

ANA MARIA TRAVAGLINI

**SISTEMA DE RÖSSLER E DINÂMICA  
DE GALÁXIAS: APLICAÇÕES DO  
TEOREMA DA MÉDIA**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
2016**

ANA MARIA TRAVAGLINI

# SISTEMA DE RÖSSLER E DINÂMICA DE GALÁXIAS: APLICAÇÕES DO TEOREMA DA MÉDIA

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

**Área de Concentração:** Matemática Aplicada.

**Linha de Pesquisa:** Equações Diferenciais Ordinárias.

**Orientador:** Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas.

UBERLÂNDIA - MG  
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

T779s  
2016

Travaglini, Ana Maria, 1991-  
Sistema de Rössler e dinâmica de galáxias: aplicações do Teorema da Média / Ana Maria Travaglini. - 2016.  
118 f.

Orientador: Márcio José Horta Dantas.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.  
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Equações diferenciais ordinárias - Teses. 3. Método da média - Teses. 4. Estabilidade - Teses. I. Dantas, Márcio José Horta. II. Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

---



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F-152  
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

**ALUNO(A):** Ana Maria Travaglini.

**NÚMERO DE MATRÍCULA:** 11412MAT001.

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Matemática Aplicada.

**LINHA DE PESQUISA:** Equações Diferenciais Ordinárias.

**PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA:** Nível Mestrado.

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** Sistema de Rössler e Dinâmica de Galáxias: Aplicações do Teorema da Média.

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala de videoconferência da Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação, Bloco 3P, Campus Santa Mônica, em 15 de Fevereiro de 2016, às 10h, pela seguinte Banca Examinadora:

**NOME**

**ASSINATURA**

Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas  
UFU - Universidade Federal de Uberlândia (Orientador)

Prof. Dr. Jean Venato Santos  
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello  
UNIFEI - Universidade Federal de Itajubá

Uberlândia-MG, 15 de Fevereiro de 2016.

# Dedicatória

Dedico este trabalho aos meu pais Antônio Alberto Travaglini e Cláudia Bernardo Travaglini.

# Agradecimentos

Agradeço a todos que direta ou indiretamente me ajudaram chegar até aqui. Em particular, agradeço:

Aos meus pais pelo incentivo dado em todos os momentos da minha vida.

Ao meu irmão Ulisses Travaglini que sempre torceu por mim.

Ao meu namorado Andrey Luan Gomes Contel pela amizade e o companheirismo.

Ao professor Márcio José Horta Dantas por sua orientação, disponibilidade e dedicação, sem a sua contribuição este trabalho não seria possível.

A todos os meus amigos do mestrado pelo companheirismo e a ajuda durante estes dois anos.

A minha família pela presente motivação, ajuda e carinho.

Ao programa de pós-graduação em Matemática por tornar esse mestrado possível.

TRAVAGLINI, A. M. *Sistema de Rössler e Dinâmica de Galáxias: Aplicações do Teorema da Média*. 2016. - 108 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG.

## Resumo

O principal objetivo desta dissertação é formular e provar o Teorema da Média para equações diferenciais ordinárias e aplicá-lo na investigação de órbitas periódicas. Dois sistemas são estudados: um sistema de Rössler e um sistema hamiltoniano relacionado ao estudo de Dinâmica de Galáxias.

*Palavras-chave:* Equações Diferenciais Ordinárias, Método da Média, Órbitas Periódicas, Estabilidade.

TRAVAGLINI, A. M. *Rössler's system and Dynamic of Galaxies: Averaging Theorem applications*. 2016. - 108 p. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia - MG.

## **Abstract**

The main purpose of this dissertation is to formulate and prove the Averaging Theorem for ordinary differential equations and apply it in the investigation of periodic orbits. Two systems are studied: a Rössler's system and a hamiltonian system related to the study of Dynamic of Galaxies.

*Keywords:* Ordinary Differential Equations, Averaging Method, Periodic Orbits, Stability.

---

# SUMÁRIO

|                                                                                                       |             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>Resumo</b>                                                                                         | <b>vii</b>  |
| <b>Abstract</b>                                                                                       | <b>viii</b> |
| <b>Introdução</b>                                                                                     | <b>1</b>    |
| <b>1 Preliminares</b>                                                                                 | <b>2</b>    |
| 1.1 Tópicos preliminares de Análise . . . . .                                                         | 2           |
| 1.1.1 Resultados gerais . . . . .                                                                     | 2           |
| 1.1.2 Estabilidade de Operadores Lineares Hiperbólicos . . . . .                                      | 6           |
| 1.1.3 Teorema da Aplicação Implícita Global: Um caso elementar . . . . .                              | 13          |
| 1.2 Tópicos preliminares de Equações Diferenciais . . . . .                                           | 15          |
| 1.2.1 Resultados gerais . . . . .                                                                     | 15          |
| 1.2.2 O Teorema da Redução . . . . .                                                                  | 25          |
| 1.2.3 Funções Elípticas Jacobianas de um ponto de vista de Sistemas Dinâmicos . . . . .               | 30          |
| <b>2 O Método da Média</b>                                                                            | <b>47</b>   |
| 2.1 A Forma Canônica de Lagrange . . . . .                                                            | 49          |
| 2.2 O Teorema da Média no caso periódico . . . . .                                                    | 52          |
| 2.3 Existência e Estabilidade de soluções periódicas . . . . .                                        | 67          |
| <b>3 Sistema de Rössler: Existência e Estabilidade de órbitas periódicas usando o Método da Média</b> | <b>74</b>   |
| 3.1 Introdução . . . . .                                                                              | 74          |
| 3.2 Órbitas periódicas numa vizinhança da origem . . . . .                                            | 75          |
| 3.3 Órbitas periódicas em torno de pontos de equilíbrio não triviais . . . . .                        | 82          |
| <b>4 Dinâmica de um Sistema Hamiltoniano Galáctico</b>                                                | <b>89</b>   |
| 4.1 O sistema hamiltoniano . . . . .                                                                  | 89          |
| 4.2 Caso 1: $r \neq 0$ e $\rho \neq 0$ . . . . .                                                      | 91          |

|     |                    |     |
|-----|--------------------|-----|
| 4.3 | Caso 2: $r = 0$    | 100 |
| 4.4 | Caso 3: $\rho = 0$ | 103 |
| 4.5 | Caso geral         | 105 |

---

# INTRODUÇÃO

Neste trabalho vamos estudar via Método da Média certos sistemas de equações diferenciais. Essa teoria é tão natural que por um longo período o método foi usado em muitos campos de aplicação, como na Matemática, Física e Engenharia, sem prova de sua validade. Em 1928 a primeira prova de sua validade foi dada por Fatou.

No primeiro capítulo serão dados resultados básicos de Análise e de Equações Diferenciais, os quais serão necessários para o desenvolvimento dos capítulos 2, 3 e 4.

No segundo capítulo vamos estudar a Teoria da Média. Aqui veremos três teoremas principais. O primeiro nos fornece uma solução aproximada de um sistema de equações diferenciais em intervalos finitos que dependem de um pequeno parâmetro  $\varepsilon$ . O segundo nos garante, sob certas condições, a existência de uma solução periódica e o terceiro nos permite estudar a estabilidade dessa solução. Juntos esses três teoremas são conhecidos como o Teorema da Média.

No terceiro capítulo vamos aplicar a Teoria da Média para estudar um sistema autônomo introduzido em [3] conhecido por sistema de Rössler.

No quarto capítulo também aplicaremos a Teoria da Média e ainda vamos usar as Funções Elípticas Jacobianas, as quais veremos no primeiro capítulo, para estudar um sistema hamiltoniano introduzido em [6].

Os cálculos computacionais desta dissertação foram feitos usando o software Maxima 5.36.1 (2015). Esse software é livre e de código aberto, podendo ser efetuado o download em <http://maxima.sourceforge.net/>.

Ana Maria Travaglini  
Uberlândia - MG, 02 de janeiro de 2016.

---

# CAPÍTULO 1

---

## PRELIMINARES

Neste primeiro capítulo serão enunciados alguns resultados e definições que serão necessários mais adiante.

### 1.1 Tópicos preliminares de Análise

#### 1.1.1 Resultados gerais

**Teorema 1.1.1** (*Derivação sob o sinal de integral*) Dado  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto, seja  $f : U \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função com as seguintes propriedades:

(a) Para todo  $x \in U$ , a função  $t \longmapsto f(x, t)$  é Riemann-integrável em  $a \leq t \leq b$ .

(b) A  $i$ -ésima derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)$  existe para cada  $(x, t) \in U \times [a, b]$  e a função  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ , assim definida, é contínua.

Então a função  $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\phi(x) = \int_a^b f(x, t)dt$ , possui  $i$ -ésima derivada parcial em cada ponto  $x \in U$ , sendo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)dt.$$

Em suma: pode-se derivar sob o sinal de integral, desde que o integrando resultante seja uma função contínua.

**Demonstração:** Veja [7], capítulo 3, seção 6.

■

**Corolário 1.1.2** Se  $f : U \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  é contínua e possui  $n$  derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , contínuas, então  $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

é de classe  $C^1$ .

**Demonstração:** Veja [7], capítulo 3, seção 6. ■

**Teorema 1.1.3** Seja  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Se  $a \in U$  é tal que  $f'(a) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$  é invertível, ou seja,  $\det J(f(a)) \neq 0$  então existe uma bola aberta  $B = B(a, \delta) \subset U$  tal que a restrição  $f|_B$  é um difeomorfismo sobre um aberto  $V \ni f(a)$ .

**Demonstração:** Veja [7], capítulo 5, seção 8. ■

**Definição 1.1.4** Seja  $f : \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \longrightarrow \mathbb{R}^m$  uma função com  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ . Dizemos que  $f(x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$  se existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|f(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon$$

para todo  $(x, \varepsilon) \in \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ .

Seja  $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  um operador linear. Considere a norma uniforme:

$$\|A\| = \max\{|A(x)| : x \in B\}; \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

onde  $|\cdot|$  é a norma euclidiana.

Note que  $\|A\|$  existe, pois  $B$  é compacto e  $A$  é contínuo.

**Teorema 1.1.5** Sejam  $A, B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Temos as seguintes propriedades:

(a) Se  $\|A\| = k$  então  $|A(x)| \leq k |x|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

(b)  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

(c)  $\|A^m\| \leq \|A\|^m$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Veja [5], capítulo 5, seção 3, Lema 1. ■

**Lema 1.1.6** *Seja  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  então existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que se  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  o operador  $I + \varepsilon A$  é inversível e sua inversa é dada por:*

$$[I + \varepsilon A]^{-1} = I - \varepsilon A + O(\varepsilon^2).$$

**Demonstração:** Sabemos que:

$$(I - \varepsilon A)(I + \varepsilon A + (\varepsilon A)^2 + \dots + (\varepsilon A)^n) = I - (\varepsilon A)^{n+1}.$$

Defina  $S_n(\varepsilon) = \sum_{k=0}^n (\varepsilon A)^k$ . Como  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  é um espaço completo e  $S_n(\varepsilon) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , pois  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , se mostrarmos que  $S_n(\varepsilon)$  é de Cauchy, concluiremos que  $S_n(\varepsilon)$  converge para um elemento de  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .

Sejam  $p, q \in \mathbb{N}$  tais que  $q > p$  então:

$$\begin{aligned} \|S_q(\varepsilon) - S_p(\varepsilon)\| &= \left\| \sum_{j=p+1}^q (\varepsilon A)^j \right\| \\ &= \|(\varepsilon A)^{p+1} + \dots + (\varepsilon A)^q\| \\ &\leq \|\varepsilon A\|^{p+1} \|I + (\varepsilon A) + \dots + (\varepsilon A)^{q-(p+1)}\| \\ &\leq \|\varepsilon A\|^{p+1} (I + \|(\varepsilon A)\| + \dots + \|(\varepsilon A)^{q-(p+1)}\|). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Se escolhermos  $\varepsilon$  tal que  $|\varepsilon| < \frac{1}{2\|A\|} = \varepsilon_0$ , teremos:

$$I + \|(\varepsilon A)\| + \dots + \|(\varepsilon A)^{q-(p+1)}\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|(\varepsilon A)^j\| \leq \frac{1}{1 - \|\varepsilon A\|}.$$

Assim, segue de (1.1) que:

$$\|S_q(\varepsilon) - S_p(\varepsilon)\| \leq \frac{\|\varepsilon A\|^{p+1}}{1 - \|\varepsilon A\|}.$$

Além disso,

$$|\varepsilon| < \frac{1}{2\|A\|} \Rightarrow \frac{1}{1 - \|\varepsilon A\|} < 2.$$

Dai,

$$\|S_q(\varepsilon) - S_p(\varepsilon)\| \leq \frac{\|\varepsilon A\|^{p+1}}{1 - \|\varepsilon A\|} \leq 2\|\varepsilon A\|^{p+1} \leq \frac{2}{2^{p+1}} \leq \frac{1}{2^p} \longrightarrow 0, \text{ quando } p \longrightarrow +\infty.$$

Portanto,  $(S_n(\varepsilon))_n$  converge para  $\sum_{j=0}^{\infty} (\varepsilon A)^j \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Como

$$(I - \varepsilon A)S_q(\varepsilon) = I - (\varepsilon A)^{q+1}$$

fazendo  $q \rightarrow +\infty$ , temos:

$$(I - \varepsilon A) \left( \sum_{j=0}^{\infty} (\varepsilon A)^j \right) = I.$$

Daí concluímos que  $I - \varepsilon A$  é inversível e

$$[I - \varepsilon A]^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\varepsilon A)^j.$$

Substituindo  $\varepsilon$  por  $-\varepsilon$ , temos:

$$[I + \varepsilon A]^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\varepsilon A)^j = I - \varepsilon A + O(\varepsilon^2).$$

■

**Teorema 1.1.7** (*Aplicação Implícita*) *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ ,  $C^1$  no ponto  $a \in U$ , com  $f(a) = c$ . Se  $f'(a) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é sobrejetiva ou, mais precisamente, se  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$  é uma decomposição em soma direta tal que  $a = (a_1, a_2)$  e a derivada  $\partial_2 f(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo, então existem abertos  $V, Z$  (onde  $a_1 \in V \subset \mathbb{R}^m, a \in Z \subset U$ ) com a seguinte propriedade: para cada  $x \in V$  há um único  $\xi(x) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(x, \xi(x)) \in Z$  e  $f(x, \xi(x)) = c$ . A aplicação  $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  assim definida é  $C^1$  no ponto  $a_1$  e sua derivada nesse ponto é*

$$\xi'(a_1) = -[\partial_2 f(a)]^{-1} \circ [\partial_1 f(a)].$$

*Se  $f \in C^k$  ( $k \geq 1$ ) então  $\xi \in C^k$  e sua derivada num ponto  $x \in V$  qualquer é*

$$\xi'(x) = -[\partial_2 f(x, \xi(x))]^{-1} \circ [\partial_1 f(x, \xi(x))].$$

*Em resumo:  $f^{-1}(c) \cap Z$  é o gráfico da aplicação  $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^1$  no ponto  $a_1$ . Se  $f \in C^k$  então  $\xi \in C^k$ . A aplicação  $\xi$  diz-se definida implicitamente pela equação  $f(x, y) = c$ .*

**Demonstração:** Veja [7], capítulo 5, seção 11.

■

### 1.1.2 Estabilidade de Operadores Lineares Hiperbólicos

Considere o espaço vetorial de dimensão  $m$  sobre o corpo  $\mathbb{C}$  :

$$\mathbb{C}^m = \{u + iv : u, v \in \mathbb{R}^m\}.$$

Em  $\mathbb{C}^m$ , definimos a soma de vetores e a multiplicação por um número complexo de maneira natural.

Seja  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação linear. Definimos a complexificação de  $A$  como sendo a aplicação:

$$\begin{aligned} A^{\mathbb{C}} : \quad \mathbb{C}^m &\longrightarrow \mathbb{C}^m \\ u + iv &\longmapsto A^{\mathbb{C}}(u + iv) = A(u) + iA(v). \end{aligned}$$

**Definição 1.1.8** *Seja  $T : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  um operador no espaço complexo  $\mathbb{C}^m$ . Um escalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um autovalor de  $T$  se existir  $0 \neq x \in \mathbb{C}^m$  tal que  $Tx = \lambda x$ . O conjunto  $\{x \in \mathbb{C}^m : Tx = \lambda x\}$  é chamado de auto-espaço associado ao autovalor  $\lambda$  e cada elemento não nulo desse conjunto é um autovetor associado a  $\lambda$ .*

**Definição 1.1.9** *Seja  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  um operador no espaço  $\mathbb{R}^m$ . Um escalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um autovalor de  $T$  se  $\lambda$  for raiz do polinômio característico de  $T$ , isto é,*

$$p(\lambda) = \det(T - \lambda I) = 0.$$

**Definição 1.1.10** *Um operador linear  $T : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  é hiperbólico se todos os autovalores de  $T$  tem partes reais não nulas.*

Sejam  $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$  e  $w = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in \mathbb{C}^m$ . Definimos o produto interno em  $\mathbb{C}^m$  como sendo:

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, w) &\longrightarrow \langle z, w \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^m z_j \overline{w_j} \end{aligned}$$

e a norma induzida do produto interno em  $\mathbb{C}^m$  como sendo:

$$\begin{aligned} |\cdot|_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longrightarrow |z|_{\mathbb{C}} = \sqrt{\langle z, z \rangle}. \end{aligned}$$

**Definição 1.1.11** *Dada uma aplicação linear  $T : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ , definimos a norma do operador  $T$  por:*

$$\|T\|_{\mathbb{C}} = \sup\{|T(x)|_{\mathbb{C}}, x \in \mathbb{C}^m, |x|_{\mathbb{C}} \leq 1\}.$$

Vejamos que:

**Lema 1.1.12** *Se  $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  então  $\|A^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \|A\|$ .*

**Demonstração:** Seja  $u + iv \in \mathbb{C}^m$  tal que  $|u + iv| \leq 1$ . Então,

$$\begin{aligned}
|u + iv|_{\mathbb{C}}^2 \leq 1 &\Rightarrow \langle u + iv, u + iv \rangle_{\mathbb{C}} \leq 1 \\
&\Rightarrow \langle u, u \rangle + i\langle u, v \rangle - i\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \leq 1 \\
&\Rightarrow \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle \leq 1 \\
&\Rightarrow |u|^2 + |v|^2 \leq 1.
\end{aligned}$$

Assim, para  $u + iv \in \mathbb{C}^m$  tal que  $|u + iv|_{\mathbb{C}} \leq 1$ , temos:

$$\begin{aligned}
|A^{\mathbb{C}}(u + iv)|_{\mathbb{C}}^2 &\leq \langle A^{\mathbb{C}}(u + iv), A^{\mathbb{C}}(u + iv) \rangle_{\mathbb{C}} \\
&= \langle A(u) + iA(v), A(u) + iA(v) \rangle_{\mathbb{C}} \\
&= \langle A(u), A(u) \rangle + \langle A(v), A(v) \rangle \\
&= |A(u)|^2 + |A(v)|^2 \\
&\leq \|A\|^2 |u|^2 + \|A\|^2 |v|^2 \\
&\leq \|A\|^2 (|u|^2 + |v|^2) \\
&\leq \|A\|^2.
\end{aligned}$$

Então,  $|A^{\mathbb{C}}(u + iv)|_{\mathbb{C}}^2 \leq \|A\|^2$ , desde que  $|u + iv|_{\mathbb{C}} \leq 1$ . Dessa forma,

$$\|A^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \sup\{|A^{\mathbb{C}}(u + iv)|_{\mathbb{C}}, u + iv \in \mathbb{C}^m, |u + iv|_{\mathbb{C}} \leq 1\} \leq \|A\|. \quad (1.2)$$

Por outro lado,

$$\|A^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \sup_{|u+iv|_{\mathbb{C}}=1} |A^{\mathbb{C}}(u + iv)|_{\mathbb{C}} \geq \sup_{|u|=1} |A^{\mathbb{C}}(u)| = \sup_{|u|=1} |A(u)| = \|A\|. \quad (1.3)$$

Portanto, de (1.2) e (1.3), segue que:

$$\|A^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \|A\|.$$

■

**Observação 1.1.13**  $\lambda$  é autovalor de  $A$  se, e somente se,  $\lambda$  é autovalor de  $A^{\mathbb{C}}$ .

Isso segue do fato de que toda base de  $\mathbb{R}^m$  é base  $\mathbb{C}^m$ . Logo, as matrizes associadas as transformações  $A$  e  $A^{\mathbb{C}}$  são iguais e portanto admitem o mesmo polinômio característico.

**Teorema 1.1.14** Se  $A_n \rightarrow A$  em  $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  então  $A_n^{\mathbb{C}} \rightarrow A^{\mathbb{C}}$  em  $L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m)$ .

**Demonstração:** Seja  $A_n \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $A_n \longrightarrow A$ . Isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Note que:

$$\begin{aligned} (A_n^{\mathbb{C}} - A^{\mathbb{C}})(u + iv) &= A_n^{\mathbb{C}}(u + iv) - A^{\mathbb{C}}(u + iv) \\ &= A_n(u) + iA_n(v) - (A(u) + iA(v)) \\ &= A_n(u) - A(u) + iA_n(v) - iA(v) \\ &= (A_n - A)(u) + i(A_n - A)(v) \\ &= (A_n - A)^{\mathbb{C}}(u + iv). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Assim, por (1.4) e pelo Lema 1.1.12 segue que:

$$\|A_n^{\mathbb{C}} - A^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \|(A_n - A)^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \|A_n - A\|.$$

Daí,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n^{\mathbb{C}} - A^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Portanto,  $A_n^{\mathbb{C}} \longrightarrow A^{\mathbb{C}}$ . ■

Consideremos  $\mathbb{R}^m$  munido da base canônica usual  $e_1, e_2, \dots, e_m$ . Seja  $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ . Em relação a esta base podemos associar de forma única a matriz cujo componente na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna é denotada por  $A_{ij}$  onde  $1 \leq i, j \leq m$ .

**Observação 1.1.15** A função determinante  $\det : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}$  é  $C^\infty$ . Veja [7], página 252.

**Teorema 1.1.16** Se  $A_n \longrightarrow A$  em  $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  então existe uma subsequência  $\{n_k\}$  tal que se  $\lambda_{n_k,1}, \lambda_{n_k,2}, \dots, \lambda_{n_k,m}$  são raízes de  $g_k(\lambda) = \det(\lambda I - A_{n_k})$  então  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k,j} = \lambda_j$ , onde  $j = 1, 2, \dots, m$  e todas as raízes de  $g(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ , incluindo suas multiplicidades, são dadas exatamente por  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ .

**Demonstração:** Sejam  $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \dots, \lambda_{n,m}$  os autovalores de  $A_n^{\mathbb{C}}$  e  $v_{n,1}, v_{n,2}, \dots, v_{n,m} \in \mathbb{C}^m$  os respectivos autovetores com  $|v_{n,j}|_{\mathbb{C}} = 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Temos:

$$\langle A_n^{\mathbb{C}} v_{n,j}, v_{n,j} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \lambda_{n,j} v_{n,j}, v_{n,j} \rangle_{\mathbb{C}} = \lambda_{n,j} \langle v_{n,j}, v_{n,j} \rangle_{\mathbb{C}} = \lambda_{n,j} |v_{n,j}|_{\mathbb{C}}^2 = \lambda_{n,j}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m.$$

Assim, pelo Lema 1.1.12, temos:

$$|\lambda_{n,j}| = |\langle A_n^{\mathbb{C}} v_{n,j}, v_{n,j} \rangle_{\mathbb{C}}| \leq \|A_n^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} |v_{n,j}|_{\mathbb{C}}^2 \leq \|A_n^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \|A_n\| \tag{1.5}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Como  $A_n \rightarrow A$  em  $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  então existe  $M > 0$  tal que

$$\|A_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.6)$$

pois toda sequência convergente é limitada. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  considere a  $m$ -upla:

$$p_n = (\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \dots, \lambda_{n,m})$$

formada pelos autovalores de  $A_n^{\mathbb{C}}$ . Segue de (1.5) e (1.6) que:

$$p_n \in B[0, M] \subset \mathbb{C}^m.$$

Como  $B[0, M]$  é compacta em  $\mathbb{C}^m$  segue que existe uma subsequência  $\{n_k\}$  e  $p \in B[0, M]$  onde  $p = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k, j} = \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.7)$$

Como  $\lambda_{n_k,1}, \lambda_{n_k,2}, \dots, \lambda_{n_k,m}$  são raízes de  $g_k(\lambda) = \det(\lambda I - A_{n_k})$ , considere  $g(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ . Vamos mostrar que  $\lambda_j$  é raiz de  $g(\lambda)$ ,  $\forall j = 1, 2, \dots, m$ . Isto é, os  $\lambda_j$  são autovalores de  $A$ . Temos que:

$$\det(\lambda I - A_{n_k}^{\mathbb{C}}) = (\lambda - \lambda_{n_k,1})(\lambda - \lambda_{n_k,2}) \dots (\lambda - \lambda_{n_k,m}) \quad (1.8)$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Como

$$\|\lambda I - A_{n_k}^{\mathbb{C}} - \lambda I + A^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \|A_{n_k}^{\mathbb{C}} - A^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \|(A_{n_k} - A)^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \|A_{n_k} - A\|$$

pelo Teorema 1.1.14, já que  $A_n \rightarrow A$  segue que  $A_n^{\mathbb{C}} \rightarrow A^{\mathbb{C}}$ . Logo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda I - A_{n_k}^{\mathbb{C}}) = \lambda I - A^{\mathbb{C}}. \quad (1.9)$$

Segue de (1.9), (1.8), (1.7) e da Observação 1.1.15 que:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A^{\mathbb{C}}) &= \det\left(\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda I - A_{n_k}^{\mathbb{C}})\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \det(\lambda I - A_{n_k}^{\mathbb{C}}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda - \lambda_{n_k,1})(\lambda - \lambda_{n_k,2}) \dots (\lambda - \lambda_{n_k,m}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_m) \end{aligned}$$

ou seja,

$$g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_m).$$

Portanto,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  são todos os autovalores de  $A$ , contando com as suas multiplicidades. ■

**Observação 1.1.17** Queremos ressaltar que as multiplicidades das raízes de  $g_k$  não são preservadas. Por exemplo, se

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

então  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = I$ ,  $g_k(\lambda) = \det(\lambda I - A_k) = (\lambda - 1)^2 \left(\lambda - 1 - \frac{1}{k}\right)$  e  $g(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^3$ . Assim,  $\lambda = 1$  é uma raiz de multiplicidade 2 de  $g_k$  e de multiplicidade 3 de  $g$ .

**Teorema 1.1.18** *Seja  $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  um operador linear hiperbólico. Assuma que  $\mathbf{a}$  autovalores de  $A$  tem partes reais negativas (contando com as possíveis multiplicidades) e  $m - \mathbf{a}$  autovalores de  $A$  tem partes reais positivas. Assim, existe  $\delta > 0$  tal que se  $C \in B(A, \delta) \subset L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  então  $C$  admite  $\mathbf{a}$  autovalores com partes reais negativas e  $m - \mathbf{a}$  autovalores com partes reais positivas, contando suas respectivas multiplicidades.*

**Demonstração:** Seja  $\mathbf{a}$  o número de raízes de  $p_A(\lambda)$  com partes reais negativas e  $m - \mathbf{a}$  com partes reais positivas.

Afirmamos que existe  $\delta_1 > 0$  tal que se  $C \in B(A, \delta_1)$  então todos os autovalores de  $C$  tem partes reais não nulas. Suponhamos que não. Então, dado  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $C_n \in B(A, 1/n)$  tal que  $C_n$  tem um autovalor  $\lambda_{n,1}$  tal que  $\text{Re}(\lambda_{n,1}) = 0$ . Sejam  $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \dots, \lambda_{n,m}$  todos os autovalores de  $C_n$ . Pelo Teorema 1.1.16, existe uma subsequência  $\{n_k\}$  e  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k, j} = \lambda_j$$

e cada  $\lambda_j$  é um autovalor de  $A$ , já que  $C_n \rightarrow A$ . Como  $\text{Re}(\lambda_{n_k,1}) = 0$  segue que  $\text{Re}(\lambda_1) = 0$ . Então,  $A$  possui um autovalor com parte real nula, o que contradiz a hipótese. Portanto, existe  $\delta_1 > 0$  tal que se  $C \in B(A, \delta)$  então todos os autovalores de  $C$  tem partes reais não nulas.

Suponha que para todo  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1/n < \delta_1$ , exista  $C_n \in B(A, 1/n)$  tal que o número de autovalores de  $C_n$  com partes reais negativas é  $a_n$  e o número de autovalores com partes reais positivas é  $b_n$  com  $(a_n, b_n) \neq (\mathbf{a}, m - \mathbf{a})$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Observe que  $a_n + b_n = m$ . Temos que:  $(a_n, b_n) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ . Além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_n - A\| = 0.$$

Então, pelo Teorema 1.1.16, segue que existe  $C_{n_k}$  subsequência de  $C_n$  tal que  $C_{n_k} \rightarrow A$  e se  $\lambda_{n_k,1}, \lambda_{n_k,2}, \dots, \lambda_{n_k,m}$  são autovalores de  $C_{n_k}$  temos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k, j} = \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (1.10)$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  são autovalores de  $A$  contando as suas multiplicidades.

