



Universidade Federal de Uberlândia
Instituto de Matemática e Estatística

Bacharelado em Matemática

Dinâmica linear de operadores do tipo *shift*

Denilson Rodrigues Junior

Uberlândia-MG
2025

Denilson Rodrigues Junior

Dinâmica linear de operadores do tipo *shift*

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientador: Vinícius Vieira Fávaro

Uberlândia-MG

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Instituto de Matemática e Estatística

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902

Telefone: +55 (34) 3239-4158/4156/4126 - www.ime.ufu.br - ime@ufu.br



ATA DE DEFESA - GRADUAÇÃO

Curso de Graduação em:	Bacharelado em Matemática				
Defesa de:	Trabalho de Conclusão de Curso 2 (FAMAT 31804)				
Data:	12/05/2025	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	15:15
Matrícula do Discente:	12111MAT005				
Nome do Discente:	Denilson Rodrigues Junior				
Título do Trabalho:	Dinâmica linear de operadores do tipo <i>shift</i>				
A carga horária curricular foi cumprida integralmente?		(X) Sim () Não			

Reuniu-se na sala 1F119, Campus Santa Mônica, da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Curso de Graduação em Matemática, composta pelos docentes: Vinícius Vieira Fávaro (IME-UFU), como orientador, Daniel Cariello (IME-UFU) e Marcus Augusto Bronzi (IME-UFU).

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Vinícius Vieira Fávaro, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra, para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do curso.

A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, avaliou a apresentação oral e o trabalho escrito e atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado com nota 100.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Vinicius Vieira Favaro, Professor(a) do Magistério Superior**, em 14/05/2025, às 08:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Daniel Cariello, Professor(a) do Magistério Superior**, em 14/05/2025, às 08:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcus Augusto Bronzi, Presidente**, em 14/05/2025, às 09:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6335080** e o código CRC **B76652F8**.

Referência: Processo nº 23117.030317/2025-25

SEI nº 6335080

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que me acompanharam nesses últimos anos. Em especial, aos meus pais, por todo o amor, apoio, incentivo e compreensão.

À minha irmã, por todo o carinho.

Aos meus amigos, por todos os nossos momentos juntos.

Ao professor Valdair Bonfim, ao meu orientador Vinícius Fávaro e a todos os professores do Instituto de Matemática e Estatística com quem tive a oportunidade de aprender.

Agradeço aos membros da banca pelas sugestões e correções, em especial ao Prof. Daniel Cariello pela sugestão na demonstração da Proposição [3.1.7](#).

RESUMO

Neste trabalho, estudaremos algumas das principais noções de dinâmica linear para operadores lineares contínuos do tipo *shift* nos espaços clássicos de sequências absolutamente p -somáveis. Mais precisamente, investigaremos as seguintes propriedades dinâmicas para estes operadores: hiperciclicidade, transitividade topológica, *mixing*, fracamente *mixing* e caos de Devaney. Estudaremos critérios que implicam tais propriedades, no contexto de operadores lineares contínuos, e apresentaremos algumas caracterizações para a hiperciclicidade, *mixing*, fracamente *mixing* e caos, no caso dos operadores *shift* com peso definidos nesses espaços.

Palavras-chave: Dinâmica linear, shifts, espaços de sequências, hiperciclicidade, caos.

ABSTRACT

In this work, we will study some of the main notions of linear dynamics for continuous linear shift operators on the classical spaces of absolutely p -summable sequences. More precisely, we shall investigate the following dynamical properties: hypercyclicity, topological transitivity, mixing, weakly mixing and Devaney chaos. We will study criteria that imply such properties, in the context of continuous linear operators, and we will show some characterizations for the hypercyclicity, mixing, weakly mixing and chaos, for weighted shift operators defined on those spaces.

Keywords: Linear dynamics, shifts, sequence spaces, hypercyclicity, chaos.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Preliminares	3
2.1	Espaços Métricos	3
2.2	Continuidade	8
2.3	Espaços Completos	9
2.4	Espaços Normados	11
2.4.1	Transformações Lineares	13
2.5	Espaços clássicos de sequências	15
2.6	Bases em espaços de Banach	18
3	Dinâmica Linear	23
3.1	Noções básicas de sistemas dinâmicos	23
3.2	Caos	26
3.3	Conjugações	28
3.4	Sistemas dinâmicos fracamente <i>mixing</i>	29
3.5	Operador de Rolewicz	31
3.6	Critérios de hiperciclicidade	34
4	<i>Shifts</i> unilaterais com peso	36
4.1	<i>Shifts</i> sem peso	36
4.2	Exemplos de operadores <i>shift</i>	44
	Referências Bibliográficas	48

1. INTRODUÇÃO

A Dinâmica Linear é uma área mais recente de pesquisa em Matemática que busca estudar conceitos de Sistemas Dinâmicos para operadores lineares contínuos. Um dos marcos da teoria foi a tese de doutorado não publicada de Kitai, de 1982. Desde então nos últimos 40 anos a área vem recebendo muita atenção de diversos pesquisadores renomados. Os resultados da dinâmica linear desafiam a noção de que objetos lineares estão associados a casos mais simples de lidar, já que diversas classes de operadores lineares possuem comportamentos caóticos.

Considere um operador linear contínuo $T : X \rightarrow X$, onde X é um espaço vetorial normado sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um dos principais estudos da dinâmica linear é o comportamento das órbitas dos operadores. Mais precisamente, definimos a órbita de um elemento $x \in X$ sobre o operador T como o conjunto $\{x, Tx, T^2x, \dots\}$.

Em dimensão finita, as órbitas de um operador linear são completamente caracterizadas pela sua forma de Jordan e é possível provar que elas não podem ser densas no espaço. Já em dimensão infinita, quando existe um vetor $x \in X$ com órbita sobre T densa em X , dizemos que T é hipercíclico. Provaremos que, de fato, não existem operadores hipercíclicos em espaços de dimensão finita na Proposição 3.1.7. Desta forma, o estudo da dinâmica linear se faz, quase em sua totalidade, em espaços de dimensão infinita.

Sendo assim, a Análise Funcional é fundamental para o estudo da dinâmica linear e utilizaremos alguns resultados dessa área, principalmente em espaços de Banach. Uma classe especial de espaços que precisaremos são os espaços ℓ_p de seqüências absolutamente p -somáveis, com $1 \leq p < \infty$ que serão definidos na Seção 2.5.

No Capítulo 2 apresentamos os principais resultados de Análise Funcional e Espaços Métricos utilizados no trabalho. Sendo os livros [4] e [7] as principais referências utilizadas para a teoria de Análise Funcional e Espaços Métricos deste trabalho.

Já no Capítulo 3 exploramos alguns conceitos básicos da Dinâmica Linear. Para isso, seguimos as referências [3] e [6], que contém uma ideia geral e profunda da teoria da Dinâmica Linear.

Os primeiros exemplos de operadores lineares hipercíclicos foram publicados em 1929 por Birkhoff e, posteriormente, em 1952 por MacLane. Birkhoff e MacLane mostraram que operadores translação e derivação, respectivamente, são hipercíclicos. Mas esses dois exemplos requerem o estudo de espaços vetoriais topológicos mais gerais que não serão abordados nesse trabalho.

Já o primeiro exemplo de um operador hipercíclico definido em um espaço de Banach é

devido a Rolewicz em 1969. O operador ficou conhecido como operador de *Rolewicz* ou *shift* (deslocamento) à esquerda. Ele é definido para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$ e $1 \leq p < \infty$ por

$$\begin{aligned} \alpha B : \ell_p &\rightarrow \ell_p \\ (x_1, x_2, \dots) &\mapsto (\alpha x_2, \alpha x_3, \dots). \end{aligned}$$

Apresentaremos a demonstração clássica de Rolewicz de que este operador é hipercíclico, para $|\alpha| > 1$, no Teorema 3.5.3.

Além disso, no Capítulo 3, introduzimos outras propriedades, como a transitividade topológica, caos e as noções de *mixing* e fracamente *mixing*. Ainda nesse capítulo, mostraremos um critério que garante que um operador dado é hipercíclico ou *mixing*, quando algumas condições são satisfeitas. Embora o critério não caracterize todos os operadores hipercíclicos, veremos que é possível caracterizar a hiperciclicidade de todos os operadores *shifts* do trabalho por meio desse critério.

Dada a introdução sobre a área, realçamos o principal objetivo do trabalho: estudar os operadores *shift*. No Capítulo 4, caracterizaremos as condições necessárias para que os operadores *shift* nos espaços ℓ_p sejam hipercíclicos e caóticos. Para isso, investigamos uma generalização do operador de *Rolewicz*: os *shifts* à esquerda com peso. Mais precisamente, ao invés de tomar um escalar fixo α , escolhemos uma sequência de pesos positivos limitada, que chamaremos de $w = (w_1, w_2, \dots)$. Então, dados $w = (w_j)_{j=1}^\infty$ limitado e $1 \leq p < \infty$, o *shift* à esquerda com peso é dado por

$$\begin{aligned} B_w : \ell_p &\rightarrow \ell_p \\ (x_1, x_2, \dots) &\mapsto (w_2 x_2, w_3 x_3, \dots). \end{aligned}$$

Sendo o operador de *Rolewicz* um caso especial quando a sequência de pesos é constante.

O *shift* com peso é a base dos estudos dos operadores *shift* desenvolvidos neste trabalho. Para isso, exploraremos alguns importantes conceitos de dinâmica: caos, hiperciclicidade, transitividade topológica e *mixing* deste operador, de acordo com a sua sequência de pesos. Essa caracterização é dividida em dois resultados: os Corolários 4.1.9 e 4.1.11. Por fim, utilizando os resultados obtidos, construímos alguns exemplos de operadores *shift* que satisfazem determinadas propriedades dinâmicas.

2. PRELIMINARES

A teoria desenvolvida neste trabalho baseia-se principalmente em espaços normados completos. Desta forma, neste capítulo introduzimos alguns conceitos das teorias de Espaços Métricos e Análise Funcional que serão utilizados ao longo do texto. Para isso, utilizamos as referências [4, 7]. Na Seção 2.5, sobre espaços clássicos de sequências, definimos os espaços de sequências com peso como em [3]. A última seção sobre bases tem como referência [4, Capítulo 10] e [6, Appendix A, Section 4.1].

2.1 ESPAÇOS MÉTRICOS

Definição 2.1.1. Uma *métrica* em um conjunto M não vazio é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades para todo $x, y, z \in M$:

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Já um *espaço métrico* é representado pelo par (M, d) onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica definida nesse conjunto. Quando não houver confusão, denotaremos o espaço métrico apenas por M .

Observação 2.1.2. Todo subconjunto de um espaço métrico (M, d) é um espaço métrico com a restrição da métrica d ao conjunto.

Exemplo 2.1.3. Os espaços $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são espaços métricos com a métrica usual $d(x, y) = |x - y|$.

Definimos agora três importantes subconjuntos presentes em espaços métricos.

Definição 2.1.4. Sejam (M, d) um espaço métrico, $a \in M$ e $r > 0$. Definimos:

- A *bola aberta* de centro a e raio r , por $B(a; r) = \{x \in M : d(a, x) < r\}$.
- A *bola fechada* de centro a e raio r , por $B[a; r] = \{x \in M : d(a, x) \leq r\}$.
- A *esfera* de centro a e raio r , por $S(a; r) = \{x \in M : d(a, x) = r\}$.

Definição 2.1.5. Sejam A um subconjunto de um espaço métrico M e $a \in A$. Então

- a é um *ponto interior* de A se existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a; \varepsilon) \subseteq A$.
- O *interior* de A , $\text{int } A$, é o conjunto de todos os pontos interiores de A .
- A é *aberto* se $A = \text{int } A$.
- A é *fechado* se A^c é aberto.

Exemplo 2.1.6. Toda bola aberta é um conjunto aberto e toda bola fechada é um conjunto fechado. Veja [7, Proposição 1, p. 66].

Definição 2.1.7. Sejam M um espaço métrico e $A \subseteq M$. Um ponto $x \in M$ é um *ponto de aderência* de A se

$$B(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

para todo $\varepsilon > 0$.

O conjunto de todos os pontos aderentes de A é chamado de *fecho* de A e é denotado por $\overline{A}$.

Proposição 2.1.8. *Seja M um espaço métrico. Um subconjunto $F \subseteq M$ é fechado se, e somente se, $F = \overline{F}$.*

Demonstração. Veja [7, Proposição 7, p. 78] □

Definição 2.1.9. Seja M um espaço métrico e $A \subseteq M$. Então $x \in M$ é um *ponto de acumulação* de A se

$$(B(x; \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Caso contrário, dizemos que x é um *ponto isolado*.

Proposição 2.1.10. *Sejam M um espaço métrico e $(A_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos de M . Então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. X e $\emptyset$ são abertos.
2. Se $A_i \subseteq M$ é aberto para todo $i \in I$, então $\bigcup_{i \in I} A_i$ é aberto.
3. Se $A_{i_1}, \dots, A_{i_n} \subseteq M$ são abertos, então $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}$ é aberto.

Demonstração. Veja [7, Proposição 2, p. 68] □

Corolário 2.1.11. *Seja M um espaço métrico e $(F_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos em M . Então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. X e $\emptyset$ são fechados.
2. Se $F_i \subseteq M$ é fechado para todo $i \in I$, então $\bigcap_{i \in I} F_i$ é fechado.
3. Se $F_{i_1}, \dots, F_{i_n} \subseteq M$ são fechados, então $F_{i_1} \cup \dots \cup F_{i_n}$ é fechado.

Definição 2.1.12. Seja M um espaço métrico. Uma *sequência* em M é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow M$. Denotamos o valor $x(n)$, o n -ésimo termo da sequência, por x_n .

Uma sequência pode ser denotada por $(x_n)_n$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ou $(x_1, x_2, \dots)$. Por abuso de notação, escrevemos que $(x_n)_n \subseteq M$ é uma sequência em M .

Definição 2.1.13. Seja (M, d) um espaço métrico. Um ponto $a \in M$ é um *limite* de uma sequência $(x_n)_n \subseteq M$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \implies d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Denotamos que a é um limite de (x_n) por $x_n \rightarrow a$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. E ainda, dizemos que $(x_n)_n$ *converge* se a sequência possui um limite.

