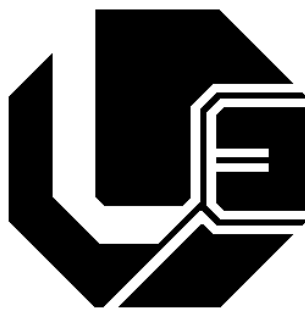


UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA



SOLUÇÕES W.K.B. PARA O CÁLCULO
DA INTENSIDADE DE CAMPO NA
BAIXA IONOSFERA

Alexandre Coutinho Mateus

DEZEMBRO

2007

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

- M425s Mateus, Alexandre Coutinho, 1971-
Soluções W.K.B. para o cálculo da intensidade de campo na baixa
ionosfera / Alexandre Coutinho Mateus. - 2007.
193 f. : il.
- Orientador: Gilberto A. Carrijo.
Tese (doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.
Inclui bibliografia.
1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Ionosfera - Teses. I. Carrijo, Gilberto
Arantes, 1948- II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

CDU: 621.3

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**SOLUÇÕES W.K.B. PARA O CÁLCULO
DA INTENSIDADE DE CAMPO NA
BAIXA IONOSFERA**

Alexandre Coutinho Mateus

Banca examinadora:

Ivan J. Kantor, Phd (INPE)
Edgar Silva Jr., Dr (UEFS)
Gilberto A. Carrijo, Phd - Orientador (UFU)
Antonio C.P. Veiga, Dr (UFU)
Geraldo Caixeta Guimarães, Phd (UFU)

SOLUÇÕES W.K.B. PARA O CÁLCULO DA INTENSIDADE DE CAMPO NA BAIXA IONOSFERA

Alexandre Coutinho Mateus

Prof. Dr. Gilberto Arantes Carrijo
Orientador

Prof. Dr. Darizon A. Andrade
Coordenador do curso de Pós-Graduação

Se as coisas fossem perfeitas

Não existiria lições de vida

Não haveriam arrependimentos

E nem descobertas...

*Se tudo fosse perfeito mãos não se uniriam
e sonhos não seriam valorizados*

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Gilberto, pela orientação, incentivo e contribuição no desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas de mestrado, doutorado e aos funcionários do departamento de pós graduação em engenharia elétrica pela colaboração neste trabalho.

A Universidade Federal de Uberlândia e CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço a DEUS pela minha vida e aos meus pais pelo apoio.

Resumo

Coutinho, A. M. & Carrijo, G. A.

Soluções W.K.B. para o cálculo de intensidade de campo na baixa ionosfera
FEELT-UFU, Uberlândia, 2007.

Este trabalho apresenta métodos de cálculo aproximado do campo de uma onda se propagando na ionosfera. A ionosfera é um dos meios mais complexos quando se deseja calcular a intensidade de campo de uma onda eletromagnética, porque ela possui uma densidade eletrônica que varia com as estações do ano, e principalmente com a hora do dia. Outra dificuldade para soluções das equações diferenciais na ionosfera é sua característica de material anisotrópico que produz dois modos de propagação na mesma, provenientes dos dois índices de refração que a mesma apresenta. Esta anisotropia é proveniente da existência do campo magnético terrestre.

Este trabalho teve como principal objetivo o cálculo do campo de uma onda na ionosfera, mas inicialmente considerou-se um meio sem campo magnético, apenas com influência da densidade eletrônica.

Quando despreza-se o campo magnético terrestre, que não é o caso real, a ionosfera se comporta como meio isotrópico e a solução das equações diferenciais que governam os campos pode ser dada por funções conhecidas como: funções de Airy quando se considera o modelo de densidade linear, funções de Bessel quando se considera o modelo exponencial, e funções de Weber quando o modelo de densidade é parabólico.

Quando a densidade eletrônica não segue nenhuma função conhecida para representar uma ionosfera real, pode-se calcular o campo da onda utilizando técnicas aproximadas, ou soluções numéricas. Estas últimas podem produzir erros de arredondamento quando se deseja calcular a onda descendente.

As aproximações mais conhecidas são as soluções W.K.B. que são apresentadas na forma de uma exponencial da integral do índice de refração dividida pelo mesmo índice de refração. Próximo do ponto de reflexão, o índice de refração diminui fazendo com que as soluções W.K.B. em determinadas situações falhem.

Para uma ionosfera real, a frequência de colisões dos elétrons não pode ser desprezada, principalmente na baixa ionosfera onde ela varia com a pressão atmosférica local. Quando a frequência de colisões é alta, o índice de refração da ionosfera torna um número complexo e não se anula para uma altura real.

Nesta situação as soluções W.K.B. passam a ser válidas porque o denominador da fórmula que calcula o campo, que é o índice de refração, não assume valores pequenos.

Quando se considera a propagação longitudinal ou transversal, a direção do campo magnético terrestre assume que os dois modos de propagação ou seja a onda ordinária(O) e extraordinária(X) se propagam de maneira independente e a solução dos campos podem ser dadas por duas equações diferenciais, cada uma representando um modo de propagação.

Quando a propagação não é longitudinal ou transversal, as equações que governam os campos na ionosfera apresentam de maneira acopladas. Isto significa que para calcular um modo há necessidade de conhecer a solução do outro modo. Existe um fator que relaciona o acoplamento dos dois modos, é chamado fator de acoplamento. Felizmente para a maioria dos casos este fator de acoplamento é pequeno e muito menor do que o índice de refração, a tal ponto que pode-se considerar apenas as equações homogêneas para o cálculo dos campos e usar as soluções W.K.B.. Para a baixa ionosfera e frequências baixas (< 3 MHz), a atenuação do campo é grande e o coeficiente de reflexão é pequeno. Isto facilita calcular a intensidade de campo dentro da ionosfera porque pode-se desprezar a onda refletida ou descendente.

Neste trabalho é analisado apenas o caso de incidência vertical, mas considerando o campo magnético fazendo um ângulo qualquer com direção de propagação. As soluções W.K.B. apresentam uma grande vantagem sobre as soluções numéricas porque elas se apresentam como uma fórmula matemática de fácil entendimento e comportamento simples.

Palavras-chave

Intensidade de campo, ionosfera, linear, bilinear e parabólico, densidade eletrônica, frequência de colisão, propagações longitudinal e transversal e oblíqua, incidência vertical, soluções W.K.B.

Abstract

Coutinho, A.M. & Carrijo G. A.,

W.K.B. Solutions for the Calculation of Field Intensity in the lower Ionosphere
FEELT-UFU, Uberlândia, 2007.

This work presents methods to roughly estimate the field of a wave spreading in the ionosphere. The ionosphere is one of the most complex means when one wants to calculate the field intensity of an electromagnetic wave, because it possesses an electronic density that varies with the seasons, and mainly with the hour of the day. Another difficulty for solutions of differential equations is that the ionosphere characteristic is of an anisotropic material that produces two propagation modes due to its two refraction indexes. This anisotropy is originating from the existence of the Earth magnetic field.

This work had as principal objective the calculation of the wave field in the ionosphere, but initially ignoring any magnetic field, but considering only the influence of the electronic density.

When the Earth magnetic field is neglected, which is not the real case, the ionosphere behaves as an isotropic material and the solution of the differential equations that govern the fields can be given by functions known as: Airy functions when the lineal density model is considered, Bessel functions when the exponential model is considered, and Weber functions when the density model is parabolic.

When the electronic density does not follow any known function to represent the real ionosphere, the wave field can be calculated using approximate techniques, or numerical solutions. The last ones can produce rounding mistakes for descending wave.

The more well-known approximated are the W.K.B. solutions which are presented in the form of an exponential of the integral of the refraction index becomes by the same refraction index. Close to the reflection point, the refraction index reduces which makes the W.K.B. solutions fail in certain situations.

For a real ionosphere, the electron collision frequency cannot be ignored, mainly in the low ionosphere, where it varies with the local atmospheric pressure. When the collision frequency is high, the ionosphere refraction index become a complex number and cannot be zero for a real height. In this situation, the W.K.B. solutions are therefore valid because the refraction index in the denominator of the field calculation formula does not assume too small values that are too small.

When longitudinal or traverse propagation is considered, the direction of the Earth magnetic field has two propagation modes, that is, the ordinary (O) and extraordinary (X) waves which spread in an independent way and the field solutions can be given by two differential equations, each one representing a propagation mode.

When the longitudinal or traverse propagation is not the case, the equations that govern the ionosphere fields present in a coupled form. This means that to calculate a propagation mode there is a need to know the solution of the other mode. There is a factor that relates the two modes that is called coupling factor. Fortunately, for most cases, this coupling factor is small and since it is much smaller than the refraction index, the homogeneous equations can be used to determine the fields, together with the W.K.B. solutions. For the lower ionosphere and low frequencies (<3 MHz), the field attenuation is large and the reflection coefficient is small. This facilitates to calculate the field intensity inside of the ionosphere because the reflected or descending wave can be neglected.

This work analyzes just the case of vertical incidence, but considering the magnetic field making any angle with the propagation direction. The W.K.B. solutions present a great advantage over the numerical solutions because of mathematical formulas of easy understanding and simple behavior.

Keywords

Field intensity, ionosphere, linear, bilinear and parabolic, electronic density, collision frequency, longitudinal, traverse and oblique propagations, vertical incidence, W.K.B. solutions.

Sumário

Sumário	xvi
Lista de Figuras	xx
Lista de Tabelas	xxvi
Simbologia	xxviii

1 FÓRMULAS E EQUAÇÕES BÁSICAS PARA A IONOS-

FERA	1
1.1 Introdução	1
1.2 Constituição da Ionosfera e Mecanismos de Ionização	3
1.3 Perfil da Densidade de Elétrons	8
1.3.1 Modelo de Chapman	8
1.3.2 Modelo Linear	11
1.3.3 Modelo Bilinear	11
1.3.4 Modelo Parabólico	13
1.4 Variação da Temperatura e Pressão na Ionosfera	15
1.5 Frequência de Colisões de Elétrons na Ionosfera	19
1.6 Modelo da Densidade Eletrônica para Baixa Ionosfera	22
1.7 Equações de Maxwell	33
1.8 Relações Constitutivas	36
1.9 Índice de Refração e Polarização	38
1.10 Conclusão	40

2 PROPAGAÇÃO EM UM MEIO IONIZADO ISOTRÓPICO

43

2.1	Introdução	43
2.2	Equações Diferenciais	44
2.2.1	Perfil de Densidade Eletrônica Linear	44
2.3	Cálculo dos Campos para Perfil Linear	47
2.3.1	Equações Diferenciais para o Perfil Parabólico	53
2.4	Perfil Bilinear	58
2.4.1	Equações Diferenciais para o Perfil Bilinear	58
2.4.2	Cálculo dos Campos para o Perfil Bilinear	60
2.5	Conclusão	65
3	PROPAGAÇÃO LONGITUDINAL E TRANSVERSAL USANDO	
	MODELOS LINEAR E BILINEAR	67
3.1	Introdução	67
3.2	Propagação Longitudinal num Modelo Linear	69
3.3	Propagação Longitudinal num Modelo Bilinear	80
3.4	Propagação Transversal num Modelo Linear	83
3.5	Propagação Transversal num Modelo Bilinear	88
3.6	Conclusão	89
4	USO DAS SOLUÇÕES W.K.B. NA BAIXA IONOSFERA	91
4.1	Introdução	91
4.2	Equações da Onda para Baixa Ionosfera	95
4.2.1	Incidência Vertical e Propagação Longitudinal	95
4.2.2	Incidência vertical e propagação transversal	97
4.3	Validade das Soluções W.K.B.	101
4.3.1	Incidência Vertical e Propagação Longitudinal	101
4.3.2	Incidência vertical e propagação Transversal	108
4.4	Soluções W.K.B. para o Cálculo do Campo	114
4.4.1	Caso longitudinal	115
4.4.2	Caso transversal	118
4.5	Soluções W.K.B. para o Cálculo do Campo	119
4.5.1	Método da integral de fase para o cálculo do coeficiente de reflexão	119
4.5.2	Método da integral de fase	120
4.5.3	Modelo Carrijo	128
4.5.4	Modelo (I.R.I.)	130
4.6	Conclusão	136

5	APROXIMAÇÃO NO CÁLCULO DOS CAMPOS EM INCIDÊNCIA VERTICAL	139
5.1	Introdução	139
5.2	EQUAÇÕES GERAIS PARA O ACOPLAMENTO	142
5.3	INCIDÊNCIA VERTICAL	146
5.4	FATOR DE ACOPLAMENTO	149
5.5	SOLUÇÕES GERAIS PARA A REGIÃO DE ACOPLAMENTO	152
5.6	ESTUDO DA REGIÃO DE ACOPLAMENTO IONOSFÉRICO	154
5.7	APROXIMAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM E RESULTADOS NUMÉRICOS	156
5.7.1	Onda ordinária	161
5.7.2	Onda extraordinária	163
5.8	ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES	166
6	CONCLUSÕES E ANÁLISE	169
6.1	Introdução	169
6.2	Os métodos para o cálculo da intensidade de campo	170
6.3	Análise dos resultados	172
6.3.1	Meio ionizado sem campo magnético	172
6.3.2	Propagação com campo magnético	173
6.3.3	Trabalhos futuros	175
	Referências Bibliográficas	178
	Apêndice	178
A	Soluções da Equação de Stokes	179
A.1	Equação de Stokes	179
B	Soluções de Funções parabólicas	187
B.1	Funções Parabólicas	187
B.1.1	Introdução	187
B.2	Equações diferenciais em x	188

Lista de Figuras

1.1	<i>Constituição da atmosfera para diferentes alturas [?]</i>	5
1.2	<i>Distribuição da temperatura com altura[?]</i>	6
1.3	<i>Distribuição densidade eletrônica com altura [?]</i>	8
1.4	<i>Ângulo χ relativo à vertical</i>	9
1.5	<i>Densidade eletrônica relativa da ionosfera com a altura, onde h_m é a altura onde ocorre o valor máximo da camada.</i>	10
1.6	<i>Densidade eletrônica linear</i>	11
1.7	<i>Modelo bilinear de N, h_0 é a altura do início da ionosfera e h_m a altura onde ocorre o máximo.</i>	12
1.8	<i>Modelo parabólico de N</i>	13
1.9	<i>Modelo de densidade eletrônica parabólica, onde $h_1=60\text{km}$, $\beta=-17$, 36 e $h_m=300\text{km}$.</i>	14
1.10	<i>Perfil da temperatura(V.S. STANDART ATMOSPHERE) [?]</i>	17
1.11	<i>Perfil da pressão para o modelo de temperatura [?]</i>	18
1.12	<i>Variação da frequência de colisão ($\nu = f_c$) com a altura para o modelo de Nicolet(ν_1), modelo Bain(ν_2), modelo russo(ν_3).</i>	21
1.13	<i>Densidade eletrônica modelo Carrijo [?]</i>	24
1.14	<i>Logaritmo da densidade eletrônica modelo Carrijo [?]</i>	24
1.15	<i>Densidade eletrônica modelo IRI, janeiro, 8h,</i>	25
1.16	<i>Densidade eletrônica, modelo IRI, janeiro, 13h,</i>	26
1.17	<i>Densidade eletrônica modelo IRI, janeiro, 20h,</i>	26
1.18	<i>Densidade eletrônica modelo IRI, janeiro, 22h,</i>	27
1.19	<i>Densidade eletrônica modelo IRI, abril, 8h,</i>	27
1.20	<i>Densidade eletrônica modelo IRI, abril, 13h,</i>	28
1.21	<i>Densidade eletrônica modelo IRI, abril, 20h,</i>	28
1.22	<i>Densidade eletrônica modelo IRI, abril, 22h,</i>	29
1.23	<i>Densidade eletrônica modelo IRI, julho, 8h,</i>	29
1.24	<i>Densidade eletrônica ,modelo IRI, julho, 13h,</i>	30
1.25	<i>Densidade eletrônica modelo IRI, julho, 20h,</i>	30
1.26	<i>Densidade eletrônica modelo IRI, julho, 22h,</i>	31
1.27	<i>Densidade eletrônica modelo IRI, outubro, 8h,</i>	31

1.28	Densidade eletrônica modelo IRI, outubro, 13h, ...	32
1.29	Densidade eletrônica ,modelo IRI, outubro, 20h, ...	32
1.30	Densidade eletrônica modelo IRI, outubro, 22h, ...	33
1.31	Gráfico de coordenadas do campo	35
1.32	Índice de Refração da Ionosfera para o modelo linear $N = \alpha_1(z - h_0)$, $f=3\text{MHz}$ e $\nu=0$	40
2.1	Gráfico de n^2 quando $Z=0$	46
2.2	Interface do espaço livre com a ionosfera	48
2.3	Campo Elétrico para uma ionosfera com perfil linear $h_0=60\text{km}$, $f=500\text{kHz}$ e com várias freqüência de colisão ν [Hz]	50
2.4	Campo Elétrico para uma ionosfera com perfil linear $h_0=60\text{km}$, $f=1\text{MHz}$ e com várias freqüência de colisão ν [Hz]	50
2.5	Campo Elétrico para uma ionosfera com perfil linear, $h_0=60\text{km}$, $f=2\text{MHz}$ e com $Z=0$, $\nu = 0$	51
2.6	Campo Elétrico para uma ionosfera com perfil linear $h_0=60\text{km}$, $f=2\text{MHz}$ e com $Z \neq 0$, $\nu = 10^6 \text{ Hz}$	51
2.7	Campo Elétrico para uma ionosfera com perfil linear $h_0=60\text{km}$, $f=2\text{MHz}$ e com $Z \neq 0$, $\nu = 10^7 \text{ Hz}$	52
2.8	Gráfico do Coeficiente de Reflexão em função da Freqüência de Colisão variável $h_0=60\text{km}$, com $Z \neq 0$ para $\nu \neq 0$	52
2.9	Modelo Parabólico	54
2.10	Coeficiente de reflexão para o modelo bilinear	64
3.1	Campo Magnético	68
3.2	Ondas ordinário(O) e extraordinária(X), modelo linear	73
3.3	Campo de E_y para onda ordinária, modelo linear	75
3.4	Campo de E_y para onda extraordinária, modelo linear	75
3.5	Campo de E_y para onda ordinária, modelo linear	76
3.6	Campo de E_y para onda extraordinária, modelo linear	76
3.7	Campo de E_y para onda ordinária, modelo linear	77
3.8	Campo de E_y para onda extraordinária, modelo linear	77
3.9	Campo de E_y para onda ordinária, modelo linear	78
3.10	Campo de E_y para onda extraordinária, modelo linear	78
3.11	Campo de E_y para onda ordinária, modelo linear	79
3.12	Campo de E_y para onda extraordinária, modelo linear	79
3.13	Coeficiente de Reflexão usando a fórmula exata, para	80
3.14	Índice de Refração modo ordinário e extraordinário	84
4.1	Altura de reflexão da onda ordinária, para o modelo linear com $\alpha_1=5000$, $f_H=800[\text{kHz}]$, $h_0=60 \text{ km}$, com $\nu = 0$ e $\nu = 10^7 \text{ Hz}$, para o caso longitudinal e incidência vertical	96

4.2	<i>Altura de reflexão da onda extraordinária, para o modelo linear com $\alpha_1=5000$, $f_H=800$[kHz], $h_0=60$ km e $\nu = 0$ e $\nu = 10^7$ Hz, em função da frequência para o caso longitudinal e incidência vertical</i>	97
4.3	<i>Altura de reflexão da onda ordinária, para o modelo linear com $\alpha_1=5000$, $f_h=800$, $h_0=60$ km , $\nu = 0$ e $\nu = 10^7$ Hz, para o caso transversal e incidência vertical</i>	100
4.4	<i>Altura de reflexão da onda extraordinária, para o modelo linear com $\alpha_1=5000$, $f_h=800$, $h_0=60$ km , $\nu = 0$ e $\nu = 10^7$ Hz, para o caso transversal e incidência vertical</i>	100
4.5	<i>Função $g(X) ^3$ da onda Ordinária e Extraordinária, para $f=2$MHz, $\alpha_1=5000$, $f_H=800$kHz e $\nu = 10^6$ Hz e modelo de densidade linear</i>	105
4.6	<i>Função $g(X) ^3$ da onda Ordinária e Extraordinária, para $f=3$MHz, $\alpha_1=5000$, $f_H=800$kHz e $\nu = 10^6$ Hz e modelo de densidade linear</i>	105
4.7	<i>Função $g(X) ^3$ da onda Ordinária e Extraordinária, para $f=2$MHz, $\alpha_1=5000$, $f_H=800$kHz e $\nu = 9 \cdot 10^5 p$ Hz e modelo de densidade linear</i>	107
4.8	<i>Função $g(X) ^3$ da onda Ordinária e Extraordinária, para $f=3$MHz, $\alpha_1=5000$, $f_H=800$kHz e $\nu = 9 \cdot 10^5 p$ Hz e modelo de densidade linear</i>	108
4.9	<i>Função $g(X) ^3$ para o modelo de densidade linear, longitudinal ordinária e extraordinária na baixa ionosfera, com $f=2$ MHz, $\alpha_1=5000$, $f_H=800$kHz e $\nu = 9 \cdot 10^5 p$ Hz</i>	112
4.10	<i>Função $g(X) ^3$ para o modelo de densidade linear, transversal ordinária e extraordinária na baixa ionosfera, com $f=3$ MHz, $\alpha_1=5000$, $f_H=800$kHz e $\nu = 9 \cdot 10^5 p$ Hz</i>	113
4.11	<i>E_y para onda ordinária caso longitudinal, modelo linear</i>	116
4.12	<i>E_y para onda ordinária caso longitudinal, modelo linear</i>	116
4.13	<i>Coeficiente de Reflexão usando a fórmula exata 3.37, para . .</i>	117
4.14	<i>Coeficiente de Reflexão usando a fórmula aproximada 4.87, da integral de fase, para $f_H = 800$kHz, densidade linear, longitudinal ordinária, em função de ν</i>	117
4.15	<i>Coeficiente de reflexão em função da frequência, quando $\nu = 9 \cdot 10^5 p$, incidência vertical do ponto A, propagação longitudinal para latitude= -20° e longitude= 50°, para as 13 horas , mês de janeiro de 2007.</i>	127
4.16	<i>Coeficiente de reflexão em função da frequência do ponto B, quando $\nu = 9 \cdot 10^5 p$, incidência vertical, propagação longitudinal para latitude= -20° e longitude= 50°, para as 13 horas , mês de janeiro de 2007.</i>	127

4.17	<i>Campo elétrico para incidência vertical, caso longitudinal, onda ordinária $f=0,4\text{MHz}$ e $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 9 \cdot 10^5 p$ e densidade eletrônica dada pela equação 1.38 (Modelo Carrijo)</i>	129
4.18	<i>Campo elétrico para incidência vertical, caso longitudinal, onda ordinária $f=0,6\text{MHz}$ e $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 9 \cdot 10^5 p$ e densidade eletrônica dada pela equação 1.38 (Modelo Carrijo)</i>	129
4.19	<i>Campo elétrico para incidência vertical, caso longitudinal, onda ordinária $f=0,8\text{MHz}$ e $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 9 \cdot 10^5 p$ e densidade eletrônica dada pela equação 1.38 (Modelo Carrijo)</i>	130
4.20	<i>Modelo de densidade eletrônica obtida pelo site IRI[?] para o mês de janeiro/07, 13h para o ponto A e ponto B</i>	131
4.21	<i>Campo elétrico, usando os valores de densidade eletrônica do IRI [?], para o mês de janeiro/07, 13h para o ponto A e ponto B, para $f=0,6\text{ MHz}$, $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 9 \cdot 10^5 p$, caso incidência vertical, longitudinal onda ordinária</i>	132
4.22	<i>Modelo de densidade eletrônica obtida pelo site IRI [?] para o mês de abril/07, 13h para o ponto A e ponto B</i>	132
4.23	<i>Campo elétrico, usando os valores de densidade eletrônica do IRI [?], para o mês de abril/07, 13h para o ponto A e ponto B, para $f=0,6\text{ MHz}$, $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 9 \cdot 10^5 p$, caso incidência vertical, longitudinal onda ordinária</i>	133
4.24	<i>Modelo de densidade eletrônica obtida pelo site IRI [?] para o mês de julho/07, 13h para o ponto A e ponto B</i>	133
4.25	<i>Campo elétrico, usando os valores de densidade eletrônica do IRI [?], para o mês de julho/07, 13h para o ponto A e ponto B, para $f=0.6\text{MHz}$, $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 9 \cdot 10^5 p$, caso incidência vertical, longitudinal onda ordinária</i>	134
4.26	<i>Modelo de densidade eletrônica obtida pelo site IRI [?], para o mês de outubro/07, 13h para o ponto A e ponto B</i>	134
4.27	<i>Campo elétrico, usando os valores de densidade eletrônica do IRI [?], para o mês de outubro/07, 13h para o ponto A e ponto B, para $f=0.6\text{MHz}$, $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 9 \cdot 10^5 p$, caso incidência vertical, longitudinal onda ordinária</i>	135
5.1	<i>Índice de refração para modelo linear com $f=3\text{MHz}$, $\alpha_1=5000$, $h_0=60\text{ km}$, $f_H=0,8\text{ MHz}$, $v=0$</i>	141
5.2	<i>Parte real (μ_0) e parte imaginária (χ_0) do índice de refração da onda ordinária para modelo linear com $f=3\text{MHz}$, $\alpha_1=5000$, $h_0=60\text{ km}$, $f_H=0,8\text{ MHz}$, $\theta = 60$ e $v = 9 \cdot 10^5 \cdot p$</i>	141
5.3	<i>Parte real (μ_x) e parte imaginária (χ_x) do índice de refração da onda ordinária para modelo linear com $f=3\text{MHz}$, $\alpha_1=5000$, $h_0=60\text{ km}$, $f_H=0,8\text{ MHz}$, $\theta = 60$ e $v = 9 \cdot 10^5 \cdot p$</i>	142

5.4	<i>Módulo do coeficiente de acoplamento Ψ para modelo linear com $\theta = 15^\circ, 30^\circ$ e 60°, $f=3\text{MHz}$, $\alpha_1=5000$, $h_0=60\text{ km}$, $f_H=0,8\text{ MHz}$, $\nu = 0$.</i>	151
5.5	<i>Perfil da densidade eletrônica I.R.I.(elétrons/cm³) da ionosfera do perfil2(13h jan 2007).</i>	157
5.6	<i>Parte real do índice de refração do modo ordinário para o modelo do perfil2, $f=1,2$ e 3MHz, $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta = 45^\circ$, e $\nu = 9 * 10^5 * p$.</i>	158
5.7	<i>Parte imaginária do índice de refração do modo ordinário para o modelo do perfil2, $f=1, 2$ e 3MHz, $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta = 45^\circ$, e $\nu = 9 * 10^5 * p$.</i>	159
5.8	<i>Parte imaginária do índice de refração para as ondas ordinária e extraordinária para $f=3\text{Mhz}$, perfil2 e modelo de colisões $\nu = 9 * 10^5 * p$.</i>	159
5.9	<i>Log na base 10 do Valor absoluto do índice de refração n_o e do coeficiente de acoplamento da onda ordinária em função da altura (km) para $f=3\text{MHz}$, $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta = 45^\circ$, e $\nu = 9*10^5*p$.</i>	160
5.10	<i>Log na base 10 do valor absoluto do índice de refração n_x e do coeficiente de acoplamento onda extraordinária em função da altura (km) para $f=3\text{MHz}$, $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta = 45^\circ$, e $\nu = 9*10^5*p$.</i>	161
5.11	<i>Envoltória do campo da onda ordinária em função da altura (km) para $f=1, 2$ e 3MHz, $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta = 45^\circ$, e $\nu = 9*10^5*p$.</i>	162
5.12	<i>Coeficiente de reflexão em função da frequência da onda ordinária para $\theta = 30^\circ, 45^\circ$ e 90°, $f=3\text{Mhz}$, $f_H=0.8\text{Mhz}$, perfil2, $\nu = 9 * 10^5 * p$.</i>	163
5.13	<i>Envoltória do campo da onda extraordinária em função da altura (km) para $f=1,2$ e 3MHz, $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta = 45^\circ$, e $\nu = 9 * 10^5 * p$.</i>	164
5.14	<i>Coeficiente de reflexão em função da frequência da onda extraordinária para $\theta = 30^\circ, 45^\circ$ e 90°, $f=3\text{Mhz}$, $f_H=0.8\text{Mhz}$, perfil2, $\nu = 9 * 10^5 * p$.</i>	165
5.15	<i>Envoltória do campo da onda extraordinária para $\theta = 30^\circ, 45^\circ$ e 90°, para $f=3\text{Mhz}$, $f_H=0.8\text{Mhz}$, perfil2, $\nu = 9 * 10^5 * p$.</i>	166

Lista de Tabelas

1.1	<i>Constituição dos gases da atmosfera[?]</i>	4
1.2	<i>Ionização dos gases da atmosfera</i>	7
1.3	<i>A atmosfera é dividida em sete camada e em cada uma delas temos : Camada i, $h_{0,i}$, $z_{0,i}$, L_i , $T_{0,i}$, $P_{0,i}$ são respectivamente , a altura geopotencial e altura geométrica, o gradiente de temperatura na camada i temperatura, pressão, todos na base da camada i.</i>	16
1.4	<i>Tabela de densidade eletrônica e de gráficos da frequência de colisões em função da altura.</i>	23
1.5	<i>Coordenadas adotadas</i>	25
4.1	<i>Valores $g(x) ^3$, $\nu = 10^6$ [Hz], $f_H=800$ kHz.</i>	104
4.2	<i>Valores $g(X) ^3$, $\nu = 10^6$ [Hz], $f_H=800$ kHz.</i>	104
4.3	<i>Valores de A_0, A_x e mínimo de $g(X) ^3$ para densidade eletrônica linear, $f_H=800$kHz, $\nu = 9 \cdot 10^5 p$ em propagação longitudinal, incidência vertical para as ondas ordinária e extraordinária.</i>	106
4.4	<i>Coordenadas dos pontos A e B</i>	120
4.5	<i>R pela frequência para o ponto A para os meses de janeiro a junho de 2007 as 13h, $\nu = 9 \cdot 10^5 p$.</i>	121
4.6	<i>R em função da frequência para o ponto A para os meses de julho a dezembro de 2007 as 13h, $\nu = 9 \cdot 10^5 p$.</i>	122
4.7	<i>Média anual e desvio padrão referente as tabelas 4.5 e 4.6 para o ponto A as 13h em 2007, $\nu = 9 \cdot 10^5 p$.</i>	123
4.8	<i>R em função frequência para o ponto B para os meses de janeiro a junho de 2007 as 13h, $\nu = 9 \cdot 10^5 p$.</i>	124
4.9	<i>R em função da frequência para o ponto B para os meses de julho a dezembro de 2007 as 13h, $\nu = 9 \cdot 10^5 p$.</i>	125
4.10	<i>Média anual e desvio padrão referente as tabelas 4.8 e 4.9 para o ponto B as 13h em 2007, $\nu = 9 \cdot 10^5 p$.</i>	126

Simbologia

- A_i, A_i', B_i, B_i' – função de Airy e suas derivadas
 $\vec{e}$ – vetor cujas as componentes são campo elétrico e magnético E_x, E_y, H_x, H_z
 $\vec{B}$ – indução magnética da onda.
 $\vec{B}_o$ – indução magnética terrestre.
 C – $\cos(\theta_i)$, cosseno do ângulo de incidência.
 c – velocidade da luz no vácuo.
 $\vec{D}$ – vetor deslocamento da onda elétrica.
 D_x, D_y, D_z – componentes do vetor deslocamento.
 $\vec{E}$ – campo elétrico da onda.
 E_x, E_y, E_z – componentes do campo elétrico da onda.
 f_N – frequência do plasma.
 f_H – girofrequência.
 F_0, F_x – variáveis de Forsterling para as ondas ordinária e extraordinária respectivamente.
 $\vec{f}$ – vetor cujas componentes são f_1, f_2, f_3, f_4 .
 f_0^2 – frequência de penetração da onda(0).
 f_x^2 – frequência de penetração da onda(X).
 G – parte imaginária de Ψ
 $\vec{H}$ – campo magnético da onda
 H_x, H_y, H_z – componentes de $\vec{H}$
 H – altura de escala
 $\vec{H} - Z_0 \vec{H} h_0$ – altura da base da ionosfera
 h_m – altura onde ocorre o máximo da densidade eletrônica bilinear.
 I – função de Bessel modificada de primeira espécie.
 i – imaginário $\sqrt{-1}$
 k_0 – $2\pi/\lambda_0$ constante de propagação no espaço livre.
 l – cosseno do ângulo entre $\vec{Y}$ e o eixo z
 $[M]$ – matriz susceptibilidade.
 $M_{i,j}$ – elemento da matriz $[M]$.
 N – número de elétrons por unidade de volume.

n – índice de refração.
 n – cosseno do ângulo entre $\vec{Y}$ e o eixo z .
 (0) – onda ordinária.
 $\vec{P}$ – vetor polarização.
 P_x, P_y, P_z – componentes de $\vec{P}$.
 p – cosseno do ângulo entre $\vec{Y}$ e eixo y .
 $[Q]$ – matriz (4x4).
 q, q_1, q_2, q_3, q_4 – raízes da quártica do Booker ($q^2 = n^2 - s^2$).
 R – coeficiente de reflexão.
 R_1, R_0 – coeficientes de reflexão da onda ordinária.
 R_2, R_x – coeficientes de reflexão da onda extraordinária.
 $[S]$ – matriz (4x4) cujos elementos são os autovetores $\vec{s}_i$ de $[T]$.
 t – tempo.
 $[T]$ – matriz (4x4).
 $U = 1 - iz$
 $X = N e^2 / (\varepsilon_0 m \omega^2)$
 X_∞ – ponto onde n_x^2 passa pela descontinuidade.
 x – coordenada cartesiana.
 (X) – onda extraordinária.
 $\vec{Y}$ – e $\vec{B} / (m\omega)$.
 Y_L, Y_T – n Y , l Y .
 x, y, z – coordenadas cartesianas.
 z_0 – $1/\alpha$, ponto de reflexão da onda.
 Z_0 – μ_0/ε_0 impedância característica do espaço livre
 $z_\infty = X_\infty/\alpha$ ponto onde n_x^2 passa pela descontinuidade
 $Z = \nu/\omega$
 $Z_c = \frac{1}{2} \left| \frac{Y_T^2}{Y_L} \right|$, valor crítico de z .
 z_p = ponto de acoplamento
 α_1 = gradiente da densidade de elétrons (n° (elétrons/cm³))/km
 $\alpha = 8.061 \cdot 10^7 \alpha_1 / f^2$
 ε_0 – permissividade do espaço livre.
 θ – ângulo entre $\vec{Y}$ e a direção z .
 θ_I – ângulo de incidência.
 λ_0 – comprimento da onda no espaço livre
 μ – parte real do índice de refração
 μ_0 – permeabilidade magnética do espaço livre
 ν – frequência de colisões.
 ρ – polarização da onda.
 ρ_0, ρ_x – polarização das ondas ordinária e extraordinária respectivamente.
 χ – parte imaginária do índice de refração.

Ψ - coeficiente de acoplamento.

ω - frequência angular da onda ($2\pi f$).

Capítulo 1

FÓRMULAS E EQUAÇÕES BÁSICAS PARA A IONOSFERA

1.1 Introdução

A ionosfera é uma camada ionizada situada aproximadamente entre 60 km e 600 km de altura, que pode variar durante o dia, mês e ano. O pico da densidade eletrônica está a uma altura de aproximadamente 300 km. Durante a noite o início da camada da ionosfera sobe tornando a densidade eletrônica menor.

A ionosfera é dividida em camadas que são designadas por: camada D (entre 60 e 90 km), camada E (entre 90 e 180 km), camada F_1 (entre 180 e 250 km) e camada F_2 (entre 250 e 300 km). A densidade eletrônica normalmente é dada em elétrons/cm³, e durante o dia ela chega a $5 \cdot 10^3$ elétrons/cm³ na camada D, $5 \cdot 10^5$ na camada E, 10^6 na camada F_1 e $2 \cdot 10^6$ na camada F_2 . Tendo o sol como principal agente ionizante, a densidade atinge valores máximos aproximadamente ao meio dia e um mínimo durante a noite, chegando a desaparecer a camada D.

A faixa de frequência de HF(3 a 30MHz) as camadas F_1 e F_2 têm influência

principalmente no traçado do raio e as camadas D e E influenciam nas perdas do sinal. As pesquisas sobre a constituição da ionosfera iniciaram desde a década de 30 com as ionossondas cujo objetivo é a determinação da densidade eletrônica da ionosfera.

A maioria dos métodos usam técnicas diretas para determinar a densidade da ionosfera tais como o ionossonda. Um método usado para determinar a densidade eletrônica da ionosfera consiste no emprego de um foguete que mede a intensidade de campo de uma onda eletromagnética emitida por uma antena colocada no solo (Carrijo[?]). O processo pode ser feito da seguinte maneira:

- (a) mede-se a intensidade de campo através de um receptor localizado no foguete.
- (b) calcula-se a intensidade de campo pelas equações de Maxwell para uma suposta densidade eletrônica.
- (c) compara os valores de campo calculado e medido pelo foguete.
- (d) muda a densidade eletrônica até que os campos medidos e calculados sejam o mais próximo possível.

Como se observa o cálculo da intensidade de campo é fundamental para termos uma solução adequada e precisa da densidade eletrônica. Um método usado para tal finalidade foi desenvolvido por (Carrijo[?]), chamado de camadas finas e foi usado para frequência da ordem de 400 kHz. A técnica consiste em dividir a ionosfera em camadas finas da ordem de $\lambda/50$. Para frequência em torno de 500 kHz, chega-se a um conjunto de equações lineares com mais de 8000 incógnitas, o que torna inviável para frequências acima de 1 MHz.

As soluções W.K.B. [?] são uma alternativa para resolver o problema na baixa ionosfera onde o índice de refração não assume valores pequenos próximo do ponto de reflexão tornando-as às válidas ao longo de todo o

percurso de propagação.

Na baixa ionosfera sempre tem-se uma baixa densidade eletrônica, mas a frequência de colisões é alta, isto faz com que tenhamos uma alta atenuação do sinal e um coeficiente de reflexão baixo. Para frequências acima de 5 MHz, a onda é refletida na parte mais alta da ionosfera, onde a frequência de colisões é baixa e as condições W.K.B [?] já não mais válidas. Por isso este trabalho é restrito a frequências abaixo de 3MHz ou seja vamos trabalhar nas regiões D e E.

Será mostrado neste capítulo as equações básicas da propagação ionosférica e os modelos de densidade eletrônica teóricos e reais, os quais foram obtidos através do site da NASA [?] . Adota-se neste trabalho a nomenclatura de Budden [?] , fazendo um tratamento completo de todas as equações e conceitos apresentados. Sempre toma-se a ionosfera como sendo horizontalmente estratificada, isto é, a densidade eletrônica N , a frequência de colisões ν , o campo magnético terrestre $\vec{H}$, todos variam somente com a altura z . O eixo z será sempre tomado verticalmente de baixo para cima. Este capítulo trata dos modelos de densidade eletrônica utilizados, frequência de colisão, pressão e temperatura da baixa ionosfera.

1.2 Constituição da Ionosfera e Mecanismos de Ionização

A ionosfera é uma camada que se estende aproximadamente de uma altura de 60 km acima da superfície da Terra até 600 km. Desde que a ionosfera é parte da atmosfera superior da Terra, parece lógico começar o estudo pela constituição da mesma, a qual pode ser determinada por quantidades tais

como: a densidade eletrônica, o gradiente de temperatura, a constituição gasosa e a variação da pressão com a altura. Estes parâmetros podem ser medidos de maneira direta ou indireta. Para a área de propagação de ondas na ionosfera o parâmetro mais importante é a densidade eletrônica. A densidade eletrônica da ionosfera N [elétrons/cm³], fornece a concentração de elétrons livres por unidade de volume em cada ponto da atmosfera terrestre. A densidade eletrônica surge de um processo de ionização dos gases atmosféricos quanto as radiações solares atingem a superfície da Terra. Como a intensidade de radiação varia durante o dia, a densidade eletrônica também varia ao longo do dia. A determinação da densidade eletrônica N da ionosfera pode ser feita usando técnica de raio sondagens, foguetes e até satélites.

Ao nível do mar a porcentagem dos gases que constituem a ionosfera é dado na tabela 1.1.

Gás	Peso Molecular	Pressão Parcial [mb]	Moléculas por cm ³	% de volume	% do peso
Ar seco	29,0	1012,00	$2,7 \cdot 10^{19}$	100,00	100,00
N ₂	28,0	791,00	$2,11 \cdot 10^{19}$	78,09	75,53
O ₂	32,0	212,00	$5,6 \cdot 10^{18}$	20,95	23,14
Ar	39,9	9,45	$2,5 \cdot 10^{17}$	20,95	1,28
CO ₂	44,0	0,31	$8,1 \cdot 10^{15}$	0,03	0,046
N _e	20,0	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$4,9 \cdot 10^{14}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,25 \cdot 10^{-3}$
H _e	4,0	$5,3 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{14}$	$5,24 \cdot 10^{-4}$	$7,24 \cdot 10^{-5}$
H ₂	2,0	$5,1 \cdot 10^{-4}$	$1,35 \cdot 10^{13}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$3,48 \cdot 10^{-6}$

Tabela 1.1: *Constituição dos gases da atmosfera*[?]

Como se vê pela figura 1.1, a partir da altura de 290km, o átomo de nitrogênio é dominante na constituição da ionosfera.

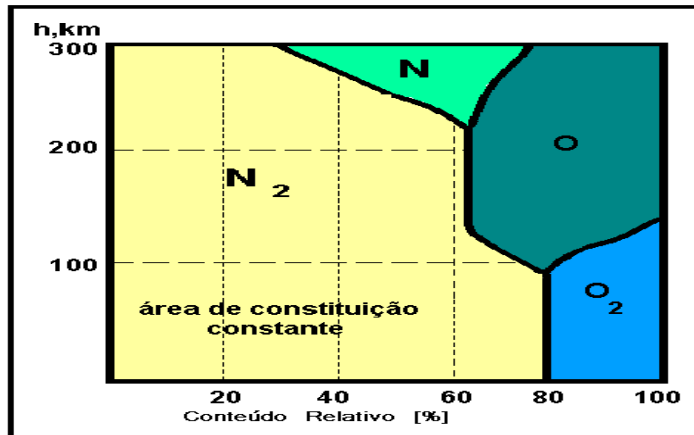


Figura 1.1: *Constituição da atmosfera para diferentes alturas* [?]

A pressão ao longo da ionosfera varia de acordo com a equação 1.1 abaixo,

$$p_h = p_0^{-\frac{Mg}{R} \int_0^h \frac{dh}{T(h)}} N/m^2 \quad (1.1)$$

Onde,

p_h = pressão na altura h, [N/m²]

g = aceleração da gravidade, [m/s²]

R = constante universal dos gases = 8,316 10³ [joules/kg-mole °C]

$T(h)$ = função da temperatura com a altura [°K]

M = massa de um quilograma-mol

h = altura onde se calcula a pressão [km].

p_0 = pressão na superfície da Terra [atm].

A temperatura da ionosfera oscila com a altura até 100 km. Após esta altura ela sempre estabiliza de acordo com a figura 1.2.

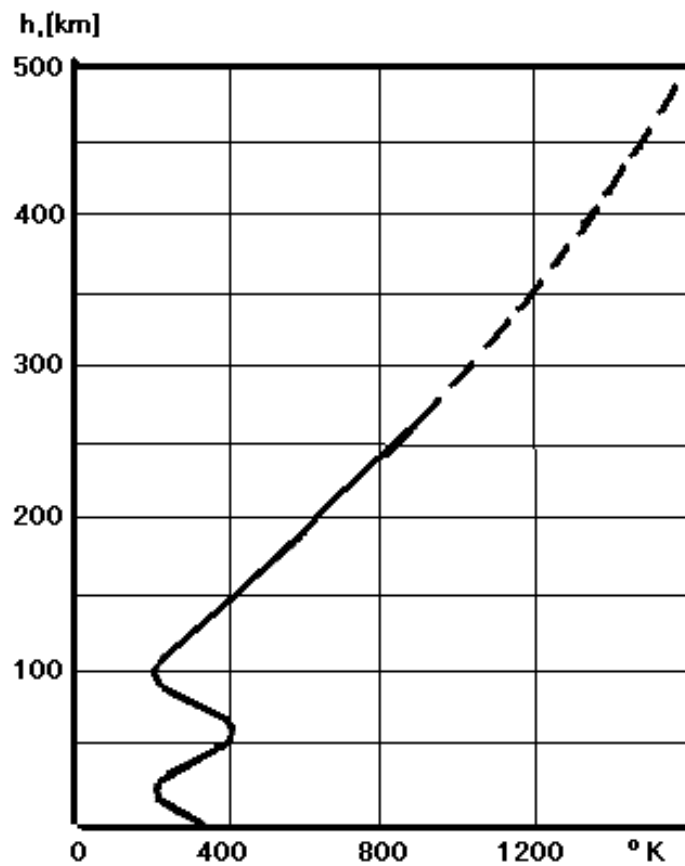


Figura 1.2: *Distribuição da temperatura com altura*[?]

A ionização da ionosfera pode ocorrer por diversos mecanismos. O principal motivo é devido a absorção das radiações solares. A tabela 1.2 nos dá algumas reações químicas de ionização sofrida por cada gás constituinte da ionosfera.

Constituição Gás	Reação	Ionização do comprimento da onda [Å]	Função do trabalho de Ionização, e V
O ₂	$O_2 + hv - > O_2^2 + e$	1015	12,2
O	$O + hv - > O^+ + e$	910	13,61
O ⁺	$O + hv - > O^{++} + e$	350	35,1
N ₂	$N_2 + hv - > N_2^+ + e$	795	15,51
N	$N + hv - > N^+ + e$	850	14,53
He	$He + hv - > He^+ + e$	503	24,58
H ₂	$H_2 + hv - > H_2^+ + e$	802	15,42
H	$H + hv - > H^+ + e$	910	13,60
NO	$NO + hv - > NO^+ + e$	1340	9,25

Tabela 1.2: *Ionização dos gases da atmosfera*

A densidade eletrônica da ionosfera varia com a hora do dia e estações do ano, pois ela está diretamente ligada a radiação solar. Vários estudos têm sido feitos para determinar e calcular a densidade eletrônica da ionosfera. O modelo de Chapman[?] para a ionosfera é o mais comum. Nele o valor de N, varia de forma exponencial. Outros modelos simplificados são considerados tais como o modelo parabólico, linear e bilinear, objetivando simplificar o cálculo da intensidade de campo ao longo da ionosfera.

Uma ionosfera real possui uma densidade eletrônica distribuída em camadas (D, E e F) como ilustra na figura 1.3. Na sua forma mais geral a ionosfera possui as camadas D, E, Es (E esporádica), F₁ e F₂. Algumas destas camadas podem desaparecer à noite, ficando apenas as camadas E e F conforme figura 1.3.

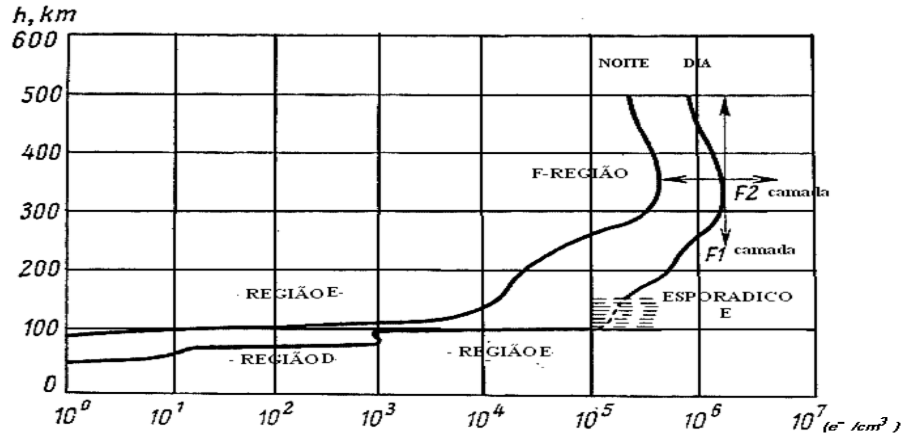


Figura 1.3: Distribuição densidade eletrônica com altura [?]