Como  $(a_{n_k}, b_{n_k}) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ , que é um conjunto compacto, e passando a uma subsequência desta subsequência, se necessário, podemos assumir:

$$a_{n_k} = a' \text{ e } b_{n_k} = b' \text{ tais que}$$

$$\begin{cases} a' + b' = m, \\ (a', b') \neq (\mathbf{a}, m - \mathbf{a}). \end{cases} \quad (1.11)$$

Vamos reordenar os autovalores de  $C_{n_k}$  tal que os primeiros  $a'$  autovalores tenham partes reais negativas e os restantes  $b'$  autovalores cujas partes reais são positivas. Assim, de (1.10) temos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Re}(\lambda_{n_k, j}) = \text{Re}(\lambda_j), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Então, para  $j = 1, 2, \dots, a'$  temos:  $\text{Re}(\lambda_j) < 0$ , pois  $\text{Re}(\lambda_{n_k, j}) < 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, a'$ . Logo,

$$a' \leq \mathbf{a}. \quad (1.12)$$

Analogamente, para  $j = a' + 1, a' + 2, \dots, m$  temos:  $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$ , pois  $\operatorname{Re}(\lambda_{n_k, j}) > 0$ ,  $j = a' + 1, a' + 2, \dots, m$ . Logo,

$$b' \leq m - \mathbf{a}. \quad (1.13)$$

Mas, por (1.11) temos que:  $b' = m - a'$ . Logo, por (1.13) e (1.12):

$$m - a' \leq m - \mathbf{a} \Rightarrow a' \geq \mathbf{a} \Rightarrow a' = \mathbf{a}.$$

Portanto,  $(a', b') = (\mathbf{a}, m - \mathbf{a})$  o que contraria (1.11). E isto prova este teorema. ■

**Teorema 1.1.19** *Seja  $M > 0$  e  $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  um operador hiperbólico tal que  $A$  tem exatamente  $\mathbf{a}$  autovalores com partes reais negativas e  $m - \mathbf{a}$  autovalores com partes reais positivas, contando as suas multiplicidades. Então, existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que, contando as multiplicidades, a matriz  $I_m + \varepsilon(A + \varepsilon B)$  tem  $\mathbf{a}$  autovalores com normas menores que 1 e  $m - \mathbf{a}$  autovalores com normas maiores que 1, para todo  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  e  $\|B\| \leq M$ .*

**Demonstração:** Como  $\|B\| \leq M$ , podemos fazer:

$$I_m + \varepsilon(A + \varepsilon B) = I_m + \varepsilon(A + O(\varepsilon)).$$

Seja  $\delta > 0$  como obtido no Teorema 1.1.18 então existe  $\varepsilon_0$  tal que se  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  então  $A + O(\varepsilon) \in B(A, \delta)$ . Então, segue que  $A + O(\varepsilon)$  admite  $\mathbf{a}$  autovalores com partes reais negativas e  $m - \mathbf{a}$  autovalores com partes reais positivas. Considere  $(A + O(\varepsilon))^\mathbb{C}$ . Então, existem  $v_{\varepsilon, 1}, \dots, v_{\varepsilon, \mathbf{a}}, v_{\varepsilon, \mathbf{a}+1}, \dots, v_{\varepsilon, m}$  autovetores unitários de  $(A + O(\varepsilon))^\mathbb{C}$  tais que:

$$(A + O(\varepsilon))^\mathbb{C} v_{\varepsilon, j} = \lambda_{\varepsilon, j} v_{\varepsilon, j}, \text{ com } \begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda_{\varepsilon, j}) < 0, & \text{se } j = 1, \dots, \mathbf{a} \\ \operatorname{Re}(\lambda_{\varepsilon, j}) > 0, & \text{se } j = \mathbf{a} + 1, \dots, m. \end{cases}$$

Como  $\lambda_{\varepsilon, j} = a_{\varepsilon, j} + ib_{\varepsilon, j}$  então

$$\begin{cases} a_{\varepsilon, j} < 0, & \text{se } j = 1, \dots, \mathbf{a} \\ a_{\varepsilon, j} > 0, & \text{se } j = \mathbf{a} + 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1.14)$$

Daí,

$$(I_m + \varepsilon(A + O(\varepsilon))^\mathbb{C}) v_{\varepsilon, j} = v_{\varepsilon, j} + \varepsilon(A + O(\varepsilon))^\mathbb{C} v_{\varepsilon, j} = v_{\varepsilon, j} + \varepsilon \lambda_{\varepsilon, j} v_{\varepsilon, j} = (1 + \varepsilon \lambda_{\varepsilon, j}) v_{\varepsilon, j}.$$

Portanto, os autovalores de  $(I_m + \varepsilon(A + O(\varepsilon))^\mathbb{C})$  são:  $\alpha_{\varepsilon, j} = (1 + \varepsilon \lambda_{\varepsilon, j})$  onde  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Mostraremos que:

$$\begin{cases} |\alpha_{\varepsilon, j}|_\mathbb{C} < 1, & \text{se } j = 1, \dots, \mathbf{a} \\ |\alpha_{\varepsilon, j}|_\mathbb{C} > 1, & \text{se } j = \mathbf{a} + 1, \dots, m. \end{cases}$$

Temos que:

$$|\alpha_{\varepsilon, j}|_\mathbb{C} = |1 + \varepsilon(a_{\varepsilon, j} + ib_{\varepsilon, j})|_\mathbb{C} = |(1 + \varepsilon a_{\varepsilon, j}) + i(\varepsilon b_{\varepsilon, j})|_\mathbb{C} = \sqrt{(1 + \varepsilon a_{\varepsilon, j})^2 + (\varepsilon b_{\varepsilon, j})^2}.$$

(i) Para  $j = \mathbf{a} + 1, \dots, m$ , temos:  $a_{\varepsilon, j} > 0$ . Daí,

$$(1 + \varepsilon a_{\varepsilon, j})^2 > 1 \implies |\alpha_{\varepsilon, j}|_\mathbb{C} > 1.$$

(ii) Para  $j = 1, \dots, a$ , temos:  $a_{\varepsilon,j} < 0$ . Daí,

$$\begin{aligned} |\alpha_{\varepsilon,j}|_{\mathbb{C}}^2 &= 1 + 2\varepsilon a_{\varepsilon,j} + \varepsilon^2 |\lambda_{\varepsilon,j}|_{\mathbb{C}}^2 \\ &\leq 1 + 2\varepsilon a_{\varepsilon,j} + \varepsilon^2 \|(A + O(\varepsilon))^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}}^2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Da definição 1.1.4 e do Lema 1.1.12, temos:

$$\|(A + O(\varepsilon))^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}}^2 = \|A^{\mathbb{C}} + (O(\varepsilon))^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}}^2 \leq (\|A^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} + \|(O(\varepsilon))^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}})^2 \leq (\|A\| + \varepsilon C_0)^2$$

onde  $C_0$  é uma constante positiva. Dessa forma, existe  $M_1 > 0$  tal que

$$\|(A + O(\varepsilon))^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}}^2 \leq M_1.$$

Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  os autovalores de  $A$  tais que  $\operatorname{Re}(\lambda_1), \dots, \operatorname{Re}(\lambda_a) < 0$  e  $\operatorname{Re}(\lambda_{a+1}), \dots, \operatorname{Re}(\lambda_m) > 0$ . Então,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_{\varepsilon,j} = \lambda_j$ , onde  $j = 1, \dots, m$ . Portanto,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Re}(\lambda_{\varepsilon,j}) = \operatorname{Re}(\lambda_j)$ , onde  $j = 1, \dots, m$ . Ou seja, para  $j = 1, \dots, a$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{\varepsilon,j} = a_j$$

com  $a_j < 0$ . Dado  $\beta > 0$  tal que

$$a_1, a_2, \dots, a_a < -\beta$$

existe  $\bar{\varepsilon}_j > 0$  tal que  $a_{\varepsilon,j} < -\beta$ , para todo  $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}_j$ . Faça  $\bar{\varepsilon} = \min\{\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \dots, \bar{\varepsilon}_a\}$ . Dessa forma, para  $j = 1, 2, \dots, a$  e  $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ , temos por (1.15) que:

$$|\alpha_{\varepsilon,j}|_{\mathbb{C}}^2 \leq 1 - 2\varepsilon\beta + \varepsilon^2 M_1.$$

Faça  $\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{2\beta}{M_1}, \bar{\varepsilon}\right\}$ . Para  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$  temos:

$$-2\beta + \varepsilon M_1 < 0 \Rightarrow -2\varepsilon\beta + \varepsilon^2 M_1 < 0.$$

Portanto, para  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$  temos:

$$|\alpha_{\varepsilon,j}|_{\mathbb{C}}^2 \leq 1 - 2\varepsilon\beta + \varepsilon^2 M_1 < 1$$

ou seja,

$$|\alpha_{\varepsilon,j}|_{\mathbb{C}} < 1$$

para  $j = 1, \dots, a$ .

■

### 1.1.3 Teorema da Aplicação Implícita Global: Um caso elementar

Nesta subsecção veremos uma nova versão do Teorema da Aplicação Implícita.

**Lema 1.1.20** *Seja  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \in C^1$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ , para todo  $(x, y) \in U \times (a, b)$ . Se existe  $g : U \rightarrow (a, b)$  tal que  $f(x, g(x)) = 0$ , para todo  $x \in U$ , então  $g \in C^1$ .*

**Demonstração:** Dado  $x_0 \in U$ , considere  $(x_0, g(x_0))$ . Assim,

$$f(x_0, g(x_0)) = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, g(x_0)) \neq 0.$$

Então, pelo Teorema da Aplicação Implícita 1.1.7, existem abertos  $U_1 \subset U$  e  $J_1 \subset (a, b)$  tais que  $x_0 \in U_1$ ,  $g(x_0) \in J_1$  e  $\varphi : U_1 \rightarrow J_1$  é de classe  $C^1$  com  $\varphi(x_0) = g(x_0)$  tal que  $f(x, \varphi(x)) = 0$ , para todo  $x \in U_1$ . Mas  $f(x, g(x)) = 0$ , para todo  $x \in U_1$ . Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\bar{y}$  entre  $\varphi(x)$  e  $g(x)$  tal que

$$0 = f(x, \varphi(x)) - f(x, g(x)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y})(\varphi(x) - g(x)).$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}) \neq 0$  então  $g(x) = \varphi(x)$ , para todo  $x \in U_1$ . Portanto,  $g \in C^1$  em  $x_0$ . Como  $x_0$  é arbitrário, segue que  $g \in C^1$  em  $U$ .

■

O resultado a seguir é uma pequena modificação no caso mais simples do principal teorema dado em [13], página 253.

**Teorema 1.1.21** (*Aplicação Implícita Global*) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : \Omega \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1$  tal que*

$$(i) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0, \text{ para todo } (x, y) \in \Omega \times (a, b).$$

$$(ii) \quad \liminf_{y \rightarrow a^+} f(x, y) < 0 \text{ e } \limsup_{y \rightarrow b^-} f(x, y) > 0, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

*Então, existe  $g : \Omega \rightarrow (a, b)$  de classe  $C^1$  tal que  $f(x, g(x)) = 0$ , para todo  $x \in \Omega$ .*

**Demonstração:** Dado  $x \in U$ , segue de (ii) que existem  $y_1, y_2 \in (a, b)$  tais que

$$f(x, y_1) < 0 \text{ e } f(x, y_2) > 0.$$

Segue do Teorema do Valor Intermediário e de (i) que existe  $\bar{y}$  entre  $y_1$  e  $y_2$  tal que

$$f(x, \bar{y}) = 0. \tag{1.16}$$

Suponha que exista  $\overline{y_0} \in [y_1, y_2]$  tal que  $f(x, \overline{y_0}) = 0$ . Do Teorema do Valor Médio, temos:

$$0 = f(x, \overline{y}) - f(x, \overline{y_0}) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{y_0})(\overline{y} - \overline{y_0}).$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{y_0}) \neq 0$ , segue que  $\overline{y} = \overline{y_0}$ . Logo, existe um único  $\overline{y}$  que satisfaz (1.16). Assim, para cada  $x \in \Omega$  existe um único  $g(x) \in (a, b)$  tal que  $f(x, g(x)) = 0$  e pelo Lema 1.1.20 segue que  $g \in C^1$ .

■

## 1.2 Tópicos preliminares de Equações Diferenciais

### 1.2.1 Resultados gerais

**Definição 1.2.1** Considere a função vetorial  $f : [t_0 - a, t_0 + a] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $f$  satisfaz a condição de Lipschitz com respeito à  $x$ , se existe  $L > 0$  tal que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

para quaisquer  $x_1, x_2 \in D$  e  $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ . Chamamos  $L$  de constante de Lipschitz.

**Teorema 1.2.2 (Existência e Unicidade):** Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.17)$$

com  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $|t - t_0| \leq a$ ,  $D = \{x : |x - x_0| \leq d\}$ , onde  $a$  e  $d$  são constantes positivas. Se a função  $f$  satisfaz as condições:

(a)  $f$  é contínua em  $G = [t_0 - a, t_0 + a] \times D$ .

(b)  $f$  é Lipschitz com respeito à  $x$ .

Então, o problema de valor inicial (1.17) admite uma única solução em  $|t - t_0| \leq \min\left(a, \frac{d}{M}\right)$  com  $M = \sup_G |f|$ .

**Demonstração:** Veja [12], capítulo 1, Teorema 1.1. ■

**Teorema 1.2.3 (Desigualdade de Gronwall)** Suponha que: para  $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ , onde  $a$  é uma constante positiva, temos a estimativa

$$\Phi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s) \Phi(s) ds + \delta_3$$

com  $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ,  $\Phi(t)$  e  $\Psi(t)$  são funções contínuas,  $\Phi(t) \geq 0$  e  $\Psi(t) \geq 0$ ,  $\delta_1$  e  $\delta_3$  constantes positivas. Então,

$$\Phi(t) \leq \delta_3 e^{\delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s) ds}$$

para  $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ .

**Demonstração:** Veja [12], capítulo 1, Teorema 1.2. ■

Considere o sistema

$$\dot{x} = A(t) x \quad (1.18)$$

onde  $A(t)$  é uma matriz  $n \times n$  contínua e  $t \in I$ .

Vamos estabelecer algumas propriedades da equação (1.18).

**Proposição 1.2.4** Considere o sistema (1.18). Então,

- (a) Se  $x = \varphi(t)$  é solução de (1.18) tal que  $\varphi(t_0) = 0$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ , então  $\varphi(t) \equiv 0$ , para  $t \in I$ .
- (b) Se as funções vetoriais  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$  são soluções de (1.18), então a função vetorial

$$\varphi(t) = c^1 \varphi_1(t) + c^2 \varphi_2(t) + \dots + c^m \varphi_m(t)$$

onde  $c^1, c^2, \dots, c^m$  são constantes, também é solução de (1.18).

**Demonstração:** Veja [11], página 128. ■

**Definição 1.2.5** Sejam

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t) \tag{1.19}$$

soluções de (1.18). Estas soluções são linearmente dependentes se existem constantes  $c^1, c^2, \dots, c^m$ , nem todas nulas, tais que

$$c^1 \varphi_1(t) + c^2 \varphi_2(t) + \dots + c^m \varphi_m(t) = 0$$

para todo  $t \in I$ . Caso contrário, as soluções (1.19) são chamadas linearmente independentes.

**Proposição 1.2.6** Se (??) são soluções fundamentais de (1.18), então existem constantes  $c^1, c^2, \dots, c^n$  tais que toda solução  $\varphi(t)$  de (1.18) pode ser escrita da forma

$$\varphi(t) = c^1 \varphi_1(t) + c^2 \varphi_2(t) + \dots + c^n \varphi_n(t).$$

**Demonstração:** Veja [11], página 129. ■

**Definição 1.2.7** Uma matriz

$$X(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) & \dots & \varphi_k^1(t) & \dots & \varphi_n^1(t) \\ \varphi_1^2(t) & \dots & \varphi_k^2(t) & \dots & \varphi_n^2(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^n(t) & \dots & \varphi_k^n(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{pmatrix}$$

cujas colunas  $\varphi_k(t) = (\varphi_k^1(t), \varphi_k^2(t), \dots, \varphi_k^n(t))$  são soluções da equação (1.18) e que são linearmente independentes num ponto  $t_0 \in I$ , chama-se matriz fundamental de (1.18).

**Definição 1.2.8** Uma matriz  $X(t)$  é dita  $T$ -periódica, se existe  $T > 0$  tal que

$$X(t + T) = X(t)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Considere a equação:

$$\dot{x} = A(t) x \quad (1.20)$$

onde  $A(t)$  é uma matriz contínua  $n \times n$  e  $T$ -periódica para  $t \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.2.9 (Floquet)** Considere a equação (1.20) com  $A(t)$  uma matriz  $n \times n$  contínua e  $T$ -periódica. Então, cada matriz fundamental  $X(t)$  da equação (1.20) pode ser escrita como o produto de duas matrizes  $n \times n$

$$X(t) = P(t)e^{Bt} \quad (1.21)$$

onde  $P(t)$   $T$ -periódica e  $B$  é uma matriz constante  $n \times n$ .

**Demonstração:** Veja [12], capítulo 6, Teorema 6.5.

■

**Definição 1.2.10** Qualquer matriz não singular  $C$  tal que

$$X(t + T) = X(t)C$$

onde  $X(t)$  é matriz fundamental de (1.20) é chamada matriz de monodromia de (1.20).

**Observação 1.2.11** Seja  $X(t)$  matriz fundamental de (1.20). De (1.21) temos que:

$$X(t + T) = P(t + T)e^{B(t+T)} = P(t)e^{Bt}e^{BT} = X(t)e^{BT}.$$

Logo,  $C = e^{BT}$ .

**Observação 1.2.12** Todas as matrizes de monodromia são conjugadas entre si. Veja [11], página 144.

**Definição 1.2.13** Dizemos que  $\lambda$  é um número característico de (1.20) se  $\lambda$  é autovalor de uma matriz de monodromia  $C$ . Segue da Observação 1.2.12 que  $\lambda$  não depende de  $C$ .

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.22)$$

onde  $D \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é  $C^1$ .

**Definição 1.2.14** *Seja  $I$  um intervalo aberto,  $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$  solução de (1.22). Dizemos que uma solução  $\hat{\Phi} : \hat{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de (1.22), com  $\hat{I}$  um intervalo aberto, é um prolongamento (continuação ou extensão) de  $\Phi$  se  $\hat{I} \supsetneq I$  e  $\hat{\Phi}|_I = \Phi$ . Diremos que  $\Phi$  é continuável se admite um prolongamento. Caso contrário,  $\Phi$  é dita não-continuável.*

**Definição 1.2.15** *Se  $\Phi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$  e  $x : \hat{J} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  são soluções de (1.22) e  $x$  é um prolongamento não continuável de  $\Phi$ , dizemos que  $\hat{J}$  é um intervalo maximal de existência de  $\Phi$ .*

**Teorema 1.2.16** *(Teorema da continuação de solução) Considere o p.v.i. (1.22) onde  $D$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$  e seja  $\Phi(t)$  uma solução dessa equação em algum intervalo, então existe um prolongamento de  $\Phi$  a um intervalo maximal de existência. Além disso, se  $(a, b)$  é intervalo maximal de existência da solução  $x(t)$  de (1.22) então  $(t, x(t))$  tende à fronteira de  $D$  quando  $t \rightarrow a^+$  e  $t \rightarrow b^-$ .*

**Demonstração:** Veja [4], capítulo 1, Teorema 2.1. ■

Seja  $E$  um espaço vetorial de dimensão finita e  $W \subset E$  um conjunto aberto de  $E$ . Considere a equação

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.23)$$

onde  $f : W \longrightarrow E$  é uma função  $C^1$ .

Para cada  $x \in W$ , existe uma única solução  $\Phi(t)$  com  $\Phi(0) = x$  definida num intervalo maximal de existência  $J(x) \subseteq \mathbb{R}$ . Como  $\Phi$  depende de  $x$ , indicaremos  $\Phi(t) = \Phi(t, x)$ . Então,  $\Phi(0, x) = x$ . Temos que  $J(x)$  é um intervalo aberto.

**Definição 1.2.17** *Seja  $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times W : t \in J(x)\}$ . Chamamos  $\Phi : \Omega \longrightarrow W$  dada acima de fluxo da equação (1.23).*

Resumidamente: Se  $\Phi(t, x)$  é o fluxo de (1.23) então:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) = f(\Phi(t, x)), \\ \Phi(0, x) = x. \end{cases}$$

**Teorema 1.2.18**  *$\Omega$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R} \times W$  e  $\Phi : \Omega \longrightarrow W$  é uma aplicação  $C^1$ .*

**Demonstração:** Veja [5], página 175 e página 299. ■

**Teorema 1.2.19** *O fluxo  $\Phi$  da equação (1.23) possui a seguinte propriedade: Se  $s_0 \in J(x)$ ,  $s_0 + t_0 \in J(x)$  e  $t_0 \in J(\Phi(s_0, x))$  então*

$$\Phi(t_0 + s_0, x) = \Phi(t_0, \Phi(s_0, x)).$$

**Demonstração:** Vejamos que  $\psi_1(t) = \Phi(t, \Phi(s_0, x))$  e  $\psi_2(t) = \Phi(t + s_0, x)$  são soluções do p.v.i.:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x), \\ x(0) &= \Phi(s_0, x). \end{cases}$$

De fato,

(i)  $\psi_1(t)$  é solução, pois:

$$\dot{\psi}_1(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \Phi(s_0, x)) = f(\Phi(t, \Phi(s_0, x))) = f(\psi_1(t)).$$

(ii)  $\psi_2(t)$  é solução, pois:

$$\dot{\psi}_2(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t + s_0, x) = f(\Phi(t + s_0, x)) = f(\psi_2(t)).$$

Temos ainda, que:

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \Phi(0, \Phi(s_0, x)) = \Phi(s_0, x), \\ \psi_2(0) &= \Phi(0 + s_0, x) = \Phi(s_0, x). \end{aligned}$$

Da unicidade de soluções do p.v.i., segue que:

$$\Phi(t, \Phi(s_0, x)) = \psi_1(t) = \psi_2(t) = \Phi(t + s_0, x).$$

Das hipóteses segue que podemos fazer  $t = t_0$  na equação anterior. Portanto,

$$\Phi(t_0, \Phi(s_0, x)) = \Phi(t_0 + s_0, x).$$

■

### Observação 1.2.20 *O Fluxo para o caso não-autônomo*

*Toda equação não autônoma*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.24}$$

em  $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times W : t \in J(x)\}$  onde  $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é um aberto, pode ser reescrita como uma equação autônoma

$$\dot{X} = F(X) \tag{1.25}$$

em  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  onde  $X = (s, x)$  e  $F(X) = (1, f(X))$ .

De fato, o fluxo de  $\dot{X} = F(X)$  é dado por:

$$\Gamma(t, X) = (\Gamma_1(t, X), \Gamma_2(t, X)) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Faça  $X(0) = (a, b)$ , isto é,  $s(0) = a \in \mathbb{R}$  e  $x(0) = b \in \mathbb{R}^n$ . De (1.25), temos:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = 1, \\ \dot{x}(t) = f(s(t), x(t)). \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\begin{cases} s(t) = t + a, \\ \frac{\partial \Gamma_2}{\partial t}(t, X) = f(t + a, \Gamma_2(t, X)). \end{cases}$$

Portanto,

$$\Gamma(t, X) = (t + a, \Gamma_2(t, X)) \quad (1.26)$$

onde  $\frac{\partial \Gamma_2}{\partial t}(t, X) = f(t + a, \Gamma_2(t, X))$ .

Então, definimos o fluxo de (1.24) como sendo:

$$\Phi(t, b) = \Gamma_2(t, (0, b)) \quad (1.27)$$

já que:

$$\Phi'(t, b) = \frac{\partial \Gamma_2}{\partial t}(t, (0, b)) = f(t, \Gamma_2(t, (0, b))) = f(t, \Phi(t, b)),$$

$$\Phi(0, b) = \Gamma_2(0, (0, b)) = b.$$

Isto é,

$$\begin{cases} \Phi'(t, b) = f(t, \Phi(t, b)), \\ \Phi(0, b) = b. \end{cases}$$

Além disso, temos:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial(a, b)}(t, X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \Gamma_{2_1}}{\partial a}(t, X) & \frac{\partial \Gamma_{2_1}}{\partial b_1}(t, X) & \dots & \frac{\partial \Gamma_{2_1}}{\partial b_n}(t, X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Gamma_{2_n}}{\partial a}(t, X) & \frac{\partial \Gamma_{2_n}}{\partial b_1}(t, X) & \dots & \frac{\partial \Gamma_{2_n}}{\partial b_n}(t, X) \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\det \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial(a, b)}(t, X) \right) = \det \left( \frac{\partial \Gamma_2}{\partial b}(t, X) \right). \quad (1.28)$$

$$\Gamma(0, X) = X \Rightarrow \frac{\partial \Gamma}{\partial X}(0, X) = I_{n+1}. \quad (1.29)$$

Fazendo  $t = 0$  em (1.28) e usando (1.29) temos:

$$1 = \det I_{n+1} = \det \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial X}(0, X) \right) = \det \left( \frac{\partial \Gamma_2}{\partial b}(0, X) \right).$$

Então,

$$\det \left( \frac{\partial \Gamma_2}{\partial b}(0, (a, b)) \right) = 1. \quad (1.30)$$

Como  $\Gamma(t, X)$  é fluxo de (1.25), segue do Teorema 1.2.18 que:

$$\Gamma(t, X) = (\Gamma_1(t, X), \Gamma_2(t, X)) \in C^1.$$

Portanto, segue de (1.30) que

$$\det \left( \frac{\partial \Gamma_2}{\partial b}(t, (a, b)) \right) \neq 0$$

para  $t$  adequadamente pequeno. Então, de (1.27) e do Teorema 1.1.3 segue que para todo  $b \in \mathbb{R}^n$ , existe um intervalo  $I_b$  com  $0 \in I_b$  tal que para cada  $t \in I_b$  a aplicação

$$b \longrightarrow \Phi(t, b)$$

é inversível. Este resultado será usado na demonstração do Teorema 2.0.40.

**Observação 1.2.21** O Teorema 1.2.19 não é válido para sistemas não autônomos, como mostra o seguinte exemplo:

Considere o p.v.i.

$$\begin{cases} \dot{x} = tx, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Note que  $\Phi(t, x_0) = e^{\frac{t^2}{2}} x_0$  é o fluxo de (1.31), pois:

$$\Phi'(t, x_0) = te^{\frac{t^2}{2}} x_0 = t \Phi(t, x_0),$$

$$\Phi(0, x_0) = x_0.$$

Entretanto, dados  $s_0 = 1$ ,  $t_0 = 2$  e  $x_0 = 1$ , temos:

$$\Phi(s_0 + t_0, x_0) = \Phi(3, 1) = e^{\frac{9}{2}} \neq e^{\frac{5}{2}} = \Phi(1, e^{\frac{4}{2}}) = \Phi(s_0, \Phi(t_0, x_0)).$$

**Proposição 1.2.22** Seja  $A$  um subconjunto compacto do aberto  $W \subset E$  e  $f : W \longrightarrow E$  uma função  $C^1$ . Suponha que  $y_0 \in A$  e toda solução da curva da forma

$$y : [0, \beta] \longrightarrow W, \quad y(0) = y_0$$

permanece inteiramente em  $A$ . Então, existe uma solução

$$y : [0, \infty) \longrightarrow W, \quad y(0) = y_0 \text{ e } y(t) \in A$$

para todo  $t \geq 0$ .

**Demonstração:** Veja [5], página 172.

■

O próximo resultado será usado no Capítulo 2 sobre o Método da Média.

**Proposição 1.2.23** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua  $T$ -periódica. Então, para todo  $\psi \in \mathbb{R}$ , tem-se:*

$$\int_0^T f(x)dx = \int_\psi^{\psi+T} f(x)dx.$$

**Demonstração:** Note que

$$\int_0^T f(x)dx = \int_0^\psi f(x)dx + \int_\psi^{\psi+T} f(x)dx - \int_T^{\psi+T} f(x)dx.$$

Além disso, como  $f$  é  $T$ -periódica, temos:

$$\int_T^{\psi+T} f(x)dx = \int_0^\psi f(u+T)du = \int_0^\psi f(u)du.$$

Dessa forma,

$$\int_0^T f(x)dx = \int_0^\psi f(x)dx + \int_\psi^{\psi+T} f(x)dx - \int_0^\psi f(x)dx = \int_\psi^{\psi+T} f(x)dx.$$

■

Seja

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.32}$$

a forma vetorial de um sistema arbitrário de ordem  $n$  com  $f$  de classe  $C^1$ , sob um certo aberto  $D$  do espaço das variáveis  $t$  e  $x$ .

**Definição 1.2.24** *A solução  $\Phi(t)$  da equação (1.32) com valores iniciais  $t_0$  e  $x_0$  é chamada Lyapunov estável se as seguintes condições estão satisfeitas:*

- (1) *Existe um número  $\rho > 0$  tal que, para  $|x_1 - x_0| < \rho$ , a solução  $\Phi(t, t_0, x_1)$  está definida para todo  $t \geq t_0$ . Em particular, a solução  $\Phi(t)$  também está definida, para todo  $t \geq t_0$ .*
- (2) *Para todo  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar um número positivo  $\delta \leq \rho$  tal que para  $|x_1 - x_0| < \delta$  temos  $|\Phi(t, t_0, x_1) - \Phi(t)| < \varepsilon$ , para todo  $t \geq t_0$ .*

*A solução  $\Phi(t)$  da equação (1.32), a qual é Lyapunov estável com os valores iniciais  $t_0, x_0$  é chamada assintoticamente estável se podemos encontrar um número positivo  $\sigma \leq \rho$  tal que para  $|x_1 - x_0| < \sigma$  temos que  $|\Phi(t, t_0, x_1) - \Phi(t)| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .*

As definições apresentadas acima são invariantes com respeito a escolha dos valores iniciais  $t_0$  e  $x_0$  da solução  $\Phi(t)$ .

Para estudarmos o comportamento das soluções de (1.32) na vizinhança de uma solução  $\Phi(t)$ , devemos introduzir uma função vetorial desconhecida  $y$  tal que

$$x = \Phi(t) + y. \tag{1.33}$$

No que se segue assumiremos que  $f(t, x) \in C^2$  em seu domínio com respeito às coordenadas do vetor  $x$ . Substituindo as variáveis do sistema (1.32) por (1.33), usando o fato que  $\Phi(t)$  é solução de (1.32) e expandindo em  $y$ , obtemos:

$$\dot{y}_i = \sum_j \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t, \Phi(t)) y^j + r^i(t, y).$$

Linearizando este sistema, isto é, descartando os termos  $r^i$ , os quais são pelo menos de segunda ordem em  $y$ , obtemos o sistema linear:

$$\dot{y} = A(t) y \quad (1.34)$$

onde  $A(t)$  é a matriz com elementos  $a_j^i(t) = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t, \Phi(t))$ .

**Teorema 1.2.25** *Considere a equação (1.32)  $T$ -periódica em  $t$ . Seja  $\Phi(t)$  uma solução também  $T$ -periódica.*

- (a) *Se o valor absoluto de todos os números característicos de (1.34) são menores do que um, então a solução  $\Phi$  é assintoticamente estável.*
- (b) *Se o valor absoluto de pelo menos um dos números característicos de (1.34) é maior do que um, então a solução  $\Phi$  é instável.*

**Demonstração:**

- (a) Veja [11], Teorema 25, página 264.
- (b) É uma consequência da Teoria de Floquet e do Teorema 7.6 de [1], página 281.

■

**Proposição 1.2.26** *Seja  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$  tal que  $f(t, x)$  é  $T$ -periódica em  $t$ . Considere a equação diferencial*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

*e seja  $x(t)$  uma solução desta equação. Então,  $x(t)$  é  $T$ -periódica se, e somente se,  $x(0) = x(T)$ .*

**Demonstração:** Suponha  $x(t) = x(t + T)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Para  $t = 0$ , temos:

$$x(0) = x(T).$$

Por outro lado, suponha  $x(0) = x(T)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t + T) &= f(t + T, x(t + T)) = f(t, x(t + T)), \\ \dot{x}(t) &= f(t, x(t)). \end{aligned}$$

Fazendo  $y(t) = x(t + T)$ , a primeira equação fica:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)).$$

Note que:

$$y(0) = x(0 + T) = x(T) = x(0).$$

Da unicidade de soluções do p.v.i., segue que  $x(t) = y(t)$ , isto é,

$$x(t) = x(t + T)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

■

### 1.2.2 O Teorema da Redução

O teorema a seguir nos permitirá obter informações sobre um sistema de ordem  $n + 1$  investigando um outro de ordem  $n$ .

**Teorema 1.2.27** *Sejam  $\Omega \in \mathbb{R}^m$  um aberto,  $f : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_0) \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  tais que:*

$$f(s + 2\pi, x, \varepsilon) = f(s, x, \varepsilon) \text{ e } g(s + 2\pi, x, \varepsilon) = g(s, x, \varepsilon)$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \Omega$  e  $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_0)$ . Considere a seguinte equação diferencial:

$$y'(s) = \frac{\varepsilon f(s, y(s), \varepsilon)}{1 + \varepsilon g(s, y(s), \varepsilon)}. \quad (1.35)$$

Suponha que (1.35) tenha uma solução  $2\pi$ -periódica  $y_0(s, \varepsilon)$ , então existe  $\varepsilon_1 \in (0, \bar{\varepsilon}_0)$  e  $T : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T$  é de classe  $C^r$  tais que:

(i)  $T(0) = 2\pi$ .

(ii) O sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f(\theta(t), y(t), \varepsilon), \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon g(\theta(t), y(t), \varepsilon) \end{cases} \quad (1.36)$$

tem solução  $(x_0(t, \varepsilon), \theta_0(t, \varepsilon))$  com  $x_0(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = x_0(t, \varepsilon)$  e  $\theta_0(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = \theta_0(t, \varepsilon) + 2\pi$ .