Proposição 2.1.14. *Sejam M um espaço métrico e $(x_n)_n \subseteq M$ uma sequência. Se $(x_n)_n$ converge, então seu limite é único.*

Demonstração. Veja [7, Proposição 2, p. 122]. □

O seguinte resultado é uma consequência direta da definição de convergência.

Proposição 2.1.15. *Sejam M um espaço métrico, $A \subseteq M$ aberto e $(x_n)_n \subset M$ uma sequência que converge para $a \in A$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$x_n \in A, \quad \forall n \geq n_0.$$

Definição 2.1.16. Seja M um espaço métrico. Uma *subsequência* de uma sequência $(x_n)_n \subseteq M$ é uma restrição da sequência a um subconjunto infinito ordenado $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$. Denotamos a subsequência por $(x_{n_k})_k$ ou (x_{n_k}) .

Proposição 2.1.17. *Sejam M um espaço métrico e $F \subseteq M$. Então $a \in M$ é um ponto de aderência de F se, e somente se, existe uma sequência $(x_n)_n \subseteq F$ tal que $x_n \rightarrow a$.*

Demonstração. Veja [7, Proposição 10, p. 131] □

O próximo conceito é definido originalmente para espaços topológicos. Entretanto, neste trabalho mantemos os próximos resultados restritos a espaços métricos.

Definição 2.1.18. Seja M um espaço métrico. Uma *base de abertos* ou *base para a topologia* de M é uma coleção de abertos $\mathcal{B}$ de M tal que todo aberto de M é escrito como uma união de abertos de uma subcoleção de $\mathcal{B}$, isto é, dado qualquer aberto $A \subseteq M$, existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$A = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V.$$

Definição 2.1.19. Um subconjunto D de um espaço métrico M é *denso* em M se

$$\overline{D} = M.$$

Exemplo 2.1.20. Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ respectivamente.

Proposição 2.1.21. *Seja M um espaço métrico. Um subconjunto $D \subseteq M$ é denso em M se, e somente se, para todo $a \in M$ existe uma sequência $(x_n)_n \subseteq D$ tal que $x_n \rightarrow a$.*

Demonstração. Consequência da Proposição 2.1.17. □

Proposição 2.1.22. *Sejam M um espaço métrico com uma base de abertos $\mathcal{B}$ e $D \subseteq M$. Então são equivalentes:*

1. D é denso em M .
2. D intersecta todos os abertos não vazios de M .
3. D intersecta todos os abertos não vazios da base.

Demonstração. (1) $\implies$ (2): Seja D denso em M , ou seja, $\overline{D} = M$. Dado um aberto não vazio $A \subseteq M$, é possível tomar um ponto $a \in A$. Pela densidade de D , existe uma sequência $(d_n)_n \subseteq D$ tal que $d_n \rightarrow a$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_{n_0} \in A$, em particular $D \cap A \neq \emptyset$.

(2) $\implies$ (3): Trivial.

(3) $\implies$ (1): Sejam $x \in M$ e $\varepsilon > 0$. Pela hipótese da base $\mathcal{B}$, existe uma subcoleção $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$B(x; \varepsilon) = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V.$$

Mas como $V \cap D \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{B}$, obtemos que $B(x; \varepsilon) \cap D = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V \cap D \neq \emptyset$. Então $\overline{D} = M$. □

Definição 2.1.23. Um espaço métrico M é *separável* se existe um conjunto $D \subseteq M$ enumerável e denso em M .

Proposição 2.1.24. *Seja M um espaço métrico separável, ou seja, existe um conjunto $D \subseteq M$ enumerável tal que $\overline{D} = M$. Então a coleção de abertos*

$$\mathcal{B} = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in D \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}$$

é uma base enumerável para a topologia de M .

Demonstração. Seja $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ denso em M , é evidente que $\mathcal{B}$ é enumerável.

Mostraremos que para todo aberto não vazio $A \subseteq M$ e para todo ponto de A existe um aberto $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subseteq A$ e V contém esse ponto. Como A é aberto, para todo $a \in A$ existe $r_a > 0$ tal que $B(a; r_a) \subseteq A$. Pela propriedade arquimediana da reta, existe n tal que $\frac{1}{n} < r_a$. Então $B(a; \frac{1}{n}) \subseteq B(a; r_a) \subseteq A$. Como $B(a; \frac{1}{2n})$ é aberto e D é denso, $B(a; \frac{1}{2n}) \cap D \neq \emptyset$ pela Proposição 2.1.22. Seja $x \in B(a; \frac{1}{2n}) \cap D$ e $r_x = \frac{1}{2n}$. Então, dado $y \in B(x; \frac{1}{2n})$,

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Ou seja, $a \in B(x; \frac{1}{2n}) \subseteq B(a; r_a) \subseteq A$. Denote o conjunto dos centros obtidos por $D' \subseteq D$. Portanto,

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \subseteq \bigcup_{x \in D'} B(x; r_x) \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a; r_a) \subseteq A.$$

Ou seja, $\bigcup_{x \in D'} B(x; r_x) = A$. Então $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia de M . $\square$

Proposição 2.1.25. *Sejam M um espaço métrico sem pontos isolados e $D \subseteq M$ denso em M . Então $D \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ é denso em M para todo $x_1, \dots, x_n \in M$.*

Demonstração. Considere o caso $D \setminus \{x\}$ onde $x \in M$. Veja que $D \setminus \{x\}$ é denso em $M \setminus \{x\}$. E como x não é um ponto isolado, o conjunto $M \setminus \{x\}$ é denso em M . Assim, concluímos que $D \setminus \{x\}$ é denso em M .

Por indução, se $D \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ é denso em M , então $(D \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}) \setminus \{x_n\}$ também é denso em M . $\square$

Definição 2.1.26. Sejam $(M_1, d_1), \dots, (M_n, d_n)$ espaços métricos. Definimos o *espaço cartesiano*

$$M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n.$$

Considere $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ tais que $x_i, y_i \in M_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Algumas das métricas usuais para esse espaço são:

- a métrica da soma: $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + \dots + d_n(x_n, y_n)$;
- a métrica euclidiana: $d(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + \dots + d_n(x_n, y_n)^2}$;
- a métrica do máximo: $d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)\}$.

Ao longo do texto, assumimos que os espaços cartesianos estão munidos de uma dessas métricas.

Proposição 2.1.27. *Sejam M_1 e M_2 espaços métricos. Então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *A coleção*

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times A_2 : A_1 \subseteq M_1 \text{ e } A_2 \subseteq M_2 \text{ são abertos}\}$$

é uma base para a topologia de $M_1 \times M_2$.

2. *Sejam $A \subseteq M_1$ e $B \subseteq M_2$, então $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.*

3. *A sequência $(x_n, y_n)_n \subseteq M_1 \times M_2$ converge para $(a, b) \in M_1 \times M_2$ se, e somente se, $x_n \rightarrow a$ e $y_n \rightarrow b$.*

Demonstração. Veja [7, Proposição 5, p. 73] e [7, Proposição 5, p. 125]. $\square$

2.2 CONTINUIDADE

Definição 2.2.1. Sejam (M, d_1) e (N, d_2) espaços métricos. Uma função $f : M \rightarrow N$ é *contínua* em $a \in M$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$x \in M, d_1(x, a) < \delta \implies d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Ou em termos de bolas abertas:

$$f(B_M(a, \delta)) \subseteq B_N(f(a), \varepsilon).$$

Uma função é *contínua* se é contínua em todos os pontos do seu domínio.

Proposição 2.2.2. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma função entre espaços métricos. Então são equivalentes:*

1. f é contínua em M ;
2. $f^{-1}(A)$ é aberto para todo $A \subseteq N$ aberto;
3. $f^{-1}(F)$ é fechado para todo $F \subseteq N$ fechado.

Demonstração. Veja [7, Proposição 3, p. 71]. □

Proposição 2.2.3. *Sejam M e N espaços métricos. Uma função $f : M \rightarrow N$ é contínua em $a \in M$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_n \subseteq M$ tal que $x_n \rightarrow a$ temos que $f(x_n) \rightarrow f(a)$.*

Demonstração. Veja [7, Proposição 9, p. 130]. □

Proposição 2.2.4. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma função contínua e sobrejetora. Se $D \subseteq M$ é denso em M , então $f(D)$ é denso em N .*

Demonstração. Seja $b \in N$. Como f é sobrejetora, existe $a \in M$ tal que $f(a) = b$. Pela hipótese, D é denso em M . Portanto existe uma sequência $(a_n)_n \subset D$ tal que $a_n \rightarrow a$. Pela proposição anterior, já que f é contínua, $f(a_n) \rightarrow f(a) = b$. Por fim, veja que $(f(a_n))_n \subseteq f(D)$, logo $f(D)$ é denso em N . □

Proposição 2.2.5. *Sejam M, N, P e Q espaços métricos. Então*

1. *Se $f : M \rightarrow N$ é contínua em $a \in M$ e $g : N \rightarrow P$ é contínua em $f(a) \in N$, então $g \circ f$ é contínua em a .*
2. *Se $f : M \rightarrow N$ é contínua em $a \in X \subseteq M$, então $f|_X : X \rightarrow N$ é contínua em a .*
3. *Se $f_1 : M \rightarrow P$ e $f_2 : N \rightarrow Q$ são contínuas, então a função $f = f_1 \times f_2 : M \times N \rightarrow P \times Q$ dada por $f(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$ para todo $(x, y) \in M \times N$, é contínua.*

Demonstração. Veja [7, Proposição 1, p. 34] e [7, Exemplo 6, p. 35]. $\square$

Definição 2.2.6. Sejam (M, d_1) e (N, d_2) espaços métricos. Uma função $f : M \rightarrow N$ é:

- um *homeomorfismo* se f é bijetora, contínua e sua inversa é contínua;
- *uniformemente contínua* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in M, d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon;$$

- *lipschitziana* se existe $c > 0$ tal que para todo $x, y \in M$:

$$d_2(f(x), f(y)) \leq c d_1(x, y),$$

onde c é chamada de constante de Lipschitz;

- *contração* se é lipschitziana com constante $c < 1$;
- *imersão isométrica* se

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y) \quad \forall x, y \in M;$$

- *isometria* se é uma imersão isométrica bijetora.

Claramente toda função uniformemente contínua é contínua. Vale também o seguinte:

Proposição 2.2.7. *Toda função lipschitziana é uniformemente contínua.*

Demonstração. Sejam (M, d_1) e (N, d_2) espaços métricos, $f : M \rightarrow N$ lipschitziana e $c > 0$ sua constante de Lipschitz. Então dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{c} > 0$. Como f é lipschitziana,

$$d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) \leq c d_1(x, y) < c \delta = \varepsilon.$$

Portanto f é uniformemente contínua. $\square$

É fácil ver que as imersões isométricas são lipschitzianas e, portanto, contínuas. Além disso, toda imersão isométrica é injetora.

2.3 ESPAÇOS COMPLETOS

Definição 2.3.1. Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência $(x_n)_n \subseteq M$ é dita de *Cauchy* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$m, n \geq n_0 \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Proposição 2.3.2. *Sejam (M, d_1) e (N, d_2) espaços métricos, e $f : M \rightarrow N$ uma função uniformemente contínua. Então f leva seqüências de Cauchy em M a seqüências de Cauchy em N .*

Demonstração. Seja $(x_n)_n \subseteq M$ uma seqüência de Cauchy. Como f é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Mas como $(x_n)_n$ é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_1(x_n, x_m) < \delta$ se $m, n \geq n_0$. Ou seja,

$$m, n \geq n_0 \implies d_1(x_n, x_m) < \delta \implies d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon.$$

Logo $(f(x_n))_n$ é uma seqüência de Cauchy. □

Definição 2.3.3. Um espaço métrico M é *completo* se toda seqüência de Cauchy em M converge para um ponto do espaço.

Proposição 2.3.4. *Sejam M_1 e M_2 espaços métricos. Então o espaço $M_1 \times M_2$ é completo se, e somente se, M_1 e M_2 são completos.*

Demonstração. Veja [7, Proposição 7, p. 173]. □

Exemplo 2.3.5. Os espaços $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^n$ com as métricas usuais são completos.

Proposição 2.3.6. *Seja M um espaço métrico completo. Então, para qualquer conjunto fechado $F \subseteq M$, o espaço F é completo com a métrica de M .*

Demonstração. Dada uma seqüência de Cauchy $(x_n)_n \subseteq F$, em particular $(x_n)_n$ é uma seqüência de Cauchy em M . Então a seqüência $(x_n)_n$ é convergente em M . Seja $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, como F é fechado e $x_n \rightarrow x$, $x \in F$. Então F é completo. □

Definição 2.3.7. Seja X um espaço métrico. Dizemos que X é um *espaço de Baire* se a interseção de cada seqüência de subconjuntos abertos e densos em X ainda é um subconjunto denso em X .

Teorema 2.3.8 (Teorema de Baire). *Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.*

Demonstração. Seja X um espaço métrico completo. Suponha que X é não vazio e seja $(A_n)_n$ uma seqüência de conjuntos abertos e densos em X . Mostraremos que o conjunto $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é denso em X . Como $D = \{ B(a; r) : a \in X, r > 0 \}$ é uma base de abertos de X , basta mostrar que dado $a \in X$ e $r > 0$:

$$\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cap B(a; r) \neq \emptyset.$$

Como A_1 é denso e aberto em X , existem $x_1 \in A_1 \cap B(a; r)$ e $0 < \varepsilon_1 < r$ tais que

$$B[x_1; \varepsilon_1] \subseteq A_1 \cap B(a; r) \neq \emptyset.$$

Analogamente, como A_2 é denso e aberto em X , existem $x_2 \in A_2 \cap B(x_1; \varepsilon_1)$ e $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$ tais que

$$B[x_2; \varepsilon_2] \subseteq A_2 \cap B(x_1; \varepsilon_1) \neq \emptyset.$$

Por indução, obtemos $(x_n)_n$ e $(\varepsilon_n)_n$ tais que $x_n \in A_n \cap B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1})$, $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}$ e

$$B[x_n, \varepsilon_n] \subseteq A_n \cap B(x_{n-1}; \varepsilon_{n-1})$$

para todo $n \geq 2$.

Obtemos então que

$$B[x_n, \varepsilon_n] \subseteq B[x_m, \varepsilon_m]$$

para todo $n > m$.

