, mas de uma maneira diferente da tradicional, utilizando a tecnologia em nosso favor, como uma ferramenta facilitadora no processo ensino-aprendizagem de conceitos de limites, derivadas e integrais. A ideia é que toda a parte algébrica e gráfica, que exige conhecimentos matemáticos específicos, seja feita pelos softwares e que os estudantes aprendam a interpretar as soluções que as ferramentas nos fornecem e a conhecerem um pouco mais sobre a matemática e suas aplicações.
Palavras-chave	Cálculo; Tecnologia; Educação básica.

Fonte: elaboração própria baseada em dados da Plataforma Sucupira da CAPES.

➤ Publicação de TCC's do Curso de Matemática da FACIP/UFU.

Quadro 10: TCC's do Curso de Matemática da FACIP/UFU no período de 2010 a 2017.

Trabalhos de Conclusão de Curso apresentados em 2010		
Licenciatura	Título	Um estudo sobre o conhecimento de alunos de 7º ano acerca do conceito de frações.
	Autor	Juliene Azevedo Miranda
	Orientador	Profª. Dra. Odaléa Aparecida Viana
	Título	Construções geométricas com régua e compasso.
	Autor	Jéssica Moreira Resende
	Orientador	Profª. Dra. Evaneide Alves Carneiro
Bacharelado	Título	Programação não-linear, métodos numéricos e aplicações.
	Autor	André Ferreira e Pereira
	Orientador	Prof. Dr. Moisés Rodrigues Cirilo do Monte
	Título	Métodos de otimização irrestrita e aplicações.
	Autor	Rafael Genaro
	Orientador	Prof. Dr. Moisés Rodrigues Cirilo do Monte
Trabalhos de Conclusão de Curso apresentados em 2011		
Licenciatura	Título	A contribuição dos jogos para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.
	Autor	Camilla Del Rei de Faria
	Orientador	Profª. Dra. Odaléa Aparecida Viana
	Título	Análise dos possíveis impactos na formação continuada do professor de matemática.
	Autor	Karla Oliveira Franco
	Orientador	Prof. Dr. Vlademir Marim
	Título	A utilização do software GeoGebra no ensino de Matemática.
	Autor	Leonardo Silva Costa
	Orientador	Profª. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho
	Título	Um estudo sobre o conhecimento prévio dos alunos dos cursos de Pedagogia e Matemática e suas atitudes em relação à geometria espacial.
	Autor	Carlos Eduardo Petronilho Boiango
	Orientador	Profª. Dra. Odaléa Aparecida Viana

Bacharelado	Título	Noções de homotopia e espaços de recobrimentos.
	Autor	Gabriela Costa de Oliveira
	Orientador	Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira
Trabalhos de Conclusão de Curso apresentados em 2012		
Licenciatura	Título	A resolução de problemas na formação do professor que ensina matemática na educação básica: um estudo a partir dos trabalhos apresentados no ENEM//2010.
	Autor	Ana Carolina Igawa Barbosa
	Orientador	Prof. Dr. Vlademir Marim
Trabalhos de Conclusão de Curso apresentados em 2013		
Licenciatura	Título	Obstáculos de aprendizagem de números inteiros: um estudo com alunos do sétimo ano do ensino fundamental.
	Autor	Aline Fernanda Borges
	Orientador	Profª. Dra. Odaléa Aparecida Viana
	Título	Análise dos livros didáticos na concepção epistemológica do professor do Ensino Médio nas escolas públicas na região do Pontal do Triângulo Mineiro.
	Autor	Anália Barreto Souza
	Orientador	Prof. Dr. Vlademir Marim
	Título	Análise de livros didáticos: um estudo sobre a abordagem dada a quadriláteros.
	Autor	Andréia Candida da Silva
	Orientador	Profª. Dra. Odaléa Aparecida Viana
	Título	A modelagem matemática no GeoGebra e o ensino de geometria.
	Autor	Lucas Rafael Pereira Silva
	Orientador	Profª. Dra. Odaléa Aparecida Viana
	Título	As contribuições das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento de projetos de modelagem matemática na educação básica: um estudo a partir de trabalhos disponíveis no CREMM.
	Autor	Mirian Ramos da Silva
	Orientador	Profª. Dra. Mirian Maria Andrade Gonzalez
	Título	Formação do professor que ensina matemática na educação básica: um estudo sobre as iniciativas governamentais no Município de Ituiutaba/MG
	Autor	Mizael Borges Campos Netto
	Orientador	Prof. Dr. Vlademir Marim
	Título	A equação do calor singularmente perturbada.
	Autor	Sidney Ribeiro da Silveira
	Orientador	Prof. Dr. João Carlos Moreira
Bacharelado	Título	As variedades algébricas afins e a topologia de Zariski.
	Autor	Enio Marques Muniz Junior
	Orientador	Prof. Dra. Patrícia Borges dos Santos
	Título	Modelo matemático para um plasmídeo de bactéria.
	Autor	Fábio Rodrigues Silva
	Orientador	Prof. Dr. João Carlos Moreira
	Título	Homotopias dirigidas
	Autor	Jeane Vilela Silveira
	Orientador	Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira
Trabalhos de Conclusão de Curso apresentados em 2014		
Licenciatura	Título	Portal do professor: contribuições na formação docente no ensino de matemática financeira para o Ensino Médio.
	Autor	Heinrich da Solidade Santos
	Orientador	Prof. Dr. Vlademir Marim