**Demonstração:** Vamos considerar  $f$  e  $g$  restritas no domínio  $\mathbb{R} \times \Omega \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  onde  $\varepsilon_0 < \bar{\varepsilon}_0$ . Por hipótese,  $g$  é  $2\pi$ -periódica em  $s$ . Dessa forma,

$$\max_{s \in \mathbb{R}} |g(s, y_0(s, \varepsilon), \varepsilon)| = \max_{s \in [0, 2\pi]} |g(s, y_0(s, \varepsilon), \varepsilon)|.$$

E ainda,  $\max_{s \in \mathbb{R}} |y_0(s, \varepsilon)| = \max_{s \in [0, 2\pi]} |y_0(s, \varepsilon)|$ . Como  $y_0$  é contínua então aplica o compacto  $[0, 2\pi] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  em um compacto. Assim,  $[0, 2\pi] \times \{y_0([0, 2\pi], [-\varepsilon_0, \varepsilon_0])\} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  é um compacto e segue que existe  $M > 0$  tal que:

$$\max_{s \in \mathbb{R}} |g(s, y_0(s, \varepsilon), \varepsilon)| = \max_{s \in [0, 2\pi]} |g(s, y_0(s, \varepsilon), \varepsilon)| \leq |g(s, y_0(s, \varepsilon), \varepsilon)| \leq M, \quad (1.37)$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$  e  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ . Daí, existe  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_1 < \frac{1}{2M}$  tal que:

$$\begin{aligned} -\varepsilon g(s, y_0(s, \varepsilon), \varepsilon) &\leq |\varepsilon| |g(s, y_0(s, \varepsilon), \varepsilon)| < \varepsilon_1 M < \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\varepsilon g(s, y_0(s, \varepsilon), \varepsilon) &< \frac{1}{2} \Rightarrow \varepsilon g(s, y_0(s, \varepsilon), \varepsilon) + \frac{1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Portanto, existe  $\varepsilon_1 > 0$  tal que

$$1 + \varepsilon g(s, y_0(s, \varepsilon), \varepsilon) > \frac{1}{2} \quad (1.38)$$

para todo  $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ .

Seja

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \times (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, \varepsilon) &\longmapsto \int_0^s \frac{du}{1 + \varepsilon g(u, y_0(u, \varepsilon), \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Para cada  $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$  considere  $h(s, \varepsilon) = h_\varepsilon(s)$

$$\begin{aligned} h_\varepsilon : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \int_0^s \frac{du}{1 + \varepsilon g(u, y_0(u, \varepsilon), \varepsilon)}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Note que  $h_\varepsilon$  é diferenciável, pois é integral de uma função diferenciável. Então,

$$h'_\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + \varepsilon g(s, y_0(s, \varepsilon), \varepsilon)} > 0$$

por (1.38). Logo,  $h_\varepsilon$  é injetora. Novamente por (1.38) existe  $C = \varepsilon_1 M > 0$  tal que

$$1 + \varepsilon g(s, y_0(s, \varepsilon), \varepsilon) < 1 + C \Rightarrow \frac{1}{1 + \varepsilon g(s, y_0(s, \varepsilon), \varepsilon)} > \frac{1}{1 + C}. \quad (1.40)$$

(i) Se  $s > 0$  por (1.40) temos:

$$\int_0^s \frac{du}{1 + \varepsilon g(u, y_0(u, \varepsilon), \varepsilon)} > \int_0^s \frac{1}{1 + C} du \Rightarrow h_\varepsilon(s) > \frac{s}{1 + C}.$$

Daí,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} h_\varepsilon(s) \geq \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s}{1 + C} = +\infty \Rightarrow \lim_{s \rightarrow +\infty} h_\varepsilon(s) = +\infty. \quad (1.41)$$

(ii) Se  $s < 0$  por (1.40) temos:

$$\begin{aligned} \int_s^0 \frac{du}{1 + \varepsilon g(u, y_0(u, \varepsilon), \varepsilon)} &> \int_s^0 \frac{1}{1 + C} du \Rightarrow \\ - \int_0^s \frac{du}{1 + \varepsilon g(u, y_0(u, \varepsilon), \varepsilon)} &> - \int_0^s \frac{1}{1 + C} du \Rightarrow \\ -h_\varepsilon(s) &> -\frac{s}{1 + C} \Rightarrow h_\varepsilon(s) < \frac{s}{1 + C}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} h_\varepsilon(s) \leq \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{s}{1 + C} = -\infty \Rightarrow \lim_{s \rightarrow -\infty} h_\varepsilon(s) = -\infty. \quad (1.42)$$

Assim, dado  $z \in \mathbb{R}$ , por (1.41) e (1.42) existem  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $h_\varepsilon(z_1) > z$  e  $h_\varepsilon(z_2) < z$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $\bar{z} \in \mathbb{R}$  tal que  $h_\varepsilon(\bar{z}) = z$ . Portanto,  $h_\varepsilon$  é sobrejetora.

Assim,  $h_\varepsilon$  admite inversa  $h_\varepsilon^{-1}$  diferenciável. Daí,

$$\begin{aligned}
(h_\varepsilon^{-1})'(h_\varepsilon(s)) &= \frac{1}{h'_\varepsilon(s)} = 1 + \varepsilon g(s, y_0(s, \varepsilon), \varepsilon) \Rightarrow \\
\Rightarrow (h_\varepsilon^{-1}(s))' &= \frac{1}{h'_\varepsilon(h_\varepsilon^{-1}(s))} = 1 + \varepsilon g(h_\varepsilon^{-1}(s), y_0(h_\varepsilon^{-1}(s), \varepsilon), \varepsilon).
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Defina

$$\begin{aligned}
\theta_0(t, \varepsilon) &= h_\varepsilon^{-1}(t), \\
x_0(t, \varepsilon) &= y_0(h_\varepsilon^{-1}(t), \varepsilon).
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Observe que:

(i) De (1.43) e (1.44) temos que:

$$\begin{aligned}
\theta'_0(t, \varepsilon) &= (h_\varepsilon^{-1}(t))' = 1 + \varepsilon g(h_\varepsilon^{-1}(t), y_0(h_\varepsilon^{-1}(t), \varepsilon), \varepsilon) \\
&= 1 + \varepsilon g(\theta_0(t, \varepsilon), x_0(t, \varepsilon), \varepsilon).
\end{aligned}$$

(ii) Como  $y_0$  satisfaz (1.35) e por (i) temos:

$$\begin{aligned}
x'_0(t, \varepsilon) &= (y_0(h_\varepsilon^{-1}(t), \varepsilon))' = y'_0(h_\varepsilon^{-1}(t), \varepsilon)(h_\varepsilon^{-1}(t))' \\
&= y'_0(h_\varepsilon^{-1}(t), \varepsilon)(1 + \varepsilon g(\theta_0(t, \varepsilon), x_0(t, \varepsilon), \varepsilon)) \\
&= y'_0(\theta_0(t, \varepsilon), \varepsilon)(1 + \varepsilon g(\theta_0(t, \varepsilon), y_0(\theta_0(t, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon)) \\
&= \varepsilon f(\theta_0(t, \varepsilon), y_0(\theta_0(t, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) = \varepsilon f(\theta_0(t, \varepsilon), x_0(t, \varepsilon), \varepsilon).
\end{aligned}$$

Segue de (1.44) que:

$$x_0(h_\varepsilon(s), \varepsilon) = y_0(s, \varepsilon). \tag{1.45}$$

Como  $y_0$  é  $2\pi$ -periódica, então:

$$x_0(h_\varepsilon(s + 2\pi), \varepsilon) = y_0(s + 2\pi, \varepsilon) = y_0(s, \varepsilon). \tag{1.46}$$

Fazendo  $s = 0$  em (1.45) e (1.46):

$$x_0(h_\varepsilon(0), \varepsilon) = y_0(0, \varepsilon) = x_0(h_\varepsilon(2\pi), \varepsilon).$$

Mas,  $h_\varepsilon(0) = 0$  por (1.39). Assim,

$$x_0(0, \varepsilon) = x_0(h_\varepsilon(2\pi), \varepsilon). \tag{1.47}$$

Chame

$$T(\varepsilon) = h_\varepsilon(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{du}{1 + \varepsilon g(u, y_0(u, \varepsilon), \varepsilon)}.$$

Então,

$$T(0) = \int_0^{2\pi} du = 2\pi$$

e  $T(\varepsilon) \in C^r$ , pelo Corolário 1.1.2. Logo,

$$x_0(0, \varepsilon) = x_0(T(\varepsilon), \varepsilon). \quad (1.48)$$

Além disso, de (1.44), segue que:

$$\theta_0(h_\varepsilon(s), \varepsilon) = s. \quad (1.49)$$

Fazendo  $s = 2\pi$  em (1.49), temos:

$$\theta_0(h_\varepsilon(2\pi), \varepsilon) = 2\pi$$

ou seja,

$$\theta_0(T(\varepsilon), \varepsilon) = 2\pi. \quad (1.50)$$

Fazendo  $s = 0$  em (1.49), temos:

$$\theta_0(h_\varepsilon(0), \varepsilon) = 0 \Rightarrow \theta_0(0, \varepsilon) = 0. \quad (1.51)$$

Considere

$$\begin{cases} u(t) = (u_1(t), u_2(t)) = (x_0(t + T(\varepsilon), \varepsilon), \theta_0(t + T(\varepsilon), \varepsilon)), \\ v(t) = (v_1(t), v_2(t)) = (x_0(t, \varepsilon), \theta_0(t, \varepsilon) + 2\pi). \end{cases}$$

Por (1.48), (1.50) e (1.51) temos:

$$u(0) = (u_1(0), u_2(0)) = (x_0(T(\varepsilon), \varepsilon), \theta_0(T(\varepsilon), \varepsilon)) = (x_0(0, \varepsilon), 2\pi),$$

$$v(0) = (v_1(0), v_2(0)) = (x_0(0, \varepsilon), \theta_0(0, \varepsilon) + 2\pi) = (x_0(0, \varepsilon), 2\pi).$$

Logo,  $u(0) = v(0)$ . E ainda, por (i), (ii) e da periodicidade de  $f$  e  $g$  na primeira variável, temos:

$$\begin{aligned} u'(t) &= (u'_1(t), u'_2(t)) \\ &= (x'_0(t + T(\varepsilon), \varepsilon), \theta'_0(t + T(\varepsilon), \varepsilon)) \\ &= (\varepsilon f(\theta_0(t + T(\varepsilon), \varepsilon), x_0(t + T(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon), 1 + \varepsilon g(\theta_0(t + T(\varepsilon), \varepsilon), x_0(t + T(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon)) \\ &= (\varepsilon f(u_2(t), u_1(t), \varepsilon), 1 + \varepsilon g(u_2(t), u_1(t), \varepsilon)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'(t) &= (v'_1(t), v'_2(t)) \\ &= (x'_0(t, \varepsilon), \theta'_0(t, \varepsilon)) \\ &= (\varepsilon f(\theta_0(t, \varepsilon), x_0(t, \varepsilon), \varepsilon), 1 + \varepsilon g(\theta_0(t, \varepsilon), x_0(t, \varepsilon), \varepsilon)) \\ &= (\varepsilon f(\theta_0(t, \varepsilon) + 2\pi, x_0(t, \varepsilon), \varepsilon), 1 + \varepsilon g(\theta_0(t, \varepsilon) + 2\pi, x_0(t, \varepsilon), \varepsilon)) \\ &= (\varepsilon f(v_2(t), v_1(t), \varepsilon), 1 + \varepsilon g(v_2(t), v_1(t), \varepsilon)) \end{aligned}$$

Isto é,  $u$  e  $v$  são soluções de (1.36). Segue da unicidade de soluções do p.v.i. que:

$$u(t) = v(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\begin{cases} x_0(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = x_0(t, \varepsilon), \\ \theta_0(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = \theta_0(t, \varepsilon) + 2\pi. \end{cases}$$

■

**Observação 1.2.28** *Este teorema também é válido caso tenhamos:*

$$y'(s) = \frac{\varepsilon f(s, y(s), \varepsilon)}{a + \varepsilon g(s, y(s), \varepsilon)}$$

onde  $a \neq 0$ . Neste caso, sob as mesmas hipóteses, vamos obter as mesmas informações acima sobre o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f(\theta(t), y(t), \varepsilon), \\ \dot{\theta} = a + \varepsilon g(\theta(t), y(t), \varepsilon). \end{cases}$$

### 1.2.3 Funções Elípticas Jacobianas de um ponto de vista de Sistemas Dinâmicos

A Teoria das Funções Elípticas Jacobianas surgiu na tentativa de integrar certas expressões algébricas, mas logo foram encontradas aplicações à geometria, mecânica, física e engenharia. Estas funções satisfazem um sistema de equações diferenciais simples, o qual pode ser analisado usando a teoria básica de equações diferenciais. Muitas de suas propriedades vem como aplicações imediatas dos teoremas fundamentais de existência, unicidade e dependência contínua das soluções em relação às condições iniciais.

A abordagem a seguir é exatamente aquela dada em [9]. A única diferença a notar é a prova da periodicidade das funções elípticas que aqui é dada em detalhe.

#### Definição

Considere  $k \in (0, 1)$  e o sistema de equações:

$$\begin{cases} \dot{x} = yz, \\ \dot{y} = -zx, \\ \dot{z} = -k^2 xy \end{cases} \quad (1.52)$$

que satisfaz as condições iniciais

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 1, \\ z(0) = 1. \end{cases} \quad (1.53)$$

As funções elípticas jacobianas  $sn(t, k)$ ,  $cn(t, k)$  e  $dn(t, k)$  são definidas como sendo as soluções  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$ , respectivamente, do sistema (1.52) com condições iniciais (1.53).

Os pontos em (1.52) denotam a derivada com respeito à  $t$ . O parâmetro  $k$  é conhecido como módulo e  $\bar{k} = \sqrt{1 - k^2}$  como o módulo complementar.

A teoria básica de existência de equações diferenciais garante que as funções elípticas jacobianas são diferenciáveis. A definição nos dá imediatamente as derivadas das funções, a saber:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} sn(t, k) = cn(t, k) dn(t, k), \\ \frac{d}{dt} cn(t, k) = -dn(t, k) sn(t, k), \\ \frac{d}{dt} dn(t, k) = -k^2 sn(t, k) cn(t, k). \end{cases} \quad (1.54)$$

#### Propriedades das Funções Elípticas Jacobianas

**Proposição 1.2.29** *As soluções de (1.52) com as condições iniciais (1.53), satisfazem:*

$$x^2 + y^2 = 1, \quad k^2 x^2 + z^2 = 1.$$

**Demonstração:** Temos:

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(yz) + 2y(-zx) = 0.$$

E ainda,

$$\frac{d}{dt}(k^2x^2 + z^2) = 2k^2x\dot{x} + 2z\dot{z} = 2k^2x(yz) + 2z(-k^2xy) = 0.$$

Logo,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c_1, \\ k^2x^2 + z^2 = c_2 \end{cases}$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes. Já que

$$\begin{aligned} x(0)^2 + y(0)^2 &= 1, \\ k^2x(0)^2 + z(0)^2 &= 1 \end{aligned}$$

segue que  $c_1 = c_2 = 1$ .

■

**Teorema 1.2.30** *As funções  $sn(t, k)$ ,  $cn(t, k)$  e  $dn(t, k)$  estão definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstração:** Considere o compacto

$$A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } k^2x^2 + z^2 = 1 \text{ com } 0 < k < 1 \text{ fixado}\}.$$

Pela Proposição 1.2.29, segue que a solução  $(sn(t, k), cn(t, k), dn(t, k))$  de (1.52) está contida em  $A$ . Da Proposição 1.2.22, segue que  $(sn(t, k), cn(t, k), dn(t, k))$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

■

**Observação 1.2.31** *Para  $k$  fixado,  $0 < k < 1$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ :*

$$\begin{cases} -1 \leq sn(t, k) \leq 1, \\ -1 \leq cn(t, k) \leq 1, \\ \bar{k} \leq dn(t, k) \leq 1. \end{cases}$$

*De fato, vimos na Proposição 1.2.29 que:*

$$\begin{cases} sn(t, k)^2 + cn(t, k)^2 = 1, \\ k^2 sn(t, k)^2 + dn(t, k)^2 = 1. \end{cases}$$

*Assim,*

$$sn(t, k)^2 + cn(t, k)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} sn(t, k)^2 \leq 1, \\ cn(t, k)^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq sn(t, k) \leq 1, \\ -1 \leq cn(t, k) \leq 1. \end{cases}$$

E ainda,

$$k^2 \operatorname{sn}(t, k)^2 + \operatorname{dn}(t, k)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{dn}(t, k)^2 = 1 - k^2 \operatorname{sn}(t, k)^2 \geq 1 - k^2$$

$$\Rightarrow \operatorname{dn}(t, k)^2 \geq 1 - k^2 \Rightarrow \operatorname{dn}(t, k) \geq \sqrt{1 - k^2} = \bar{k},$$

$$\operatorname{dn}(t, k)^2 \leq 1 \text{ e } \operatorname{dn}(t, k) > 0 \Rightarrow 0 < \operatorname{dn}(t, k) \leq 1.$$

Portanto,

$$\bar{k} \leq \operatorname{dn}(t, k) \leq 1.$$

O resultado a seguir é uma aplicação do Teorema 1.2.18.

**Proposição 1.2.32** Se  $k \rightarrow 0^+$  então

$$\operatorname{sn}(t, k) \rightarrow \operatorname{sen} t, \operatorname{cn}(t, k) \rightarrow \operatorname{cos} t, \operatorname{dn}(t, k) \rightarrow 1.$$

Se  $k \rightarrow 1^-$  então

$$\operatorname{sn}(t, k) \rightarrow \tanh t, \operatorname{cn}(t, k) \rightarrow \operatorname{sech} t, \operatorname{dn}(t, k) \rightarrow \operatorname{sech} t.$$

A convergência é uniforme em conjuntos compactos.

**Demonstração:** Seja  $\Phi$  o fluxo do sistema (1.52). Temos que

$$\Phi(t, (0, 1, 1), k) = (\operatorname{sn}(t, k), \operatorname{cn}(t, k), \operatorname{dn}(t, k)).$$

Pelo Teorema 1.2.18,  $\Phi(t, (0, 1, 1), k) \in C^1$ . Daí,

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \Phi(t, (0, 1, 1), k) = \Phi(t, (0, 1, 1), 0). \quad (1.55)$$

Se  $k = 0$  ficamos com o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = yz, \\ \dot{y} = -xz, \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \quad (1.56)$$

com as condições iniciais  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$  e  $z(0) = 1$ .

$$\dot{z} = 0 \text{ e } z(0) = 1 \Rightarrow z(t) = 1.$$

O sistema fica:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Sabemos que a solução desse sistema com essas condições iniciais é  $(\operatorname{sen} t, \operatorname{cos} t)$ . Portanto, a solução de (1.56) é:  $(\operatorname{sen} t, \operatorname{cos} t, 1)$ . Do Teorema 1.2.2 (Existência e Unicidade) segue que:

$$\Phi(t, (0, 1, 1), k) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{cos} t, 1).$$

Dessa forma, por (1.55) quando  $k \rightarrow 0^+$  temos:

$$\begin{cases} sn(t, k) \rightarrow \sin t, \\ cn(t, k) \rightarrow \cos t, \\ dn(t, k) \rightarrow 1. \end{cases}$$

E ainda,

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} \Phi(t, (0, 1, 1), k) = \Phi(t, (0, 1, 1), 1). \quad (1.57)$$

Se  $k = 1$  temos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = yz, \\ \dot{y} = -xz, \\ \dot{z} = -xy \end{cases} \quad (1.58)$$

com as condições iniciais  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$  e  $z(0) = 1$ .

Pela Proposição 1.2.29, quando  $k = 1$  temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow z^2 = y^2 \text{ e } z(0) = y(0) \Rightarrow z = y. \quad (1.59)$$

Assim, ficamos com o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2, \\ \dot{y} = -xy. \end{cases}$$

Novamente pela Proposição 1.2.29:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2, \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Fazendo separação de variáveis, obtemos que a solução deste sistema é  $x(t) = \tanh t$ . Assim, como

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \operatorname{sech} t \Rightarrow y(t) = \operatorname{sech} t.$$

pois  $y(0) = 1$ . Então, a solução de (1.58) é  $(\tanh t, \operatorname{sech} t, \operatorname{sech} t)$ . Do Teorema 1.2.2 segue que:

$$\Phi(t, 1, (x, y, z)) = (\tanh t, \operatorname{sech} t, \operatorname{sech} t).$$

Dessa forma, por (1.57) quando  $k \rightarrow 1^-$  temos:

$$\begin{cases} sn(t, k) \rightarrow \tanh t, \\ cn(t, k) \rightarrow \operatorname{sech} t, \\ dn(t, k) \rightarrow \operatorname{sech} t. \end{cases}$$

■

Muitos fatos básicos sobre as funções elípticas jacobianas são resultados de propriedades do sistema (1.52).

**Teorema 1.2.33** *As funções  $sn(t, k)$ ,  $cn(t, k)$  e  $dn(t, k)$  são periódicas em  $t$ .*

**Demonstração:** Considere a curva

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ k^2 x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

e a parametrização:

$$\begin{cases} x = \cos s, \\ y = \sin s, \\ z = \sqrt{1 - k^2 \cos^2 s} \end{cases}$$

onde  $0 \leq s \leq 2\pi$ .

Defina:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= (x(t), y(t), z(t)), \\ \varphi_2(t) &= (\cos t, \sin t, \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t}) \end{aligned}$$

onde  $t \in \mathbb{R}$ .

Note que:

(1) Considere a seguinte família de conjuntos:

$$\mathfrak{F} = \{\varphi_2(I) : I \subset \mathbb{R} \text{ é um intervalo aberto} \}.$$

Note que  $\varphi_2(I) \subset C$  para qualquer intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ . Além disso, dado  $(x, y, z) \in C$  temos que existe  $s \in [0, 2\pi]$  tal que

$$\begin{cases} x = \cos s, \\ y = \sin s, \\ z = \sqrt{1 - k^2 \cos^2 s}. \end{cases}$$

Daí,  $\varphi_2(s) = (\cos s, \sin s, \sqrt{1 - k^2 \cos^2 s}) = (x, y, z)$ .

Portanto, existe  $\varphi_2((s-1, s+1)) \in \mathfrak{F}$  tal que  $(x, y, z) \in \varphi_2((s-1, s+1))$ . Isto é,  $C = \bigcup_{\varphi_2(I) \in \mathfrak{F}} \varphi_2(I)$  onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo aberto.

Sejam  $S_1 = \left\{ \bigcap_{i=1}^n \varphi_2(I_i) : n \in \mathbb{N} \text{ e } \varphi_2(I_i) \in \mathfrak{F} \right\}$  e  $L \subset S_1$ . Então,

$$\tau_{\mathfrak{F}} = \left\{ \bigcup_{A \in L} A \right\} \cup \emptyset$$

é uma topologia em  $C$ . Veja [8], página 273.

(2) Considere  $\tau_{usual}$  a topologia usual da reta. Então,  $\varphi_2 : (\mathbb{R}, \tau_{usual}) \longrightarrow (C, \tau_{\mathfrak{F}})$  é contínua.

Prova:

Considere  $U \in \tau_{\mathfrak{F}}$ . Se  $U = \emptyset$  então  $\varphi_2^{-1}(U) = \varphi_2^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_{usual}$ . Por outro lado, se  $U = \bigcup_{A \in L} A$  então

$$\begin{aligned}\varphi_2^{-1}(U) &= \varphi_2^{-1}\left(\bigcup_{A \in L} A\right) = \left\{s \in \mathbb{R} : \varphi_2(s) \in \bigcup_{A \in L} A\right\} \\ &= \left\{s \in \mathbb{R} : \varphi_2(s) \in \bigcap_{i=1}^k \varphi_2(I_i) \text{ onde } k \in \mathbb{N} \text{ e } I_i \in \tau_{usual}\right\} \\ &= \left\{s \in \mathbb{R} : s \in \bigcap_{i=1}^n I_i \text{ onde } k \in \mathbb{N} \text{ e } I_i \in \tau_{usual}\right\} \in \tau_{usual}.\end{aligned}$$

Portanto,  $\varphi_2$  é contínua.

(3)  $C$  é compacto e conexo.

Prova: Como  $\varphi_2 : ([0, 2\pi], \tau_{usual}) \longrightarrow (C, \tau_{\mathfrak{F}})$  é contínua e  $[0, 2\pi]$  é compacto e conexo em  $\mathbb{R}$  segue que  $\varphi_2([0, 2\pi]) = C$  é compacto e conexo.

(4) Se  $p_0 = (0, 1, 1) \in C$  então  $C - \{p_0\}$  é conexo.

Prova: Note que  $\varphi_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}, \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\pi}{2}}\right) = (0, 1, 1)$  e ainda,

$$\varphi_2\left(\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right]\right) = C.$$

Dessa forma,

$$\varphi_2\left(\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)\right) = C - \{p_0\}.$$

Como  $\varphi_2$  é contínua e  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) \subset \mathbb{R}$  é conexo, então  $C - \{p_0\}$  é conexo.

(5) Dado  $t_0 \in \mathbb{R}$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\varphi_1((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$  é um aberto em  $C$ .

Prova: Como  $\varphi_2$  é sobrejetora, existe  $s_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$\varphi_1(t_0) = \varphi_2(s_0). \quad (1.60)$$

Mas,

$$\varphi_2(s_0) = (\cos s_0, \sin s_0, \sqrt{1 - k^2 \cos^2 s_0}).$$

Sabemos que:  $\cos s_0 \neq 0$  ou  $\sin s_0 \neq 0$ . Suponhamos que  $\cos s_0 \neq 0$ . Seja  $g(s) = \sin s$ . Como  $g'(s_0) = \cos s_0 \neq 0$  segue do Teorema 1.1.3 que existe  $\delta_1 > 0$  e  $(a_1, b_1)$  tal que  $\sin s_0 \in (a_1, b_1)$  e

$$g : (s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1) \longrightarrow (a_1, b_1)$$

é um difeomorfismo  $C^\infty$ . Consideremos o aberto  $U_1 \subset C$  tal que  $U_1 = \varphi_2((s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1))$ . De (1.60) temos:  $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(s_0) \in U_1$ . Como  $y(t)$  é contínua existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $y : (t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2) \longrightarrow (a_1, b_1)$ .

Considere:

$$\begin{aligned} u : (t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2) &\longrightarrow (s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1) \\ t &\longmapsto u(t) = g^{-1}(y(t)). \end{aligned}$$

Note que  $u \in C^\infty$ , pois  $g^{-1} \in C^\infty$  e  $y \in C^\infty$ .

Novamente por (1.60):

$$u(t_0) = g^{-1}(y(t_0)) = g^{-1}(\sin s_0) = s_0,$$

$$\begin{aligned} u'(t_0) &= (g^{-1})'(y(t_0)) y'(t_0) = (g^{-1})'(\sin s_0) (-z(t_0)x(t_0)) \\ &= \frac{-\sqrt{1 - k^2 \cos^2 s_0} \cos s_0}{g'(g^{-1}(\sin s_0))} = \frac{-\sqrt{1 - k^2 \cos^2 s_0} \cos s_0}{\cos s_0} \\ &= -\sqrt{1 - k^2 \cos^2 s_0} \neq 0 \end{aligned}$$

pois  $0 < k < 1$ . Assim, segue do Teorema 1.1.3 que existe  $\delta_3 > 0$  e  $(a_2, b_2) \subset (s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1)$  com  $u(t_0) = s_0 \in (a_2, b_2)$  tal que

$$u : (t_0 - \delta_3, t_0 + \delta_3) \longrightarrow (a_2, b_2)$$

é um difeomorfismo  $C^\infty$ . Daí,

$$u(t) = g^{-1}(y(t)) \Rightarrow y(t) = g(u(t)) = \sin u(t)$$

onde  $t \in (t_0 - \delta_3, t_0 + \delta_3)$ .

Da Proposição 1.2.29, segue que:

$$x(t)^2 = \cos^2 u(t).$$

Além disso, como  $u((t_0 - \delta_3, t_0 + \delta_3)) = (a_2, b_2) \subset (s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1)$  e  $g|_{(s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1)}$  é um difeomorfismo  $C^\infty$ , segue que

$$g'(u(t)) = \cos u(t) \neq 0$$

para todo  $t \in (s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1)$ . Assim,  $\left(\frac{x(t)}{\cos u(t)}\right)^2 = 1$  e  $\left(\frac{x(t)}{\cos u(t)}\right)$  é contínua.

Como

$$\frac{x(t_0)}{\cos u(t_0)} = \frac{x(t_0)}{\cos s_0} = \frac{\cos s_0}{\cos s_0} = 1$$

então:

$$\frac{x(t)}{\cos u(t)} = 1 \Rightarrow x(t) = \cos u(t)$$

onde  $t \in (t_0 - \delta_3, t_0 + \delta_3)$ .

Temos ainda:  $k^2 x(t)^2 + z(t)^2 = 1$  e  $z(t) > 0$ . Logo,

$$z(t) = \sqrt{1 - k^2 x(t)^2} = \sqrt{1 - k^2 \cos^2 u(t)}$$

onde  $t \in (t_0 - \delta_3, t_0 + \delta_3)$ .

Enfim, obtemos:

$$\begin{cases} x(t) = \cos u(t), \\ y(t) = \sin u(t), \\ z(t) = \sqrt{1 - k^2 \cos^2 u(t)} \end{cases}$$

para  $t \in (t_0 - \delta_3, t_0 + \delta_3)$ . Assim, segue que:

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(u(t)), \text{ para } t \in (t_0 - \delta_3, t_0 + \delta_3).$$

Como  $u$  é um difeomorfismo então

$$u((t_0 - \delta_3, t_0 + \delta_3)) = (a_2, b_2).$$

Daí,

$$\varphi_1((t_0 - \delta_3, t_0 + \delta_3)) = \varphi_2(u((t_0 - \delta_3, t_0 + \delta_3))) = \varphi_2((a_2, b_2)) =: U_2$$

que é um aberto (básico) de  $C$ .

(6)  $\varphi_1(\mathbb{R})$  é um aberto em  $C$ .

Prova: De (5) temos que dado  $t_0 \in \mathbb{R}$  existe  $\delta(t_0) > 0$  tal que  $\varphi_1((t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0)))$  é um aberto de  $C$ . Sabemos que:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} (t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0))$$

e ainda,

$$\varphi_1(\mathbb{R}) = \bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} \varphi_1((t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0))).$$

De fato, seja  $y \in \varphi_1\left(\bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} (t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0))\right)$  então existe  $x_0 \in (t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0))$ ,

para algum  $t_0$ , tal que  $\varphi_1(x_0) = y$ . Logo,  $y \in \{\varphi_1((x_0 - 1, x_0 + 1))\} \subset \bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} \varphi_1((t_0 -$

$\delta(t_0), t_0 + \delta(t_0))$ ). Por outro lado, se  $y \in \bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} \varphi_1((t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0)))$  então  $y \in \varphi_1((t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0)))$ , para algum  $t_0$  então existe  $x_0 \in (t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0))$

tal que  $y = \varphi_1(x_0)$ . Daí,  $x_0 \in \bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} (t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0))$ . Assim,  $y = \varphi_1(x_0) \in \varphi_1\left(\bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} (t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0))\right)$ .

Portanto,

$$\varphi_1(\mathbb{R}) = \varphi_1\left(\bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} (t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0))\right) = \bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} \varphi_1((t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0))).$$

Como a união arbitrária de abertos é aberto, segue que  $\varphi_1(\mathbb{R})$  é aberto em  $C$ .

(7) A topologia  $\tau_{\mathfrak{F}}$  é Hausdorff.

Prova: Sabemos que  $\varphi_2\left(\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right]\right) = C$ .

(i) Dados distintos  $p_1, p_2 \in C - \{(0, 1, 1)\}$  existem  $t_1, t_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$  tais que  $\varphi_2(t_1) = p_1$  e  $\varphi_2(t_2) = p_2$ .

Vejamos que  $\varphi_2 : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) \rightarrow C - \{(0, 1, 1)\}$  é injetora. Sejam  $s_1, s_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$  tais que  $\varphi_2(s_1) = \varphi_2(s_2)$ . Então,

$$\begin{cases} \cos s_1 = \cos s_2, \\ \sin s_1 = \sin s_2 \end{cases} \Rightarrow s_1 = s_2.$$

Portanto, existem  $I_1, I_2 \subset \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$  tais que  $t_1 \in I_1$ ,  $t_2 \in I_2$  e  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ . Isto é,  $\varphi_2(I_1)$  é um aberto que contém  $p_1$ ,  $\varphi_2(I_2)$  é um aberto que contém  $p_2$  e

$$\varphi_2(I_1) \cap \varphi_2(I_2) = \emptyset$$

pois  $\varphi_2$  é injetora em  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$ .