Então $d(x_n, x_m) < \frac{1}{m} \rightarrow 0$, logo $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em X . Como X é completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$. Veja que $x_m \in B[x_n; \varepsilon_n]$ para todo $m \geq n$. Então como as bolas fechadas são conjuntos fechados e x é limite de uma sequência $(x_n)_n$ contida em um fechado, vemos que $x \in B[x_n; \varepsilon_n]$ para todo n . Por fim obtemos que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B[x_n; \varepsilon_n] \subseteq \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap B(a; r)$$

como queríamos demonstrar. □

2.4 ESPAÇOS NORMADOS

Neste trabalho, a menos que dito o contrário, consideramos espaços vetoriais sobre um corpo completo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definição 2.4.1. Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma *norma* em E é uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades para todos $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Toda norma define uma métrica no espaço vetorial, a saber: $d(x, y) = \|x - y\|$. É fácil ver que d satisfaz as propriedades de métrica. Dizemos que essa métrica é induzida pela norma, ou que a norma induz a métrica d no espaço vetorial E . Desta forma, todo espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço métrico com a métrica induzida pela norma.

Espaços normados possuem diversas propriedades úteis que não necessariamente são verdadeiras em um espaço métrico qualquer. Em especial temos:

Proposição 2.4.2. *Seja E um espaço vetorial normado não trivial. Então E não possui pontos isolados.*

Demonstração. Seja $a \in E$, mostraremos que a não é um ponto isolado de E . Dado $r > 0$, provaremos que $B(a; r) \neq \{a\}$. Tome $x \in E$ não nulo, seja $y = a + \frac{r}{2\|x\|}x$. Veja que

$$d(y, a) = \|y - a\| = \left\| a + \frac{r}{2\|x\|}x - a \right\| = \left\| \frac{r}{2\|x\|}x \right\| = \frac{r}{2\|y\|}\|y\| = \frac{r}{2} < r.$$

Então $y \in B(a; r)$ e $B(a; r) \neq \{a\}$, ou seja, a não é um ponto isolado. $\square$

Definição 2.4.3. Um espaço vetorial normado E é um *espaço de Banach* se é completo com a métrica induzida pela norma.

Proposição 2.4.4. *Sejam $(E, \|\cdot\|_1)$ e $(F, \|\cdot\|_2)$ espaços normados. A sua soma direta $E \oplus F$ é um espaço normado e pode ser munida da norma*

$$\|x \oplus y\| = \|x\|_1 + \|y\|_2.$$

Além disso, se E e F são espaços de Banach, então $E \oplus F$ também é.

Demonstração. Não é difícil ver que $\|\cdot\|$ define uma norma. Interpretando $E \oplus F$ como $E \times F$, segue da Proposição 2.3.4 que $E \oplus F$ é completo se, e somente se, E e F são completos. Ou seja, $E \oplus F$ é um espaço normado completo (espaço de Banach). $\square$

Proposição 2.4.5. *A função norma $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$. Então

$$d(\|x\|, \|y\|) = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| = d(x, y).$$

Logo a função $\|\cdot\|$ é lipschitziana, e consequentemente contínua. $\square$

Proposição 2.4.6. *Sejam E um espaço normado e $a \in E$. A translação*

$$\begin{aligned} t_a : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x + a \end{aligned}$$

é um homeomorfismo.

Demonstração. Com efeito, t_a é bijetora e sua inversa é a translação t_{-a} . Mostraremos que t_a é uma isometria. Sejam $x, y \in E$, logo

$$\|t_a(x) - t_a(y)\| = \|x + a - (y + a)\| = \|x - y\|.$$

Então a translação t_a e sua inversa são contínuas. $\square$

2.4.1 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Proposição 2.4.7. *Seja $T : E \rightarrow F$ uma transformação linear entre os espaços normados E e F . São equivalentes:*

1. T é lipschitziana;
2. T é uniformemente contínua;
3. T é contínua;
4. T é contínua na origem;
5. $\sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} < \infty$;
6. existe $c > 0$ tal que $\|Tx\| \leq c\|x\|, \forall x \in E$.

Demonstração. (1) $\implies$ (2) Foi feito na Proposição 2.2.7.

(2) $\implies$ (3) e (3) $\implies$ (4) Seguem das definições.

(4) $\implies$ (5) Como T é contínua na origem, para $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x\| = \|x - 0\| < \delta \implies \|T(x)\| = \|T(x) - T(0)\| < 1. \quad (2.1)$$

Seja $x \in E$ tal que $\|x\| \leq 1$, então $\|x\frac{\delta}{2}\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$. Pela Equação (2.1),

$$\left\|T\left(x\frac{\delta}{2}\right)\right\| < 1.$$

Então $\|Tx\| < \frac{2}{\delta}$ para todo x tal que $\|x\| \leq 1$. Ou seja, $\sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} < \infty$.

(5) $\implies$ (6) Sejam $c = \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$ e $x \neq 0$. Veja que $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| \leq 1$. Então

$$\begin{aligned} \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| &\leq c \\ \frac{1}{\|x\|}\|Tx\| &\leq c \\ \|Tx\| &\leq c\|x\|. \end{aligned}$$

Se $x = 0$, então a desigualdade é satisfeita trivialmente.

(6) $\implies$ (1) Sejam $x, y \in E$. Então existe $c > 0$ tal que

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Ou seja, T é lipschitziana. □

Definição 2.4.8. Denotamos o espaço das transformações lineares contínuas entre os espaços normados E e F por $\mathcal{L}(E; F)$.

Definimos a seguinte norma em $\mathcal{L}(E; F)$:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

para todo $T \in \mathcal{L}(E; F)$.

A norma $\|T\|$ está bem definida pela Proposição 2.4.7.

Proposição 2.4.9. *Sejam E e F espaços vetoriais. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *A norma definida acima é uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$.*
2. *$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$, $\forall x \in E$.*
3. *Se F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ também é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [4, Proposição 2.1.4]. □

Corolário 2.4.10. *Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então:*

$$\|T^n x\| \leq \|T\|^n \|x\|, \forall x \in E.$$

Definição 2.4.11. Seja $\varphi : E \rightarrow V$ uma transformação linear. A transformação φ é um *isomorfismo topológico* se é bijetora, contínua e possui inversa contínua.

Nesse caso, dizemos que os espaços E e V são *isomorfos*.

Proposição 2.4.12. *Sejam X e Y espaços normados, e $\varphi : Y \rightarrow X$ um isomorfismo topológico. Então*

1. *X é completo se, e somente se, Y é completo;*
2. *X é separável se, e somente se, Y é separável.*

Demonstração. Considere $\varphi : Y \rightarrow X$ um isomorfismo topológico.

(1) Assuma que X é completo. Seja $(y_j)_j \subseteq Y$ uma sequência de Cauchy. Defina $x_j = \varphi(y_j)$ para todo j . Como φ é uniformemente contínua (segue de φ ser linear contínua), $(x_j)_j$ também é uma sequência de Cauchy. Seja $x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j$, que existe pela completude de X . Por fim, como $x_j \rightarrow x$, $y_j = \varphi^{-1}(x_j) \rightarrow \varphi^{-1}(x) \in Y$. Logo Y é completo.

(2) Assuma que X é separável, então existe um subconjunto $D \subseteq X$ enumerável tal que $\overline{D} = X$. Como φ^{-1} é sobrejetora, $\varphi^{-1}(D)$ é denso em Y pela Proposição 2.2.4. E como D é enumerável, $\varphi^{-1}(D)$ também é. Portanto Y é separável. □

Definição 2.4.13. Sejam E e F espaços normados, e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. O *gráfico* de T é o conjunto

$$G(T) = \{ (x, y) : x \in E, y = Tx \} \subseteq E \times F.$$

Teorema 2.4.14 (Teorema do Gráfico Fechado). *Sejam E e F espaços de Banach, e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, $G(T)$ é fechado.*

Demonstração. Veja [4, Teorema 2.5.1] □

2.5 ESPAÇOS CLÁSSICOS DE SEQUÊNCIAS

Os espaços definidos nesta seção serão fundamentais para os estudos de dinâmica linear deste trabalho.

Definição 2.5.1. Seja $1 \leq p < \infty$ um número real. O *espaço das sequências absolutamente p -somáveis* é o conjunto

$$\ell_p = \left\{ x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{K} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}.$$

Definimos também um importante subconjunto de ℓ_p , das sequências que são nulas a partir de um certo índice, mais precisamente:

$$c_{00} = \{ (x_j)_j \subseteq \mathbb{K} : \exists j_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_j = 0, \forall j \geq j_0 \}.$$

Ambos os espaços são subespaços do espaço das sequências que convergem para 0, que é denotado por

$$c_0 = \{ (x_j)_j \subseteq \mathbb{K} : x_j \rightarrow 0 \}.$$

Se $1 \leq p < q < \infty$, então valem as inclusões:

$$c_{00} \subset \ell_p \subset \ell_q \subset c_0.$$

É possível definir a seguinte norma nos espaços ℓ_p , $1 \leq p < \infty$:

Definição 2.5.2. Seja $(x_j)_j \in \ell_p$ onde $1 \leq p < \infty$. A *norma p* é dada por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p}.$$

É fácil verificar que $\|\cdot\|_p$ satisfaz algumas das propriedades de norma. Dados $(x_j)_j \in \ell_p$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que

1. $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} \geq 0$
2. $x = (x_j)_j = 0 \iff x_j = 0, \forall j \iff \|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} = 0$
3. $\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda x_j|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|^p |x_j|^p \right)^{1/p} = \left(|\lambda|^p \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \|x\|_p$

Para provar a desigualdade triangular da norma $\|\cdot\|_p$, precisaremos do seguinte resultado:

Proposição 2.5.3 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam $(x_j)_j, (y_j)_j \in \ell_p$ e $1 \leq p < \infty$. Então:*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Demonstração. Veja [4, Proposição 1.4.2]. $\square$

Por fim, dados $(x_j)_j, (y_j)_j \in \ell_p$, temos que $(x_j) + (y_j) \in \ell_p$ pela Proposição 2.5.3. Além disso ℓ_p é um espaço vetorial.

Vejamos que $\|\cdot\|_p$ satisfaz a desigualdade triangular. Dados $(x_j)_j, (y_j)_j \in \ell_p$ temos que

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \stackrel{\text{Proposição 2.5.3}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Concluimos então que ℓ_p é um espaço vetorial normado.

Proposição 2.5.4. *O espaço ℓ_p é completo para $1 \leq p < \infty$. Ou seja, ℓ_p é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(x_n)_n \subseteq \ell_p$ uma sequência de Cauchy. Denote $x_n = (x_n^j)_j$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m \geq n_0$, vale:

$$\|x_n - x_m\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_n^j - x_m^j|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon \quad (2.2)$$

Em particular, se $n, m \geq n_0$:

$$|x_n^j - x_m^j| \leq \|x_n - x_m\|_p \leq \varepsilon$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Então $(x_j^n)_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ para todo j , portanto é convergente. Seja $x_j = \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^n$ e tome $x = (x_j)_j$. De (2.2) temos que:

$$\left(\sum_{j=1}^k |x_j^n - x_j^m|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon \quad (2.3)$$

$\forall n, m \geq n_0$ e $\forall k \in \mathbb{N}$.

Fazendo $m \rightarrow \infty$ temos:

$$\left(\sum_{j=1}^k |x_j^n - x_j|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon$$

$\forall n \geq n_0$ e $\forall k \in \mathbb{N}$.

Então com $k \rightarrow \infty$:

$$\|x_n - x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^n - x_j|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$.

Portanto $(x_n - x) \in \ell_p$ para todo $n \geq n_0$. Logo $x = (x - x_{n_0}) + x_{n_0} \in \ell_p$ e $\|x_n - x\|_p \rightarrow 0$. $\square$

Proposição 2.5.5. *O espaço ℓ_p é separável e c_{00} é denso em ℓ_p , para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Definimos $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ tal que $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}} = \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}} = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Seja

$$D = \{x = (x_j)_j \in c_{00} : x_j \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}, \forall j \in \mathbb{N}\}.$$

Vejamos que D é enumerável. Seja $D_i = \{(x_j)_j : x_1, \dots, x_i \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} \text{ e } x_j = 0, \forall j \geq i\}$. Claramente cada D_i é enumerável. Então $D = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i$ é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis e portanto também é enumerável.

Agora mostraremos que D é denso em ℓ_p . Sejam $x = (x_j)_j \in \ell_p$ e $\varepsilon > 0$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |x_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2^p}.$$

Seja $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n_0}, 0, \dots) \in c_{00}$. Como $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ é denso em $\mathbb{K}$, existe um $z_j \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ arbitrariamente próximo de x_j , para todo $1 \leq j \leq n_0$. Seja $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n_0}, 0, \dots) \in D$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n_0} |x_j - z_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2^p}.$$

Então

$$\|x - z\|_p \leq \|x - \tilde{x}\|_p + \|\tilde{x} - z\|_p = \left(\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n_0} |x_j - z_j|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Logo D é denso em ℓ_p . E como $D \subset c_{00}$, obtemos que c_{00} é denso em ℓ_p . $\square$

Analogamente, definimos os espaços de seqüências com peso.

Definição 2.5.6. Sejam $1 \leq p < \infty$ e $(v_j)_j$ uma seqüência de números positivos, isto é, $v_j > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. O *espaço de seqüências com peso* é o conjunto

$$\ell_p(v) = \left\{ x = (x_j)_j \subseteq \mathbb{K} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p v_j^p < \infty \right\}.$$

Veja que dados $(x_j), (y_j) \in \ell_p(v)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, as seqüências $(x_j v_j)_j$ e $(\lambda y_j v_j)_j$ pertencem a ℓ_p . Portanto, pela Proposição 2.5.3,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + \lambda y_j|^p v_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p v_j^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda y_j|^p v_j^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Logo $(x_j)_j + \lambda(y_j)_j \in \ell_p(v)$. Sendo assim, não é difícil ver que $\ell_p(v)$ é um espaço vetorial. Assim como em ℓ_p , podemos definir uma norma em $\ell_p(v)$ da seguinte forma:

$$\|x\|_{p,v} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p v_j^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso, a norma $\|\cdot\|_{p,v}$ satisfaz os axiomas de norma semelhante à norma $\|\cdot\|_p$ em ℓ_p . Por fim, com base nos resultados anteriores sobre os espaços ℓ_p , provaremos que:

Proposição 2.5.7. *Os espaços $\ell_p(v)$ são espaços de Banach separáveis.*

Demonstração. Defina o isomorfismo:

$$\begin{aligned}\varphi : \ell_p(v) &\rightarrow \ell_p \\ (x_j)_j &\mapsto (x_j v_j)_j.\end{aligned}$$

Primeiro, note que φ é linear. Dados $(x_j)_j, (y_j)_j \in \ell_p(v)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi((x_j)_j + \lambda(y_j)_j) &= ((x_j + \lambda y_j)v_j)_j = (x_j v_j + \lambda y_j v_j)_j = (x_j v_j)_j + \lambda(y_j v_j)_j \\ &= \varphi((x_j)_j) + \lambda\varphi((y_j)_j).\end{aligned}$$

Além disso φ é uma imersão isométrica. De fato, dado $(x_j)_j \in \ell_p(v)$,

$$\|\varphi(x_j)_j\|_p = \|(x_j v_j)_j\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p v_j^p \right)^{1/p} = \|(x_j)_j\|_{p,v}.$$

Logo φ é contínuo e injetor.