1.3 Perfil da Densidade de Elétrons

A determinação da densidade eletrônica $N(h)$ da ionosfera é alvo de grandes estudos teóricos e práticos. As grandes variações sofridas durante o dia pela densidade eletrônica, torna-se difícil o cálculo dos campos na propagação ionosférica. Dependendo da função N , chegar-se a equações diferenciais para os campos de difíceis soluções.

1.3.1 Modelo de Chapman

Uma das maiores contribuições neste assunto foi dada por Chapman[?] que fornece um modelo teórico para a densidade de elétrons. Após vários cálculos chega-se a um modelo que leva o seu nome; "O modelo de Chapman"[?], onde N será dado pela equação 1.2:

$$N(h) = N_m e^{\left(\frac{1-\xi - \sec(\chi)e^{-\xi}}{2}\right)} \quad (1.2)$$

onde

N_m - densidade eletrônica máxima [elétrons/ cm^3]

χ - ângulo que sol faz com a vertical da terra

$$\xi = \frac{h - h_m}{H} \quad (1.3)$$

h - altura [km]

h_m - altura onde N_m máxima [km]

$$H = \frac{RT}{Mg} \quad (1.4)$$

E o ângulo χ será dado pela figura 1.4 :

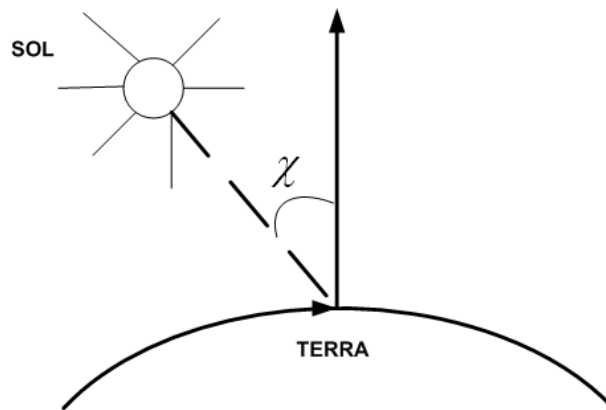


Figura 1.4: Ângulo χ relativo à vertical

A variação da densidade N para vários valores do ângulo zenital do sol χ como parâmetro, poderá ser bem representada no modelo de Chapman[?] conforme figura 1.5:

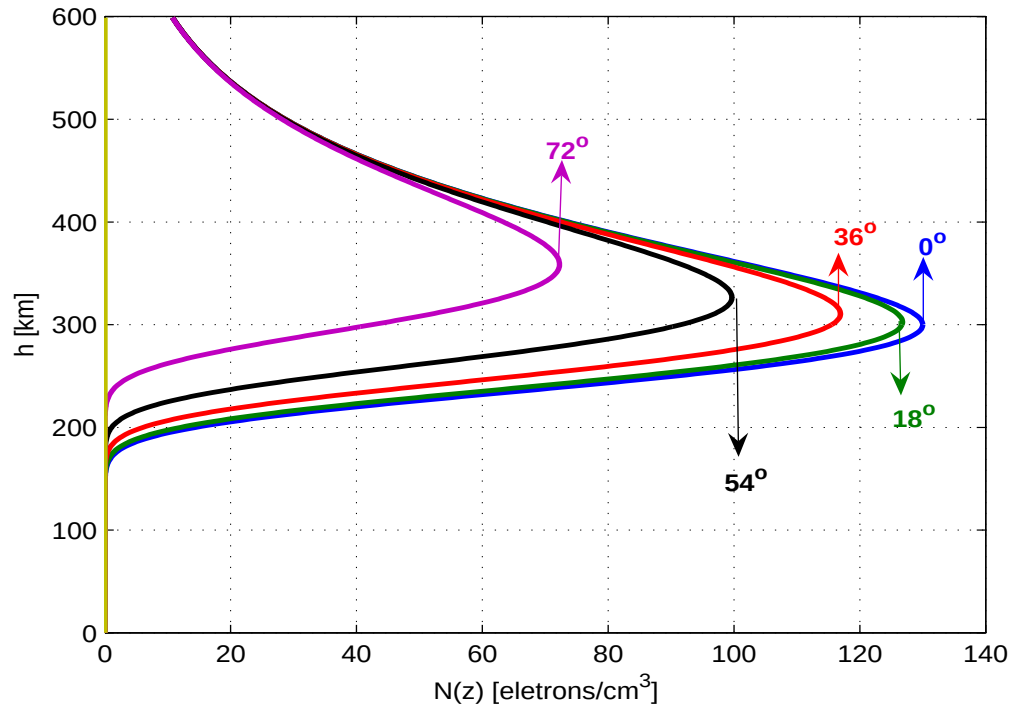


Figura 1.5: Densidade eletrônica relativa da ionosfera com a altura, onde h_m é a altura onde ocorre o valor máximo da camada.

H é altura de escala, z_m é a altura onde $N(z)$ atinge o máximo. Outros modelos tem sido sugerido visando a obtenção de equações diferenciais conhecidas, como é o caso do modelo parabólico, linear, bilinear. O perfil parabólico nos dará como equação diferencial para os campos a chamada equação de Weber. Com o modelo linear chegaremos à equação de Stokes[?], e o exponencial à equação de Bessel[?].

1.3.2 Modelo Linear

Em um modelo linear a densidade eletrônica (eletrons/cm³) é apresentada pela figura 1.6, e sua equação é dada por:

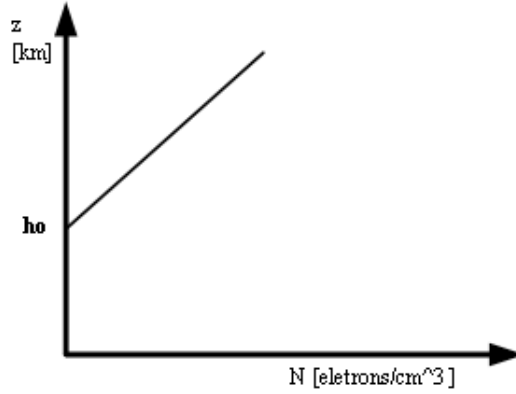


Figura 1.6: *Densidade eletrônica linear*

$$N = 0, \quad z < h_0 \quad (1.5)$$

$$N = \alpha_1(z - h_0), \quad z \geq h_0 \quad (1.6)$$

onde h_0 é a altura do início da ionosfera e α_1 é o coeficiente angular. Para casos práticos $h_0=60\text{km}$ e $\alpha_1=5000$ [elétrons/(cm³*km)].

1.3.3 Modelo Bilinear

Para os cálculos numéricos sempre tomaremos N por unidade de cm³ e z em Km e h_0 é a altura onde se inicia a ionosfera apresentada pela figura 1.7, α_1 é o gradiente da densidade eletrônica. Para o modelo bilinear vamos considerar a densidade N dada por:

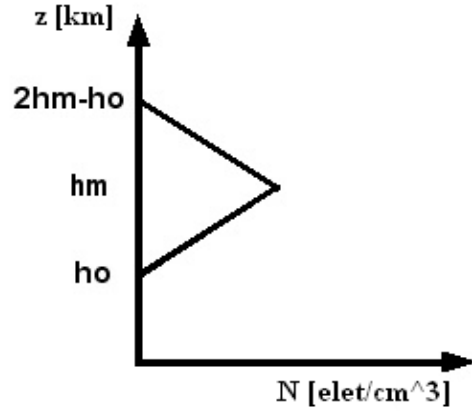


Figura 1.7: *Modelo bilinear de N , h_0 é a altura do início da ionosfera e h_m a altura onde ocorre o máximo.*

$$N = 0, z < h_0 \quad (1.7)$$

$$N = \alpha_1(z - h_0), \quad h_0 < z < h_m \quad (1.8)$$

$$N = \alpha_1(2h_m - h_0 - z), \quad h_m < z < 2h_m - h_0 \quad (1.9)$$

$$N = 0, z > 2h_m - h_0 \quad (1.10)$$

1.3.4 Modelo Parabólico

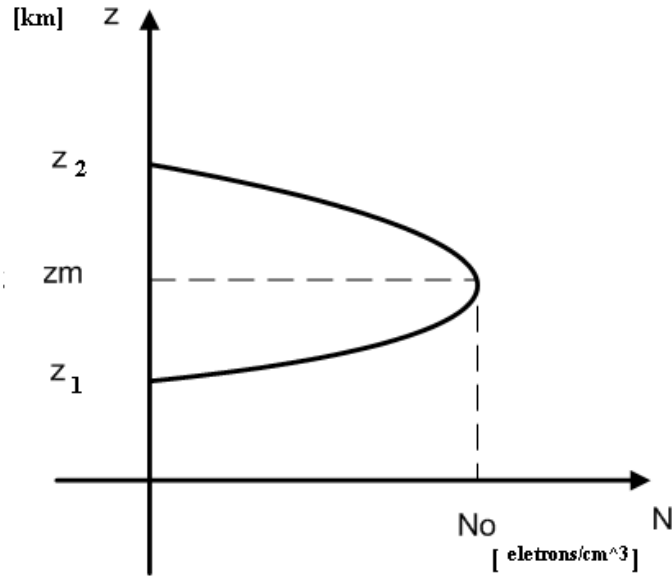


Figura 1.8: *Modelo parabólico de N*

Para um modelo parabólico

$$N = 0, h < h_1 \quad (1.11)$$

$$N = N_0 + \beta (h - h_m)^2, h_1 \leq h \leq h_2 \quad (1.12)$$

$$N = 0, h > h_2 \quad (1.13)$$

h - altura [km]

h_m - altura onde a densidade atinge o máximo

h_1 - início da camada

h_2 - final da camada

N_0 - densidade máxima

Para $h=h_1$, temos: $N=0$

$$N_0 + \beta (h_1 - h_m)^2 = 0 \quad (1.14)$$

$$\beta = -\frac{N_0}{(h_1 - h_m)^2} \quad (1.15)$$

Então a densidade eletrônica é dada por:

$$N = N_0 - \frac{N_0}{(h_1 - h_m)^2} (h - h_m)^2 \quad (1.16)$$

$$h_2 = 2h_m - h_{10} \quad (1.17)$$

A figura 1.9 ilustra a equação.

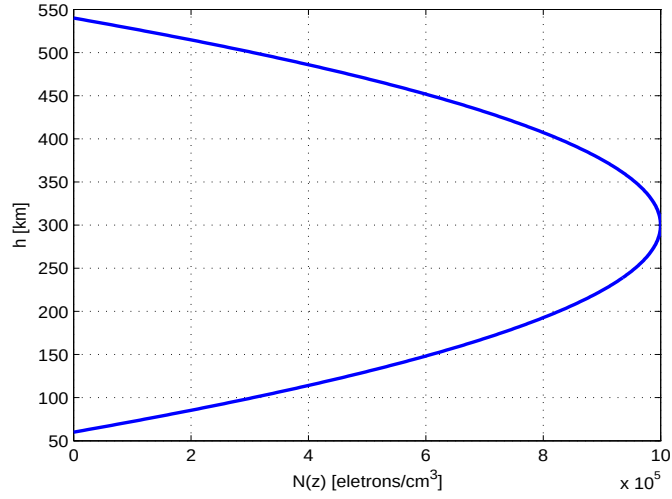


Figura 1.9: *Modelo de densidade eletrônica parabólica, onde $h_1=60km$, $\beta=-17,36$ e $h_m=300km$.*

1.4 Variação da Temperatura e Pressão na Ionosfera

O perfil da temperatura será determinado a partir do gradiente da temperatura em função da altura fornecido pelo (U.S. STANDARD ATMOSPHERE) [?]. A baixa atmosfera até 84,53 km é dividida em sete camadas com variações lineares da temperatura, ou seja, cada uma destas camadas o gradiente da temperatura é considerado constante conforme tabela 1.3.

Desde que a tabela do gradiente fornecida pelo (U.S.STANDARD)[?] é função da altitude geopotencial, a mesma pode ser determinada em função da altura geométrica pela equação que relaciona as duas altitudes:

$$z = \frac{r_0 h}{r_0 - h} \quad (1.18)$$

h = é altitude geopotencial

z = é altitude geométrica

r_0 = é o raio da Terra

Na tabela 1.3 temos o gradiente da temperatura em cada camada i em função das duas altitudes.

Camada i	$h_{0,i}$ (km)	$z_{0,i}$ (km)	L_i (K/km)	$T_{0,i}$ (K)	$P_{0,i}$ (N/m ²)
1	0	0	-6,5	313,0	101325,0
2	11	11,019	0,1	241,5	25933,1
3	20	20,63	1,0	242,4	7278,5
4	32	32,162	2,8	254,4	1397,2
5	47	47,349	0,1	296,4	216,6
6	51	51,412	-2,8	296,8	136,6
7	71	71,800	-2,0	240,8	10,6

Tabela 1.3: A atmosfera é dividida em sete camadas e em cada uma delas temos : Camada i , $h_{0,i}$, $z_{0,i}$, L_i , $T_{0,i}$, $P_{0,i}$ são respectivamente, a altura geopotencial e altura geométrica, o gradiente de temperatura na camada i temperatura, pressão, todos na base da camada i .

Em cada camada a temperatura é dada por:

$$T = T_{0,i} + L_i(z - z_{0,i}) \quad (1.19)$$

$T_{0,i}$ - é a temperatura na base da camada i

L_i - é o gradiente de temperatura na camada i

$z_{0,i}$ - é a altura da base da camada i

Dado $T_{0,1}=313K$, $T_{0,i}$, $i=2..,7$ podem ser calculados. Os resultados são dados na tabela 1.3.

Passaremos agora ao cálculo da pressão como função da altura, para a atmosfera calma. Quando a altura acima do nível do mar é acrescida de dz , a pressão do ar decresce segundo:

$$dp = -\rho g dz \quad [N/m^2] \quad (1.20)$$

p = pressão na altura z $[N/m^2]$

ρ = densidade do ar $[kg/m^3]$

g = aceleração devido a gravidade $[m/s^2]$

A equação de estado para atmosfera é :

$$pv = NkT = RT \quad (1.21)$$

v = volume ocupado por mol

$N = 6,02 \cdot 10^{26}$ moléculas/k mol

k = constante de Boltzman = $1,38 \cdot 10^{-23}$ joules/ $^{\circ}C$

R = constante universal dos gases perfeitos = $8,316 \cdot 10^3$ joules/kgmol. $^{\circ}C$

Sendo m a massa de uma molécula, a densidade do ar pode ser dada por:

$$\rho = Nm/v \quad (1.22)$$

substituindo,

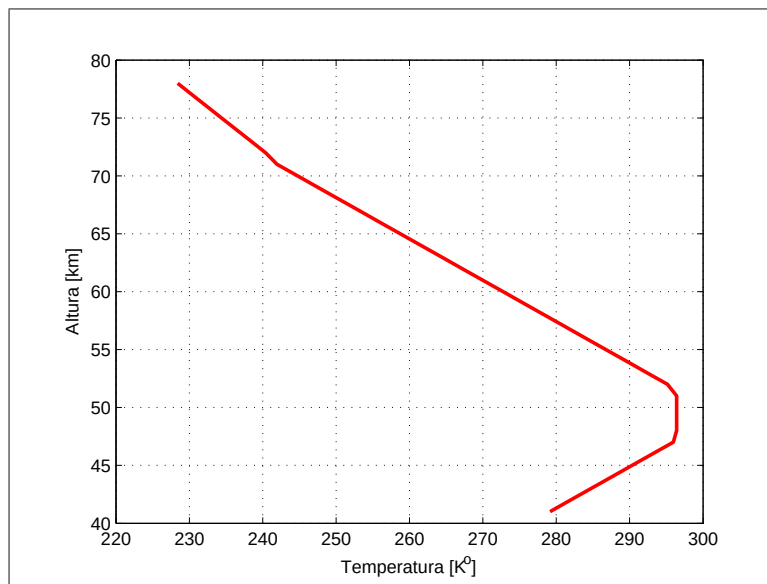


Figura 1.10: *Perfil da temperatura(V.S. STANDART ATMOSPHERE)* [?]

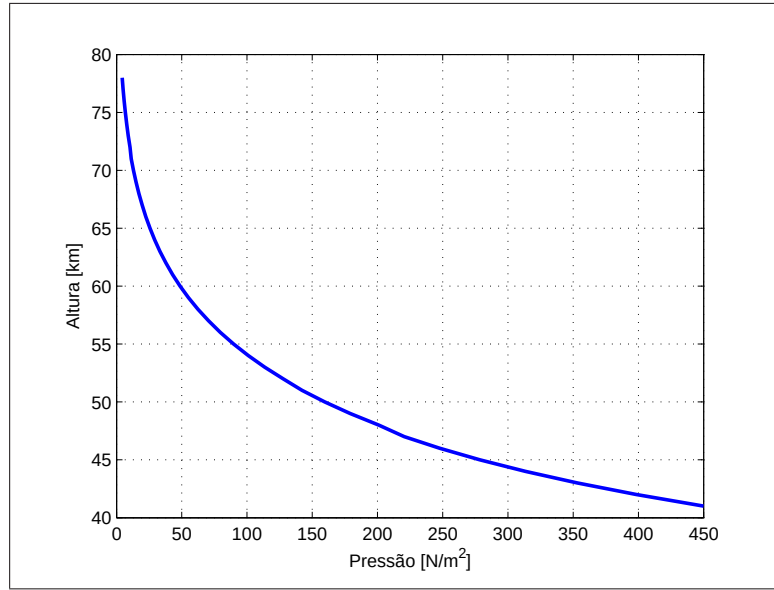


Figura 1.11: *Perfil da pressão para o modelo de temperatura [?]*
conforme fig.1.10

$$pNm/\rho = NkT = RT \quad (1.23)$$

$$\rho = pNm/NkT = pM/RT \quad (1.24)$$

$M = Nm$ é a massa de um kg-mol. Substituindo a equação 1.24 em 1.21 teremos:

$$dp = -\frac{pMg}{RT}dz \quad (1.25)$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dz}{H} \quad (1.26)$$

sendo $H=RT/Mg$, a altura da escala.

Substituindo, a equação 1.19 em 1.25, obteremos a equação:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R} \cdot \frac{dz}{T_{0,i} + L_i(z - z_{0,i})} \quad (1.27)$$

Sendo $p_{0,i}$, pressão na base da camada i,

$$p = p_{0,i} \left[\frac{T_{0,i}}{T_{0,i} + L_i(z - z_{0,i})} \right]^{\frac{Mg}{RL_i}} \quad (1.28)$$

Com os dados da tabela 1.3, poderemos calcular o perfil da pressão, foram mostrada na figura 1.11.

1.5 Freqüência de Colisões de Elétrons na Ionosfera

A freqüência de colisões na ionosfera é muito importante principalmente na camada D, pois elas influenciam consideravelmente nas perdas do campo elétrico.

Um dos trabalhos mais importantes a respeito do assunto foi apresentado por Nicolet[?], cujos resultados serão utilizados abaixo.

O intervalo de tempo efetivo de colisão entre duas moléculas de massa m_1 e m_2 é dada por Chapman[?] e Cowling[?]:

$$\tau_{1,2} = \frac{m_1 m_2 (n_1 + n_2)}{(n_1 m_1 + n_2 m_2) kT} D \quad (1.29)$$

Onde n_1 e n_2 são as densidades das partículas 1 e 2, k a constante de Boltzmann, T a temperatura (K) e D o coeficiente de difusão mútua entre as duas moléculas, sendo dado por:

$$D = \frac{3}{16(n_1 + n_2)\sigma_{1,2}^2} \left[\frac{2k(m_1 + m_2)}{\pi m_1 m_2} \right]^{1/2} \quad (1.30)$$

onde σ_{12} é a distância de colisões.

Das equações 1.29 e 1.30 chega-se a expressão para a frequência de colisões entre partículas 1 e 2:

$$\nu_{1,2} = \frac{16}{3} \cdot \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \pi \sigma_{1,2}^2 \left[\frac{(m_1 + m_2) RT}{2\pi m_1 m_2} \right] \quad (1.31)$$

Para colisões entre um elétron de massa m_e e partículas neutras de massa m ($m_1 = m \gg m_2 = m_e$) a expressão 1.31 fica:

$$\nu_{e,m} = \frac{4}{3} n \pi \sigma_{e,m}^2 \left[\frac{8kT}{\pi m_e} \right]^{1/2} \quad (1.32)$$

onde n é a densidade das partículas neutras.

Várias tentativas para determinar o valor de $\sigma_{e,m}^2$ tem sido feitas. Neste trabalho adota-se aqui o valor dado por Nicolet[?] , que é da ordem de $6,5 \cdot 10^{-16} / \pi \text{ cm}^2$ que substituindo em 1.32 chega-se a:

$$\nu_{e,m} = 5,4 \cdot 10^{-10} n T^{1/2} \quad (1.33)$$

se a pressão p é dada em mm de mercúrio,

$$\nu_1 = \nu_{e,m} = 5,22 \cdot 10^9 p T^{-1/2} \quad (1.34)$$

Outras expressões para ν são encontradas na literatura, que são função apenas da pressão. Alguns autores ingleses Bain[?] usam,

$$\nu_2 = 6,3 \cdot 10^5 p \quad (p \text{ em } N/m^2) \quad (1.35)$$

enquanto alguns autores russos [?] usam,

$$\nu_3 = 9 \cdot 10^5 p \quad (p \text{ em } N/m^2) \quad (1.36)$$

A figura 1.12 nos mostra o perfil de ν para os três modelos 1.34, 1.35 e 1.36.

A teoria desenvolvida neste capítulo considera que a força sobre o elétron é proporcional à velocidade $\vec{v}$, ($\vec{F} = m\nu\vec{v}$), sendo a constante de proporcionalidade o produto de massa do elétron e a frequência média de colisões.

Esta expressão não leva em consideração a dependência da frequência de colisões com energia dos elétrons e também ignora a função de distribuição da energia dos elétrons. Sen e Wyller [?] desenvolveram um estudo aprofundado a respeito do assunto, cujos resultados foram simplificados por Deeks[?] e chega a conclusão de que quando $\omega_H \ll \nu$ ou $\omega_H \gg \nu$ a frequência de colisão poderá ser substituída por um valor efetivo igual a $3\nu/2$ ou $5\nu/2$. Em suma quando $\omega_H \ll \nu$ ou $\omega_H \gg \nu$ a frequência de colisão pode ser substituída com boa aproximação pelo valor efetivo no cálculo dos campos.

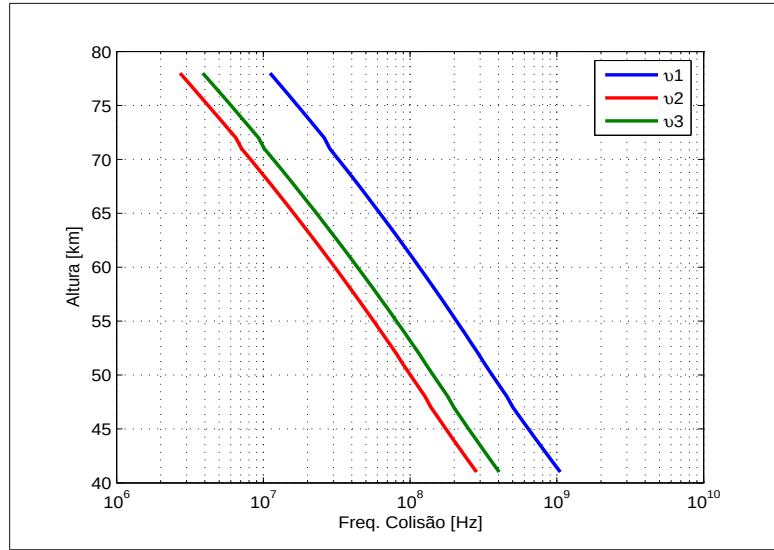


Figura 1.12: Variação da frequência de colisão ($\nu = f_c$) com a altura para o modelo de Nicolet(ν_1), modelo Bain(ν_2), modelo russo(ν_3).

1.6 Modelo da Densidade Eletrônica para Baixa Ionosfera

A determinação da densidade eletrônica para a baixa ionosfera tem sido alvo de pesquisas por vários autores.

Alguns modelos na forma exponencial foram apresentado por (Carrijo[?],

$$N_1 = 10^{0,08(z-40)} \quad (\text{eletrons/cm}^3); \quad z[\text{km}] \quad (1.37)$$

ou

$$N_2 = 10^{0,09(z-40)} \quad (\text{eletrons/cm}^3); \quad z[\text{km}] \quad (1.38)$$

ou

$$N_3 = 10^{0,1(z-40)} \quad (\text{eletrons/cm}^3); \quad z[\text{km}] \quad (1.39)$$

A determinação da densidade eletrônica, feita na região próxima ao equador brasileiro, foi realizada por (Carrijo[?], G.). Três modelos para o cálculo de frequência de colisões foram propostos. Os modelos N_1 , N_2 e N_3 , os quais

foram obtidos usando frequência de colisões dadas respectivamente pelas equações 1.37, 1.38 e 1.39, que são as colunas 5, 6 e 7 da tabela 1.4.

A tabela 1.4 mostra os valores de densidades eletrônica para a baixa ionosfera na região do equador determinado pelo modelo (Carrijo[?], G.),

Altura[km]	Densidade Eletrônica [eletrons/cm ³]			Frequência de Colisões [Hz]		
h	N ₁	N ₂	N ₃	$\nu_{i1} * 10^9$	$\nu_{i2} * 10^9$	$\nu_{i3} * 10^9$
55	31,60	3,162	9,54	0,2075	0,565	0,807
56	39,80	3,98	15,85	0,1849	0,501	0,716
57	50,10	5,62	25,11	0,165	0,444	0,635
58	63,10	10,00	39,81	0,146	0,393	0,562
59	87,10	19,95	52,48	0,130	0,348	0,497
60	125,90	39,81	63,09	0,115	0,307	0,438
61	154,90	51,286	72,44	0,102	0,271	0,386
62	199,50	63,09	89,12	0,0906	0,238	0,340
63	275,40	79,43	114,81	0,0801	0,238	0,299
64	398,10	100,00	151,35	0,0707	0,210	0,263
65	602,60	128,83	190,54	0,0623	0,184	0,230
66	891,30	177,83	251,19	0,0549	0,161	0,201
67	1148,20	309,03	467,74	0,0482	0,141	0,176
68	1479,10	501,19	616,59	0,0423	0,123	0,154
69	1905,50	575,44	707,95	0,0371	0,094	0,134
70	2511,90	660,69	794,33	0,0325	0,082	0,117
71	2630,30	758,57	851,12	0,0284	0,071	0,102
72	2238,70	794,33	812,83	0,026	0,065	0,093
73	1737,80	588,84	660,69	0,0227	0,056	0,080
74	1412,50	446,68	549,54	0,0197	0,049	0,069
75	1174,90	416,87	575,43	0,0171	0,042	0,060
76	1000,00	398,11	426,57	0,0148	0,036	0,052
77	871,00	354,81	389,04	0,0129	0,031	0,045
78	794,30	316,23	363,07	0,011	0,027	0,039

Tabela 1.4: Tabela de densidade eletrônica e de gráficos da frequência de colisões em função da altura.

As figuras 1.13 e 1.14 mostram os gráficos de densidade eletrônica em função da altura para para os valores da tabela 1.4.

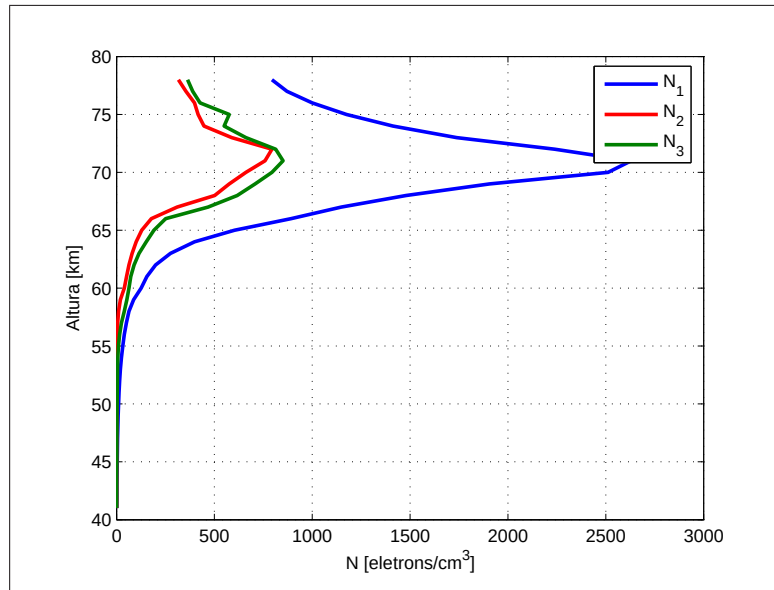


Figura 1.13: *Densidade eletrônica modelo Carrijo* [?]

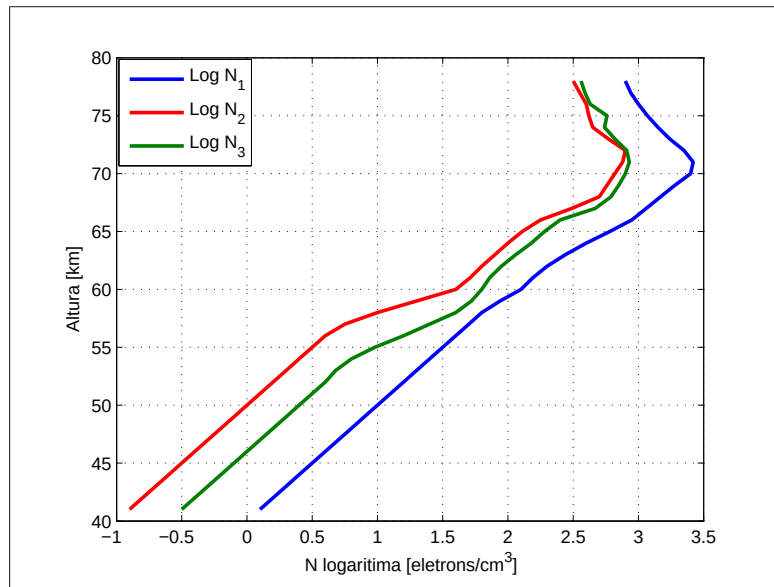


Figura 1.14: *Logaritmo da densidade eletrônica modelo Carrijo* [?]

O *site* da Nasa possui um *link* que direciona para o *site* do *IRI-International Reference Ionosphere* (<http://modelweb.gsfc.nasa.gov/models/iri.html>) [?] que informa o valor da densidade eletrônica para qualquer ponto na superfície da Terra em função das coordenadas geográficas, hora, dia, mês e ano, onde

será chamado "modelo IRI". Para os gráficos abaixo adotaremos duas coordenadas conforme a tabela 1.5. A coordenada do ponto A está na região do Equador próximo a Marabá-Pa e para o ponto B esta mais ao sul próximo a Uberlândia-Mg no Brasil.

Ponto	Latitude	Longitude
A	0°	50°
B	-20°	50°

Tabela 1.5: *Coordenadas adotadas*

Abaixo segue os gráficos das densidade do modelo da IRI, para os meses de janeiro, abril, julho e outubro de 2007, para os ponto A e B.

Para o mês de janeiro/2007,

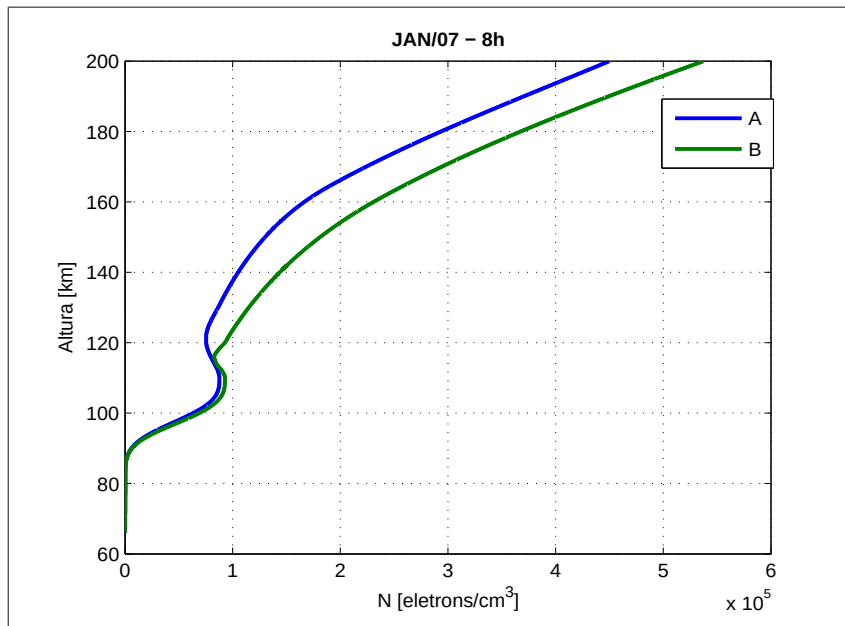


Figura 1.15: *Densidade eletrônica modelo IRI, janeiro, 8h, para os pontos A e B.*

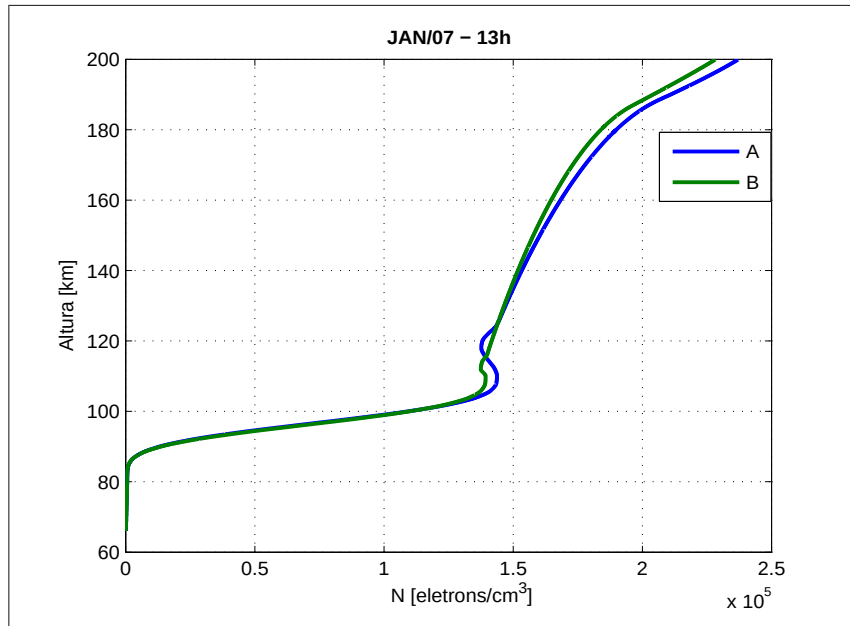


Figura 1.16: *Densidade eletrônica, modelo IRI, janeiro, 13h,* para os pontos A e B.

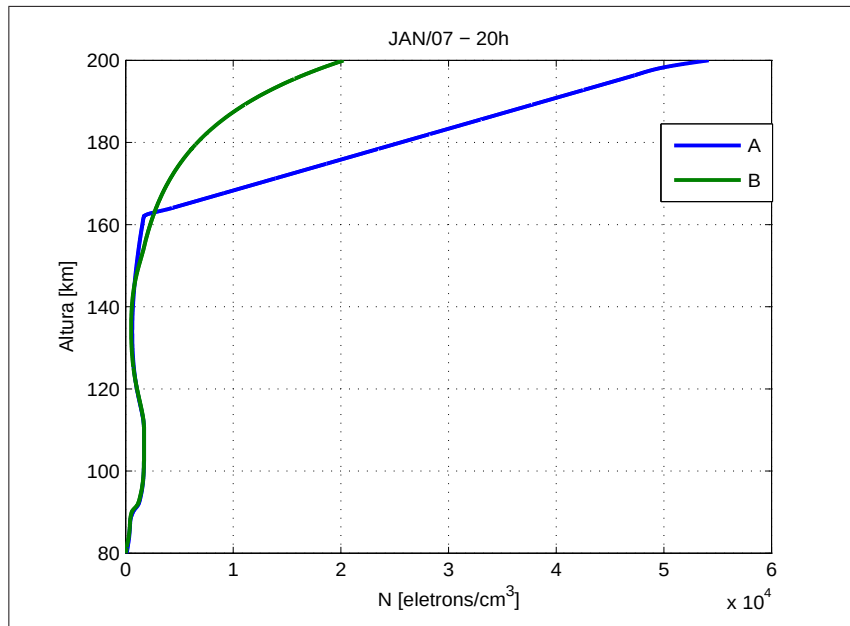


Figura 1.17: *Densidade eletrônica modelo IRI, janeiro, 20h,* para os pontos A e B.

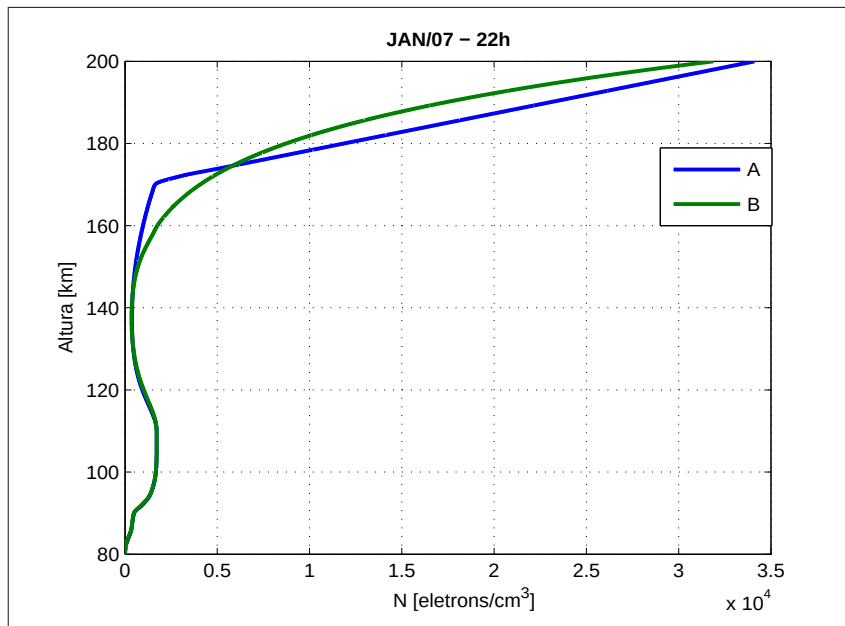


Figura 1.18: *Densidade eletrônica modelo IRI, janeiro, 22h,* para os pontos A e B.

Para o mês de abril 8h/2007,

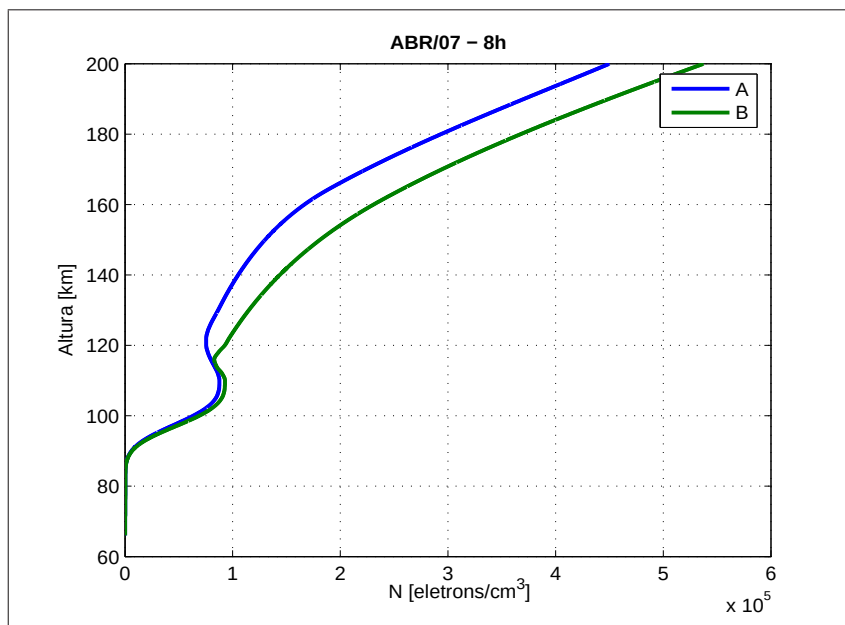


Figura 1.19: *Densidade eletrônica modelo IRI, abril, 8h,* para os pontos A e B.

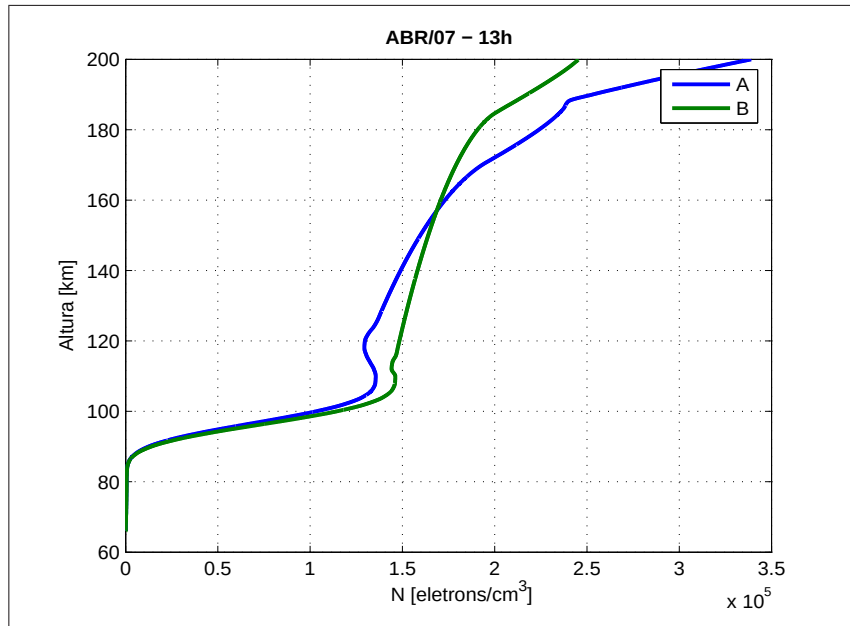


Figura 1.20: *Densidade eletrônica modelo IRI, abril, 13h,*
para os pontos A e B.

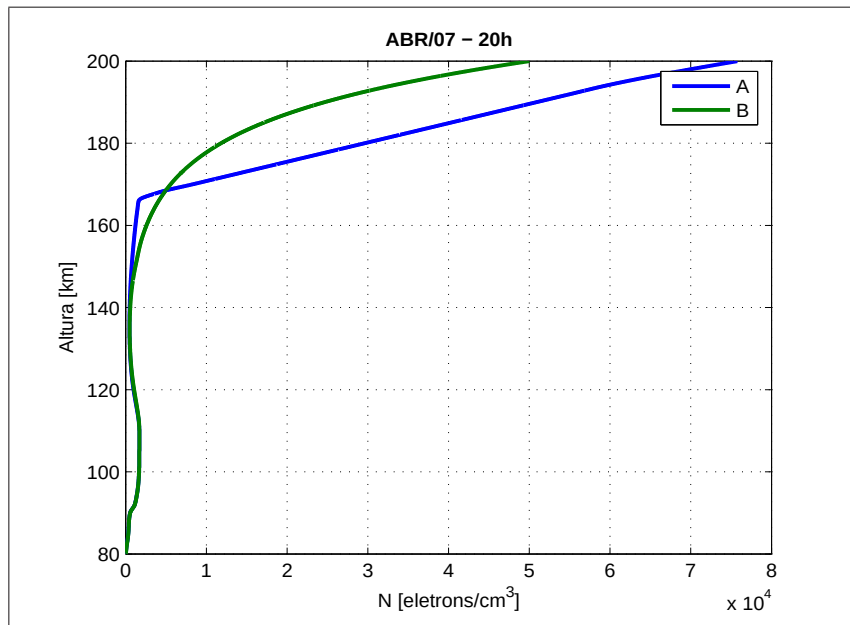


Figura 1.21: *Densidade eletrônica modelo IRI, abril, 20h,*
para os pontos A e B.

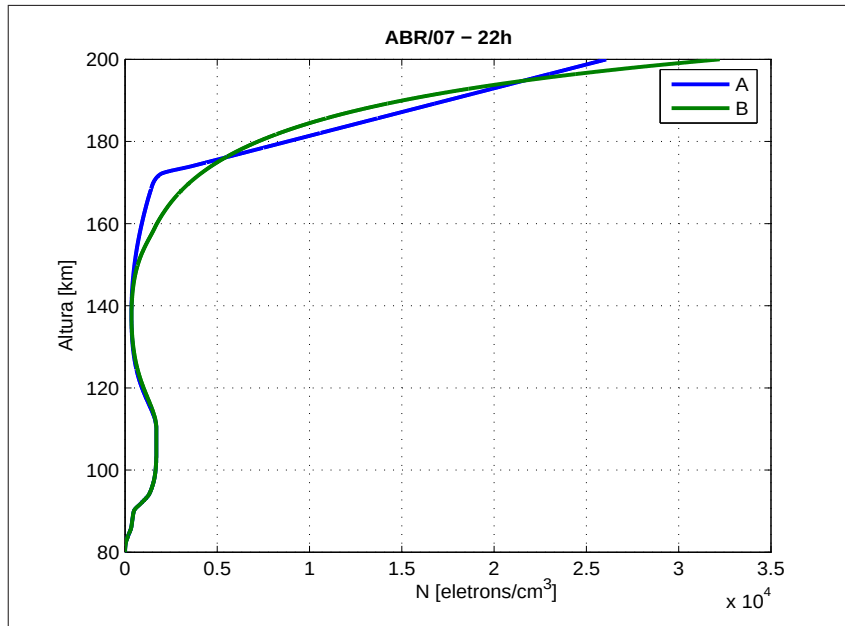


Figura 1.22: *Densidade eletrônica modelo IRI, abril, 22h,*
para os pontos A e B.

Para o mês de julho 8h/2007,

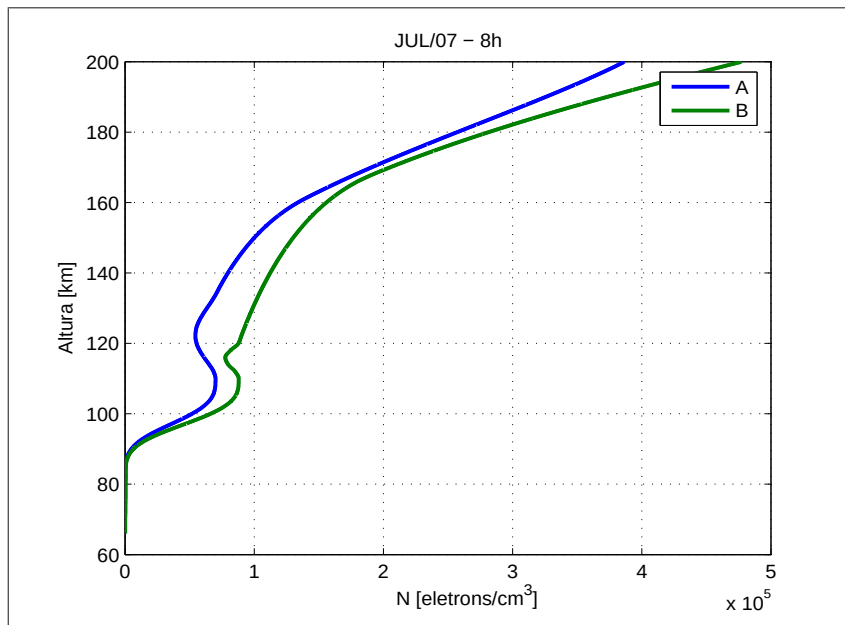


Figura 1.23: *Densidade eletrônica modelo IRI, julho, 8h,*
para os pontos A e B.