(ii) Suponha sem perda de generalidade  $p_1 = (0, 1, 1)$  e  $p_2 \in C - \{(0, 1, 1)\}$ . Assim, existem  $t_1 \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right\}$  e  $t_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$  tais que

$$\varphi_2(t_1) = p_1 \text{ e } \varphi_2(t_2) = p_2.$$

Como  $\varphi_2 : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right] \rightarrow C$  e  $\varphi_2 : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) \rightarrow C$  são injetoras segue que existem  $I_1, I_2 \subset \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right]$  ou  $I_1, I_2 \subset \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$  tais que  $t_1 \in I_1$ ,  $t_2 \in I_2$  e  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ . Isto é,  $\varphi_2(I_1)$  é um aberto que contém  $p_1$ ,  $\varphi_2(I_2)$  é um aberto que contém  $p_2$  e

$$\varphi_2(I_1) \cap \varphi_2(I_2) = \emptyset$$

pois  $\varphi_2$  é injetora em  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right]$  e em  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$ .

(8)  $\varphi_1(\mathbb{R})$  é fechado em  $C$ .

Prova: Seja  $p \in C$  tal que existe  $\{t_n\}$  com  $\varphi_1(t_n) \rightarrow p$  na topologia  $\tau_{\mathfrak{F}}$  de  $C$ . Por (7), segue que  $p$  é único. Seja  $\Phi$  o fluxo de (1.52). Se  $p_0 = (0, 1, 1)$ , temos que:

$$\Phi(t, p_0, k) = (x(t), y(t), z(t)) = \varphi_1(t). \quad (1.61)$$

Considere  $\Phi(t, p, k)$ . Usando o argumento de (5) temos que existe  $\delta > 0$  tal que  $\Phi((-\delta, \delta), p, k)$  é um aberto em  $C$ . Logo, existe  $n_0$  tal que  $\varphi_1(t_{n_0}) \in \Phi((-\delta, \delta), p, k)$ . Ou seja, existe  $s_0 \in (-\delta, \delta)$  tal que

$$\varphi_1(t_{n_0}) = \Phi(s_0, p, k).$$

De (1.61), temos:

$$\varphi_1(t_{n_0}) = \Phi(t_{n_0}, p_0, k).$$

Então,  $\Phi(s_0, p, k) = \Phi(t_{n_0}, p_0, k)$ . Daí, pelo Teorema 1.2.19

$$\Phi(-s_0, \Phi(t_{n_0}, p_0, k), k) = \Phi(-s_0, \Phi(s_0, p, k), k) \Rightarrow$$

$$\Phi(t_{n_0} - s_0, p_0, k) = \Phi(0, p, k) = p.$$

Novamente por (1.61):  $\varphi_1(t_{n_0} - s_0) = p$ . Logo,  $p \in \varphi_1(\mathbb{R})$ .

(9)  $\varphi_1(\mathbb{R}) = C$ .

Prova: Vimos que  $\varphi_1(\mathbb{R})$  é simultaneamente aberto e fechado em  $C$ . Daí, como  $C$  é conexo e  $p \in \varphi_1(\mathbb{R})$  segue que  $\varphi_1(\mathbb{R}) = C$ .

Agora vamos provar que  $\varphi_1$  é periódica. Temos que:

$$C = \varphi_1((-\infty, 0)) \cup \varphi_1(0) \cup \varphi_1((0, +\infty)).$$

Pelo argumento anterior, sabemos que  $\varphi_1((-\infty, 0))$  e  $\varphi_1((0, +\infty))$  são abertos em  $C$ . Vamos supor que  $\varphi_1$  não é periódica. Então, os conjuntos

$$\{\varphi_1((-\infty, 0))\}, \{\varphi_1((0, +\infty))\}, \{\varphi_1(0)\}$$

são disjuntos dois a dois.

(i) Se  $p \in \varphi_1((-\infty, 0)) \cap \varphi_1((0, +\infty))$  então existem  $t_1 < 0$  e  $t_2 > 0$  tais que  $p = \varphi_1(t_1) = \varphi_1(t_2)$ . Considere:

$$\begin{cases} v_1(t) = \varphi_1(t + t_1) = (v_{11}(t), v_{12}(t), v_{13}(t)), \\ v_2(t) = \varphi_1(t + t_2) = (v_{21}(t), v_{22}(t), v_{23}(t)). \end{cases}$$

Note que:

$$v_1(0) = \varphi_1(0 + t_1) = \varphi_1(t_1) = p,$$

$$v_2(0) = \varphi_1(0 + t_2) = \varphi_1(t_2) = p.$$

E ainda,  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  são soluções de (1.52), pois:

$$\begin{aligned}
v_1(t) &= \dot{\varphi}_1(t + t_1) \\
&= (\dot{x}(t + t_1), \dot{y}(t + t_1), \dot{z}(t + t_1)) \\
&= (y(t + t_1)z(t + t_1), -x(t + t_1)z(t + t_1), -k^2x(t + t_1)y(t + t_1)) \\
&= (v_{12}(t)v_{13}(t), -v_{11}(t)v_{13}(t), -k^2v_{11}(t)v_{12}(t)) \\
&= \Phi(t, p, k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2(t) &= \dot{\varphi}_1(t + t_2) \\
&= (\dot{x}(t + t_2), \dot{y}(t + t_2), \dot{z}(t + t_2)) \\
&= (y(t + t_2)z(t + t_2), -x(t + t_2)z(t + t_2), -k^2x(t + t_2)y(t + t_2)) \\
&= (v_{22}(t)v_{23}(t), -v_{21}(t)v_{23}(t), -k^2v_{21}(t)v_{22}(t)) \\
&= \Phi(t, p, k).
\end{aligned}$$

Da unicidade de soluções do p.v.i. e fazendo  $t = s - t_1$ , segue que:

$$\begin{aligned}
v_1(t) = v_2(t) &\Leftrightarrow \varphi_1(t + t_1) = \varphi_1(t + t_2) \Leftrightarrow \varphi_1(s - t_1 + t_1) = \varphi_1(s - t_1 + t_2) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \varphi_1(s) = \varphi_1(s + (t_2 - t_1)) = \varphi_1(s + T); \quad T = t_2 - t_1 > 0
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto,  $\{\varphi_1((-\infty, 0))\}, \{\varphi_1((0, +\infty))\}$  são disjuntos.

(ii) Se  $p \in \varphi_1((0, +\infty)) \cap \varphi_1(0)$  então existe  $t_1 > 0$  tal que  $p = \varphi_1(t_1) = \varphi_1(0)$ .

Considere:

$$\begin{cases} v_1(t) = \varphi_1(t + t_1) = (v_{11}(t), v_{12}(t), v_{13}(t)), \\ v_2(t) = \varphi_1(t) = (v_{21}(t), v_{22}(t), v_{23}(t)). \end{cases}$$

Note que:

$$v_1(0) = \varphi_1(0 + t_1) = \varphi_1(t_1) = p,$$

$$v_2(0) = \varphi_1(0) = p.$$

Analogamente ao que foi feito em (i),  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  são soluções de (1.52). Assim, da unicidade de soluções do p.v.i. e fazendo  $t = s - t_1$ , segue que:

$$\begin{aligned}
v_1(t) = v_2(t) &\Leftrightarrow \varphi_1(t + t_1) = \varphi_1(t) \Leftrightarrow \varphi_1(s - t_1 + t_1) = \varphi_1(s - t_1) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \varphi_1(s) = \varphi_1(s - t_1)
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto,  $\{\varphi_1((0, +\infty))\}, \{\varphi_1(0)\}$  são disjuntos.

(iii) Se  $p \in \varphi_1((-\infty, 0)) \cap \varphi_1(0)$  obtemos que  $\{\varphi_1((-\infty, 0))\}, \{\varphi_1(0)\}$  são disjuntos de modo análogo ao item (ii).

Portanto, de (i), (ii) e (iii) concluímos que  $\{\varphi_1((-\infty, 0))\}, \{\varphi_1((0, +\infty))\}, \{\varphi_1(0)\}$  são disjuntos dois a dois. Daí,

$$C = \varphi_1(\mathbb{R}) \Rightarrow C = \varphi_1((-\infty, 0)) \cup \varphi_1(0) \cup \varphi_1((0, +\infty)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C - \{p_0\} = C - \{\varphi_1(0)\} = \varphi_1((-\infty, 0)) \cup \varphi_1((0, +\infty)).$$

Logo,  $C - \{p_0\}$  é desconexo, pois  $\varphi_1((-\infty, 0))$  e  $\varphi_1((0, +\infty))$  são disjuntos, conforme vimos em (i), o que contraria (4). Portanto,  $\varphi_1$  é periódica. ■

**Proposição 1.2.34** *Se  $x(t) = sn(t, k)$  e  $y(t) = cn(t, k)$  então*

$$\begin{cases} \ddot{x} = -(1 + k^2)x + 2k^2x^3, \\ \ddot{y} = (-1 + 2k^2)y - 2k^2y^3. \end{cases}$$

**Demonstração:** A definição imediatamente nos dá:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}sn(t, k) = cn(t, k) \, dn(t, k),$$

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}cn(t, k) \, dn(t, k) + cn(t, k) \frac{d}{dt}dn(t, k).$$

Assim, de (1.54) segue que:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= [-dn(t, k) \, sn(t, k)] \, dn(t, k) + cn(t, k) \, [-k^2 sn(t, k) \, cn(t, k)] \\ &= -sn(t, k) \, dn(t, k)^2 - k^2 \, sn(t, k) \, cn(t, k)^2 \\ &= -sn(t, k) \, [1 - k^2 \, sn(t, k)^2] - k^2 \, sn(t, k) \, [1 - sn(t, k)^2] \\ &= -sn(t, k) + k^2 \, sn(t, k)^3 - k^2 sn(t, k) + k^2 sn(t, k)^3 \\ &= -(1 + k^2)sn(t, k) + 2k^2 sn(t, k)^3 \\ &= -(1 + k^2)x + 2k^2x^3. \end{aligned}$$

Temos também,

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}cn(t, k) = -dn(t, k) \, sn(t, k),$$

$$\ddot{y} = -\frac{d}{dt}dn(t, k) \, sn(t, k) - dn(t, k) \, \frac{d}{dt}sn(t, k).$$

Novamente por (1.54) segue que:

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -[-k^2 sn(t, k) cn(t, k)] sn(t, k) - dn(t, k) [cn(t, k) dn(t, k)] \\
&= k^2 sn(t, k)^2 cn(t, k) - cn(t, k) dn(t, k)^2 \\
&= k^2 [1 - cn(t, k)^2] cn(t, k) - cn(t, k) [1 - k^2 sn(t, k)^2] \\
&= k^2 cn(t, k) - k^2 cn(t, k)^3 - cn(t, k) [1 - k^2 \{1 - cn(t, k)^2\}] \\
&= k^2 cn(t, k) - k^2 cn(t, k)^3 - cn(t, k) + k^2 cn(t, k) - k^2 cn(t, k)^3 \\
&= (-1 + 2k^2) cn(t, k) - 2k^2 cn(t, k)^3 \\
&= (-1 + 2k^2) y - 2k^2 y^3.
\end{aligned}$$

■

## Simetrias

**Proposição 1.2.35** Se  $(x(t), y(t), z(t))$  é solução (1.52) então

$$(-x(-t), y(-t), z(-t)), (x(-t), -y(-t), z(-t)) \text{ e } (x(-t), y(-t), -z(-t))$$

também são soluções de (1.52).

**Demonstração:** (i) Seja  $(\xi(t), \eta(t), \gamma(t)) = (-x(-t), y(-t), z(-t))$ . Então,

$$\dot{\xi}(t) = -\dot{x}(-t)(-1) = \dot{x}(-t) = y(-t)z(-t) = \eta(t)\gamma(t),$$

$$\dot{\eta}(t) = \dot{y}(-t)(-1) = -\dot{y}(-t) = -(-x(-t)z(-t)) = -\xi(t)\gamma(t),$$

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{z}(-t)(-1) = -\dot{z}(-t) = -(-k^2 x(-t)y(-t)) = -k^2 \xi(t)\eta(t).$$

Portanto,  $(\xi(t), \eta(t), \gamma(t))$  também é solução de (1.52).

(ii) Seja  $(a(t), b(t), c(t)) = (x(-t), -y(-t), z(-t))$ . Então,

$$\dot{a}(t) = \dot{x}(-t)(-1) = -\dot{x}(-t) = -y(-t)z(-t) = b(t)c(t),$$

$$\dot{b}(t) = -\dot{y}(-t)(-1) = \dot{y}(-t) = -x(-t)z(-t) = -a(t)c(t),$$

$$\dot{c}(t) = \dot{z}(-t)(-1) = -\dot{z}(-t) = -(-k^2 x(-t)y(-t)) = -k^2 a(t)b(t).$$

Portanto,  $(a(t), b(t), c(t))$  também é solução de (1.52).

(iii) Seja  $(\alpha(t), \beta(t), \theta(t)) = (x(-t), y(-t), -z(-t))$ . Então,

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= \dot{x}(-t)(-1) = -\dot{x}(-t) = -y(-t)z(-t) = \beta(t)\theta(t), \\ \dot{\beta}(t) &= \dot{y}(-t)(-1) = -\dot{y}(-t) = x(-t)z(-t) = -\alpha(t)\theta(t), \\ \dot{\theta}(t) &= -\dot{z}(-t)(-1) = \dot{z}(-t) = -k^2 x(-t)y(-t) = -k^2 \alpha(t)\beta(t).\end{aligned}$$

Portanto,  $(\alpha(t), \beta(t), \theta(t))$  também é solução de (1.52).

■

A Proposição 1.2.35 nos diz que considerando uma solução de (1.52), revertendo o tempo e refletindo alguma de suas coordenadas no plano, teremos uma outra solução de (1.52). Tal simetria é conhecida como simetria tempo-reverso.

**Corolário 1.2.36** *Para  $k$  fixado,  $0 < k < 1$ ,  $sn(t, k)$  é uma função ímpar em  $t$ ;  $cn(t, k)$  e  $dn(t, k)$  são funções pares em  $t$ .*

**Demonstração:** Temos que  $(sn(t, k), cn(t, k), dn(t, k))$  é solução de (1.52). Pela Proposição 1.2.35, segue que:

$$(-sn(-t, k), cn(-t, k), dn(-t, k))$$

também é uma solução de (1.52).

Mas ambas soluções satisfazem a condição inicial  $(0, 1, 1)$ . Então, segue do Teorema 1.2.2 (Existência e Unicidade) que:

$$\begin{cases} sn(t, k) = -sn(-t, k), \\ cn(t, k) = cn(-t, k), \\ dn(t, k) = dn(-t, k). \end{cases}$$

Portanto,  $sn(t, k)$  é função ímpar em  $t$ ,  $cn(t, k)$  e  $dn(t, k)$  são funções pares em  $t$ .

■

**Proposição 1.2.37** *Sejam  $C \in \mathbb{R}$  e  $d > 0$ .*

$$(a) \text{ Sejam } 0 < \varepsilon < \frac{1}{2dC^2}, \ C \neq 0, \ T = \sqrt{\frac{\varepsilon dC^2}{1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon dC^2}}} \text{ e } k = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon dC^2}}{\sqrt{2\varepsilon dC^2}}.$$

Então,  $0 < k < 1$  e

$$u(t, \varepsilon) = \frac{C}{T} sn(Tt, k)$$

é uma solução de

$$\ddot{u} = -u + \varepsilon du^3. \quad (1.62)$$

(b) Sejam  $T = \sqrt{1 + \varepsilon d C^2}$  e  $k = \sqrt{\frac{\varepsilon d C^2}{2(1 + \varepsilon d C^2)}}$ . Então,  $0 < k < \frac{1}{\sqrt{2}}$  e

$$w(t, \varepsilon) = C \operatorname{cn}(Tt, k)$$

é uma solução de

$$\ddot{w} = -w - \varepsilon d w^3. \quad (1.63)$$

**Demonstração:**

(a) Observe que:

$$\begin{aligned} (1 + k^2)T^2 &= \left(1 + \frac{(1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon d C^2})^2}{2\varepsilon d C^2}\right) \frac{\varepsilon d C^2}{1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon d C^2}} \\ &= \left(\frac{2\varepsilon d C^2 + 1 - 2\sqrt{1 - 2\varepsilon d C^2} + 1 - 2\varepsilon d C^2}{2\varepsilon d C^2}\right) \frac{\varepsilon d C^2}{1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon d C^2}} \\ &= \frac{2 - 2\sqrt{1 - 2\varepsilon d C^2}}{2(1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon d C^2})} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2k^2 \frac{T^4}{C^2} &= \frac{2}{C^2} \frac{(1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon d C^2})^2}{2\varepsilon d C^2} \frac{\varepsilon d C^2}{1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon d C^2}} \\ &= \frac{\varepsilon d C^2}{C^2} = \varepsilon d. \end{aligned}$$

Vejamos que  $0 < k < 1$ . Como  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2dC^2}$  então  $0 < 2\varepsilon d C^2 < 1$ . Assim,

$$\sqrt{2\varepsilon d C^2} > 2\varepsilon d C^2 \Leftrightarrow -\sqrt{2\varepsilon d C^2} < -2\varepsilon d C^2 \Leftrightarrow$$

$$1 - \sqrt{2\varepsilon d C^2} < 1 - 2\varepsilon d C^2 < \sqrt{1 - 2\varepsilon d C^2} \Leftrightarrow 0 < \frac{1 - \sqrt{2\varepsilon d C^2}}{\sqrt{1 - 2\varepsilon d C^2}} < 1.$$

Usando as igualdades obtidas na Proposição 1.2.34, temos:

$$u(t, \varepsilon) = \frac{C}{T} \operatorname{sn}(Tt, k) \Rightarrow \ddot{u} = \frac{C}{T} \frac{d^2}{dt^2} \operatorname{sn}(Tt, k) \Rightarrow$$

$$\ddot{u} = \frac{C}{T} T^2 [-(1 + k^2) \operatorname{sn}(Tt, k) + 2k^2 \operatorname{sn}(Tt, k)^3] \Rightarrow$$

$$\ddot{u} = -(1 + k^2) T^2 u + 2k^2 \frac{T^4}{C^2} u^3 = -u + \varepsilon d u^3.$$

Portanto,  $u(t, \varepsilon) = \frac{C}{T} \operatorname{sn}(Tt, k)$  é solução de (1.62).

(b) Observe que:

$$\begin{aligned}
(-1 + 2k^2)T^2 &= \left(-1 + \frac{2\varepsilon dC^2}{2(1 + \varepsilon dC^2)}\right)(1 + \varepsilon dC^2) \\
&= \left(-1 + \frac{\varepsilon dC^2}{1 + \varepsilon dC^2}\right)(1 + \varepsilon dC^2) \\
&= \left(\frac{-1}{1 + \varepsilon dC^2}\right)(1 + \varepsilon dC^2) = -1,
\end{aligned}$$

$$2k^2 \frac{T^2}{C^2} = \frac{2\varepsilon dC^2}{2(1 + \varepsilon dC^2)} \frac{(1 + \varepsilon dC^2)}{C^2} = \varepsilon d.$$

Vejamos que  $0 < k < \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Sabemos que  $\varepsilon dC^2 > 0$ , assim:

$$\sqrt{2} < \sqrt{\frac{2}{\varepsilon dC^2} + 2} \Leftrightarrow \sqrt{2} < \sqrt{\frac{2\varepsilon dC^2 + 2}{\varepsilon dC^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \sqrt{\frac{\varepsilon dC^2}{2\varepsilon dC^2 + 2}} > 0.$$

Usando as igualdades obtidas na Proposição 1.2.34, temos:

$$\begin{aligned}
w(t, \varepsilon) = C \operatorname{cn}(Tt, k) &\Rightarrow \ddot{w} = C \frac{d^2}{dt^2} \operatorname{cn}(Tt, k) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \ddot{w} = C T^2 [(-1 + 2k^2) \operatorname{cn}(Tt, k) - 2k^2 \operatorname{cn}(Tt, k)^3] \Rightarrow \\
&\Rightarrow \ddot{w} = (-1 + 2k^2) T^2 w - 2k^2 \frac{T^2}{C^2} w^3 = -w - \varepsilon dw^3.
\end{aligned}$$

Portanto,  $w(t, \varepsilon) = C \operatorname{cn}(Tt, k)$  é solução de (1.63).

■

**Observação 1.2.38** A demonstração da proposição anterior é uma simples adaptação do argumento clássico encontrado nas equações (2), (3) e (4), página 207 de [2].

**Observação 1.2.39** Das equações (2) e (3) da página 131 de [2] e das equações (10), (12) e (15) da página 146 de [2] temos que o período  $K(k)$  da órbita

$$t \longmapsto (\operatorname{sn}(t, k), \operatorname{cn}(t, k), \operatorname{dn}(t, k))$$

é dado por:

$$\overline{T} = 4K(k) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$

Note que  $\bar{T}$  é diferenciável, pois  $0 < k < 1$  então  $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \neq 0$ .  
Do item (a) da Proposição 1.2.37 temos que

$$k(\varepsilon) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon dC^2}}{2\varepsilon dC^2}.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtemos que  $k(\varepsilon) \rightarrow 0$ . Como  $\bar{T}(\varepsilon) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k(\varepsilon)^2 \sin^2 \theta}}$  é diferenciável, pela Fórmula de Taylor obtemos que o período da solução periódica de (1.62) é:

$$\bar{T}(\varepsilon) = \bar{T}(0) + O(\varepsilon) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + O(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon).$$

Do item (b) da Proposição 1.2.37 temos que

$$k(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon dC^2}{2(1 + \varepsilon dC^2)}}.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtemos que  $k(\varepsilon) \rightarrow 0$ . Analogamente, o período da solução periódica de (1.63) é:

$$\bar{T}(\varepsilon) = \bar{T}(0) + O(\varepsilon) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + O(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon).$$

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## O MÉTODO DA MÉDIA

Neste capítulo vamos considerar equações que contém um pequeno parâmetro  $\varepsilon$ . A ideia do Método da Média como técnica computacional, sem prova de sua validade, se origina no século XVIII e foi claramente formulada por Lagrange.

O seguinte resultado é importante, pois várias mudanças de variáveis são obtidas conforme este procedimento.

**Teorema 2.0.40** (*Fórmula Generalizada da Variação dos Parâmetros*) *Sejam  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções  $C^1$ , onde  $I$  é um intervalo aberto,  $U \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto e  $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ . Considere a equação*

$$\dot{x}(t) = f(t, x) + \varepsilon g(t, x). \quad (2.1)$$

*Seja  $\Phi$  o fluxo de  $\dot{x} = f(t, x)$ . Se  $y(t) = \Phi^{-1}(t, x(t))$  então*

$$\dot{y}(t) = \varepsilon G(t, y(t), \varepsilon) \quad (2.2)$$

*onde  $G(t, y(t), \varepsilon) = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, y(t)) \right]^{-1} g(t, \Phi(t, y(t)))$ .*

**Demonstração:** Seja  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$  um aberto adequado. Defina:

$$\begin{aligned} \Phi_t : \Omega_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \Phi(t, x) \end{aligned}$$

Vimos na Observação 1.2.20 que  $\Phi$  é inversível. Sendo  $y(t) = \Phi^{-1}(t, x(t))$ , temos:

$$x(t) = \Phi(t, y(t)).$$

Derivando ambos os lados, obtemos:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, y(t)) \dot{y}(t).$$

Substituindo na equação (2.1):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, y(t)) \dot{y}(t) = f(t, \Phi(t, y(t))) + \varepsilon g(t, \Phi(t, y(t))).$$

Como  $\Phi$  é fluxo de  $\dot{x} = f(t, x)$ , segue que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, y(t)) = f(t, \Phi(t, y(t))).$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, y(t)) \dot{y}(t) = \varepsilon g(t, \Phi(t, y(t))).$$

Novamente da Observação 1.2.20,  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, y(t))$  é inversível. Daí,

$$\dot{y}(t) = \varepsilon G(t, y(t), \varepsilon)$$

onde  $G(t, y(t), \varepsilon) = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, y(t)) \right]^{-1} g(t, \Phi(t, y(t)))$ .

■

Esta demonstração é uma adaptação de um argumento dado em [10], página 9.

## 2.1 A Forma Canônica de Lagrange

Sejam  $g : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  uma função  $C^1$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ . Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + \varepsilon g(t, x), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

onde  $A(t)$  é uma matriz contínua  $n \times n$ .

A equação não perturbada ( $\varepsilon = 0$ ) é linear e admite  $n$  soluções independentes, as quais são usadas para compor a matriz fundamental  $\Lambda(t)$ . Neste caso,

$$\Phi(t, y) = \Lambda(t)y$$

onde  $y$  é um vetor  $n \times 1$ . Segue do Teorema 2.0.40 (Variação dos Parâmetros) que:

$$\dot{y}(t) = \varepsilon \Lambda(t)^{-1} g(t, \Lambda(t)y). \quad (2.4)$$

A equação (2.4) é chamada de *Forma Canônica de Lagrange* de (2.3).

**Exemplo 2.1.1** Considere a seguinte equação diferencial não linear:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(-\dot{x} + x^2).$$

Faça:

$$y = \dot{x} \Rightarrow \dot{y} = -x + \varepsilon(-y + x^2).$$

Escrevendo como um sistema de primeira ordem, temos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -y + x^2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

onde  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Fazendo  $\varepsilon = 0$ , obtemos o sistema linear:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

O fluxo de (2.6) é dado por:

$$\Phi(t, (a, b)) = e^{tA} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Um cálculo simples fornece que:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Agora, considere  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Assim, existem únicos  $r_0 > 0$  e  $\psi_0 \in [0, 2\pi)$  tais que:

$$\begin{cases} a = r_0 \cos \psi_0, \\ b = r_0 \sin \psi_0. \end{cases}$$

Então,

$$e^{tA} \begin{pmatrix} r_0 \cos \psi_0 \\ r_0 \sin \psi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \cos(t + \psi_0) \\ -r_0 \sin(t + \psi_0) \end{pmatrix} = \Phi(t, (r_0, \psi_0))$$

é solução de (2.6), onde  $r_0$  e  $\psi_0$  são determinados pela condição inicial.

Agora vamos usar o Teorema 2.0.40 (Variação dos Parâmetros) onde

$$\Phi(t, (r, \psi)) = \begin{pmatrix} r \cos(t + \psi) \\ -r \sin(t + \psi) \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial(r, \psi)}(t, (r, \psi)) = \begin{pmatrix} \cos(t + \psi) & -r \sin(t + \psi) \\ -\sin(t + \psi) & -r \cos(t + \psi) \end{pmatrix},$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial(r, \psi)}(t, (r, \psi)) \right]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t + \psi) & -\sin(t + \psi) \\ \frac{-\sin(t + \psi)}{r} & \frac{-\cos(t + \psi)}{r} \end{pmatrix}.$$

Usando (2.4), obtemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \cos(t + \psi) & -\sin(t + \psi) \\ \frac{-\sin(t + \psi)}{r} & \frac{-\cos(t + \psi)}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -r \sin(t + \psi) + r^2 \cos^2(t + \psi) \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon r (\sin^2(t + \psi)) - \varepsilon r^2 \cos^2(t + \psi) \sin(t + \psi), \\ \dot{\psi} = -\varepsilon \cos(t + \psi) \sin(t + \psi) - \varepsilon r \cos^3(t + \psi). \end{cases} \quad (2.7)$$

Uma outra forma de resolver esta equação é considerando a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos t + v \sin t \\ -u \sin t + v \cos t \end{pmatrix}.$$

Usando novamente (2.4) obtemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \varepsilon e^{-tA} \begin{pmatrix} 0 \\ -(-u \sin t + v \cos t) + (u \cos t + v \sin t)^2 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -(-u \sin t + v \cos t) + (u \cos t + v \sin t)^2 \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$\begin{cases} \dot{u} &= \varepsilon(-u \sin^2 t + v \cos t \sin t + u^2 \cos^2 t \sin t + 2uv \cos t \sin^2 t + v^2 \sin^3 t), \\ \dot{v} &= \varepsilon(u \cos t \sin t + v \cos^2 t + u^2 \cos^3 t + 2uv \cos^2 t \sin t + v^2 \sin^2 \cos t). \end{cases} \quad (2.8)$$

Observe que (2.7) e (2.8) são ambas Formas Canônicas de Lagrange de (2.5) expressas em variáveis distintas. No entanto, ambas foram obtidas pelo método dado no Teorema 2.0.40 (Variação dos Parâmetros).

## 2.2 O Teorema da Média no caso periódico

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.9)$$

**Definição 2.2.1** *Seja  $f(t, x)$   $T$ -periódica em  $t$ . Definimos a seguinte função:*

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt \quad (2.10)$$

*que é denominada função média de  $f$  ou simplesmente média.*

Agora considere o problema de valor inicial para a equação da média

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y), \\ y(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Os conceitos a seguir serão usados no principal teorema desta seção.

**Definição 2.2.2** *Uma função  $\delta : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada Função de Ordem se é contínua e positiva em  $(0, \varepsilon_0]$  e existe  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon)$ , com  $\delta(\varepsilon)$  decrescente quando  $\varepsilon$  tende à zero.*

**Definição 2.2.3** *Considere a função vetorial  $f : I \times D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo e  $D \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto. Sejam  $\delta_1(\varepsilon)$  e  $\delta_2(\varepsilon)$  funções de ordem. Dizemos que:*

$$f(t, x, \varepsilon) = O(\delta_1(\varepsilon)), \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ na escala de tempo } \frac{1}{\delta_2(\varepsilon)}$$

*se existem constantes positivas  $K, C$  e  $\varepsilon_0$  (independentes de  $\varepsilon$ ) tais que:*

$$\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \text{ tem-se } |f(t, x, \varepsilon)| \leq K\delta_1(\varepsilon) \text{ para } 0 \leq t \leq \frac{C}{\delta_2(\varepsilon)}.$$

**Teorema 2.2.4** *Considere os problemas de valores iniciais (2.9) e (2.11) com  $x, y, x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto convexo,  $t \geq 0$ . Se:*

- (a) *As funções vetoriais  $f, g, \frac{\partial f}{\partial x}$  estão definidas, são contínuas e limitadas por uma constante  $M$  (independente de  $\varepsilon$ ) em  $[0, \infty) \times D$ ;*
- (b)  *$g$  é Lipschitziana em  $x$ , para  $x \in D$ ;*
- (c)  *$f$  é  $T$ -periódica em  $t$ , com média  $f^0$  e  $T$  é uma constante;*
- (d)  *$y(t, \varepsilon)$  está contido em um subconjunto próprio de  $D$ .*

*Então,  $x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon) = O(\varepsilon)$  na escala de tempo  $\frac{1}{\varepsilon}$ .*

**Demonstração:** Queremos mostrar que existem constantes  $\varepsilon_0 \geq 0$ ,  $k_1 > 0$ ,  $c > 0$ , independentes de  $\varepsilon$ , tais que para todo  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  temos:

$$|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)| \leq k_1 \varepsilon$$

para  $0 \leq t \leq \frac{c}{\varepsilon}$ .

Pela hipótese (a) sabemos que  $f$  e  $g$  são contínuas em  $[0, \infty) \times D$  e por (b)  $g$  é Lipschitz em  $D$ . Sabemos que  $D$  é um conjunto convexo. Assim, como

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq M$$

segue pela desigualdade do valor médio que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq M |x - y|. \quad (2.12)$$

Portanto,  $f$  é Lipschitz. Daí, segue a existência e a unicidade de uma solução de (2.9).

Usando (2.10) e (2.12), temos que:

$$\begin{aligned} |f^0(x) - f^0(y)| &= \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt \right| \leq \frac{1}{T} \left| \int_0^T [f(t, x) - f(t, y)] dt \right| \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T M |x - y| dt = M |x - y|. \end{aligned}$$

Portanto,  $f^0$  é Lipschitz em  $D$ .

Vamos definir:

$$u(t, x) = \int_0^t [f(s, x) - f^0(x)] ds. \quad (2.13)$$

Vejamos que  $u(t, x)$  é  $C^1$ . De fato, como  $\frac{\partial f}{\partial x}$  é contínua pela hipótese (a), segue que:

$$\frac{\partial f^0}{\partial t}(x) = 0,$$

$$\frac{\partial f^0}{\partial x}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(s, x) ds$$

são contínuas. Como  $f$  também é contínua pela hipótese (a), segue que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, x) ds = f(t, x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \int_0^t \left( \frac{\partial f}{\partial x}(s, x) - \frac{\partial f^0}{\partial x}(x) \right) ds$$

são contínuas.