Dado qualquer $(x_j)_j \in \ell_p$, a sequência $y = \left(\frac{x_j}{v_j}\right)_j$ pertence a $\ell_p(v)$ e $\varphi(y) = (x_j)_j$. Ou seja, φ é sobrejetor. Segue de forma análoga que φ^{-1} é contínua. Então φ é um isomorfismo topológico.

Finalmente, obtemos pela Proposição 2.4.12 que $\ell_p(v)$ é um espaço de Banach separável. $\square$

2.6 BASES EM ESPAÇOS DE BANACH

Definição 2.6.1. Sejam X um espaço normado e $(x_j)_j \subseteq X$ uma sequência, chamada de sequência de termos gerais. A *série*

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j$$

converge para $x \in X$ se a sequência das somas parciais

$$S_n = \sum_{j=1}^n x_j$$

converge para x .

Proposição 2.6.2 (Critério de Cauchy). *Seja X um espaço de Banach. Então a série*

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j$$

converge se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > m \geq n_0 \implies \left\| \sum_{j=m+1}^n x_j \right\| < \varepsilon.$$

Demonstração. Como X é um espaço de Banach, a sequência das somas parciais $(S_n)_n$ converge se, e somente se, $(S_n)_n$ é uma sequência de Cauchy. Ou seja, a série converge se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{j=m+1}^n x_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j - \sum_{j=1}^m x_j \right\| = \|S_n - S_m\| < \varepsilon$$

para todo $n > m \geq n_0$. □

Definição 2.6.3. Uma sequência $(e_n)_n \subseteq X$ é uma *base de Schauder* de um espaço de Banach X se todo elemento do espaço $x \in X$ é escrito de forma única por uma série da forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,$$

onde $(a_n)_n \subseteq \mathbb{K}$.

Chamamos essa série de *expansão de x* na base $(e_n)_n$.

Definição 2.6.4. Seja X um espaço normado. Dizemos que a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$

1. *converge incondicionalmente* se, para toda permutação $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_{\sigma(j)}$$

converge;

2. *converge absolutamente* se a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|$$

converge.

Desta forma, uma base de Schauder $(e_n)_n$ é *incondicional* se toda expansão de elementos $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$ converge incondicionalmente.

Proposição 2.6.5. *Seja X um espaço normado. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Toda série absolutamente convergente em X é incondicionalmente convergente.*
2. *Toda série absolutamente convergente em X é convergente.*
3. *X é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [4, Proposição 10.1.14] □

Teorema 2.6.6. *Sejam X um espaço de Banach e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série. Então são equivalentes:*

1. *A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente.*
2. *Para toda sequência $(\varepsilon_n)_n \subseteq \{0, 1\}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varepsilon_n$ converge.*
3. *Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon,$$

para qualquer conjunto finito M de $\mathbb{N}$ tal que $\min M > n_\varepsilon$.

4. *Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left\| \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} x_n \varepsilon_n \right\| < \varepsilon,$$

para qualquer sequência $(\varepsilon_n)_n \subseteq \{0, 1\}$.

5. *Dada uma escolha de sinais $(\varepsilon_n)_n \subseteq \{-1, 1\}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ converge*

Demonstração. Veja [4, Teorema 10.1.16] e [6, Theorem A.16] □

Exemplo 2.6.7. A sequência da base canônica $(e_n)_n$, composta pelas sequências $e_n = (\delta_{n,j})_j$ onde $\delta_{i,j} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{i,j} = 0$ caso $i \neq j$, forma uma base incondicional de ℓ_p .

Primeiro verificaremos que $(e_n)_n$ é uma base de Schauder. Seja $x = (x_j)_j \in \ell_p$, mostraremos que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j.$$

De fato, tomando as somas parciais, veja que dados $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ quaisquer,

$$\left\| x - \sum_{j=1}^m x_j e_j \right\|_p^p = \|(0, \dots, 0, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)\|_p^p = \sum_{j=m+1}^{\infty} |x_j|^p.$$

E como $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty$, temos que $\sum_{j=1}^n x_j e_j \rightarrow x$.

Agora, para a unicidade suponha que exista $(y_j)_j \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tal que $x = \sum_{j=1}^{\infty} y_j e_j$. Como a projeção em sequências é linear e contínua, para toda coordenada i temos que

$$\pi_i(x) = \pi_i \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \pi_i(y_j e_j) = y_i.$$

mas fazendo o mesmo para $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$, obtemos que $x_i = y_i$ para todo i .

Resta provar que a sequência $\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$ converge incondicionalmente para todo $x \in \ell_p$. Com efeito, dada uma sequência $(\varepsilon_n)_n \subseteq \{0, 1\}$, obtemos que

$$\left\| \sum_{j=m+1}^n \varepsilon_j x_j e_j \right\|_p = \left(\sum_{j=m+1}^n \varepsilon_j |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=m+1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.4)$$

Como $x \in \ell_p$, pelo Critério de Cauchy existe $n_0 > 0$ tal que

$$n \geq m \geq n_0 \implies \left(\sum_{j=m+1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Então $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j x_j e_j$ satisfaz o critério de Cauchy pela Equação (2.4). Logo $\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$ converge incondicionalmente pelo Teorema 2.6.6.

Proposição 2.6.8. *A base canônica de ℓ_p também é uma base incondicional de $\ell_p(v)$.*

Demonstração. Seja $x \in \ell_p(v)$. Pelo isomorfismo da Proposição 2.5.7 e a base de ℓ_p , existe uma sequência $(y_j)_j$ tal que

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j e_j,$$

então pela linearidade e continuidade de φ^{-1}

$$x = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{-1}(y_j e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \varphi^{-1}(e_j).$$

Como $\varphi^{-1}(e_j) = \frac{e_j}{v_j}$, obtemos que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{v_j} e_j.$$

A unicidade e incondicionalidade são análogas ao caso ℓ_p . □

A partir daqui, assumimos que $(e_n)_n$ denota a sequência dos vetores da base canônica em ℓ_p ou $\ell_p(v)$.

Proposição 2.6.9. *Seja $(e_n)_n$ a base canônica de ℓ_p . Então as projeções canônicas*

$$\begin{aligned} p_k : \ell_p &\rightarrow \ell_p \\ (x_j)_j &\mapsto x_k e_k \end{aligned}$$

são contrações, e em particular, contínuas.

As projeções canônicas $p_k : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$ são definidas de forma análoga.

Denotaremos as distintas projeções como $\pi_k : \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$ e $p_k : \ell_p \rightarrow \ell_p$ ao longo do trabalho.

Demonstração. As projeções são trivialmente lineares. Mostraremos que são contínuas. Sejam

$x = (x_j)_j \in \ell_p$ e $k \in \mathbb{N}$. Então

$$\|p_k(x)\|_p = \|x_k e_k\|_p = |x_k| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p.$$

O resultado é análogo para $\ell_p(v)$.

□

3. DINÂMICA LINEAR

Veremos neste capítulo alguns conceitos básicos da teoria dos sistemas dinâmicos lineares. Ressaltamos que alguns resultados deste capítulo são válidos no contexto não linear, embora o foco deste trabalho seja a dinâmica linear. Este capítulo foi baseado nos capítulos 1 e 2 de [6] e nas seções 1.1 e 6.2 de [3]. A demonstração da hiperciclicidade do operador de Rolewicz foi baseada em [8].

3.1 NOÇÕES BÁSICAS DE SISTEMAS DINÂMICOS

Definição 3.1.1. Um *sistema dinâmico* é representado pelo par (X, T) ou $T : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico e T é uma aplicação contínua.

Já em um *sistema dinâmico linear*, assumimos, a menos que seja dito o contrário, que X é um espaço de Banach e T é um operador linear contínuo.

Em alguns momentos, por abuso de notação, nos referimos ao sistema dinâmico pela sua aplicação.

Em particular, estamos interessados no comportamento das iterações de um sistema dinâmico sobre um ponto.

Definição 3.1.2. Sejam $T : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico e $x \in X$. A *órbita* de x é o conjunto

$$\text{Orb}(x, T) = \{T^i(x) : i \in \mathbb{N}\}.$$

Definição 3.1.3. Um sistema dinâmico $T : X \rightarrow X$ é *hipercíclico* se existe $x \in X$ tal que $\overline{\text{Orb}(x, T)} = X$, onde x é chamado de *vetor hipercíclico*.

Denotamos por $HC(T)$ o conjunto de todos vetores hipercíclicos de T .

Observação 3.1.4. Toda órbita é enumerável. Desta forma, para uma aplicação ser hipercíclica o espaço deve ser separável. Assumiremos no texto que todo sistema dinâmico linear é separável.

Proposição 3.1.5. *Seja $T : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico tal que X não possui pontos isolados. Se $\text{Orb}(x, T)$ é denso em X , então $\text{Orb}(T^n x, T)$ também é para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.1.25, $\text{Orb}(T^n x, T) = \text{Orb}(x, T) \setminus \{x, Tx, \dots, T^{-1}x\}$ é denso em X . □

Proposição 3.1.6. *Seja $T : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico linear. Se T é hipercíclico, então $\|T\| > 1$.*

Demonstração. Suponha que $\|T\| \leq 1$. Como T é hipercíclico, existe $x_0 \in X$ tal que $\overline{\text{Orb}(T, x_0)} = X$. Então, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T^n x_0\| \leq \|T\|^n \|x_0\| \leq \|x_0\|.$$

Logo $\text{Orb}(T, x_0)$ é limitado. Sendo assim, a órbita de x_0 não pode ser densa em X , já que o espaço X é ilimitado, o que é uma contradição. $\square$

A seguir, veremos que não existe hiperciclicidade linear em espaços de dimensão finita. Então o estudo da hiperciclicidade em sistemas lineares deve se concentrar em espaços de dimensão infinita.

Proposição 3.1.7. *Espaços de Banach de dimensão finita não triviais não admitem operadores lineares hipercíclicos.*

Demonstração. Consideraremos o espaço $\mathbb{K}^n$ com a norma $\|x\| = (\bar{x}^t x)^{\frac{1}{2}}$, onde $\bar{x}$ denota a conjugação complexa e x^t é o vetor transposto. Suponha que $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ é um operador hipercíclico em $\mathbb{K}^n$. Então existe $x \in \mathbb{K}^n$ tal que $\overline{\text{Orb}(T, x)} = \mathbb{K}^n$. Denotaremos por A a matriz da transformação linear em uma base qualquer. Assim, o conjunto

$$\{A^n x : n \in \mathbb{N}\}$$

é denso em $\mathbb{K}^n$, e em particular, é denso em $\mathbb{R}^n$.

Suponha que exista um autovetor real à esquerda $z \in \mathbb{R}^n$ de A . Para todo $a > 0$, considere o vetor $a \frac{z}{\|z\|^2} \in \mathbb{K}^n$. Como a órbita de x é densa em $\mathbb{R}^n$, existe uma sequência $(n_k)_k$ crescente de naturais tal que $A^{n_k} x = T^{n_k} x \rightarrow a \frac{z}{\|z\|^2}$. Multiplicando por z^t em ambos os lados, obtemos que $z^t A^{n_k} x \rightarrow a \frac{z^t z}{\|z\|^2} = a$.

Agora, se não existir um autovetor real à esquerda de A , sabemos da Álgebra Linear que existe um autovetor complexo à esquerda na forma $z = z_1 + iz_2$, onde $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ são linearmente independentes. Para todo $a > 0$, como z_1 e z_2 são linearmente independentes, podemos obter um vetor na forma $u = \alpha \left(z_1 - \frac{z_1^t z_2}{\|z_2\|^2} z_2 \right)$ tal que $z_2^t u = 0$ e $z_1^t u = a$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, analogamente ao caso anterior, como a órbita de x é densa em $\mathbb{R}^n$, existe uma sequência $(m_k)_k$ crescente de naturais tal que $A^{m_k} x \rightarrow u$. Assim, multiplicando por z^t , obtemos que $z^t A^{m_k} x \rightarrow z_1^t u + iz_2^t u = a$.

Em ambos os casos o conjunto $\{|z^t A^n x| : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $[0, +\infty)$. Mas veja que se λ é um autovalor associado a z , dado $n \in \mathbb{N}$, temos dois casos:

- Se $|\lambda| > 1$, então

$$|z^t A^n x| = |\lambda^n A z^t x| = |\lambda|^n |z^t x| > |z^t x| > 0.$$

- Se $|\lambda| \leq 1$, então

$$|z^t A^n x| = |\lambda|^n |z^t x| \leq |z^t x|.$$

Em ambos os casos, temos uma contradição, já que implicaria que o conjunto

$$\{|z^t A^n x| : n \in \mathbb{N}\}$$

não é denso em $[0, +\infty)$. Dessa forma, T não pode ser hipercíclico. $\square$

Definimos agora outro importante conceito da teoria de sistemas dinâmicos.

Definição 3.1.8. Um sistema dinâmico $T : X \rightarrow X$ é *topologicamente transitivo* se, para quaisquer abertos $U, V \subseteq X$ não triviais, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a propriedade acima vale para todo $n \geq n_0$, dizemos que o operador é *mixing*.