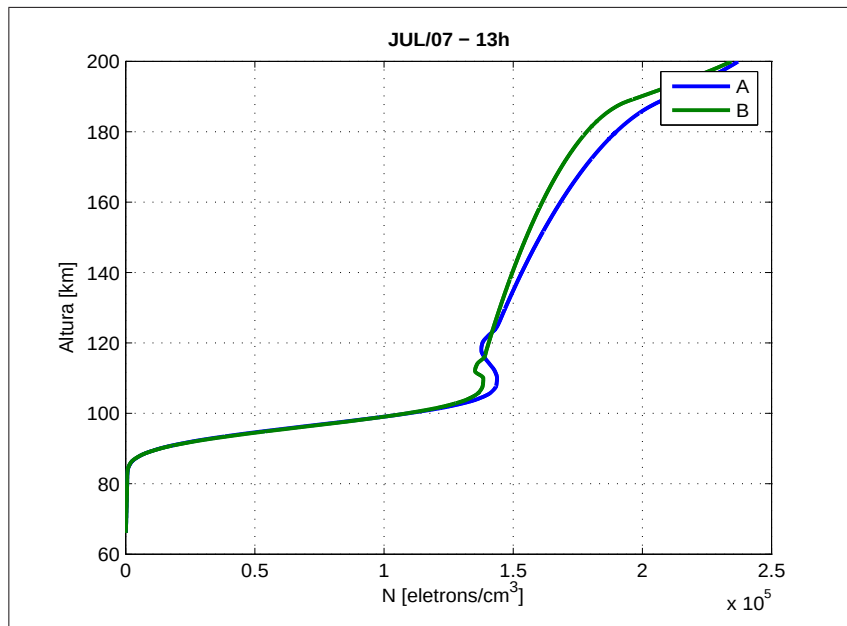


Figura 1.24: *Densidade eletrônica ,modelo IRI, julho, 13h,*
para os pontos A e B.

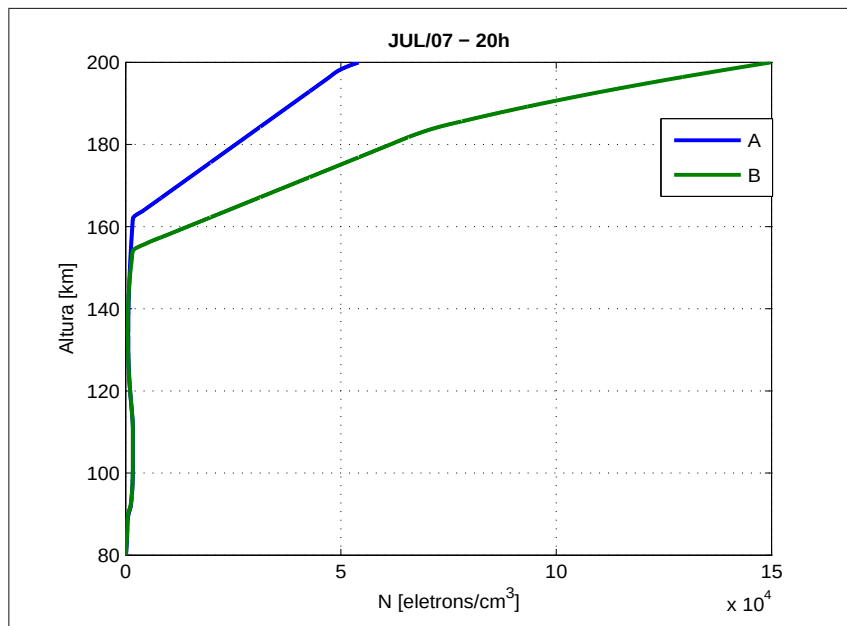


Figura 1.25: *Densidade eletrônica modelo IRI, julho, 20h,*
para os pontos A e B.

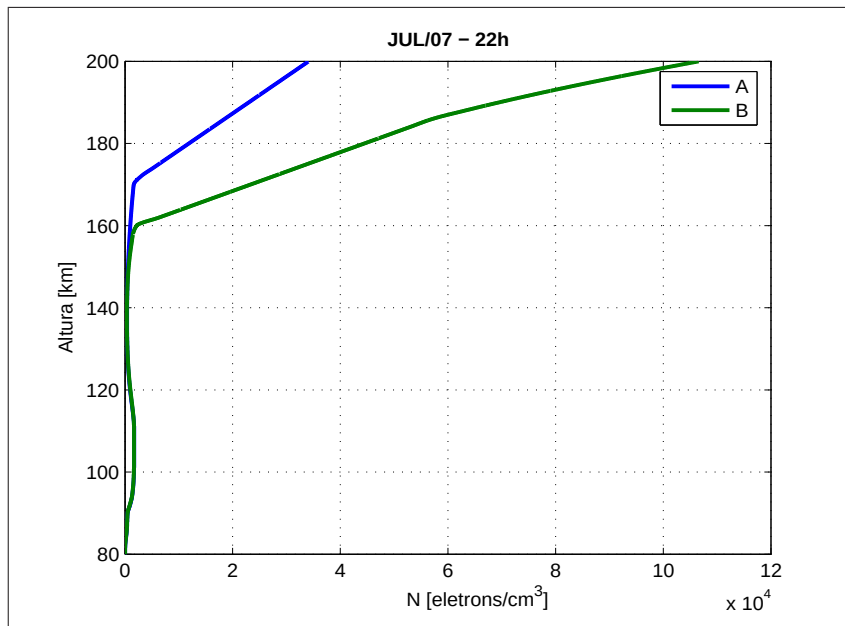


Figura 1.26: *Densidade eletrônica modelo IRI, julho, 22h,*
para os pontos A e B.

Para o mês de outubro 8h/2007,

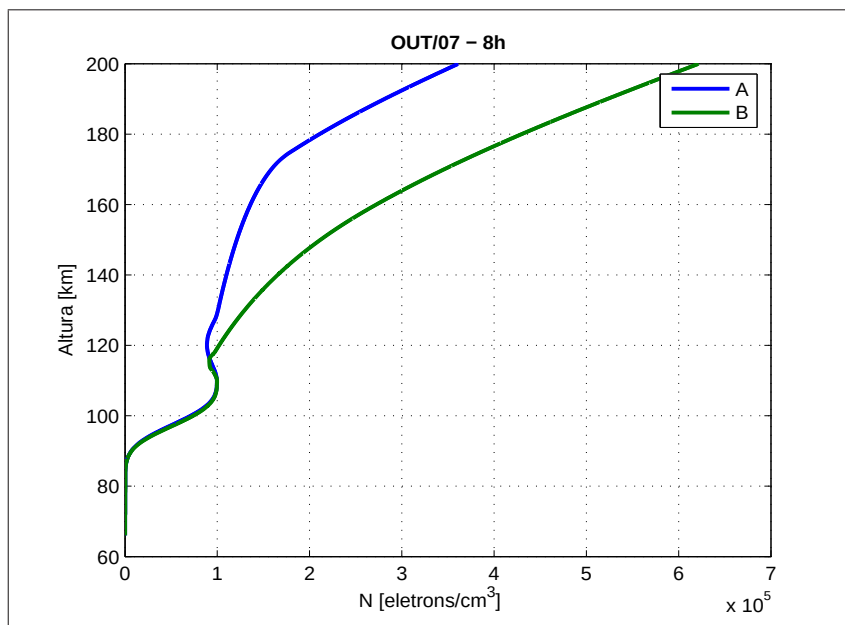


Figura 1.27: *Densidade eletrônica modelo IRI, outubro, 8h,*
para os pontos A e B.

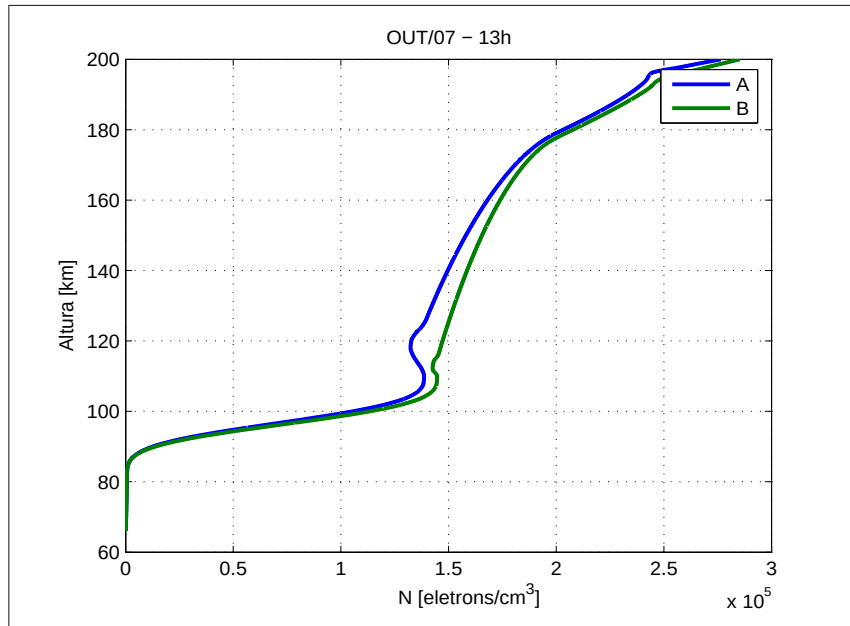


Figura 1.28: *Densidade eletrônica modelo IRI, outubro, 13h, para os pontos A e B.*

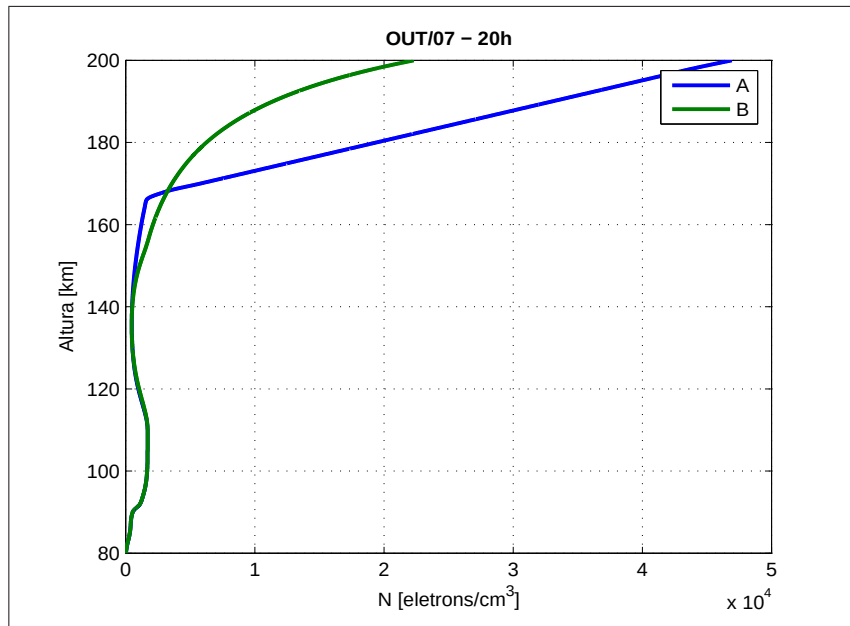


Figura 1.29: *Densidade eletrônica ,modelo IRI, outubro, 20h, para os pontos A e B.*

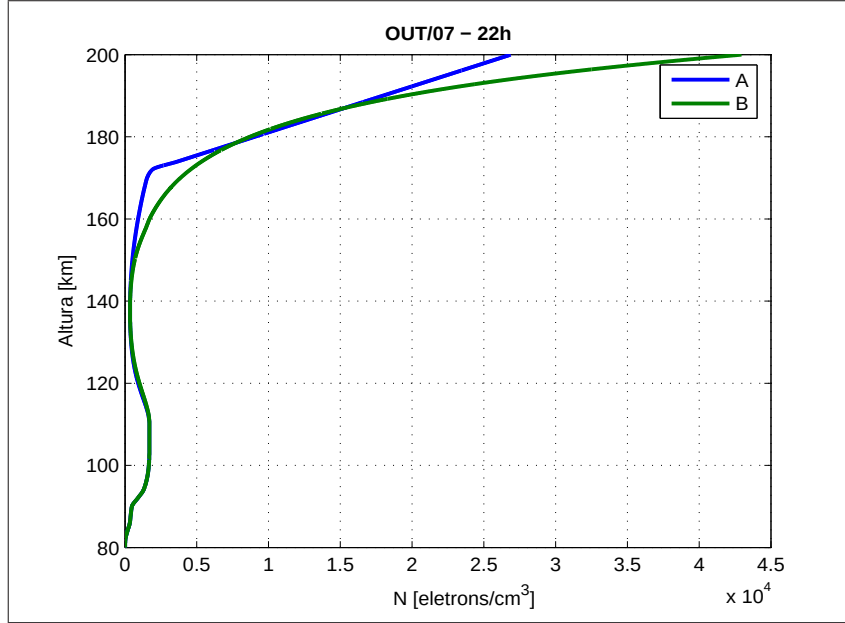


Figura 1.30: *Densidade eletrônica modelo IRI, outubro, 22h,* para os pontos A e B.

Observa-se que como era de se esperar a densidade eletrônica alcança o seu máximo às 13h, chegando ao seu mínimo às 22h. Estes gráficos são apenas ilustrativos da baixa ionosfera, onde iremos trabalhar.

1.7 Equações de Maxwell

Todos os fenômenos da propagação ionosferica são regidos pelas equações de Maxwell. Todas as outras fórmulas e conceitos são derivadas, destas. As equações de Maxwell para a ionosfera são:

$$\text{div} \vec{D} = 0 \quad (1.40)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (1.41)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \quad (1.42)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (1.43)$$

Onde

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad (1.44)$$

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} \quad (1.45)$$

Para campos cujas variações no tempo são do tipo $e^{i\omega t}$, as duas equações com o rotacional resultam em:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu_0 H_x, \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega D_x \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu_0 H_y, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega D_y \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu_0 H_z, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega D_z \quad (1.48)$$

A figura 1.31 nos mostra o sistema de coordenadas, onde $\vec{K}$ é a direção da frente de onda e $\vec{B}_0$ a indução magnética terrestre.

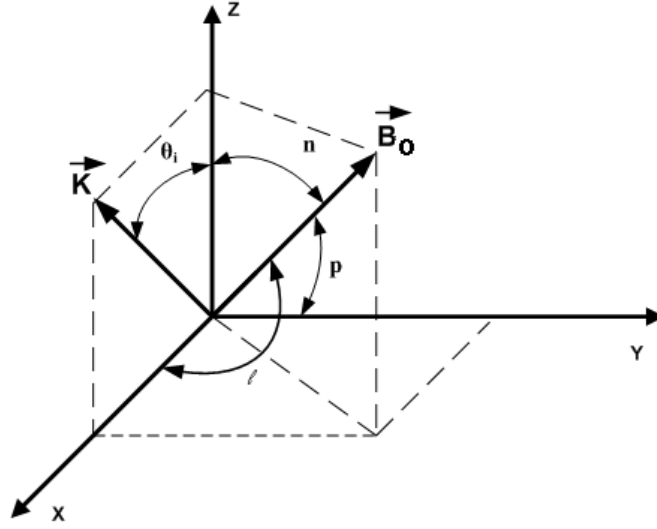


Figura 1.31: *Gráfico de coordenadas do campo*

Considerando uma onda plana incidente na ionosfera no sentido de baixo para cima, com sua normal ao plano de propagação em x-z fazendo um ângulo θ_i com a vertical, pode-se mostrar que para uma ionosfera paralelamente estratificada.

$$\frac{\partial}{\partial x} = -ik_0 \text{sen} \theta_i; \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad (1.49)$$

Tomando

$$S = \text{sen} \theta_i \quad (1.50)$$

$$C = \cos \theta_i$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{w}{c} \quad (1.51)$$

$$c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} \quad (1.52)$$

Sendo c , λ_o , k_o , são respectivamente a velocidade da luz, comprimento de

onda e constante de propagação da onda no espaço livre. A expressão 1.49 nos diz que não há variações da onda com x nem y para o caso de uma ionosfera paralelamente estratificada. Teremos variações dos campos simplesmente com z , e podemos substituir $\frac{\partial}{\partial z}$ por $\frac{d}{dz}$ no conjunto 1.47, 1.48 e 1.49. Com as substituições adequadas chegaremos ao resultado:

$$\frac{dE_y}{dz} = ik_0 H_x, \quad -\frac{dH_y}{dz} = i\frac{k_0}{\varepsilon_0} D_x \quad (1.53)$$

$$\frac{dE_x}{dz} + ik_0 S E_z = ik_0 H_y, \quad \frac{dH_x}{dz} + ik_0 S H_z = \frac{ik_0}{\varepsilon_0} D_y \quad (1.54)$$

$$ik_0 S E_y = ik_0 H_z, \quad -ik_0 S H_y = \frac{ik_0}{\varepsilon_0} D_z \quad (1.55)$$

Onde

$$\vec{H} = Z_0 \vec{E} \quad (1.56)$$

$$Z_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} \quad (1.57)$$

1.8 Relações Constitutivas

A equação para o movimento de elétrons na ionosfera é dada por:

$$\vec{E}e + e\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \vec{B}_0 = m\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + m\nu\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad (1.58)$$

Sendo $\vec{B}_0$ a indução magnética terrestre, $\vec{r}$ o vetor deslocamento, m é a massa do elétron, e a carga do elétron, ν a de frequência média de colisões. Supondo que o campo aplicado tenha uma variação com o tempo dada por $e^{i\omega t}$, a equação 1.58 ficará:

$$\frac{Ne^2}{m\omega}\vec{E} + \frac{ic}{m\omega}\vec{P} \times \vec{B}_o = -\vec{P}(1 - \frac{iv}{\omega}) \quad (1.59)$$

Fazendo $Z=\nu/\omega$, $\vec{Y} = \frac{e}{mw}\vec{B}_0$, $X = Ne^2/(\varepsilon_o m\omega^2)$, a equação 1.59 poderá ser escrita como:

$$-\varepsilon_o\vec{E} = (1 - iZ) + i\vec{P} \times \vec{Y} \quad (1.60)$$

Fazendo $U=1-iZ$, $Y=|\vec{Y}|$ e l, p, n os co-senos diretores de $\vec{Y}$, chegaremos a :

$$-\varepsilon_o \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & inY & -ipY \\ -inY & U & ilY \\ ipY & -ilY & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

Estas são chamadas de relações constitutivas. As vezes é conveniente-mente trabalhar com f_N e f_H , que são chamadas de freqüência de plasma e giro freqüência do elétron, respectivamente, e poderão ser dados pelas equações 1.63 e 1.66 definindo:

$$X = \frac{w_N^2}{w^2} = \frac{f_N^2}{f^2} \quad (1.62)$$

Onde

$$w_N^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_o m} = (2\pi f_N)^2 \quad (1.63)$$

$$f_N^2 = 8,061 * 10^7 \cdot N \quad (1.64)$$

(f é dado em Hz e N é o número de elétrons por cm³)

$$\vec{Y} = \frac{e\vec{B}_0}{m\omega} = \frac{\vec{\omega}_H}{\omega} \quad (1.65)$$

$$|\vec{\omega}_H| = \left| \frac{e\vec{B}}{m} \right| = 2\pi f_H \quad (1.66)$$

Das relações 1.52 podemos obter a matriz susceptibilidade, Budden [?].

$$\frac{1}{\varepsilon_o} \begin{bmatrix} Px \\ Py \\ Pz \end{bmatrix} = (M) \begin{bmatrix} Ex \\ Ey \\ Ez \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

Onde M é chamada de matriz susceptibilidade e é dada por:

$$M = \frac{X}{U(U^2 - Y^2)} \begin{bmatrix} U^2 - l^2Y^2 & inYU - lpY^2 & -ipYU - nlY^2 \\ -inYU + lpY^2 & U^2 - p^2Y^2 & -ilYU - npY^2 \\ ipYU - nlY^2 & -ilYU - npY^2 & U^2 - n^2Y^2 \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

1.9 Índice de Refração e Polarização

Para uma onda cuja normal está no eixo z, a sua polarização poderá ser definida como:

$$\rho = \frac{E_y}{E_x} \quad (1.69)$$

Escolhendo um eixo de coordenadas de tal modo que p=0, pode-se chegar

a partir das equações de Maxwell a equação de polarização por Budden[?].

$$\rho^2 + \frac{il^2 Y}{n(U - X)}\rho + 1 = 0 \quad (1.70)$$

Seja $Y_L = nY$; $Y_T = lY$; $U = 1 - iZ$ a equação 1.70 ficará

$$\rho^2 + \frac{iY_T^2}{Y_L(1 - X - iZ)}\rho + 1 = 0 \quad (1.71)$$

$$\rho^2 = \frac{iY_T^2}{2Y_L(1 - X - iZ)} \pm i \left[\frac{Y_T^4}{4Y_L(1 - X - iZ)^2} + 1 \right]^{1/2} \quad (1.72)$$

Tem-se então de acordo com a equação 1.72 duas polarizações para um meio anisotrópico. Com as equações de Maxwell e equação 1.72, podemos chegar a fórmula de índice de refração n dada por Appleton-Hartree [?].

$$n^2 = 1 - \frac{X}{1 - iZ - \frac{\frac{1}{2}Y_T^2}{1 - X - iZ} \pm \left[\frac{\frac{1}{4}Y_T^4}{(1 - X - iZ)^2} + Y_L^2 \right]^{1/2}} \quad (1.73)$$

Com o aumento de f , há uma diminuição na influência do número de colisões no cálculo do índice de refração e também nos efeitos no cálculo dos campos. Tem-se dois índices de refração para a ionosfera, ou seja dois modos de propagação. O com o sinal (+) corresponderá ao modo ordinário, enquanto o (-) corresponderá o modo extraordinário. A figura 1.33 mostra o índice de refração da ionosfera para o modo ordinário e o extraordinário para a densidade eletrônica linear $N = \alpha_1(z - h_0)$ onde:

$\alpha_1 = 5000$, $h_0 = 60\text{km}$, $f = 3\text{MHz}$ e $\nu = 0$.

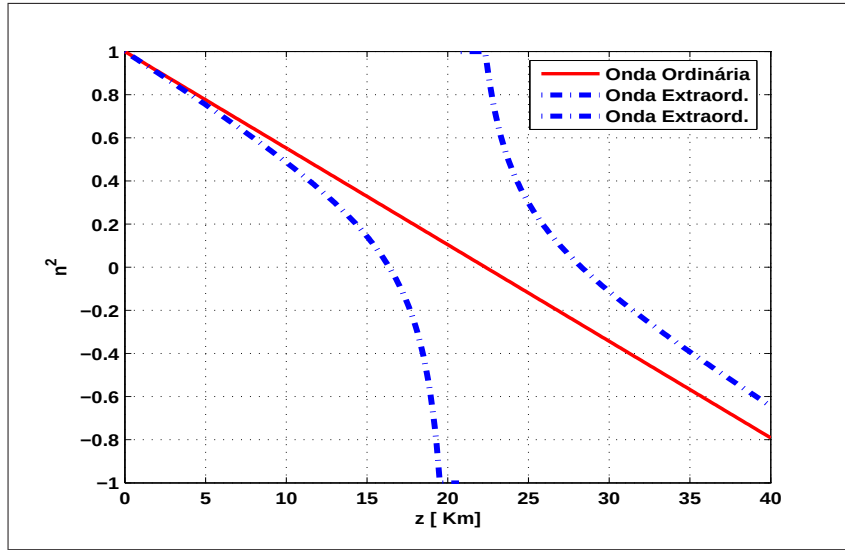


Figura 1.32: *Índice de Refração da Ionosfera para o modelo linear $N = \alpha_1(z - h_0)$, $f=3\text{MHz}$ e $\nu=0$.*

Para o caso em que o campo magnético terrestre é perpendicular ou paralelo ao sentido de propagação da onda, estes dois modos se propagam independentemente. Quando o campo magnético terrestre faz um ângulo qualquer com a direção de propagação, os dois modos se interagem quebrando a independência. Este efeito de interação é conhecido como acoplamento das ondas. Será visto que a região onde as ondas se interagem, ou melhor, a região de acoplamento entre as ondas ordinárias e extraordinárias será relativamente pequena comparada com o restante da ionosfera.

1.10 Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas as equações básicas para cálculo dos campos na ionosfera. Todas as equações são provenientes das equações de Maxwell e das relações constitutivas. Como se observa pela equação 1.67,

a ionosfera apresenta como um meio de grande complexidade tendo dois modos se propagando, devido sua característica anisotrópica. Pela equação 1.73, tem-se dois índices de refração para a ionosfera, o que a caracteriza como um meio anisotrópico.

A densidade eletrônica da ionosfera tem sido alvo de pesquisa por longos anos sendo que, um dos primeiros modelos foi dado por Chapman, que constitui um modelo teórico. Carrijo[?] determinou a densidade eletrônica para a baixa ionosfera na região do equador. Será usada ao longo deste trabalho a densidade eletrônica dada pelo site da Nasa[?], onde para qualquer latitude e longitude pode-se determinar a densidade eletrônica para qualquer hora do mês e ano.

Para a frequência de colisões existem três modelos, mas ao longo deste trabalho será utilizado o modelo russo[?], onde ν varia apenas com a pressão.

Capítulo 2

PROPAGAÇÃO EM UM MEIO IONIZADO ISOTRÓPICO

2.1 Introdução

A propagação de uma onda eletromagnética em um meio de densidade eletrônica linear será visto neste capítulo, assim como, o estudo de um modelo bilinear para o caso de um meio isotrópico com colisões e sem campo magnético terrestre. Serão vistos as equações diferenciais[?] para os campos, os cálculos dos mesmos para ambos modelos. Será mostrado graficamente, o coeficiente de reflexão para dois modelos linear e bilineares em função da frequência. A energia da onda será quase que totalmente refletida ou transmitida para frequências ligeiramente inferiores ou superiores, respectivamente, a frequência de penetração da camada ou frequência de pico da densidade.

Este capítulo será de grande utilidade para o restante do trabalho, mostrando fenômenos que acontecem na ionosfera anisotrópica. Todas as equações dos campos serão transformadas na equação de Stokes quando se considera o perfil linear, cujas soluções linearmente independentes são as funções de Airy[?].

2.2 Equações Diferenciais

2.2.1 Perfil de Densidade Eletrônica Linear

Para $\vec{B}_0=0$, então $Y_L = 0$ e $Y_T = 0$, substituindo em [1.73](#) obtemos o índice de refração

$$n^2 = 1 - \frac{X}{1 - iZ} = 1 - \frac{X}{U} \quad (2.1)$$

da matriz [1.61](#) temos

$$-\varepsilon_0 \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

então teremos:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_0 E_x &= U P_x \\ -\varepsilon_0 E_y &= U P_y \\ -\varepsilon_0 E_z &= U P_z \end{aligned} \quad (2.3)$$

Da equação [1.44](#) teremos:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.4)$$

Então teremos:

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_0 E_x + P_x = \varepsilon_0 \vec{E}_x - \frac{\varepsilon_0}{U} \vec{E}_x \\ D_y &= \varepsilon_0 E_y + P_y = \varepsilon_0 \vec{E}_y - \frac{\varepsilon_0}{U} \vec{E}_y \\ D_z &= \varepsilon_0 E_z + P_z = \varepsilon_0 \vec{E}_z - \frac{\varepsilon_0}{U} \vec{E}_z \end{aligned} \quad (2.5)$$

Utilizando as equação 1.53, 1.54 e 1.55 e derivando, tem-se:

$$\frac{dE_y}{dz} = ik_0 H_x \quad (2.6)$$

$$\frac{dH_x}{dz} + ik_0 S H_z = \frac{ik_0}{\varepsilon_0} D_y \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} = ik_0 \frac{dH_x}{dz} = ik_0 \left[i \frac{k_0}{\varepsilon_0} D_y - ik_0 S H_z \right] \quad (2.8)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} = ik_0 \left[i \frac{k_0}{\varepsilon_0} \left(\varepsilon_0 E_y - \frac{\varepsilon_0 E_y}{U} \right) - ik_0 S^2 E_y \right] \quad (2.9)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} = ik_0 \cdot ik_0 \left[E_y - \frac{X}{U} E_y - S^2 E_y \right] \quad (2.10)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 \left[1 - S^2 - \frac{1}{U} \right] E_y = 0 \quad (2.11)$$

Fazendo $q^2 = 1 - \frac{X}{U} - S^2$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 [n^2 - S^2] E_y = 0 \quad (2.12)$$

ou

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 q^2 E_y = 0 \quad (2.13)$$

Quando se considera N variando linearmente com a altura chegaremos à equação de Stokes como será visto abaixo. Sendo a densidade eletrônica N dada pela equação 2.14 e 2.15 .

$$N = \alpha_1 (z - h_0), z \geq h_0 \quad (2.14)$$

onde α_1 é uma constante conforme foi visto na figura 1.6.

$$N = 0, \quad z < 0 \quad (2.15)$$

a quantidade X será dada por :

$$X = \alpha (z - h_0), \quad z \geq h_0 \quad (2.16)$$

$$X = 0, \quad z < h_0 \quad (2.17)$$

da equação 1.62 e 1.63, $\alpha = \left(\frac{8,0610\alpha_1 10^7}{f^2} \right)$

$$n^2 = 1 - \frac{\alpha}{1 - iZ} (z - h_0), \quad z \geq h_0 \quad (2.18)$$

$$n^2 = 1, \quad z < h_0 \quad (2.19)$$

O modelo linear é representado conforme figura 1.6 e temos para n^2 para $Z=0$ temos a figura 2.1.

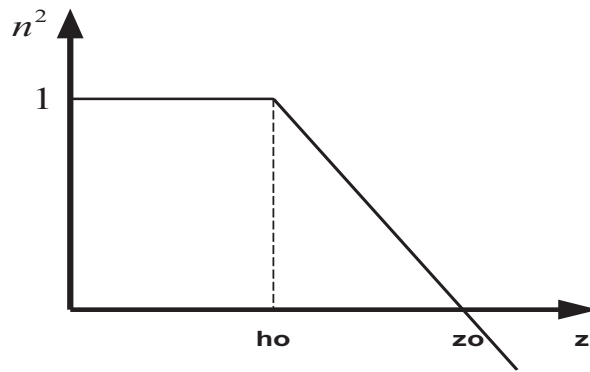


Figura 2.1: Gráfico de n^2 quando $Z=0$

A equação 2.12 e 2.13 ficará então para o modelo linear

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 \left[C^2 - \frac{\alpha}{1 - iZ} (z - h_0) \right] E_y = 0, \quad z \geq h_0 \quad (2.20)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 C^2 E_y = 0, \quad z < h_0 \quad (2.21)$$

Conclui-se então que, para o modelo linear, a equação diferencial que rege os campos na ionosfera é justamente a equação de Stokes, cujas soluções são as funções de Airy[?] A_i e B_i que estão apresentadas no apêndice I. Para a região $z < h_0$, $N=0$ e $n=1$, a onda se propaga no espaço livre e tem-se como soluções e^{-ikoCz} e e^{+ikoCz} . Em toda a análise feita até aqui foi considerado que a frequência de colisões (ν) é constante.

2.3 Cálculo dos Campos para Perfil Linear

A equação 2.20 se transforma na equação, pela mudança de variável.

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} = r E_y \quad (2.22)$$

quando,

$$r = \left(\frac{k_0^2 \alpha}{1 - iZ} \right)^{1/3} \left[z - h_0 - (1 - iZ) \frac{C^2}{\alpha} \right] \quad (2.23)$$

A equação 2.23, como já foi dito, apresenta duas soluções independentes $A_i(r)$ e $B_i(r)$. A solução B_i cresce exponencialmente com r (+), não podendo ser solução para os campos na ionosfera, restando então a solução A_i . Então a solução da equação 2.22 será:

$$E_y = K A_i(r), \quad z > h_o \quad (2.24)$$

Pela equação 2.24, onde K é uma constante, pode-se calcular H_x usando as expressão,

$$H_x = \frac{1}{ik_0} \cdot \frac{dE_y}{dz}, \quad z > h_0 \quad (2.25)$$

então

$$H_x = - \left(\frac{k_0^2 \alpha}{1 - iZ} \right)^{1/3} \frac{i}{k_0} A'_i(r), \quad z > h_0 \quad (2.26)$$

Abaixo da ionosfera as duas soluções são $e^{-ik_0 Cz}$ que representa uma onda ascendente e $e^{ik_0 Cz}$ que representa a onda descendente. Abaixo da ionosfera a solução para E_y e H_x são dadas pelas equações abaixo:

$$E_y = e^{-ik_0 Cz} + R e^{ik_0 Cz} \quad (2.27)$$

$$H_x = -C e^{-ik_0 Cz} + C R e^{ik_0 Cz} \quad (2.28)$$

onde R é coeficiente de reflexão total da onda na ionosfera.

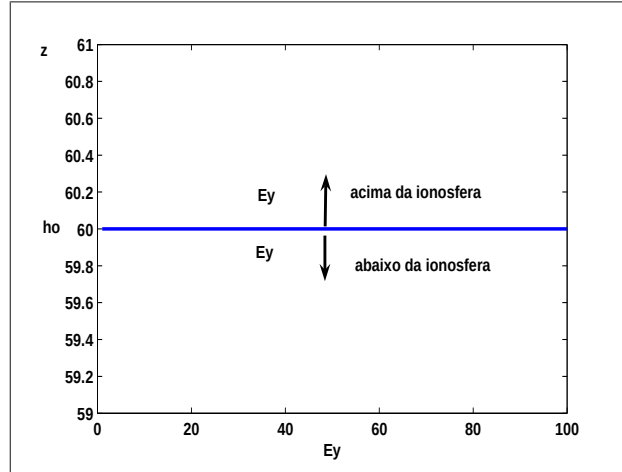


Figura 2.2: Interface do espaço livre com a ionosfera

Pelas condições de contorno, chega-se aos resultados:

$$R = \frac{CA_i(r_o) - iPA'_i(r_o)}{CA_i(r_o) + iPA'_i(r_o)} \cdot e^{-2ik_0 Ch_0} \quad (2.29)$$

$$K = \frac{e^{-ik_0Ch_0} + Re^{ik_0Ch_0}}{A_i(r_o)} \quad (2.30)$$

onde

$$P = \left(\frac{\alpha}{k_0(1 - iZ)} \right)^{1/3} \quad (2.31)$$

$$r_o = - \left(\frac{k_0^2 \alpha}{1 - iZ} \right)^{1/3} \left((1 - iZ) \frac{C^2}{\alpha} \right) \quad (2.32)$$

Para o caso de $Z=0$, P e r_o são reais. Facilmente nota-se que $|R|=1$, isto significa logicamente que toda energia é refletida. Para $Z \neq 0$, o mesmo não acontece. O processo de reflexão na ionosfera se efetua continuamente até o ponto onde $r_0=0$, chamado de ponto de reflexão. A partir deste ponto a onda se torna evanescente. Quando consideramos $Z \neq 0$, o ponto onde $r_0=0$, já não é mais real e neste caso não tem mais sentido falar em ponto de reflexão da onda. Na figura 2.3, é mostrado o campo elétrico E_y em função de altura para os casos de $Z=0$, $Z \neq 0$, $f=500\text{kHz}$, $\theta_i=0$, $\alpha 1=5000$. Na figura 2.3 e 2.4, é também apresentado o campo para os casos de $Z=0$ e $Z \neq 0$ e $f=1\text{MHz}$, quando $\theta_i=0$, $\alpha 1=5000$. Em ambos os casos nota-se que os campos são oscilatórios para altura inferiores ao ponto de reflexão, e acima deste ponto os campos tornam-se evanescentes.

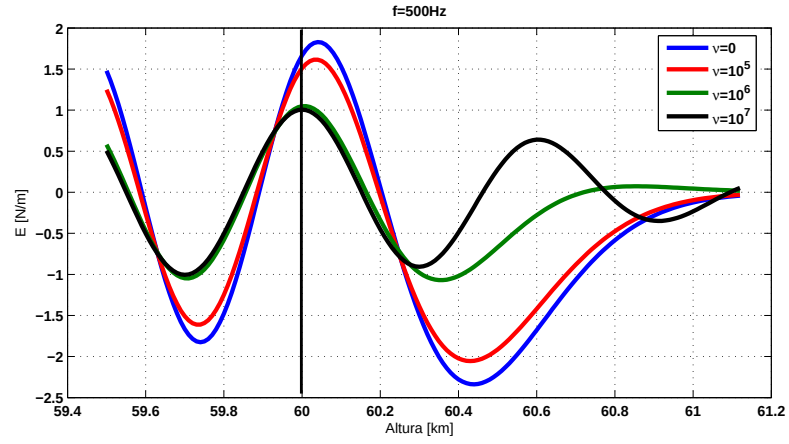


Figura 2.3: *Campo Elétrico para uma ionosfera com perfil linear $h_0=60km$, $f=500kHz$ e com várias frequência de colisão ν [Hz]*

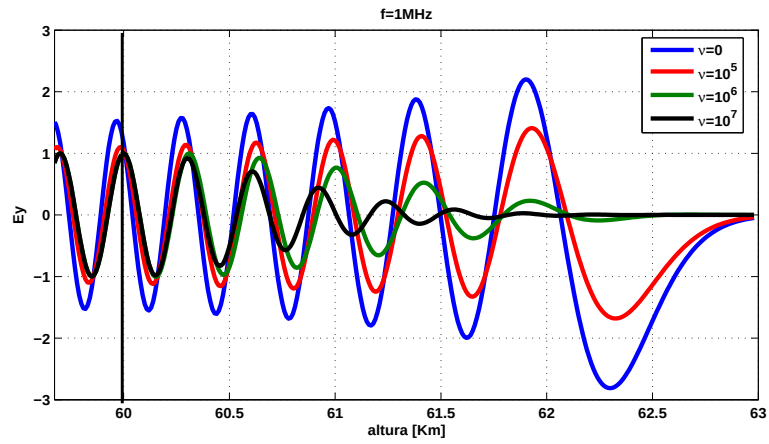


Figura 2.4: *Campo Elétrico para uma ionosfera com perfil linear $h_0=60km$, $f=1MHz$ e com várias frequência de colisão ν [Hz]*

As figuras 2.5 até 2.6 mostram gráficos de intensidade de campo para várias situações ilustradas no próprio gráficos.

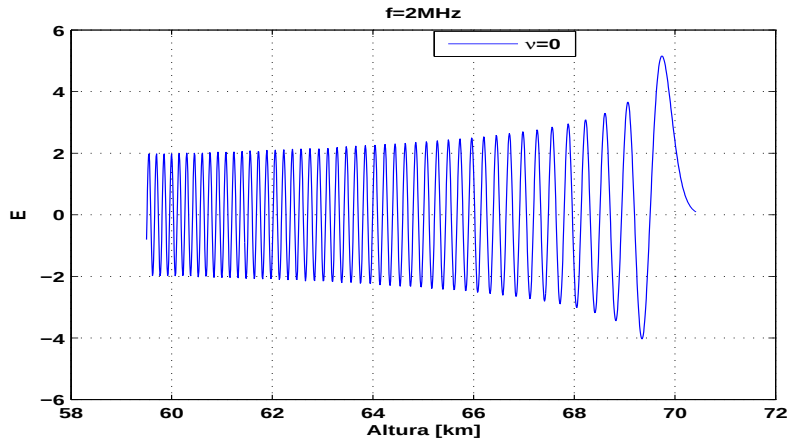


Figura 2.5: *Campo Elétrico para uma ionosfera com perfil linear, $h_0=60\text{km}$, $f=2\text{MHz}$ e com $Z=0$, $\nu = 0$.*

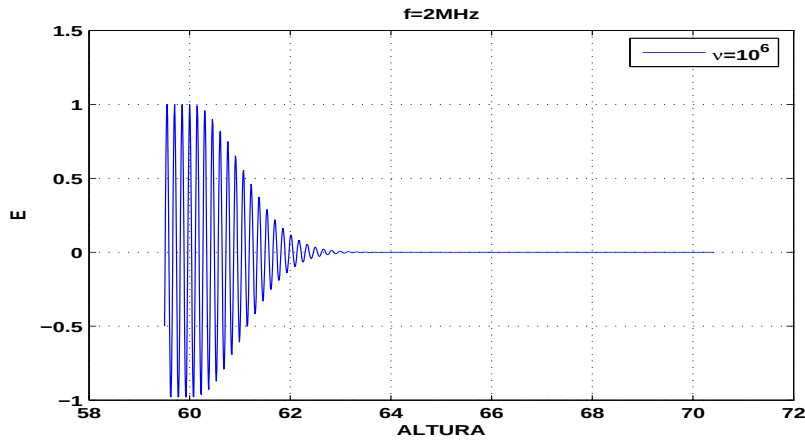


Figura 2.6: *Campo Elétrico para uma ionosfera com perfil linear $h_0=60\text{km}$, $f=2\text{MHz}$ e com $Z \neq 0$, $\nu = 10^6\text{Hz}$.*

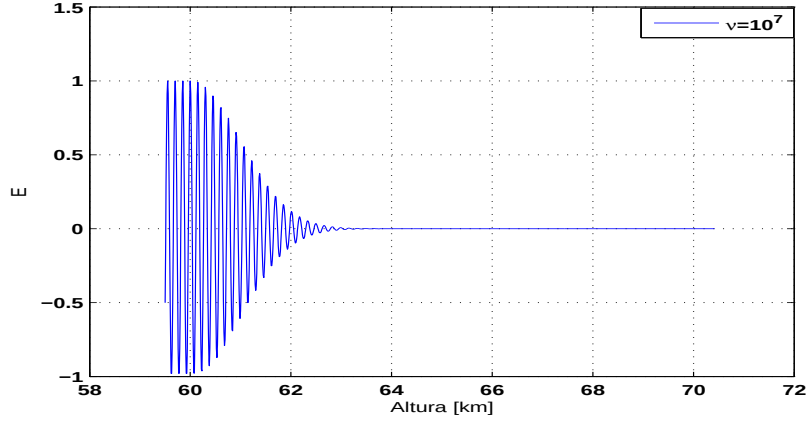


Figura 2.7: *Campo Elétrico para uma ionosfera com perfil linear $h_0=60\text{km}$, $f=2\text{MHz}$ e com $Z \neq 0$, $\nu = 10^7 \text{Hz}$.*

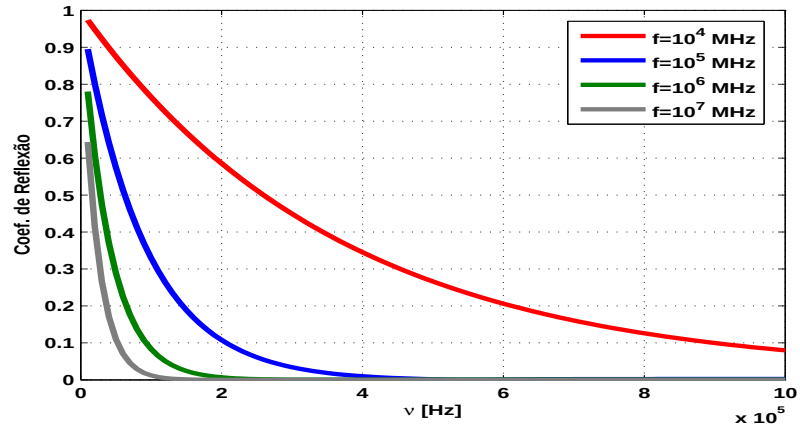


Figura 2.8: *Gráfico do Coeficiente de Reflexão em função da Frequência de Colisão variável $h_0=60\text{km}$, com $Z \neq 0$ para $\nu \neq 0$.*

Analisando as figuras anteriores podemos constatar que a atenuação de campo aumenta quando se considera a mesma frequência mas aumenta-se a frequência de colisões, como pode ser visto pelas figuras 2.3, 2.4, 2.5, 2.7 e 2.6. Comparando a figura 2.7 quando $\nu = 10^6 \text{Hz}$ e $f=2\text{MHz}$ com a figura

2.6, quando $\nu = 10^7$ e $f=2\text{MHz}$, observa-se a rápida atenuação do campo com a altura.

A figura 2.3 foi considerado $f=500\text{kHz}$, e a figura 2.4 foi para o caso de $f=1\text{MHz}$, observa-se que a onda atinge pontos mais altos na ionosfera, mas a característica de atenuação continua preponderante quando ν aumenta.

A figura 2.8, mostra o coeficiente de reflexão obtido pela fórmula 2.29, para vários valores de f em função de ν . O coeficiente de reflexão diminui quando a frequência de colisões aumenta, considerando a mesma frequência da onda.