	Título	Etnomatemática e a prática docente: um olhar sobre o preconceito/discriminação com os alunos nordestinos do CAIC de Ituiutaba/MG.
	Autor	Jéssica Cristina Silva Vieira
	Orientador	Profa. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira
	Título	Uma análise paratextual da obra “Arithmetica Teorico-Pratica”.
	Autor	Magna Paulina de Souza Ferreira
	Orientador	Profa. Dra. Mirian Maria Andrade Gonçalves
	Título	Um estudo sobre o pensamento algébrico de alunos do 9º ano do ensino fundamental.
	Autor	Marcos Araújo da Silva
	Orientador	Profa. Dra. Odaléa Aparecida Viana
	Título	Tipos de integrabilidade
	Autor	José Henrique Souza Braz
	Orientador	Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira
Bacharelado	Título	As relações entre módulos projetivos e injetivos.
	Autor	Laio Coelho Ferreira
	Orientador	Profa. Dra. Patrícia Borges dos Santos
Bacharelado	Título	Métodos analíticos para a solução da equação de condução do calor.
	Autor	Bruna Luiza de Faria Rezende
	Orientador	Profa. Dra. Vanda Maria Luchesi
Trabalhos de Conclusão de Curso apresentados em 2015		
Licenciatura	Título	Conhecimento de procedimentos sobre áreas de figuras geométricas por alunos do Ensino Médio.
	Autor	Gérsica Gomes Rodrigues
	Orientador	Profa. Dra. Odaléa Aparecida Viana
	Título	Aprendizagem significativa do teorema de Pitágoras: uma experiência com alunos do nono ano do Ensino Fundamental.
	Autor	Izabela Vieira Fonseca
	Orientador	Profa. Dra. Odaléa Aparecida Viana
	Título	Superfícies com curvatura média constante e o Teorema de Delaunay.
	Autor	Ranielle Felipe Brito de Freitas
Bacharelado	Orientador	Profa. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho
	Título	Singularidades de curvas e superfícies.
	Autor	Angélica Lourenço Oliveira
Bacharelado	Orientador	Profa. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho
Trabalhos de Conclusão de Curso apresentados em 2016		
Licenciatura	Título	O ensino e aprendizagem na EJA: compreendendo contextos e dificuldades em matemática.
	Autor	Luciana Aparecida da Silva
	Orientador	Profa. Dra. Odaléa Aparecida Viana
Bacharelado	Título	Simulação numérica de reservatório de petróleo.
	Autor	Arianne Alves da Silva
	Orientador	Prof. Dr. Homero Ghioi da Silva
	Título	Homotopias em variedades diferenciáveis: alguns resultados.
	Autor	Mirianne Andressa Silva Santos
	Orientador	Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira

Trabalhos de Conclusão de Curso apresentados em 2017		
Licenciatura	Título	Álgebra e a Revista Al-Karismi (1946 – 1951): um estudo histórico-bibliográfico.
	Autor	Carlos Antonio Rezende Filho
	Orientador	Profa. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira
	Título	Vida e obra de Souza (1829 – 1864): considerações para a história da matemática na formação inicial.
	Autor	Edis Donizeti Borges
	Orientador	Profa. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira
	Título	Uma proposta de modelação sobre o peso e comprimento dos bebês.
	Autor	Gislaine Sebastiana Gondim Cruz
	Orientador	Prof. Dr. Rogério Fernando Pires
Bacharelado	Título	Estabilidade Von Neumann em esquemas de diferenças finitas de alta ordem.
	Autor	Aquison Theyllon Gomes da Silva
	Orientador	Prof. Dr. Homero Ghioi da Silva
	Título	Teste de verificação de um código que simula a Equação de Poisson com condição de contorno de Neumann.
	Autor	Mateus Paranaíba Ribeiro
	Orientador	Prof. Dr. Homero Ghioi da Silva
	Título	Superfícies mínimas de Bour em $\mathbb{R}^3$.
	Autor	Fernanda Alves Caixeta
	Orientador	Profa. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho
	Título	Modelos de propagação de epidemias.
	Autor	Maria Angélica Dantas
	Orientador	Prof. Dr. Wallisom Da Silva Rosa
	Título	Equações diferenciais ordinárias e aplicações.
	Autor	Vinicius Parreira Borges da Silva
	Orientador	Prof. Dr. Alisson Aguiar Barbosa

Fonte: elaboração própria baseada em dados do Curso de Matemática da FACIP/UFU.