Note que para verificar se T é topologicamente transitivo, é suficiente provar que, para todo par de abertos básicos não triviais $U, V \subset X$, exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. De fato, dado um par de abertos não triviais $U, V \subseteq X$, existem abertos básicos U_1, U_2 tal que $U_1 \subseteq U$ e $V_1 \subseteq V$. Portanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$, e como $T^n(U_1) \cap V_1 \subseteq T^n(U) \cap V$ segue que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Proposição 3.1.9. *Seja $T : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico onde X é um espaço métrico sem pontos isolados. Se T é hipercíclico, então T é topologicamente transitivo.*

Demonstração. Sejam $U, V \subseteq X$ abertos não nulos. Como T é hipercíclico, existe $x \in X$ cuja órbita é densa em X . Portanto $T^n x \in U$ para algum $n \in \mathbb{N}$. E como $\text{Orb}(T^n, x)$ também é denso, existe $m \geq n$ tal que $T^m x \in V$. Ou seja, $T^m x = T^{m-n} \circ T^n x \in V$, então $T^{m-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Proposição 3.1.10. *Seja $T : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico. Então são equivalentes:*

- i) T é topologicamente transitivo;
- ii) para todo aberto não nulo $U \subseteq X$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U)$ é denso em X ;
- iii) para todo aberto não nulo $U \subseteq X$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$ é denso em X .

Demonstração. (i) $\implies$ (ii) Seja $U \subseteq X$ um aberto não vazio dado. Como T é topologicamente transitivo, para todo aberto $V \subseteq X$ não vazio, existe n tal que: $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Então, para todo aberto V , $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para algum n . Logo $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U)$ é denso em X .

(ii) $\implies$ (iii) Dado $V \subseteq X$ aberto não vazio, para todo $U \subseteq X$ aberto não vazio temos que $(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(V)) \cap U \neq \emptyset$. Ou seja, existe m tal que $T^m(V) \cap U \neq \emptyset$, então $T^{-m}(U) \cap V \neq \emptyset$. Obtemos por fim que $(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)) \cap V \neq \emptyset$ para todo aberto V logo é denso.

(iii) $\implies$ (i) Dados $U, V \subseteq X$ abertos não vazios, $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(V) \cap U \neq \emptyset$. Então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-m}(V) \cap U \neq \emptyset$. Logo $T^m(U) \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Corolário 3.1.11. *Seja $T : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico com inversa T^{-1} contínua. Então T é topologicamente transitivo se, e somente se, T^{-1} também é.*

O seguinte teorema apresenta uma relação entre hiperciclicidade e transitividade topológica em espaços métricos.

Teorema 3.1.12 (Transitividade de Birkhoff). *Seja X um espaço métrico separável completo sem pontos isolados. A aplicação $T : X \rightarrow X$ é hipercíclica se, e somente se, é topologicamente transitiva.*

Além disso, o conjunto de pontos com órbita densa é denso em X .

Demonstração. ($\Leftarrow$) Demonstrado na Proposição 3.1.9.

($\Rightarrow$) Relembre que $HC(T)$ é o conjunto dos pontos que possuem órbita densa em X . Pela hipótese X é separável, então, como visto na Proposição 2.1.24, X admite uma base enumerável de abertos a qual denotaremos por $(U_k)_k$. Se $x \in HC(T)$, então para todo U_k existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x \in U_k$. A recíproca também é verdadeira, já que implica que a órbita de x intercepta todo aberto básico e portanto, pela Proposição 2.1.22, $Orb(x)$ é denso em X . Podemos escrever essa relação em linguagem de conjuntos da seguinte forma:

$$HC(T) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k).$$

Por hipótese, T é topologicamente transitivo, logo $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ é denso em X pela Proposição 3.1.10. Além disso, como T é contínua, $T^{-n}(U_k)$ é aberto para todo k assim como a reunião desses conjuntos. Desta forma, $HC(T)$ é uma interseção enumerável de conjuntos abertos e densos, portanto $HC(T)$ é denso em X pelo Teorema 2.3.8. Em particular, $HC(T)$ é não vazio, então existe $x_0 \in HC(T)$ cuja órbita é densa em X . $\square$

Em particular, utilizaremos ao longo do trabalho uma versão do teorema anterior para os sistemas dinâmicos lineares.

Corolário 3.1.13. *Seja $T : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico linear, onde X é um espaço de Banach separável. Então T é hipercíclico se, e somente se, é topologicamente transitivo.*

Demonstração. Pela Proposição 2.4.2, todo espaço de Banach não possui pontos isolados, então vale o Teorema 3.1.12. $\square$

3.2 CAOS

Na teoria de sistemas dinâmicos, existem diversas definições de caos. Uma das principais definições, criada por Devaney, se baseia em três propriedades: transitividade topológica, densidade dos pontos periódicos e sensibilidade às condições iniciais. Definamos as duas últimas propriedades:

Definição 3.2.1. Seja $T : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico. A aplicação T é *sensível às condições iniciais* se existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in B(x, \varepsilon)$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(T^n x, T^n y) > \delta,$$

onde δ é chamada de constante de sensibilidade de T .

Definição 3.2.2. Seja $T : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico. Um ponto $x_0 \in X$ é *periódico* se existe $n \in \mathbb{N}$, chamado de período, tal que

$$T^n(x_0) = x_0.$$

Denotamos o conjunto de todos os pontos periódicos de T por $\text{Per}(T)$.

Assim, é possível definir o caos de Devaney:

Definição 3.2.3 (Primeira definição de Caos de Devaney). Seja X um espaço métrico sem pontos isolados. O sistema dinâmico $T : X \rightarrow X$ é *caótico no sentido de Devaney* se satisfaz as seguintes propriedades:

1. T é topologicamente transitivo;
2. o conjunto de pontos periódicos de T é denso em X ;
3. T é sensível às condições iniciais.

Após a primeira definição de caos de Devaney, Banks *et al.* mostraram que, em espaços métricos sem pontos isolados, a sensibilidade às condições iniciais era redundante.

Teorema 3.2.4 (Banks–Brooks–Cairns–Davis–Stacey). *Seja X um espaço métrico sem pontos isolados. Se o sistema dinâmico $T : X \rightarrow X$ é topologicamente transitivo e possui um conjunto denso de pontos periódicos, então T é sensível às condições iniciais.*

Demonstração. Veja [2]. □

Já para sistemas dinâmicos lineares, a transitividade topológica é uma condição suficiente para a sensibilidade às condições iniciais.

Proposição 3.2.5. *Seja $T : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico linear, onde X é um espaço de Banach separável. Se T é hipercíclico, então T é sensível às condições iniciais.*

Demonstração. Demonstraremos um caso mais forte de sensibilidade às condições iniciais. Pelo Teorema 3.1.12, o conjunto dos pontos hipercíclicos $HC(T)$ é denso em X . Note que, dado $x \in X$, o conjunto

$$x + HC(T),$$

que é a translação de $HC(T)$ por x , também é denso em X pelas Proposições 2.2.4 e 2.4.6.

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $y \in B(x, \varepsilon) \cap (x + HC(T))$. Obtemos que o vetor $y - x$ é hipercíclico. Como sua órbita é densa em X , para qualquer $\delta > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T^n x - T^n y\| = \|T^n(x - y)\| > \delta.$$

Então T é sensível às condições iniciais para toda constante de sensibilidade $\delta > 0$. $\square$

O que leva a uma segunda definição do Caos de Devaney, que será utilizada no trabalho considerando os operadores lineares.

Definição 3.2.6 (Caos Linear de Devaney). Seja X um espaço de Banach separável. Então o sistema dinâmico linear $T : X \rightarrow X$ é caótico no sentido de Devaney se satisfaz as seguintes propriedades:

1. T é topologicamente transitivo;
2. o conjunto de pontos periódicos em T é denso em X .

3.3 CONJUGAÇÕES

Exploraremos uma noção de equivalência entre sistemas dinâmicos que preserva as principais propriedades descritas na seção anterior.

Definição 3.3.1. Dizemos que $T : X \rightarrow X$ é *quase conjugado* a $S : Y \rightarrow Y$ se existe uma aplicação $\phi : Y \rightarrow X$ contínua com imagem densa tal que $T \circ \phi = \phi \circ S$. Ou seja, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{S} & Y \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

Caso ϕ seja um homeomorfismo, dizemos que T e S são *conjugados*.

Como consequência da definição, toda conjugação é uma quase conjugação. Além disso a conjugação é uma relação de equivalência entre sistemas dinâmicos.

Dizemos que a quase conjugação preserva uma propriedade P se vale a afirmação: se o sistema dinâmico (Y, S) possui propriedade P , então todo sistema dinâmico (X, T) quase conjugado a (Y, S) também possui a propriedade P .

Proposição 3.3.2. *Quase conjugação preserva transitividade topológica e mixing.*

Demonstração. Seja $T : X \rightarrow X$ quase conjugado a $S : Y \rightarrow Y$ por uma aplicação $\phi : Y \rightarrow X$ contínua com imagem densa. Dados $U, V \subseteq X$ abertos não vazios, as imagens inversas $\phi^{-1}(U), \phi^{-1}(V) \subseteq Y$ também são abertos pela continuidade de ϕ e não vazios pela hipótese sobre a imagem densa. Assumimos que S é topologicamente transitivo, logo existe n tal que

$$S^n(\phi^{-1}(U)) \cap \phi^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Ou seja, existe y tal que $y \in \phi^{-1}(U)$ e $S^n y \in \phi^{-1}(V)$. Então $\phi(y) \in U$ e $\phi(S^n y) \in V$.

Agora veremos por indução que $T^n \circ \phi = \phi \circ S^n$. Sabemos que vale para $n = 1$, então assumamos que $T^{n-1} \circ \phi = \phi \circ S^{n-1}$.

Então

$$T^n \circ \phi = T \circ T^{n-1} \circ \phi = T \circ \phi \circ S^{n-1} = \phi \circ S \circ S^{n-1} = \phi \circ S^n.$$

Como $T^n \circ \phi = \phi \circ S^n$ e $\phi(S^n y) \in V$, obtemos que $T^n \phi(y) \in V$. Logo T é topologicamente transitivo.

A demonstração é análoga se S for *mixing*. □

Corolário 3.3.3. *Quase conjugação preserva hiperciclicidade em espaços métricos completos separáveis sem pontos isolados.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.12, a transitividade topológica é equivalente a hiperciclicidade. Então hiperciclicidade também é preservada por quase conjugação. □

Proposição 3.3.4. *Quase conjugação preserva a propriedade de possuir um conjunto de pontos periódicos denso no espaço.*

Demonstração. Seja $T : X \rightarrow X$ quase conjugado a $S : Y \rightarrow Y$ por uma aplicação $\phi : Y \rightarrow X$ contínua com imagem densa. Dado um aberto não vazio $U \subseteq X$, temos que $\phi^{-1}(U)$ é um aberto não vazio em Y . Pela densidade dos pontos periódicos em Y , existe $y \in \phi^{-1}(U)$ de período n tal que $S^n y = y$. Então $\phi(y) \in U$ e

$$T^n \phi(y) = \phi(S^n y) = \phi(y).$$

Ou seja, $\phi(y) \in U$ é um ponto periódico de X . Logo o conjunto dos pontos periódicos de X é denso no espaço. □

Corolário 3.3.5. *Quase conjugação preserva caos em espaços métricos completos separáveis sem pontos isolados.*

Demonstração. Segue do Corolário 3.3.3 e do resultado anterior pela segunda definição de Caos de Devaney (ver Definição 3.2.6). □

3.4 SISTEMAS DINÂMICOS FRACAMENTE MIXING

Dados dois sistemas dinâmicos, podemos definir um novo sistema dinâmico pelo seu produto cartesiano. Veremos nesta seção algumas relações entre esses sistemas.

Definição 3.4.1. Sejam $T : X \rightarrow X$ e $S : Y \rightarrow Y$ sistemas dinâmicos. O sistema dinâmico $T \times S : X \times Y \rightarrow X \times Y$ é dado por

$$(T \times S)(x, y) = (Tx, Sy)$$

para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

Além disso,

$$(T \times S)^n(x, y) = (T^n \times S^n)(x, y) = (T^n x, T^n y).$$

Caso T e S sejam sistemas dinâmicos lineares, denotamos $T \times S$ por $T \oplus S$.

Proposição 3.4.2. *Sejam $T : X \rightarrow X$ e $S : Y \rightarrow Y$ sistemas dinâmicos. Então,*

1. *se $T \times S$ é topologicamente transitivo, então T e S também são;*
2. *se $T \times S$ é mixing, então T e S também são;*
3. *se $T \times S$ é caótico, então T e S também são.*

Demonstração. Todos os itens seguem por meio de quase conjugações. Tome a projeção $\pi_1 : X \times S \rightarrow X$ definida por $\pi_1(x, y) = x$. Então claramente π_1 é contínua e possui imagem densa em X . Segue que $\pi_1 \circ (T \times S) = T \circ \pi_1$, então T e S são quase conjugados a $T \times S$, sendo S análogo considerando a projeção $\pi_2 : X \times S \rightarrow S$. Por fim, obtemos os resultados pela Proposição 3.3.2 e Corolário 3.3.5. $\square$

Vimos então que se $T \times T$ é topologicamente transitivo, então T também é. Mas não necessariamente a recíproca é verdadeira. Definimos uma nova classe de sistemas dinâmicos que satisfazem a recíproca.

Definição 3.4.3. Um sistema dinâmico $T : X \rightarrow X$ é *fracamente mixing* se $T \times T$ é topologicamente transitivo.

De outra forma, pela Proposição 2.1.27, basta verificar que para todo aberto básico na forma $U_1 \times U_2$ e $V_1 \times V_2$ onde $U_1, U_2, V_1, V_2 \subseteq X$ são abertos não vazios, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(T \times T)^n(U_1 \times U_2) \cap V_1 \times V_2 \neq \emptyset$. Ou seja, $(T^n(U_1) \times T^n(U_2)) \cap V_1 \times V_2 \neq \emptyset$, o que pode ser dividido em:

1. $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ e
2. $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.

Proposição 3.4.4. *Quase conjugação preserva sistemas fracamente mixing.*

Demonstração. Seja $T : X \rightarrow X$ quase conjugado a $S : Y \rightarrow Y$ por uma aplicação $\phi : Y \rightarrow X$ contínua com imagem densa. Então $T \times T$ é quase conjugado a $S \times S$ por $\phi \times \phi : Y \times Y \rightarrow X \times X$. Com efeito,

$$\begin{aligned} (\phi \times \phi) \circ (S \times S)(x, y) &= (\phi \times \phi) \circ (S(x) \times S(y)) = (\phi \circ S(x) \times \phi \circ S(y)) \\ &= (T \circ \phi(x) \times T \circ \phi(y)) = (T \times T) \circ (\phi \times \phi)(x, y). \end{aligned}$$

para todo $(x, y) \in S \times S$. Portanto $(\phi \times \phi) \circ (S \times S) = (T \times T) \circ (\phi \times \phi)$.