2.3.1 Equações Diferenciais para o Perfil Parabólico

O modelo parabólico é dado pela fórmula da densidade N

$$N = N_0 + \beta(z - z_m)^2 \quad (2.33)$$

Onde N_0 é a densidade máxima e z_m é o ponto onde ela ocorre, conforme figura 2.9.

para $z < z_1$, $N=0$.

$$N_0 + \beta(z_1 - z_m)^2 = 0 \quad (2.34)$$

$$\beta = -\frac{N_0}{(z_1 - z_m)^2} \quad (2.35)$$

Devida a simetria em $z=z_2$, $N=0$ temos

$$z_2 = 2z_m - z_1 \quad (2.36)$$

finalmente para $z \geq z_1$,

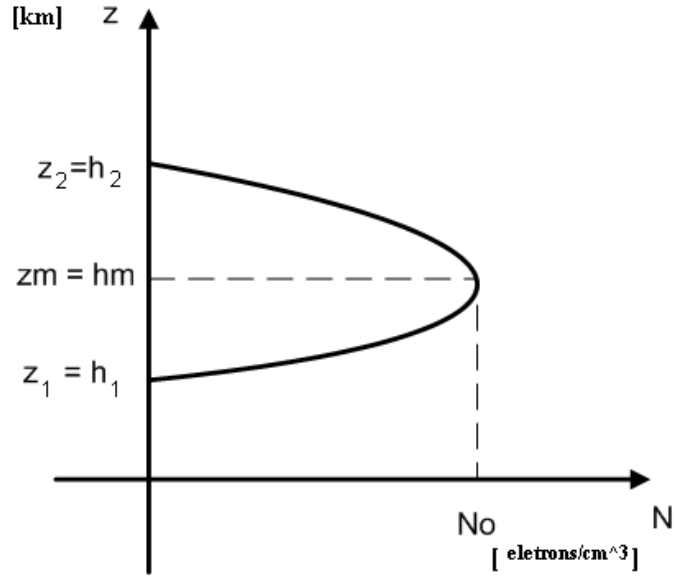


Figura 2.9: *Modelo Parabólico*

$$N = N_0 - \frac{N_0}{(z_1 - z_m)^2} (z - z_m)^2 \quad (2.37)$$

podemos fazer a mudança de variável

$$r = \gamma(z - z_m) \quad (2.38)$$

$$N = N_0 + \beta \frac{r^2}{\gamma^2} \quad (2.39)$$

a solução da equação 2.11, ficaria

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_o^2 \left[C^2 - \frac{X}{U} \right] E_y = 0 \quad (2.40)$$

$$X = \frac{8,06 \cdot 10^7}{f^2} N = \alpha_1 N \quad (2.41)$$

$$N = N_0 + \beta (z - z_m)^2 \quad (2.42)$$

$$X = \alpha_1 [N_0 + \beta(z - z_m)^2] \quad (2.43)$$

$$X = \alpha_1 N_0 + \alpha_1 \beta (z - z_m)^2 \quad (2.44)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 \left[C^2 - \frac{\alpha_1 N_0}{U} - \alpha_1 \beta \frac{(z - z_m)^2}{U} \right] E_y = 0 \quad (2.45)$$

Fazendo a mudança de $r = \gamma (z - z_m)$ temos:

$$\frac{dE_y}{dz} = \frac{dE_y}{dr} \cdot \frac{dr}{dz} \quad (2.46)$$

$$\frac{dr}{dz} = \gamma \quad (2.47)$$

$$\frac{dE_y}{dz} = \gamma \frac{dE_y}{dr} \quad (2.48)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} = \gamma \frac{d}{dz} \left(\frac{dE_y}{dr} \right) = \gamma \frac{d}{dr} \left(\frac{dE_y}{dz} \right) = \gamma \frac{d}{dr} \left(\gamma \frac{dE_y}{dr} \right) = \gamma^2 \frac{d^2 E_y}{dr^2} \quad (2.49)$$

A equação 2.49 então fica :

$$\gamma^2 \frac{d^2 E_y}{dr^2} + k_0^2 \left[C^2 - \frac{\alpha_1 N_0}{U} - \frac{\alpha_1 \beta (z - z_m)^2}{U} \right] E_y = 0 \quad (2.50)$$

Esta é uma equação do tipo

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + (ar^2 + br + c) E_y = 0 \quad (2.51)$$

É chamada de parabólica cilíndrica [?], a equação se apresenta de duas formas padrões:

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} - \left(\frac{1}{4} x^2 + a \right) E_y = 0 \quad (2.52)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + \left(\frac{1}{4} x^2 - a \right) E_y = 0 \quad (2.53)$$

Deseja-se trabalhar com a equação 2.52 , por isso retomando a equação 2.50.

$$\gamma^2 \frac{d^2 E_y}{dr^2} + k_0^2 \left[C^2 - \frac{\alpha_1 N_0}{U} - \frac{\alpha_1 \beta r^2}{U \gamma^2} \right] E_y = 0 \quad (2.54)$$

desenvolvendo:

$$\frac{d^2 E_y}{dr^2} + k_0^2 \left[-\frac{\alpha_1 \beta r^2}{\gamma^4 U} - \frac{-C^2 + \alpha_1 \frac{N_0}{U}}{\gamma^2} \right] E_y = 0 \quad (2.55)$$

fazendo:

$$k_0^2 \left(\frac{-C^2 + \alpha_1 \frac{N_0}{U}}{\gamma^2} \right) = a \quad (2.56)$$

$$-k_0^2 \frac{\alpha_1 \beta}{\gamma^4 U} = \frac{1}{4} \quad (2.57)$$

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{-4k_0^2 \alpha_1 \beta}{U}} \quad (2.58)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dr^2} + \left(\frac{1}{4} r^2 - a \right) E_y = 0 \quad (2.59)$$

onde

$$\gamma = \sqrt[4]{-4k_0^2 \alpha_1 \frac{N_0}{(z_1 - z_m)^2 U}} \quad (2.60)$$

$$a = \left(\frac{\frac{\alpha_1 N_0}{U} - C^2}{\gamma^2} \right) k_0^2 \quad (2.61)$$

A soluções da equação diferencial 2.59 apresenta

$$y^1(r) = 1 + a \frac{r^2}{2!} + \left(a^2 - \frac{1}{2}\right) \frac{r^4}{4!} + \left(a^3 - \frac{7}{2}a\right) \frac{r^6}{6!} + \left(a^4 - 11a^2 + \frac{15}{4}\right) \frac{r^8}{8!} + \dots \quad (2.62)$$

$$y^2(r) = r + a \frac{r^3}{3!} + \left(a^2 - \frac{3}{2}\right) \frac{r^5}{5!} + \left(a^3 - \frac{13}{2}a\right) \frac{r^7}{7!} + \left(a^4 - 17a^2 + \frac{63}{4}\right) \frac{r^9}{9!} + \dots \quad (2.63)$$

Para frequências abaixo da frequência de reflexão do ponto z_m .

a) $z < h_1$

$$E_y = e^{-ik_0 Cz} + R e^{ik_0 Cz} \quad (2.64)$$

$$H_x = -C e^{-ik_0 Cz} + C R e^{ik_0 Cz} \quad (2.65)$$

b) $z > h_1$

onde $y(r)=y^1(r)$ ou $y(r)=y^2(r)$

$$E_y(r) = K y(r) \quad (2.66)$$

$$H_x = \frac{1}{ik_0} \frac{dE_y}{dz} = \frac{\gamma}{ik_0} y'(r) \quad (2.67)$$

Na interface quando $z = z_1$, $r_1 = \gamma(z_1 - z_m)$

$$K y(r_1) = e^{-ik_0 C z_1} + R e^{ik_0 C z_1} \quad (2.68)$$

$$- C e^{-ik_0 C z_1} + C R e^{ik_0 C z_1} = \frac{\gamma}{i - k_0} K y'(r_1) \quad (2.69)$$

A solução do sistema acima será

$$R = \frac{C k_0 y(r_1) - i \gamma y'(r_1)}{C k_0 y(r_1) - i \gamma y'(r_1)} e^{-2i C k_0 z_1} \quad (2.70)$$

$$K = \frac{e^{-ik_0 C z_1} + R e^{ik_0 C z_1}}{y(r_1)} \quad (2.71)$$

2.4 Perfil Bilinear

2.4.1 Equações Diferenciais para o Perfil Bilinear

O modelo linear para a densidade eletrônica dá uma razoável aproximação do que acontece na ionosfera, mas somente para frequência abaixo da frequência de penetração. Quando a frequência da onda está perto ou superior a f_0 (frequência máxima de penetração), há necessidade de tomar o modelo bilinear para entendermos melhor os fenômenos da propagação ionosférica.

Para o perfil bilinear as soluções dos campos serão ainda funções de A_i e B_i , o módulo do coeficiente de reflexão em um modelo bilinear sempre será menor que a unidade, isto se explica pelo fato de termos sempre uma onda transmitida para parte superior da ionosfera, que crescerá com f . Este modelo foi inicialmente estudado por Hartree[?], sem apresentar resultados numéricos, o que será feito aqui.

Considerando um modelo cuja densidade eletrônica seja dada pelas fórmulas 1.7, 1.8, 1.9 e 1.10 chega-se nas equações diferenciais para os campos na ionosfera que poderão ser transformadas nas equações de Stokes[?].

Pode-se dividir o estudo em quatro regiões:

1ª região $z < h_0$; $n^2=1$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 C^2 E_y = 0 \quad (2.72)$$

2ª região $h_0 < z < h_m$; $n^2 = 1 - \frac{\alpha}{U} (z - h_0)$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 \left[C^2 - \frac{\alpha}{U} (z - h_0) \right] E_y = 0 \quad (2.73)$$

fazendo

$$r = \left(\frac{k_0^2 \alpha}{1 - iZ} \right)^{1/3} \left[z - h_0 - U \frac{C^2}{\alpha} \right] \quad (2.74)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dr^2} = r E_y \quad (2.75)$$

3ª região $h_m < z < 2h_m - h_0$; $n^2 = 1 + \frac{\alpha}{U} (z - 2h_m + h_0)$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 \left[C^2 + \frac{\alpha}{U} (z - 2h_m + h_0) \right] E_y = 0 \quad (2.76)$$

fazendo

$$r = \left(\frac{k_0^2 \alpha}{1 - iZ} \right)^{1/3} \left[-z + 2h_m - h_0 - U \frac{C^2}{\alpha} \right] \quad (2.77)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} = r E_y \quad (2.78)$$

4ª região $z > 2h_m - h_0$; $n^2 = 1$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 C^2 E_y = 0 \quad (2.79)$$

2.4.2 Cálculo dos Campos para o Perfil Bilinear

O cálculo dos campos no perfil bilinear é um pouco mais complicado que no caso do campo linear. A solução deixa de ser simplesmente a função A_i para ser a combinação A_i e B_i . Uma onda incidente de baixo para cima atingirá um ponto $z'_0 < h_m$ onde tornará evanescente, se $f < f_0$, até o ponto z'_0 os campos terão novamente propagação livre pois se estava numa região de $X < 1$.

Na 1ª região dita no sentido ascendente de amplitude unitária é:

$$E_y = e^{-ik_0 Cz} + R e^{ik_0 Cz} \quad (2.80)$$

$$H_x = -C e^{-ik_0 Cz} + C R e^{ik_0 Cz} \quad (2.81)$$

R é o coeficiente de reflexão da ionosfera. O primeiro termo ($e^{-iK_0 Cz}$) é a onda ascendente, e o segundo ($e^{ik_0 Cz}$) onda descendente.

Para a 2ª região, tem-se como solução a equação 2.75

$$E_y = F A_i(r) + G B_i(r) \quad (2.82)$$

$$H_x = -i \left(\frac{\alpha}{k_0 U} \right)^{\frac{1}{3}} (A A'_i(r) + B B'_i(r)) \quad (2.83)$$

Quando o ponto de reflexão (z_0) estiver bem distante de h_m , a constante $G \cong 0$, e então neste caso pode-se considerar o modelo como sendo simplesmente linear.

Para a 3ª região, o gradiente do índice de refração aumenta, e r diminui quando z aumenta. A solução para os campos não poderá ser simplesmente A_i , pois se assim for ter-se-ia uma onda com energia aumentada. As soluções

nesta região podem ser escritas como:

$$E_y = AA_i(r) - BB_i(r) \quad (2.84)$$

$$H_x = i \left(\frac{\alpha}{k_0 U} \right)^{\frac{1}{3}} (AA'_i(r) - BB'_i(r)) \quad (2.85)$$

Na 4ª região os campos voltam a se propagar como no espaço livre, mas neste caso há somente uma onda ascendente, para o caso de se ter inicialmente na base da ionosfera uma onda de baixo para cima. Nesta região tem-se então como soluções:

$$E_y = de^{-ik_0 Cz} \quad (2.86)$$

$$H_x = -Ce^{-ik_0 Cz} \quad (2.87)$$

Na determinação das constantes A, B, R, F, G e d basta igualar os campos dos dois a dois nos pontos de descontinuidade do índice de refração $h_0, h_m - h_0, 2h_m - h_0$, chamando:

r_0 o valor de r onde $z=h_0$

r_3 o valor de r onde $z=h_m$

r_1 o valor de r onde $z=2h_m - h_0$

de 2.86 e 2.84 obtém-se:

$$de^{-ik_0 C(2h_m - h_0)} = AA_i(r_1) - BB_i(r_1) \quad (2.88)$$

$$- dCe^{-ik_0 C(2h_m - h_0)} = i \left(\frac{\alpha}{k_0 U} \right)^{\frac{1}{3}} (AA'_i(r_1) - BB'_i(r_1)) \quad (2.89)$$

de 2.84 e 2.82 obtém-se

$$AA_i(r_1) - BB_i(r_1) = FA_i(r_1) + GB_i(r_1) \quad (2.90)$$

$$- (AA'_i(r_1) - BB'_i(r_1)) = FA'_i(r_1) + GB'_i(r_1) \quad (2.91)$$

e finalmente 2.82 e 2.80

$$FA_i(r_0) + GB_i(r_0) = e^{-iK_0Ch_0} + Re^{iK_0Ch_0}$$

$$- i \left(\frac{\alpha}{k_0 U} \right)^{\frac{1}{3}} (FA'_i(r_0) + GB'_i(r_0)) \quad (2.92)$$

$$= -ce^{-ik_0ch_0} + Rce^{ik_0ch_0} \quad (2.93)$$

onde

$$r_0 = - \left(\frac{k_0^2 \alpha}{U} \right)^{\frac{1}{3}} C^2 \frac{U}{\alpha} \quad (2.94)$$

$$r_1 = - \left(\frac{k_0^2 \alpha}{U} \right)^{\frac{1}{3}} C^2 \frac{U}{\alpha} = r_0 \quad (2.95)$$

$$r_2 = - \left(\frac{k_0^2 \alpha}{U} \right)^{\frac{1}{3}} \left(h_m - h_0 - U \frac{C^2}{\alpha} \right) \quad (2.96)$$

escrevendo sob a forma matricial

$$\begin{bmatrix} A_i(r_1) & B_i(r_1) & 0 & 0 & 0 & -e^{-ik_0c(2h_m-h_0)} \\ iaA'_i(r_1) & iaB'_i(r_1) & 0 & 0 & 0 & ce^{-ik_0c(2h_m-h_0)} \\ A_i(r_3) & B_i(r_3) & -A_i(r_3) & -B_i(r_3) & 0 & 0 \\ A'_i(r_3) & B'_i(r_3) & A'_i(r_3) & B'_i(r_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i(r_1) & B_i(r_1) & -e^{ik_0ch_0} & 0 \\ 0 & 0 & iaA'_i(r_1) & iaB'_i(r_1) & ce^{ik_0ch_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ F \\ G \\ R \\ d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-ik_0ch_0} \\ ce^{-ik_0ch_0} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

$$a = \left(\frac{\alpha}{k_0 U} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.98)$$

Um bom entendimento do que está acontecendo na ionosfera, poderá ser analisado determinando R. Para isto foi traçado na figura 2.10, valores de |R| em função de f para dois modelos bilineares.

Para a figura 2.10, foi considerado o caso de $f_0=9,835242$ MHz, $\alpha_1= 5000$. Nota-se que para $f=f_0$, $|R|=0,5$, e decai rapidamente com o aumento de f. Para uma frequência da onda com 10 kHz abaixo de f_0 , praticamente toda energia é refletida. Ao passo que para $f>f_0$ 10 kHz praticamente quase toda a energia é transmitida, ou melhor, fura a ionosfera. O mesmo acontece para o gráfico da figura 2.10, somente que agora o gradiente da curva |R| em função de f torna-se menor, ou melhor, a curva é mais suave, como exemplo:

f=9,835242	MHz	$ R =0.5$	$ d =0.5$
f=9,800000	MHz	$ R \cong 1.0$	$ d \cong 4.5*10^{-11}$
f=9,900000	MHz	$ R \cong 1.2*10^{-11}$	$ d \cong 1.0$

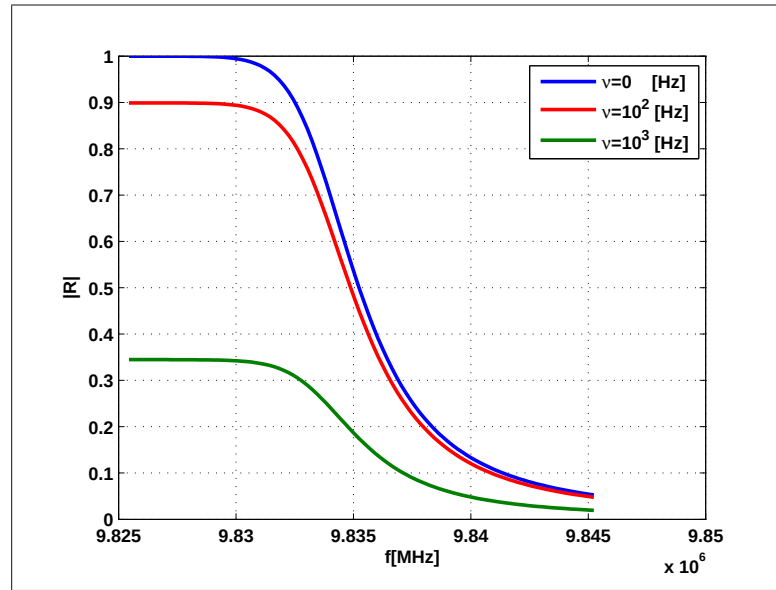


Figura 2.10: *Coeficiente de reflexão para o modelo bilinear*

Para figura 2.10 do modelo bilinear foram usados $h_m=300$ km, $h_0=60$ km, $f_0=9,8352142$ MHz, $\alpha_1=5000$, $\theta_i = 0^\circ$ e para frequência de colisão (ν) para os seguintes valores $\nu= 0, 10^2$ e 10^3 [Hz] .

2.5 Conclusão

Neste capítulo foram calculados a intensidade de campo considerando-se uma ionosfera ionizada isotrópica sem o campo magnético e modelo linear, bilinear e parabólico onde foram feitos cálculos de intensidade de campo com frequência de colisão constante. Observa-se que o sinal é altamente atenuado quando a frequência de colisão é superior a 10^6 Hz para $f=1$ MHz, como mostram as figuras 2.4, 2.7 e 2.8.

No modelo bilinear observa-se uma rápida diminuição do coeficiente de reflexão para frequência superior a frequência f_0 (frequência máxima de reflexão).

Capítulo 3

PROPAGAÇÃO LONGITUDINAL E TRANSVERSAL USANDO MODELOS LINEAR E BILINEAR

3.1 Introdução

O campo magnético terrestre na ionosfera é de grande importância na propagação das ondas, será feito neste capítulo um estudo da ionosfera com o campo magnético terrestre($\vec{B}_0$). Quando ($\vec{B}_0 \neq 0$) a ionosfera torna-se um meio anisotrópico.

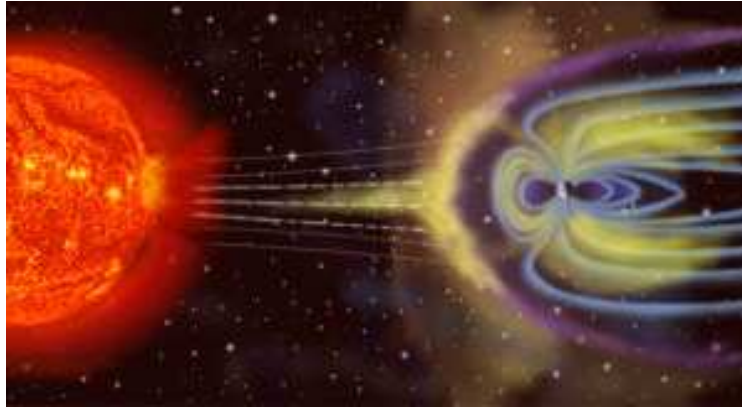


Figura 3.1: *Campo Magnético*

Tem-se então dois modos de propagação, obedecendo cada um a índices de refração diferente. Estes dois modos, que são chamados de ordinário (0) e extraordinário (X) possuem uma fraca dependência de propagação para quase toda ionosfera, com exceção de uma pequena região situada em torno do ponto de reflexão de uma onda ordinária que é chamada de região de acoplamento. O estudo desta região de acoplamento será discutido nos capítulos seguintes, e como será visto, ela somente existirá quando o campo magnético terrestre formar um ângulo com a direção de propagação diferente de 0° ou 90° .

A propagação longitudinal e a transversal para os modelos linear e bilinear, não possuem uma região de acoplamento, ou melhor elas se propagam independentemente obedecendo a características completamente próprias. Pode-se então estudar um modo sem se preocupar com o outro. Estudaremos de início a propagação longitudinal nos modelos linear e bilinear. Para estes casos, as equações dos campos serão de tipo Stokes[?], cujas soluções já são bastantes conhecidas.

Para a propagação transversal obteremos para o modo ordinário ainda a equação de Stokes[?]. Mas para o modo extraordinário as equações dife-

renciais para os campos serão muito complicadas, e por este motivo iremos aproximar-se o índice de refração por uma função de modo que poderão ser obtida equações diferenciais que apresentem soluções conhecidas.

3.2 Propagação Longitudinal num Modelo Li-near

Analisa-se aqui o caso $\Theta_i=0^\circ$, também chamada de propagação longitudinal. Para este caso $Y_L=Y$; $Y_T=0$ e as fórmulas de Appleton-Hartree[?] resultam em:

$$\rho_{1,2} = \mp i \quad n_{1,2}^2 = 1 - \frac{X}{U \pm Y} \quad (3.1)$$

Aqui será adotada uma simbologia entre as duas ondas ordinária e extraordinária, e por questões práticas é chamada de ordinária a onda do sinal (+) e extraordinária a onda do sinal (-).

Para o caso de propagação longitudinal em incidência vertical $S=0$, $C=1$, $l=0$, $p=0$ e $n=1$. A matriz susceptibilidade então ficará:

$$[M] = \begin{bmatrix} -ib_1 & -ib_2 & 0 \\ ib_2 & -ib_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Onde:

$$b_1 = -\frac{XU}{U^2 - Y^2} \quad (3.3)$$

$$b_2 = -\frac{XY}{U^2 - Y^2} \quad (3.4)$$

$$b_3 = -\frac{X}{U} \quad (3.5)$$

As equações de Maxwell[?] para este caso ficarão:

$$E'_x = -ik_0 H_y \quad (3.6)$$

$$H'_x = k_0 \left(\frac{XY}{U^2 - Y^2} \right) E_x + ik_0 \left(1 - \frac{XU}{U^2 - Y^2} \right) E_y \quad (3.7)$$

$$E'_y = ik_0 H_x \quad (3.8)$$

$$H'_y = -ik_0 \left(1 - \frac{XU}{U^2 - Y^2} \right) E_x + k_0 \left(\frac{XY}{U^2 - Y^2} \right) E_y \quad (3.9)$$

ou ainda

$$(E_x + iE_y)'' = -k_0 (H_x + iH_y) \quad (3.10)$$

$$(H_x + iH_y)' = k_0 \left(1 - \frac{XU}{U^2 - Y^2} + \frac{XY}{U^2 - Y^2} \right) (E_x + iE_y) \quad (3.11)$$

$$(E_x - iE_y)' = k_0 (H_x - iH_y) \quad (3.12)$$

$$(H_x - iH_y)' = k_0 \left(1 - \frac{XU}{U^2 - Y^2} - \frac{XY}{U^2 - Y^2} \right) (E_x - iE_y) \quad (3.13)$$

Substituindo a equação 3.11 em 3.10 e 3.13 em 3.12,

$$(E_x + iE_y)'' + k_0^2 n_1^2 (E_x + iE_y) = 0 \quad (3.14)$$

$$(E_x - iE_y)'' + k_0^2 n_2^2 (E_x - iE_y) = 0 \quad (3.15)$$

Se a onda incidente na ionosfera for tal que $E_x - iE_y$ e $H_x + iH_y$ são iguais a zero, ela será circularmente polarizada a direita ao longo de toda a ionosfera.

$$E_x - iE_y = 0 \Rightarrow \frac{E_y}{E_x} = -i \quad (3.16)$$

Por outro lado se a onda incidente for tal que $E_x + iE_y$ e H_x e iH_y são zeros, ela será circularmente polarizada a esquerda ao longo de toda a ionosfera.

$$E_{x_1} + iE_{y_1} = 0 \Rightarrow \frac{E_{y_1}}{E_{x_1}} = \rho_1 = -i \frac{E_{y_2}}{E_{x_2}} = \rho_2 = i \quad (3.17)$$

Pode-se escrever que:

$$E_y = E_{y_1} + E_{y_2} \quad (3.18)$$

$$E_x = E_{x_1} + E_{x_2} \quad (3.19)$$

Os sub-índices "1" e "2" se referem as ondas ordinárias e extraordinárias respectivamente. Pela fórmula [3.1](#)

$$\frac{E_{y_1}}{E_{x_1}} = \rho_1 = -i \quad (3.20)$$

$$\frac{E_{y_2}}{E_{x_2}} = \rho_2 = i \quad (3.21)$$

Pode-se chegar então a:

$$E_x + iE_y = 2iE_{y_1} \quad (3.22)$$

$$E_x - iE_y = 2iE_{y_2} \quad (3.23)$$

Se por acaso a onda é polarizada a direita $E_{y_2} = 0$ e $E_y = E_{y_1}$. Se for polarizada a esquerda $E_{y_1} = 0$ e $E_y = E_{y_2}$.

Substituindo [3.22](#) e [3.23](#) nas equações [3.14](#) e [3.15](#), chega-se à equação

para o campo E_y da onda ordinária dada por:

$$\frac{d^2 E_{y1}}{dz^2} + \left(1 - \frac{X}{U+Y}\right) k_0^2 E_{y1} = 0 \quad (3.24)$$

e para (X) a equação para o campo E_y fica:

$$\frac{d^2 E_{y2}}{dz^2} + \left(1 - \frac{X}{U-Y}\right) k_0^2 E_{y2} = 0 \quad (3.25)$$

tomando o modelo linear

$$X=0 \quad z < h_0$$

$$X=\alpha(z - h_0) \quad z \geq h_0$$

fazendo

$$r_{1,2} = \left(\frac{k_0^2 \alpha}{U \pm Y} \right)^{\frac{1}{3}} \left(z - h_0 - \frac{(U \pm Y)}{\alpha} \right) \quad (3.26)$$

Pode-se então chegar às equações:

$$\frac{d^2 E_{y1}}{dz^2} + k_0^2 E_y = 0 \quad z < h_0 \quad (3.27)$$

$$\frac{d^2 E_{y1}}{dr_1} = r_1 E_{y1} \quad z \geq h_0 \quad (3.28)$$

$$\frac{d^2 E_{y2}}{dr_2} = r_2 E_{y2} \quad z \geq h_0 \quad (3.29)$$

Tem-se então pontos de reflexão

$$(0) \Rightarrow z_{01} = h_0 + \frac{(U+Y)}{\alpha} \quad (3.30)$$

$$(X) \Rightarrow z_{02} = h_0 + \frac{(U-Y)}{\alpha} \quad (3.31)$$

Tem-se então para o caso da propagação longitudinal, duas ondas que se propagam independentemente, possuindo dois índices de refração diferentes, ou melhor não existe união ou nenhum acoplamento entre as ondas (O) e (X).

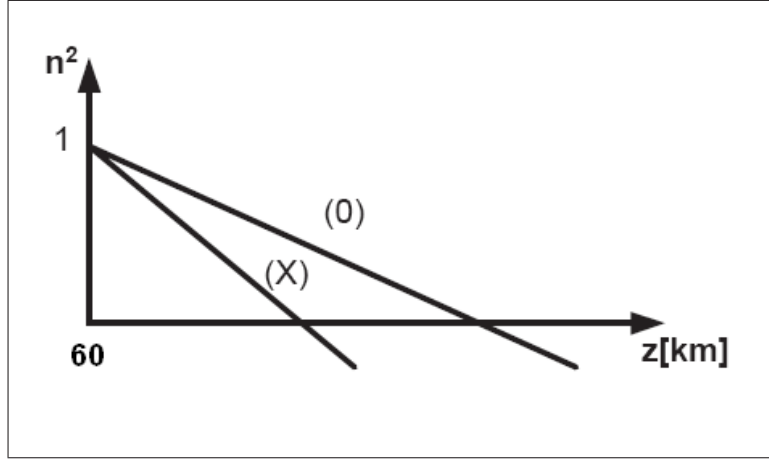


Figura 3.2: Ondas ordinária(O) e extraordinária(X), modelo linear
 n^2 para $Z = 0, Y < 1, h_0 = 0$ e $\nu=0$

Para uma onda incidente na ionosfera e polarizada podemos obter do conjunto 3.27 a 3.29 às soluções para o campo E_{y_1} .

$$E_{y_1} = e^{-ik_0 cz} + R_1 e^{ik_0 z} \quad z < h_0 \quad (3.32)$$

$$E_{y_1} = K_1 A_i(r_1) \quad z > h_0 \quad (3.33)$$

Igualando os campos e suas derivadas em $z=h_0$, chega-se a:

$$R_1 = \frac{A_i(r_1^0) - iB_1 A_i(r_1^0)}{A_i(r_1^0) + iB_1 A_i(r_1^0)} \cdot e^{-2ik_0 h_0} \quad (3.34)$$

onde:

$$B_1 = \left(\frac{\alpha}{k_0 (U + Y)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.35)$$

$$r_1^0 = \left(\frac{k_0 (U + Y)}{\alpha} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.36)$$

Para o caso da onda incidente ser polarizada à esquerda obtém-se uma equação semelhante para o modo extraordinário.

Generalizando, pode-se então dizer que os coeficientes de reflexão das ondas ordinárias ou extraordinárias são dadas por:

$$R_{1,2} = \frac{A_i(r_{1,2}^0) - iB_{1,2}A_i(r_{1,2}^0)}{A_i(r_{1,2}^0) + iB_{1,2}A_i(r_{1,2}^0)} \quad (3.37)$$

$$K_{1,2} = \frac{e^{-iK_0h_0} + R_{1,2}e^{iK_0h_0}}{A_i(r_{1,2}^0)} \quad (3.38)$$

onde

$$r_{1,2}^0 = \left(\frac{k_0 (U \pm Y)}{\alpha} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.39)$$

$$B_{1,2} = \left(\frac{\alpha}{k_0 (U \pm Y)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.40)$$

O índice superior "o" indica que o valor de $r_{1,2}$ é calculado em $z=h_0$.

Quando $Z=0$, $B_{1,2}$ e $r_{1,2}$ são reais e $|R|=1$ dão os gráficos das ondas (0) e (X) para uma ionosfera com início em 60 km, $\alpha_1=5000$, $f_H=800$ kHz, $f=1$ MHz, $\theta=0^\circ$, $\theta_i=0$. Nota-se o comportamento oscilatório dos campos até ao ponto de reflexão.

As figuras 3.3 até 3.12 apresentam gráficos da intensidade de campo para frequência de 1 MHz, $f_H=0,8$ MHz e ν diversos para as ondas ordinária e extraordinária. A onda ordinária reflete em uma altura superior ao da onda extraordinária. Quando a frequência de colisões aumenta, a atenuação aumenta como pode ser observado nas figuras 3.9, 3.10, 3.11 e 3.12. O coeficiente de reflexão diminui quando a frequência de colisões aumenta, como mostra a figura 2.11.

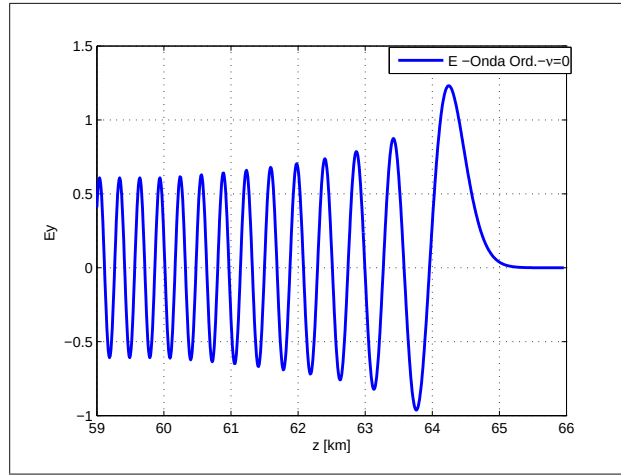


Figura 3.3: *Campo de E_y para onda ordinária, modelo linear*

$f=1\text{MHz}$, $f_H=800\text{ kHz}$, $\theta_I = 0^\circ$, $Z=0$, $h_0= 60\text{ km}$ e $\nu = 0$.

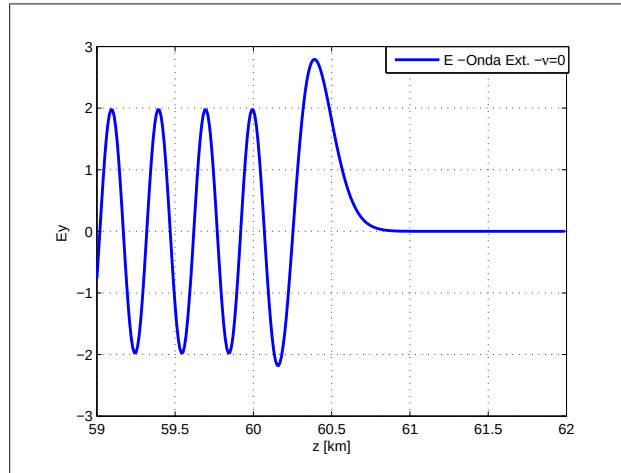


Figura 3.4: *Campo de E_y para onda extraordinária, modelo linear*

$f=1\text{MHz}$, $f_H=800\text{ kHz}$, $\theta_I = 0^\circ$, $Z=0$, $h_0= 60\text{ km}$ e $\nu = 0$.

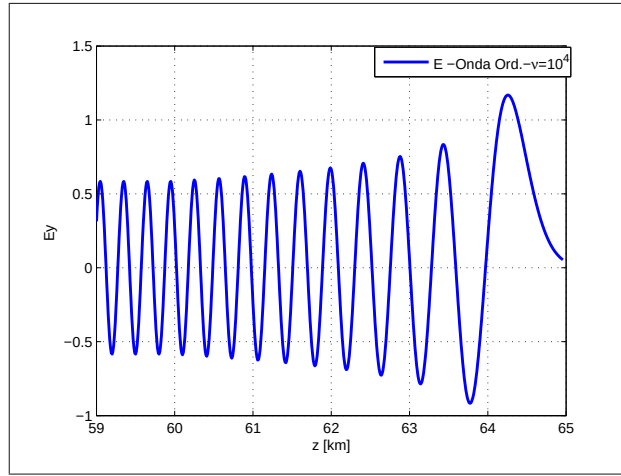


Figura 3.5: *Campo de E_y para onda ordinária, modelo linear*
 $f=1\text{MHz}$, $f_H=800\text{ kHz}$, $\theta_I = 0^\circ$, $Z \neq 0$, $h_0 = 60\text{ km}$ e $\nu = 10^4\text{ Hz}$.

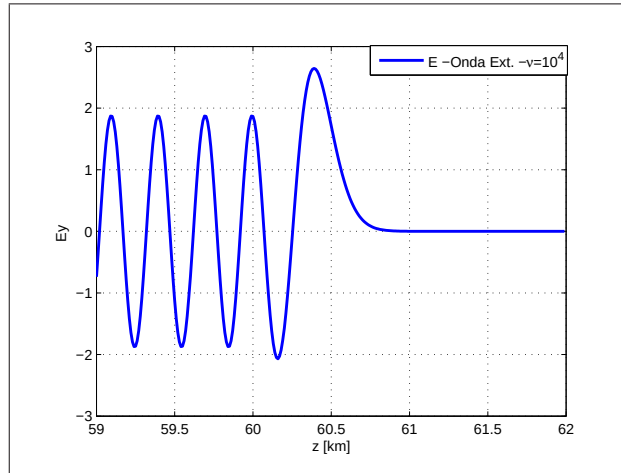


Figura 3.6: *Campo de E_y para onda extraordinária, modelo linear*
 $f=1\text{MHz}$, $f_H=800\text{ kHz}$, $\theta_I = 0^\circ$, $Z \neq 0$, $h_0 = 60\text{ km}$ e $\nu = 10^4\text{ Hz}$.

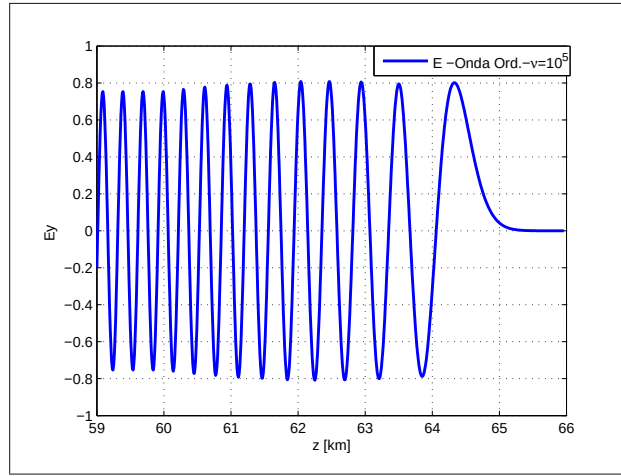


Figura 3.7: *Campo de E_y para onda ordinária, modelo linear*

$f=1\text{MHz}$, $f_H=800\text{ kHz}$, $\theta_I = 0^\circ$, $Z \neq 0$, $h_0= 60\text{ km}$ e $\nu = 10^5\text{ Hz}$.

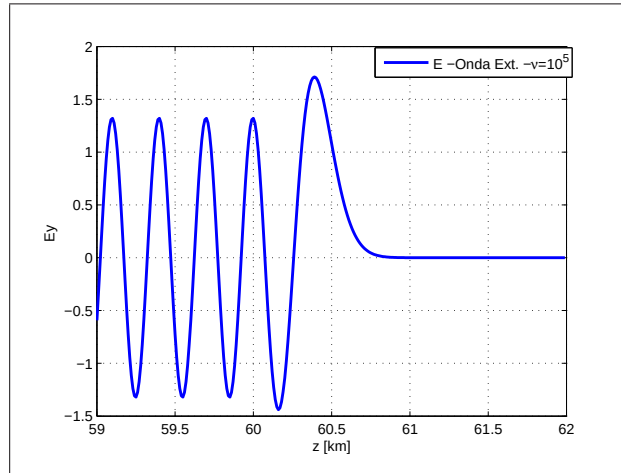


Figura 3.8: *Campo de E_y para onda extraordinária, modelo linear*

$f=1\text{MHz}$, $f_H=800\text{ kHz}$, $\theta_I = 0^\circ$, $Z \neq 0$, $h_0= 60\text{ km}$ e $\nu = 10^5\text{ Hz}$.

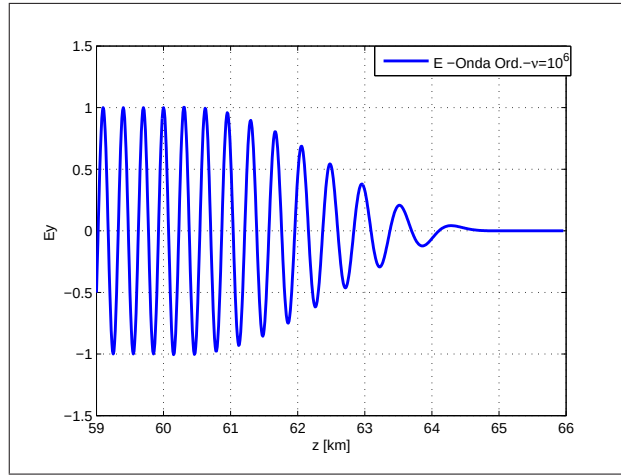


Figura 3.9: *Campo de E_y para onda ordinária, modelo linear*
 $f=1\text{MHz}$, $f_H=800\text{ kHz}$, $\theta_I = 0^\circ$, $Z \neq 0$, $h_0 = 60\text{ km}$ e $\nu = 10^6\text{ Hz}$.

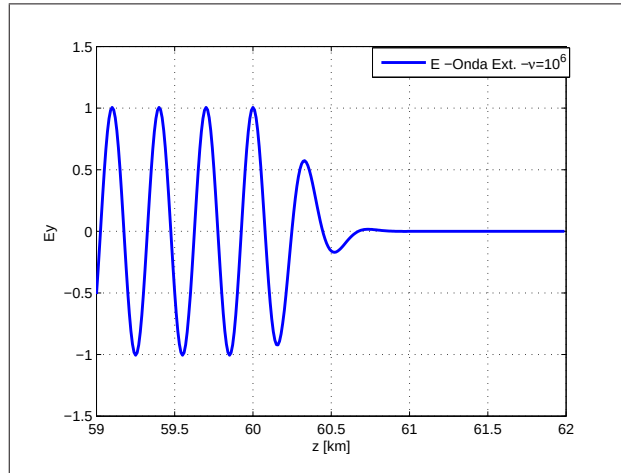


Figura 3.10: *Campo de E_y para onda extraordinária, modelo linear*
 $f=1\text{MHz}$, $f_H=800\text{ kHz}$, $\theta_I = 0^\circ$, $Z \neq 0$, $h_0 = 60\text{ km}$ e $\nu = 10^6\text{ Hz}$.

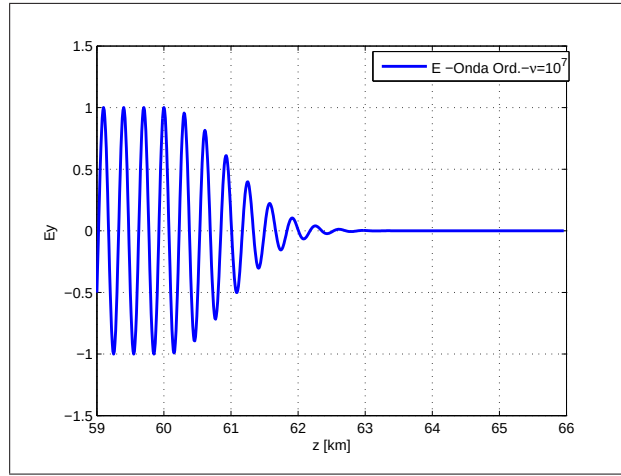


Figura 3.11: *Campo de E_y para onda ordinária, modelo linear*

$f=1\text{MHz}$, $f_H=800\text{ kHz}$, $\theta_I = 0^\circ$, $Z \neq 0$, $h_0= 60\text{ km}$ e $\nu = 10^7\text{ Hz}$.

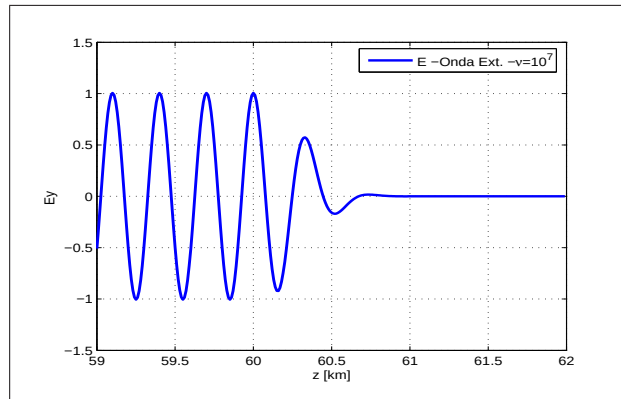


Figura 3.12: *Campo de E_y para onda extraordinária, modelo linear*

$f=1\text{MHz}$, $f_H=800\text{ kHz}$, $\theta_I = 0^\circ$, $Z \neq 0$, $h_0= 60\text{ km}$ e $\nu = 10^7\text{ Hz}$.

A figura 4.13 nos mostra o coeficiente de reflexão usando a fórmula 3.37 com densidade linear longitudinal ordinária, em função de ν .

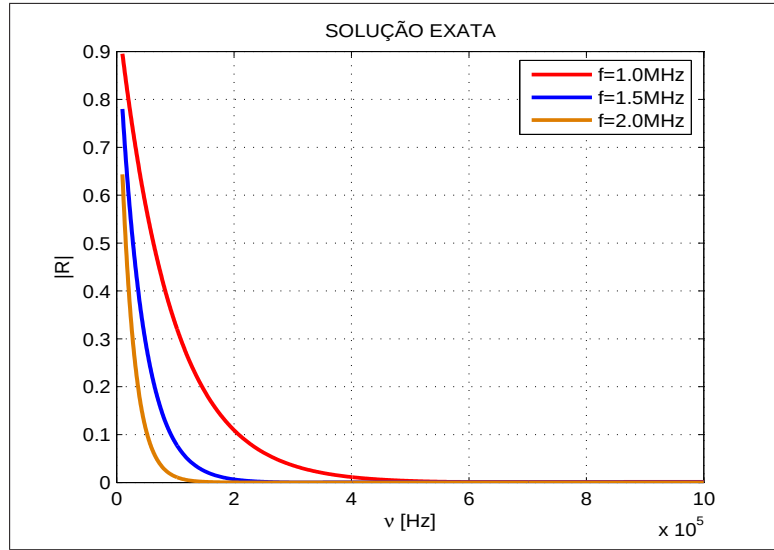


Figura 3.13: *Coeficiente de Reflexão usando a fórmula exata, para $f_H = 800\text{kHz}$, densid. linear, longitudinal ordinária, em função de ν .*

3.3 Propagação Longitudinal num Modelo Bilinear

Como no capítulo anterior, o modelo bilinear mais se aproxima da ionosfera real que o linear, pois a parte superior da ionosfera precisa ser considerada para frequências próximas ou superior a f_0 .

Com o perfil bilinear dado por 1.48, as equações do campo E_y para uma onda circularmente polarizada à direita para o onda (0) ficam:

Para $z \leq h_0$

$$\frac{d^2 E_{y1}}{dz^2} + k_0^2 E_{y1} = 0 \quad (3.41)$$

cuja a solução é

$$E_{y1} = e^{-ik_0 z} + R_1 e^{ik_0 z} \quad (3.42)$$

$$H_{x_1} = -e^{-ik_0 z} + R_1 e^{ik_0 z} \quad (3.43)$$

Para $h_0 < z \leq h_m$

$$\frac{d^2 E_{y_1}}{dr^2} = r_1 E_{y_1} \quad (3.44)$$

$$r_1 = \left(\frac{k_0^2 \alpha}{U + Y} \right)^{\frac{1}{3}} \left(z - h_0 - \frac{(U + Y)}{\alpha} \right) \quad (3.45)$$

cuja a solução é

$$E_{y_1} = F A_i(r) + G B_i(r) \quad (3.46)$$

$$H_{x_1} = i \left(\frac{\alpha}{k_0 (U + Y)} \right)^{\frac{1}{3}} (F A'_i(r) + G B'_i(r)) \quad (3.47)$$

Para $h_m < z \leq 2h_m - h_0$

$$\frac{d^2 E_{y_1}}{dr^2} = r E_{y_1} \quad (3.48)$$

$$r_1 = \left(\frac{k_0^2 \alpha}{U + Y} \right)^{\frac{1}{3}} \left(-z - 2h_m - h_0 - \frac{(U + Y)}{\alpha} \right) \quad (3.49)$$

solução

$$E_{y_1} = A A_i(r) + B B_i(r) \quad (3.50)$$

$$H_{x_1} = i \left(\frac{\alpha}{k_0 (U + Y)} \right)^{\frac{1}{3}} (A A'_i(r) - B B'_i(r)) \quad (3.51)$$

Para $z > 2h_m - h_0$

$$\frac{d^2 E_{y_1}}{dz^2} + k_0^2 E_{y_1} = 0 \quad (3.52)$$

solução

$$E_{y1} = de^{-ik_0z} \quad (3.53)$$

$$H_{x1} = -de^{-ik_0z} \quad (3.54)$$

Para o caso da onda (X) pode-se, chegar a equações semelhantes. Para determinar as constantes A,B,F,G,R e d, aplica-se as condições de contorno às soluções para os campos apresentados acima, chamado

- a o valor de r_1 onde $z=h_0$
- b o valor de r_1 onde $z=h_m$
- c o valor de r_1 onde $z=2h_m - h_0$

e usando os sub índices 1,2 para especificar a onda (0) e (X) respectivamente.

Podemos então escrever o sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} A_i(a_{1,2}) & B_i(a_{1,2}) & 0 & 0 & 0 & -e^{-ik_0C(2h_m-h_0)} \\ iaA_i(a_{1,2}) & iaB_i(a_{1,2}) & 0 & 0 & 0 & e^{-ik_0C(2h_m-h_0)} \\ A_i(c_{1,2}) & B_i(c_{1,2}) & -A_i(c_{1,2}) & -B_i(c_{1,2}) & 0 & 0 \\ A'_i(c_{1,2}) & B'_i(c_{1,2}) & A'_i(c_{1,2}) & B'_i(c_{1,2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i(a_{1,2}) & B_i(a_{1,2}) & -e^{-ik_0Ch_0} & 0 \\ 0 & 0 & iaA'_i(a_{1,2}) & iaB'_i(a_{1,2}) & e^{-ik_0Ch_0} & 0 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} A_{1,2} \\ B_{1,2} \\ F_{1,2} \\ G_{1,2} \\ R_{1,2} \\ d_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-ik_0Ch_0} \\ e^{-ik_0Ch_0} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

onde:

$$a_{1,2} = \left(\frac{k_0^2 \alpha}{(U \pm Y)} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.56)$$

$$b_{1,2} = - \left(\frac{k_0^2 \alpha}{(U \pm Y)} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.57)$$

$$c_{1,2} = \left(\frac{k_0^2 \alpha}{(U \pm Y)} \right)^{\frac{1}{3}} \left(h_m - h_0 - \frac{(U \pm Y)}{\alpha} \right) \quad (3.58)$$

$$p_{1,2} = \left(\frac{\alpha}{k_0 (U \pm Y)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.59)$$

Dependendo da frequência, pode-se ter ambas as ondas refletidas ou ambas transmitidas, ou ainda a (0) refletida e (X) transmitida.

3.4 Propagação Transversal num Modelo Li-near

Quando o campo magnético terrestre é transversal ao sentido de propagação, a fórmula de Apleton-Hartree[?] resulta em:

$$n_1^2 = 1 - \frac{X}{U} \quad \rho_1 = 0 \quad (3.60)$$

$$n_2^2 = 1 - \frac{X(U - X)}{U(U - X) - Y^2} \quad \rho_1 = \infty \quad (3.61)$$

O primeiro índice de refração é característica de um modo que propaga não dependendo do campo magnético terrestre e é chamado de raio ou modo ordinário, enquanto o segundo modo é chamado de extraordinário que é dependente de Y, conforme a figura 3.14 .