Temos também:

$$\begin{aligned}
\int_0^T [f(s, x) - f^0(x)] ds &= \int_0^T f(s, x) ds - f^0(x) \int_0^T ds \\
&= \int_0^T f(s, x) ds - \int_0^T f(s, x) ds = 0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Pela Proposição 1.2.23 e (2.14), temos:

$$\begin{aligned}
u(t + T, x) &= \int_0^{t+T} [f(s, x) - f^0(x)] ds \\
&= \int_0^t [f(s, x) - f^0(x)] ds + \int_t^{t+T} [f(s, x) - f^0(x)] ds \\
&= \int_0^t [f(s, x) - f^0(x)] ds + \int_0^T [f(s, x) - f^0(x)] ds \\
&= \int_0^t [f(s, x) - f^0(x)] ds = u(t, x).
\end{aligned}$$

Portanto,  $u$  é  $T$ -periódica em  $t$ . Segue que se  $t \in \mathbb{R}$  então existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $t = \bar{t} + kT$  onde  $\bar{t} \in [0, T]$ . Assim,

$$u(t, x) = u(\bar{t} + kT, x) = u(\bar{t}, x). \tag{2.15}$$

Temos:

$$|f^0(x)| = \frac{1}{T} \left| \int_0^T f(s, x) ds \right| \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(s, x)| ds \leq \frac{1}{T} \int_0^T M ds = M$$

e de (2.15) segue que:

$$\begin{aligned}
|u(t, x)| = |u(\bar{t}, x)| &= \left| \int_0^{\bar{t}} f(s, x) - f^0(x) ds \right| \leq \left| \int_0^{\bar{t}} f(s, x) ds \right| + \left| \int_0^{\bar{t}} f^0(x) ds \right| \\
&\leq \int_0^{\bar{t}} |f(s, x)| ds + \int_0^{\bar{t}} |f^0(x)| ds \leq \int_0^{\bar{t}} M ds + \int_0^{\bar{t}} M ds \\
&\leq 2M\bar{t} \leq 2MT.
\end{aligned}$$

Ou seja, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , temos:

$$|u(t, x)| \leq 2MT. \tag{2.16}$$

Agora, considere a aplicação

$$\begin{aligned}
H_{(t, \varepsilon)} : A \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
z &\longmapsto z + \varepsilon u(t, z)
\end{aligned}$$

onde  $t \in I = (0, +\infty)$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$  é uma vizinhança adequada de 0 e  $\varepsilon \in J = (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  com  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeno. A aplicação  $H_{(t,\varepsilon)}$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$ .

Seja  $x(t, \varepsilon)$  uma solução da equação (2.9) tal que  $x(0, \varepsilon) \in H(A)$ . Definimos

$$z(t, \varepsilon) = H_{(t,\varepsilon)}^{-1}(x(t, \varepsilon))$$

ou

$$x(t, \varepsilon) = H_{(t,\varepsilon)}(z(t, \varepsilon)) = z(t, \varepsilon) + \varepsilon u(t, z(t, \varepsilon)). \quad (2.17)$$

Por (2.16) e (2.17), temos:

$$|x(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon)| = |\varepsilon u(t, z(t, \varepsilon))| \leq \varepsilon 2MT.$$

A transformação (2.17) será usada para simplificar a equação (2.9). Assim,

$$\dot{x}(t, \varepsilon) = \dot{z}(t, \varepsilon) + \varepsilon \left[ \frac{\partial u}{\partial t}(t, z(t, \varepsilon)) + \frac{\partial u}{\partial z}(t, z(t, \varepsilon)) \dot{z}(t, \varepsilon) \right].$$

Substituindo na equação (2.9) :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t, \varepsilon) + \varepsilon \left[ \frac{\partial u}{\partial t}(t, z(t, \varepsilon)) + \frac{\partial u}{\partial z}(t, z(t, \varepsilon)) \dot{z}(t, \varepsilon) \right] &= \varepsilon f(t, z(t, \varepsilon) + \varepsilon u(t, z(t, \varepsilon))) \\ &\quad + \varepsilon^2 g(t, z(t, \varepsilon) + \varepsilon u(t, z(t, \varepsilon)), \varepsilon). \end{aligned}$$

Note que:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, z(t, \varepsilon)) = f(t, z(t, \varepsilon)) - f^0(z).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \dot{z}(t, \varepsilon) + \varepsilon \left[ f(t, z(t, \varepsilon)) - f^0(z) + \frac{\partial u}{\partial z}(t, z(t, \varepsilon)) \dot{z}(t, \varepsilon) \right] \\ = \varepsilon f(t, z(t, \varepsilon) + \varepsilon u(t, z(t, \varepsilon))) + \varepsilon^2 g(t, z(t, \varepsilon) + \varepsilon u(t, z(t, \varepsilon)), \varepsilon). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left[ I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z(t, \varepsilon)) \right] \dot{z}(t, \varepsilon) &= \varepsilon f^0(z) - \varepsilon f(t, z(t, \varepsilon)) + \varepsilon f(t, z(t, \varepsilon) + \varepsilon u(t, z(t, \varepsilon))) \\ &\quad + \varepsilon^2 g(t, z(t, \varepsilon) + \varepsilon u(t, z(t, \varepsilon)), \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Portanto,

$$\left[ I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z(t, \varepsilon)) \right] \dot{z}(t, \varepsilon) = \varepsilon f^0(z) + R(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon) \quad (2.19)$$

onde

$$R(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon) = -\varepsilon f(t, z(t, \varepsilon)) + \varepsilon f(t, z(t, \varepsilon) + \varepsilon u(t, z(t, \varepsilon))) + \varepsilon^2 g(t, z(t, \varepsilon) + \varepsilon u(t, z(t, \varepsilon)), \varepsilon).$$

Temos ainda:

- (i)  $\frac{\partial u}{\partial z}(t, z)$  é  $T$ -periódica em  $t$ , pois

$$u(t+T, z) = u(t, z) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z}(t+T, z) = \frac{\partial u}{\partial z}(t, z).$$

(ii)  $\left\| \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right\|$  é limitado, pois como  $\frac{\partial u}{\partial z}(t, z)$  é  $T$ -periódica em  $t$ , segue que:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right\| = \sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right\|$$

para  $z \in D$ . Daí,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right\| &= \left\| \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_0^t \left( f(s, z) - \frac{1}{T} \int_0^T f(l, z) dl \right) ds \right] \right\| \\ &\leq \int_0^t \left[ \left\| \frac{\partial f}{\partial z}(s, z) \right\| + \frac{1}{T} \int_0^T \left\| \frac{\partial f}{\partial z}(l, z) \right\| dl \right] ds \\ &\leq Mt + \frac{1}{T} MTt \leq 2MT \end{aligned}$$

para  $0 \leq t \leq T$ .

Chame

$$A(t, \varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial z}(t, z(t, \varepsilon)).$$

Note que  $A(t, \varepsilon) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Pelo Lema 1.1.6 podemos concluir que:

$$\left[ I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z(t, \varepsilon)) \right]^{-1} = \left[ I - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z(t, \varepsilon)) + O(\varepsilon^2) \right]. \quad (2.20)$$

Assim, de (2.20) e (2.19) obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t, \varepsilon) &= \left[ I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z(t, \varepsilon)) \right]^{-1} [\varepsilon f^0(z) + R(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon)] \\ &= \left[ I - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z(t, \varepsilon)) + O(\varepsilon^2) \right] [\varepsilon f^0(z) + R(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon)] \\ &= \varepsilon f^0(z) + R(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z}(t, z(t, \varepsilon)) f^0(z) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z(t, \varepsilon)) R(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon) \\ &\quad + O(\varepsilon^2) \varepsilon f^0(z) + O(\varepsilon^2) R(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que  $|R(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon)| \leq \varepsilon^2 K$ . Temos que:

(1)  $f(t, x)$  é Lipschitz em  $x$ , então:

$$|f(t, x) - f(t, z)| = |f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z)| \leq L|\varepsilon u(t, z)| \leq L\varepsilon|u(t, z)| \leq L\varepsilon 2MT.$$

(2)  $g$  é limitado por  $M$ , pela hipótese (a).

Assim,

$$\begin{aligned}
|R(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon)| &= |\varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - \varepsilon f(t, z) + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon)| \\
&\leq \varepsilon |f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z)| + \varepsilon^2 |g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon)| \\
&\leq \varepsilon^2 L_2 M T + \varepsilon^2 M = \varepsilon^2 [2LMT + M].
\end{aligned}$$

Portanto, existe  $K = [2LMT + M] > 0$  tal que

$$|R(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon)| \leq \varepsilon^2 K, \quad \forall t \geq 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t, \varepsilon) &= \varepsilon f^0(z) + R(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z}(t, z(t, \varepsilon)) f^0(z) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z(t, \varepsilon)) R(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon) \\
&\quad + O(\varepsilon^2) \varepsilon f^0(z) + O(\varepsilon^2) R(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon) \\
&= \varepsilon f^0(z) + R(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z}(t, z(t, \varepsilon)) f^0(z) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Como  $R(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ , podemos reescrever  $\dot{z}(t, \varepsilon)$  da seguinte forma:

$$\dot{z}(t, \varepsilon) = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 R_1(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon)$$

onde:  $|R_1(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon)| \leq H$ ,  $t \geq 0$ ,  $z \in D' \subset D$ , onde  $\overline{D'} \subset D$  e  $\overline{D'}$  é compacto.

Seja  $\varepsilon > 0$ . Faça:

$$\tau = \varepsilon t \Rightarrow t = \frac{\tau}{\varepsilon}.$$

Assim,

$$\dot{z}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = \varepsilon f^0\left(z\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right)\right) + \varepsilon R_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, z\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right), \varepsilon\right).$$

Chame

$$w(\tau, \varepsilon) = z\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right).$$

Daí,

$$\dot{w}(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \dot{z}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \Rightarrow \dot{z}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = \varepsilon \dot{w}(\tau, \varepsilon).$$

Portanto,

$$\varepsilon \dot{w}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon f^0(w(\tau, \varepsilon)) + \varepsilon^2 R_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, w(\tau, \varepsilon), \varepsilon\right).$$

Isto é,

$$\begin{cases} \dot{w}(\tau, \varepsilon) &= f^0(w(\tau, \varepsilon)) + \varepsilon R_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, w(\tau, \varepsilon), \varepsilon\right), \\ w(0, \varepsilon) &= x_0. \end{cases}$$

Por outro lado, temos que:

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y).$$

Faça:

$$v(\tau, \varepsilon) = y\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right).$$

Temos

$$\dot{v}(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \dot{y}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \Rightarrow \varepsilon \dot{v}(\tau, \varepsilon) = \dot{y}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right).$$

Isto é,

$$\begin{cases} \dot{v}(\tau, \varepsilon) &= f^0(v(\tau, \varepsilon)), \\ v(0, \varepsilon) &= x_0. \end{cases}$$

Dessa forma, temos que:

$$w(\tau, \varepsilon) = x_0 + \int_0^\tau f^0(w(s, \varepsilon)) ds + \varepsilon \int_0^\tau R_1\left(\frac{s}{\varepsilon}, w(s, \varepsilon), \varepsilon\right) ds,$$

$$v(\tau, \varepsilon) = x_0 + \int_0^\tau f^0(v(s, \varepsilon)) ds.$$

Então,

$$w(\tau, \varepsilon) - v(\tau, \varepsilon) = \int_0^\tau [f^0(w(s, \varepsilon)) - f^0(v(s, \varepsilon))] ds + \varepsilon \int_0^\tau R_1\left(\frac{s}{\varepsilon}, w(s, \varepsilon), \varepsilon\right) ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |w(\tau, \varepsilon) - v(\tau, \varepsilon)| &\leq \int_0^\tau |f^0(w(s, \varepsilon)) - f^0(v(s, \varepsilon))| ds + \varepsilon \int_0^\tau \left| R_1\left(\frac{s}{\varepsilon}, w(s, \varepsilon), \varepsilon\right) \right| ds \\ &\leq M \int_0^\tau |w(s, \varepsilon) - v(s, \varepsilon)| ds + \varepsilon \int_0^\tau H ds \\ &\leq M \int_0^\tau |w(s, \varepsilon) - v(s, \varepsilon)| ds + \varepsilon H \tau. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Dessa forma, pelo Teorema 1.2.3 (Desigualdade de Gronwall), temos:

$$\begin{aligned} |w(\tau, \varepsilon) - v(\tau, \varepsilon)| &\leq \varepsilon H \tau e^{\int_0^\tau M ds} \\ &\leq \varepsilon H \tau (e^{M\tau} - 1). \end{aligned}$$

Seja  $A > 0$  com  $0 \leq \tau \leq A$ . Então,

$$|w(\tau, \varepsilon) - v(\tau, \varepsilon)| \leq \varepsilon H A (e^{MA} - 1) = \varepsilon B$$

onde  $B = H A (e^{MA} - 1)$ .

Assim, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$|w(\tau, \varepsilon) - v(\tau, \varepsilon)| \leq \varepsilon B.$$

Como  $\tau = t\varepsilon$  e  $0 \leq \tau \leq A$  então  $0 \leq t \leq \frac{A}{\varepsilon}$  e

$$|w(t\varepsilon, \varepsilon) - v(t\varepsilon, \varepsilon)| \leq \varepsilon B.$$

Portanto,

$$|z(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)| \leq \varepsilon B, \quad \forall 0 \leq t \leq \frac{A}{\varepsilon}.$$

Assim, por (2.17), temos:

$$\begin{aligned} |x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)| &\leq |x(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon)| + |z(t, \varepsilon) - y(t)| \\ &\leq \varepsilon |u(t, z(t, \varepsilon))| + \varepsilon B \\ &\leq \varepsilon (2MT + B) \end{aligned}$$

para  $0 \leq t \leq \frac{A}{\varepsilon}$ .

■

**Exemplo 2.2.5** No exemplo 2.1.1, consideramos a equação:

$$\ddot{x} + x = -\varepsilon \dot{x} + \varepsilon x^2.$$

Fazendo  $y = \dot{x}$  e a mudança de variáveis  $x, y \longrightarrow r, \psi$ , isto é,

$$\begin{cases} \dot{r} &= -\varepsilon \sin(t + \psi) f(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi)), \\ \dot{\psi} &= -\frac{\varepsilon}{r} \cos(t + \psi) f(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi)). \end{cases}$$

Temos  $f(x, \dot{x}) = -\dot{x} + x^2$ . Daí,

$$\begin{cases} \dot{r} &= -\varepsilon \sin(t + \psi) [r \sin(t + \psi) + r^2 \cos^2(t + \psi)], \\ \dot{\psi} &= -\frac{\varepsilon}{r} \cos(t + \psi) [r \sin(t + \psi) + r^2 \cos^2(t + \psi)]. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\begin{cases} \dot{r} &= \varepsilon f_1(t, (r, \psi)), \\ \dot{\psi} &= \varepsilon f_2(t, (r, \psi)) \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} f_1(t, (r, \psi)) &= -r \sin^2(t + \psi) - r^2 \cos^2(t + \psi) \sin(t + \psi), \\ f_2(t, (r, \psi)) &= -\cos(t + \psi) \sin(t + \psi) - r \cos^3(t + \psi). \end{aligned}$$

Queremos que mostrar que

$$f(t, (r, \psi)) = \begin{pmatrix} -r \sin^2(t + \psi) - r^2 \cos^2(t + \psi) \sin(t + \psi) \\ -\cos(t + \psi) \sin(t + \psi) - r \cos^3(t + \psi) \end{pmatrix}$$

satisfaz as condições do Teorema 2.2.4. Assumindo  $r$  limitado, obtemos que  $f$  esta definida, é contínua e limitada. Além disso,

$$\frac{\partial f}{\partial(r, \psi)}(t, (r, \psi)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}(t, (r, \psi)) & \frac{\partial f_1}{\partial \psi}(t, (r, \psi)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(t, (r, \psi)) & \frac{\partial f_2}{\partial \psi}(t, (r, \psi)) \end{pmatrix}$$

onde:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial r}(t, (r, \psi)) &= -\sin^2(t + \psi) - 2r \cos^2(t + \psi) \sin(t + \psi), \\ \frac{\partial f_1}{\partial \psi}(t, (r, \psi)) &= -2r \sin(t + \psi) \cos(t + \psi) + 2r^2 \cos(t + \psi) \sin^2(t + \psi) - r^2 \cos^3(t + \psi), \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(t, (r, \psi)) &= -\cos^3(t + \psi), \\ \frac{\partial f_2}{\partial \psi}(t, (r, \psi)) &= \sin^2(t + \psi) - \cos^2(t + \psi) + 3r \cos^2(t + \psi) \sin(t + \psi), \end{cases}$$

que também está definida, é contínua e limitada. Notamos claramente que  $f(t, (r, \psi))$  é  $2\pi$ -periódica em  $t$ .

$$\text{Vamos calcular a média: } f^0(r, \psi) = \begin{pmatrix} f_1^0(r, \psi) \\ f_2^0(r, \psi) \end{pmatrix}.$$

$$f_1^0(r, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-r \sin^2(t + \psi) - r^2 \cos^2(t + \psi) \sin(t + \psi)] dt = \frac{-r}{2}.$$

$$f_2^0(r, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-\cos(t + \psi) \sin(t + \psi) - r \cos^3(t + \psi)] dt = 0.$$

Assim, obtemos o sistema da média:

$$\begin{cases} \dot{r} &= \varepsilon f_1^0(r, \psi), \\ \dot{\psi} &= \varepsilon f_2^0(r, \psi). \end{cases}$$

Isto é,

$$\begin{cases} \dot{r} &= -\varepsilon \frac{r}{2}, \\ \dot{\psi} &= 0. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\begin{cases} r(t) &= r(0)e^{\frac{-\varepsilon t}{2}}, \\ \psi(t) &= \psi(0). \end{cases}$$

Assim, obtemos as seguintes aproximações via método da média:

$$\begin{cases} x_a(t) &= r(0)e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} \cos(t + \psi(0)), \\ y_a(t) &= -r(0)e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} \sin(t + \psi(0)). \end{cases}$$

onde  $r(0) = \sqrt{x(0)^2 + y(0)^2}$  e  $\psi(0) = \arctan \frac{y(0)}{x(0)}$  são obtidos a partir da condição inicial.

Por estarmos nas hipóteses do teorema, segue que:

$$\begin{pmatrix} x(t, \varepsilon) \\ y(t, \varepsilon) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_a(t) \\ y_a(t) \end{pmatrix} = O(\varepsilon), \text{ na escala de tempo } \frac{1}{\varepsilon}.$$

Isto é, existem constantes  $\varepsilon_0 \geq 0, k_1 > 0, c > 0$ , independentes de  $\varepsilon$ , tais que para todo  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , temos:

$$\sqrt{(x(t) - x_a(t))^2 + (y(t) - y_a(t))^2} \leq k_1 \varepsilon$$

para todo  $0 \leq t \leq \frac{c}{\varepsilon}$ .

**Exemplo 2.2.6** Considere a equação autônoma

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x})$$

com valor inicial dado.

Seja  $y = \dot{x}$ . Sabemos que existem  $r(0)$  e  $\psi(0)$ , tais que:

$$\begin{cases} r(0) &= \sqrt{x(0)^2 + y(0)^2}, \\ \psi(0) &= \arctan \left( \frac{y(0)}{x(0)} \right) \end{cases}$$

onde  $x(0)$  e  $y(0)$  são dados pela condição inicial. Faça a transformação  $x, y \longrightarrow r, \psi$ , isto é:

$$\begin{cases} x(t) &= r(t) \cos(t + \psi(t)), \\ y(t) &= -r(t) \sin(t + \psi(t)). \end{cases}$$

Obtemos:

$$\begin{cases} \dot{r} &= -\varepsilon \sin(t + \psi) f(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi)), \\ \dot{\psi} &= -\frac{\varepsilon}{r} \cos(t + \psi) f(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi)). \end{cases}$$

Note que cada lado direito das igualdades anteriores são  $2\pi$ -periódicos em  $t$ .

Vamos calcular a média. Temos:

$$f_1^0(r, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t + \psi) f(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi)) dt.$$

Fazendo  $s = t + \psi$ , temos:  $ds = dt$ . Daí, pela Proposição 1.2.23:

$$\begin{aligned} f_1^0(r, \psi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\psi}^{2\pi+\psi} \sin(s) f(r \cos s, -r \sin s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(s) f(r \cos s, -r \sin s) ds = f_1^0(r). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} f_2^0(r, \psi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t + \psi) f(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\psi}^{2\pi+\psi} \cos(s) f(r \cos s, -r \sin s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(s) f(r \cos s, -r \sin s) ds = f_2^0(r). \end{aligned}$$

Portanto,  $f_1^0$  e  $f_2^0$  só dependem de  $r$ . Basta resolvermos:

$$\begin{cases} \dot{r} &= -\varepsilon f_1^0(r), \\ \dot{\psi} &= -\frac{\varepsilon}{r} f_2^0(r). \end{cases}$$

Vamos usar este resultado na equação:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}.$$

Temos:

$$f(x, \dot{x}) = (1 - x^2)\dot{x}.$$

Assim,

$$f(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi)) = (1 - r^2 \cos^2(t + \psi))(-r \sin(t + \psi)).$$

Ficamos com o sistema:

$$\begin{cases} \dot{r} &= \varepsilon \sin(t + \psi)[(1 - r^2 \cos^2(t + \psi))(-r \sin(t + \psi))], \\ \dot{\psi} &= -\frac{\varepsilon}{r} \cos(t + \psi)[(1 - r^2 \cos^2(t + \psi))(-r \sin(t + \psi))]. \end{cases}$$

Vamos verificar que estamos nas hipóteses do teorema.

$$f(t, (r, \psi)) = \begin{pmatrix} f_1(t, (r, \psi)) \\ f_2(t, (r, \psi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin^2(t + \psi)(1 - r^2 \cos^2(t + \psi)) \\ \cos(t + \psi) \sin(t + \psi)(1 - r^2 \cos^2(t + \psi)) \end{pmatrix}$$

está definida, é contínua e limitada, para todo  $t$ , assumindo  $r$  limitado. Além disso,

$$\frac{\partial f}{\partial(r, \psi)}(t, (r, \psi)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}(t, (r, \psi)) & \frac{\partial f_1}{\partial \psi}(t, (r, \psi)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(t, (r, \psi)) & \frac{\partial f_2}{\partial \psi}(t, (r, \psi)) \end{pmatrix}$$

onde :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial r}(t, (r, \psi)) = -\sin^2(t + \psi) + 3r^2 \sin^2(t + \psi) \cos^2(t + \psi), \\ \frac{\partial f_1}{\partial \psi}(t, (r, \psi)) = -2r \sin(t + \psi) \cos(t + \psi)(1 + r^2), \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(t, (r, \psi)) = -2r \cos^3(t + \psi) \sin(t + \psi), \\ \frac{\partial f_2}{\partial \psi}(t, (r, \psi)) = -\sin^2(t + \psi)(1 + r^2 \cos^2(t + \psi)). \end{array} \right.$$

está definida, é contínua e limitada, para todo  $t$ , assumindo  $r$  limitado. Portanto, estamos nas hipóteses do teorema. Logo,

$$f_1^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t + \psi)[(1 - r^2 \cos^2(t + \psi))(-r \sin(t + \psi))]dt = \frac{-r}{2} \left(1 - \frac{r^2}{4}\right),$$

$$f_2^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t + \psi)[(1 - r^2 \cos^2(t + \psi))(-r \sin(t + \psi))]dt = 0.$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \varepsilon \frac{r}{2} \left(1 - \frac{r^2}{4}\right), \\ \dot{\psi} = 0. \end{array} \right.$$

Resolvendo esta equação diferencial, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} r(t) = \frac{r(0)e^{\frac{\varepsilon t}{2}}}{[1 + \frac{1}{4}r(0)^2(e^{\varepsilon t} - 1)]^{\frac{1}{2}}}, \\ \psi(t) = \psi(0). \end{array} \right.$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_a(t) = \frac{r(0)e^{\frac{\varepsilon t}{2}}}{[1 + \frac{1}{4}r(0)^2(e^{\varepsilon t} - 1)]^{\frac{1}{2}}} \cos(t + \psi(0)), \\ y_a(t) = -\frac{r(0)e^{\frac{\varepsilon t}{2}}}{[1 + \frac{1}{4}r(0)^2(e^{\varepsilon t} - 1)]^{\frac{1}{2}}} \sin(t + \psi(0)) \end{array} \right.$$

onde  $r(0) = \sqrt{x(0)^2 + y(0)^2}$  e  $\psi(0) = \arctan\left(\frac{y(0)}{x(0)}\right)$ .

Podemos concluir que:

$$\begin{pmatrix} x(t, \varepsilon) \\ y(t, \varepsilon) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_a(t) \\ y_a(t) \end{pmatrix} = O(\varepsilon), \text{ na escala de tempo } \frac{1}{\varepsilon}.$$

Isto é, existem constantes  $\varepsilon_0 \geq 0, k_1 > 0, c > 0$ , independentes de  $\varepsilon$ , tais que para todo  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , temos:

$$\sqrt{(x(t) - x_a(t))^2 + (y(t) - y_a(t))^2} \leq k_1 \varepsilon$$

para todo  $0 \leq t \leq \frac{c}{\varepsilon}$ .

**Exemplo 2.2.7** Considere a equação de Mathieu:

$$\ddot{x} + (1 + 2\varepsilon \cos(2t))x = 0$$

com valores iniciais  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = 0$ . Temos:

$$\ddot{x} + x = -\varepsilon 2x \cos 2t.$$

Vamos considerar

$$y = \dot{x}, \quad g(t, x) = -2x \cos 2t$$

e mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x(t) &= y_1(t) \cos t + y_2(t) \sin t, \\ y(t) &= -y_1(t) \sin t + y_2(t) \cos t. \end{cases}$$

Encontraremos as seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= -\varepsilon \sin t (g(t, y_1(t) \cos t + y_2(t) \sin t)), \\ \dot{y}_2 &= \varepsilon \cos t (g(t, y_1(t) \cos t + y_2(t) \sin t)). \end{cases}$$

Isto é,

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \varepsilon 2 \sin t \cos 2t (y_1(t) \cos t + y_2(t) \sin t), \\ \dot{y}_2 &= -\varepsilon 2 \cos t \cos 2t (y_1(t) \cos t + y_2(t) \sin t). \end{cases}$$

Dessa forma,

$$f(t, (y_1, y_2)) = \begin{pmatrix} 2 \sin t \cos 2t (y_1(t) \cos t + y_2(t) \sin t) \\ -2 \cos t \cos 2t (y_1(t) \cos t + y_2(t) \sin t) \end{pmatrix}$$

está definida, é continua e limitada assumindo  $y_1$  e  $y_2$  limitadas. Além disso,

$$\frac{\partial f}{\partial (y_1, y_2)}(t, (y_1, y_2)) = \begin{pmatrix} 2 \sin t \cos 2t \cos t & 2 \sin^2 t \cos 2t \\ -2 \cos^2 t \cos 2t & -2 \cos t \cos 2t \sin t \end{pmatrix}$$

está definida, é contínua e limitada.

Então,

$$f_1^0(t, (y_1, y_2)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{sen}(t) \cos 2t (y_1(t) \cos t + y_2(t) \operatorname{sen} t) dt = -\frac{y_2}{2},$$

$$f_2^0(t, (y_1, y_2)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -2 \cos(t) \cos 2t (y_1(t) \cos t + y_2(t) \operatorname{sen} t) dt = -\frac{y_1}{2}.$$

E assim obtemos:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= -\varepsilon \frac{y_2}{2} ; \quad y_1(0) = x_0, \\ \dot{y}_2 &= -\varepsilon \frac{y_1}{2} ; \quad y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} y_1(t) &= k_1 e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} + k_2 e^{\frac{\varepsilon t}{2}}, \\ y_2(t) &= k_1 e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} - k_2 e^{\frac{\varepsilon t}{2}}. \end{cases}$$

Como

$$y_1(0) = x_0 \Rightarrow k_1 + k_2 = x_0,$$

$$y_2(0) = 0 \Rightarrow k_1 - k_2 = 0.$$

segue que:

$$k_1 = k_2 = \frac{x_0}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{cases} y_1(t) &= \frac{x_0}{2} e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} + \frac{x_0}{2} e^{\frac{\varepsilon t}{2}}, \\ y_2(t) &= \frac{x_0}{2} e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} - \frac{x_0}{2} e^{\frac{\varepsilon t}{2}}. \end{cases}$$

Dessa forma, obtemos as seguintes aproximações:

$$\begin{cases} x_a(t) &= y_1(t) \cos t + y_2(t) \operatorname{sen} t, \\ y_a(t) &= y_1(t) \operatorname{sen} t - y_2(t) \cos t. \end{cases}$$

Isto é,

$$\begin{cases} x_a(t) &= \left( \frac{x_0}{2} e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} + \frac{x_0}{2} e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \right) \cos t + \left( \frac{x_0}{2} e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} - \frac{x_0}{2} e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \right) \operatorname{sen} t, \\ y_a(t) &= \left( \frac{x_0}{2} e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} + \frac{x_0}{2} e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \right) \operatorname{sen} t + \left( \frac{x_0}{2} e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} - \frac{x_0}{2} e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \right) \cos t. \end{cases}$$

Note que:

$$\begin{aligned}
x_a(t) &= \left( \frac{x_0}{2} e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} + \frac{x_0}{2} e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \right) \cos t + \left( \frac{x_0}{2} e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} - \frac{x_0}{2} e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \right) \sin t \\
&= \frac{x_0}{2} e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} \cos t + \frac{x_0}{2} e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \cos t + \frac{x_0}{2} e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} \sin t - \frac{x_0}{2} e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \sin t \\
&= \frac{x_0}{2} e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} (\cos t + \sin t) + \frac{x_0}{2} e^{\frac{\varepsilon t}{2}} (\cos t - \sin t).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_a(t) &= -\left( \frac{x_0}{2} e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} + \frac{x_0}{2} e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \right) \sin t + \left( \frac{x_0}{2} e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} - \frac{x_0}{2} e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \right) \cos t \\
&= -\frac{x_0}{2} e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} \sin t - \frac{x_0}{2} e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \sin t + \frac{x_0}{2} e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} \cos t - \frac{x_0}{2} e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \cos t \\
&= -\frac{x_0}{2} e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} (\sin t - \cos t) - \frac{x_0}{2} e^{\frac{\varepsilon t}{2}} (\sin t + \cos t).
\end{aligned}$$

Por estarmos nas hipóteses do teorema, segue que:

$$\begin{pmatrix} x(t, \varepsilon) \\ y(t, \varepsilon) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_a(t) \\ y_a(t) \end{pmatrix} = O(\varepsilon), \text{ na escala de tempo } \frac{1}{\varepsilon}.$$

Isto é, existem constantes  $\varepsilon_0 \geq 0$ ,  $k_1 > 0$ ,  $c > 0$ , independentes de  $\varepsilon$ , tais que para todo  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , temos:

$$\sqrt{(x(t) - x_a(t))^2 + (y(t) - y_a(t))^2} \leq k_1 \varepsilon$$

para todo  $0 \leq t \leq \frac{c}{\varepsilon}$ .

## 2.3 Existência e Estabilidade de soluções periódicas

Agora veremos um resultado que nos leva a existência de soluções periódicas através do Método da Média e do Teorema da Aplicação Implícita.

Considere novamente as equações (2.9) e (2.11). Assumiremos que  $f \in C^2$  e  $g \in C^1$  são aplicações  $T$ -periódicas em  $t$ . Sob certas condições, os pontos críticos da equação da média (2.11) determinarão soluções  $T$ -periódicas da equação (2.9).