Como ϕ é contínua e possui imagem densa, $\phi \times \phi$ também é contínua e possui imagem densa.

Por hipótese, S é fracamente *mixing*, ou seja $S \times S$ é topologicamente transitivo. Vimos que $T \times T$ é quase conjugado a $S \times S$. Então $T \times T$ também é topologicamente transitivo pela Proposição 3.3.2, o que implica que T é fracamente *mixing*. $\square$

Observação 3.4.5. Pela Proposição 3.4.2, todo sistema fracamente *mixing* é topologicamente transitivo. Então nas condições do Teorema 3.1.12, todo sistema fracamente *mixing* é hipercíclico.

E como esperado, todo operador *mixing* é fracamente *mixing*.

Proposição 3.4.6. *Seja $T : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico. Se T é *mixing* então T é fracamente *mixing*.*

Demonstração. Sejam $U_1, U_2, V_1, V_2 \subseteq X$ abertos não vazios. Então como T é *mixing*, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \text{ para todo } n \geq n_1; \quad (3.1)$$

$$T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset \text{ para todo } n \geq n_2. \quad (3.2)$$

Tome $n = \max\{n_1, n_2\}$, portanto vale 3.1 e 3.2. Então T é fracamente *mixing*. $\square$

No próximo capítulo mostraremos um exemplo de operador fracamente *mixing* que não é *mixing*.

3.5 OPERADOR DE ROLEWICZ

Em 1969, Rolewicz publicou o primeiro exemplo de um operador hipercíclico em espaços de Banach. Apresentaremos aqui o operador construído em [9] e a sua demonstração para a hiperciclicidade do mesmo.

Definição 3.5.1. Seja $x = (x_j)_j \in \ell_p$. Definimos o operador *backward shift* por

$$\begin{aligned} B : \ell_p &\rightarrow \ell_p \\ (x_1, x_2, \dots) &\mapsto (x_2, x_3, \dots). \end{aligned}$$

Proposição 3.5.2. *O backward shift B é um operador linear contínuo.*

Demonstração. Não é difícil verificar que B é linear, então vejamos que B é contínuo. Seja $x = (x_j)_j \in \ell_p$, logo:

$$\|B(x_1, x_2, \dots)\|_p = \|(x_2, x_3, \dots)\|_p = \left(\sum_{j=2}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p$$

Portanto B é contínuo pela Proposição 2.4.7 e em particular, $\|B\| \leq 1$. Mostraremos que a norma do operador atinge o máximo 1 na bola fechada $B(0; 1)$. Dado $x_1 \neq 0$, tome $x =$

$(0, \frac{x_1}{|x_1|}, 0, \dots)$. Veja que $\|x\|_p = 1$ e

$$\|B(x)\|_p = \left\| \frac{x_1}{|x_1|} \right\|_p = 1.$$

Logo $\|B\| = 1$. □

Também é possível considerar os múltiplos desse operador. Seja $\lambda \in \mathbb{K}$, definimos λB por $\lambda B(x_1, x_2, \dots) = \lambda(x_1, x_2, \dots)$. Esse operador também é linear contínuo e $\|\lambda B\| = |\lambda|$.

Analogamente, definimos o *forward shift* $F : \ell_p \rightarrow \ell_p$ onde $F(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. O operador F também é linear contínuo e $\|F\| = 1$. Veja também que $B \circ F = Id$. E ainda, por indução, $B^n \circ F^n = Id$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caracterizaremos a hiperciclicidade dos múltiplos desse operador, conhecido como operador de Rolewicz:

Teorema 3.5.3 (Rolewicz). *Seja $T = \lambda B$. O operador T é hipercíclico se, e somente se, $|\lambda| > 1$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Como visto na Proposição 3.5.2, $\|T\| = |\lambda|$. Já pela Proposição 3.1.6, $|\lambda| = \|T\| > 1$.

($\Rightarrow$) Definimos $S = \frac{1}{\lambda}F$. É fácil verificar que $T^n \circ S^n = Id$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pela Proposição 2.5.5, ℓ_p é separável e c_{00} é denso em ℓ_p . Considere o seguinte subconjunto denso e enumerável em ℓ_p :

$$D = \{ x^n = (x_j^n)_j \in c_{00} : x_j^n \in \mathbb{Q}_K, \forall n, j \in \mathbb{N} \}.$$

Note que dado $n \in \mathbb{N}$, para todo $x \in \ell_p$ temos que:

$$\|S^m x^n\|_p \leq \|S\|^m \|x^n\|_p = \frac{1}{|\lambda|^m} \|x^n\|_p.$$

Como $|\lambda| > 1$, $\|S^m x^n\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Sejam $x_j^n \in D$ e $k(n)$ o maior índice j tal que $x_j^n \neq 0$. Então podemos encontrar uma sequência crescente $(r_n)_n \subseteq \mathbb{N}$ tal que:

- $r_n > \max\{k(i) : 1 \leq i \leq n\}$,
- $\|S^{r_n} x^n\|_p < \left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Defina ainda para cada n :

$$p(n) = \sum_{i=1}^n r_i.$$

Construiremos agora um vetor $x_0 \in \ell_p$ cuja órbita é densa em ℓ_p . Seja

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} S^{p(n)} x^n.$$

Primeiro, verificaremos que x_0 está bem definido, veja que para $n \in \mathbb{N}$:

$$\|S^{p(n)}x^n\|_p \leq \|S\|^{p(n-1)}\|S^{r_n}x^n\|_p = \frac{1}{|\lambda|^{p(n-1)}} \left(\frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2^n}.$$

Então $\|S^{p(n)}x^n\|_p < \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} S^{p(n)}x^n$ é absolutamente convergente, e em particular convergente pela Proposição 2.6.5.

Note que, dado $m \in \mathbb{N}$, $x^m = (x_1, x_2, \dots, x_{k(m)}, 0, \dots)$ e $T^{k(m)}x^m = 0$. Em geral, $T^i x^m = 0$ para todo $i \geq k(m)$ e $T^{p(n)-p(m)}x^m = 0$ se $n > m$.

Seja $n \in \mathbb{N}$, então:

$$\begin{aligned} T^{p(n)}x_0 &= T^{p(n)}\left(\sum_{m=1}^{\infty} S^{p(m)}x^m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} T^{p(n)} \circ S^{p(m)}x^m \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} T^{p(n)} \circ S^{p(m)}x^m + T^{p(n)} \circ S^{p(n)}x^n + \sum_{m=n+1}^{\infty} T^{p(n)} \circ S^{p(m)}x^m \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} T^{p(n)-p(m)}x^m + x^n + \sum_{m=n+1}^{\infty} S^{p(m)-p(n)}x^m \\ &= x^n + \sum_{m=n+1}^{\infty} S^{p(m)-p(n)}x^m. \end{aligned}$$

Ou seja, $T^{p(n)}x_0 - x^n = \sum_{m=n+1}^{\infty} S^{p(m)-p(n)}x^m$. Logo:

$$\begin{aligned} \|T^{p(n)}x_0 - x^n\|_p &= \left\| \sum_{m=n+1}^{\infty} S^{p(m)-p(n)}x^m \right\|_p \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \|S^{p(m)-p(n)}x^m\|_p \\ &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \|S^{p(m-1)-p(n)}\| \|S^{r_m}x^m\|_p \\ &= \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{p(m-1)-p(n)}} \|S^{r_m}x^m\|_p \\ &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \|S^{r_m}x^m\|_p \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Obtemos que $\|T^{p(n)}x_0 - x^n\|_p \leq \frac{1}{2^n}$. Agora, sejam $x \in \ell_p$ e $\varepsilon > 0$. Como D é denso em ℓ_p , existe $x^n \in D$ tal que $\|x^n - x\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Tome, sem perda de generalidade, $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Então

$$\|T^{p(n)}x_0 - x\|_p \leq \|T^{p(n)}x_0 - x^n\|_p + \|x^n - x\|_p < \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

O que conclui que a órbita de x_0 é densa em ℓ_p , logo T é hipercíclico. $\square$

Observação 3.5.4. Nenhum múltiplo do *forward shift* é hipercíclico.

Basta analisar a primeira coordenada das sequências da órbita. Seja $x = (x_j)_j \in \ell_p$, então a primeira coordenada de λFx será 0 para todo $n \geq 1$. Seja $y = (y_j)_j \in \ell_p$ uma sequência tal que $y_1 \neq x_1$ e $y_1 \neq 0$. Caso a órbita de x fosse densa em ℓ_p , existiria uma sequência crescente

$(n_k)_k$ tal que

$$\lambda F^{n_k} x \rightarrow y.$$

E como convergência em ℓ_p implica em convergência coordenada a coordenada, temos que

$$\pi_1(\lambda F^{n_k} x) \rightarrow y_1.$$

Mas $\pi_1(\lambda F^{n_k} x)$ é igual a 0 ou x_1 , logo não converge para y_1 . Absurdo.

3.6 CRITÉRIOS DE HIPERCICLICIDADE

Na demonstração da hiperciclicidade do operador de Rolewicz, foi preciso construir um vetor hipercíclico e mostrar que sua órbita é densa no espaço. Como evidenciado pela extensão da demonstração, esse processo exige bastante esforço.

Nesta seção apresentamos alguns teoremas, conhecidos como critérios, que possuem condições que garantem a hiperciclicidade de um operador dado.

Definição 3.6.1. Um sistema dinâmico linear $T : X \rightarrow X$ satisfaz o critério de hiperciclicidade se existem dois subconjuntos $D_1, D_2 \subseteq X$ densos em X e uma sequência de aplicações $S_{n_k} : D_2 \rightarrow X$ onde $(n_k) \subseteq \mathbb{N}$ é uma sequência crescente tais que:

$$C1) \quad T^{n_k} x \rightarrow 0, \quad \forall x \in D_1;$$

$$C2) \quad S_{n_k} x \rightarrow 0, \quad \forall x \in D_2;$$

$$C3) \quad T^{n_k} \circ S_{n_k} x \rightarrow x, \quad \forall x \in D_2.$$

Caso $D_1 = D_2$ e $(n_k) = (n)_n$, dizemos que T satisfaz o Critério de Kitai.

Ao longo do trabalho, verificaremos se os *shifts* satisfazem as condições do critério de hiperciclicidade, as quais serão referidas por (C1), (C2) e (C3).

Teorema 3.6.2 (Critério de Hiperciclicidade). *Sejam X um espaço de Banach separável e $T : X \rightarrow X$ um operador linear contínuo. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *se T satisfaz o critério de hiperciclicidade, então T é hipercíclico;*
2. *se T satisfaz o critério de Kitai, então T é mixing.*

Demonstração. Mostraremos o primeiro caso, sendo o segundo análogo. Faremos isso provando que T é topologicamente transitivo e portanto hipercíclico pelo Teorema 3.1.12.

Sejam $U, V \subseteq X$ abertos não vazios. Construiremos x tal que $x \in U$ e $T^N x \in V$ para algum N a determinar. Como D_1 e D_2 são densos em X , existem $a_1 \in U \cap D_1$ e $a_2 \in V \cap D_2$ pela Proposição 2.1.22. Seja $x_{n_k} = a_1 + S_{n_k} a_2$. Por (C2), $x_{n_k} \rightarrow a_1 + 0 = a_1$, então existe k_1 tal que $x_{n_k} \in U$, $\forall k \geq k_1$. Pela linearidade de T , e as condições (C1) e (C3) temos que

$$T^{n_k} x_{n_k} = T^{n_k} a_1 + T^{n_k} \circ S_{n_k} a_2 \rightarrow a_2.$$

Sendo assim, existe k_2 tal que $T^{n_k}x_{n_k} \in V$, $\forall k \geq k_2$. Tome $N = \max\{n_{k_1}, n_{k_2}\}$, então $T^N x_N \in T^N(U) \cap V$ como queríamos demonstrar. $\square$

Ainda, o critério de hiperciclicidade implica em uma propriedade mais forte que a própria hiperciclicidade.

Proposição 3.6.3. *Se $T : X \rightarrow X$ satisfaz o critério de hiperciclicidade, então T é fracamente *mixing*.*

Demonstração. Suponha existam dois subconjuntos D_1 e D_2 densos em X , e uma sequência de aplicações $S_{n_k} : D_2 \rightarrow X$ onde $(n_k)_k$ é uma sequência crescente de naturais que satisfazem o critério de hiperciclicidade.

Os conjuntos $D_1 \oplus D_1$ e $D_2 \oplus D_2$ são densos em $X \oplus X$ já que $\overline{D_1 \oplus D_1} = \overline{D_1} \oplus \overline{D_1} = X \oplus X$ pela Proposição 2.1.27. Considere a sequência de aplicações $(S \oplus S)_{n_k} = (S_{n_k} \oplus S_{n_k})$, então

1. $(T \oplus T)^{n_k}(x, y) = T^{n_k}x \oplus T^{n_k}y \rightarrow 0$ para todo $(x, y) \in D_1 \oplus D_1$;
2. $(S \oplus S)_{n_k}(x, y) = S_{n_k}x \oplus S_{n_k}y \rightarrow 0$ para todo $(x, y) \in D_2 \oplus D_2$;
3. $(T \oplus T)^{n_k} \circ (S \oplus S)_{n_k}(x, y) = T^{n_k} \circ S_{n_k}x \oplus T^{n_k} \circ S_{n_k}y \rightarrow (x, y)$ para todo $(x, y) \in D_2 \oplus D_2$.

Logo $T \oplus T$ satisfaz o critério de hiperciclicidade, então $T \oplus T$ é topologicamente transitivo. Concluimos que T é fracamente *mixing*. $\square$

A recíproca do critério de hiperciclicidade não é verdadeira em geral. O resultado passa a ser verdadeiro quando restrito a operadores fracamente *mixing*, porém a demonstração foge do escopo do trabalho.

Teorema 3.6.4 (Bès-Peris). *Seja $T : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico. Então T satisfaz o critério de hiperciclicidade se, e somente se, T é fracamente *mixing*.*

Demonstração. Veja [3, Theorem 4.2]. $\square$

4. SHIFTS UNILATERAIS COM PESO

Nesta seção, buscaremos caracterizar completamente as propriedades dinâmicas estudadas no capítulo anterior para os operadores *shifts* unilaterais com peso. Esses operadores são generalizações naturais do operador de Rolewicz, mas ao contrário deste último operador, o peso varia de acordo com cada coordenada da sequência.