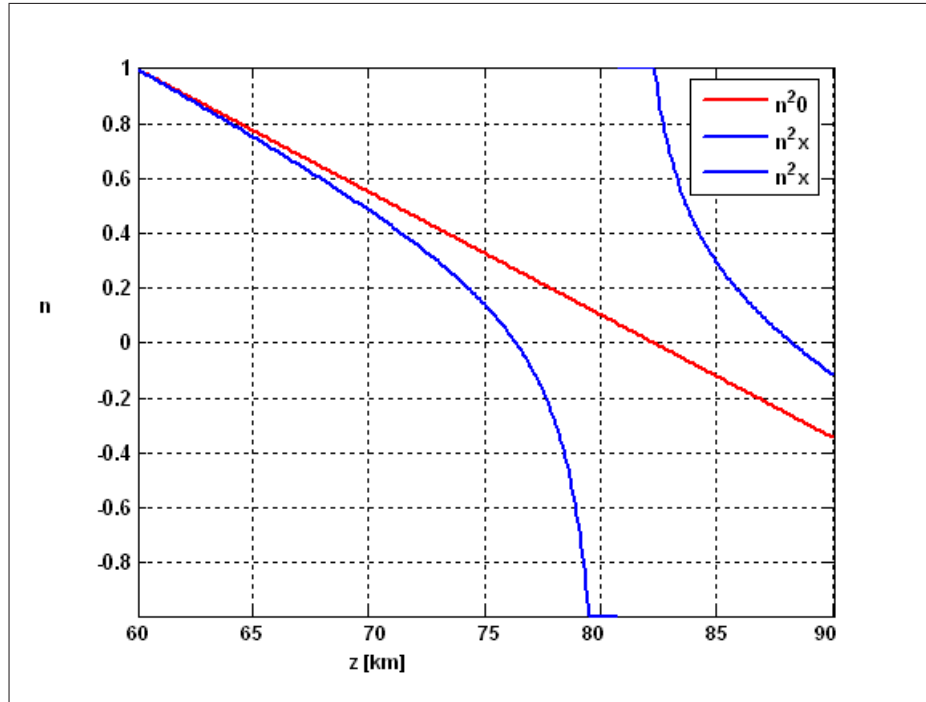


Figura 3.14: *Índice de Refração modo ordinário e extraordinário* n_0^2 e n_x^2 para $f=1$ MHz, $f_H=0,8$ MHz, $\theta = 90^\circ$, $\alpha_1=5000$, $Z=0$, $h_0=0$.

Para o caso em questão $S=0, C=1, l=1, p=0, n=0$. Pode-se então calcular a matriz susceptibilidade de $[M]$ que será:

$$[M] = \begin{bmatrix} b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -b_1 \\ 0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

onde:

$$b_3 = -\frac{X}{U} \quad (3.62)$$

$$b_2 = -\frac{XY}{U^2 - Y^2} \quad (3.63)$$

$$b_1 = -\frac{XU}{U^2 - Y^2}i \quad (3.64)$$

As equações de Maxwell ficarão então:

$$E'_x = -ik_0 H_y \quad (3.65)$$

$$E'_y = ik_0 H_x \quad (3.66)$$

$$H'_x = ik_0 \left(1 + b_2 + \frac{b_1^2}{1 - b_2^2} \right) E_y \quad (3.67)$$

$$H'_y = -ik_0 (1 + b_3) E_x \quad (3.68)$$

Fazendo as substituições adequadas chega-se à:

$$E''_x + k_0^2 \left(1 - \frac{X}{U} \right) E_x = 0 \quad (3.69)$$

$$E''_y + k_0^2 \left(1 - \frac{X(U - X)}{U(U - X) - Y^2} \right) E_y = 0 \quad (3.70)$$

Sabe-se que:

$$E_x = E_{x_1} + E_{x_2} \quad (3.71)$$

$$E_y = E_{y_1} + E_{y_2} \quad (3.72)$$

Mas pela equação 3.1

$$E_{x_2} = E_{y_2} = 0 \quad (3.73)$$

pois $\rho_1=0$ e $\rho_2 = \infty$.

Tem-se então que:

$$\frac{d^2 E_{x_1}}{dz^2} + k_0^2 n_1^2 E_{x_1} = 0 \quad (3.74)$$

$$\frac{d^2 E_{y_2}}{dz^2} + k_0^2 n_2^2 E_{y_2} = 0 \quad (3.75)$$

Chega-se então à duas equações; uma para o modo (0) e a outra para o modo (X). Nota-se então que não há nenhuma dependência ou união entre as equações 3.74 e 3.75, e pode-se então dizer que as mesmas estão desacopladas. As duas ondas neste caso são linearmente polarizadas.

Para um modelo de densidade eletrônica dado em 1.6, a equação para a onda ordinária ficará:

$$\frac{d^2 E_{x_1}}{dr_1^2} = r_1 E_{x_1} \quad z > h_0 \quad (3.76)$$

$$r_1 = \left(\frac{k_0^2 \alpha}{U} \right)^{\frac{1}{3}} \left(z - h_0 - \frac{U}{\alpha} \right) \quad (3.77)$$

Para uma onda linearmente polarizada o campo E_x ficará:

$$E_{x_1} = e^{-ik_0 cz} + R_1 e^{ik_0 z} \quad z \leq h_0 \quad (3.78)$$

$$E_{x_1} = K_1 A_i(r_1) \quad z > h_0 \quad (3.79)$$

Nota-se então que para a onda ordinária a solução ainda será a função A_i , quando o modelo é linear e a propagação é transversal.

Como já foi feito anteriormente, aplicando as condições de contorno podemos determinar o valor da constante K e do coeficiente de reflexão R.

$$R_1 = \frac{A_i(r_1^0) - iB_1 A_i'(r_1^0)}{A_i(r_1^0) + iB_1 A_i'(r_1^0)} \quad (3.80)$$

$$K_1 = \frac{e^{-ik_0 h_0} + e^{ik_0 h_0}}{A_i(r_1^0)} \quad (3.81)$$

$$r_1^0 = - \left(\frac{k_0(U)}{\alpha} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.82)$$

$$B_1 = \left(\frac{\alpha}{k_0 U} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.83)$$

Pela equação 3.77 quando $Z=0$, podemos calcular o ponto de reflexão que dará:

$$z = h_0 + \frac{1}{\alpha} \quad (3.84)$$

Como já foi feito a equação da onda extraordinária é dada por:

$$\frac{d^2 E_{y2}}{dz^2} + k_0^2 \left(1 - \frac{X(U-X)}{U(U-X)-Y^2} \right) E_{y2} = 0 \quad (3.85)$$

A equação 3.85 não se enquadra em nenhum tipos das equações clássicas, havendo necessidade de resolve-las numericamente. A solução numérica por sua vez para as frequências altas não dará bons resultados, pois quando aumentamos a frequência o ponto de reflexão atinge pontos mais elevados aumentando assim o percurso de integração, e ainda mais o número de passos por unidade de comprimento na integração numérica crescerá bastante diminuindo a precisão.

Como será visto no próximo capítulo a melhor maneira de resolver a equação 3.85 é utilizar as soluções W.K.B[?], que dão boas aproximações até bem próximo do ponto de reflexão, n_2^2 se comporta bem próximo a uma reta, dando como boa aproximação a solução A_i .

Na parte superior ao ponto de reflexão onde a aproximação linear deixa de existir, as soluções W.K.B[?] voltam a ser válidas, mas nesta região há pouco interesse pois a onda aí é evanescente, atingindo rapidamente valores extremamente pequenos.

Em torno do ponto $X=U-Y$ pode-se desenvolver a função n_2^2 e tomar somente a parte linear, dando a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 E_{y2}}{dz^2} + \frac{2k_0^2}{(U-Y)} (\alpha(z-h_0) - U-Y) E_{y2} = 0 \quad (3.86)$$

com

$$r_2 = \left(\frac{2k_0^2 \alpha}{U-Y} \right)^{\frac{1}{3}} \left(z - h_0 - \frac{(U-Y)}{\alpha} \right) \quad (3.87)$$

chega-se a:

$$\frac{d^2 E_{y2}}{dz^2} = r_2 E_{y2} \quad (3.88)$$

Esta equação é válida somente para a região próxima de

$$X = U - Y \quad (3.89)$$

3.5 Propagação Transversal num Modelo Bilinear

A propagação transversal para a onda ordinária num modelo bilinear dará equações semelhantes ao do caso longitudinal, a única diferença está no ponto de reflexão que passa a ser em

$$X = 1 \quad (3.90)$$

ao invés de

$$X = 1 + Y, \quad (Z = 0) \quad (3.91)$$

Já para a onda extraordinária o cálculo dos campos torna-se bastante difícil para a frequência da onda bem próxima de f_0 . Devido ao pouco interesse do caso não será analisada aqui.

Para o caso de f bem inferior a f_0 não há necessidade de considerar a parte superior do modo bilinear, e daí as equações dos campos para a onda extraordinária serão as mesmas do item 3.3.

3.6 Conclusão

O campo Magnético, de suma importância sendo apresentado neste capítulo os modos de propagação ordinária e extraordinária da ionosfera.

Foram considerados os casos da propagação longitudinal e transversal e para elas diversos modelos de densidade. Suas soluções apresentam em equações diferenciais muito complexas, as quais, para facilitar, utilizam-se modelos lineares e bilineares cujas soluções são conhecidas como as funções de Airy. Os cálculos são bastantes similares aos dos capítulos anteriores.

Capítulo 4

USO DAS SOLUÇÕES W.K.B. NA BAIXA IONOSFERA

4.1 Introdução

Freqüentemente trabalha-se com equações diferenciais de segunda ordem com a seguinte forma padrão Budden [?]:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \mu^2 g(z) F = 0 \quad (4.1)$$

Para o caso de $g(z)$ ser uma constante ($g(z)=k^2$), é conhecido que as soluções da equação acima são do tipo $\exp(\pm i\mu z)$. Em muitos problemas da física assim como na propagação de ondas, a função $g(z)$ varia lentamente, ou melhor, é quase que constante para um grande intervalo de z . Seria então conveniente tentar soluções para a equação 4.1 tais que sejam do tipo exponencial, mas com algumas modificações principalmente com respeito a

amplitude de fase. A mais simples destas aproximações é sem dúvida as chamadas de "conceito de memória de fase", que leva em conta somente a mudança da fase da onda, ficando a amplitude constante. A solução para a integral de fase é dada por,

$$F = e^{(\pm \mu \int g^{1/2} dz)} \quad (4.2)$$

A função 4.2 é solução exata da equação.

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + (\mu^2 g \xi \pm f(z)) F = 0 \quad (4.3)$$

$$f(z) = i\mu \frac{d}{dz} (g^{1/2}) \quad (4.4)$$

Pode-se estabelecer a condição de validade das soluções 4.2 que será dada por:

$$\left| \frac{1}{2\mu g^{1/2}} \frac{dg}{dz} \right| \ll 1 \quad (4.5)$$

A mais importante das aproximações para a solução da equação 4.1 são as soluções W.K.B.[?]. Elas são largamente utilizadas na determinação dos campos na propagação ionosférica, e por este motivo serão lembrados alguns conceitos que serão de grande utilidade. As aproximações W.K.B.[?] apresentam como soluções a equação 4.5:

$$F^{(1)} = g^{-1/4} e^{(-i\mu \int g^{1/2} dz)} \quad (4.6)$$

$$F^{(2)} = g^{-1/4} e^{(i\mu \int g^{1/2} dz)} \quad (4.7)$$

O conjunto 4.6 e 4.7 é solução exata da equação:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \left\{ \mu^2 g + \left[\frac{1}{4g} \frac{d^2 g}{dz^2} - \frac{5}{16} \left(\frac{1}{g} \frac{dg}{dz} \right)^2 \right] \right\} F = 0 \quad (4.8)$$

onde o termo

$$\left[\frac{1}{4g} \frac{d^2 g}{dz^2} - \frac{5}{16} \left(\frac{1}{g} \frac{dg}{dz} \right)^2 \right] \quad (4.9)$$

é independente de μ . Pode-se então ter para o caso em que $g(z)$ não está próximo de zero e quando a primeira e a segunda derivada de $g(z)$ não são muito grandes, que o termo 4.9 será desprezível com relação a $\mu^2 g(z)$ para $\mu \rightarrow \infty$. Neste caso então as soluções 4.6 e 4.7, tenderão para a solução exata de 4.1.

A condição de validade das soluções W.K.B.[?], poderá ser expressa baseado no que foi dito acima como se segue.

$$\frac{1}{\mu^2} \left[\frac{5}{16g^3} \left(\frac{dg}{dz} \right)^2 - \frac{1}{4g^2} \left(\frac{d^2 g}{dz^2} \right) \right] \ll 1 \quad (4.10)$$

A função g poderá ser real ou complexa. Para o caso de $g^2(z)$ ser negativa as soluções W.K.B.[?] tomam a seguinte forma:

$$F^{(1)} = g^{-1/4} e^{\{-k \int |g^{1/2}| dz\}} \quad (4.11)$$

$$F^{(2)} = g^{-1/4} e^{\{k \int |g^{1/2}| dz\}} \quad (4.12)$$

TEOREMA 1: Seja μ uma constante positiva, $g(z)$ positiva e $g''(x)$ contínua em um intervalo $a \leq z \leq b$. A equação diferencial.

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \mu^2 g(z) F = 0 \quad (4.13)$$

tem como soluções:

$$F^{(1)} = g^{-1/4} e^{(-i\mu \int g^{1/2} dz)} + \xi \quad (4.14)$$

$$F^{(2)} = g^{-1/4} e^{(i\mu \int g^{1/2} dz)} + \xi \quad (4.15)$$

$$|\xi| \leq \exp \left| \frac{G(z)}{\mu} \right| - 1 \leq \frac{G(z)}{\mu - \frac{1}{2}G(z)} \quad (4.16)$$

$$G(z) = \left| \int_c^x \frac{1}{g^{1/4}} \left| \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{g^{1/4}} \right) \right| dz \right| \quad (4.17)$$

Sendo c uma constante arbitrária tal que $a \leq c \leq b$. O intervalo (a,b) e o valor de c poderão ser infinitos bastando para isso que 4.17 convirja. Outros teoremas para o cálculo do limite de erro para o caso em que $g(z)$ é uma função complexa, poderão ser vistos em Oliver (1961), e não se coloca aqui pelo motivo de fugir muito ao objetivo do trabalho. O integrando de 4.17 é na verdade o lado esquerdo de 4.10, daí se conclui que quanto melhor a condição 4.16 menor será o erro $|\xi|$ dado pela equação 4.14.

Na baixa ionosfera o valor de Z torna-se grande comparado ao valor de X , desde que a frequência de colisões possui valor elevado da ordem de 10^7 [Hz]. Para frequências aproximadamente abaixo de 1,5 MHz, o valor de $Z \cong 1$, e para valores de frequências abaixo de 1,5 MHz, tem-se de $Z > 1$. Neste caso então o índice de refração não se anula para valores próximos do ponto de reflexão. A equação da frequência de colisões na baixa ionosfera que sera usada é dada por,

$$\nu = 9 * 10^5 p \quad [p \text{ em } N/m^2] \quad (4.18)$$

O valor de Z é dado por,

$$Z = \frac{\nu}{\omega} \quad (4.19)$$

De acordo com o exposto acima pode-se usar as soluções W.K.B.[?], pois o índice de refração não possui valores pequenos e a condição de validade estabelecida em 4.13, é satisfeita.

4.2 Equações da Onda para Baixa Ionosfera

Vamos considerar neste capítulo os casos de incidência vertical nas propagações longitudinal e transversal apenas, mas usando as soluções W.K.B.[?].

4.2.1 Incidência Vertical e Propagação Longitudinal

Pela equação 3.60, os índices de refração das ondas ordinárias (O) e extraordinárias (X) são dados por,

$$n_{1,2}^2 = 1 - \frac{X}{U \pm Y} \quad (4.20)$$

As equações diferenciais para as ondas ordinária(O) e extraordinária(X) são dadas por,

$$\frac{d^2 E_{y1}}{dz^2} + \left(1 - \frac{X}{U + Y}\right) k_0^2 E_{y1} = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{d^2 E_{y2}}{dz^2} + \left(1 - \frac{X}{U - Y}\right) k_0^2 E_{y2} = 0 \quad (4.22)$$

Os pontos de reflexão são dados por,

$$(O) \Rightarrow z_{01} = h_0 + \frac{(U + Y)}{\alpha} \quad (4.23)$$

$$(X) \Rightarrow z_{02} = h_0 + \frac{(U - Y)}{\alpha} \quad (4.24)$$

Considera-se nos exemplos a seguir o caso de um modelo linear dado pela equação cuja densidade é linear, ou seja,

$$X = \alpha (z - h_0) \quad z \geq h_0 \quad (4.25)$$

As figuras 4.1 e 4.2 mostram as alturas de reflexão para as ondas ordinárias e extraordinária, respectivamente para o caso $\alpha = 8,061 \cdot 10^7 / f^2$ com $\alpha_1 = 5000$, $f_H = 800 \text{ kHz}$, $h_0 = 60 \text{ km}$ e frequência de colisão $\nu = 0$ e $\nu = 10^7 \text{ Hz}$, indicada a propagação longitudinal.

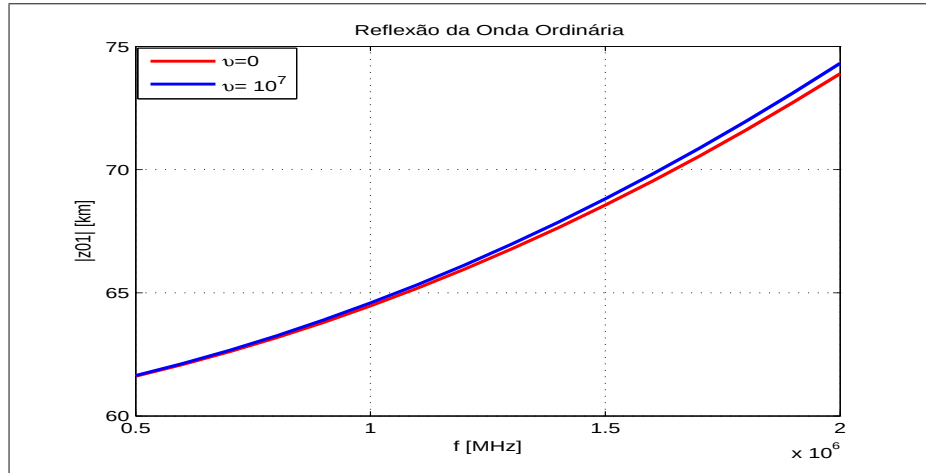


Figura 4.1: *Altura de reflexão da onda ordinária, para o modelo linear com $\alpha_1=5000$, $f_H=800[\text{kHz}]$, $h_0=60 \text{ km}$, com $\nu = 0$ e $\nu = 10^7 \text{ Hz}$, para o caso longitudinal e incidência vertical*

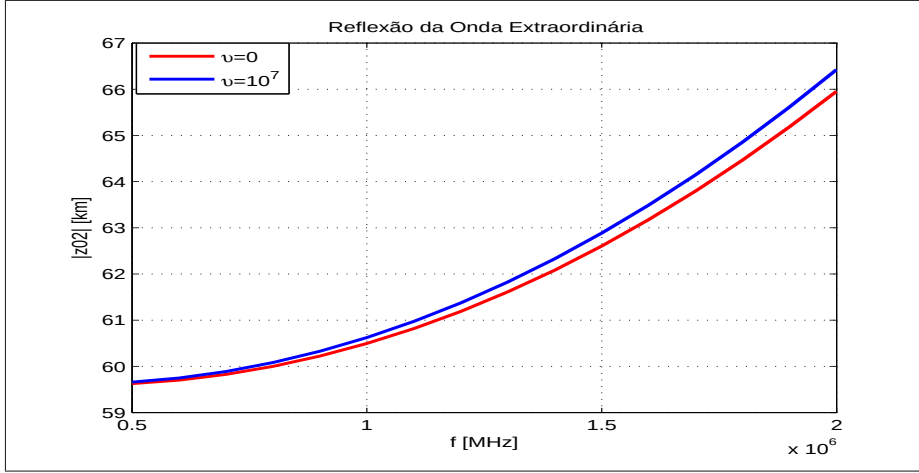


Figura 4.2: *Altura de reflexão da onda extraordinária, para o modelo linear com $\alpha_1=5000$, $f_H=800$ [kHz], $h_0=60$ km e $\nu = 0$ e $\nu = 10^7$ Hz, em função da frequência para o caso longitudinal e incidência vertical*

Quando a frequência de colisões $\nu \neq 0$, a altura de reflexão é um número complexo. Nos gráficos 4.1 e 4.2 foram considerados o módulo deste número complexo. Observa-se uma pequena diferença na altura do ponto de reflexão comparado à situação em que a frequência de colisões é nula. Para os exemplos acima foi assumido que $\nu = 10^7$ Hz, mas para o caso de uma ionosfera real o valor da frequência de colisões diminui com a altura, isto reduz mais a diferença apresentada pelos gráficos.

4.2.2 Incidência vertical e propagação transversal

Como foi visto na equação 3.60, os índices de refração para este caso são dados por,

$$g(z) = n_1^2 = 1 - \frac{X}{U} \quad \rho_1 = 0 \quad (4.26)$$

$$n_2^2 = 1 - \frac{X(U - X)}{U(U - X) - Y^2} \quad \rho_1 = \infty \quad (4.27)$$

As equações diferenciais para as ondas ordinária e extraordinária são dadas por,

$$E''_{x_1} + k_0^2 \left(1 - \frac{X}{U}\right) E_{x_1} = 0 \quad (4.28)$$

$$E''_{y_2} + k_0^2 \left(1 - \frac{X(U-X)}{U(U-X)-Y^2}\right) E_{y_2} = 0 \quad (4.29)$$

Considerando o caso de um modelo linear dado por,

$$X = \alpha(z - h_0) \quad z \geq h_0 \quad (4.30)$$

pode-se calcular o ponto de reflexão dos dois modos. Para calcular a altura de reflexão da onda ordinária faz-se $n_1=0$.

$$n_1^2 = 1 - \frac{X}{U} = 0 \quad (4.31)$$

$$X = U \quad (4.32)$$

ou

$$\alpha(z_{01} - h_0) = U \quad (4.33)$$

A altura de reflexão da onda ordinária é dada por,

$$z_{01} = \frac{U}{\alpha} + h_0 \quad (4.34)$$

Para calcular a altura de reflexão da onda extraordinária faz-se $n_2=0$

$$1 - \frac{X(U-X)}{U(U-X)-Y^2} = 0 \quad (4.35)$$

$$X(U - X) = U(U - X) - Y^2 \quad (4.36)$$

$$X^2 - 2UX + U^2 - Y^2 = 0 \quad (4.37)$$

onde

$$X = U \pm Y \quad (4.38)$$

$$\alpha(z_{02} - h_0) = U \pm Y \quad (4.39)$$

$$z_{02} = h_0 + \frac{U \pm Y}{\alpha} \quad (4.40)$$

O ponto de reflexão da onda extraordinária ascendente é dado pela altura inferior por,

$$z_{02} = h_0 + \frac{U - Y}{\alpha} = h_0 + (U - Y) \frac{f^2}{8,06 * 10^7 \alpha_1} \quad (4.41)$$

As figuras 4.3 e 4.4 mostram as alturas de reflexão para as ondas ordinárias e extraordinária, respectivamente para o caso $\alpha = 8,061 * 10^7 / f^2$ com $\alpha_1 = 5000$, $f_H = 800 \text{ kHz}$, $\nu = 0$, $h_0 = 60 \text{ km}$ as alturas e frequência de colisão $\nu = 0$ e $\nu = 10^7 \text{ Hz}$, indicada a propagação transversal.

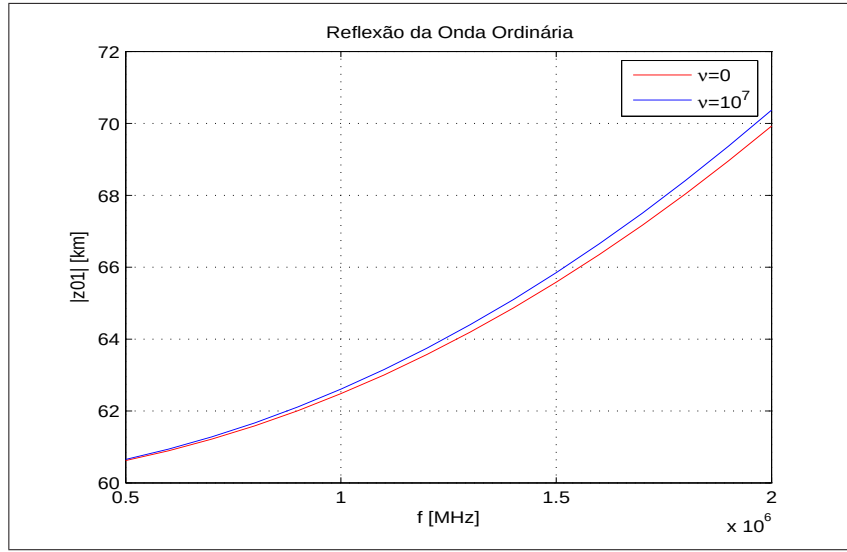


Figura 4.3: *Altura de reflexão da onda ordinária, para o modelo linear com $\alpha_1=5000$, $f_h=800$, $h_0=60$ km, $\nu = 0$ e $\nu = 10^7$ Hz, para o caso transversal e incidência vertical*

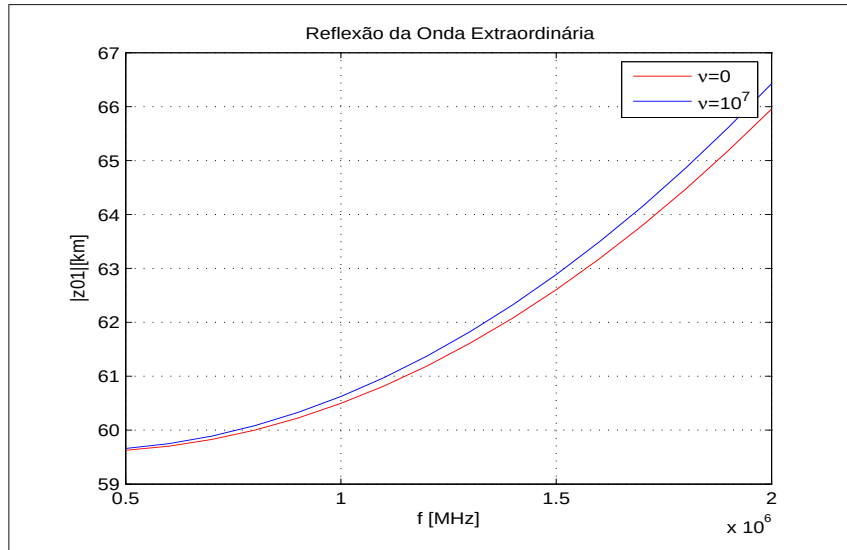


Figura 4.4: *Altura de reflexão da onda extraordinária, para o modelo linear com $\alpha_1=5000$, $f_h=800$, $h_0=60$ km, $\nu = 0$ e $\nu = 10^7$ Hz, para o caso transversal e incidência vertical*

A equação 4.28 tem como solução a função de Airy quando o modelo é linear, mas a equação 4.29 não apresenta solução fácil. No próximo parágrafo será solucionado a equação 4.29 usando W.K.B.[?].

Da mesma forma do caso longitudinal quando a frequência de colisões $\nu \neq 0$, a altura de reflexão é um número complexo. Nos gráficos 4.3 e 4.4 foram considerados apenas o módulo deste número complexo. Observa-se uma pequena diferença na altura do ponto de reflexão comparada a situação em que a frequência de colisões é nula.

4.3 Validade das Soluções W.K.B.

4.3.1 Incidência Vertical e Propagação Longitudinal

As equações diferenciais 4.21 e 4.22 , são do tipo da equação 4.1

$$\frac{d^2 E_{y1}}{dz^2} + \left(1 - \frac{X}{U + Y}\right) k_0^2 E_{y1} = 0 \quad (4.42)$$

$$\frac{d^2 E_{y2}}{dz^2} + \left(1 - \frac{X}{U - Y}\right) k_0^2 E_{y2} = 0 \quad (4.43)$$

Cujas soluções podem ser dadas usando as equações 4.6 e 4.7 onde

$$g(z) = n_{1,2}^2 = 1 - \left(\frac{X}{U \pm Y}\right) \quad (4.44)$$

$$\mu^2 = k_0^2 \quad (4.45)$$

Para a onda ordinária a solução W.K.B. das ondas ascendentes e descendentes são dadas, respectivamente por,

$$E_{y1} = n_1^{-1/2} e^{-ik_0 \int_{h_0}^z n_1 dz} \quad (4.46)$$

$$E_{y_1} = R_1 n_1^{-1/2} e^{+ik_0 \int_{h_0}^z n_1 dz} \quad (4.47)$$

Para a onda extraordinária as soluções W.K.B. das ondas ascendentes e descendentes são dadas, respectivamente por,

$$E_{y_2} = n_2^{-1/2} e^{-ik_0 \int_{h_0}^z n_2 dz} \quad (4.48)$$

$$E_{y_2} = R_2 n_2^{-1/2} e^{+ik_0 \int_{h_0}^z n_2 dz} \quad (4.49)$$

onde n_1 , n_2 são os índices de refração e R_1 , R_2 são os coeficientes de reflexão das ondas ordinárias e extraordinária, respectivamente, dadas pela equação 4.33.

Em seguida será feito um teste das condições de validade das soluções de W.K.B.[?] para a região de baixa ionosfera, considerando um modelo linear.

a) Caso para modelo de densidade linear e frequência de colisões constante

Para o caso de incidência vertical e módulo da propagação longitudinal, considerando a densidade eletrônica linear, a função $g(X)=n^2$, dada por,

$$g(X) = 1 - \frac{X}{U \pm Y} \quad (4.50)$$

onde $g(X)$ é definido pela equação

$$X = \alpha (z - h_0) \quad (4.51)$$

$$g(X) = 1 - \frac{\alpha (z - h_0)}{U \pm Y} \quad (4.52)$$

$$\frac{dg(X)}{dz} = \frac{\alpha}{U \pm Y} \quad (4.53)$$

$$\frac{d^2g(X)}{dz^2} = 0 \quad (4.54)$$

Substituindo as equações 4.50, 4.51, 4.52 em 4.55 tem-se:

$$\frac{1}{k_0^2} \left| \frac{5}{16 \left[1 - \frac{\alpha(z-h_0)}{U \pm Y} \right]^3} \frac{\alpha^2}{(U \pm Y)^2} \right| \ll 1 \quad (4.55)$$

onde $g(X)$ vem da equação 4.50, assim tem-se

$$\frac{1}{k_0^2} \frac{5}{16} \cdot \frac{\alpha^2}{|(U \pm Y)|^2} \ll |g(X)|^3 \quad (4.56)$$

ou

$$|g(X)|^3 \gg \frac{5}{16} \frac{1}{k_0^2} \frac{\alpha^2}{|(U \pm X)|^2} \frac{1}{|(U \pm Y)|^2} = A_{0,x} \quad (4.57)$$

$$|g(X)|^3 \gg \frac{5}{16} \frac{3 \cdot 10^8}{(2\pi)^2} \frac{(8,061 \cdot 10^7)^2 \alpha_1^2}{f^6} \frac{1}{|(U \pm Y)|^2} = A_{0,x} \quad (4.58)$$

$$|g(X)|^3 \gg \frac{15 (8,061 \cdot 10^7)^2 \cdot 10^{22}}{64 \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{f^6} \cdot \alpha_1^2 \frac{1}{|(U \pm Y)|^2} = A_{0,x} \quad (4.59)$$

Para estabelecer a condição de validade das equações W.K.B. é necessário que a condição das equações 4.57 ou 4.58 ou 4.59 sejam estabelecidas. Para isso é preciso determinar o valor mínimo da função $|g(X)|^3$, comparado com os valores de $A_{0,x}$.

A tabela 4.1 mostra os valores de A_0 , A_x e o valor mínimo de para o modelo de densidade eletrônica linear para $\nu = 10^6$ [Hz], $f_H=800$ kHz e frequência variada conforme tabela 4.1. Observa-se que para todas as frequências as condições de validade são válidas.

f[MHz]	O.Ordinária $ g(X) ^3$	O.Extraordinária $ g(X) ^3$	A_0 (final)	A_x (final)
1	$6,9087 \cdot 10^{-4}$	0,2415	$3,5442 \cdot 10^{-5}$	0,0018
1,5	$3,3126 \cdot 10^{-4}$	0,0109	$4,3009 \cdot 10^{-6}$	$4,4361 \cdot 10^{-5}$
2	$1,8278 \cdot 10^{-4}$	0,0023	$9,1963 \cdot 10^{-7}$	$4,9362 \cdot 10^{-6}$
2,5	$1,1196 \cdot 10^{-4}$	$8,1238 \cdot 10^{-4}$	$2,7143 \cdot 10^{-7}$	$1,0163 \cdot 10^{-6}$
3	$7,3296 \cdot 10^{-5}$	$3,7591 \cdot 10^{-4}$	$9,8773 \cdot 10^{-8}$	$2,9367 \cdot 10^{-7}$
5	$2,0658 \cdot 10^{-5}$	$5,4297 \cdot 10^{-5}$	$5,5003 \cdot 10^{-9}$	$1,0482 \cdot 10^{-8}$

Tabela 4.1: Valores $|g(x)|^3$, $\nu = 10^6$ [Hz], $f_H=800$ kHz.

A tabela 4.2 mostra os valores de A_0 , A_x e o valor mínimo de para o modelo de densidade eletrônica linear para $\nu = 10^6$ [Hz], $f_H=800$ kHz e frequência variada conforme tabela 4.2. Observa-se que para todas as frequências as condições de validade são válidas.

f[MHz]	O.Ordinária $ g(X) ^3$	O.Extraordinária $ g(X) ^3$	A_0 (final)	A_x (final)
1	0,2907	0,9768	$2,0047 \cdot 10^{-5}$	$4,4979 \cdot 10^{-5}$
1,5	0,1843	0,7670	$2,9222 \cdot 10^{-6}$	$7,5621 \cdot 10^{-6}$
2	0,1207	0,5091	$6,9731 \cdot 10^{-7}$	$1,8206 \cdot 10^{-6}$
2,5	8,0820	0,3192	$2,2072 \cdot 10^{-7}$	$5,4632 \cdot 10^{-7}$
3	0,0577	0,2014	$8,4179 \cdot 10^{-8}$	$1,9378 \cdot 10^{-7}$
5	0,0185	0,0445	$5,1190 \cdot 10^{-9}$	$9,179 \cdot 10^{-9}$

Tabela 4.2: Valores $|g(X)|^3$, $\nu = 10^6$ [Hz], $f_H=800$ kHz.

As figuras 4.5 e 4.6 mostra os gráficos de $|g(X)|^3$ da onda ordinária $A_0 \leftrightarrow (0)$ e da onda extraordinária $A_x \leftrightarrow (X)$, para as frequências de $f=2$ e 3 MHz, $f_H=800$ kHz, $\nu = 10^6$ Hz e modelo linear de densidade em função da altura.

$$|g(X)|^3 \gg 3,5442 \cdot 10^{-5} \quad (4.60)$$

Como se pode observar pelas figuras 4.5 e 4.6

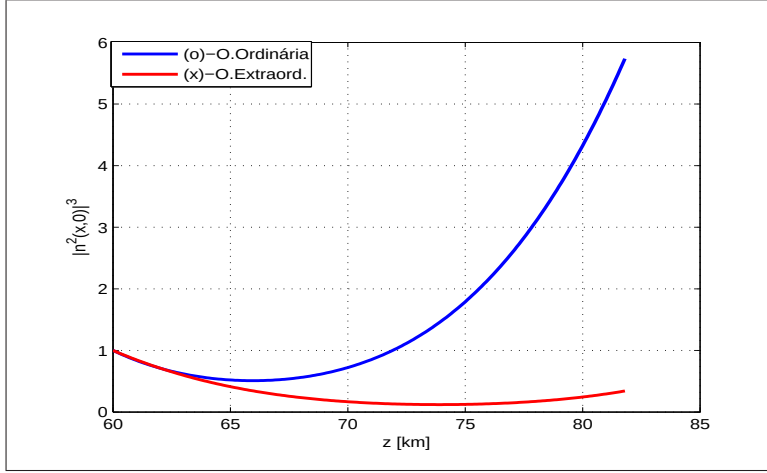


Figura 4.5: Função $|g(X)|^3$ da onda Ordinária e Extraordinária, para $f=2\text{MHz}$, $\alpha_1=5000$, $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 10^6 \text{ Hz}$ e modelo de densidade linear

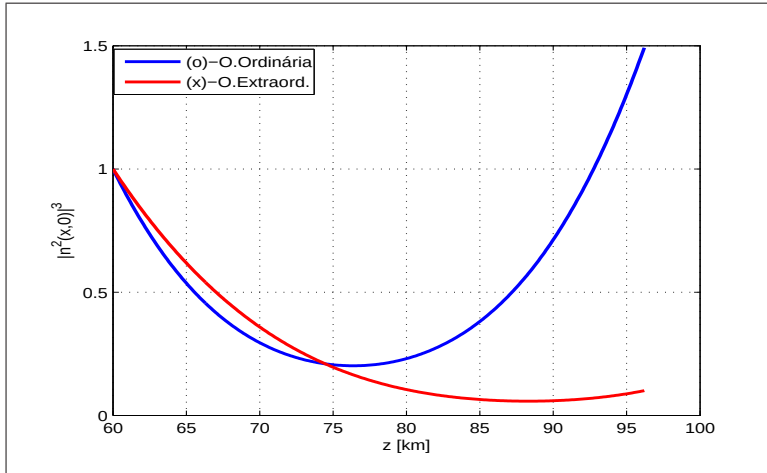


Figura 4.6: Função $|g(X)|^3$ da onda Ordinária e Extraordinária, para $f=3\text{MHz}$, $\alpha_1=5000$, $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 10^6 \text{ Hz}$ e modelo de densidade linear

b) Caso para modelo de densidade linear e frequência de colisões variável

Considera-se agora a mesma situação da sessão anterior mas para o caso em que a frequência de colisão não é constante ao longo da ionosfera. Assume-se o modelo de densidade eletrônica linear e frequência de colisões dada por,

$$\nu = 9 \cdot 10^5 p \quad (4.61)$$

A tabela 4.3 mostra os valores de A_0, A_x e o valor mínimo de $|g(X)|^3$ para o modelo de densidade eletrônica linear para $f_H=800\text{kHz}$ e vários valores de f , onde p =pressão em (N/m²)

$f[\text{MHz}]$	O.Ordinária $ g(X) ^3$	O.Extraordinária $ g(X) ^3$	$A_0(\text{final})$	$A_x(\text{final})$
1	0,70	0,998	$8,8 \cdot 10^{-6}$	$2,69 \cdot 10^{-6}$
1,5	0,024	0,96	$2,86 \cdot 10^{-6}$	$1,019 \cdot 10^{-6}$
2	0,0323	0,74	$8,5 \cdot 10^{-7}$	$1,15 \cdot 10^{-6}$
2,5	0,0017	0,22	$2,86 \cdot 10^{-7}$	$7,43 \cdot 10^{-7}$
3	$3,25 \cdot 10^{-5}$	0,022	$9,8 \cdot 10^{-8}$	$2,77 \cdot 10^{-7}$
3,5	$2,3203 \cdot 10^{-7}$	$8,0627 \cdot 10^{-4}$	$4,1709 \cdot 10^{-8}$	$1,0496 \cdot 10^{-7}$
4	$1,234 \cdot 10^{-9}$	$9,9670 \cdot 10^{-6}$	$1,9621 \cdot 10^{-8}$	$4,4128 \cdot 10^{-8}$
5	$3,0873 \cdot 10^{-10}$	$4,1321 \cdot 10^{-11}$	$5,5045 \cdot 10^{-9}$	$1,0497 \cdot 10^{-8}$

Tabela 4.3: Valores de A_0, A_x e mínimo de $|g(X)|^3$ para densidade eletrônica linear, $f_H=800\text{kHz}$, $\nu = 9 \cdot 10^5 p$ em propagação longitudinal, incidência vertical para as ondas ordinária e extraordinária.

Pela tabela 4.3 a partir da frequência de 4 MHz, as condições não são mais válidas para a onda ordinária, no exemplo $|g(X)|^3=1,234 \cdot 10^{-9}$, e $A_o=1,9621 \cdot 10^{-8}$, o que significa que $|g(X)|^3 < A_o$.

As figuras 4.7 e 4.8 nos mostra os gráficos de $|g(X)|^3$, $A_0 \rightarrow (0)$, $A_x \rightarrow (X)$ para $f=2\text{MHz}$, $f=3\text{MHz}$, $f_H=800\text{KHz}$, $\nu = 10^5 p$ e modelo linear de densidade.

Como se pode observar da tabela 1.1, as condições W.K.B. sempre são validas até $f= 3 \text{ MHz}$. Considerando agora $\nu = 9 \cdot 10^5 p \text{ Hz}$, $f_H=800\text{kHz}$ temos nas figuras 4.7 e 4.8 o índice de refração para $f=2$ e 3 MHz em função da altura para um modelo linear.

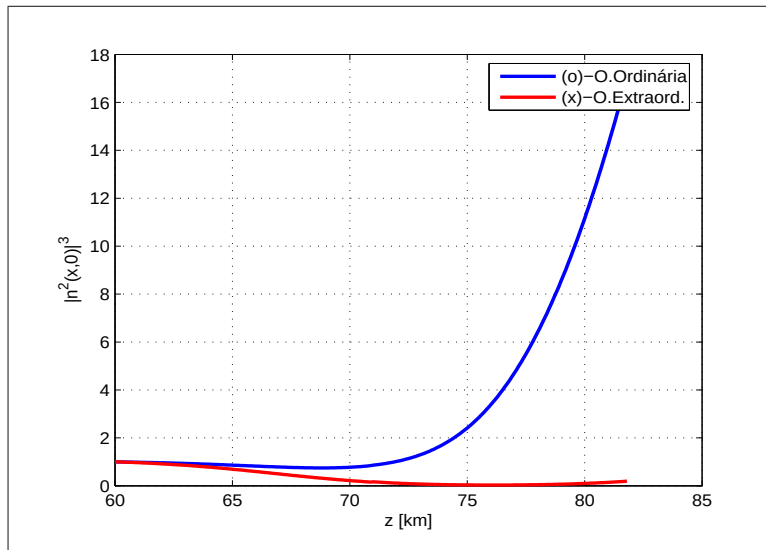


Figura 4.7: Função $|g(X)|^3$ da onda Ordinária e Extraordinária, para $f=2\text{MHz}$, $\alpha_1=5000$, $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 9 * 10^5 p \text{ Hz}$ e modelo de densidade linear

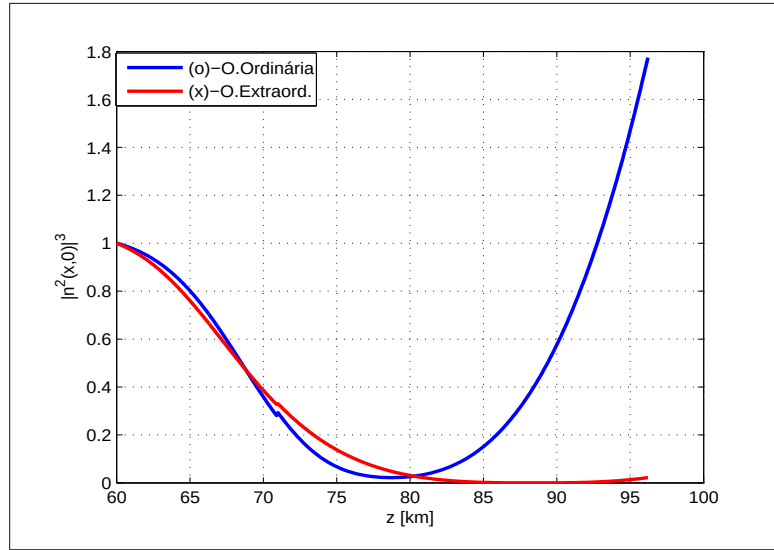


Figura 4.8: Função $|g(X)|^3$ da onda Ordinária e Extraordinária, para $f=3\text{MHz}$, $\alpha_1=5000$, $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 9 * 10^5 \text{p Hz}$ e modelo de densidade linear

Observa-se que para o caso da frequência de colisão constante as condições de validade das soluções W.K.B. são melhores atendidas, isto é, atinge-se frequência mais elevadas.

4.3.2 Incidência vertical e propagação Transversal

Considera-se agora o caso da incidência vertical no modo transversal. Neste caso a análise é similar ao caso longitudinal, mas o índice de refração para o caso da onda ordinária não varia de maneira linear com X .

a) Caso para modelo de densidade linear e freqüência de colisões constante

a1- Onda ordinária

Para o caso da onda ordinária o índice de refração é dado pela equação 4.62,

$$g(X) = n_1^2 = 1 - \frac{X}{U} \quad \rho_1 = 0 \quad (4.62)$$

$$\frac{dg(X)}{dX} = \frac{1}{U} \quad (4.63)$$

$$\frac{d^2g(X)}{dX^2} = 0 \quad (4.64)$$

$$\frac{dg(X)}{dz} = \frac{dg(X)}{dX} \frac{dX}{dz} = \frac{1}{U} \frac{\alpha}{1} = \frac{\alpha}{U} \quad (4.65)$$

A condição de validade W.K.B.[?] fica,

$$\frac{1}{k_0^2} \left| \frac{5}{16} \frac{1}{g(X)^3} \left(\frac{\alpha}{U} \right)^2 \right| \ll 1 \quad (4.66)$$

$$|g(X)|^3 \gg \frac{5}{16} \frac{\alpha^2}{k_0^2 U^2} \quad (4.67)$$

a2- Onda extraordinária

Para a onda extraordinária o índice de refração é dado por,

$$g(X) = n_X^2 = 1 - \frac{X(U-X)}{U(U-X)-Y^2} \quad (4.68)$$

e o ponto de reflexão será dado por,

$$X = U \pm Y \quad (4.69)$$

fazendo $\nu^2 = g(X)$, desenvolvendo em torno de $X=U-Y$, que é o ponto de reflexão da onda extraordinária

$$\frac{dg(X)}{dX} = -\frac{[U(U-X) - Y^2](U-2X) + X(U-X)U}{[U(U-X) - Y^2]^2} \quad (4.70)$$

$$\frac{dg(X)}{dX} = \frac{(UY - Y^2)(-U + 2Y) + Y^2U}{(UY - Y^2)^2} \quad (4.71)$$

$$\frac{dg(X)}{dX} = \frac{2UY^2 - 2Y^3}{(UY - Y^2)^2} = \frac{-2}{(U - Y)} \quad (4.72)$$

$$g(X) = g(U - Y) + g'(U - Y)[X - (U - Y)] \quad (4.73)$$

$$g(U - Y) = n^2(X - Y) = 0 \quad (4.74)$$

$$n^2 = g(X) = \frac{-2}{(U - Y)}[X - (U - Y)] \quad (4.75)$$

Fazendo o teste de convergência

$$\frac{dg(X)}{dX} = -\frac{2}{(U - Y)} \quad (4.76)$$

$$\frac{d^2g(X)}{dX^2} = 0 \quad (4.77)$$

$$\frac{dg(X)}{dX} = \frac{dg(X)}{dX} \frac{dX}{dz} = -\frac{2}{(U-Y)}\alpha \quad (4.78)$$

a condição, será para a densidade linear, será dada por:

$$\frac{1}{k_0^2} \left| \frac{5}{16} \frac{1}{\left[1 - \frac{\alpha(z-h_0)}{U}\right]^3} \frac{2^2\alpha^2}{(U-Y)^2} \right| \ll 1 \quad (4.79)$$

$$g(X) = 1 - \frac{\alpha(z-h_0)}{U} \quad (4.80)$$

$$|g(X)|^3 \gg \frac{5}{16} \left(\frac{\alpha^2}{k_0^2} \right) \frac{4}{(U-Y)^2} \quad (4.81)$$

$$|g(X)|^3 \gg \frac{5}{16} \left[\frac{2\alpha}{k_0(U-Y)} \right] \quad (4.82)$$

A equação diferencial será,

$$\frac{d^2 E_{y^2}}{dz^2} - \frac{2k_0}{(U-Y)} [\alpha(z-h_0) - (U-Y)] E_{y^2} = 0 \quad (4.83)$$

Nota-se que a equação 4.81, que representa a condição de validade da solução W.K.B.[?] do modo transversal extraordinária, é similar a equação 4.57 do modo longitudinal extraordinária a menos de uma constante igual a 4. Então não há necessidade de analisá-la, pois valores da tabela 4.1 dão plena condição de validade das soluções W.K.B.[?].

b) Caso para modelo de densidade linear e frequência de colisões variável

É considerado nesta seção o caso de incidência vertical em propagação transversal para as ondas ordinária e extraordinária em que a frequência de colisões é variável com altura. A análise é similar ao caso da propagação longitudinal por isso será restrita em apresentar apenas as figuras 4.9, 4.10 para ilustrar a variação da função $|g(X)|^3$ com altura.