**Teorema 2.3.1** *Considere a equação (2.9) e suponha que:*

(a) *As funções vetoriais  $f, g, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial g}{\partial x}$  estão definidas, são contínuas e limitadas por uma constante  $M$  (independente de  $\varepsilon$ ) em  $[0, \infty) \times D$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ .*

(b)  *$f$  e  $g$  são  $T$ -periódicas em  $t$  ( $T$  independe de  $\varepsilon$ ).*

*Se  $p$  é um ponto crítico da equação da média (2.11) tal que*

$$\det \left( \left( \frac{\partial f^0(y)}{\partial y} \right)_{y=p} \right) \neq 0 \quad (2.22)$$

*então existe  $\varepsilon_1$ ,  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$  tal que para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$  existe uma solução  $T$ -periódica  $\Phi(t, \varepsilon)$  da equação (2.9) tal que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(t, \varepsilon) = p$ .*

**Demonstração:** Novamente vamos usar a transformação (2.17), a saber:

$$x(t, \varepsilon) = z(t, \varepsilon) + \varepsilon u(t, z(t, \varepsilon))$$

onde

$$u(t, z) = \int_0^t [f(s, z) - f^0(s)] ds$$

introduzida na demonstração do Teorema 2.2.4. A fim de simplificar a notação denotaremos  $z(t, \varepsilon)$  simplesmente por  $z$ . Considere a equação (2.18):

$$\left[ I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right] \dot{z} = \varepsilon f^0(z) - \varepsilon f(t, z) + \varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t, z)) + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon).$$

Pelo Lema 1.1.6, sabemos que:

$$\left[ I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right]^{-1} = I - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) + O(\varepsilon^2) \quad (2.23)$$

onde  $O(\varepsilon^2) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon^n \left( \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right)^n$ . Logo, por (i) da demonstração do Teorema 2.2.4 segue que  $O(\varepsilon^2)$  é  $T$ -periódica.

Então,

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \left[ I - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) + O(\varepsilon^2) \right] [\varepsilon f^0(z) - \varepsilon f(t, z) + \varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t, z)) \\
&\quad + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon)] \\
&= \varepsilon f^0(z) - \varepsilon f(t, z) + \varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t, z)) + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) \\
&\quad - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) f^0(z) + \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) f(t, z) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) f(t, z + \varepsilon u(t, z)) \\
&\quad - \varepsilon^3 \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) + O(\varepsilon^3) \\
&= \varepsilon f^0(z) + \varepsilon [f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z)] + \varepsilon^2 \left[ g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) f^0(z) + \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) f(t, z) - \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) f(t, z + \varepsilon u(t, z)) \right. \\
&\quad \left. - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) + O(\varepsilon) \right].
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Assim,

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon [f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z)] + \varepsilon^2 R_1(t, z, \varepsilon) \tag{2.25}$$

onde

$$\begin{aligned}
R_1(t, z, \varepsilon) &= g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) - \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) f^0(z) + \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) f(t, z) \\
&\quad - \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Vejamos que  $R_1(t, z, \varepsilon) \in C^1$ .

(1)  $g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) \in C^1$ .

(2) Pelo Teorema 1.1.1 (Derivação sob o sinal da integral), temos:

$$\frac{\partial u}{\partial z}(t, z) = \int_0^t \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(s, z) - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial z}(h, z) dh \right] ds \in C^1$$

pois  $\frac{\partial f}{\partial z}(s, z) \in C^1$ .

(3)  $f^0(z) = \frac{1}{T} \int_0^T f(s, z) ds \in C^1$ , pois  $f \in C^2$ .

(4)  $f(t, z), f(t, z + \varepsilon u(t, z)) \in C^1$ .

Assim,  $f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z) \in C^1$ .

Da fórmula de Taylor com relação a segunda variável em torno de  $\varepsilon = 0$ , temos:

$$f(t, z + \varepsilon u(t, z)) = f(t, z) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}(t, z)u(t, z) + O(\varepsilon^2).$$

Dessa forma, podemos reescrever (2.24) da seguinte forma:

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) - \varepsilon f(t, z) + \varepsilon \left[ f(t, z) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}(t, z)u(t, z) + O(\varepsilon^2) \right] + \varepsilon^2 R_1(t, z, \varepsilon).$$

Logo,

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 R(t, z, \varepsilon)$$

onde  $R(t, z, \varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, z)u(t, z) + R_1(t, z, \varepsilon)$ .

Mostremos que  $R(t, z, \varepsilon)$  é  $T$ -periódica em  $t$ .

(i) Vimos na demonstração do Teorema 2.2.4 que  $u(t, z)$  é  $T$ -periódica em  $t$ . Daí,

$$u(t + T, z) = u(t, z) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z}(t + T, z) = \frac{\partial u}{\partial z}(t, z).$$

(ii) Além disso,  $g$  e  $f$  são  $T$ -periódicas em  $t$  então:

$$g(t + T, z + \varepsilon u(t + T, z), \varepsilon) = g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon),$$

$$f(t + T, z + \varepsilon u(t + T, z)) = f(t, z + \varepsilon u(t, z)),$$

$$f(t + T, z) = f(t, z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(t + T, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, z).$$

(iii) E ainda,  $O(\varepsilon)$  é  $T$ -periódica em  $t$  por (2.23) e (i) da demonstração do Teorema 2.2.4.

Portanto,

$$\begin{aligned} R(t + T, z, \varepsilon) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t + T, z)u(t + T, z) + g(t + T, z + \varepsilon u(t + T, z), \varepsilon) - \frac{\partial u}{\partial z}(t + T, z)f^0(z) \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial z}(t + T, z)f(t + T, z) - \frac{\partial u}{\partial z}(t + T, z)f(t + T, z + \varepsilon u(t + T, z)) \\ &\quad - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t + T, z)g(t + T, z + \varepsilon u(t + T, z), \varepsilon) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, z)u(t, z) + g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) - \frac{\partial u}{\partial z}(t, z)f^0(z) + \frac{\partial u}{\partial z}(t, z)f(t, z) \\ &\quad - \frac{\partial u}{\partial z}(t, z)f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z)g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) + O(\varepsilon) \\ &= R(t, z, \varepsilon). \end{aligned}$$

Devido a escolha de  $u(t, z)$  se  $z(t)$  é  $T$ -periódica então  $x(t)$  também é  $T$ -periódica. Seja  $F(t, u, \varepsilon)$  o fluxo de  $\dot{z}(t) = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 R(t, z, \varepsilon)$ . Então,

$$\begin{cases} \dot{F}(t, u, \varepsilon) &= \varepsilon f^0(F(t, u, \varepsilon) + \varepsilon^2 \bar{R}(t, u, \varepsilon), \varepsilon), \\ F(0, u, \varepsilon) &= u. \end{cases}$$

Pelo Teorema 1.2.18 sabemos que  $F \in C^1$ . Da fórmula de Taylor, temos:

$$F(t, u, \varepsilon) = F_0(t, u) + F_1(t, u)\varepsilon + \varepsilon^2 \bar{R}(t, u, \varepsilon), \text{ com } 0 \leq t \leq T.$$

Fazendo  $t = 0$ , ficamos com:

$$u = F(0, u, \varepsilon) = F_0(0, u) + F_1(0, u)\varepsilon + \varepsilon^2 \bar{R}(0, u, \varepsilon).$$

Então,

$$\begin{cases} F_0(0, u) &= u, \\ F_1(0, u) &= 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

E ainda,

$$z = F_0(t, u) + F_1(t, u)\varepsilon + \varepsilon^2 \bar{R}(t, u, \varepsilon),$$

$$\dot{z} = \dot{F}_0(t, u) + \dot{F}_1(t, u)\varepsilon + \varepsilon^2 \dot{\bar{R}}(t, u, \varepsilon).$$

Por outro lado,

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 R(t, z, \varepsilon).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dot{F}_0(t, u) + \dot{F}_1(t, u)\varepsilon + \varepsilon^2 \dot{\bar{R}}(t, u, \varepsilon) &= \varepsilon f^0(F_0(t, u) + F_1(t, u)\varepsilon + \varepsilon^2 \bar{R}(t, u, \varepsilon)) \\ &\quad + \varepsilon^2 R(t, F_0(t, u) + F_1(t, u)\varepsilon + \varepsilon^2 \bar{R}(t, u, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned}$$

Novamente pela Fórmula de Taylor, temos:

$$f^0(F_0(t, u) + F_1(t, u)\varepsilon + \varepsilon^2 \bar{R}(t, u, \varepsilon)) = f^0(F_0(t, u)) + O(\varepsilon).$$

Dessa forma,

$$\dot{F}_0(t, u) + \dot{F}_1(t, u)\varepsilon + O(\varepsilon^2) = \varepsilon f^0(F_0(t, u)) + O(\varepsilon^2).$$

Temos:

$$\begin{cases} \dot{F}_0(t, u) &= 0, \\ \dot{F}_1(t, u) &= f^0(F_0(t, u)) \end{cases}$$

com as condições iniciais (2.26). Então, para  $t$  é limitado, obtemos:

$$F_0(t, u) = u,$$

$$F_1(t, u) = \int_0^t f^0(u) ds = f^0(u) \int_0^t ds = t f^0(u).$$

Portanto,  $F(t, u, \varepsilon) = u + tf^0(u)\varepsilon + \varepsilon^2\bar{R}(t, u, \varepsilon)$  em  $0 \leq t \leq T$ , é o fluxo de

$$\begin{cases} \dot{z} = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 R(t, z, \varepsilon), \\ z(0) = u. \end{cases}$$

Queremos que  $F(t, u, \varepsilon)$  seja  $T$ -periódica em  $t$ . Pela Proposição 1.2.26, temos:

$$F(t+T, u, \varepsilon) = F(t, u, \varepsilon) \Leftrightarrow F(0, u, \varepsilon) = F(T, u, \varepsilon).$$

Assim,

$$u = u + Tf^0(u)\varepsilon + \varepsilon^2\bar{R}(t, u, \varepsilon) \Leftrightarrow Tf^0(u)\varepsilon + \varepsilon^2\bar{R}(t, u, \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow Tf^0(u) + \varepsilon\bar{R}(t, u, \varepsilon) = 0.$$

Seja

$$H(\varepsilon, u) = Tf^0(u) + \varepsilon\bar{R}(t, u, \varepsilon).$$

Daí, por hipótese

$$H(0, p) = Tf^0(p) = 0.$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\varepsilon, u) = T\frac{\partial f^0}{\partial u}(u) + \varepsilon\frac{\partial \bar{R}}{\partial u}(T, u, \varepsilon),$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(0, p) = T\frac{\partial f^0}{\partial u}(p).$$

Temos que  $\frac{\partial f^0}{\partial u}(p)$  é inversível, por hipótese. Então, pelo Teorema 1.1.7 (Aplicação Implícita), existe  $\varepsilon_1 > 0$  e  $c : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $H(\varepsilon, c(\varepsilon)) = 0$ , para  $-\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_1$ . Note que:  $c(0) = p$ . Então,

$$H(\varepsilon, c(\varepsilon)) = 0 \Leftrightarrow Tf^0(u) + \varepsilon\bar{R}(T, u, \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon Tf^0(u) + \varepsilon^2\bar{R}(T, u, \varepsilon) = 0$$

$$\Leftrightarrow c(\varepsilon) + \varepsilon Tf^0(u) + \varepsilon^2\bar{R}(T, u, \varepsilon) = c(\varepsilon) \Leftrightarrow F(T, c(\varepsilon), \varepsilon) = F(0, c(\varepsilon), \varepsilon).$$

Portanto, a solução do p.v.i.:

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f^0(x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \\ x(0) = c(\varepsilon) \end{cases}$$

nos dá a solução  $T$ -periódica que procuramos.

Faça

$$\Phi(t, \varepsilon) = F(t, c(\varepsilon), \varepsilon).$$

Para  $0 \leq t \leq T$ , temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(t, \varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(t, c(\varepsilon), \varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\varepsilon) + \varepsilon t f^0(c(\varepsilon)) + O(\varepsilon^2) \\ &= c(0) = p. \end{aligned}$$

■

Concluimos pelo Teorema 2.3.1 que existe uma solução periódica da equação (2.9) na vizinhança de  $x = p$ .

**Teorema 2.3.2** *Considere a equação (2.9) e suponha que as condições do Teorema 2.3.1 estão satisfeitas. Se os autovalores do ponto crítico  $y = p$  da equação da média (2.11) possuem partes reais negativas, então a correspondente solução periódica  $\Phi(t, \varepsilon)$  da equação (2.9) é assintoticamente estável, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Se um dos autovalores tem parte real positiva, então  $\Phi(t, \varepsilon)$  é instável.*

**Demonstração:** Fazendo como em (1.33), obtemos que a linearização de (2.9) na órbita periódica  $\Phi(t, \varepsilon)$  obtida no Teorema 2.3.1, é dada por:

$$\dot{x} = \varepsilon A(t, \varepsilon)x \quad (2.27)$$

onde:

$$A(t, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x} [f(t, x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon)] \Big|_{x=\Phi(t, \varepsilon)}.$$

Seja  $x_i(t, \varepsilon)$  a única solução de (2.27) tal que  $x_i(0, \varepsilon) = e_i$ . Denote por  $M(t, \varepsilon)$  a matriz  $n \times n$  cuja  $i$ -ésima coluna é  $x_i(t, \varepsilon)$ . Assim,

$$M(t, \varepsilon) = [x_1(t, \varepsilon) \ x_2(t, \varepsilon) \ \dots \ x_n(t, \varepsilon)] \quad (2.28)$$

e  $M(0, \varepsilon) = I_{n \times n}$ .

Conforme a definição 1.2.13, os autovalores de  $M(T, \varepsilon)$  são os números característicos de (2.27). Temos que:

$$x_i(t, \varepsilon) = e_i + \varepsilon \left( \int_0^t \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(s, \Phi(s, \varepsilon)) + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x}(s, \Phi(s, \varepsilon), \varepsilon) \right] x_i(s, \varepsilon) ds \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} x_i(t, 0) &= e_i, \\ \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) &= \int_0^t \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(s, \Phi(s, \varepsilon)) + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x}(s, \Phi(s, \varepsilon), \varepsilon) \right] x_i(s, \varepsilon) ds \\ &\quad + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \int_0^t \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(s, \Phi(s, \varepsilon)) + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x}(s, \Phi(s, \varepsilon), \varepsilon) \right] x_i(s, \varepsilon) ds \right). \end{aligned}$$

Das equações acima, segue que:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t, 0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, \Phi(s, 0)) e_i ds.$$

Além disso, sabemos que:  $\Phi(s, 0) = p$ .

Assim,

$$\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t, 0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, p) e_i \, ds.$$

Então,

$$\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(T, 0) = \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(s, p) e_i \, ds. \quad (2.29)$$

Por outro lado, temos:

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x) \, ds \Rightarrow (f^0)'(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(s, x) \, ds \Rightarrow T(f^0)'(x) = \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(s, x) \, ds.$$

Daí,

$$\int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(s, p) \, ds = T(f^0)'(p).$$

Substituindo em (2.29):

$$\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(T, 0) = T(f^0)'(p) e_i.$$

Então, voltando em (2.28):

$$M(T, \varepsilon) = [e_1 + \varepsilon T(f^0)'(p)e_1 + O(\varepsilon^2) \quad \dots \quad e_n + \varepsilon T(f^0)'(p)e_n + O(\varepsilon^2)].$$

Ou seja,

$$M(T, \varepsilon) = I + \varepsilon T(f^0)'(p) + O(\varepsilon^2).$$

Suponha que todos os autovalores de  $(f^0)'(p)$  tem partes reais negativas. Logo, pelo Teorema 1.1.19, todo número característico da matriz  $M(T, \varepsilon)$  tem norma menor que um. Pelo Teorema 1.2.25, segue que  $\Phi$  é assintoticamente estável.

Por outro lado, se  $(f^0)'(p)$  admite pelo menos um autovalor com parte real positiva então segue novamente do Teorema 1.1.19 que  $M(T, \varepsilon)$  admite pelo menos um número característico com norma maior que 1. Do Teorema 1.2.25, segue que  $\Phi$  é instável.

■

---

---

## CAPÍTULO 3

---

# SISTEMA DE RÖSSLER: EXISTÊNCIA E ESTABILIDADE DE ÓRBITAS PERIÓDICAS USANDO O MÉTODO DA MÉDIA

### 3.1 Introdução

Inspirado pela geometria dos fluxos tridimensionais, Rössler introduziu vários sistemas nos anos 1970 como protótipos das equações diferenciais autônomas mais simples tendo caos, a simplicidade é no sentido de mínima dimensão, mínimo número de parâmetros e mínima não-linearidade.

Agora vamos considerar o sistema de Rössler:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x, \\ \dot{z} &= \alpha y(1 - y) - \beta z. \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Neste capítulo, provaremos dois teoremas. O primeiro investigará a existência de órbitas periódicas em torno da origem, e o segundo, em torno de um outro ponto de equilíbrio, ambos com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  distintos. Os resultados a seguir podem ser encontrados em [3].

## 3.2 Órbitas periódicas numa vizinhança da origem

Sejam os parâmetros:

$$\alpha = \varepsilon a \text{ e } \beta = -\varepsilon \left( b + \frac{a}{1 + \varepsilon^2 b^2} \right) \quad (3.2)$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Notemos que a aplicação

$$f_\varepsilon(a, b) = \left( \varepsilon a, -\varepsilon b - \frac{\varepsilon a}{1 + \varepsilon^2 b^2} \right)$$

é tal que  $\det(J_{f_\varepsilon}(0, 0)) = -\varepsilon^2$ . Assim, pelo Teorema 1.1.3,  $f_\varepsilon$  é um difeomorfismo  $C^\infty$ , quando  $\varepsilon \neq 0$ , numa vizinhança da origem  $(a, b) = (0, 0)$ . Assim, (3.2) é uma reparametrização adequada da vizinhança da origem no plano dos parâmetros  $(a, b)$ . Provaremos no Teorema a seguir, que com estes parâmetros, existe uma órbita periódica de (3.1).

**Teorema 3.2.1** *Considere o sistema de Rössler*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x, \\ \dot{z} = \varepsilon a y(1 - y) + \varepsilon \left( b + \frac{a}{1 + \varepsilon^2 b^2} \right) z \end{cases} \quad (3.3)$$

*satisfazendo  $(a+2b)a < 0$ . Então, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe uma solução periódica  $\gamma_\varepsilon$  de (3.3) com período  $T(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$  tal que  $\gamma_\varepsilon \rightarrow \left\{ z = -\frac{1}{2} \right\} \cap \left\{ x^2 + (y+z)^2 = \frac{-a-2b}{2a} \right\}$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Mais ainda,  $\gamma_\varepsilon$  é assintoticamente estável quando  $a+b < 0$  e instável quando  $a+b > 0$ .*

**Demonstração:** Encontramos os seguinte pontos críticos de (3.3):

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) &= (0, 0, 0), \\ (x_2, y_2, z_2) &= \left( 0, -\frac{\varepsilon^2 b^3 - \varepsilon^2 ab^2 + b}{\varepsilon^2 ab^2 + a}, \frac{\varepsilon^2 b^3 - \varepsilon^2 ab^2 + b}{\varepsilon^2 ab^2 + a} \right). \end{aligned}$$

Linearizando o sistema (3.3) no ponto de equilíbrio  $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ , encontramos o seguinte polinômio característico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \frac{(\lambda - \varepsilon b)[-1 + \varepsilon^2 b(a - b) + a\lambda\varepsilon - (1 + \varepsilon^2 b^2)\lambda^2]}{1 + \varepsilon^2 b^2} \\ &= \frac{\varepsilon\lambda^2 a}{\varepsilon^2 b^2 + 1} + \frac{\varepsilon a}{\varepsilon^2 b^2 + 1} + \varepsilon\lambda^2 b + \varepsilon b - \varepsilon a - \lambda^3 - \lambda. \end{aligned}$$

Vamos fazer a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Obtemos de (3.3):

$$\begin{cases} \dot{X} &= -Y - \dot{Z}, \\ \dot{Y} &= X, \\ \dot{Z} &= -\varepsilon \left( (aX + aX^2 + 2aZX + aZ^2 - bZ) - \frac{\varepsilon^2 b^2 aZ}{1 + \varepsilon^2 b^2} \right). \end{cases} \quad (3.5)$$

Note que:

$$\frac{\varepsilon^2 b^2 aZ}{1 + \varepsilon^2 b^2} = O(\varepsilon^2). \quad (3.6)$$

Daí, segue de (3.5) e (3.6) que

$$\begin{cases} \dot{X} &= -Y + \varepsilon(aX + aX^2 + 2aZX + aZ^2 - bZ) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{Y} &= X, \\ \dot{Z} &= -\varepsilon(aX + aX^2 + 2aZX + aZ^2 - bZ) + O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

Ou,

$$\begin{cases} \dot{X} &= -Y + \varepsilon f(X, Y, Z) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{Y} &= X, \\ \dot{Z} &= -\varepsilon f(X, Y, Z) + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (3.7)$$

onde

$$f(X, Y, Z) = -bZ + a(X + X^2 + 2XZ + Z^2).$$

Considere as coordenadas cilíndricas  $(X, Y, Z) \longrightarrow (\theta, r, z)$  tais que:

$$\begin{cases} X &= r \cos \theta, \\ Y &= r \sin \theta, \\ Z &= z. \end{cases} \quad (3.8)$$

Temos:

$$\begin{cases} \dot{X} &= \dot{r} \cos \theta - r(\sin \theta)\dot{\theta}, \\ \dot{Y} &= \dot{r} \sin \theta + r(\cos \theta)\dot{\theta}, \\ \dot{Z} &= \dot{z}. \end{cases}$$

Daí, (3.7) fica:

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \theta - r(\sin \theta)\dot{\theta} &= -r \sin \theta + \varepsilon f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{r} \sin \theta + r(\cos \theta)\dot{\theta} &= r \cos \theta, \\ \dot{z} &= -\varepsilon f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) + O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \\ 0 \\ -f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\varepsilon^2) \\ 0 \\ O(\varepsilon^2) \end{pmatrix}.$$

Sabendo que

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtemos as equações:

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon g_1(\theta, r, z) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon g_2(\theta, r, z) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{z} = \varepsilon g_3(\theta, r, z) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.9)$$

onde:

$$g_1(\theta, r, z) = -\cos \theta \, g_3(\theta, r, z),$$

$$g_2(\theta, r, z) = \frac{\sin \theta}{r} \, g_3(\theta, r, z),$$

$$g_3(\theta, r, z) = bz - a(z^2 + r \cos \theta(1 + 2z + r \cos \theta)).$$

Observe que (3.9) está na forma de (1.36) do Teorema 1.2.27 (da Redução). Como  $r > 0$  e para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno temos  $\dot{\theta} > 0$  as equações

$$\bar{r}'(\theta) = \frac{\varepsilon g_1(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + O(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon g_2(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + O(\varepsilon^2)},$$

$$\bar{z}'(\theta) = \frac{\varepsilon g_3(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + O(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon g_2(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + O(\varepsilon^2)}.$$

que vem de (1.35) estão bem definidas. Dessa forma, existe uma constante  $C > 0$  e seja  $r(\theta, \bar{r}, \bar{z})$  a função tal que

$$1 + \varepsilon g_2(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon g_2(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + \varepsilon^2 r(\theta, \bar{r}, \bar{z})$$

onde  $|r(\theta, \bar{r}, \bar{z})| \leq C$ . Logo,

$$1 + \varepsilon g_2(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + \varepsilon^2 r(\theta, \bar{r}, \bar{z}) = 1 + \varepsilon (g_2(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + \varepsilon r(\theta, \bar{r}, \bar{z})).$$

Pelo Lema 1.1.6, segue que:

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon (g_2(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + \varepsilon r(\theta, \bar{r}, \bar{z})))^{-1} &= 1 - \varepsilon (g_2(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + \varepsilon r(\theta, \bar{r}, \bar{z})) + O(\varepsilon^2) \\ &= 1 - \varepsilon g_2(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\bar{r}'(\theta) &= [\varepsilon g_1(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + O(\varepsilon^2)][1 - \varepsilon g_2(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + O(\varepsilon^2)] \\
&= \varepsilon g_1(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + O(\varepsilon^2), \\
\bar{z}'(\theta) &= [\varepsilon g_3(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + O(\varepsilon^2)][1 - \varepsilon g_2(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + O(\varepsilon^2)] \\
&= \varepsilon g_3(\theta, \bar{r}(\theta), \bar{z}(\theta)) + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos reduzir o sistema (3.9) ao sistema:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{r}}{d\theta} = \varepsilon g_1(\theta, \bar{r}, \bar{z}) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{d\bar{z}}{d\theta} = \varepsilon g_3(\theta, \bar{r}, \bar{z}) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.10)$$

com

$$g_1(\theta, r, z) = -\cos \theta \, g_3(\theta, r, z),$$

$$g_3(\theta, r, z) = bz - a(z^2 + r \cos \theta (1 + 2z + r \cos \theta))$$

onde  $\theta$  é a nova variável independente. Queremos investigar a existência de uma órbita periódica do sistema (3.10). Vejamos que esse sistema satisfaz as condições dos Teoremas 2.3.1 e 2.3.2:

$$f(\theta, \bar{r}, \bar{z}) = \begin{pmatrix} g_1(\theta, \bar{r}, \bar{z}) \\ g_3(\theta, \bar{r}, \bar{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta (b\bar{z} - a[\bar{z}^2 + \bar{r} \cos \theta (1 + 2\bar{z} + \bar{r} \cos \theta)]) \\ b\bar{z} - a[\bar{z}^2 + \bar{r} \cos \theta (1 + 2\bar{z} + \bar{r} \cos \theta)] \end{pmatrix}$$

está definida, é contínua e limitada por uma constante que independe de  $\varepsilon$ , quando  $\bar{r}$  e  $\bar{z}$  são limitadas, assim como  $\frac{\partial f}{\partial(\bar{r}, \bar{z})}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial(\bar{r}, \bar{z})^2}$ . É imediato que  $f(\theta, \bar{r}, \bar{z})$  é  $2\pi$ -periódica na variável  $\theta$ .

Calculando a média, obtemos:

$$g_1^0(\bar{r}, \bar{z}) = \frac{1}{2} a \bar{r} (1 + 2\bar{z}).$$

$$g_3^0(\bar{r}, \bar{z}) = \frac{1}{2} (-a(\bar{r}^2 + 2\bar{z}^2) + 2b\bar{z}).$$

Daí, as equações da média ficam:

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}} = \varepsilon \frac{1}{2} a \bar{r} (1 + 2\bar{z}), \\ \dot{\bar{z}} = \varepsilon \frac{1}{2} (-a(\bar{r}^2 + 2\bar{z}^2) + 2b\bar{z}). \end{cases} \quad (3.11)$$

Os pontos críticos da equação (3.11) são:

$$(r_0, z_0) = (0, 0),$$

$$(r_1, z_1) = \left(0, \frac{b}{a}\right),$$

$$(r_2, z_2) = \left(-\sqrt{\frac{-a-2b}{2a}}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$(r_3, z_3) = \left(\sqrt{\frac{-a-2b}{2a}}, -\frac{1}{2}\right).$$

Suponha  $a > 0$  temos:

$$(a+2b)a < 0 \Leftrightarrow a+2b < 0 \Leftrightarrow -a-2b > 0 \Leftrightarrow \frac{-a-2b}{2a} > 0.$$

Portanto,  $r_2$  e  $r_3 \in \mathbb{R}$ . Logo, o único ponto crítico da equação (3.11) tal que  $\bar{r} > 0$  é:

$$(r_3, z_3) = \left(\sqrt{\frac{-a-2b}{2a}}, -\frac{1}{2}\right) := (r^*, z^*).$$

Agora, se mostrarmos que o determinante da Jacobiana de  $f^0$  em  $(r^*, z^*)$  é não nulo, poderemos garantir pelo Teorema 2.3.1, a existência de uma órbita  $2\pi$ -periódica. Temos:

$$J(f^0(\bar{r}, \bar{z})) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + az & ar \\ -ar & -2az + b \end{pmatrix}.$$

Então,

$$J(f^0(r^*, z^*)) = \begin{pmatrix} 0 & a\sqrt{\frac{-a-2b}{2a}} \\ -a\sqrt{\frac{-a-2b}{2a}} & a+b \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\det(J(f^0(r^*, z^*))) = -\frac{1}{2}a(a+2b) > 0, \text{ pois } (a+2b)a < 0.$$

Segue do Teorema 2.3.1 que existe

$$\alpha_\varepsilon = \{(r(\theta, \varepsilon), z(\theta, \varepsilon)) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

solução  $2\pi$ -periódica de (3.10) tal que:

$$\alpha_\varepsilon \rightarrow (r^*, z^*) \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Portanto, pelo Teorema 1.2.27 (da Redução), segue que o sistema (3.9) tem uma solução

$$(r(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$$

tal que

$$r(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = r(t, \varepsilon),$$

$$\theta(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = \theta(t, \varepsilon) + 2\pi,$$

$$z(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = z(t, \varepsilon).$$

Assim, como (3.9) veio de (3.8), segue que:

$$X(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = r(t + T(\varepsilon), \varepsilon) \cos(\theta(t + T(\varepsilon), \varepsilon))$$

$$= r(t, \varepsilon) \cos(\theta(t, \varepsilon) + 2\pi)$$

$$= r(t, \varepsilon) \cos(\theta(t, \varepsilon)) = X(t, \varepsilon),$$

$$Y(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = r(t + T(\varepsilon), \varepsilon) \sin(\theta(t + T(\varepsilon), \varepsilon))$$

$$= r(t, \varepsilon) \sin(\theta(t, \varepsilon) + 2\pi)$$

$$= r(t, \varepsilon) \sin(\theta(t, \varepsilon)) = Y(t, \varepsilon),$$

$$Z(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = z(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = z(t, \varepsilon) = Z(t, \varepsilon).$$

Portanto, a solução

$$(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon))$$

de (3.5) é  $T(\varepsilon)$ -periódica em  $t$ . Segue do Teorema 1.2.27 (da Redução) e da fórmula de Taylor em torno de  $\varepsilon = 0$  que  $T(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$ . E ainda,

$$(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon)) \rightarrow \{Z = z^*\} \cap \{X^2 + Y^2 = (r^*)^2\}$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Logo, voltando em (3.4), obtemos que:

$$\gamma_\varepsilon = (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$$

onde

$$x(t, \varepsilon) = Y(t, \varepsilon), \quad y(t, \varepsilon) = -X(t, \varepsilon) - Z(t, \varepsilon) \text{ e } z(t, \varepsilon) = Z(t, \varepsilon)$$

é solução  $T(\varepsilon)$ -periódica de (3.3) com  $T(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$  tal que

$$\gamma_\varepsilon \rightarrow \{z = z^*\} \cap \{(-y - z)^2 + x^2 = (r^*)^2\}$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Isto é,

$$\gamma_\varepsilon \rightarrow \left\{ z = -\frac{1}{2} \right\} \cap \left\{ (y + z)^2 + x^2 = \frac{-2b - a}{2a} \right\}$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Agora, vamos encontrar os autovalores de  $J(f^0(r^*, z^*))$ .

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(J(f^0(r^*, z^*)) - \lambda I) \\ &= \lambda^2 + (-a - b)\lambda - \frac{1}{2}(a + 2b)a. \end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= a + b, \\ \lambda_1 \lambda_2 &= -\frac{1}{2}a(a + 2b) > 0. \end{cases}$$

(1) Se  $\lambda_1, \lambda_2$  forem reais então

$$\lambda_1 \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ tem o mesmo sinal.}$$

- (i) Se  $a + b < 0$  então  $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$  e como  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tem o mesmo sinal, segue que  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2 < 0$ . Pelo Teorema 2.3.2,  $\gamma_\varepsilon$  é assintoticamente estável.
- (ii) Se  $a + b > 0$  então  $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$  e como  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tem o mesmo sinal, segue que  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 > 0$ . Pelo Teorema 2.3.2,  $\gamma_\varepsilon$  é instável.