Embora seja possível estudar diretamente esses operadores em espaços de sequências ℓ_p , $1 \leq p < \infty$, nos voltaremos aos *shifts* unilaterais *sem peso* em espaços de sequências *com peso* $\ell_p(v)$ apresentados na Seção 2.5. Os resultados referentes aos *shifts* com peso serão obtidos facilmente por meio de uma conjugação.

Seguimos principalmente o Capítulo 4 da referência [6] e a dissertação [5], onde a teoria é desenvolvida para espaços de sequências mais gerais. Entretanto, enunciamos os resultados apenas em espaços clássicos de sequências, assim como é feito na Seção 1.4.1 de [3].

4.1 SHIFTS SEM PESO

Definição 4.1.1. O *shift unilateral* em $\ell_p(v)$ é dado por $B : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$, onde $B(x) = (x_2, x_3, \dots)$ para todo $x = (x_j)_j \in \ell_p(v)$.

É evidente que os *shifts* unilaterais são lineares. Entretanto, ainda não verificamos se o *shift* unilaral está bem definido. Por enquanto assumimos que $B(x) \in \ell_p(v)$ para todo $x \in \ell_p(v)$.

Proposição 4.1.2. Se $B(x) \in \ell_p(v)$ para todo $x \in \ell_p(v)$, então B é contínuo.

Demonstração. Pelo Teorema 2.4.14, basta provar que dada uma sequência $(x_n)_n \subseteq \ell_p(v)$ tal que $x_n = (x_j^n)_j \rightarrow x = (x_j)_j \in \ell_p(v)$ e $B(x_n) \rightarrow y = (y_j)_j \in \ell_p(v)$, temos que $B(x) = y$.

Como a convergência de sequências implica em convergência pontual obtemos que

$$x_j^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_j \quad (4.1)$$

para todo j .

Por outro lado, $(x_{j+1}^n)_j = B(x_n) \rightarrow y$. Então pelo mesmo argumento

$$x_{j+1}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_j \quad (4.2)$$

para todo j .

Logo

$$y_j \stackrel{4.2}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{j+1}^n \stackrel{4.1}{=} x_{j+1}$$

para todo j . Concluimos pela unicidade do limite que $(x_{j+1})_j = B(x) = y$, portanto B é contínuo. $\square$

Agora verificaremos uma condição para que o *shift* esteja bem definido, e consequentemente seja contínuo.

Proposição 4.1.3. *O shift $B : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$ é um operador linear contínuo se, e somente se,*

$$\sup \frac{v_j}{v_{j+1}} < \infty.$$

Demonstração. ($\implies$) Assuma que B é um operador, então é contínuo pela proposição anterior. Logo existe $C > 0$ tal que para todo $x = (x_j)_j \in \ell_p(v)$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_{j+1}|^p v_j^p = \|B(x)\|_{p,v}^p \leq C^p \|x\|_{p,v}^p = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p v_j^p.$$

Tomando $x = e_j$ para todo j obtemos que

$$v_{j-1} \leq C v_j \implies \frac{v_{j-1}}{v_j} \leq C \implies \frac{v_j}{v_{j+1}} \leq C.$$

Ou seja $\sup \frac{v_j}{v_{j+1}} < \infty$.

($\impliedby$) Seja $\sup \frac{v_j}{v_{j+1}} < \infty$, então existe $M > 0$ tal que

$$v_j \leq M v_{j+1}$$

para todo j .

Então

$$|x_{j+1}|^p v_j^p \leq M^p |x_{j+1}|^p v_{j+1}^p$$

para todo j .

Como $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p v_j^p < \infty$, pelo critério da comparação, temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_{j+1}|^p v_j^p < \infty.$$

Ou seja, $B(x) = (x_{j+1})_j \in \ell_p(v)$. Portanto B é contínuo pela proposição anterior. $\square$

Finalmente, definimos os *shifts* unilaterais com peso variável.

Definição 4.1.4. Seja $w = (w_j)_j$ uma sequência de pesos positiva e limitada. Então o *shift*

unilateral associado a sequência de pesos w é dado por:

$$\begin{aligned} B_w : \ell_p &\rightarrow \ell_p \\ (x_1, x_2, \dots) &\mapsto (w_2 x_2, w_3 x_3, \dots). \end{aligned}$$

Note que nessa definição o peso w_1 não influencia o operador. Sendo assim, assumimos sem perda de generalidade que $w_1 = 1$.

Proposição 4.1.5. *Seja $B_w : \ell_p \rightarrow \ell_p$ um shift unilateral com peso $w = (w_j)_j$ sua sequência de pesos. Então B_w é um operador linear contínuo.*

Demonstração. O shift é trivialmente linear. Pela definição do operador, existe $W > 0$ tal que $w_j < W$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Dado $x = (x_j)_j \in \ell_p$, temos que

$$\|B_w(x)\|_p = \left(\sum_{j=2}^{\infty} w_j^p |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq W \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = W \|x\|_p.$$

Logo B_w é contínuo pela Proposição 2.4.7. □

Note que para as sequências da base canônica $(e_j)_j$ em ℓ_p , temos que $B_w(e_j) = w_j e_{j-1}$ para todo j considerando $e_0 = 0$.

Construiremos agora uma conjugação entre os sistemas dinâmicos $B : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$ e $B_w : \ell_p \rightarrow \ell_p$.

Proposição 4.1.6. *Considere um shift unilateral com peso B_w , cujos pesos $w = (w_j)_j$ são positivos e limitados. Definimos os novos pesos $(v_j)_j$ de forma que $\frac{v_j}{v_{j+1}} = w_{j+1}$ e $v_1 = 1$. Ou seja,*

$$v_j = \prod_{i=1}^j w_i^{-1}.$$

Então para o peso definido, os sistemas dinâmicos $(\ell_p(v), B)$ e (ℓ_p, B_w) são conjugados.

Demonstração. Utilizaremos o isomorfismo $\varphi((x_j)_j) = (x_j v_j)_j$ definido na Proposição 2.5.7. Devemos mostrar que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} \ell_p(v) & \xrightarrow{B} & \ell_p(v) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \ell_p & \xrightarrow{B_w} & \ell_p \end{array}$$

Dado que $\frac{v_j}{v_{j+1}} = w_{j+1}$ e a sequência $(w_j)_j$ é limitada, obtemos que

$$\sup \frac{v_j}{v_{j+1}} < \infty.$$

Então o shift B define um operador linear contínuo em $\ell_p(v)$ pela Proposição 4.1.3.

Agora, dado um vetor da base e_j , veja que

$$B_w(\varphi(e_j)) = B_w(v_j e_j) = v_j w_j e_{j-1} = v_{j-1} e_{j-1} = \varphi(e_{j-1}) = \varphi(B(e_j)),$$

para todo j . Pela linearidade e continuidade podemos estender o resultado para qualquer vetor no espaço. Sejam $x \in \ell_p(v)$ e sua expansão na base canônica:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j.$$

Então aplicando $B_w \circ \varphi$ temos

$$\begin{aligned} B_w \circ \varphi(x) &= B_w \circ \varphi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j B_w \circ \varphi(e_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j \varphi \circ B(e_j) = \varphi \circ B(x). \end{aligned}$$

Ou seja, $B_w \circ \varphi = \varphi \circ B$. Portanto o diagrama comuta. $\square$

Precisaremos do seguinte lema para simplificar os próximos resultados.

Lema 4.1.7. *Sejam M um espaço métrico, $(v_n)_n$ uma sequência em M e $v \in M$.*

Se existir uma sequência crescente de números naturais $(n_k)_k$ tal que

$$v_{n_k-j} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Então existe uma sequência crescente de números naturais $(m_k)_k$ tal que

$$v_{m_k+j} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Veja [6, Lemma 4.2]. $\square$

Teorema 4.1.8. *Sejam $B : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$ um shift da Definição 4.1.1 e $(e_n)_n$ a base canônica em $\ell_p(v)$. Então as seguintes afirmações do item 1 são equivalentes e as afirmações do item 2 também são equivalentes.*

1. (a) B é hipercíclico.
- (b) Existe uma sequência crescente $(n_k)_k$ tal que

$$e_{n_k} \rightarrow 0.$$

- (c) B é fracamente mixing.

2. (a) B é mixing.
- (b) $e_n \rightarrow 0$.

Demonstração. Faremos a demonstração somente para o primeiro caso, sendo o último análogo utilizando o critério de Kitai ao invés do critério de hiperciclicidade.

(a) $\implies$ (b) Dados $\varepsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, queremos mostrar que existe $n > n_0$ tal que $\|e_n\|_{p,v} = v_n < \varepsilon$.

Como B é hipercíclico, o conjunto de vetores hipercíclicos é denso em $\ell_p(v)$ pelo Teorema 3.1.12. Então existe um vetor hipercíclico $x \in HC(T)$ e $n > n_0$ tal que

$$\|x\|_{p,v} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.3)$$

$$\|B^{n-1}x - e_1\|_{p,v} < \frac{v_1}{2}. \quad (4.4)$$

Por outro lado, as projeções $p_n(x) = x_n e_n$ em $\ell_p(v)$ são contrações. Então na n -ésima coordenada da Equação (4.3) obtemos que

$$|x_n v_n| = \|p_n(x)\|_{p,v} \leq \|x\|_{p,v} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

E analogamente, na primeira coordenada da Equação (4.4) vemos que

$$|(x_n - 1)v_1| = \|p_1(B^{n-1}x - e_1)\|_{p,v} \leq \|B^{n-1}x - e_1\|_{p,v} < \frac{v_1}{2},$$

Então $|x_n - 1| < \frac{1}{2}$, o que implica que $|x_n| > \frac{1}{2} > 0$, logo podemos considerar seu inverso onde $|x_n^{-1}| < 2$.

Por fim, vemos que

$$\|e_n\|_{p,v} = |v_n| = |x_n^{-1} x_n v_n| < 2|x_n v_n| < \varepsilon.$$

Ou seja, obtemos n tal que $\|e_n\|_{p,v} < \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{k}$, é possível obter uma sequência crescente $(n_k)_k$ tal que

$$\|e_{n_k}\|_{p,v} < \varepsilon = \frac{1}{k} \rightarrow 0.$$

(b) $\implies$ (c) Aplicaremos o Critério de Hiperciclicidade para o conjunto denso $D_1 = D_2 = c_{00}$. Definimos o *forward shift* $F : c_{00} \rightarrow \ell_p(v)$ por $F(x_1, x_2, \dots, x_n, 0 \dots) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$, ou seja, $F(e_j) = e_{j+1}$. Considere a sequência de aplicações $S_n = F^n$. Então claramente $B \circ F = \text{Id}$ garantindo (C3).

Para $x \in c_{00}$ definimos n_0 como o maior índice tal que o coeficiente de e_{n_0} é não nulo. Então

$$B^{n_0}(x) = 0,$$

portanto $B^n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (C1).

Resta mostrar (C2). Pela continuidade de B e a hipótese sobre a base, para todo $j \in \mathbb{N}$

$$e_{n_k-j} = B^j(e_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} B^j(0) = 0.$$

Logo, pelo Lema 4.1.7, existe uma sequência crescente $(m_k)_k$ tal que $e_{m_k+j} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ para

todo $j \in \mathbb{N}$. Segue que para $x \in c_{00}$, como foi tomado anteriormente,

$$S_{m_k}x = F^{m_k}x = \sum_{j=1}^{n_0} x_j e_{m_k+j} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Assim, B satisfaz o critério de hiperciclicidade para a sequência de aplicações $S_{m_k} = F^{m_k}$ e consequentemente é fracamente *mixing* pela Proposição 3.6.3.

(c) $\implies$ (a) Segue da Observação 3.4.5. $\square$

Corolário 4.1.9. *Sejam $B_w : \ell_p \rightarrow \ell_p$ um shift com peso e $w = (w_j)_j$ a sua sequência de pesos. Então as seguintes afirmações do item 1 são equivalentes e as afirmações do item 2 também são equivalentes.*

1. (a) B_w é hipercíclico.

(b) Existe uma sequência crescente (n_k) tal que

$$\prod_{j=1}^{n_k} w_j^{-1} \rightarrow 0.$$

(c) B_w é fracamente *mixing*.

2. (a) B_w é *mixing*.

(b)

$$\prod_{j=1}^n w_j^{-1} \rightarrow 0.$$

Demonstração. Pelo Corolário 3.3.3, Proposição 3.3.2 e a Proposição 3.4.4; sabemos que quase conjugação preserva operadores hipercíclicos, *mixing* e fracamente *mixing*. Desta forma, o resultado segue do anterior pela conjugação da Proposição 4.1.6. Já a segunda equivalência segue da igualdade

$$\prod_{j=1}^{n_k} w_j^{-1} = v_{n_k} = \|e_{n_k}\|_{p,v}.$$

$\square$

Teorema 4.1.10. *Sejam $B : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$ um shift da Definição 4.1.1 e $(e_n)_n$ a base canônica de $\ell_p(v)$. Então são equivalentes:*

1. B é caótico.

2. $\sum_{j=1}^{\infty} e_n$ converge.

3. A sequência $(1, 1, \dots)$ pertence a $\ell_p(v)$.

4. Existe um ponto periódico não trivial de B em $\ell_p(v)$.

Demonstração. A implicação (1) $\implies$ (4) é trivial.

(4) $\implies$ (3) Sejam $x = (x_j)_j \in \ell_p(v)$ um ponto periódico não trivial de B e n o seu período. Isto é,

$$B^n(x) = (x_{j+n})_j = (x_j)_j.$$

Segue que dado $j \in \mathbb{N}$, $x_{j+kn} = x_j$ para todo k natural. Ou seja, x é um ponto periódico de B se, e somente se, é uma sequência periódica da forma:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1, x_2, \dots).$$

Como $x \neq 0$, existe um índice j_0 tal que $x_{j_0} \neq 0$. Tomaremos uma sequência $(\varepsilon_j)_j \subseteq \{0, 1\}$ onde $\varepsilon_{j_0+kn} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e 0 nos índices restantes.