As figuras 4.9 e 4.10 mostram os gráficos de $|g(X)|^3$, $A_0 \rightarrow (0)$, $A_x \rightarrow (X)$ para $f=2\text{MHz}$, $f=3\text{MHz}$, $f_H=800\text{kHz}$, $\nu = 9 \cdot 10^5 p \text{ Hz}$ e modelo linear de densidade. Observa-se que a partir da frequência $f=4\text{MHz}$, as condições W.K.B. não são mais validas.

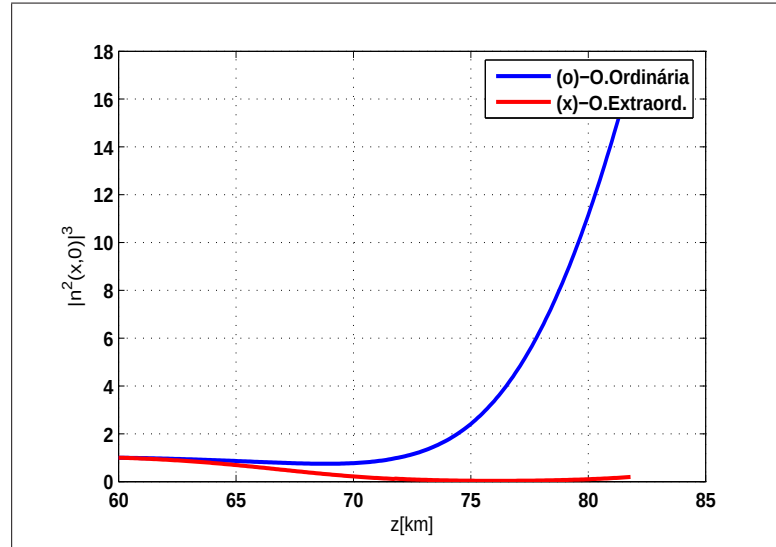


Figura 4.9: Função $|g(X)|^3$ para o modelo de densidade linear, longitudinal ordinária e extraordinária na baixa ionosfera, com $f=2 \text{ MHz}$, $\alpha_1=5000$, $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 9 \cdot 10^5 p \text{ Hz}$

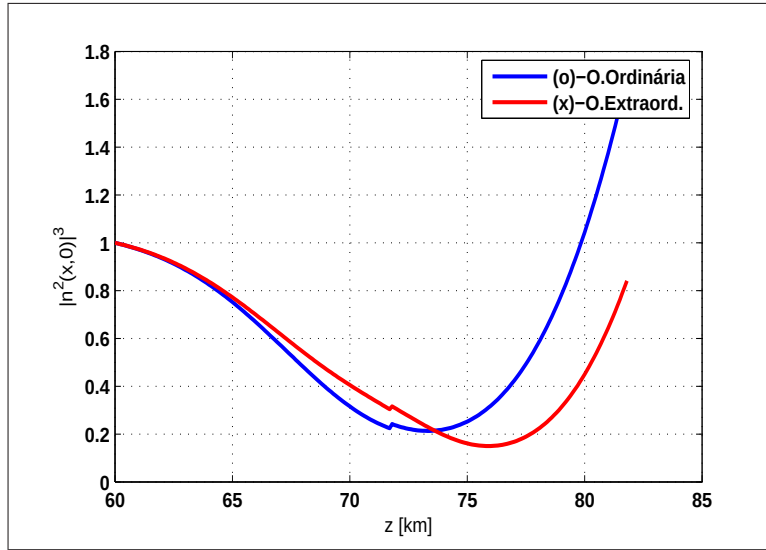


Figura 4.10: Função $|g(X)|^3$ para o modelo de densidade linear, transversal ordinária e extraordinária na baixa ionosfera, com $f=3$ MHz, $\alpha_1=5000$, $f_H=800$ kHz e $\nu = 9 \cdot 10^5$ Hz

Observa-se pelas figuras 4.9 e 4.10 que as condições de validade das soluções W.K.B. são melhores para o caso transversal do que para o caso longitudinal pois os valores de $|g(X)|^3$ são maiores naquele quando comparados com este. Isto acontece porque o ponto de reflexão da onda transversal se dá abaixo do ponto de reflexão da onda longitudinal como pode ser observado pelas figuras 3.2 e 3.14.

4.4 Soluções W.K.B. para o Cálculo do Campo na baixa ionosfera para modelo de densidade eletrônica linear e frequência de colisões constantes.

a) Modelo de densidade eletrônica linear e frequência de colisões constantes.

Considerando a densidade eletrônica linear e frequência de colisões constante, as soluções para as equações diferenciais 4.21, 4.22 e 4.28 e 4.29 são dadas pelas funções de Airy como foi visto pela equação 3.33 e ítem 3.4, equação 3.79.

Neste ítem serão resolvidas as equações diferenciais 4.21, 4.22, 4.28 e 4.29 considerando um modelo linear de densidade eletrônica com variação linear, usando as soluções W.K.B.. Isto será feito para comprovar a precisão das soluções W.K.B. comparado com às soluções exatas.

Observando-se as equações 4.21, 4.22, 4.28 e 4.29 todas apresentam da forma

$$\frac{d^2 E_y}{dz} + k_0^2 n^2 E_y = 0 \quad (4.84)$$

cuja solução para a onda ascendente é dada para onda é dada por,

$$E_y = n^{-1/2} e^{\left(-ik_0 \int_{h_0}^z n dz\right)} \quad (4.85)$$

e para onda descendente é,

$$E_y = R \cdot n^{-1/2} e^{\left(ik_0 \int_{h_0}^z n dz\right)} \quad (4.86)$$

$$R = i \cdot e^{(-2ik_0 \int_{h_0}^{z_0} n dz)} \quad (4.87)$$

4.4.1 Caso longitudinal

Considerando o caso longitudinal onde os índices de refração das ondas ordinária e extraordinária são dadas por [4.20](#)

$$n_{1,2}^2 = 1 - \frac{X}{U \pm Y} \quad (4.88)$$

A solução W.K.B para o campo total da onda ordinária é,

$$E_{y1} = n_1^{-1/2} e^{(-ik_0 \int_{h_0}^z n_1 dz)} + R n_1^{-1/2} e^{(ik_0 \int_{h_0}^z n_1 dz)} \quad (4.89)$$

Para a onda extraordinária é,

$$E_{y2} = n_2^{-1/2} e^{(-ik_0 \int_{h_0}^z n_2 dz)} + R n_2^{-1/2} e^{(ik_0 \int_{h_0}^z n_2 dz)} \quad (4.90)$$

As figuras [4.11](#) e [4.12](#) mostram a intensidade de campo para densidade eletrônica linear $f=1\text{MHz}$, $f_H=800\text{ kHz}$, $h_o=60\text{ km}$, para valor de frequências de colisões $\nu = 10^6\text{ Hz}$ para o caso longitudinal e onda ordinária.

Observa-se uma boa precisão comparando-se estes gráficos com aqueles obtidos para as mesmas condições através das figuras [3.3](#) a [3.12](#) do capítulo 3 quando foi considerado a solução exata.

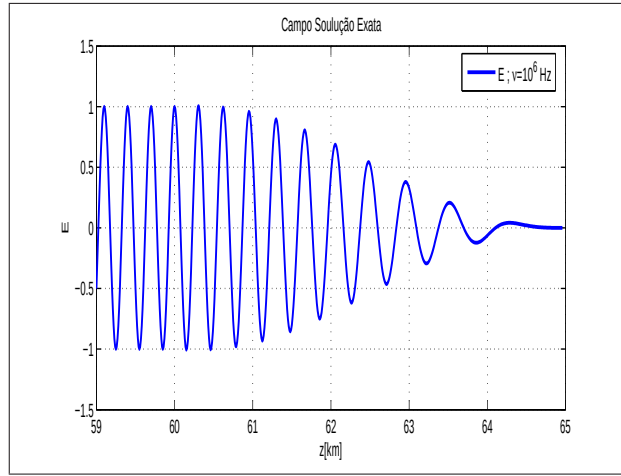


Figura 4.11: E_y para onda ordinária caso longitudinal, modelo linear $f=1\text{MHz}$, $f_H=800\text{ kHz}$, $\theta_I = 0^\circ$, $h_0= 60\text{ km}$ e $\nu = 10^6\text{ Hz}$ solução exata.

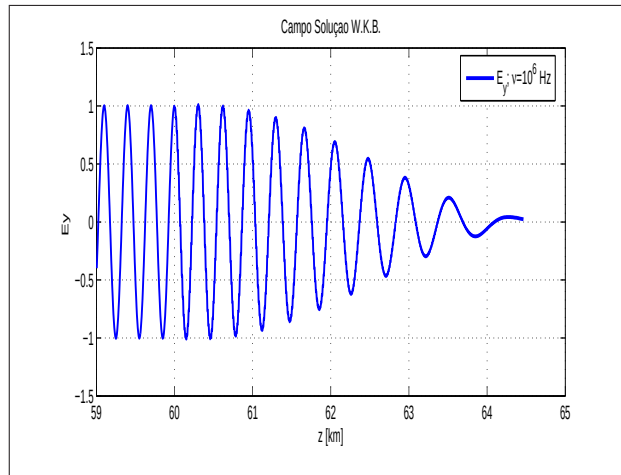


Figura 4.12: E_y para onda ordinária caso longitudinal, modelo linear $f=1\text{MHz}$, $f_H=800\text{ kHz}$, $\theta_I = 0^\circ$, $h_0= 60\text{ km}$ e $\nu = 10^6\text{ Hz}$, solução W.K.B.

Considerando uma densidade eletrônica linear pode-se verificar a precisão da equação 4.89, para isso foram feitos cálculos e gráficos comparativos entre a solução exata 3.33 e a aproximada 4.89.

As figuras 4.13 e 4.14, são calculadas através da forma exata para uma densidade eletrônica linear, considerado $f_H = 800\text{kHz}$, propagação longitudinal e modo ordinário. O coeficiente de reflexão é mostrado na figura 4.13

usando a solução exata com densidade eletrônica linear na figura 4.14 usando a solução W.K.B. nas mesmas condições.

Verifica-se nas figuras 4.13 e 4.14 uma grande aproximação das curvas.

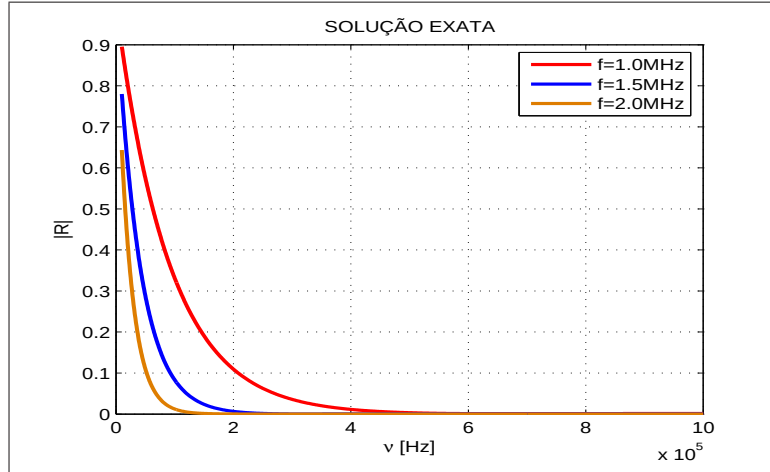


Figura 4.13: *Coeficiente de Reflexão usando a fórmula exata 3.37, para $f_H = 800\text{kHz}$, densidade linear, longitudinal ordinária, em função de ν .*

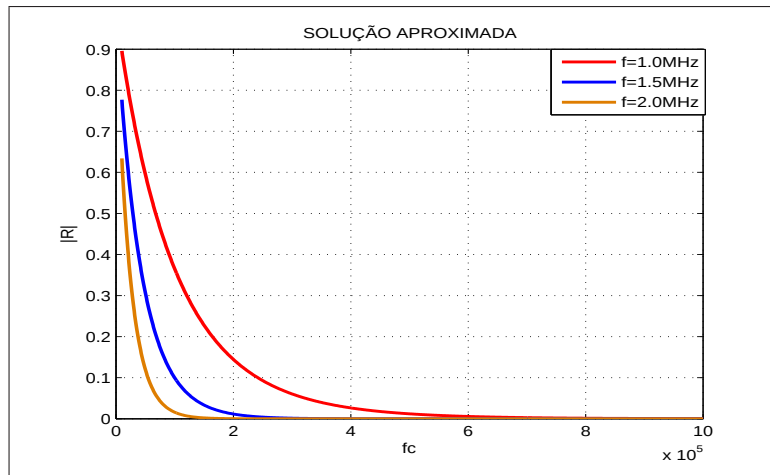


Figura 4.14: *Coeficiente de Reflexão usando a fórmula aproximada 4.87, da integral de fase, para $f_H = 800\text{kHz}$, densidade linear, longitudinal ordinária, em função de ν*

4.4.2 Caso transversal

Considerando o caso transversal onde os índices de refração das ondas ordinária e extraordinária são dadas por 4.26 4.27,

$$n_1^2 = 1 - \frac{X}{U} \quad (4.91)$$

$$n_2^2 = 1 - \frac{X(U - X)}{U(U - X) - Y^2} \quad (4.92)$$

A solução W.K.B para o campo total para a onda ordinária será:

$$E_{y1} = n_1^{-1/2} e^{(-ik_0 \int_{h_0}^z n_1 dz)} + R n_1^{-1/2} e^{(ik_0 \int_{h_0}^z n_1 dz)} \quad (4.93)$$

para a onda extraordinária,

$$E_{y2} = n_2^{-1/2} e^{(-ik_0 \int_{h_0}^z n_2 dz)} + R n_2^{-1/2} e^{(ik_0 \int_{h_0}^z n_2 dz)} \quad (4.94)$$

Neste caso também as soluções W.K.B. dão boas soluções comparadas as soluções exatas. Os gráficos do campo são similares ao item anterior apenas mudando o ponto de reflexão para uma altura inferior ao do caso longitudinal.

4.5 Soluções W.K.B. para o Cálculo do Campo na Baixa Ionosfera para modelo de densidade Eletrônica qualquer e Frequência de Colisões qualquer.

4.5.1 Método da integral de fase para o cálculo do coeficiente de reflexão

O cálculo do coeficiente de reflexão exato para uma ionosfera com densidade eletrônica linear foi obtido através da expressão 3.37. Quando a ionosfera apresenta uma densidade variando de maneira não linear pode-se obter o coeficiente de reflexão através das soluções W.K.B., como é mostrado a seguir.

Para uma ionosfera em que as soluções W.K.B. são validas, a onda ascendente é dada por,

$$E_y = n_1^{-1/2} e^{-ik_0 \int_{h_0}^z ndz} \quad (4.95)$$

a onda descendente é dada por,

$$E_y = R \cdot n_1^{-1/2} e^{+ik_0 \int_{h_0}^z ndz} \quad (4.96)$$

onde R é o coeficiente de reflexão que é obtido pela fórmula da integral de fase.

$$R = i \cdot e^{(-2ik_0 \int_{h_0}^{z_0} ndz)} \quad (4.97)$$

onde h_0 é a altura da base da ionosfera e z_0 é a altura do ponto de reflexão.

4.5.2 Método da integral de fase

Para um meio linearmente variável,

$$R = e^{(-2k_0 \int_{h_0}^{z_0} \chi dz)} \cdot i.e^{(-2ik_0 \int_{h_0}^{z_0} \mu dz)} \quad (4.98)$$

onde $n = \mu + i\chi$.

O cálculo do coeficiente de reflexão para a ionosfera usando método da integral de fase foi feito para vários casos, como indicam nas tabelas [4.5](#), [4.6](#) e [4.8](#), [4.9](#), onde são calculados os módulos de reflexão para o ano de 2007 às 13 horas e com frequência de colisão $\nu = 9 * 10^5 p$, para as coordenadas do ponto A e B conforme a tabela [4.4](#).

Ponto	Latitude	Longitude
A	0°	50°
B	-20°	50°

Tabela 4.4: *Coordenadas dos pontos A e B*

As tabelas 4.5 e 4.6 mostram o módulo de reflexão em função da frequência para o ponto A referente a tabela 4.4, para às 13h no ano de 2007.

f[MHz]	R jan13h	R fev13h	R mar13h	R abr13h	R mai13h	R jun13h
1,0	0,0452	0,0432	0,0432	0,0455	0,0480	0,0374
1,1	0,0636	0,0609	0,0609	0,0640	0,0672	0,0539
1,2	0,0854	0,0811	0,0820	0,0858	0,0890	0,0730
1,3	0,1084	0,1033	0,1044	0,1089	0,1137	0,0952
1,4	0,1340	0,1281	0,1293	0,1346	0,1389	0,1184
1,5	0,1608	0,1540	0,1555	0,1614	0,1663	0,1437
1,6	0,1881	0,1807	0,1823	0,1888	0,1941	0,1700
1,7	0,2157	0,2077	0,2094	0,2164	0,2222	0,1968
1,8	0,2431	0,2346	0,2364	0,2439	0,2500	0,2236
1,9	0,2702	0,2628	0,2631	0,2709	0,2774	0,2517
2,0	0,2983	0,2889	0,2892	0,2974	0,3041	0,2780
2,1	0,3240	0,3144	0,3164	0,3248	0,3317	0,3036
2,2	0,3488	0,3407	0,3411	0,3497	0,3567	0,3301
2,3	0,3727	0,3645	0,3648	0,3736	0,3807	0,3542
2,4	0,3975	0,3873	0,3895	0,3965	0,4037	0,3773
2,5	0,4194	0,4110	0,4113	0,4202	0,4275	0,4012
2,6	0,4421	0,4319	0,4340	0,4412	0,4485	0,4225
2,7	0,4621	0,4536	0,4540	0,4629	0,4702	0,4445
2,8	0,4828	0,4726	0,4747	0,4836	0,4908	0,4638
2,9	0,5008	0,4924	0,4945	0,5016	0,5088	0,4840
3,0	0,5196	0,5113	0,5117	0,5204	0,5275	0,5032

Tabela 4.5: $|R|$ pela frequência para o ponto A para os meses de janeiro a junho de 2007 as 13h, $\nu = 9 * 10^5 p$.

f[MHz]	R jul13h	R ago13h	R set13h	R out13h	R nov13h	R dez13h
1,0	0,0454	0,0452	0,0468	0,0509	0,0529	0,0506
1,1	0,0639	0,0635	0,0656	0,0710	0,0736	0,0705
1,2	0,0857	0,0843	0,0879	0,0937	0,0979	0,0931
1,3	0,1088	0,1082	0,1114	0,1193	0,1232	0,1187
1,4	0,1345	0,1337	0,1375	0,1453	0,1510	0,1458
1,5	0,1612	0,1591	0,1646	0,1734	0,1784	0,1726
1,6	0,1886	0,1863	0,1923	0,2020	0,2074	0,2011
1,7	0,2162	0,2137	0,2202	0,2306	0,2364	0,2296
1,8	0,2437	0,2426	0,2479	0,2589	0,2651	0,2579
1,9	0,2708	0,2696	0,2752	0,2867	0,2932	0,2857
2,0	0,2972	0,2960	0,3018	0,3138	0,3205	0,3127
2,1	0,3246	0,3216	0,3276	0,3399	0,3468	0,3388
2,2	0,3495	0,3482	0,3543	0,3651	0,3721	0,3640
2,3	0,3734	0,3721	0,3783	0,3910	0,3982	0,3899
2,4	0,3981	0,3950	0,4013	0,4141	0,4213	0,4130
2,5	0,4200	0,4187	0,4250	0,4361	0,4452	0,4368
2,6	0,4410	0,4396	0,4460	0,4589	0,4661	0,4578
2,7	0,4627	0,4613	0,4677	0,4805	0,4877	0,4794
2,8	0,4834	0,4803	0,4866	0,4994	0,5082	0,4983
2,9	0,5014	0,5000	0,5063	0,5190	0,5260	0,5179
3,0	0,5202	0,5189	0,5251	0,5376	0,5445	0,5365

Tabela 4.6: $|R|$ em função da frequência para o ponto A para os meses de julho a dezembro de 2007 as 13h, $\nu = 9 * 10^5 p$.

A tabela 4.7 mostra a média anual e o desvio padrão em função da frequência ocorrido para o ponto A as 13h em 2007.

f[MHz]	média ano	desvio padrão
1	0,0462	0,0041
1,1	0,0649	0,0053
1,2	0,0866	0,0066
1,3	0,1103	0,0077
1,4	0,1359	0,0088
1,5	0,1626	0,0095
1,6	0,1901	0,0103
1,7	0,2179	0,0109
1,8	0,2456	0,0115
1,9	0,2731	0,0115
2	0,2998	0,0119
2,1	0,3262	0,0120
2,2	0,3517	0,0117
2,3	0,3761	0,0125
2,4	0,3996	0,0123
2,5	0,4227	0,0124
2,6	0,4441	0,0123
2,7	0,4656	0,0124
2,8	0,4854	0,0124
2,9	0,5044	0,0120
3	0,5230	0,0120

Tabela 4.7: Média anual e desvio padrão referente as tabelas 4.5 e 4.6 para o ponto A as 13h em 2007, $\nu = 9 * 10^5 p$.

As tabelas 4.8 e 4.9 mostram o módulo de reflexão em função da frequência para o ponto B da tabela 4.4 para alguns meses do ano às 13h no ano de 2007.

f[MHz]	R jan13h	R fev13h	R mar13h	R abr13h	R mai13h	R jun13h
1,0	0,0411	0,4945	0,0438	0,0504	0,0598	0,0649
1,1	0,0578	0,5369	0,0607	0,0700	0,0823	0,0888
1,2	0,0761	0,5715	0,0806	0,0922	0,1072	0,1152
1,3	0,0979	0,5983	0,1034	0,1161	0,1338	0,1432
1,4	0,1204	0,6154	0,1279	0,1426	0,1615	0,1722
1,5	0,1451	0,6252	0,1522	0,1701	0,1912	0,2030
1,6	0,1705	0,6321	0,1784	0,1966	0,2195	0,2324
1,7	0,1964	0,6284	0,2049	0,2245	0,2492	0,2629
1,8	0,2222	0,6274	0,2314	0,2522	0,2783	0,2912
1,9	0,2495	0,6573	0,2591	0,2794	0,3051	0,3201
2,0	0,2748	0,6839	0,2849	0,3060	0,3326	0,3480
2,1	0,2995	0,7079	0,3099	0,3317	0,3608	0,3766
2,2	0,3253	0,7294	0,3342	0,3583	0,3862	0,4022
2,3	0,3486	0,7487	0,3594	0,3822	0,4104	0,4283
2,4	0,3710	0,7662	0,3820	0,4051	0,4353	0,4513
2,5	0,3943	0,7820	0,4055	0,4287	0,4572	0,4750
2,6	0,4150	0,7963	0,4262	0,4495	0,4797	0,4956
2,7	0,4365	0,8093	0,4460	0,4711	0,4994	0,5168
2,8	0,4554	0,8212	0,4666	0,4899	0,5197	0,5352
2,9	0,4752	0,8320	0,4864	0,5095	0,5390	0,5542
3,0	0,4941	0,8419	0,5035	0,5281	0,5555	0,5722

Tabela 4.8: $|R|$ em função frequência para o ponto B para os meses de janeiro a junho de 2007 as 13h, $\nu = 9 * 10^5 p$.

f[MHz]	R jul13h	R ago13h	R set13h	R out13h	R nov13h	R dez13h
1,0	0,0621	0,0569	0,0532	0,0504	0,0472	0,0435
1,1	0,0852	0,0776	0,0737	0,0701	0,0658	0,0609
1,2	0,1108	0,1025	0,0967	0,0932	0,0870	0,0809
1,3	0,1381	0,1283	0,1215	0,1174	0,1111	0,1027
1,4	0,1664	0,1553	0,1488	0,1440	0,1356	0,1271
1,5	0,1966	0,1842	0,1756	0,1703	0,1622	0,1527
1,6	0,2254	0,2135	0,2041	0,1983	0,1894	0,1789
1,7	0,2555	0,2411	0,2326	0,2263	0,2167	0,2054
1,8	0,2850	0,2698	0,2608	0,2541	0,2440	0,2319
1,9	0,3120	0,2978	0,2884	0,2815	0,2708	0,2581
2,0	0,3414	0,3251	0,3153	0,3081	0,2970	0,2838
2,1	0,3681	0,3513	0,3413	0,3339	0,3224	0,3088
2,2	0,3935	0,3766	0,3663	0,3588	0,3488	0,3348
2,3	0,4196	0,4025	0,3904	0,3827	0,3725	0,3583
2,4	0,4427	0,4255	0,4151	0,4073	0,3953	0,3809
2,5	0,4663	0,4492	0,4370	0,4292	0,4170	0,4043
2,6	0,4870	0,4700	0,4596	0,4518	0,4396	0,4250
2,7	0,5084	0,4914	0,4793	0,4716	0,4594	0,4466
2,8	0,5268	0,5101	0,4999	0,4921	0,4801	0,4655
2,9	0,5460	0,5294	0,5194	0,5100	0,4997	0,4853
3,0	0,5641	0,5478	0,5362	0,5286	0,5167	0,5024

Tabela 4.9: $|R|$ em função da frequência para o ponto B para os meses de julho a dezembro de 2007 as 13h, $\nu = 9 * 10^5 p$.

A tabela 4.10 mostra a média anual e o desvio padrão anual em função da frequência para o ponto B.

f[MHz]	média anual	desvio padrão
1	0,0890	0,1279
1,1	0,1108	0,1346
1,2	0,1345	0,1382
1,3	0,1593	0,1390
1,4	0,1848	0,1366
1,5	0,2107	0,1318
1,6	0,2366	0,1261
1,7	0,2620	0,1173
1,8	0,2874	0,1093
1,9	0,3149	0,1101
2	0,3417	0,1102
2,1	0,3677	0,1099
2,2	0,3929	0,1087
2,3	0,4170	0,1074
2,4	0,4398	0,1059
2,5	0,4621	0,1039
2,6	0,4829	0,1019
2,7	0,5030	0,0998
2,8	0,5219	0,0976
2,9	0,5405	0,0951
3	0,5576	0,0929

Tabela 4.10: Média anual e desvio padrão referente as tabelas 4.8 e 4.9 para o ponto B as 13h em 2007, $\nu = 9 * 10^5 p$.

A seguir apresenta-se os gráficos do coeficiente do módulo de Reflexão em função da frequência para os pontos A e B da tabela 4.4, referente aos valores calculados nas tabelas 4.5 a 4.9.

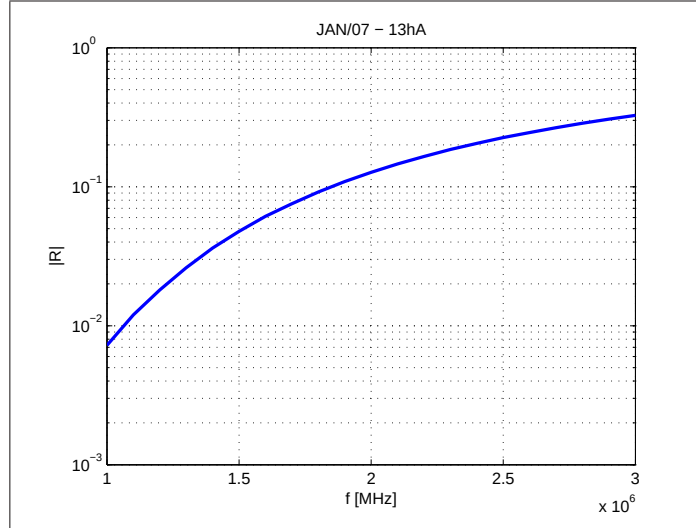


Figura 4.15: Coeficiente de reflexão em função da frequência, quando $\nu = 9 * 10^5 p$, incidência vertical do ponto A, propagação longitudinal para latitude = -20° e longitude = 50° , para as 13 horas, mês de janeiro de 2007.

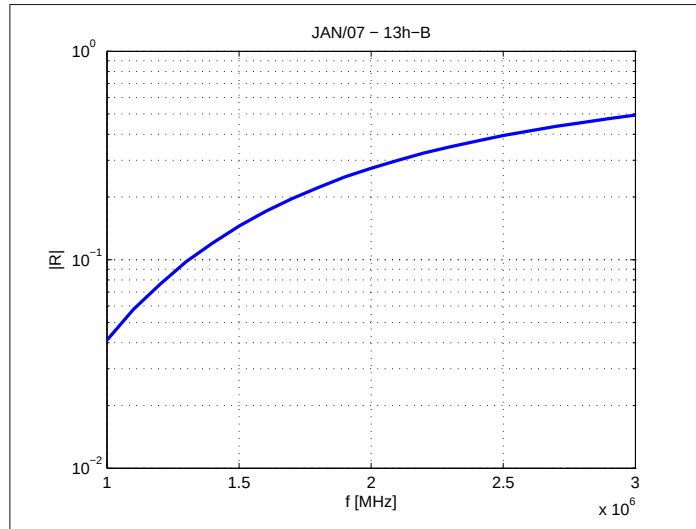


Figura 4.16: Coeficiente de reflexão em função da frequência do ponto B, quando $\nu = 9 * 10^5 p$, incidência vertical, propagação longitudinal para latitude = -20° e longitude = 50° , para as 13 horas, mês de janeiro de 2007.

As conclusões mais importantes são:

- a) o coeficiente de reflexão aumenta com a frequência tanto para o ponto A como para o ponto B.
- b) para os meses de verão o coeficiente de diminui com a altura, isto porque a densidade eletrônica diminui nesta época conforme as figuras 1.15 a 1.30, onde durante estes meses produz uma menor perda.

4.5.3 Modelo Carrijo

Até agora foi considerada a densidade variando linearmente com a altura e a solução da equação da onda sendo do tipo de Airy. Mas, na prática isto não acontece, como foi visto no capítulo 1 quando foram usados três modelos de densidade eletrônica Carrijo [?]. As figuras 4.17, 4.18, 4.19 mostram os valores da intensidade de campo para cada um dos modelos de densidade eletrônica dadas por Carrijo [?] e frequência de colisões $9 \cdot 10^5 p$. Para cada um dos casos foi traçado a intensidade do campo elétrico com a altura. Os gráficos foram feitos para as frequências $f_H=800$ kHz, $f=0,4$ MHz, $f=0,6$ MHz e $f=0,8$ MHz considerando propagação longitudinal e onda ordinária. Em todos os casos as condições de validade das soluções W.K.B. foram estabelecidas. Nota-se que a intensidade de campo é bastante atenuada para alturas superiores a 75km, isto porque as frequência de colisões ainda é alta para estas altitudes.

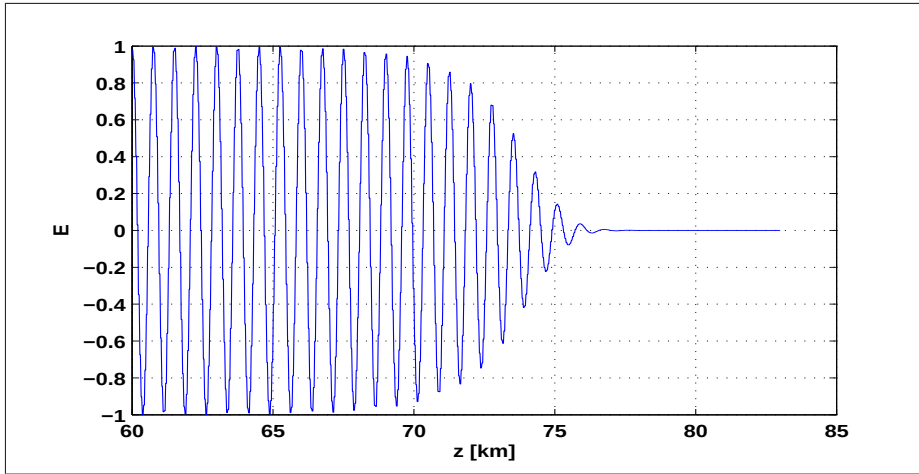


Figura 4.17: *Campo elétrico para incidência vertical, caso longitudinal, onda ordinária $f=0,4\text{MHz}$ e $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 9 \cdot 10^5 p$ e densidade eletrônica dada pela equação 1.38 (Modelo Carrijo)*

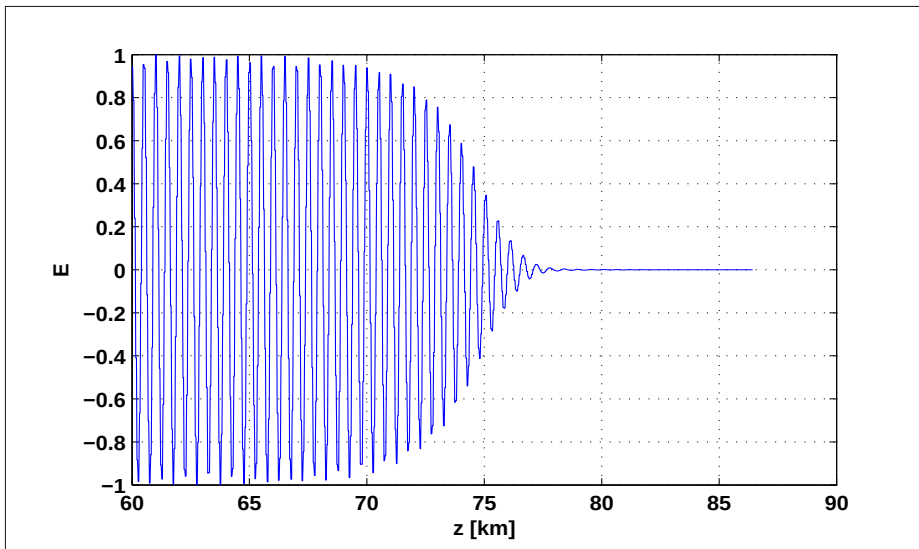


Figura 4.18: *Campo elétrico para incidência vertical, caso longitudinal, onda ordinária $f=0,6\text{MHz}$ e $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 9 \cdot 10^5 p$ e densidade eletrônica dada pela equação 1.38 (Modelo Carrijo)*

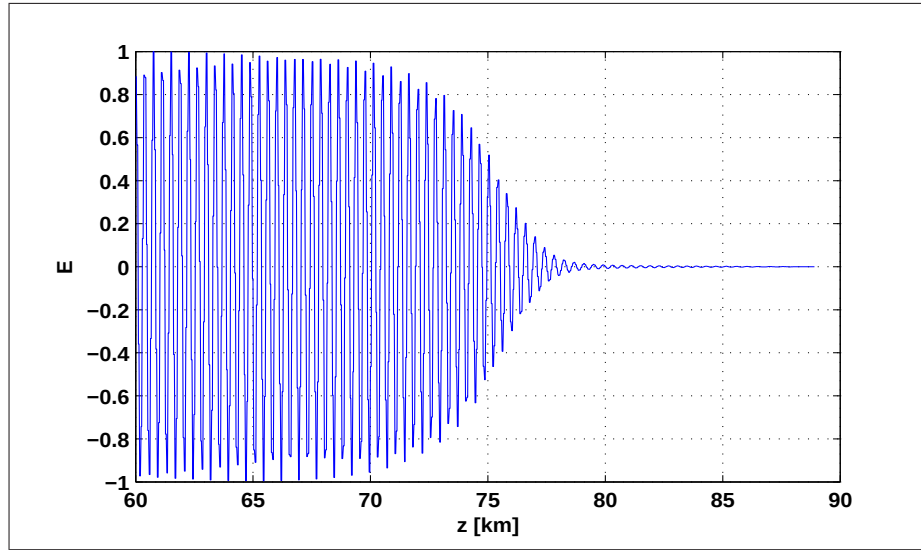


Figura 4.19: *Campo elétrico para incidência vertical, caso longitudinal, onda ordinária $f=0,8\text{MHz}$ e $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 9 \cdot 10^5\text{p}$ e densidade eletrônica dada pela equação 1.38 (Modelo Carrijo)*

Quando aumenta a frequência observa-se que o sinal atinge alturas mais elevadas, mas a atenuação continua grande devido ao valor de ν na baixa ionosfera.

4.5.4 Modelo (I.R.I.)

Seja agora uma ionosfera cujos os dados são obtidos através do site da Nasa onde é direcionado para o site I.R.I <http://modelweb.gsfc.nasa.gov/models/iri.html>. Escolhendo alguns dias, meses e ano para determinadas horas, obtendo assim a densidade eletrônica para poder calcular a intensidade de campo em função da altura.

As figuras a seguir 4.20 , 4.22, 4.24 e 4.26 são modelos de densidade eletrônica determinadas para os meses de janeiro, abril, julho e outubro de 2007 às 13 horas. Os pontos na superfície da Terra para obtenção das densidades eletrônicas serão A e B cujas as latitudes e longitudes estão dadas na

tabela 4.4.

O valor da intensidade de campo para os meses e hora dados acima, para as localidades A e B estão nas figuras 4.21, 4.23, 4.25 e 4.27. Para todos os casos $f_H=800$ kHz e $\nu = 9 \cdot 10^5 p$.

Densidade e campo para o mês de janeiro/2007,

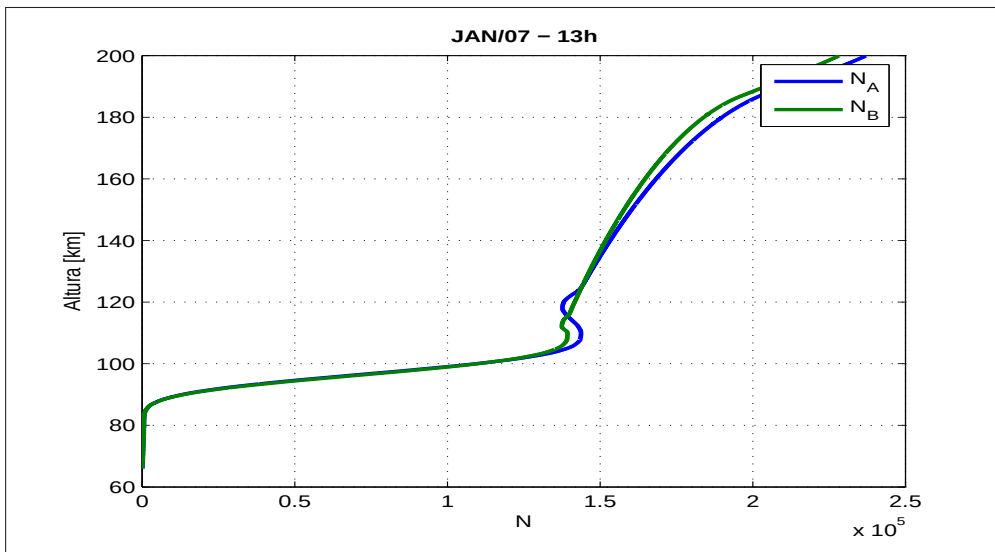


Figura 4.20: *Modelo de densidade eletrônica obtida pelo site IRI[?] para o mês de janeiro/07,13h para o ponto A e ponto B*

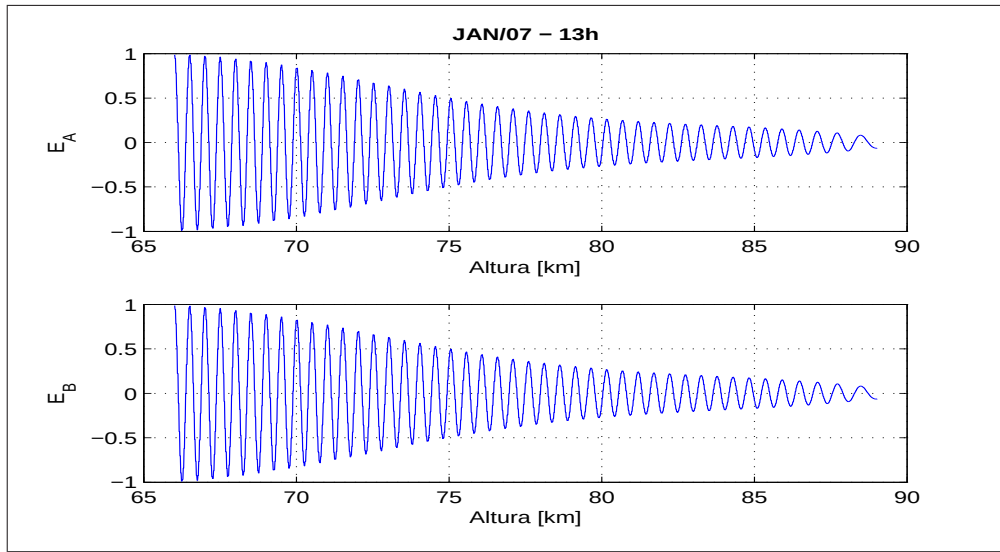


Figura 4.21: *Campo elétrico, usando os valores de densidade eletrônica do IRI [?], para o mês de janeiro/07, 13h para o ponto A e ponto B, para $f=0,6$ MHz, $f_H=800$ kHz e $\nu = 9 \cdot 10^5$ p, caso incidência vertical, longitudinal onda ordinária*

Densidade e Campo para o mês de abril/07,

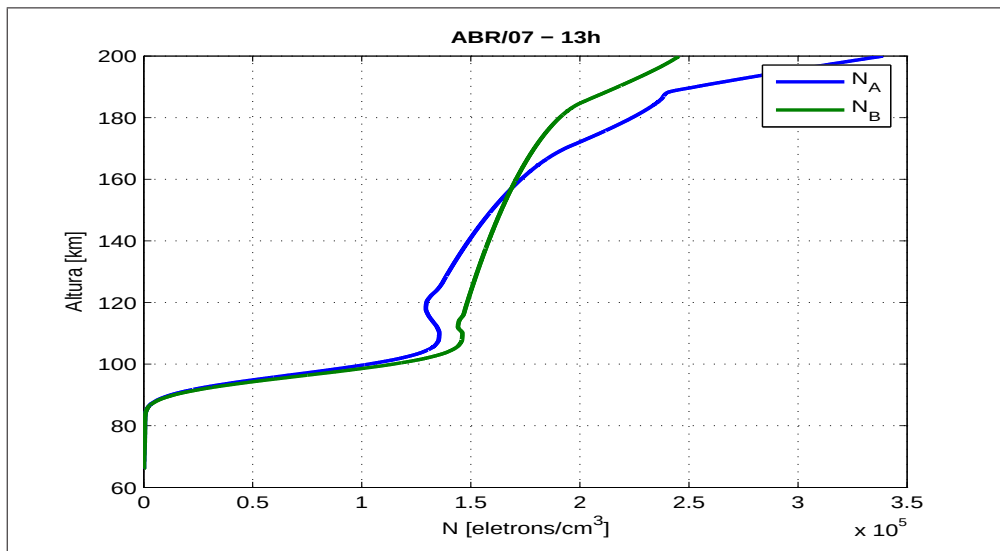


Figura 4.22: *Modelo de densidade eletrônica obtida pelo site IRI [?] para o mês de abril/07, 13h para o ponto A e ponto B*

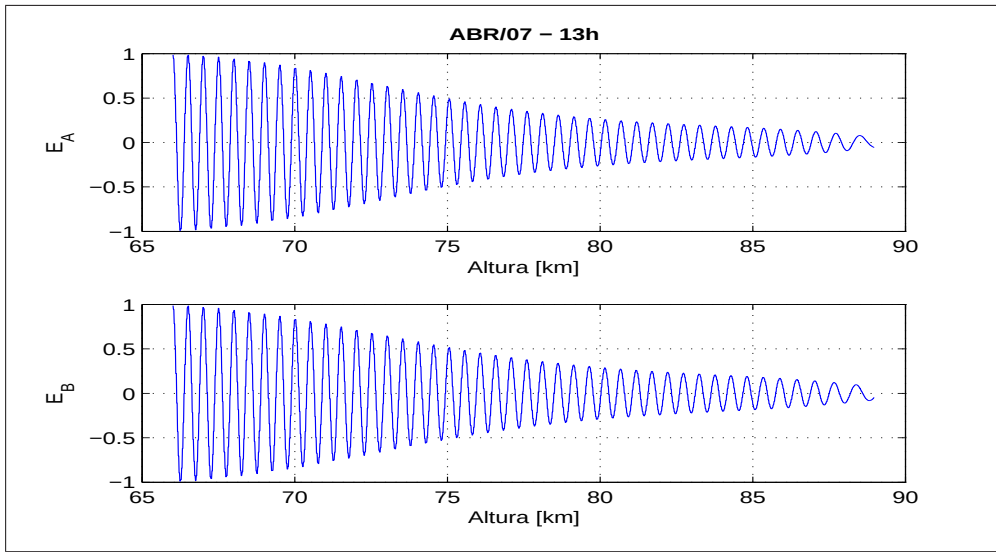


Figura 4.23: Campo elétrico, usando os valores de densidade eletrônica do IRI [?], para o mês de abril/07, 13h para o ponto A e ponto B, para $f=0,6$ MHz, $f_H=800$ kHz e $\nu = 9 \cdot 10^5$ p, caso incidência vertical, longitudinal onda ordinária

Densidade e Campo para o mês de julho/07,

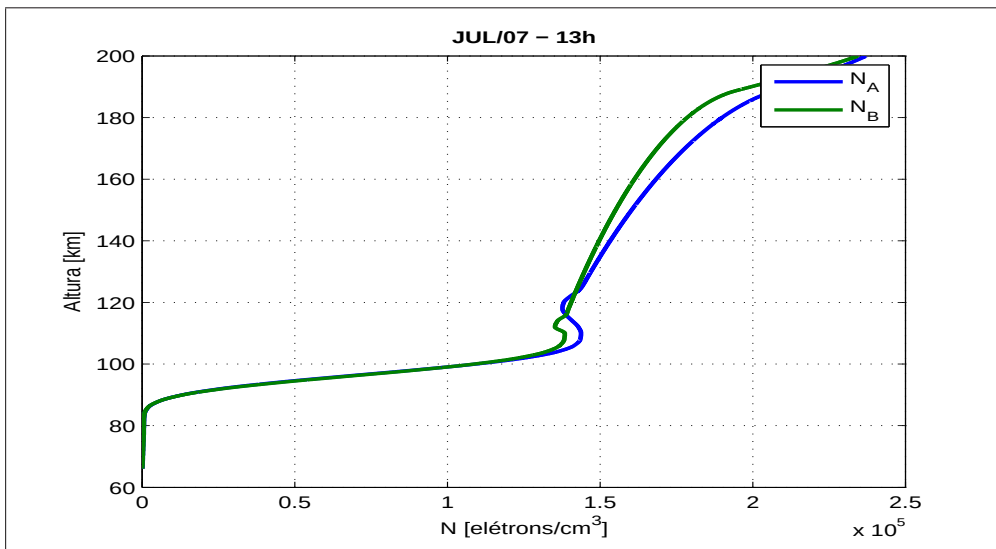


Figura 4.24: Modelo de densidade eletrônica obtida pelo site IRI [?] para o mês de julho/07, 13h para o ponto A e ponto B

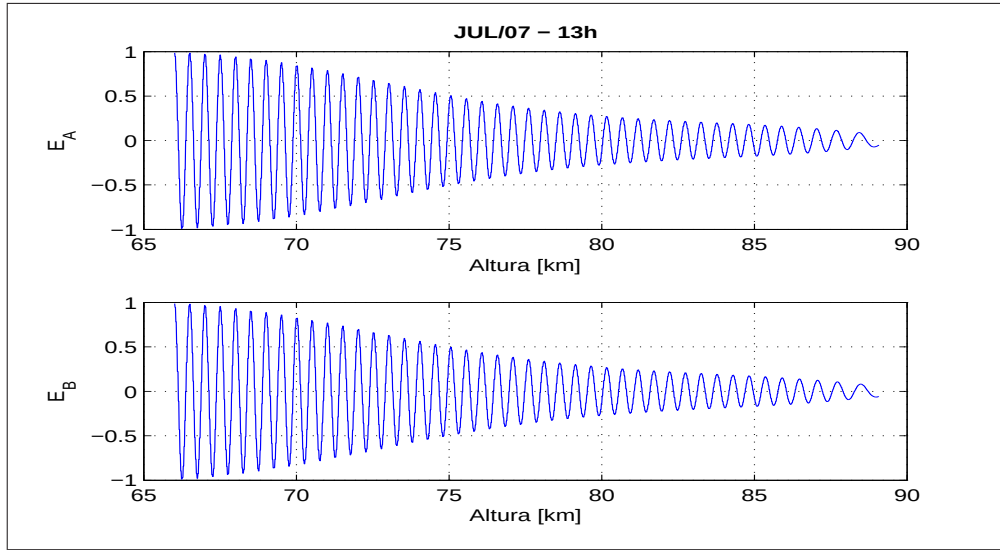


Figura 4.25: *Campo elétrico, usando os valores de densidade eletrônica do IRI [?], para o mês de julho/07, 13h para o ponto A e ponto B, para $f=0.6\text{MHz}$, $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 9 \cdot 10^5\text{p}$, caso incidência vertical, longitudinal onda ordinária*

Densidade e Campo para o mês de outubro/07,

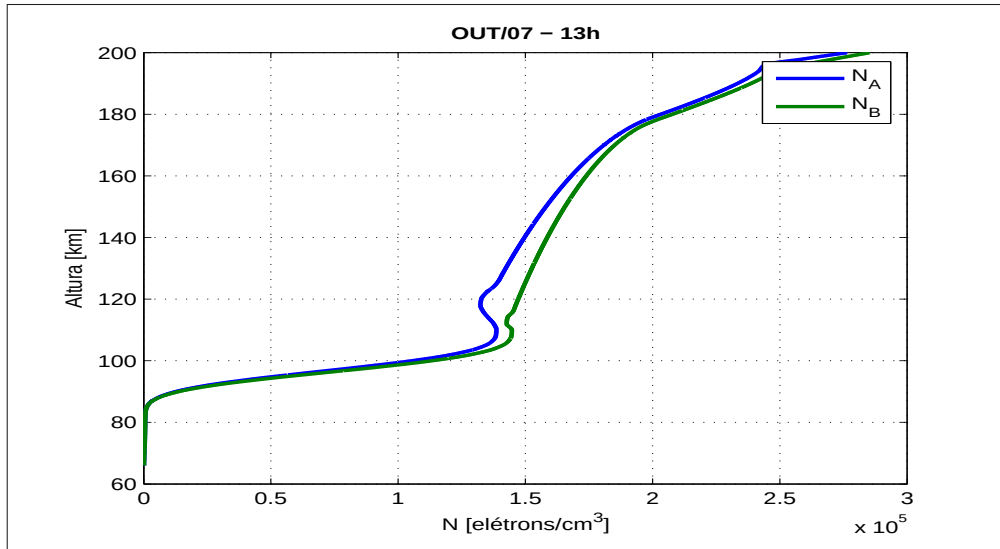


Figura 4.26: *Modelo de densidade eletrônica obtida pelo site IRI [?], para o mês de outubro/07, 13h para o ponto A e ponto B*

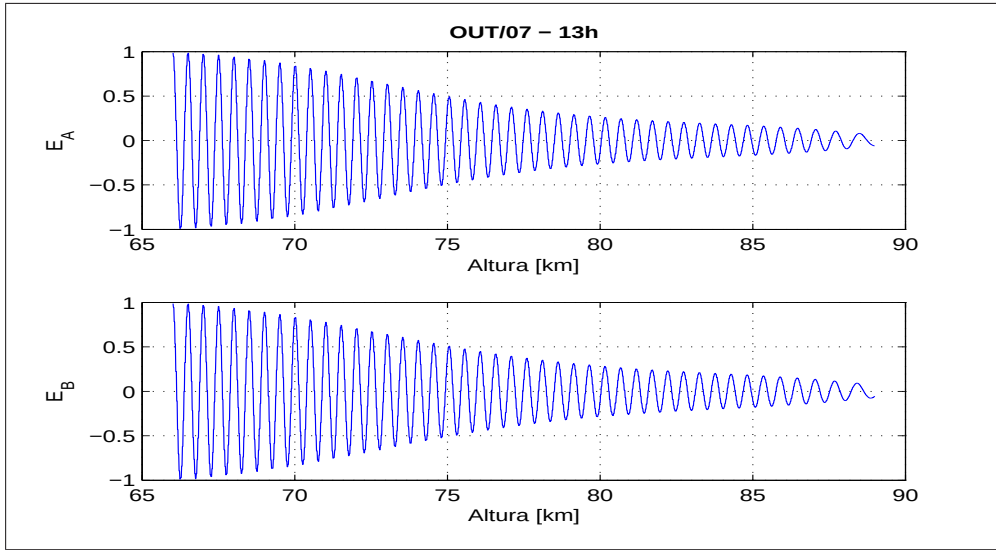


Figura 4.27: *Campo elétrico, usando os valores de densidade eletrônica do IRI [?], para o mês de outubro/07, 13h para o ponto A e ponto B, para $f=0.6\text{MHz}$, $f_H=800\text{kHz}$ e $\nu = 9 \cdot 10^5\text{p}$, caso incidência vertical, longitudinal onda ordinária*

Foi utilizada frequência de 0,6 MHz para todos os exemplos para vários perfis de densidade eletrônica para o cálculo do campo em incidência vertical, propagação longitudinal e modo ordinário.