Da fórmula de Baskhara, temos:

$$\begin{cases} \lambda_1 &= \frac{a + b + \sqrt{3a^2 + 6ab + b^2}}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{a + b - \sqrt{3a^2 + 6ab + b^2}}{2}. \end{cases}$$

(2) Se  $\lambda_1, \lambda_2$  forem complexos então

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = \frac{a + b}{2}.$$

- (i) Se  $a + b < 0$  então pelo Teorema 2.3.2,  $\gamma_\varepsilon$  é assintoticamente estável.
- (ii) Se  $a + b > 0$  então pelo Teorema 2.3.2,  $\gamma_\varepsilon$  é instável.

Observe que se  $a + b = 0$  então  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Daí,

$$\lambda_1 \lambda_2 = a(a + 2b) = 0$$

e isso não ocorre pois supomos  $a(a + 2b) < 0$ . ■

**Observação 3.2.2** Note que  $\left\{z = -\frac{1}{2}\right\} \cap \left\{(y + z)^2 + x^2 = \frac{-2b - a}{2a}\right\}$  é a interseção de um plano e um cilindro, o que nos dá:

$$\left\{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-a - 2b}{2a}\right\}$$

que é a circunferência de centro  $p = \left(0, \frac{1}{2}\right)$  e raio  $r = \sqrt{\frac{-a - 2b}{2a}}$  no plano  $z = -\frac{1}{2}$ .

### 3.3 Órbitas periódicas em torno de pontos de equilíbrio não triviais

Considere os novos parâmetros:

$$\alpha = \varepsilon(2a - 1 + a^2\varepsilon^2) \text{ e } \beta = \varepsilon(1 - a)$$

onde  $a \in \mathbb{R}$ . Observemos que neste caso

$$f_\varepsilon(a) = (\varepsilon(2a - 1 + a^2\varepsilon^2), \varepsilon(1 - a)).$$

Vamos provar no próximo teorema que o sistema (3.1) com estes parâmetros admite uma órbita periódica.

**Teorema 3.3.1** *Considere o sistema de Rössler:*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x, \\ \dot{z} &= \varepsilon[(2a - 1 + a^2\varepsilon^2)y(1 - y) - (1 - a)z] \end{cases} \quad (3.12)$$

satisfazendo  $a > \frac{1}{2}$ . Então, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno existe uma solução periódica  $\gamma_\varepsilon$  de (3.12) com período  $T(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$  tal que  $\gamma_\varepsilon \rightarrow \left\{z = -\frac{1}{2}\right\} \cap \left\{x^2 + (y + z)^2 = \frac{1}{2(2a - 1)}\right\}$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Mais ainda,  $\gamma_\varepsilon$  é assintoticamente estável quando  $\frac{1}{2} < a < 1$  e instável quando  $a > 1$ .

**Demonstração:** Os pontos críticos da equação (3.12) são:

$$(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0),$$

$$(x_2, y_2, z_2) = \left(0, \frac{a(1 + a\varepsilon^2)}{a(2 + a\varepsilon^2) - 1}, -\frac{a(1 + a\varepsilon^2)}{a(2 + a\varepsilon^2) - 1}\right).$$

Note que se  $a \neq \frac{1}{2}$  então  $2a - 1 \neq 0$ . Assim, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno:

$$2a - 1 + a^2\varepsilon^2 = a(2 + a\varepsilon^2) - 1 \neq 0.$$

Linearizando o sistema (3.12) no ponto de equilíbrio

$$(x_2, y_2, z_2) = \left(0, \frac{a(1 + a\varepsilon^2)}{a(2 + a\varepsilon^2) - 1}, -\frac{a(1 + a\varepsilon^2)}{a(2 + a\varepsilon^2) - 1}\right)$$

encontramos o seguinte polinômio característico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -\lambda^3 + (a - 1)\varepsilon\lambda^2 - \lambda + (a\varepsilon + a^2\varepsilon^3) \\ &= (a\varepsilon - \lambda)(\lambda^2 + \varepsilon\lambda + a\varepsilon^2 + 1). \end{aligned}$$

Vamos transladar o ponto de equilíbrio  $(x_2, y_2, z_2)$  à origem:

$$\begin{cases} u = x - x_2, \\ v = y - y_2, \\ w = z - z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u + x_2, \\ y = v + y_2, \\ z = w + z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u, \\ y = v + \frac{a(1 + a\varepsilon^2)}{a(2 + a\varepsilon^2) - 1}, \\ z = w - \frac{a(1 + a\varepsilon^2)}{a(2 + a\varepsilon^2) - 1}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Ficamos com as equações:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v - w, \\ \dot{v} = u, \\ \dot{w} = -\varepsilon[(\varepsilon^2 a^2 + 1)v + (1 - a)w + (\varepsilon^2 a^1 + 2a - 1)v^2]. \end{cases} \quad (3.14)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

obtemos as equações:

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X - \varepsilon[(\varepsilon^2 a^2 + 1)(Y - Z) + (1 - a)Z + (\varepsilon^2 a^2 + 2a - 1)(Y - Z)^2], \\ \dot{Z} = -\varepsilon[(\varepsilon^2 a^2 + 1)(Y - Z) + (1 - a)Z + (\varepsilon^2 a^2 + 2a - 1)(Y - Z)^2]. \end{cases}$$

Note que:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon^2 a^2 + 1)(Y - Z) + (1 - a)Z + (\varepsilon^2 a^1 + 2a - 1)(Y - Z)^2 \\ &= Y + (2a - 1)Y^2 + ((-4a + 2)Y - a)Z + (2a - 1)Z^2 + O(\varepsilon^2) \\ &= -[(1 - 2a)Y^2 + Z(a + Z - 2aZ) + Y((2a - 1)2Z - 1)] + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X + \varepsilon f(X, Y, Z) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{Z} = \varepsilon f(X, Y, Z) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.16)$$

onde:

$$f(X, Y, Z) = (1 - 2a)Y^2 + Z(a + (1 - 2a)Z) + Y((2a - 1)2Z - 1).$$

Agora faremos a mudança de coordenadas cilíndricas  $(X, Y, Z) \longrightarrow (\theta, r, z)$  tal que:

$$\begin{cases} X &= r \cos \theta, \\ Y &= r \sin \theta, \\ Z &= z. \end{cases} \quad (3.17)$$

Seguindo o raciocínio análogo ao usado na demonstração do Teorema 3.2.1, obtemos as equações:

$$\begin{cases} \dot{r} &= \varepsilon g_1(\theta, r, z) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon g_2(\theta, r, z) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{z} &= \varepsilon g_3(\theta, r, z) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.18)$$

onde

$$g_1(\theta, r, z) = \sin \theta \, g_3(\theta, r, z),$$

$$g_2(\theta, r, z) = \frac{\cos \theta}{r} \, g_3(\theta, r, z),$$

$$g_3(\theta, r, z) = a(z + a - 2az) + r \sin \theta [2z(2a - 1) - 1 + r \sin \theta (1 - 2a)].$$

Observe que o sistema (3.18) está na forma de (1.36) do Teorema 1.2.27 (da Redução). Novamente, análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.2.1, basta investigar a existência da órbita periódica do sistema:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{r}}{d\theta} = \varepsilon g_1(\theta, \bar{r}, \bar{z}) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{d\bar{z}}{d\theta} = \varepsilon g_3(\theta, \bar{r}, \bar{z}) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.19)$$

com

$$g_1(\theta, r, z) = \sin \theta \, g_3(\theta, r, z),$$

$$g_3(\theta, r, z) = a(z + a - 2az) + r \sin \theta [2z(2a - 1) - 1 + r \sin \theta (1 - 2a)]$$

onde  $\theta$  é a nova variável independente. Vejamos que o sistema (3.19) satisfaz as condições dos Teoremas 2.3.1 e 2.3.2:

$$\begin{aligned} f(\theta, \bar{r}, \bar{z}) &= \begin{pmatrix} g_1(\theta, \bar{r}, \bar{z}) \\ g_3(\theta, \bar{r}, \bar{z}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \theta [\bar{z}(a + \bar{z} - 2a\bar{z}) + \bar{r} \sin \theta [2\bar{z}(1 - 2a) - 1 + \bar{r} \sin \theta (1 - 2a)]] \\ \bar{z}(a + \bar{z} - 2a\bar{z}) + \bar{r} \sin \theta [2\bar{z}(1 - 2a) - 1 + \bar{r} \sin \theta (1 - 2a)] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

está definida, é contínua e limitada por uma constante que independe de  $\varepsilon$ , quando  $\bar{r}$  e  $\bar{z}$  são limitadas, assim como  $\frac{\partial f}{\partial(\bar{r}, \bar{z})}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial(\bar{r}, \bar{z})^2}$ . É imediato que  $f(\theta, \bar{r}, \bar{z})$  é  $2\pi$ -periódica na variável  $\theta$ .

Calculando as médias, obtemos:

$$\begin{aligned} g_1^0(\bar{r}, \bar{z}) &= \frac{1}{2} \bar{r} (2\bar{z}(2a-1) - 1), \\ g_2^0(\bar{r}, \bar{z}) &= \frac{1}{2} [\bar{r}^2(1-2a) + 2\bar{z}(a + \bar{z} - 2a\bar{z})]. \end{aligned}$$

Daí, as equações da média ficam:

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}} &= \frac{\varepsilon}{2} \bar{r} (2\bar{z}(2a-1) - 1), \\ \dot{\bar{z}} &= \frac{\varepsilon}{2} [\bar{r}^2(1-2a) + 2\bar{z}(a + \bar{z} - 2a\bar{z})]. \end{cases} \quad (3.20)$$

Os pontos críticos da equação (3.20) são:

$$\begin{aligned} (r_0, z_0) &= (0, 0), \\ (r_1, z_1) &= \left(0, \frac{a}{2a-1}\right), \\ (r_2, z_2) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2(2a-1)}}, \frac{1}{2(2a-1)}\right), \\ (r_3, z_3) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2(2a-1)}}, \frac{1}{2(2a-1)}\right). \end{aligned}$$

Note que:

$$2(2a-1) > 0$$

pois:

$$a > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4a > 2 \Leftrightarrow 2(2a-1) > 0.$$

Portanto,  $r_2$  e  $r_3 \in \mathbb{R}$ . Logo, o único ponto crítico da equação (3.20) tal que  $\bar{r} > 0$  é:

$$(r_3, z_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2(2a-1)}}, \frac{1}{2(2a-1)}\right) := (r^*, z^*).$$

A jacobiana de  $f^0(r^*, z^*)$  fica:

$$J(f^0(r^*, z^*)) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a - \frac{1}{2}} \\ -\sqrt{a - \frac{1}{2}} & a - 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\det(J(f^0(r^*, z^*))) = a - \frac{1}{2} > 0, \text{ pois } a > \frac{1}{2}.$$

Assim, do Teorema 2.3.1 segue que existe

$$\alpha_\varepsilon = \{(r(\theta, \varepsilon), z(\theta, \varepsilon)) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

solução  $2\pi$ –periódica de (3.19) tal que:

$$\alpha_\varepsilon \rightarrow (r^*, z^*) \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Portanto, pelo Teorema 1.2.27 (da Redução), segue que o sistema (3.18) tem uma solução

$$(r(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$$

tal que

$$r(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = r(t, \varepsilon),$$

$$\theta(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = \theta(t, \varepsilon) + 2\pi,$$

$$z(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = z(t, \varepsilon).$$

Assim, como (3.18) veio de (3.17), segue que:

$$X(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = r(t + T(\varepsilon), \varepsilon) \cos(\theta(t + T(\varepsilon), \varepsilon))$$

$$= r(t, \varepsilon) \cos(\theta(t, \varepsilon) + 2\pi)$$

$$= r(t, \varepsilon) \cos(\theta(t, \varepsilon)) = X(t, \varepsilon),$$

$$Y(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = r(t + T(\varepsilon), \varepsilon) \sin(\theta(t + T(\varepsilon), \varepsilon))$$

$$= r(t, \varepsilon) \sin(\theta(t, \varepsilon) + 2\pi)$$

$$= r(t, \varepsilon) \sin(\theta(t, \varepsilon)) = Y(t, \varepsilon),$$

$$Z(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = z(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = z(t, \varepsilon) = Z(t, \varepsilon).$$

Portanto, a solução

$$(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon))$$

de (3.16) é  $T(\varepsilon)$ –periódica em  $t$ . Segue do Teorema 1.2.27 (da Redução) e da fórmula de Taylor em torno de  $\varepsilon = 0$  que  $T(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$ . E ainda,

$$(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon)) \rightarrow \{Z = z^*\} \cap \{X^2 + Y^2 = (r^*)^2\}$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Logo, voltando em (3.15), obtemos que:

$$(u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon))$$

onde

$$u(t, \varepsilon) = X(t, \varepsilon), \quad v(t, \varepsilon) = Y(t, \varepsilon) - Z(t, \varepsilon) \text{ e } w(t, \varepsilon) = Z(t, \varepsilon)$$

é solução  $T(\varepsilon)$ –periódica de (3.14) com  $T(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$  tal que

$$(u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon)) \rightarrow \{w = z^*\} \cap \{u^2 + (v + w)^2 = (r^*)^2\}$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Finalmente, voltando em (3.13), obtemos que:

$$\gamma_\varepsilon = (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$$

onde

$$x(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon),$$

$$y(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) + \frac{a(1 + a\varepsilon^2)}{a(2 + a\varepsilon^2) - 1},$$

$$z(t, \varepsilon) = w(t, \varepsilon) - \frac{a(1 + a\varepsilon^2)}{a(2 + a\varepsilon^2) - 1}$$

é solução  $T(\varepsilon)$ –periódica de (3.12) com  $T(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$  tal que

$$\gamma_\varepsilon \rightarrow \left\{ z + \frac{a}{2a-1} = z^* \right\} \cap \left\{ x^2 + \left( y - \frac{a}{2a-1} + z + \frac{a}{2a-1} \right)^2 = (r^*)^2 \right\}$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Isto é,

$$\gamma_\varepsilon \rightarrow \left\{ z = -\frac{1}{2} \right\} \cap \left\{ (y + z)^2 + x^2 = \frac{1}{2(2a-1)} \right\}$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Vamos encontrar os autovalores de  $J(f^0(r^*, z^*))$ .

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(J(f^0(r^*, z^*)) - \lambda I) \\ &= \lambda^2 + (1-a)\lambda + a - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= a - 1, \\ \lambda_1 \lambda_2 &= a - \frac{1}{2} > 0. \end{cases}$$

(1) Se  $\lambda_1, \lambda_2$  forem reais então

$$\lambda_1 \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ tem o mesmo sinal.}$$

(i) Se  $\frac{1}{2} < a < 1$  então  $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$  e como  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tem o mesmo sinal, segue que  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2 < 0$ . Pelo Teorema 2.3.2,  $\gamma_\varepsilon$  é assintoticamente estável.

- (ii) Se  $a > 1$  então  $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$  e como  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tem o mesmo sinal, segue que  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 > 0$ . Pelo Teorema 2.3.2,  $\gamma_\varepsilon$  é instável.

Da fórmula de Baskhara, temos:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{a-1+\sqrt{a^2-6ab+3}}{2}, \\ \lambda_2 = \frac{a-1-\sqrt{a^2-6ab+3}}{2}. \end{cases}$$

- (2) Se  $\lambda_1, \lambda_2$  forem complexos então

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = \frac{a-1}{2}.$$

- (i) Se  $\frac{1}{2} < a < 1$  então pelo Teorema 2.3.2,  $\gamma_\varepsilon$  é assintoticamente estável.

- (ii) Se  $a > 1$  então pelo Teorema 2.3.2,  $\gamma_\varepsilon$  é instável.

Observe que:

$$a = 1 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

e por terem o mesmo sinal, segue que:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Daí,  $a = \frac{1}{2}$  o que é um absurdo.

■

**Observação 3.3.2** Se  $a < \frac{1}{2}$  no teorema acima, teríamos apenas dois pontos críticos, a saber:  $(r_0, z_0)$  e  $(r_1, z_1)$  onde  $r_0 = r_1 = 0$ .

**Observação 3.3.3** Note que  $\left\{z = -\frac{1}{2}\right\} \cap \left\{x^2 + (y+z)^2 = \frac{1}{2(2a-1)}\right\}$  é a interseção de um plano e um cilindro, o que nos dá:

$$\left\{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2(2a-1)}\right\}$$

que é uma circunferência de centro  $p = \left(0, \frac{1}{2}\right)$  e raio  $r = \sqrt{\frac{1}{2(2a-1)}}$  no plano  $z = -\frac{1}{2}$ .

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## DINÂMICA DE UM SISTEMA HAMILTONIANO GALÁCTICO

### 4.1 O sistema hamiltoniano

Aqui analizaremos as equações hamiltonianas associadas ao hamiltoniano:

$$H = H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \varepsilon(aq_1^4 + bq_1^2q_2^2 + cq_2^4) \quad (4.1)$$

onde  $a, b$  e  $c$  são reais não nulos. Usando a Teoria da Média vamos demonstrar a existência de duas famílias de órbitas periódicas destas equações hamiltonianas para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Os resultados a seguir podem ser encontrados em [6]. O sistema hamiltoniano é dado por:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Usando (4.1), obtemos:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = p_1, \\ \dot{q}_2 = p_2, \\ \dot{p}_1 = -q_1 - \varepsilon(4aq_1^3 + 2bq_1q_2^2), \\ \dot{p}_2 = -q_2 - \varepsilon(2bq_2q_1^2 + 4cq_2^3). \end{cases} \quad (4.3)$$

Como usualmente, o ponto denota a derivada com respeito a variável independente  $t$ , do tempo. Estudaremos as órbitas periódicas do sistema (4.3) onde  $r = \sqrt{q_1^2 + p_1^2}$  e

$$\rho = \sqrt{q_2^2 + p_2^2}.$$

Um resultado bem conhecido é o seguinte:

**Lema 4.1.1**  *$H$  é constante ao longo de cada solução de (4.2).*

**Demonstração:** Usando (4.1) e (4.2), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t}(q_1, q_2, p_1, p_2) &= \frac{\partial H}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial H}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2} \dot{p}_2 \\ &= -\dot{p}_1 \dot{q}_1 - \dot{p}_2 \dot{q}_2 + \dot{q}_1 \dot{p}_1 + \dot{q}_2 \dot{p}_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Como a derivada de  $H$  é zero, segue que:

$$H(q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t)) = H(q_1(0), q_2(0), p_1(0), p_2(0))$$

onde  $H(q_1(0), q_2(0), p_1(0), p_2(0))$  é uma constante.

■

**Definição 4.1.2** *Dado  $h > 0$ , temos que o conjunto:*

$$\{(q_1, q_2, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^4 : H(q_1, q_2, p_1, p_2) = h\}$$

*é uma hipersuperfície de  $\mathbb{R}^4$  que é denominada superfície de energia  $h$ .*

As soluções de (4.3) serão indicadas por:

$$(q_1(t, \varepsilon), q_2(t, \varepsilon), p_1(t, \varepsilon), p_2(t, \varepsilon))$$

e ainda,

$$\begin{aligned} r(t, \varepsilon) &= \sqrt{q_1^2(t, \varepsilon) + p_1^2(t, \varepsilon)}, \\ \rho(t, \varepsilon) &= \sqrt{q_2^2(t, \varepsilon) + p_2^2(t, \varepsilon)}. \end{aligned}$$

## 4.2 Caso 1: $r \neq 0$ e $\rho \neq 0$

Primeiramente, vamos analisar o caso em que:

$$\begin{cases} q_1(0, \varepsilon)^2 + p_1(0, \varepsilon)^2 \neq 0, \\ q_2(0, \varepsilon)^2 + p_2(0, \varepsilon)^2 \neq 0. \end{cases}$$

**Proposição 4.2.1** Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno e  $H = h > 0$  o sistema hamiltoniano perturbado (4.3) tem duas soluções periódicas, como se segue:

$$(a) \text{ A primeira órbita de (4.3) tem período } T(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon) \text{ e } r(t, 0) = \sqrt{\frac{(6c-b)h}{3a-b+3c}} \\ \text{ e } \rho(t, 0) = \sqrt{\frac{(6a-b)h}{3a-b+3c}} \text{ quando } \begin{cases} (6a-b), (6c-b), (3a-b+3c) > 0, & \text{se } b < 0 \\ (6a-b), (6c-b), (3a-b+3c) < 0, & \text{se } b > 0. \end{cases}$$

$$(b) \text{ A segunda órbita de (4.3) tem período } T(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon) \text{ e } r(t, 0) = \sqrt{\frac{(2c-b)h}{a-b+c}} \text{ e } \\ \rho(t, 0) = \sqrt{\frac{(2a-b)h}{a-b+c}} \text{ quando } \begin{cases} (2a-b), (2c-b), (a-b+c) < 0, & \text{se } b < 0 \\ (2a-b), (2c-b), (a-b+c) > 0, & \text{se } b > 0. \end{cases}$$

Além disso, as órbitas são instáveis.

**Demonstração:** A fim de preparar a aplicação do Método da Média, faremos uma mudança para coordenadas polares convenientes. Considere:  $(q_1, q_2, p_1, p_2) \longrightarrow (r, \theta, \rho, \alpha) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , dada por:

$$\begin{cases} q_1 &= r \cos \theta, \\ p_1 &= r \sin \theta, \\ q_2 &= \rho \cos(\theta + \alpha), \\ p_2 &= \rho \sin(\theta + \alpha). \end{cases} \quad (4.4)$$

Derivando e substituindo em (4.3), obtemos as seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{r} &= -2\varepsilon r \cos \theta \sin \theta (2ar^2 \cos^2 \theta + b\rho^2 \cos^2(\theta + \alpha)), \\ \dot{\rho} &= -2\varepsilon \rho \cos(\theta + \alpha) \sin(\theta + \alpha) (br^2 \cos^2 \theta + 2c\rho^2 \cos^2(\theta + \alpha)), \\ \dot{\theta} &= -1 - 2\varepsilon \cos^2 \theta (2ar^2 \cos^2 \theta + b\rho^2 \cos^2(\theta + \alpha)), \\ \dot{\alpha} &= \varepsilon (4ar^2 \cos^4 \theta + 2b(\rho^2 - r^2) \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \alpha) - 4c\rho^2 \cos^4(\theta + \alpha)). \end{cases} \quad (4.5)$$

Seja  $\mathcal{H}(r, \rho, \theta, \alpha) = H(r \cos \theta, \rho \cos(\theta + \alpha), r \sin \theta, \rho \sin(\theta + \alpha))$ , assim:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(r, \rho, \theta, \alpha) &= \frac{1}{2}(r^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2(\theta + \alpha) + r^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \cos^2(\theta + \alpha)) \\ &\quad + \varepsilon(ar^4 \cos^4 \theta + br^2 \cos^2 \theta \rho^2 \cos^2(\theta + \alpha) + c\rho^4 \cos^4(\theta + \alpha)) \\ &= \frac{1}{2}(r^2 + \rho^2) + \varepsilon(ar^4 \cos^4 \theta + br^2 \cos^2 \theta \rho^2 \cos^2(\theta + \alpha) + c\rho^4 \cos^4(\theta + \alpha)). \end{aligned}$$

Como para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno temos que  $\dot{\theta} < 0$ , o sistema (4.5) está bem definido e está na forma do sistema (1.36) do Teorema 1.2.27 (da Redução). Seguindo o raciocínio análogo ao usado na demonstração de Teorema 3.2.1, obtemos que basta investigar a existência da órbita periódica do sistema:

$$\begin{cases} \bar{r}' &= \varepsilon g_1(\theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{\rho}' &= \varepsilon g_2(\theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{\alpha}' &= \varepsilon g_3(\theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (4.6)$$

onde:

$$g_1(\theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) = 2\bar{r} \cos \theta \sin \theta (2a\bar{r}^2 \cos^2 \theta + b\bar{\rho}^2 \cos^2(\theta + \bar{\alpha})),$$

$$g_2(\theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) = 2\bar{\rho} \cos(\theta + \bar{\alpha}) \sin(\theta + \bar{\alpha}) (b\bar{r}^2 \cos^2 \theta + 2c\bar{\rho}^2 \cos^2(\theta + \bar{\alpha})),$$

$$g_3(\theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) = -[4a\bar{r}^2 \cos^4 \theta + 2b(\bar{\rho}^2 - \bar{r}^2) \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \bar{\alpha}) - 4c\bar{\rho}^2 \cos^4(\theta + \bar{\alpha})].$$

Seja  $\bar{\mathcal{H}}(\theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) = \mathcal{H}(\theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha})$ , isto é,

$$\bar{\mathcal{H}}(\theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) = \frac{1}{2}(\bar{r}^2 + \bar{\rho}^2) + \varepsilon(a\bar{r}^4 \cos^4 \theta + b\bar{r}^2 \bar{\rho}^2 \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \bar{\alpha}) + c\bar{\rho}^4 \cos^4(\theta + \bar{\alpha})).$$

Vamos estudar o sistema diferencial (4.6) em  $\bar{\mathcal{H}} = h > 0$  (veja Lema 4.1.1).

Considere

$$\begin{cases} 0 < \varepsilon_0 < \min \left\{ \frac{1}{2M}, \frac{9h}{16}, \frac{1}{M} \sqrt{\frac{3h}{8}} \right\}, \\ 0 \leq r_0 < r_1 \leq \frac{\sqrt{2h}}{2}, \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3h}{2}} \leq \rho_0 < \rho_1 \leq \sqrt{2h+1}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Defina:

$$g : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \mathbb{R} \times (r_0, r_1) \times (\rho_0, \rho_1) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que}$$

$$g(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) = \frac{1}{2}(\bar{r}^2 + \bar{\rho}^2) + \varepsilon F(\theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) - h$$

onde  $F(\theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) = a\bar{r}^4 \cos^4 \theta + b\bar{r}^2 \bar{\rho}^2 \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \bar{\alpha}) + c\bar{\rho}^4 \cos^4(\theta + \bar{\alpha})$ . Temos:

(1)  $g \in C^1$

(2) Pela definição da  $F$  e por (4.7), temos:

$$\begin{aligned} |F(\theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha})| &\leq |a\bar{r}^4| + |b\bar{r}^2 \bar{\rho}^2| + |c\bar{\rho}^4| \\ &\leq |a||\bar{r}^4| + |b||\bar{r}^2||\bar{\rho}^2| + |c||\bar{\rho}^4| \\ &\leq |a| \left( \frac{\sqrt{2h}}{2} \right)^4 + |b| \left( \frac{\sqrt{2h}}{2} \right)^2 (2h+1) + |c|(2h+1)^2 := M. \end{aligned}$$

(3) Pela definição da  $g$  e por (2), temos:

$$\begin{aligned}
g(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) &\geq \left| \frac{1}{2}(\bar{r}^2 + \bar{\rho}^2) - h \right| - |\varepsilon| |F(\theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha})| \\
&\geq \left| \frac{1}{2}(\bar{r}^2 + \bar{\rho}^2) - h \right| - \varepsilon_0 M \\
&\geq \frac{1}{2}(\bar{r}^2 + \bar{\rho}^2) - h - \varepsilon_0 M \\
&\geq \frac{1}{2}(r_0^2 + \bar{\rho}^2) - h - \varepsilon_0 M.
\end{aligned}$$

(4) Então, como  $r_0 \geq 0$  e fazendo  $\rho_1 = \sqrt{2h+1}$ , temos:

$$\begin{aligned}
\limsup_{\bar{\rho} \rightarrow \rho_1^-} g(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) &\geq \frac{1}{2}(r_0^2 + \rho_1^2) - h - \varepsilon_0 M \\
&\geq \frac{1}{2}(2h+1) - h - \varepsilon_0 M \\
&\geq \frac{1}{2} - \varepsilon_0 M > 0
\end{aligned}$$

por (4.7).

(5) Por outro lado,

$$\begin{aligned}
g(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) &\leq \frac{1}{2}(\bar{r}^2 + \bar{\rho}^2) - h + \varepsilon_0 M \\
&\leq \frac{1}{2}(r_1^2 + \bar{\rho}^2) - h + \varepsilon_0 M.
\end{aligned}$$

(6) Então, como  $r_1 \leq \sqrt{\frac{2h}{4}}$  e fazendo  $\rho_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3h}{2}}$ , temos:

$$\begin{aligned}
\liminf_{\bar{\rho} \rightarrow \rho_0^+} g(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) &\leq \frac{1}{2}(r_1^2 + \rho_0^2) - h + \varepsilon_0 M \\
&\leq \frac{-3h}{4} + \frac{3h}{16} + \varepsilon_0 M \\
&\leq \frac{-9h}{16} + \varepsilon_0 M < 0
\end{aligned}$$

por (4.7).

(7) Note que:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{\rho}}(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) = \bar{\rho} + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial \bar{\rho}}(\theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}).$$

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(\theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) = 2b\bar{r}^2\bar{\rho} \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \bar{\alpha}) + 4c\bar{\rho}^3 \cos^4(\theta + \bar{\alpha})$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial F}{\partial \rho}(\theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) \right| \leq 2|b||\bar{r}^2||\bar{\rho}| + 4|c||\bar{\rho}^3| \leq |b|h\sqrt{2h+1} + 4|c|(\sqrt{2h+1})^3 := M_1.$$

Daí,

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{\rho}}(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) \geq |\bar{\rho}| - |\varepsilon|M_1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \bar{\rho}}(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) \geq \bar{\rho} - \varepsilon_0 M_1 > \bar{\rho}_0 - \varepsilon_0 M_1 > 0, \text{ por (4.7).}$$

Isto é,

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{\rho}}(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) \neq 0.$$

Portanto, por (4), (6) e (7) podemos aplicar o Teorema 1.1.21 (Aplicação Implícita Global). Logo, existe

$$\tilde{\rho} : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \mathbb{R} \times (r_0, r_1) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

de classe  $C^1$  tal que  $g(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \tilde{\rho}(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\alpha}), \bar{\alpha}) = 0$ . Note que  $g$  é  $2\pi$ -periódica em  $\theta$ . Daí, como  $\tilde{\rho}(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\alpha}) \in (\rho_0, \rho_1)$  é o único tal que

$$g(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \tilde{\rho}(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\alpha}), \bar{\alpha}) = 0$$

e como

$$g(\varepsilon, \theta + 2\pi, \bar{r}, \tilde{\rho}(\varepsilon, \theta + 2\pi, \bar{r}, \bar{\alpha}), \bar{\alpha}) = g(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \tilde{\rho}(\varepsilon, \theta + 2\pi, \bar{r}, \bar{\alpha}), \bar{\alpha})$$

segue que:

$$\tilde{\rho}(\varepsilon, \theta + 2\pi, \bar{r}, \bar{\alpha}) = \tilde{\rho}(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\alpha}). \quad (4.8)$$

Portanto,  $\tilde{\rho}$  é  $2\pi$ -periódica em  $\theta$ . Da Fórmula de Taylor em torno de  $\varepsilon = 0$ , temos:

$$\tilde{\rho}(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\alpha}) = \tilde{\rho}(0, \theta, \bar{r}, \bar{\alpha}) + \varepsilon \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \varepsilon}(0, \theta, \bar{r}, \bar{\alpha}) + O(\varepsilon^2).$$

Como

$$g(0, \theta, \bar{r}, \tilde{\rho}(0, \theta, \bar{r}, \bar{\alpha}), \bar{\alpha}) = \frac{1}{2}(\bar{r}^2 + \tilde{\rho}(0, \theta, \bar{r}, \bar{\alpha})^2) - h = 0$$

então

$$\tilde{\rho}(0, \theta, \bar{r}, \bar{\alpha}) = \sqrt{2h - \bar{r}^2}.$$

Portanto,

$$\tilde{\rho}(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\alpha}) = \sqrt{2h - \bar{r}^2} + O(\varepsilon).$$

Isto é,

$$\bar{\rho} = \sqrt{2h - \bar{r}^2} + O(\varepsilon). \quad (4.9)$$

Agora vamos reescrever as equações diferenciais  $\bar{r}'$  e  $\bar{\alpha}'$  de (4.6) substituindo nelas a expressão (4.9) e vamos expandir em Taylor com relação à  $\varepsilon$ . Obtemos o sistema diferencial:

$$\begin{cases} \bar{r}' = \varepsilon F_{11}(\theta, \bar{r}, \bar{\alpha}) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{\alpha}' = \varepsilon F_{12}(\theta, \bar{r}, \bar{\alpha}) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (4.10)$$

onde:

$$F_{11}(\theta, \bar{r}, \bar{\alpha}) = (-2b\bar{r}^3 \cos \theta \sin \theta + 4bh\bar{r} \cos \theta \sin \theta) \cos^2(\theta + \bar{\alpha}) + 4a\bar{r}^3 \cos^3 \theta \sin \theta,$$

$$F_{12}(\theta, \bar{r}, \bar{\alpha}) = (-4c\bar{r}^2 + 8ch) \cos^4(\theta + \bar{\alpha}) + (4b\bar{r}^2 - 4bh) \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \bar{\alpha}) - 4a\bar{r}^2 \cos^4 \theta.$$

Agora vejamos que o sistema (4.10) satisfaz as hipóteses dos Teoremas 2.3.1 e 2.3.2:

$$F(\theta, \bar{r}, \bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} F_{11}(\theta, \bar{r}, \bar{\alpha}) \\ F_{12}(\theta, \bar{r}, \bar{\alpha}) \end{pmatrix}$$

está definida, é contínua e limitada por uma constante que independe de  $\varepsilon$ , desde que  $\bar{r}$  seja limitado, assim como  $\frac{\partial F}{\partial(\bar{r}, \bar{\alpha})}$  e  $\frac{\partial^2 F}{\partial(\bar{r}, \bar{\alpha})^2}$ . É imediato que  $F(\theta, \bar{r}, \bar{\alpha})$  é  $2\pi$ -periódica na variável  $\theta$ .