Então, do fato de que $(e_n)_n$ é uma base incondicional, a sequência $(x_j \varepsilon_j)_j$ pertence a $\ell_p(v)$. O mesmo vale para $\left(\frac{x_j}{x_{j_0}} \varepsilon_j\right)_j$, que é a sequência

$$y = (0, \dots, \underbrace{1}_{j_0}, 0, \dots, \underbrace{1}_{j_0+kn}, 0, \dots).$$

Aplicando o *shift* nesse mesmo vetor, obtemos os vetores $\{y, By, B^2y, \dots, B^{n-1}y\}$, cuja soma dos mesmos resulta na sequência $(1)_j$.

(3) $\iff$ (2) Segue da hipótese de que $(e_n)_n$ é base, então como $(1)_j \in \ell_p(v)$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} 1e_j$$

converge.

(2) $\implies$ (1) Como $\sum_{j=1}^{\infty} e_j$ converge, segue que $e_j \rightarrow 0$. Então pelo Teorema 4.1.8, B é *mixing* e em particular hipercíclico. Pela Proposição 3.2.5 B também é sensível às condições iniciais. Basta então verificar que o conjunto de pontos periódicos é denso no espaço.

Dados $(x_j)_j \in \ell_p(v)$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer, pela incondicionalidade da base e o Teorema 2.6.6, podemos tomar n_0 e $\tilde{x} = (x_j)_{j=1}^{n_0}$ tais que

$$\|x - \tilde{x}\|_{p,v} = \left(\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |x_j|^p v_j^p \right)^{1/p} = \left\| \sum_{j=n_0+1}^{\infty} x_j e_j \right\|_{p,v} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A sequência $(1)_j$ pertence a $\ell_p(v)$ como consequência da hipótese. E utilizando a incondicionalidade da base canônica sobre essa sequência, é possível construir uma sequência periódica de período n_0 com os termos de $\tilde{x}$. De fato, as sequências que são 1 em $j + kn_0$ para todo k e 0 nas coordenadas restantes, ou seja

$$p_j = \sum_{k=1}^{\infty} e_{j+kn_0},$$

pertencem a $\ell_p(v)$ para todo j ao aplicar o Teorema 2.6.6 sobre a sequência $(1)_j$.

Então

$$\sum_{j=1}^{n_0} x_j p_j = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_0} x_j e_{j+kn_0}$$

é um ponto periódico de B e pertence a $\ell_p(v)$.

Novamente pela incondicionalidade da base e o Teorema 2.6.6, temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_0} x_j \varepsilon_{j+kn_0} e_{j+kn_0} \quad (4.5)$$

converge para qualquer sequência $(\varepsilon_j)_j \subseteq \{0, 1\}$.

Além disso, outra vez pelo Teorema 2.6.6, para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe m tal que para qualquer sequência $(\varepsilon_j)_j \subseteq \{0, 1\}$:

$$\left\| \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_0} x_j \varepsilon_{j+kn_0} e_{j+kn_0} \right\|_{p,v} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.6)$$

Agora escolha $(\varepsilon_j)_j$ de forma que $\varepsilon_j = 1$ para todo $1 + mn_0k \leq j \leq n_0 + mn_0k$, onde $k \in \mathbb{N}$ e 0 caso contrário. Pela Equação (4.5), obtemos o ponto periódico $y = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_0} x_j e_{j+kmn_0}$ e, pela Equação (4.6), obtemos que

$$\|y - \tilde{x}\|_{p,v} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_0} x_j e_{j+kmn_0} \right\|_{p,v} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da desigualdade triangular, vemos que

$$\|x - y\|_{p,v} \leq \|x - \tilde{x}\|_{p,v} + \|y - \tilde{x}\|_{p,v} < \varepsilon.$$

Portanto o conjunto dos pontos periódicos é denso em $\ell_p(v)$ o que torna B caótico. $\square$

Corolário 4.1.11. *Sejam $B_w : \ell_p \rightarrow \ell_p$ um shift com peso e $w = (w_j)_j$ a sua sequência de pesos. Então são equivalentes:*

1. B_w é caótico.

2. $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^j w_i^{-1} \right)^p < \infty.$

3. A sequência $\left(\prod_{i=1}^1 w_i^{-1}, \prod_{i=1}^2 w_i^{-1}, \dots \right)$ pertence a ℓ_p .

4. Existe um ponto periódico não trivial de B_w em ℓ_p .

Demonstração. Os sistemas $B_w : \ell_p \rightarrow \ell_p$ e $B : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$ são conjugados pela Proposição 4.1.6; então B é caótico se, e somente se, B_w é caótico. Já na segunda equivalência,

$\sum_{j=1}^{\infty} e_j \in \ell_p(v)$ se, e somente se,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |v_j|^p < \infty.$$

Mas como $v_j = \prod_{i=1}^j w_i^{-1}$, a condição é equivalente a (ii) e (iii). Por fim, é fácil ver que

$$\begin{aligned} x \in \text{Per}(B) &\iff B^n x = x \iff \varphi \circ B^n(x) = \varphi(x) \iff B_w^n(\varphi(x)) = \varphi(x) \\ &\iff \varphi(x) \in \text{Per}(B_w). \end{aligned}$$

para algum $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, $\varphi(x) \neq 0$ se $x \neq 0$ já que φ é um isomorfismo. Ou seja, B_w possui um ponto periódico não trivial se, e somente se, B também possui. $\square$

4.2 EXEMPLOS DE OPERADORES *SHIFT*

Sabemos pela Proposição 3.4.6 que todo operador *mixing* é fracamente *mixing*. Mostraremos um contraexemplo para a recíproca utilizando as caracterizações dos *shifts* com peso.

Proposição 4.2.1. *Seja $B_w : \ell_p \rightarrow \ell_p$ um shift com o peso $w = (w_j)_j$ positivo e limitado. Se a sequência de pesos satisfaz*

$$\liminf_n \prod_{j=1}^n w_j < \limsup_n \prod_{j=1}^n w_j = \infty,$$

então o shift B_w é fracamente mixing mas não é mixing

Demonstração. Dado que $\limsup_n \prod_{j=1}^n w_j = \infty$, existe uma sequência crescente $(n_k)_k$ tal que $\prod_{j=1}^{n_k} w_j \rightarrow \infty$, ou de forma equivalente $\prod_{j=1}^{n_k} w_j^{-1} \rightarrow 0$. Então pelo Corolário 4.1.9, B_w é fracamente *mixing*.

Mas como $\liminf_n \prod_{j=1}^n w_j \neq \limsup_n \prod_{j=1}^n w_j$, obtemos que $\lim_n \prod_{j=1}^n w_j \neq \infty$. Então B não é *mixing* pelo Corolário 4.1.9. $\square$

Exemplo 4.2.2. Seja $w = (1, 2, 2^{-1}, 2, 2, 2^{-1}, 2^{-1}, \dots, \underbrace{2, \dots, 2}_n, \underbrace{2^{-1}, \dots, 2^{-1}}_n, \dots)$. Mostraremos que o operador $B_w : \ell_p \rightarrow \ell_p$ satisfaz a caracterização da proposição anterior.

Tome $(n_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ crescente de forma que $w_{n_k} = 2$ e $w_{n_k+1} = 2^{-1}$. Então

$$\prod_{j=1}^{n_k} w_j = 2^{n_k} \rightarrow \infty.$$

Logo $\limsup_n \prod_{j=1}^n w_j = \infty$. Ou seja, B_w é fracamente *mixing*.

Mas, considerando a sequência $(m_k)_k$ crescente de forma que $w_{m_k} = 2^{-1}$ e $w_{m_k+1} = 2$ para todo k , vemos que

$$\prod_{j=1}^{m_k} w_j = 1.$$

Então $\liminf_n \prod_{j=1}^n w_j \leq 1 < \limsup_n \prod_{j=1}^n w_j$. Portanto, pela proposição anterior obtemos que B_w não é *mixing*.

Nos *shifts* com peso estudados aqui, caoticidade implica em *mixing*, já que pelo Corolário 4.1.11 se o *shift* é caótico temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{j=1}^k w_j^p} < \infty,$$

o que implica que $\frac{1}{\prod_{j=1}^k w_j^p} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ pelo critério do termo geral e consequentemente $\prod_{j=1}^k w_j^{-1} \rightarrow 0$, então o *shift* é *mixing* pelo Corolário 4.1.9. Isso não necessariamente é verdade para todo operador linear. Um exemplo de operador caótico não *mixing* foi construído em [1], mas demonstração vai além deste contexto do trabalho.

No entanto, a implicação é verdadeira quando restrita a operadores fracamente *mixing*, embora também não vejamos a demonstração neste trabalho.

Proposição 4.2.3. *Seja $T : X \rightarrow X$ um operador caótico, então T é fracamente *mixing*.*

Demonstração. Veja [6, Corollary 2.49]. □

Além disso, podemos obter *shifts* que são *mixing* mas não caóticos.

Proposição 4.2.4. *Seja $B_w : \ell_p \rightarrow \ell_p$ um *shift* com o peso $w = (w_j)_j$ positivo e limitado. Suponha que exista uma sequência positiva $(v_j)_j \in (c_0 \setminus \ell_p)$ tal que*

$$v_j = \prod_{i=1}^j w_i^{-1}, \forall j \in \mathbb{N}.$$

*Então B_w é *mixing* mas não caótico.*

Demonstração. Dado que $(v_j)_j \in c_0$ temos que $\prod_{i=1}^j w_i^{-1} = v_j \rightarrow 0$. Portanto, B_w é *mixing* pelo Corolário 4.1.9.

Por outro lado, $(v_j)_j \notin \ell_p$. Então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^j w_i^{-p}$$

não converge. Concluimos pelo Corolário 4.1.11 que B_w não é caótico. □

Exemplo 4.2.5. *Seja $B_w : \ell_1 \rightarrow \ell_1$ um *shift* com o peso $w = \left(1, 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{j}{j-1}, \dots\right)$. É fácil verificar que*

$$\prod_{i=1}^j w_i^{-1} = \frac{1}{j}, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Por fim, veja que $\frac{1}{j} \rightarrow 0$ mas $(\frac{1}{j})_j \notin \ell_1$. Então pela proposição anterior, B_w é *mixing* mas não caótico.

Vimos também que todo *shift* hipercíclico é fracamente *mixing* no Teorema 4.1.8 e corolário 4.1.9, o que também não ocorre em todo sistema dinâmico. Esses operadores podem ser obtidos em qualquer espaço que satisfaça as condições do teorema a seguir.

Teorema 4.2.6 (De la Rosa – Read). *Seja X um espaço de Banach. Se X possui uma base incondicional normalizada $(e_j)_j$ e o foward shift associado $S(e_j) = e_{j+1}$ é contínuo, então existe um operador $T : X \rightarrow X$ hipercíclico e não fracamente *mixing*.*

Demonstração. A demonstração é desenvolvida em [3, Section 4.2]. □

Os espaços ℓ_p , $1 \leq p < \infty$, satisfazem as condições do teorema acima. Ou seja, existem operadores hipercíclicos que não satisfazem o critério de hiperciclicidade nos espaços clássicos de sequências.

Obtemos também como consequência do Corolário 4.1.11 que o operador de Rolewicz, além de hipercíclico como já foi demonstrado no Teorema 3.5.3, é caótico e *mixing*.

Teorema 4.2.7. *O operador de Rolewicz $\lambda B : \ell_p \rightarrow \ell_p$ é caótico e *mixing* se, e somente se, $|\lambda| > 1$.*

Demonstração. Seja $T = \lambda B : \ell_p \rightarrow \ell_p$ o operador de Rolewicz. Considere o operador como um *shift* com a sequência de pesos constante $w = (\lambda)_j$. Então, conforme o Corolário 4.1.11, λB é caótico se, e somente se,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{jp}} < \infty,$$

o que é verdade para todo $|\lambda| > 1$. □

Enquanto restrito aos *shifts* com peso unilaterais, obtemos as seguintes implicações:

$$\begin{aligned} \text{caos} &\implies \text{mixing} \implies \text{fracamente mixing} \iff \text{hipercíclico} \\ &\iff \text{topologicamente transitivo.} \end{aligned}$$

Já em um contexto geral e com base nos resultados obtidos ao longo do texto, podemos resumir as propriedades dinâmicas do trabalho em sistemas lineares pelo diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{mixing} & & \\ & & \Downarrow (1) & & \\ \text{critério de hiperciclicidade} & \xleftrightarrow{(2)} & \text{fracamente mixing} & \xleftrightarrow{(3)} & \text{caótico} \\ & & \Downarrow (4) & & \\ & & \text{hiperciclicidade} & \xleftrightarrow{(5)} & \text{transitividade topológica} \end{array}$$

1. A implicação foi provada na Proposição 3.4.6 e um contraexemplo para a recíproca foi exibido no Exemplo 4.2.2.

2. A implicação segue do Teorema 3.6.2 e da Proposição 3.6.3, já a volta foi enunciada mas não demonstrada no Teorema 3.6.4.
3. A implicação não foi demonstrada, mas pode ser encontrada na Proposição 4.2.3. O *shift* apresentado no Exemplo 4.2.5 é um contraexemplo para a recíproca.
4. A implicação é embasada na Observação 3.4.5 e um contraexemplo para a recíproca foi enunciado no Teorema 4.2.6.
5. Demonstrado no Teorema 3.1.12.

Além disso, vimos um operador *mixing* não caótico no Exemplo 4.2.5.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Badea, C. e Grivaux, S.: *Unimodular eigenvalues, uniformly distributed sequences and linear dynamics*. Advances in Mathematics, 211(2):766–793, 2007.
- [2] Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G. e Stacey, P.: *On Devaney's Definition of Chaos*. The American Mathematical Monthly, 99(4):332–334, 1992.
- [3] Bayart, F. e Matheron, É.: *Dynamics of Linear Operators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1ª ed., 2009.
- [4] Botelho, G., Pellegrino, D. e Teixeira, E.: *Fundamentos de Análise Funcional*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1ª ed., 2012.
- [5] Braz, J.H.: *Dinâmica de Operadores Lineares em Espaços de Frechét*. Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017.
- [6] Grosse-Erdmann, K. e Peris, A.M.: *Linear Chaos*. Springer Verlag, London, 1ª ed., 2011.
- [7] Lima, E.L.: *Espaços Métricos*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2ª ed., 2011.
- [8] Pinto, J.V.A.: *Caos linear para operadores entre espaços de Banach*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática), Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2022.
- [9] Rolewicz, S.: *On orbit of elements*. Studia Mathematica, 32:17–22, 1969.