Nas figuras de 4.20 até 4.27 estão os gráficos de campos em incidência vertical para densidade eletrônica do ano de 2007. Em todos, a intensidade de campo atinge valores considerados elevados em alturas até 90 km. Estes valores diferem dos apresentados por Carrijo [?], porque as densidades eletrônicas obtidas pelo modelo IRI [?] estão bem abaixo daquelas apresentados por Carrijo [?] até a altura de 90 km, como pode ser visto pelos gráficos 4.20, 4.24 e 4.26. Isto faz com que a intensidade de campo seja menos atenuada até a altura considerada.

O modelo apresentado por Carrijo [?] possui maior precisão do que o

modelo IRI [?], na baixa ionosfera, porque o mesmo foi calculado localmente através foguete, de maneira específica para a baixa ionosfera.

4.6 Conclusão

Neste capítulo foi dado o princípio básico das soluções W.K.B. [?] e suas aplicações no cálculo dos campos na ionosfera onde foram feitas simulações no matlab. Constata-se que estas aproximações são bem aceitas até cerca de 4 MHz considerando um modelo real de densidade eletrônica e frequência de colisões.

A análise foi restrita a incidência vertical com propagação longitudinal e transversal, para as ondas ordinária e extraordinária. Grande parte dos gráficos foi feitos apenas para o modo ordinário, devido grande similaridade entre este e o modo extraordinário. Testes de validades das soluções W.K.B., foram feitos no secção 4.3, mostrando tabelas onde pode se comprovar para um modelo linear as condições de validade das mesmas.

Utilizando os modelos de densidade obtidos por Carrijo [?] e do modelo IRI [?] pode-se calcular a intensidade de campo para vários modelos de densidade eletrônica. Houve uma discrepância entre os dois modelos, porque os valores de densidade obtidos pelo modelo IRI [?] são menos precisos para baixa ionosfera.

As tabelas 4.5 até 4.9 e as figuras 4.15 e 4.16 nos mostram coeficientes de reflexão, da onda para várias frequências e densidade eletrônica, considerando 13 horas e meses diferentes. Estas tabelas são bastante ilustrativas do comportamento da onda refletida com altura para várias frequências. Nota-se que a medida que a frequência aumenta o coeficiente o coeficiente de reflexão também aumenta.

Este procedimento poderia ser estendido para vários outros pontos no globo obtendo assim um comportamento geral da variação do coeficiente de reflexão em função da longitude e latitude.

Capítulo 5

APROXIMAÇÃO NO CÁLCULO DOS CAMPOS EM INCIDÊNCIA VERTICAL

5.1 Introdução

No estudo da propagação ionosférica diversas aproximações para o cálculo dos campos podem ser feitas, como é o caso das soluções W. K. B., o método da integral de fase, etc. Todas estas soluções falham quando a onda se aproxima dos chamados pontos de acoplamento [?]. Perto de cada um destes pontos desaparece a independência entre os raios ordinário e extraordinário, ou ainda entre a onda ascendente e descendente, e até mesmo há casos em que as quatro ondas se interagem mutuamente.

Exemplificando, quando a onda atinge as proximidades do ponto de reflexão, há um forte acoplamento entre os raios ascendente e descendente, portanto, pode-se chamá-lo de ponto de acoplamento.

O estudo do acoplamento de ondas tem sido alvo de grandes estudos do assunto como por exemplo, Försterling [?] , Rydbeck , Eckersley [?] , Clemmow e Heading [?] , Ellis [?] e Budden e Smith [?].

Försterling [?] foi um dos pioneiros no assunto, obtendo duas equações de

segunda ordem para o acoplamento, as quais serão oportunamente estudos no capítulo seguinte. Clemmow e Heading [?] iniciaram o estudo do acoplamento das ondas ionosféricas, mas baseando-se em quatro equações de primeira ordem.

Budden [?] e Clemmow voltaram a estudar as mesmas equações, chegando a alguns resultados completamente novos, inclusive obtendo as equações de Försterling [?] a partir das equações de primeira ordem, dadas por Heading . Os resultados apresentados por Budden [?] e Clemmow [?] apresentavam equações cujos coeficientes torna-se infinitos nos pontos de acoplamento, dando matrizes singulares impossibilitando o cálculo dos campos. Budden [?], baseado no trabalho feito por Heading [?] , desenvolveu sistemas de equações de primeira ordem que são válidas para as proximidades dos pontos de acoplamento. Para cada ponto de acoplamento foi desenvolvido um sistema de quatro equações de primeira ordem.

É interessante notar que o acoplamento entre os modos (0) e (X), surge quando a propagação deixa de ser transversal ou longitudinal, pois, como foi visto no capítulo anterior, quando o campo magnético terrestre faz 90° ou 0° com a direção de propagação, as duas ondas ordinária e extraordinária se propagam independentemente.

Inicialmente será feito neste capítulo um estudo das equações gerais para o acoplamento das ondas na ionosfera chegando às conhecidas equações de Försterling [?]. Para o cálculo dos campos na ionosfera diversas aproximações serão feitas nos índices de refração das ondas (0) e (X).

A figura 5.1, 5.2 e 5.3 mostra curvas de n_0^2 e n_X^2 para dois casos particulares de e para $Z = 0$, as quais serão de grande auxílio para o completo entendimento do restante do trabalho.

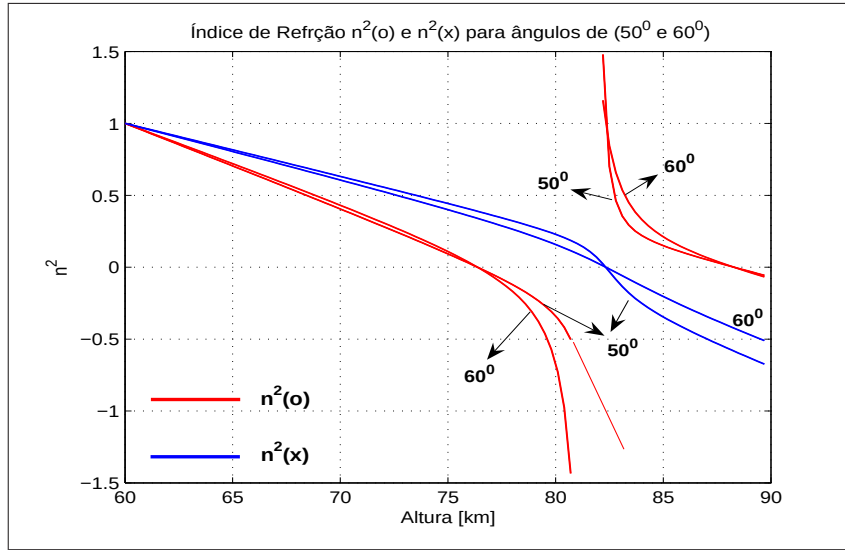


Figura 5.1: Índice de refração para modelo linear com $f=3\text{MHz}$, $\alpha_1=5000$, $h_0=60\text{ km}$, $f_H=0,8\text{ MHz}$, $v=0$

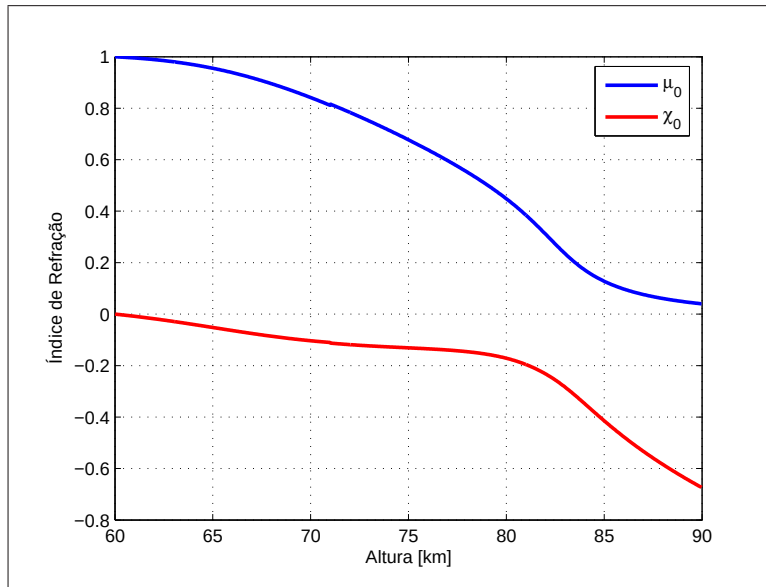


Figura 5.2: Parte real (μ_0) e parte imaginária (χ_0) do índice de refração da onda ordinária para modelo linear com $f=3\text{MHz}$, $\alpha_1=5000$, $h_0=60\text{ km}$, $f_H=0,8\text{ MHz}$, $\theta = 60$ e $v = 9 * 10^5 * p$

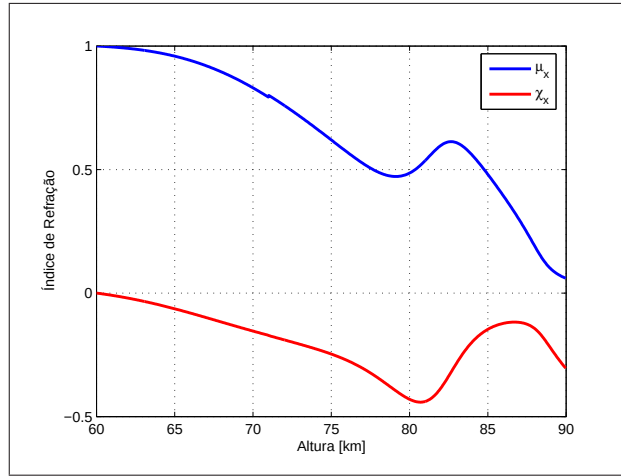


Figura 5.3: Parte real (μ_x) e parte imaginária (χ_x) do índice de refração da onda ordinária para modelo linear com $f=3\text{MHz}$, $\alpha_1=5000$, $h_0=60\text{ km}$, $f_H=0,8\text{ MHz}$, $\theta = 60$ e $v = 9 * 10^5 * p$

5.2 EQUAÇÕES GERAIS PARA O ACOPLAMENTO

As equações para o acoplamento foram ultimamente estudadas por Budden [?] , sendo por sua vez extraídas das equações dadas por Clemmow e Heading [?] na forma geral.

Seja $[M]$ a matriz susceptibilidade dada no capítulo I, e $M_{i,j}$ ($i = x, y, z$; $j = x, y, z$) seus elementos, o conjunto de equações 1.61, 1.67 e 1.68 poderá ser escrito como:

$$\frac{d\vec{e}}{dz} = -ik_0[T]\vec{e} \quad (5.1)$$

onde

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} E_x \\ -E_y \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} -\frac{S.M_x}{1+M_{zz}} & \frac{S.M_{zy}}{1+M_{zz}} & 0 & \frac{C^2+M_{zz}}{1+M_{zz}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{M_{yz}.M_{zx}}{1+M_{zz}} - M_{yx} & C^2 + M_{yy} - \frac{M_{yz}.M_{zy}}{1+M_{zz}} & 0 & \frac{S.M_x}{1+M_{zz}} \\ 1 + M_{xx} - \frac{M_{xz}.M_{zx}}{1+M_{zz}} & \frac{M_{xy}.M_{zx}}{1+M_{zz}} - M_{xy} & 0 & -\frac{S.M_{xz}}{1+M_{zz}} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

O sistema de equações 5.1 foi primeiramente apresentado por Budden [?], que mostra a dependência com z dos campos no caso mais geral quando o meio é horizontalmente estratificado.

O estudo da propagação ionosférica baseado nas equações acima pode não produzir um bom entendimento dos fenômenos da propagação ionosférica, principalmente no que diz respeito ao acoplamento das ondas ordinária e extraordinária.

Desta maneira Clemmow e Heading [?] iniciou o estudo das equações de primeira ordem, cujas novas variáveis são f_1, f_2, f_3, f_4 e que estão intimamente relacionadas com a onda ordinárias ascendente e ordinária descendente; extraordinárias ascendentes e extraordinárias descendentes respectivamente.

Seja q_i e S_i , $i = 1, 4$ auto valores da matriz $[T]$

$$\det([T] - q \cdot I_4) = 0 \quad (5.4)$$

Seja S_i , $i = 1, 4$ auto vetores da matriz $[T]$.

$$[T] \vec{s}_i = q_i \vec{s}_i \quad (5.5)$$

Seja $[S]$ a matriz quadrada cujas colunas são formadas pelos auto vetores s_i de $[T]$.

$$[T][S] = [S][Q] \quad (5.6)$$

onde $[Q]$ é uma matriz diagonal 4 x 4 cujos elementos são q_i (raízes da quártica de Booker).

Fazendo

$$\vec{e} = [S] \vec{f} \longrightarrow \vec{f} = [S]^{-1} \vec{e} \quad (5.7)$$

Das equações anteriores chega-se a

$$\vec{f}' = ik_0[Q] \vec{f} + [T] \vec{f} \quad (5.8)$$

$$[T] = -[S]^{-1}[S]$$

O sistema 5.8 foi pela primeira vez apresentado por Clemmow e Heading [?], $[T]$ é a matriz acoplamento.

Definindo

$$a_1 = - (T_{11} + T_{44})$$

$$a_2 = T_{11} T_{44} - T_{14} T_{41}$$

$$a_3 = T_{12}$$

$$a_4 = T_{14} T_{42} - T_{12} T_{44}$$

$$a_5 = T_{42}$$

$$a_6 = T_{44} T_{42} - T_{11} T_{42}$$

De 5.4 obtém-se

$$\vec{s}_i = \begin{bmatrix} a_3 q_i + a_4 \\ q_i^2 + a_1 q_i + a_2 \\ q_i^3 + a_1 q_i^2 + a_2 q_i \\ a_5 q_i^2 + a_6 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Quando $q_i = q_j$ para $i \neq j$ e $\vec{s}_i = \vec{s}_j$. Temos então que quando duas ou mais raízes de quártica de Booker se igualam, a matriz $[S]$ torna-se singular. Para sanar este problema Budden [?] define novos vetores s_i . Os pontos onde duas ou mais raízes se igualam são justamente os pontos de acoplamento, isto é, quando o sinal se aproxima de ponto de acoplamento o $\det[T]$ toma valores excessivamente grandes. Como por exemplo, quando o valor de q_1 se aproxima de q_2 , a onda ordinária ascendente (f_1) torna-se fortemente acoplada a onda ordinária descendente (f_2), pois o ponto onde $q_1 = q_2$ é justamente o ponto de reflexão de (0).

Considerando o primeiro caso quando $q_1 = q_2$, $q_3 \neq q_4 \neq q_1 \neq q_3$ pode-se escrever:

$$q_1 = \gamma + \beta \quad ; \quad q_2 = \gamma - \beta$$

onde β se anula justamente no ponto de reflexão.

Definindo uma nova matriz $[V]$ cujas colunas são s_γ , s_β , s_3 , s_4 , onde:

$$\vec{s}_\gamma = \begin{bmatrix} a_3\gamma + a_4 \\ \gamma^2 + \beta^2 + a_1\gamma + a_2 \\ \gamma^3 + 3\gamma\beta^2 + a_1(\gamma^2 + \beta^2) + \gamma a_2 \\ a_5\gamma + a_6 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\frac{1}{2}(\vec{s}_1 - \vec{s}_2) = \beta \begin{bmatrix} a_3 \\ 2\gamma + a_1 \\ 3\gamma^2 + 3\gamma^2 - \beta^2 + 2\gamma a_1 \\ a_5 \end{bmatrix} = \beta \vec{s}_\beta \quad (5.11)$$

$\vec{s}_3$ e $\vec{s}_4$ são dados por 5.9.

Das equações anteriores pode-se chegar a $[T][V] = [V][A]$

onde

$$[A] = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Definindo novas variáveis q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , por

Chega-se a $\vec{g}' = -ik_0[A]\vec{g} + [A]\vec{g}$ onde $[A] = - [V]^{-1} [V]$,

5.3 INCIDÊNCIA VERTICAL

Quando $\theta_I = 0$, as raízes q_1 a q_2 se igualam no ponto de reflexão da onda ordinária, ao passo que q_3 e q_4 se igualam no ponto de reflexão da onda extraordinária.

$$q_1 = -q_2 = n_0;$$

$$q_3 = -q_4 = n_x$$

Os sub-índices "0", "x"referem-se às ondas ordinárias e extraordinária.

Pode-se então fazer

$$q_1 = \gamma_0 + \beta_0 ;$$

$$q_2 = \gamma_0 - \beta_0$$

$$q_3 = \gamma_x + \beta_x ;$$

$$q_4 = \gamma_x - \beta_x$$

Comparando com as equações anteriores

$$\gamma_0 = \gamma_x; \beta_0 = n_0 ; \beta_x = n_x$$

Quando $n_0 = 0$, $n_x = 0$, $\vec{s}_1 = \vec{s}_2$, $\vec{s}_3 = \vec{s}_4$ respectivamente.

Tomando então uma matriz $[V]$ cujas colunas são formadas pelos vetores

$$s_{\gamma_0}, s_{\beta_0}, s_{\gamma_x}, s_{\beta_x}$$

$$\vec{s}_{\gamma_0} = (s_1 + s_2) ; \vec{s}_{\beta_0} = (s_1 + s_2)/n_0$$

$$\vec{s}_{\gamma_x} = (s_3 + s_4) ; \vec{s}_{\beta_x} = (s_3 + s_4)/n_x$$

Chega-se então ao resultado:

$$\overrightarrow{g} = -ik_0[A]\overrightarrow{g} + [A]\overrightarrow{g} \quad (5.13)$$

(onde ' indica d/dz)

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ n_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & n_x^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

onde $[A] = -k_0\psi[C]$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

tem-se $\psi = k_0^{-1}\rho_0'(\rho_0^2 - 1)^{-1}$, sendo ρ_0 a polarização da onda ordinária.

Finalmente chega-se às equações

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix}' &= -ik_0 \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix} - k_0\psi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix}' &= -ik_0 \begin{bmatrix} n_0^2 & 0 \\ 0 & n_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix} - k_0\psi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.16)$$

eliminando g_2 e g_4 de 5.17, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix}'' + k_0 \begin{bmatrix} n_0^2 + \psi^2 & 0 \\ 0 & n_0^2 + \psi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix} = k_0 \psi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

fazendo

$$F_0 = g_1 = (\rho_0 E_y - E_x) (\rho_0^2 - 1)^{-1/2} \quad (5.18)$$

$$F_0 = E_x^{(0)} / (\rho_0^2 - 1)^{1/2} \quad (5.19)$$

$$g_3 = -F_x = (\rho_0 E_x - E_y) (\rho_0^2 - 1)^{-1/2} \quad (5.20)$$

$$F_x = E_y^{(x)} / (\rho_0^2 - 1)^{-1/2} \quad (5.21)$$

Obtém-se as duas equações de segunda ordem

$$\begin{aligned} F_0'' + k_0^2(n_0^2 + \psi^2)F_0 &= k_0\psi'F_x + 2k_0\psi F_x' \\ F_x'' + k_0^2(n_x^2 + \psi^2)F_x &= k_0\psi'F_0 + 2k_0\psi F_0' \end{aligned} \quad (5.22)$$

As equações 5.22 apresentadas acima são chamadas de equações de Försterling [?], pelo fato de ter sido o primeiro a chegar em tais resultados. No entanto em seu trabalho original cometeu um erro de sinal, que foi mais tarde corrigido por Clemmow e Heading [?].

As equações de Försterling [?] possuem uma grande vantagem sobre o conjunto 5.8 pois nenhum de seus termos passam por descontinuidade nos pontos $n_0=0$ e $n_x = 0$. A primeira destas equações rege o comportamento do modo ordinário, enquanto a segunda o modo extraordinário.

O fator de acoplamento ψ é chamado de coeficiente de acoplamento e será analisada incompleto mais tarde. Quando ψ e ψ' são nulos para todo

z , a primeira equação é independente de F_x , e a segunda é independente de F_0 , ou melhor, quando o fator é diferente de zero, as duas equações F_0 e F_x são dependentes uma da outra, ou ainda elas estão unidas ou acopladas pelo fator ψ .

As equações de Försterling [?] serão alvos de todo restante do nosso estudo.

5.4 FATOR DE ACOPLAMENTO

O fator que apareceu anteriormente é básico para o estudo das equações de Försterling [?]. Será analisado aqui algumas de suas propriedades

$$\psi = \frac{1}{k_0 (\rho_0 - 1)} \frac{d\rho_0}{dz} \quad (5.23)$$

Substituindo a polarização da onda ordinária ρ_0 e derivando

$$\psi = \frac{1}{k_0} \frac{iY_T^2 Y_L^2}{4(1 - X - iZ)^2 Y_L^2 + Y_T^2} \quad (5.24)$$

o denominador de ψ será nulo em

$$X = 1, Z = Z_C = \pm \frac{1}{2} \left| \frac{Y_T^2}{Y_L} \right| \quad (5.25)$$

O ponto onde ocorre simultaneamente 5.25 é chamado de ponto de acoplamento crítico. A altura onde ocorre 5.25 é a altura crítica, e a frequência da onda de frequência crítica.

Caso seja considerado o plano complexo, sempre existirá dois pontos onde o denominador de 5.24 se anula que são.

$$X = 1 - iZ \pm iZ_C \quad (5.26)$$

onde

$$Z = Z_C = \frac{1}{2} \left| \frac{Y_T^2}{Y_L} \right| \quad (5.27)$$

Z_C é chamado de Z crítico.

Para frequência alta pode-se fazer $Z=0$

$$\psi = \frac{iY_T^2 Y_L^2}{4(1-X)^2 Y_L^2 + Y_T^2} \cdot \frac{\alpha}{k_0} \quad (5.28)$$

$$G(x) = Im(\psi)$$

A função $|G(x)|$ atingirá o máximo em $X=1$ e este máximo será

$$|G_m(X)| = \frac{Y_T}{Y_L} \cdot \frac{\alpha}{k_0} \quad (5.29)$$

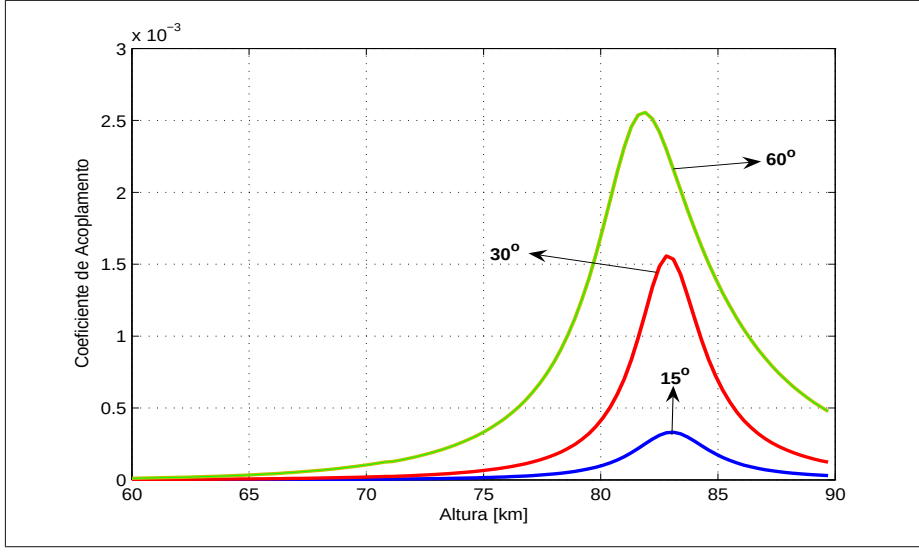


Figura 5.4: *Módulo do coeficiente de acoplamento $|\Psi|$ para modelo linear com $\theta = 15^\circ, 30^\circ$ e 60° , $f=3\text{MHz}$, $\alpha_1=5000$, $h_0=60\text{ km}$, $f_H=0,8\text{ MHz}$, $\nu = 0$.*

ou

$$|G_m(x)| = -\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\alpha_1}{f_H} \cdot \frac{c}{2\pi f^2} \cdot 8,061 \star 10^7 \quad (5.30)$$

α_1 é o gradiente da densidade eletrônica, e (c) a velocidade da luz no vácuo. Pela fórmula 5.30 vê-se que $|G_m|$ diminui com o aumento de f, e aumenta quando θ diminui (θ o ângulo entre $\vec{B}$ e a vertical).

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{8Y_T^2 Y_L^2 (1 - X)}{(4(1 - X)^2 Y_L^2 + Y_T^2)} \cdot \frac{\alpha^2}{k_0} \quad (5.31)$$

A figura 5.4 representa o gráfico de $|\psi|$ em função de z. Nota-se que o máximo da função $|G(x)|$ decresce com f. Quando o ângulo θ diminui as curvas tornam-se mais agudas, confirmando em uma pequena região a influência do fator Ψ . Quando θ pequeno o máximo de $|G(x)|$ é relativamente grande, mas neste caso a região de influência de Ψ se espalha.

5.5 SOLUÇÕES GERAIS PARA A REGIÃO DE ACOPLAMENTO

Pela figura 5.4, vê-se perfeitamente que a região de acoplamento é relativamente pequena, principalmente para o caso de θ também pequeno, o que facilitará o cálculo das ondas resultantes geradas dentro desta região.

Este capítulo se preocupa, simplesmente com soluções dentro da região de acoplamento. Todo o início do trabalho será baseado nas equações de Försterling [?].

Tomando então tais equações:

$$\begin{aligned} F_0'' + k_0^2(n_0^2 + \psi^2)F_0 &= k_0\psi'F_x' + 2k_0\psi F_x' \\ F_x'' + k_0^2(n_x^2 + \psi^2)F_x &= k_0\psi'F_0' + 2k_0\psi F_0' \end{aligned} \quad (5.32)$$

A primeira desta, como foi dito, dará o comportamento da onda ordinária, enquanto a segunda está ligada a extraordinária. A solução do conjunto 5.32 é muito difícil, mas empregando o método das variações dos parâmetros pode-se obter alguns resultados que são apresentados abaixo. Tomando as equações homogêneas da 5.32

$$\begin{aligned} F_0'' + k_0^2(n_0^2 + \psi^2)F_0 &= 0 \\ F_x'' + k_0^2(n_x^2 + \psi^2)F_x &= 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

As soluções das equações homogêneas são respectivamente $F_0^{(1)}$, $F_0^{(2)}$ e $F_x^{(1)}$, $F_x^{(2)}$ sendo que :

$F_0^{(1)}$ normalmente representa a onda ordinária ascendente

$F_0^{(2)}$ normalmente representa a onda ordinária descendente

$F_x^{(1)}$ normalmente representa a onda extraordinária ascendente

$F_x^{(2)}$ normalmente representa a onda extraordinária descendente

Aplicando a teoria das variações dos parâmetros obtém-se soluções para 5.32

$$\begin{aligned} F_0 &= F_0^{(1)} \int^z \frac{F_0^{(1)}}{w_1} h_2(z) dz + F_0^{(2)} \int^z \frac{F_0^{(1)}}{w_1} h_2(z) dz \\ F_x &= \frac{1}{2k_0 i} F_x^{(1)} \int_a^z F_x^{(2)} h_1(z) dz + \frac{1}{2k_0 i} F_x^{(2)} \int_z^c F_x^{(1)} h_1(z) dz \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= F_0^{(1)} F_0'^{(2)} - F_0^{(2)} F_0'^{(1)} \\ w_2 &= F_x^{(1)} F_x'^{(2)} - F_x^{(2)} F_x'^{(1)} \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} h_1 &= k_0 \frac{d\psi}{dz} F_0 + 2k_0 \psi \frac{dF_0}{dz} \\ h_2 &= k_0 \frac{d\psi}{dz} F_x + 2k_0 \psi \frac{dF_x}{dz} \end{aligned} \quad (5.36)$$

O conjunto de equações 5.34 é na verdade um sistema de equações integrais, cuja soluções exata são quase sempre impossíveis, no entanto poderia resolvê-lo pelo processo das aproximações sucessivas, mas também a álgebra seria muito complicada. Principalmente devido ao fato de se estar trabalhando com funções que tem um comportamento todo especial como é caso do índice de refração.

O sistema 5.32 poderia ser também resolvido numericamente, mas a onda acoplada resultante é muito pequena, os erros de computação poderiam dar resultados completamente diferentes dos verdadeiros.

Pelos motivos expostos acima serão feitas algumas simplificações que são perfeitamente válidas. A região de acoplamento da ionosfera é relativamente pequena devido ao fato do coeficiente não atingir um máximo, e depois cair rapidamente. Calcula-se no início da onda resultante, quando a energia inicial é devida simplesmente a uma onda ordinária no sentido ascendente, passando logo em seguida ao cálculo da onda resultante produzindo uma onda extraordinária descendente. Como será visto na sessão seguinte, combinações

destes dois cálculos dará um traço "Z" da ionosfera.

5.6 ESTUDO DA REGIÃO DE ACOPLAMENTO IONOSFÉRICO QUANDO AS SOLUÇÕES W.K.B. SÃO VÁLIDAS

Como mencionado, quando a frequência de colisão ν não é baixa, as aproximações W.K.B. podem apresentar bons resultados para soluções dos campos em toda ionosfera. No entanto, quando a frequência de colisão e a frequência da onda são baixas, as soluções W.K.B. não são bem aceitas. Neste parágrafo será considerado o caso em que as aproximações W.K.B. são válidas para as ondas (0) e (X) em toda a ionosfera, isto irá auxiliar bastante o entendimento do acoplamento entre as ondas (0) e (X). Quando Z aumenta n^2 e du/dz , não serão tão pequenos e tão grandes respectivamente a ponte da condição 5.37 deixa de ser válida. Quando $Z=0$, as soluções W.K.B. logicamente deixam de ser válidas para a onda ordinária nas aproximações $X=1$, e para a onda extraordinária perto de $X=1-Y$. Toma-se então como soluções das equações de homogêneas de Forsterling 5.33:

Para onda (0):

$$\begin{aligned} F_0^{(1)} &= f_0^{-1/2} e^{(-ik_0 \int^z f_0 dz)} \\ F_0^{(2)} &= f_0^{-1/2} e^{(+ik_0 \int^z f_0 dz)} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Para a onda (X):

$$\begin{aligned} F_x^{(1)} &= f_x^{-1/2} e^{(-ik_0 \int^z f_x dz)} \\ F_x^{(2)} &= f_x^{1/2} e^{(+ik_0 \int^z f_x dz)} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Onde:

Os índices (1) e (2), indicam respectivamente ondas ascendentes e descendentes.

Pode-se dividir este caso ainda em dois como mostrado abaixo.

a) Onda extraordinária resultante pela incidência de uma onda ascendente na região de acoplamento.

Neste capítulo esta-se em geral, interessado no cálculo da onda resultante que surge numa região de acoplamento devido a incidência de uma onda ordinária ou extraordinária. Como é visto nos cálculos numéricos que são apresentados nos parágrafos seguintes a energia resultante do acoplamento é muito pequeno o ponto de se poder desprezar o segundo termo de uma das equações 5.32 que está relacionada com a onda incidente.

Considera-se aqui o resultado produzido pela incidência de uma onda (0) na região de acoplamento. Para este caso a onda resultante será a (X), e pelo motivo da mesma ser muito pequena com relação da onda (0), o conjunto de equações 5.32 ficará:

$$\begin{aligned} F_0'' + k_0^2 f_0^2 F_0 &= 0 \\ F_x'' + k_0^2 f_x^2 F_x &= k_0 \psi' F_0 + 2k_0 \psi F_0' \end{aligned} \quad (5.39)$$

Esta-se interessado no valor de F_x que será dado pela segunda equação 5.39. Considerando como sendo válidas as soluções W.K.B. F_x^1 e F_x^2 dadas pelo conjunto 5.38 e $h_1 = k_0 \psi' F_0 + 2k_0 \psi F_0'$, sendo a solução da primeira equação de 5.39, que poderá ser escrita como:

$$F_0 = F_0^{(1)} + R_0 \cdot F_0^{(2)} \quad (5.40)$$

onde R_0 é o coeficiente de reflexão dado pela teoria da integral de fase

dado por:

$$R_0 = ie^{(-ik_0 \int^z f_0 dz)} \quad (5.41)$$

Z_0 é o ponto no plano complexo onde $n_0=0$.

Foi calculado, baseado nas aproximações acima, descritas a solução para o sistema 5.32, que poderia ser anteriormente calculada somente por solução numérica, ou aproximação sucessivas.

O primeiro termo de 5.36 representa uma onda extraordinária ascendente, enquanto o segundo uma onda extraordinária descendente.

Para o caso de altas frequências ($f > 3\text{MHz}$) e θ não muito pequeno pode-se fazer as seguintes aproximações ($\theta \geq 5^\circ$)

$$h_1 = 2k_0\psi \frac{dF_0}{dz} (\Psi' F_0 \text{ muito pequeno}) \quad (5.42)$$

onde

$$\frac{dF_0}{dz} = -ik_0 f_0^{1/2} e^{(-ik_0 \int^z f_0 dz)} + R_0 ik_0 f_0^{1/2} e^{(-ik_0 \int^z f_0 dz)}$$

A onda extraordinária ascendente ou seja primeiro termo de 5.36, será expressa por:

$$k_0 f_x^{-1/2} e^{(-ik_0 \int^z f_x dz)} \int^z \psi \left(\frac{f_0}{f_x} \right)^{1/2} \left(\exp(-ik_0 \int^z (f_0 - f_x) dz) + dz \right) + R_0 e^{(ik_0 \int^z (f_0 - f_x) dz)} dz \quad (5.43)$$

5.7 APROXIMAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM E RESULTADOS NUMÉRICOS

Será feita agora uma aproximação de primeira ordem para calcular os campos na ionosfera e será visto que a mesma produz bons resultados pois o

fator de acoplamento contribui pouco. Desprezando o coeficiente de acoplamento e sua derivada no lado direito do conjunto 5.32, as equações de Försterling [?] ficam,

$$F_0'' + k_0^2(n_0^2 + \psi^2)F_0 = 0 \quad (5.44)$$

$$F_x'' + k_0^2(n_x^2 + \psi^2)F_x = 0 \quad (5.45)$$

Pelas equações acima observa-se que a solução do conjunto 5.44 e 5.45 é bastante similar as equações para o caso transversal e longitudinal estudadas no capítulo 4, bastando substituir nas soluções W.K.B. o valor de n_0^2 e n_x^2 , respectivamente, por f_0^2 e f_x^2 . Para os casos numéricos apresentados a seguir será usado o perfil de densidade eletrônica do mês de janeiro de 2007 às 13horas, o qual passa a ser chamado de perfil2, cuja densidade eletrônica é dada na figura 5.5.

O modelo de frequência de colisões usado em todos os exemplos que segue será o mesmo utilizado ao longo de todo o trabalho e dado no capítulo 1, referente a equação 1.36 ou seja, $\nu = 9 * 10^5 * p$, onde p é a pressão.

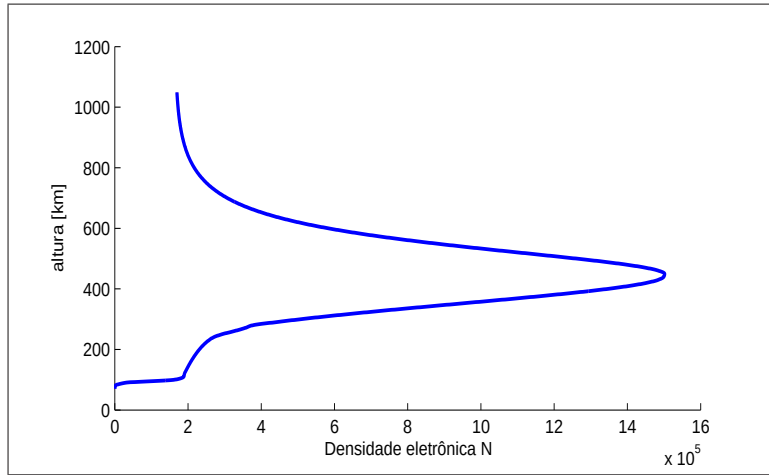


Figura 5.5: *Perfil da densidade eletrônica I.R.I.(elétrons/cm³) da ionosfera do perfil2(13h jan 2007).*

Antes de ser apresentado o valor da intensidade de campo calculado para cada modelo, são fornecido os gráficos da parte real e imaginária do índice de refração para-se termos uma idéia de como os mesmos variam com a altura dentro da ionosfera para os modelos de densidade eletrônica (perfil2) e frequência de colisões dado.

A figura 5.6 mostra a parte real do índice de refração do modo ordinário para o modelo do perfil2, $f=1,2$ e 3MHz , $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta = 45^\circ$, e $\nu = 9 \cdot 10^5 * p$. Observa-se que o valor do índice diminui com a frequência.

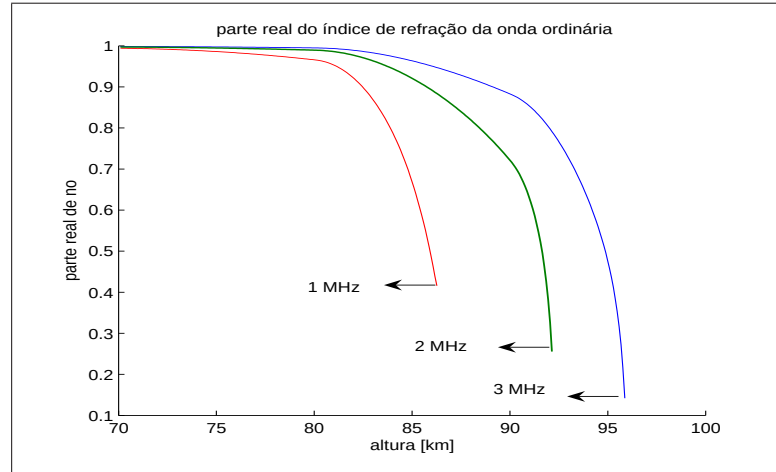


Figura 5.6: *Parte real do índice de refração do modo ordinário para o modelo do perfil2, $f=1,2$ e 3MHz , $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta = 45^\circ$, e $\nu = 9 \cdot 10^5 * p$.*

A figura 5.7 mostra a parte imaginária do índice de refração do modo ordinário para o modelo do perfil2, $f=1,2$ e 3MHz , $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta = 45^\circ$, e $\nu = 9 \cdot 10^5 * p$. Observa-se que este valor diminui com a frequência, isto explica porque a atenuação aumenta quando se diminui a frequência.

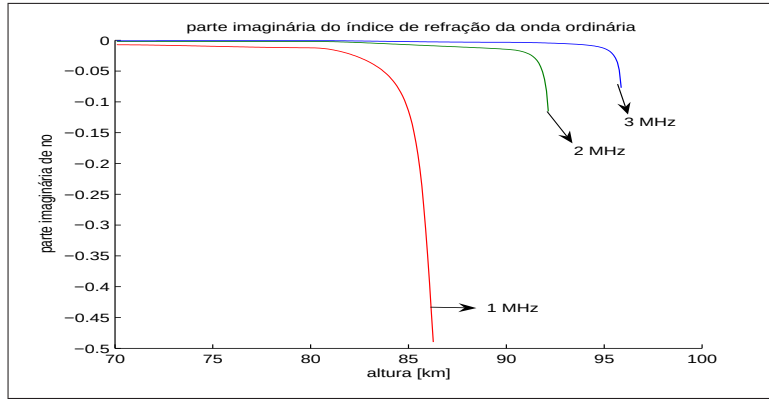


Figura 5.7: *Parte imaginária do índice de refração do modo ordinário para o modelo do perfil2, $f=1, 2$ e 3MHz , $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta = 45^\circ$, e $\nu = 9 * 10^5 * p$.*

A figura 5.8 mostra a parte real do índice de refração para as ondas ordinária e extraordinária para $f=3\text{MHz}$. Observa-se que o valor absoluto para a onda extraordinária é maior do que o valor da onda ordinária, isto era de se esperar pois a mesma atenua com maior intensidade para a mesma frequência.

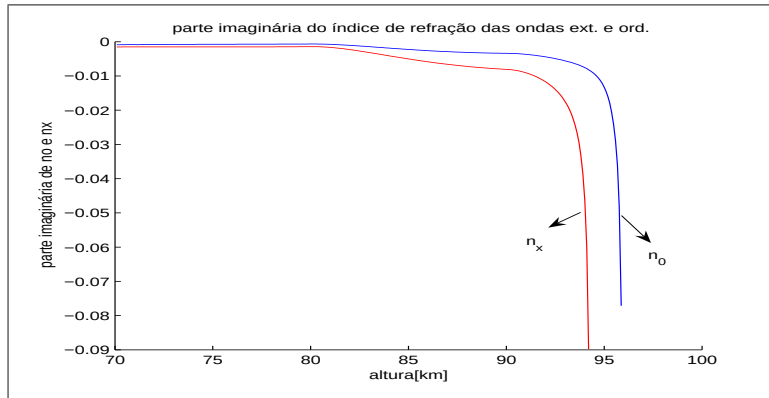


Figura 5.8: *Parte imaginária do índice de refração para as ondas ordinária e extraordinária para $f=3\text{MHz}$, perfil2 e modelo de colisões $\nu = 9 * 10^5 * p$.*

As figuras 5.9 e 5.10 nos mostram o log na base 10 do Valor absoluto do

índice de refração n_o e n_x , respectivamente e do coeficiente de acoplamento em função da altura (km) para $f=3\text{MHz}$, $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta = 45^\circ$, e $\nu = 9*10^5 * p$.