Calculando as médias:

$$F_{11}^0(\bar{r}, \bar{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{11} d\theta = -\frac{1}{2} b\bar{r}(2h - \bar{r}^2) \cos \bar{\alpha} \sin \bar{\alpha},$$

$$F_{12}^0(\bar{r}, \bar{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{12} d\theta = -\frac{3}{2} a\bar{r}^2 + \frac{3}{2} c(2h - \bar{r}^2) - \frac{1}{2} (\cos(2\bar{\alpha}) + 2)(bh - b\bar{r}^2).$$

Daí, as equações da média são dadas por:

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}} = \varepsilon \left[ -\frac{1}{2} b\bar{r}(2h - \bar{r}^2) \cos \bar{\alpha} \sin \bar{\alpha} \right], \\ \dot{\bar{\alpha}} = \varepsilon \left[ -\frac{3}{2} a\bar{r}^2 + \frac{3}{2} c(2h - \bar{r}^2) - \frac{1}{2} (\cos(2\bar{\alpha}) + 2)(bh - b\bar{r}^2) \right]. \end{cases} \quad (4.11)$$

Vamos fazer uma mudança de variáveis para encontrar os pontos críticos desse sistema. Considere:

$$\begin{cases} u(\bar{\alpha}) = \sin(2\bar{\alpha}), \\ v(\bar{\alpha}) = \cos(2\bar{\alpha}). \end{cases}$$

Assim, (4.11) fica:

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}} = \varepsilon \left[ -\frac{1}{2} b\bar{r}(2h - \bar{r}^2) \frac{u(\bar{\alpha})}{2} \right], \\ \dot{\bar{\alpha}} = \varepsilon \left[ -\frac{3}{2} a\bar{r}^2 + \frac{3}{2} c(2h - \bar{r}^2) - \frac{1}{2} (v(\bar{\alpha}) + 2)(bh - b\bar{r}^2) \right]. \end{cases}$$

Os pontos críticos deste sistema são:

- (1)  $(\bar{r}_0, \bar{\alpha}_0)$  onde  $\bar{r}_0 = 0$  e  $\bar{\alpha}_0$  é o único tal que  $\begin{cases} u(\bar{\alpha}_0) = \frac{\sqrt{3(b-2c)(6c-b)}}{b}, \\ v(\bar{\alpha}_0) = \frac{6c-2b}{b}. \end{cases}$
- (2)  $(\bar{r}_1, \bar{\alpha}_1)$  onde  $\bar{r}_1 = 0$  e  $\bar{\alpha}_1$  é o único tal que  $\begin{cases} u(\bar{\alpha}_1) = -\frac{\sqrt{3(b-2c)(6c-b)}}{b}, \\ v(\bar{\alpha}_1) = \frac{6c-2b}{b}. \end{cases}$
- (3)  $(\bar{r}_2, \bar{\alpha}_2)$  onde  $\bar{r}_2 = \sqrt{\frac{(6c-b)h}{3c-b+3a}}$  e  $\bar{\alpha}_2$  é o único tal que  $\begin{cases} u(\bar{\alpha}_2) = 0, \\ v(\bar{\alpha}_2) = -1. \end{cases}$
- (4)  $(\bar{r}_3, \bar{\alpha}_3)$  onde  $\bar{r}_3 = -\sqrt{\frac{(6c-b)h}{3c-b+3a}}$  e  $\bar{\alpha}_3$  é o único tal que  $\begin{cases} u(\bar{\alpha}_3) = 0, \\ v(\bar{\alpha}_3) = -1. \end{cases}$
- (5)  $(\bar{r}_4, \bar{\alpha}_4)$  onde  $\bar{r}_4 = \sqrt{\frac{(2c-b)h}{c-b+a}}$  e  $\bar{\alpha}_4$  é o único tal que  $\begin{cases} u(\bar{\alpha}_4) = 0, \\ v(\bar{\alpha}_4) = 1. \end{cases}$
- (6)  $(\bar{r}_5, \bar{\alpha}_5)$  onde  $\bar{r}_5 = -\sqrt{\frac{(2c-b)h}{c-b+a}}$  e  $\bar{\alpha}_5$  é o único tal que  $\begin{cases} u(\bar{\alpha}_5) = 0, \\ v(\bar{\alpha}_5) = 1. \end{cases}$
- (7)  $(\bar{r}_6, \bar{\alpha}_6)$  onde  $\bar{r}_6 = -\sqrt{2h}$  e  $\bar{\alpha}_6$  é o único tal que  $\begin{cases} u(\bar{\alpha}_6) = \frac{\sqrt{3(6a-b)(b-2a)}}{b}, \\ v(\bar{\alpha}_6) = \frac{6a-2b}{b}. \end{cases}$
- (8)  $(\bar{r}_7, \bar{\alpha}_7)$  onde  $\bar{r}_7 = \sqrt{2h}$  e  $\bar{\alpha}_7$  é o único tal que  $\begin{cases} u(\bar{\alpha}_7) = \frac{\sqrt{3(6a-b)(b-2a)}}{b}, \\ v(\bar{\alpha}_7) = \frac{6a-2b}{b}. \end{cases}$
- (9)  $(\bar{r}_8, \bar{\alpha}_8)$  onde  $\bar{r}_8 = -\sqrt{2h}$  e  $\bar{\alpha}_8$  é o único tal que  $\begin{cases} u(\bar{\alpha}_8) = -\frac{\sqrt{3(6a-b)(b-2a)}}{b}, \\ v(\bar{\alpha}_8) = \frac{6a-2b}{b}. \end{cases}$
- (10)  $(\bar{r}_9, \bar{\alpha}_9)$  onde  $\bar{r}_9 = \sqrt{2h}$  e  $\bar{\alpha}_9$  é o único tal que  $\begin{cases} u(\bar{\alpha}_9) = -\frac{\sqrt{3(6a-b)(b-2a)}}{b}, \\ v(\bar{\alpha}_9) = \frac{6a-2b}{b}. \end{cases}$

Não estamos interessados nos casos em que  $\bar{r} \leq 0$  e  $\bar{\rho} = 0$ , isto é,  $\bar{r} = \sqrt{2h}$ . Restam os pontos críticos:

- (i)  $(\bar{r}_2, \bar{\alpha}_2)$  onde  $\bar{r}_2 = \sqrt{\frac{(6c-b)h}{3c-b+3a}}$  e  $\bar{\alpha}_2$  é o único tal que  $\begin{cases} u(\bar{\alpha}_2) = 0, \\ v(\bar{\alpha}_2) = -1. \end{cases}$

Neste caso,

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{\pi}{2}.$$

- (ii)  $(\bar{r}_4, \bar{\alpha}_4)$  onde  $\bar{r}_4 = \sqrt{\frac{(2c-b)h}{c-b+a}}$  e  $\bar{\alpha}_4$  é o único tal que  $\begin{cases} u(\bar{\alpha}_4) = 0, \\ v(\bar{\alpha}_4) = 1. \end{cases}$

Neste caso,

$$\bar{\alpha}_4 = 0.$$

A matriz jacobiana da  $F^0$  é dada por:

$$J(F^0(\bar{r}, \bar{\alpha})) = \begin{pmatrix} \frac{\cos \bar{\alpha} \sin \bar{\alpha}}{4} b(6\bar{r}^2 - 4h) & (\cos^2 \bar{\alpha} - \sin^2 \bar{\alpha}) b(\bar{r}^3 + 2h\bar{r}) \\ -(3c - (2 + \cos(2\bar{\alpha}))b + 3a)\bar{r} & \sin(2\bar{\alpha})h(h - \bar{r}^2). \end{pmatrix}$$

Daí,

(a)

$$\det(J(F^0(\bar{r}_2, \bar{\alpha}_2))) = \frac{(b-6a)b(b-6c)h^2}{2(3c-b+3a)}.$$

Portanto, segue do Teorema 2.3.1 que quando

$$\begin{cases} (6a-b), (6c-b), (3a-b+3c) > 0, & \text{se } b < 0 \\ (6a-b), (6c-b), (3a-b+3c) < 0, & \text{se } b > 0 \end{cases}$$

existe

$$\gamma_\varepsilon = \{(\bar{r}(\theta, \varepsilon), \bar{\alpha}(\theta, \varepsilon))\}$$

solução  $2\pi$ -periódica de (4.10) tal que

$$\gamma_\varepsilon \longrightarrow (\bar{r}_2, \bar{\alpha}_2)$$

quando  $\varepsilon \longrightarrow 0$ . Logo,

$$(\bar{r}(\theta, \varepsilon), \bar{\rho}(\theta, \varepsilon), \bar{\alpha}(\theta, \varepsilon))$$

onde  $\bar{\rho}(\theta, \varepsilon) =: \tilde{\rho}(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\alpha}) = \sqrt{2h - \bar{r}^2(\theta, \varepsilon)} + O(\varepsilon)$  é solução  $2\pi$ -periódica de (4.6), por (4.8), tal que

$$(\bar{r}(\theta, \varepsilon), \bar{\rho}(\theta, \varepsilon), \bar{\alpha}(\theta, \varepsilon)) \rightarrow (\bar{r}_2, \sqrt{2h - \bar{r}_2^2}, \bar{\alpha}_2)$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Logo, pelo Teorema 1.2.27 (da Redução), segue que o sistema (4.5) tem uma solução

$$(r(t, \varepsilon), \rho(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon), \alpha(t, \varepsilon)) \tag{4.12}$$

tal que

$$r(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = r(t, \varepsilon),$$

$$\rho(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = \rho(t, \varepsilon),$$

$$\theta(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = \theta(t, \varepsilon) + 2\pi,$$

$$\alpha(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = \alpha(t, \varepsilon).$$

Como (4.5) veio de (4.4), segue que:

$$\begin{aligned}
q_1(t + T(\varepsilon), \varepsilon) &= r(t + T(\varepsilon), \varepsilon) \cos \theta(t + T(\varepsilon), \varepsilon) \\
&= r(t, \varepsilon) \cos(\theta(t, \varepsilon) + 2\pi) \\
&= r(t, \varepsilon) \cos(\theta(t, \varepsilon)) = q_1(t, \varepsilon), \\
p_1(t + T(\varepsilon), \varepsilon) &= r(t + T(\varepsilon), \varepsilon) \sin \theta(t + T(\varepsilon), \varepsilon) \\
&= r(t, \varepsilon) \sin(\theta(t, \varepsilon) + 2\pi) \\
&= r(t, \varepsilon) \sin(\theta(t, \varepsilon)) = p_1(t, \varepsilon), \\
q_2(t + T(\varepsilon), \varepsilon) &= \rho(t + T(\varepsilon), \varepsilon) \cos(\theta(t + T(\varepsilon), \varepsilon) + \alpha(t + T(\varepsilon), \varepsilon)) \\
&= \rho(t, \varepsilon) \cos(\theta(t, \varepsilon) + \alpha(t, \varepsilon) + 2\pi) \\
&= \rho(t, \varepsilon) \cos(\theta(t, \varepsilon) + \alpha(t, \varepsilon)) = q_2(t, \varepsilon), \\
p_2(t + T(\varepsilon), \varepsilon) &= \rho(t + T(\varepsilon), \varepsilon) \sin(\theta(t + T(\varepsilon), \varepsilon) + \alpha(t + T(\varepsilon), \varepsilon)) \\
&= \rho(t, \varepsilon) \sin(\theta(t, \varepsilon) + \alpha(t, \varepsilon) + 2\pi) \\
&= \rho(t, \varepsilon) \sin(\theta(t, \varepsilon) + \alpha(t, \varepsilon)) = p_2(t, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Portanto, a solução

$$(q_1(t, \varepsilon), p_1(t, \varepsilon), q_2(t, \varepsilon), p_2(t, \varepsilon)) \quad (4.13)$$

de (4.3) é  $T(\varepsilon)$ -periódica  $t$ . Segue do Teorema 1.2.27 (da Redução) e da fórmula de Taylor que  $T(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$ .

Vamos encontrar os autovalores de  $J(F^0(\overline{r_2}, \overline{\alpha_2}))$ .

$$p(\lambda) = -\frac{((6b^2 - 36ab)c - b^3 + 6ab^2)h^2 + \lambda^2(-6c + 2b - 6a)}{2(3c - b + 3a)}.$$

Assim,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{\frac{(b - 6a)b(6c - b)h^2}{2(3c - b + 3a)}}, \\ \lambda_2 = \sqrt{\frac{(b - 6a)b(6c - b)h^2}{2(3c - b + 3a)}}. \end{cases}$$

Segue do Teorema 2.3.2 que a solução (4.13) é instável.

Note que:

$$r(t, 0) =: \overline{r_2} = \sqrt{\frac{(6c - b)h}{3c - b + 3a}} \Rightarrow \rho(t, 0) =: \sqrt{2h - \overline{r_2}^2} = \sqrt{\frac{(6a - b)h}{3c - b + 3a}}.$$

(b)

$$\det(J(F^0(\overline{r_4}, \overline{\alpha_4}))) = \frac{3b(b - 2a)(2c - b)h^2}{2(c - b + a)}.$$

Portanto, segue do Teorema 2.3.1 que quando

$$\begin{cases} (2a - b), (2c - b), (a - b + c) < 0, & \text{se } b < 0 \\ (2a - b), (2c - b), (a - b + c) > 0, & \text{se } b > 0 \end{cases}$$

existe

$$\delta_\varepsilon = \{(\bar{r}(\theta, \varepsilon), \bar{\alpha}(\theta, \varepsilon))\}$$

solução  $2\pi$ -periódica de (4.10) tal que

$$\delta_\varepsilon \longrightarrow (\bar{r}_4, \bar{\alpha}_4)$$

quando  $\varepsilon \longrightarrow 0$ . Logo,

$$(\bar{r}(\theta, \varepsilon), \bar{\rho}(\theta, \varepsilon), \bar{\alpha}(\theta, \varepsilon))$$

onde  $\bar{\rho}(\theta, \varepsilon) =: \tilde{\rho}(\varepsilon, \theta, \bar{r}, \bar{\alpha}) = \sqrt{2h - \bar{r}^2(\theta, \varepsilon)} + O(\varepsilon)$  é solução  $2\pi$ -periódica de (4.6), por (4.8), tal que

$$(\bar{r}(\theta, \varepsilon), \bar{\rho}(\theta, \varepsilon), \bar{\alpha}(\theta, \varepsilon)) \rightarrow (\bar{r}_4, \sqrt{2h - \bar{r}_4^2}, \bar{\alpha}_4)$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Logo, pelo Teorema 1.2.27 (da Redução), segue que o sistema (4.5) tem uma solução

$$(r(t, \varepsilon), \rho(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon), \alpha(t, \varepsilon)) \quad (4.14)$$

tal que

$$r(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = r(t, \varepsilon),$$

$$\rho(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = \rho(t, \varepsilon),$$

$$\theta(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = \theta(t, \varepsilon) + 2\pi,$$

$$\alpha(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = \alpha(t, \varepsilon).$$

Pelo mesmo argumento usado no item (a), segue que a solução

$$(q_1(t, \varepsilon), p_1(t, \varepsilon), q_2(t, \varepsilon), p_2(t, \varepsilon)) \quad (4.15)$$

de (4.3) é  $T(\varepsilon)$ -periódica  $t$ . Segue do Teorema 1.2.27 (da Redução) e da fórmula de Taylor que  $T(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$ .

Vamos encontrar os autovalores de  $J(F^0(\bar{r}_4, \bar{\alpha}_4))$ .

$$p(\lambda) = \frac{((6b^2 - 12ab)c - 3b^3 + 6ab^2)h^2 + \lambda^2(2c - 2b + 2a)}{2(c - b + a)}.$$

Assim,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{\frac{-3b(b - 2a)(2c - b)h^2}{2(c - b + a)}}, \\ \lambda_2 = \sqrt{\frac{-3b(b - 2a)(2c - b)h^2}{2(c - b + a)}}. \end{cases}$$

Segue do Teorema 2.3.2 que a solução (4.15) é instável. Note que:

$$r(t, 0) =: \bar{r}_4 = \sqrt{\frac{(2c - b)h}{c - b + a}} \Rightarrow \rho(t, 0) =: \sqrt{2h - \bar{r}_4^2} = \sqrt{\frac{(2a - b)h}{c - b + a}}.$$

■

### 4.3 Caso 2: $r = 0$

Agora, vamos analisar o caso em que:

$$\begin{cases} q_1(0, \varepsilon)^2 + p_1(0, \varepsilon)^2 = 0, \\ q_2(0, \varepsilon)^2 + p_2(0, \varepsilon)^2 \neq 0. \end{cases}$$

Note que:

$$q_1(0, \varepsilon)^2 + p_1(0, \varepsilon)^2 = 0 \Rightarrow q_1(0, \varepsilon) = 0 \text{ e } p_1(0, \varepsilon) = 0.$$

Assim, da unicidade de soluções do p.v.i. segue que  $q_1(t, \varepsilon) = 0$  e  $p_1(t, \varepsilon) = 0$ .

Logo, podemos reduzir (4.3) ao sistema:

$$\begin{cases} \dot{q}_2 = p_2, \\ \dot{p}_2 = -q_2 - \varepsilon 4c q_2^3. \end{cases} \quad (4.16)$$

**Proposição 4.3.1** *Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno o sistema perturbado (4.16) tem uma solução periódica na superfície de energia em  $H = h > 0$ , como se segue:*

(a) *Se  $c > 0$  em (4.16) então*

$$\begin{cases} q_2(t, \varepsilon) = C \operatorname{cn}(Tt, k), \\ p_2(t, \varepsilon) = -CT \operatorname{dn}(Tt, k) \operatorname{sn}(Tt, k) \end{cases}$$

*com  $q_2(0, \varepsilon) = C$  e  $p_2(0, \varepsilon) = 0$  é solução  $T_1(\varepsilon)$ -periódica do sistema (4.16), onde:*

$$C = \pm \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon c}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 16\varepsilon c h}},$$

$$k = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 16\varepsilon c h}}{2 + 8\varepsilon c(-1 + \sqrt{1 + 16\varepsilon c h})}},$$

$$T = \sqrt[4]{1 + 16\varepsilon c h},$$

$$T_1(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon).$$

(b) *Se  $c < 0$  em (4.16) então*

$$\begin{cases} q_2(t, \varepsilon) = \frac{C}{T} \operatorname{sn}(Tt, k), \\ p_2(t, \varepsilon) = C \operatorname{cn}(Tt, k) \operatorname{dn}(Tt, k) \end{cases}$$

com  $q_2(0, \varepsilon) = 0$  e  $p_2(0, \varepsilon) = C$  é solução  $T_1(\varepsilon)$ -periódica do sistema (4.16), onde:

$$C = \pm\sqrt{2h},$$

$$k = \frac{1 - \sqrt{1 + 16\varepsilon ch}}{\sqrt{-16\varepsilon ch}},$$

$$T = \sqrt{\frac{-8\varepsilon ch}{1 - \sqrt{1 + 16\varepsilon ch}}},$$

$$T_1(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon).$$

### Demonstração:

(a) Segue da Proposição 1.2.37 item (b) e da Observação 1.2.39 que:

$$\begin{cases} q_2(t, \varepsilon) = C \operatorname{cn}(Tt, k), \\ p_2(t, \varepsilon) = -CT \operatorname{dn}(Tt, k) \operatorname{sn}(Tt, k) \end{cases}$$

com  $q_2(0, \varepsilon) = C$  e  $p_2(0, \varepsilon) = 0$  é solução  $T_1(\varepsilon)$ -periódica do sistema (4.16) com  $T_1(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$ . Fazendo:

$$\begin{cases} q_1(0, \varepsilon) = 0, \\ p_1(0, \varepsilon) = 0, \\ q_2(0, \varepsilon) = C, \\ p_2(0, \varepsilon) = 0 \end{cases}$$

em (4.1) e pelo Lema 4.1.1, obtemos:

$$h = \frac{1}{2}C^2 + \varepsilon cC^4. \quad (4.17)$$

Fazendo  $x = C^2$  ficamos com a equação:

$$\varepsilon cx^2 + \frac{1}{2}x - h = 0.$$

Assim,

$$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\varepsilon ch,$$

$$x = -\frac{1}{4\varepsilon c} \pm \frac{1}{4\varepsilon c} \sqrt{1 + 16\varepsilon ch}.$$

Como  $c > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $h > 0$  segue que:

$$-\frac{1}{4\varepsilon c} - \frac{1}{4\varepsilon c} \sqrt{1 + 16\varepsilon ch} < 0.$$

Portanto,

$$x = -\frac{1}{4\varepsilon c} + \frac{1}{4\varepsilon c}\sqrt{1 + 16\varepsilon ch}.$$

Logo,

$$C = \pm \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon c}}\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 16\varepsilon ch}}.$$

Do item (b) da Proposição 1.2.37, obtemos:

$$k = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 16\varepsilon ch}}{2 + 8\varepsilon c(-1 + \sqrt{1 + 16\varepsilon ch})}},$$

$$T = \sqrt[4]{1 + 16\varepsilon ch}.$$

(b) Segue da Proposição 1.2.37 item (a) e da Observação 1.2.39 que:

$$\begin{cases} q_2(t, \varepsilon) = \frac{C}{T} \operatorname{sn}(Tt, k), \\ p_2(t, \varepsilon) = C \operatorname{cn}(Tt, k) \operatorname{dn}(Tt, k) \end{cases}$$

com  $q_2(0, \varepsilon) = 0$  e  $p_2(0, \varepsilon) = C$  é solução  $T_1(\varepsilon)$ -periódica do sistema (4.16) com  $T_1(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$ . Fazendo:

$$\begin{cases} q_1(0, \varepsilon) = 0, \\ p_1(0, \varepsilon) = 0, \\ q_2(0, \varepsilon) = 0, \\ p_2(0, \varepsilon) = C \end{cases}$$

em (4.1) e pelo Lema 4.1.1, obtemos:

$$h = \frac{1}{2}C^2 \Rightarrow C = \pm\sqrt{2h}. \quad (4.18)$$

Do item (a) da Proposição 1.2.37, obtemos:

$$k = \frac{1 - \sqrt{1 + 16\varepsilon ch}}{\sqrt{-16\varepsilon ch}},$$

$$T = \sqrt{\frac{-8\varepsilon ch}{1 - \sqrt{1 + 16\varepsilon ch}}}.$$

■

## 4.4 Caso 3: $\rho = 0$

Agora, vamos analisar o caso em que:

$$\begin{cases} q_1(0, \varepsilon)^2 + p_1(0, \varepsilon)^2 \neq 0, \\ q_2(0, \varepsilon)^2 + p_2(0, \varepsilon)^2 = 0. \end{cases}$$

Note que:

$$q_2(0, \varepsilon)^2 + p_2(0, \varepsilon)^2 = 0 \Rightarrow q_2(0, \varepsilon) = 0 \text{ e } p_2(0, \varepsilon) = 0.$$

Assim, da unicidade de soluções do p.v.i. segue que  $q_2(t, \varepsilon) = 0$  e  $p_2(t, \varepsilon) = 0$ .

Logo, podemos reduzir (4.3) ao sistema:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = p_1, \\ \dot{p}_1 = -q_1 - \varepsilon 4a q_1^3. \end{cases} \quad (4.19)$$

**Proposição 4.4.1** *Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno o sistema perturbado (4.19) tem uma solução periódica na superfície de energia em  $H = h > 0$ , como se segue:*

(a) *Se  $a > 0$  em (4.19) então*

$$\begin{cases} q_1(t, \varepsilon) = C \operatorname{cn}(Tt, k), \\ p_1(t, \varepsilon) = -CT \operatorname{dn}(Tt, k) \operatorname{sn}(Tt, k) \end{cases}$$

*com  $q_1(0, \varepsilon) = C$  e  $p_1(0, \varepsilon) = 0$  é solução  $T_1(\varepsilon)$ -periódica do sistema (4.19), onde:*

$$C = \pm \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon a}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 16\varepsilon a h}},$$

$$k = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 16\varepsilon a h}}{2 + 8\varepsilon a(-1 + \sqrt{1 + 16\varepsilon a h})}},$$

$$T = \sqrt[4]{1 + 16\varepsilon a h},$$

$$T_1(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon).$$

(b) *Se  $a < 0$  em (4.19) então*

$$\begin{cases} q_1(t, \varepsilon) = \frac{C}{T} \operatorname{sn}(Tt, k), \\ p_1(t, \varepsilon) = C \operatorname{cn}(Tt, k) \operatorname{dn}(Tt, k) \end{cases}$$

com  $q_1(0, \varepsilon) = 0$  e  $p_1(0, \varepsilon) = C$  é solução  $T_1(\varepsilon)$ -periódica do sistema (4.19), onde:

$$C = \pm\sqrt{2h},$$

$$k = \frac{1 - \sqrt{1 + 16\varepsilon ah}}{\sqrt{-16\varepsilon ah}},$$

$$T = \sqrt{\frac{-8\varepsilon ah}{1 - \sqrt{1 + 16\varepsilon ah}}},$$

$$T_1(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon).$$

**Demonstração:** A demonstração é exatamente a mesma dada na Proposição 4.3.1.

■

## 4.5 Caso geral

**Teorema 4.5.1** Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno o sistema hamiltoniano perturbado (4.3) tem quatro soluções periódicas na superfície de energia em  $H = h > 0$ , como se segue:

- (a) A primeira órbita de (4.3) tem período  $T_1(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$  e  $r(t, 0) = \sqrt{\frac{(6c-b)h}{3a-b-3c}}$  e  $\rho(t, 0) = \sqrt{\frac{(6a-b)h}{3a-b-3c}}$  quando  $\begin{cases} (6a-b), (6c-b), (3a-b+3c) > 0, & \text{se } b < 0 \\ (6a-b), (6c-b), (3a-b+3c) < 0, & \text{se } b > 0. \end{cases}$
- (b) A segunda órbita de (4.3) tem período  $T_1(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$  e  $r(t, 0) = \sqrt{\frac{(2c-b)h}{a-b+c}}$  e  $\rho(t, 0) = \sqrt{\frac{(2a-b)h}{a-b+c}}$  quando  $\begin{cases} (2a-b), (2c-b), (a-b+c) < 0, & \text{se } b < 0 \\ (2a-b), (2c-b), (a-b+c) > 0, & \text{se } b > 0. \end{cases}$
- (c) A terceira órbita de (4.3) tem período  $T_1(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$  e temos que  $r(t, 0) = 0$  e  $\rho(t, 0) = \sqrt{2h}$ .
- (d) A quarta órbita de (4.3) tem período  $T_1(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$  e temos  $r(t, 0) = \sqrt{2h}$  e  $\rho(t, 0) = 0$ .

**Demonstração:** As demonstrações de (a) e (b) foram feitas no Caso 1.

(c) Segue do Caso 2 a existência da órbita periódica onde  $T_1(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$ .

Se  $c > 0$ , fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , por (4.17) temos que:

$$C \rightarrow \pm\sqrt{2h}$$

e ainda  $T \rightarrow 1$  e  $k \rightarrow 0^+$ .

Se  $c < 0$  por (4.18) temos que:

$$C = \pm\sqrt{2h}$$

e fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos:  $T \rightarrow 1$  e  $k \rightarrow 0^+$ .

Logo, da Proposição 1.2.32 temos:

$$\rho(t, \varepsilon) = \sqrt{q_2(t, \varepsilon)^2 + p_2(t, \varepsilon)^2} \rightarrow \sqrt{2h \cos^2 t + 2h \sin^2 t} = \sqrt{2h}.$$

Além disso,  $r(t, \varepsilon) = \sqrt{q_1(t, \varepsilon)^2 + p_1(t, \varepsilon)^2} \rightarrow 0$ .

(d) Segue do Caso 3 a existência da órbita periódica onde  $T_1(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$ .

Se  $a > 0$ , fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , temos que:

$$C \rightarrow \pm\sqrt{2h}$$

e ainda  $T \rightarrow 1$  e  $k \rightarrow 0^+$ .

Se  $a < 0$  temos que:

$$C = \pm\sqrt{2h}$$

e fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos:  $T \rightarrow 1$  e  $k \rightarrow 0^+$ .

Logo, da Proposição 1.2.32 temos:

$$r(t, \varepsilon) = \sqrt{q_1(t, \varepsilon)^2 + p_1(t, \varepsilon)^2} \rightarrow \sqrt{2h \cos^2 t + 2h \sin^2 t} = \sqrt{2h}.$$

Além disso,  $\rho(t, \varepsilon) = \sqrt{q_2(t, \varepsilon)^2 + p_2(t, \varepsilon)^2} \rightarrow 0$ .

■

**Observação 4.5.2** Quando  $r = 0$  ou  $\rho = 0$  essa versão do Teorema da Média não é aplicável ao sistema (4.3), pois as médias serão zero, e principalmente porque estas condições não nos permite voltar ao problema original nas variáveis  $p_1, p_2, q_1$  e  $q_2$ . O resultado original do Teorema 4.5.1 em [6] aplica a teoria para este caso e nesta dissertação contornamos essa situação com as Proposições 4.3.1 e 4.4.1.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Cronin, J. *Ordinary Differential Equations: Introduction and Qualitative Theory*. Third Edition. Chapman and Hall/CRC, 2008.
- [2] Davis, H. T. *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*. Dover, New York, 1962.
- [3] García, I. A.; Llibre, J.; Maza, S. *Periodic orbits and their stability in the Rössler prototype-4 system*. Physics Letters A 376 (2012) 2234 - 2237.
- [4] Hale, J. K. *Ordinary Differential Equations*. Krieger Publishing Company, 1980.
- [5] Hirsch, M. W.; Smale, S. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, Inc. 1974.
- [6] Lacomba, A. E.; Llibre, J. *Dynamics of a galactic Hamiltonian system*. J. Math. Phys. 53, 072901 (2012).
- [7] Lima, E. L. *Curso de Análise*, volume 2. 11 ed. Projeto Euclides. IMPA, 2014.
- [8] Lima, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. Ao livro Técnico S. A. e Ed. da Universidade de São Paulo, Rio de Janeiro, 1970.
- [9] Meyer, K. R. *Jacobi Elliptic Functions from a Dynamical System Point of View*. The American Mathematical Monthly, volume 108, No. 8 (2001) 729 - 737.
- [10] O'Malley Jr, R. E.; Williams, D. B. *Deriving amplitude equations for weakly-nonlinear oscillators and their generalizations*. Journal of Computational and Applied Mathematics 190 (2006) 3 - 21.
- [11] Pontryagin, L. S. *Ordinary Differential Equations*. Elsevier Inc, 1962.
- [12] Verhulst, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Second Edition. Springer, 1996.

- [13] Zhang, W.; Sang Ge, S. *A global Implicit Function Theorem without initial point and its applications to control of non-affine systems of high dimensions* J. Math. Anal. Appl. 313 (2006) 251 - 261.