O coeficiente de acoplamento é muito menor do que o índice de refração para a onda ordinária e extraordinária como pode ser observado pelas figuras 5.9 e 5.10. Isto justifica o uso das equações 5.44 e 5.45 e pode-se também fazer $f_0^2 \cong n_0^2$ e $f_x^2 \cong n_x^2$.

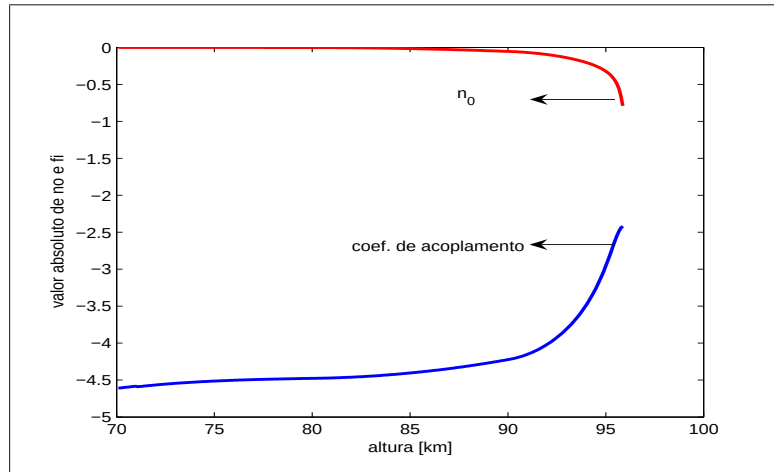


Figura 5.9: Log na base 10 do Valor absoluto do índice de refração n_o e do coeficiente de acoplamento da onda ordinária em função da altura (km) para $f=3\text{MHz}$, $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta = 45^\circ$, e $\nu = 9 * 10^5 * p$.

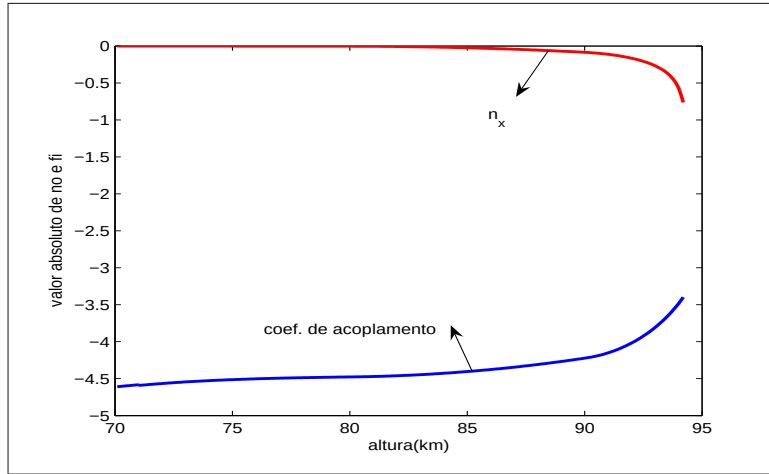


Figura 5.10: Log na base 10 do valor absoluto do índice de refração n_x e do coeficiente de acoplamento onda extraordinária em função da altura (km) para $f=3\text{MHz}$, $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta = 45^\circ$, e $\nu = 9 * 10^5 * p$.

5.7.1 Onda ordinária

Desprezando o fator de acoplamento e sua derivada do lado direito da equação de Försterling [?] para a onda ordinária, o campo dado pela solução W.K.B. é expresso por,

$$F_0^{(1)} = f_0^{-1/2} e^{(-ik_0 \int^z f_0 dz)} \quad (5.46)$$

$$F_0^{(2)} = f_0^{-1/2} e^{(ik_0 \int^z f_0 dz)} \quad (5.47)$$

Onde $f_0^2 = n_0^2 + \psi^2$;

O índice (1) representa a onda ordinária ascendente e o índice (2) representa a onda ordinária descendente.

A solução geral é dada por,

$$F_0 = F_0^{(1)} + R_0 F_0^{(2)} \quad (5.48)$$

Onde R_0 é o coeficiente de reflexão dado pela teoria da integral de fase da por

$$R_0 = ie^{(-ik_0 \int^z f_0 dz)} \quad (5.49)$$

A figura 5.11 dá envoltória do campo da onda ordinária(F_0) em função da altura (km) para $f=1,2$ e 3MHz , $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta = 45^\circ$, e $\nu = 9 * 10^5 * p$. Pode se observar que para freqüências maiores terão uma menor atenuação do campo, atingindo assim amplitudes mais elevadas para maiores alturas.

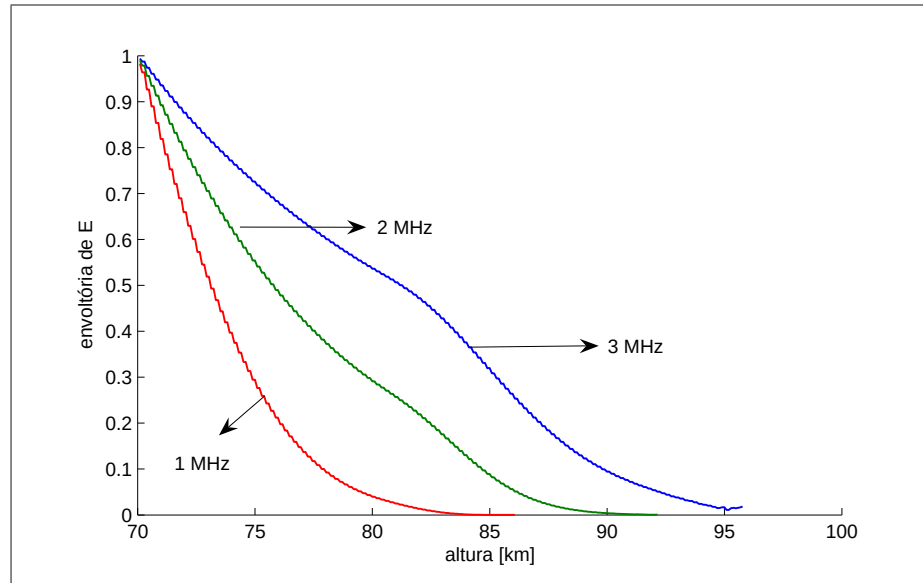


Figura 5.11: *Envoltória do campo da onda ordinária em função da altura (km) para $f=1, 2$ e 3MHz , $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta = 45^\circ$, e $\nu = 9 * 10^5 * p$.*

A figura 5.12 mostra o coeficiente de reflexão em função da freqüência da onda ordinária para $\theta = 30^\circ, 45^\circ$ e 90° , $f=3\text{MHz}$, $f_H=0.8\text{MHz}$, perfil2, $\nu =$

$9 * 10^5 * p$. Observa-se que o mesmo aumenta com o ângulo teta. Isto era de se esperar pois o índice de refração diminui com teta.

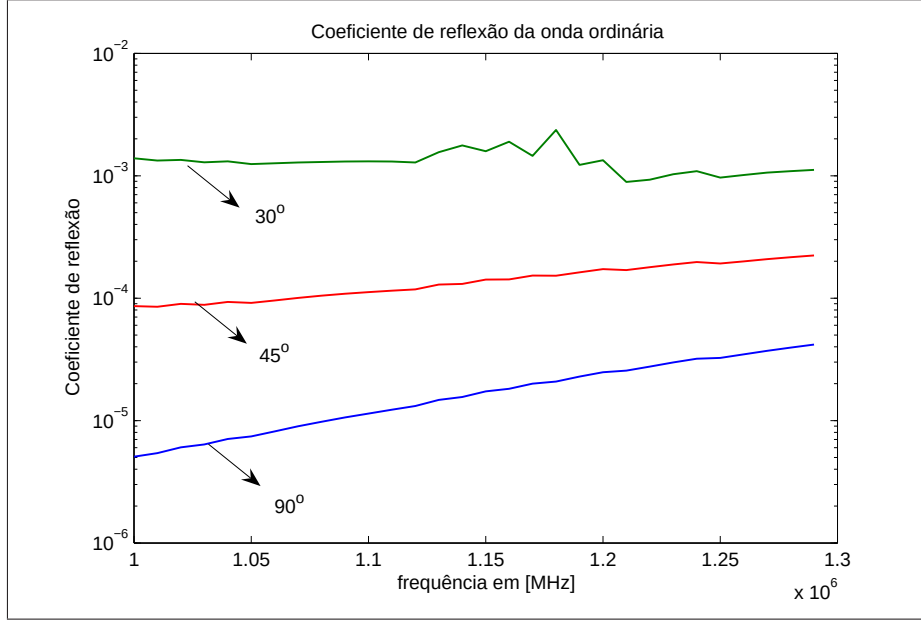


Figura 5.12: *Coeficiente de reflexão em função da frequência da onda ordinária para $\theta = 30^\circ, 45^\circ$ e 90° , $f=3\text{MHz}$, $f_H=0.8\text{MHz}$, perfil2, $\nu = 9 * 10^5 * p$*

5.7.2 Onda extraordinária

Para a onda(X)

$$F_x^{(1)} = f_x^{-1/2} e^{(-ik_0 \int^z f_x dz)} \quad (5.50)$$

$$F_x^{(2)} = f_x^{1/2} e^{(-ik_0 \int^z f_x dz)} \quad (5.51)$$

Onde $f_x^2 = n_x^2 + \psi^2$

A solução geral é dada por,

$$F_x = F_x^{(1)} + R_x F_x^{(2)} \quad (5.52)$$

Onde R_x é o coeficiente de reflexão dado pela teoria da integral de fase da por

$$R_x = ie^{(-ik_0 \int^z f_x dz)} \quad (5.53)$$

A figura 5.13 mostra a envoltória do campo da onda extraordinária (F_x) em função da altura (km) para $f=1, 2$ e 3MHz , $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta=45^\circ$, e $\nu = 9 * 10^5 * p$. Pode-se observar que para frequências maiores tem-se uma menor atenuação do campo, atingindo assim amplitudes mais elevadas para maiores alturas.

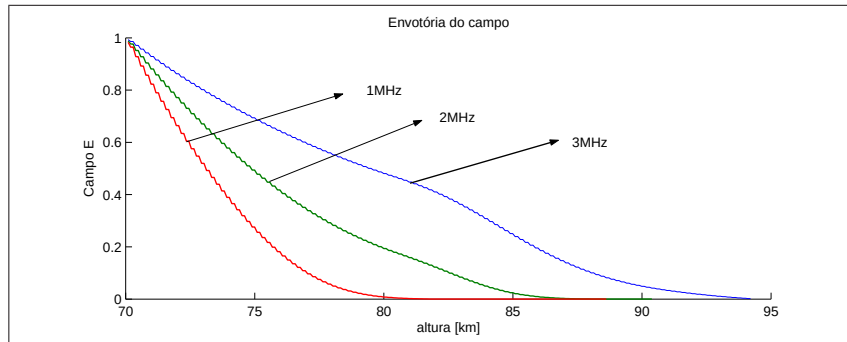


Figura 5.13: *Envoltória do campo da onda extraordinária em função da altura (km) para $f=1,2$ e 3MHz , $f_H=0,8\text{MHz}$, $\theta = 45^\circ$, e $\nu = 9 * 10^5 * p$.*

A figura 5.14 mostra o coeficiente de reflexão em função da frequência da onda extraordinária para teta $\theta = 30^\circ, 45^\circ$ e 90° , $f=3\text{MHz}$, $f_H=0.8\text{MHz}$, perfil2, $\nu = 9 * 10^5 p$. Observa-se que o mesmo aumenta com o ângulo teta. Isto era de se esperar pois o índice de refração aumenta com teta.

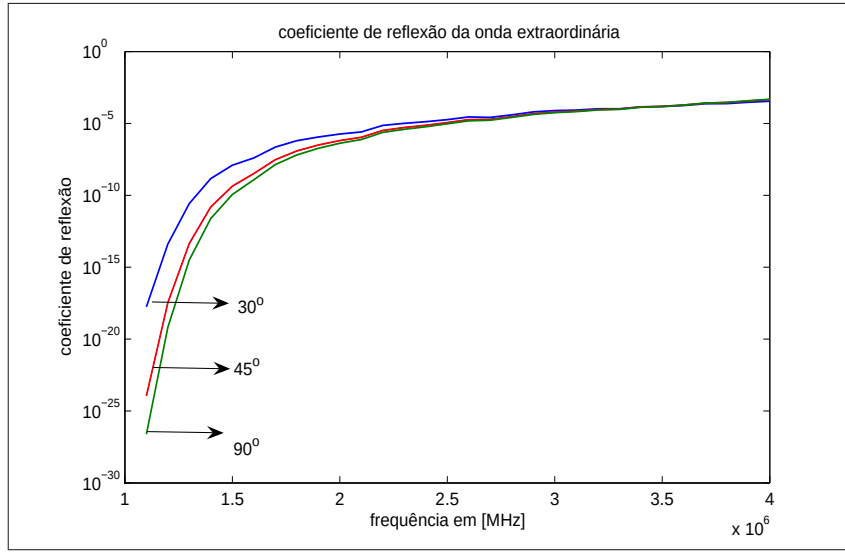


Figura 5.14: *Coeficiente de reflexão em função da frequência da onda extraordinária para $\theta = 30^\circ, 45^\circ e 90^\circ$, $f=3\text{Mhz}$, $f_H=0.8\text{Mhz}$, perfil2, $\nu = 9 * 10^5 * p$.*

A figura 5.15 mostra a envoltória do campo da onda extraordinária para $\theta = 30^\circ, 45^\circ e 90^\circ$, para $f=3\text{Mhz}$, $f_H=0.8\text{Mhz}$, perfil2, $\nu = 9 * 10^5 * p$. Para este caso quanto maior o ângulo teta menor será a atenuação do sinal e conseqüentemente maior a intensidade de campo. Isto está de acordo com figura 5.14 onde mostra que quando teta diminui menor é o coeficiente de reflexão.

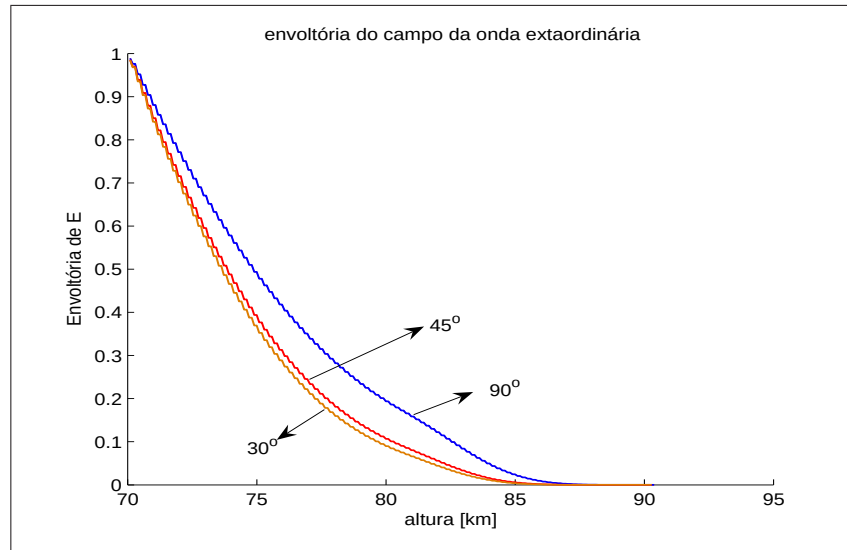


Figura 5.15: *Envoltória do campo da onda extraordinária para $\theta = 30^\circ, 45^\circ$ e 90° , para $f=3\text{Mhz}, f_H=0.8\text{Mhz}$, perfil2, $\nu = 9 * 10^5 * p$.*

5.8 ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES

Neste capítulo foi analisado o caso de incidência vertical, considerando o campo magnético fazendo um ângulo qualquer com a direção de propagação. Algumas conclusões podem se descritas:

- a- O coeficiente de acoplamento pode ser desprezado na maioria dos casos
- b- O conjunto de equações de Försterling [?] pode ser aproximado pelo conjunto 5.46, onde o segundo termo da igualdade pode ser desprezado.
- c- Para as frequências analisadas, ou seja, até 3Mhz o coeficiente de reflexão é muito pequeno.
- d- Sendo o coeficiente de reflexão pequeno, pode-se desprezar a onda descen-

dente.

e- Para a baixa ionosfera a frequência de colisões têm um papel fundamental no cálculo do campo e as ondas ordinária e extraordinária tem um comportamento parecido não tendo muito sentido falar em ponto de reflexão como é o caso quando se desconsidera as colisões. Isto pode ser observado pelas figuras [5.11](#) e [5.13](#), onde se observa que a onda ordinária atinge alturas mais elevadas.

Capítulo 6

CONCLUSÕES E ANÁLISE

6.1 Introdução

A ionosfera tem sido alvo de estudos de vários pesquisadores desde o século passado, pois a mesma exerce importante influência na propagação de ondas eletromagnéticas, principalmente em frequências até 30 MHz.

A maioria dos autores costuma dividi-la em camadas designada pelas letras D, E, F₁ e F₂. Durante o dia, às vezes, surge a camada esporádica E. Para o cálculo da intensidade de campo na ionosfera é necessário o conhecimento da densidade eletrônica (N), a frequência de colisões (ν), e do campo magnético terrestre. Partindo das equações de Maxwell, encontra-se o índice refração e as equações básicas para a ionosfera.

Como o interesse foi de calcular a intensidade de campo para a baixa ionosfera, usou-se inicialmente a densidade eletrônica determinada por Carrijo [?]. Em grande parte do trabalho usamos $\nu = 9.10^5$ *pressão, o que acredita apresentar uma boa precisão.

Nos capítulos 3 e 4 foram analisados as equações para os casos longitudinal e transversal. Quando a frequência de colisões foi desprezada no caso longitudinal a onda se reflete nos pontos $X = (1-Y)$ e $X = (1+Y)$. O sinal mais (+) representa o modo ordinário e o sinal menos (-) representa o modo

extraordinário. Para o caso transversal, os pontos de reflexão são dados por $X=1$ para a onda ordinária e $X=1-Y^2$, para a onda extraordinária. Então, quando ν for desprezada fica nítido os pontos onde ocorrem as reflexões das ondas.

Quando a frequência de colisões não é desprezada a altura de reflexão, ou seja, a altura onde o índice de reflexão se anula não é um valor real. Isto dificulta o entendimento da localização precisa, onde é realmente que a onda se reflete. Na realidade a reflexão se dá ao longo de toda a ionosfera, tornando-se uma reflexão continuada.

Na baixa ionosfera pode se verificar que o sinal é altamente atenuado, como pode ser visto no capítulo 4 e 5 deste trabalho. O coeficiente de reflexão aumenta com a frequência, como pode ser visto pela figura. Também na baixa ionosfera pode se verificar pelas figuras que quase não há distinção entre as ondas ordinárias e extraordinárias, porque a atenuação é muito elevada, atenuando a onda ordinária acentuadamente já no início da sua entrada na ionosfera.

6.2 Os métodos para o cálculo da intensidade de campo

Para o cálculo da intensidade de campo ao longo da ionosfera pode-se utilizar de várias técnicas tais como: a técnica da integral de fase, a solução numérica das equações diferenciais, o método das camadas finas (Carrijo [?]), e as soluções W.K.B. [?].

A técnica da integral de fase para cálculo do campo não fornece boa precisão, pois, se trata de uma expressão que a variação se dá apenas na fase

do sinal, não tendo uma variação da amplitude como é o caso das soluções W.K.B. [?].

As soluções numéricas produzem erro de arredondamento, pois quando se calcula a onda descendente parte-se de um ponto acima do ponto de reflexão e a intensidade de campo varia em alguns casos da ordem de 10^8 produzindo erro de arredondamento. Na solução aplicando a teoria das camadas finas, a ionosfera é estratificada em pequenas camadas. Em cada camada da ionosfera os parâmetros tais como: densidade eletrônica, frequência de colisões e campo magnético terrestre, são considerados constantes. Esta técnica produz um sistema linear com grande quantidade de equações. Para uma frequência da ordem de 500kHz pode-se ter 8000 equações com 8000 incógnitas, como pode ser visto em Carrijo [?]. Por isso para frequências acima 1MHz este método torna inviável. Esta técnica produz bons resultados onde podemos distinguir os quatro modos de propagação: ordinária ascendente, ordinária descendente, extraordinária ascendente e extraordinária descendente. Esta separação dos modos pode ser feita porque em cada camada o meio é considerado com parâmetros constantes.

Neste trabalho utilizou-se a técnica das soluções W.K.B. [?], porque elas se resumem em determinar uma integração numérica do índice de refração ao longo da ionosfera.

Quando a frequência de colisões é desprezada as soluções W.K.B. [?], não são válidas. Para uma ionosfera real, sempre temos colisões, e elas afetam diretamente na condição de validade das soluções W.K.B. [?] Foi observado que para o modelo de colisões adotado e para a maioria dos casos analisados com densidade eletrônica adotada, durante o dia ou durante à noite, as condições de validade das soluções W.K.B. [?] sempre são atendidas para frequências menores do que 3MHz. O programa desenvolvido para cálculo do campo sempre testa esta condição de validade.

6.3 Análise dos resultados

6.3.1 Meio ionizado sem campo magnético

No capítulo 2 analisou-se inicialmente um meio sem campo magnético. Neste caso existe apenas um modo de propagação, neste caso o meio é considerado isotrópico. Quando considera-se a frequência de colisões nula pode-se distinguir perfeitamente o ponto de reflexão da onda, ou seja, pode-se calcular exatamente a altura de reflexão. Este ponto se dá quando o índice de refração se anula, isto é onde $n=0$. A figura 2.5 é um bom exemplo quando considera-se $\nu=0$, o campo elétrico oscila até próximo do ponto de reflexão (aproximadamente 70 km), e a partir do mesmo a intensidade de campo decai de forma quase que exponencial.

Na maioria dos exemplos considera-se o perfil de densidade eletrônica sendo linear e a frequência de colisões constante, nesta condição as equações diferenciais que regem os campos na ionosfera são do tipo Stokes, cuja solução são as funções de Airy. A densidade eletrônica real não é linear e ν não é constante, mas este tipo de aproximação dá um bom entendimento do comportamento dos campos na ionosfera, isto é como variam em função da altura, frequência e frequência de colisões.

Quando a frequência de colisões não é desprezada a atenuação se dá ao longo de toda a ionosfera, como mostram as figuras 2.6 e 2.7, desta maneira fica difícil falar em ponto de reflexão, porque ela se dá em uma altura complexa. Em alguns casos considera-se a frequência de colisão constante, mas em um modelo real isto não acontece. O coeficiente de reflexão diminui rapidamente para uma quando a frequência de colisões aumenta, como pode ser visto na figura 2.8. Percebe-se que há uma diferença no cálculo do campo quando se considera a frequência de colisões constante do modelo real como

foi observado no capítulo 4.

Quando o perfil da densidade eletrônica é parabólica, a equação diferencial do campo é do tipo parabólica cilíndrica, como mostra a equação 2.51. Suas soluções são dadas pela equações 2.62 e 2.63.

O perfil bilinear tem pouca aplicação para o cálculo de intensidade de campo pois na maioria das frequências, o sinal se reflete distante do pico da densidade eletrônica. Quando a frequência está ligeiramente superior a MUF (máxima frequência utilizável) o coeficiente de reflexão torna-se pequeno e o sinal passa direto pela ionosfera como pode se visto na figura 2.10.

6.3.2 Propagação com campo magnético

Quando é considerando o campo magnético terrestre, a energia do sinal se divide em duas, uma considerada ordinária e outra considerada extraordinária, com pontos reflexões em alturas diferentes.

Para um entendimento melhor dos fenômenos foram considerados no capítulo 4 apenas os casos longitudinal e transversal. Quando se adotam modelo densidade eletrônica linear, e frequência de colisões constante, as equações diferenciais dos campos continuam a ser do tipo de Stokes e têm como soluções as funções de Airy. Isto facilita o cálculo do campo porque as funções de Airy são encontradas no Matlab. Para propagação longitudinal, considera o modelo de densidade eletrônica linear, e frequência de colisões constante, as soluções são exatas e o gráfico da intensidade de campo para as ondas ordinária e extraordinária pode ser visto nas figuras 3.3 até 3.12, para várias frequências. Observa-se uma rápida atenuação do sinal quando ν aumenta, quando se comparam as figuras 3.9 e 3.11.

O coeficiente de reflexão também pode ser obtido pela fórmula exata da equação 3.37, com a qual traça-se os gráficos das figuras 3.13, onde observa-se

um aumento quando a frequência diminui.

Se a frequência de colisões não é constante, a solução será obtida por um dos processos aproximados dados no item anterior.

Finalmente quando a ionosfera não apresenta densidade eletrônica linear e frequência de colisões constante, a intensidade de campo pode ser calculada apenas usando métodos aproximados.

Considerando a densidade eletrônica obtida pelo site da Nasa [?] e a frequência de colisões variando com a altura, pode-se calcular a intensidade de campo usando método W.K.B. [?], como foi apresentado no capítulo 4 e 5.

Quando se considera o caso longitudinal e transversal como no caso do capítulo 4, nas soluções W.K.B. [?] precisa-se calcular a integral da densidade eletrônica até o ponto de reflexão. As curvas mostrando a intensidade de campo foram feitas para vários casos de densidade eletrônica, durante o dia e durante a noite. Uma quadro de coeficiente de reflexão foi feita o qual é identificado como tabela . Observa-se o baixo valor do coeficiente de reflexão para frequências abaixo de 2 MHz.

Quando se considera frequência de colisão ν constante, no capítulo 3, observa-se que o coeficiente de reflexão diminui com a frequência da onda. Por outro lado, quando se tem o modelo de ν variando com a altura, observamos que o valor do módulo do coeficiente de reflexão aumenta com a frequência da onda, como mostra a tabela . Isto pode ser explicado porque a maior reflexão se dá na parte próxima a altura de reflexão, e quando a frequência se eleva o ponto de reflexão se dá em um ponto mais alto da ionosfera onde ν tem pequenos valores.

Para comparar os resultados das soluções W.K.B. [?] com a solução exata um programa utilizando uma densidade eletrônica linear e frequência de colisões constante foi elaborado. A intensidade de campo e o coeficiente de

reflexão foram calculados por ambos os métodos, e os resultados foram bastante próximos. Isto convalida o nosso programa.

No capítulo 5 foi considerado a incidência vertical mas com o campo magnético em uma direção genérica. Isto faz com que surja um acoplamento entre as ondas ordinária e extraordinária e as ondas ascendente e descendente. Quando se considera a propagação longitudinal ou transversal, este fator de acoplamento se anula, não existindo acoplamento entre esses modos.

O fator de acoplamento é muito pequeno para a maioria dos casos, permitindo ainda calcular o campo utilizando as equações de Fosterling [?] na sua forma homogênea. Isto facilita o cálculo dos campos porque basta substituir o valor do índice de refração $n_{o,x}$ pela soma $n_{o,x} + \psi$ nas fórmulas das soluções W.K.B. [?].

Foram feitos vários gráficos ilustrando o comportamento do campo e do coeficiente de reflexão, como mostra o capítulo 5. Em todos os casos as condições W.K.B. [?] foram válidas e a atenuação do sinal continua sendo elevada para baixas frequências.

6.3.3 Trabalhos futuros

O cálculo de campo na ionosfera é um assunto realmente de difícil solução, porque a ionosfera se apresenta como um dos meios mais complexos para se estudar devido à presença de densidade eletrônica, frequências de colisões e do campo magnético terrestre. Muito se fez até a década de 70, tendo como principal enfoque intensidade da onda refletida e do coeficiente de reflexão. Hoje tem-se vários grupos interessados no cálculo do atraso do sinal na ionosfera, através de traçado do raio tendo como principal objetivo, aplicações em precisão de GPS, cálculo de desvanecimento do sinal, zona de cobertura, etc..

Pouco tem sido feito no cálculo preciso do campo ao longo da ionosfera.

Acredita-se que este trabalho veio dar uma pequena contribuição neste sentido, sendo que se poderia usar seus resultados para futuros projetos em transmissão digital em HF, usando espalhamento ionosférico, medições da densidade eletrônica através de foguetes e satélites. Vários problemas ficaram sem serem resolvidos neste trabalho os quais podem ser tratados em trabalhos futuros e que estão descritos abaixo.

a- Cálculo do campo para incidência oblíqua. Neste trabalho houve preocupação apenas com a propagação em incidência vertical. Para se trabalhar outro tipo de incidência precisa-se lançar mão de outro tipo de solução diferente das soluções W.K.B. [?], e não tem outra saída a não ser métodos numéricos das soluções das equações diferenciais dada pelo conjunto de equações 5.1. Uma maneira para resolver os problemas apontados acima pela soluções numéricas e das camadas finas, talvez seria de se usar uma ionosfera dividida em camadas finas mas considerando os parâmetros variando de maneira linear, isto talvez pudesse reduzir substancialmente o número de equações lineares.

b- Cálculo do campo para frequências acima de 3MHz. Quando se usa frequências acima de aproximadamente 3MHz, nos nossos modelos, as soluções W.K.B. [?] não são mais atendidas. Isto porque o índice de refração assume valores pequenos tais que a condição 4.10 não é mais atendida. Uma solução para este tipo de problema poderia ser a de aproximar o índice de refração por uma função linear onde as soluções para a equação do campo é do tipo funções de Airy. Isto pode ser feito porque a região de não validade das soluções W.K.B, é muito pequena sendo restrita a poucos quilômetros.

c- Tabela para coeficiente de reflexão para quaisquer pontos sobre o globo. Com o dados da densidade eletrônica obtidos pelo site da Nasa [?] pode-se construir uma banco de dados para o coeficiente de reflexão para vários pontos do globo em função do mês e hora. Isto daria uma análise estatística,

na qual poder-se-ia determinar médias, desvio padrão e função densidade de probabilidade do coeficiente de reflexão, altura de reflexão e atenuação do sinal.

d- Traçado de raio. Grande parte dos programas existentes para cálculos de ondas na ionosfera tem como principal objetivo o traçado de raio. Conhecendo a densidade eletrônica em vários pontos da terra pode-se construir no espaço tridimensional um programa de interpolação também tridimensional para determinar o traçado de uma onda seja ela vindo de um satélite, ou seja de um transmissor terrestre, com isto poder-se-ia determinar com precisão o atraso do sinal, a atenuação do sinal para cada mês, hora e estação do ano. A marcação do tempo poderia ser obtida através de um GPS localizado no transmissor e outro no receptor.

Referências Bibliográficas

- [1] M.DOLUKHANOV. *Propagation of Radio Waves*. [S.l.: s.n.], 1971.
Translated from russian by Boris Kuznetsov.
- [2] STANDARD, U. *Geometric Altitude VS. Temperature, Pressure, Density, and the Speed of Sound Derived from the 1962 U.S. Standard Atmosphere*. Abril 2004. www.centennialofflight.gov/essay/Theories_of_Flight/atmosphere/TH1.htm.
- [3] CARRIJO, G. A. *Determinação da Densidade Eletrônica da Ionosfera Usando Foguete*. Dissertação (Tese Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, ITA, Brasil, 1983. Orientador: Prof. Fernando Walter.
- [4] NASA. *International Reference Ionosphere - IRI-2001*. 2001. <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/space/model/models/iri.html>.
- [5] L.S.BROWN. *Classical limit and the WKB approximation*. [S.l.: s.n.], 1972. 371-376 p.
- [6] BUDDEN, K. G. *The Theory of Coupling of Characteristic Radio Waves in the Ionosphere*. *J.Atmosph Terr.* [S.l.: s.n.], 1972,. 1909, p.
- [7] CHAPMAN, S. *The Production of Ionisation by Monochromatic Radiation Incident Upon a Rotating Atmosphere*. [S.l.: s.n.], 1931 a,b,. 26, p.

- [8] ABRAMOWITZ, M.; I.A., S. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: [s.n.], 1965.
- [9] NICOLET, M. The collision frequency of electron in the ionosphere. p. 200, 1969. J.Atmos. Terr. Phys. 3.
- [10] COLLIN, R. e. F. Z. Antenna theory. p. 355–364, 1969. McGraw-Hill Book Company.
- [11] BAIN, W. Comparison of russian and british electron density distributions from the same v.l.f and l.f. propagation. p. 755, 1969. J.Atmos. Terr. Phys, 31.
- [12] SEN, H. K. e. W. On generations of the appleton-hartree magnetoionic formulas. p. 3931, 1960. J. Geophys. Res.
- [13] DEEKS, D. G. *Generalised Full Wave Theory for Energy - dependent collision frequencies*. [S.l.: s.n.], 1966.
- [14] WILEY, J. *Numerical Solutions to Partial Differential Equations*. [S.l.: s.n.], 1982.
- [15] FORSTERLING, K. *Ausbreitung Elektromagnetischer Medium Bei Senkrechter Incidez*. [S.l.: s.n.], 1942,.
- [16] EKERLEY, T. *Magneto-Ionic Triple Splitting of Ionospheric Waves*. [S.l.: s.n.], 1950, . 1205, p.
- [17] CLEMMOW, P.; J., H. *Coupled Forms of the Differential Equations Governing Radio Propagation in the Ionosphere*. [S.l.: s.n.], 1954, . 49, p.
- [18] R.G. *The Z Propagation hle in The Ionsphere. J. Atmos.* [S.l.: s.n.], 1956,.

- [19] SMITH, M.; K.G., B. *The Coalescence of Coupling Points in Theory of Radio Waves in the Ionosphere*. [S.l.: s.n.], 1974,. 1-30, p.
- [20] JEFFREYS, S. H.; JEFFREYS, L. B. *Methods of Mathematical Physics, third edition*. [S.l.: s.n.], 1956. University Press.

Apêndice A

Soluções da Equação de Stokes

A.1 Equação de Stokes

As soluções da equação de Stokes são muito úteis na determinação dos campos nos perfis linear e bilinear. A equação de Stokes.

$$\frac{d^2 F}{dr^2} = rF \quad (\text{A.1})$$

apresenta como soluções linearmente independente a funções de Airy (A_i e B_i). Assumindo como solução para a [A.1](#) a função $F=a_0 + a_1r + a_2r + \dots$ substituindo na equação de Stokes obteremos:

$$F = a_0(1 + \frac{r^3}{2.3} + \frac{r^6}{2.3.5.6} + \frac{r^9}{2.3.5.8.9} + \dots) + a_1(1 + \frac{r^4}{2.3} + \frac{r^7}{2.3.5.6} + \frac{r^{10}}{2.3.5.8.9} + \dots) \quad (\text{A.2})$$

Para o caso da função de A_i ,

$$\begin{aligned} a_0 &= -3^{-2/3}/(-1/3)! = 0,3550280538 \\ a_1 &= -3^{-1/3}/(-2/3)! = -0,2588194037 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Para o caso da função de B_i ,

$$\begin{aligned} a_0 &= -3^{-1/6}/(-1/3)! = \sqrt{3} + 0,3550280538 \\ a_1 &= -3^{1/6}/(-2/3)! = \sqrt{3} - 0,2588194037 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Cada umas das séries [A.2](#) cresce com r , ao passo que a função A_i decresce pelo motivo de ser a diferença das séries. Como exemplo para valores de $|r| \cong 4$ cada uma das séries atingirá o valor de aproximadamente 10^3 . Como a função de A_i é a diferença das duas ($A_i \cong 10^3$), não poderemos então obter resultados com mais de três algarismos significativos exatos para o caso de trabalharmos com 10 significativos. Para $|r| > 4$ a determinação da função A_i e B_i a partir da série [A.2](#) torna-se cada vez mais impreciso, tendo que utilizar aproximações assintóticas [?].

As aproximações assintóticas para as funções de A_i e B_i são:

$$A_i(r) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} r^{-1/4} e^{(-\frac{2}{3}r^{3/2})} \left(1 - \frac{1.5}{1!48} r^{-3/2} + \frac{1.7.5.11}{2!48} r^{-3} - \frac{1.7.5.11.17}{1!48} r^{-9/2} + \dots \right) \quad (\text{A.5})$$

$$-\pi < \arg < \pi$$

$$B_i(r) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} r^{-1/4} e^{(\frac{2}{3}r^{3/2})} \left(1 - \frac{1.5}{1!48} r^{-3/2} + \frac{1.7.5.11}{2!48} r^{-3} - \frac{1.7.5.11.17}{1!48} r^{-9/2} + \dots \right) \quad (\text{A.6})$$

$$-\pi/3 < \arg(r) < \pi/3$$

Para a região fora da especificada acima

$$B_i(r.e^{2k\pi i/3}) = e^{2k\pi i/3}(-\sqrt{3}.isen(k.\pi/3)A_i(r) + \cos(k + \pi/3)B_i(r)) \quad (A.7)$$

k é um inteiro positivo ou negativo

Para $arg(r) = \pi$

$$A_i(r) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\xi^{-1/4}[P(\xi)sen(\frac{2}{3}\xi^{3/2} + \frac{1}{4}\pi) - Q(\xi)\cos(\frac{2}{3}\xi^{3/2} + \frac{1}{4}\pi)] \quad (A.8)$$

$$B_i(r) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\xi^{-1/4}[P(\xi)\cos(\frac{2}{3}\xi^{3/2} + \frac{1}{4}\pi) - Q(\xi)sen(\frac{2}{3}\xi^{3/2} + \frac{1}{4}\pi)] \quad (A.9)$$

Onde $r = \xi e^{\pi i}$

$$P(\xi) \cong 1 - \frac{1.7.5.11}{2!48^2}\xi^{-3} - \frac{1.7.13.19.5.11.17.23}{4!48^4}\xi^{-6} + \dots \quad (A.10)$$

$$Q(\xi) \cong \frac{1.5}{2!48}\xi^{-3/2} - \frac{1.7.13.5.11.17}{4!48^3}\xi^{-3/2} + \dots \quad (A.11)$$

Para o caso de $argr = \pi$, as duas funções A_i e B_i são oscilatórios com período e amplitude crescente quando ξ diminui. Quando r é positivo a função A_i decresce e B_i cresce com r.

Em torno do ponto $|r|=4$ as aproximações assintóticas também não darão boa precisão para o cálculo de A_i e B_i em torno de $|r|=4$ seria resolver diretamente a equação diferencial [A.1](#) por um processo numérico de boa precisão.

Mas isto seria muito trabalho quando desejamos calcular as funções A_i e B_i com o intuito de aplicá-las em outros cálculos.

Para aumentar então a precisão de cálculo perto de $r=\pm 4$, precisamos desenvolver novas séries em torno destes pontos.

Em torno do ponto $r=4$ suponhamos que a solução para equação A.1 é do tipo:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r-4)^n \quad (\text{A.12})$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(r-4)^n \quad (\text{A.13})$$

Substituindo na equação A.1 poderemos chegar ao resultado:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(r-4)^n = -4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+4)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (r+4)^n \quad (\text{A.14})$$

$$2a_2 = 4a_0$$

$$6a_3 = 4a_1 + a_0$$

$$12a_4 = 4a_2 + a_1$$

$$20a_5 = 4a_3 + a_2$$

$$30a_6 = 4a_4 + a_3$$

$$30a_6 = 4a_5 + a_4$$

fórmula de recorrência:

$$n(n-1)a_n = 4a_{n-2} + a_{n-3} \quad n \geq 3 \quad (\text{A.15})$$

Poderemos calcular a_2, a_3, a_4 , etc.

$$a_2 = 2a_0$$

$$a_3 = \frac{2}{3}a_1 + \frac{a_0}{6}$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{1}{12}a_1 + \frac{2a_o}{3} \\
a_5 &= \frac{2}{15}a_1 + \frac{2a_o}{15} \\
a_6 &= \frac{1}{30}a_1 + \frac{17a_o}{180}
\end{aligned}$$

Substituindo em A.15 poderemos obter como solução de A.1 em torno de $r=4$ a série abaixo:

$$\begin{aligned}
y &= a_0(1 + 2(r-4)^2 + \frac{1}{6}(r-4)^3 + \frac{2}{3}(r-4)^4 - \frac{2}{15}(r-4)^5 + \frac{15}{180}(r-4)^6 + \dots) + \\
&+ a_1((r-4)^2 - \frac{2}{3}(r-4)^3 + \frac{1}{12}(r-4)^4 + \frac{2}{15}(r-4)^5 - \frac{1}{30}(r-4)^6 + \dots)
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Para a função de A_i

$$\begin{aligned}
a_0 &= 9,51561902 \star 10^4 \\
a_1 &= 1,95864471 \star 10^3
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Para a função B_i

$$\begin{aligned}
a_0 &= 8,38470714 \star 10^1 \\
a_1 &= 1,61926683 \star 10^2
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Em torno de $r=-4$ poderemos tentar uma solução equivalente:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r-4)^n \tag{A.19}$$

que substituindo na equação de Stokes chegaremos a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(r-4)^n = -4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+4)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(r+4)^n \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
2a_2 &= -4a_o \\
6a_3 &= -4a_1 + a_o \\
12a_4 &= -4a_2 + a_1
\end{aligned}$$

$$20a_5 = -4a_3 + a_2$$

$$30a_6 = -4a_4 + a_3$$

$$30a_7 = -4a_5 + a_4$$

fórmula de recorrência

$$n(n-1)a_n = -4a_{n-2} + a_{n-3} \quad n \geq 3 \quad (\text{A.21})$$

Poderemos também calcular $a_2, a_3, a_4, \dots$ etc

$$a_2 = -2a_o$$

$$a_3 = -\frac{2}{3}a_1 + \frac{a_o}{6}$$

$$a_4 = \frac{1}{12}a_1 + \frac{2a_o}{3}$$

$$a_5 = \frac{2}{15}a_1 - \frac{2a_o}{15}$$

$$a_6 = -\frac{1}{30}a_1 - \frac{15a_o}{180}$$

ficando como solução em torno de $r=-4$.

$$y = a_0(1 + 2(r-4)^2 + \frac{1}{6}(r-4)^3 + \frac{2}{3}(r-4)^4 - \frac{2}{15}(r-4)^5 + \frac{15}{180}(r-4)^6 + \dots) + a_1((r-4)^2 - \frac{2}{3}(r-4)^3 + \frac{1}{12}(r-4)^4 + \frac{2}{15}(r-4)^5 - \frac{1}{30}(r-4)^6 + \dots) \quad (\text{A.22})$$

Para a função A_i

$$a_0 = -0,07026553 \quad (\text{A.23})$$

$$a_1 = -079062858$$

Para a função B_i

$$a_0 = 0,39223471 \quad (\text{A.24})$$

$$a_1 = -0,11667057$$

No cálculo das funções A_i e B_i para o caso de r real podemos utilizar uma ou outra de acordo com a região.

Para $|r| > 6$, sendo r real utiliza-se fórmulas assintóticas.

Para $-6 < r < -2$ utiliza a série (A-19)

Para $-2 < r < 2$ utiliza a série (A-19)

Para $2 < r < 6$ utiliza a série (A-19)

Com este procedimento consegue-se calcular as funções de A_i e B_i com oito significativos corretos para r real.

As funções A_i e B_i podem ser representadas em termos das funções de Bessel, Abramowitz [?].

$$\begin{aligned} A_i(z) &= \frac{1}{3}\sqrt{z}[I_{-1/3}(\xi) - I_{1/3}(\xi)] \\ A_i(z) &= \frac{1}{3}\sqrt{z}[I_{1/3}(\xi) + I_{-1/3}(\xi)] \\ A'_i(z) &= \frac{1}{3}\sqrt{z}[I_{-2/3}(\xi) + I_{2/3}(\xi)] \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} B_i(z) &= \frac{1}{3}\sqrt{z}[I_{-1/3}(\xi) + I_{1/3}(\xi)] \\ B'_i(z) &= \frac{z}{\sqrt{3}}[I_{-2/3}(\xi) + I_{2/3}(\xi)] \\ B_i(z) &= \frac{\sqrt{z}}{3}[I_{-1/3}(\xi) - I_{1/3}(\xi)] \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

sendo

$$\xi = \frac{2}{3}z^{3/2}$$

Apêndice B

Soluções de Funções parabólicas

B.1 Funções Parabólicas

B.1.1 Introdução

Estas soluções são de equações diferenciais

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (ax^2 + bx + c) y = 0 \quad (\text{B.1})$$

Com 2 formas reais padrão

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{1}{4}x^2 + a\right) y = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1}{4}x^2 + a\right) y = 0 \quad (\text{B.3})$$

As funções

$$y(a, x) \quad y(a, -x) \quad y(-a, ix) \quad y(-a, -ix) \quad (\text{B.4})$$

são todas soluções das equações do tipo B.2 ou B.3. A substituição de x por $-x$ e y por y^* converte de B.2 para B.3. Se $y(a, x)$ é solução de B.2 então B.3 tem solução:

$$(\text{B.5})$$

Ambas variáveis x e parâmetros " a " podem ter valores geralmente complexos na seção e subseqüentes seções. Uma aplicação prática nos mostra as soluções reais para equações reais; em geral as soluções são obtidas através das duas equações B.2 e B.3 independente. A principal consequência computacional observa-se uma linha y imaginária sobre o ponto de reflexão onde produz uma solução independente em quase todos os casos, então podemos obter tabelas para valores positivos de x ou para uma solução B.2 ou B.3.

B.2 Equações diferenciais em x

Equações do tipo

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{1}{4} x^2 + a \right) y = 0 \quad (\text{B.6})$$

Para igualar todas as soluções B.2 para obteremos :

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-\frac{1}{4}x^2} M\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}x^2\right) \\ &= e^{-\frac{1}{4}x^2} M\left(1 + \left(a + \frac{1}{2}\right) \frac{x^2}{2!} + \left(a + \frac{1}{2}\right) \left(a + \frac{5}{2}\right) \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \\ &= e^{-\frac{1}{4}x^2} F_1\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}x^2\right) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\frac{1}{4}x^2} M\left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}x^2\right) \\
&= e^{-\frac{1}{4}x^2} \left(1 + \left(a + \frac{1}{2}\right) \frac{x^2}{2!} + \left(a + \frac{1}{2}\right) \left(a + \frac{5}{2}\right) \frac{x^4}{4!} + \dots\right)
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= xe^{-\frac{1}{4}x^2} M\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}x^2\right) \\
&= e^{-\frac{1}{4}x^2} \left(x + \left(a + \frac{3}{2}\right) \frac{x^3}{3!} + \left(a + \frac{3}{2}\right) \left(a + \frac{7}{2}\right) \frac{x^5}{5!} + \dots\right)
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
&= xe^{-\frac{1}{4}x^2} M\left(-\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}x^2\right) \\
&= e^{-\frac{1}{4}x^2} \left(x + \left(a + \frac{3}{2}\right) \frac{x^3}{3!} + \left(a + \frac{3}{2}\right) \left(a + \frac{7}{2}\right) \frac{x^5}{5!} + \dots\right)
\end{aligned} \tag{B.10}$$

estas séries convergem para todos os valores de x alternadamente

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 + a \frac{x^2}{2!} + \left(a^2 + \frac{1}{2}\right) \frac{x^4}{4!} + \left(a^2 + \frac{7}{2}\right) \frac{x^6}{6!} + \\
&\left(a^4 + 11a^2 + \frac{15}{4}\right) \frac{x^8}{8!} + \left(a^5 + 25a^3 + \frac{211}{4}a\right) \frac{x^{10}}{10!} + \dots
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= x + a \frac{x^3}{3!} + \left(a^2 + \frac{3}{2}\right) \frac{x^5}{5!} + \left(a^3 + \frac{13}{2}a\right) \frac{x^7}{7!} + \\
&\left(a^4 + 17a^2 + \frac{63}{4}\right) \frac{x^9}{9!} + \left(a^5 + 35a^3 + \frac{531}{4}a\right) \frac{x^{11}}{11!} + \dots
\end{aligned} \tag{B.12}$$

de modo que os coeficientes nulos a_n de $x^n/n!$ são relacionados

$$a_{n+2} = a \cdot a_n + \frac{1}{4}n(n-1)a_{n-2} \tag{B.13}$$